

ББК 95.4; 22.251
Ч-823

Подписной индекс в каталоге ПРЕССА РОССИИ: 13109
ISSN: 2073-5499

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2013. № 4(18)

Учредитель: ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Учредители серии: Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров, Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Т. Н. Петрова, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин, А. А. Шуканов

Редакционная коллегия: Радаев Ю. Н. – ответственный редактор, Матченко Н. М. – зам. ответственного редактора, Тихонов С. В. – ответственный секретарь, Баженов В. Г., Буренин А. А., Георгиевский Д. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М., Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Кулиев В. Д., Ломакин Е. В., Максимова Л. А., Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Радченко В. П., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Чернышов А. Д., Хромов А. И., Шашкин А. И.

Международный совет: Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан), Тамуж В. П. (Латвия), Чигарев А. В. (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2013

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОТВЕРСТИЙ

Азербайджанский технический университет

Аннотация. Рассматривается задача механики разрушения о зарождении трещин в тонкой пластине, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий. Считается, что в процессе нагружения из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные зоны предразрушения вдоль оси абсцисс. Получено условие, определяющее критическое значение внешней нагрузки, при которой происходит появление трещины.

Ключевые слова: зона предразрушения, периодическая система криволинейных отверстий, функция конформного отображения.

УДК: 539.375

Введение. Исследование напряженно-деформированного состояния в пластине, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий, является одной из важных проблем плоской теории упругости и давно привлекает к себе внимание многих ученых (см. обзор в [4]). Пластины, ослабленные большим числом отверстий, используются в различных областях техники и строительства. Задача о трещинообразовании в пластинах является важной проблемой теории прочности [1]. В настоящее время актуальны периодические задачи механики разрушения [3], [6], [7]. Для практики исследование вопросов трещинообразования пластин, ослабленных периодической системой криволинейных отверстий, при растяжении имеет важное значение.

Постановка задачи. Процессы разрушения реальных материалов имеют сложный характер и протекают для различных материалов по-разному в зависимости от особенностей структуры материала, вида напряжения и других факторов. По мере нагружения металлической тонкой пластины силовой нагрузкой σ_y^∞ в ней будут возникать зоны предразрушения, которые моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала. Зоны предразрушения (прослойки перенапряженного материала) моделируются в виде узких слоев со связями между берегами. Используется модель В. М. Мирсалимова [11], согласно которой взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируются путем введения между берегами данной зоны связей имеющих, заданную диаграмму деформирования. В процессе деформации в некоторых точках пластины могут появляться зоны, в которых закон Гука не выполняется, т. е. в этих областях напряжения превосходят предел упругости. Так как указанные зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной упругой частью тонкой пластины, их можно мысленно удалить, заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Как показывает опыт, на ранних стадиях развития области предразрушения формируются узкие слои, занимающие незначительный объем тела по

сравнению с его упругой частью [2], [5], [8], [9], [14], [15]. Зоны предразрушения ориентированы в направлении максимальных растягивающих напряжений (рис. 1). Для моделирования взаимодействия берегов зоны предразрушения полагаем, что в этих зонах между берегами имеются связи, которые сдерживают раскрытие берегов зоны предразрушения. Согласно [11] в зоне предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении.

Под действием растягивающей нагрузки в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, возникают усилия, имеющие из-за симметрии задачи только нормальную составляющую $\sigma_y = \sigma_s$ (σ_s – предел текучести материала пластины на растяжение). Следовательно, к берегам зоны предразрушения приложены только нормальные сжимающие усилия σ_s . Размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен при решении задачи.

Граничные условия задачи имеют вид на контуре отверстия L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0$$

и на берегах зон предразрушения

$$\sigma_y = \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Для нахождения значения внешней растягивающей нагрузки, при котором происходит зарождение трещины, постановку задачи дополним условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения:

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \delta_{cr},$$

где δ_{cr} – характеристика сопротивления материала пластины трещинообразованию; $(v^+ - v^-)$ – раскрытие берегов зоны предразрушения.

Это дополнительное условие позволяет найти параметры пластины, при которых в ней появляется трещина.

Пусть имеется упругая изотропная пластина, ослабленная периодической системой одинаковых криволинейных отверстий (рис. 1 а). Полагается, что контуры отверстий гладкие и имеют форму, отличную от окружности. Обозначим эту область через D_z . Начало координат поместим в центре тяжести одного из отверстий, которое назовем основным. Границу этого отверстия обозначим через L_0 . Центры криволинейных отверстий с границей L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) лежат на одной прямой и находятся в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2.$$

Для упрощения задачи будем предполагать, что контуры L_m имеют две оси симметрии, одна из которых совпадает с осью абсцисс. Такие отверстия получают наибольшее применение в инженерной практике. К ним, в частности, относятся отверстия, имеющие форму эллипсов, овалов, прямоугольников, ромбов и т. п.

Пусть из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные зоны предразрушения вдоль оси абсцисс (рис. 1 а). Контуры криволинейных отверстий свободны от внешних нагрузок. Пусть в пластине имеют место средние напряжения $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_y^\infty$, $\tau_{xy} = 0$ (растяжение на бесконечности). Материал пластины будем считать упруго-идеальнопластическим, подчиняющимся условию пластичности Треска – Сен-Венана.

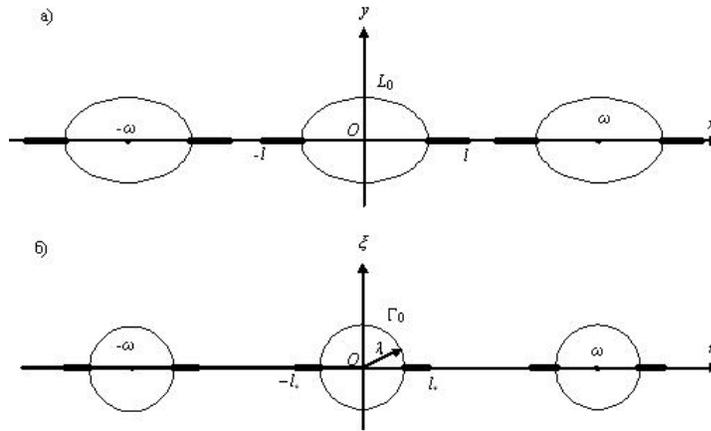


Рис. 1. Периодическая система отверстий с поверхностными зонами предразрушения а) в физической и б) параметрической плоскостях

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D_z , занятой материалом среды, напряжения являются периодическими функциями с периодом ω . На основании формул Колосова – Мусхелишвили [13] и граничных условий на контурах отверстий и берегах зон предразрушения с концевыми зонами задача сводится к определению двух аналитических в области D_z функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий:

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\alpha} = 0, \quad (1)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t) = \sigma_s, \quad (2)$$

где $z \in L_m$; α – угол, составляемый нормалью к контуру отверстия с осью x ; t – аффикс точек берегов зоны предразрушения.

Решение краевой задачи. Для решения граничной задачи (1)–(2) с помощью конформного преобразования $z = \omega(\zeta)$ переходим на параметрическую плоскость ζ . Аналитическая функция $z = \omega(\zeta)$ осуществляет конформное отображение физической плоскости D_z на область D_ζ в плоскости переменной ζ , являющейся внешностью окружностей Γ_m радиуса λ с центрами в точках $P_m = m\omega$ с взаимно однозначным соответствием бесконечно удаленных точек, а также соответствующих участков действительных и мнимых осей.

В случае периодической системы криволинейных отверстий, границы которых являются кусочно-гладкими кривыми, имеющими две оси симметрии, общее представление аналитической функции $z = \omega(\zeta)$, осуществляющее конформное отображение области D_z на область D_ζ в плоскости переменной $\zeta = \xi + i\eta$, являющуюся внешностью окружностей Γ_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) радиуса λ с центрами в точках $P_m = m\omega$, имеет [12] следующий вид:

$$\omega(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k-1)}(\zeta)}{(2k+1)!}, \quad (3)$$

где $\rho(\zeta) = \left(\frac{\pi\zeta}{\omega}\right)^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi\zeta}{\omega}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$.

На основе равенства [13]

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\lambda^2 \overline{\omega'(\zeta)}}$$

и принятых обозначений $\Phi_*(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$ $\Psi_*(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$ краевые условия (1)–(2) принимают вид

$$\left[\Phi_*(\zeta) + \overline{\Phi_*(\zeta)} \right] \overline{\omega'(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\lambda^2} \left[\overline{\omega(\zeta)} \Phi'_*(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_*(\zeta) \right] = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_*(\xi) + \overline{\Phi_*(\xi)} + \frac{\overline{\omega(\xi)}}{\omega'(\xi)} \Phi'_*(\xi) + \Psi_*(\xi) = \sigma_s, \quad (5)$$

где $\zeta = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Решение задачи на параметрической плоскости (для области D_ζ) [9] ищем в виде:

$$\Phi_*(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + \Phi_1(\zeta), \quad \Psi_*(\zeta) = \Psi_0(\zeta) + \Psi_1(\zeta), \quad (6)$$

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{1}{4} \sigma_y^\infty + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!}, \quad (7)$$

$$\Psi_0(\zeta) = \frac{1}{2} \sigma_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(\zeta)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - \zeta) dt, \quad (8)$$

$$\Psi_1(\zeta) = -\frac{\pi \zeta}{2\omega^2} \int_L g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t - \zeta) dt,$$

где $S(\zeta) = \sum'_m \left[\frac{P_m}{(\zeta - P_m)^2} - \frac{2\zeta}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right]$.

Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$, интегралы в (9) берутся по линии $L = [-l_*, -\lambda] \cup [\lambda, l_*]$, $g(t)$ – искомая функция.

$$g(t) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{\partial}{\partial t} [v^+(t, 0) - v^-(t, 0)], \quad (9)$$

где μ – модуль сдвига; $\kappa = (3 - \nu)/(1 - \nu)$ – постоянная Мусхелишвили; ν – коэффициент Пуассона материала. Параметр l_* определяется из уравнения

$$l = \omega(l_*). \quad (10)$$

Комплексные потенциалы в (7)–(9) определяют класс задач с периодическим распределением напряжений. Из условия равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области D_ζ , находим

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \lambda^2 \beta_2.$$

Система граничных условий (5) на Γ_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) в силу выполненных условий периодичности заменяется одним функциональным уравнением, например на контуре окружности Γ_0 , а система краевых условий (6) – краевым условием на линии L .

Неизвестная функция $g(\xi)$ и постоянные α_{2k} , β_{2k} должны быть определены из краевых условий на берегах зон предразрушения и контуров отверстий. Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} функций $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$ представим граничное условие (5) в виде

$$\left[\Phi_0(\zeta) + \overline{\Phi_0(\zeta)} \right] \overline{\omega'(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\lambda^2} \left[\overline{\omega(\zeta)} \Phi_0'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_0(\zeta) \right] = f_1(\zeta) + if_2(\zeta), \quad (11)$$

$$f_1(\zeta) + if_2(\zeta) = - \left[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)} \right] \overline{\omega'(\zeta)} + \frac{\zeta^2}{\lambda^2} \left[\overline{\omega(\zeta)} \Phi_1'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_1(\zeta) \right]. \quad (12)$$

Относительно функции $f_1(\zeta) + if_2(\zeta)$ будем считать, что она разлагается на $|\zeta| = \lambda$ в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет следующий вид:

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^* e^{2ik\theta}, \quad \text{Im} A_{2k}^* = 0, \quad (13)$$

$$A_{2k}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-2ik\theta} d\theta. \quad (14)$$

Подставив в (15) выражение (13) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов найдем коэффициенты A_{2k}^* :

$$A_{2k}^* = -\frac{1}{2\omega} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt, \quad (15)$$

где $f_0(t) = 2\gamma(t)$, $f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2}\gamma^{(2)}(t)$, $\gamma(t) = \text{ctg} \frac{\pi}{\omega} t$,

$$f_{2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k=2,3,\dots),$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k=1,2,\dots).$$

Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} функций $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$ разложим эти функции и функцию $\omega(\zeta)$ в ряды Лорана в окрестности нулевой точки $\zeta = 0$:

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{1}{4} \sigma_y^\infty + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} \zeta^{2j}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\zeta) &= \frac{1}{2} \sigma_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} \zeta^{2j} - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2k+2) r_{j,k} \zeta^{2j}, \end{aligned}$$

$$\omega(\zeta) = \zeta - \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)\zeta^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k} \zeta^{2j+1}}{2j+1},$$

$$r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+1}}, \quad g_{j+k+1} = 2 \sum_m \frac{1}{m^{2j+2k+2}}.$$

Подставив в левую часть граничного условия (12) на контуре Γ_0 ($\xi = \lambda e^{i\theta}$) вместо $\Phi_0(\zeta)$, $\overline{\Phi_0(\zeta)}$, $\Phi_0'(\zeta)$, $\Psi_0(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ их разложения в ряды Лорана, а в правую часть вместо $f_1 + if_2$ – ряд Фурье (14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_{2k} , β_{2k} . Ниже приводятся уравнения второго приближения:

$$a_1 F + \frac{A_2}{2} F_1 + \frac{A_4}{2} F_2 + \frac{b_1 \lambda^2}{2} F_1 + \frac{b_2 \lambda^4}{2} F_2 - m - f = A_0^*,$$

$$b_1 \lambda^2 F + \frac{a_1 + b_2 \lambda^4}{2} F_1 + A_2 F_2 - m_1 - f_1 = A_2^*,$$

$$b_2\lambda^4 F + \frac{b_1\lambda^2}{2}F_1 + \frac{a_1}{2}F_2 - m_2 - f_2 = A_4^*, \quad (17)$$

$$A_2 F + \frac{a_4 + A_4}{2}F_1 + \frac{b_1\lambda^2}{2}F_4 - m_3 - f_3 = A_{-2}^*,$$

$$A_4 F + \frac{A_2}{2}F_1 + \frac{a_1}{2}F_2 - m_4 - f_4 = A_{-4}^*,$$

где $a_1 = 1 + A_2\lambda^2 r_{0,0} + A_4\lambda^4 r_{0,1}$,

$$b_1 = A_2\lambda^2 r_{1,0} + A_4\lambda^4 r_{1,1}, \quad b_2 = A_2\lambda^2 r_{2,0} + A_4\lambda^4 r_{2,1},$$

$$F = 2 \left[\frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4} + a_0 + a_2\lambda^2 r_{0,0} + a_4\lambda^4 r_{0,1} \right],$$

$$F_1 = 2(a_2 + a_2\lambda^2 r_{1,0} + a_4\lambda^6 r_{1,1}), \quad F_2 = 2(a_4 + a_4\lambda^8 r_{2,1} + a_2\lambda^6 r_{2,0}),$$

$$m = 2a_2 A_2 + \frac{3}{4}a_4 A_4 + \frac{2}{3}b_1\lambda^2(a_2\lambda^4 r_{1,0} + a_4\lambda^6 r_{1,1}) + \frac{4}{5}b_2\lambda^4(a_2\lambda^6 r_{2,0} + a_4\lambda^8 r_{2,1}),$$

$$m_1 = -2a_2 a_1 + 4a_4 A_2 + \frac{2}{5}b_2\lambda^4(a_2\lambda^4 r_{1,0} + a_4\lambda^6 r_{1,1}),$$

$$m_2 = -4a_2 a_1 - \frac{2}{3}a_2 b_2 \lambda^2,$$

$$m_3 = \frac{2}{3}a_2 A_4 + 2a_1(a_2\lambda^4 r_{1,0} + a_4\lambda^6 r_{1,1}) + \frac{4}{5}b_1\lambda^4(a_2\lambda^6 r_{2,0} + a_4\lambda^8 r_{2,1}),$$

$$m_4 = -2A_2(a_2\lambda^4 r_{1,0} + a_4\lambda^6 r_{1,1}) + 4a_1(a_2\lambda^6 r_{2,0} + a_4\lambda^8 r_{2,1}),$$

$$f = a_1\beta_2 + A_2\gamma_0 + A_4\gamma_1 + \beta_4 b_1 \lambda^2 + \beta_6 b_2 \lambda^4,$$

$$f_1 = a_1\beta_4 + A_4\gamma_0 + A_2\beta_2 + \beta_6 b_1 \lambda^6, \quad f_2 = a_1\beta_6 + A_2\beta_4 + A_4\beta_2,$$

$$f_3 = a_1\gamma_0 + A_2\gamma_1 + \beta_2 b_1 \lambda^2 + \beta_4 b_2 \lambda^4, \quad f_4 = a_1\gamma_0 + \gamma_0 b_1 \lambda^2 + \beta_2 b_2 \lambda^4,$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + \beta_2\lambda^2 r_{0,0} + \beta_4\lambda^4 r_{0,1} + \beta_6\lambda^6 r_{0,2} - 4a_2\lambda^2 r_{0,0} - 16a_4\lambda^4 r_{0,1},$$

$$\gamma_1 = \beta_2\lambda^2 r_{1,0} + \beta_4\lambda^6 r_{1,1} + \beta_6\lambda^8 r_{1,2} - 8a_2\lambda^4 r_{1,0} - 24a_4\lambda^6 r_{1,1}.$$

Вывод уравнений последующих приближений осуществляется единообразным способом. В третьем приближении количество этих уравнений составляет семь. Быстрая сходимость найденных систем уравнений в диапазоне $0 < \lambda \leq 0,8$ объясняется тем, что коэффициенты систем (18) содержат высокие степени параметра λ .

Полученная система уравнений не является замкнутой. Для замкнутости этой системы уравнений необходимо использовать граничное условие (6) на берегах зон предразрушения (на L).

Требуя, чтобы функции (7)–(9) удовлетворяли краевому условию на берегах линии L , после некоторых преобразований получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $g(\xi)$

$$\frac{1}{\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - \xi) dt + H(\xi) = \sigma_s. \quad (18)$$

Здесь $H(\xi) = \Phi_0(\xi) + \overline{\Phi_0(\xi)} + \frac{\overline{\omega(\xi)}}{\omega'(\xi)}\Phi_0'(\xi) + \Psi_0(\xi)$.

Алгебраическая система (18) совместно с сингулярным интегральным уравнением (19) является основными разрешающим уравнением задачи, позволяющим определить функцию $g(\xi)$ и коэффициенты α_{2k}, β_{2k} . Решая их с учетом ограниченности напряжений в вершинах зон предразрушения, найдем искомую функцию $g(\xi)$, коэффициенты α_{2k}, β_{2k} и определим размер зоны предразрушения.

Методика численного решения и анализ. Используя разложение

$$\frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t = \frac{1}{t} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}},$$

уравнение (19) можно привести к обычной форме

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{g(t) dt}{t - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_L g(t) K(t - \xi) dt + H(\xi) = \sigma_s, \quad (19)$$

где $K(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+2}}$.

Преобразуем интегральное уравнение (20) к виду более удобному для нахождения приближенного решения:

$$\frac{2}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 \frac{\xi_* g(\xi_*) d\xi_*}{\xi_*^2 - \xi_0^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 g(\xi_*) K_0(\xi_*, \xi_0) d\xi_* + H(\xi_0) = \sigma_s, \quad (20)$$

где $K_0(\xi_*, \xi_0) = K(\xi_* - \xi_0) + K_0(\xi_* + \xi_0)$, $\xi_* = \frac{t}{l_*}$, $\xi_0 = \frac{\xi}{l_*}$, $\lambda_1 = \frac{\lambda}{l_*}$.

Сделаем замену переменных:

$$\xi_*^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2}(\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2}(\eta + 1) + \lambda_1^2. \quad (21)$$

При этом интервал интегрирования $[\lambda_1, 1]$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, а преобразованное уравнение (21) принимает стандартный вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_*(\tau) d\tau}{\tau - \eta_*} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_*(\tau) B(\eta_*, \tau) d\tau + H_*(\eta_*) = \sigma_s, \quad (22)$$

где $g_*(\tau) = g(\xi_*)$, $H_*(\eta_*) = H(\xi_0)$.

$$B(\eta_*, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left(\frac{l_*}{2}\right)^{2j+2} u_0^j B_j,$$

$$B_j = 2j + 1 + \frac{(2j + 1)2j(2j - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{u}{u_0} + \dots + \left(\frac{u}{u_0}\right)^j.$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения использовался метод прямого решения сингулярных интегральных уравнений [9], [16]. Сингулярное интегральное уравнение (23), кроме особенности в ядре Коши, имеет в неподвижную особенность в точке выхода трещины на поверхность отверстия. В этом случае функция $g_*(\tau)$ в точках $\xi = \pm \lambda$ содержит особенность, отличную от корневой. Характер этой особенности может быть определен из анализа интегрального уравнения (23) [13]. В отличие от случая внутренней зоны предразрушения интеграл $\int_{\lambda}^{l_*} g(t) dt = C \neq 0$. Постоянная C выражается через раскрытие

зоны предразрушения на поверхности отверстия и должна быть определена после решения сингулярного интегрального уравнения.

В поставленной задаче следовало бы использовать метод решения интегрального уравнения, построенного на базе квадратурной формулы Гаусса – Якоби. Из-за громоздкости выражений для функций $B(\eta_*, \tau)$ и $H_*(\eta_*)$ определение особенности функции $g_*(\tau)$ в точках $x = \pm \lambda$ затруднительно. Кроме того, следует отметить, что некоторый выигрыш в сходимости по уточненному методу теряется из-за громоздкости формул для коэффициентов матрицы системы. В связи с этим использовали другой, более упрощенный способ численного решения интегральных уравнений типа (23), эффективность которого проверена на многочисленных задачах [10], [14], [16]. Так как в упругопластической пластине напряжения ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (23) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Представим решение в виде

$$g_*(\eta_*) = g_0(\eta_*) \sqrt{1 - \eta_*^2}, \quad (23)$$

где $g_0(\eta_*)$ – новая неизвестная ограниченная функция.

Используя квадратурные формулы, сингулярное интегральное уравнение (23) можно свести к конечной алгебраической системе $M+1$ уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left(\frac{1}{\tau_m - \eta_r} + B(\tau_m, \eta_r) \right) = \pi [\sigma_s - H_*(\eta_r)] \quad (r = 1, 2, \dots, M+1), \quad (24)$$

где $\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1}$ ($m = 1, 2, \dots, M$), $\eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)} \pi$ ($r = 1, 2, \dots, M+1$).

Полученная алгебраическая система $M+1$ уравнений (24) для определения неизвестных значений $g_0(\tau_1)$, $g_0(\tau_2)$, ..., $g_0(\tau_m)$ и l_0 удовлетворяет дополнительному условию, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций [13].

Объединенная алгебраическая система, состоящая из разрешающей системы задачи (18), (11), (24), является нелинейной из-за неизвестного размера зоны предразрушения. Чтобы избежать решения нелинейной системы уравнений, применяется обратный способ, т. е. размер зоны предразрушения считается заданным, а параметр нагружения σ_y^∞ определяется в процессе решения. Тогда алгебраическая система (11), (18), (24) оказывается линейной. Для численных расчетов полагалось $M = 30$, что отвечает разбиению на 30 чебышевских узлов соответственно. Расчеты были выполнены методом Гаусса с выбором главного элемента.

Для определения предельно-равновесного состояния тонкой пластины, при котором появляются трещины, используем критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения [14]. На основании полученного решения вычислим раскрытие $v(\eta, 0)$ на берегах зоны предразрушения

$$v(\eta, 0) = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \int_{-l_*}^{\eta} g(\eta) d\eta.$$

Раскрытие берегов зоны предразрушения при $\eta = -\lambda$ будет

$$v(-\lambda, 0) = -\frac{1 + \kappa}{2\mu} \int_{-l_*}^{-\lambda} g(\eta) d\eta.$$

Таким образом, условие, определяющее предельную растягивающую нагрузку σ_0^* , при которой происходит появление трещины, можно представить как

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_*}^{-\lambda} g(\eta) d\eta = \delta_c.$$

Используя замену переменных, заменяя интеграл суммой, получим

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi(l_*-\lambda)}{M} \sum_{m=1}^{M_1} g_0(\tau_m) = \delta_c, \quad (25)$$

где M_1 – число узловых точек в интервале $(-l_*, -\lambda)$.

Совместное решение объединенной алгебраической системы (17), (24), (25) дает возможность определить критическую величину растягивающей нагрузки и размер зоны предразрушения для состояния предельного равновесия, при котором происходит появление трещины в пластине.

Анализ решения конкретных задач. В качестве отверстий выбраны эллипсы с различными соотношениями полуосей, квадраты и ромбы с радиусами закругления углов. Такой выбор объясняется наибольшей вероятностью их применения в инженерной практике. Эллипсы брались с соотношением полуосей a/b , принимающим значения $3/2, 2, 5/2, 3$, и для каждого из этих случаев рассматривались различные значения полуоси a . Значение периода ω бралось равным двум. Большие оси эллипсов лежат на оси абсцисс. Отношения радиуса ρ закругления угла квадрата к длине его стороны принимались равными $0,05$ и $0,025$. Длины сторон при этом варьировались от $0,4$ до $0,8$. Стороны квадратов параллельны осям координат.

Пусть нам известна аналитическая функция $\omega_0(\zeta)$, конформно отображающая внешность круга Γ_0 радиуса λ ($\lambda < 1$) плоскости ζ на внешность некругового контура L_0 плоскости $z=x+iy$ с соответствием бесконечно удаленных точек $\omega_0(\infty) = \infty$. В настоящее время имеется большой каталог таких отображающих функций [17].

Требуется найти такие значения коэффициентов A_{2k} , которые будут наилучшим образом обеспечивать величинам $\omega(\theta_j)$ отображающей функции (4) значения $\omega_0(\theta_j)$. Таким образом, требуется найти наиболее вероятные значения неизвестных коэффициентов.

Согласно принципу наименьших квадратов наименее вероятными значениями параметров будут такие, при которых сумма квадратов отклонений

$$\varepsilon_i = \omega(\theta_j) - \omega_0(\theta_j) \quad (j = \overline{1, n})$$

будет наименьшей, т. е.

$$U = \sum_{j=1}^n [\omega(\theta_j) - \omega_0(\theta_j)]^2 \rightarrow \min.$$

Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем конечную линейную алгебраическую систему уравнений для определения коэффициентов A_{2k}

$$\frac{\partial U}{\partial A_{2k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Все вычисления проводились с двойной точностью. При этом сначала применялась программа для нахождения приближенного конформного отображения $\omega(\zeta)$ при заданных геометрических характеристиках отверстий. Полученные результаты подставлялись в другую программу для решения алгебраических систем (11), (18), (24) и (25) методом Гаусса с выбором главного элемента. В результате вычислений были найдены критические напряжения σ_y^∞ при одноосном растяжении пластины с периодической системой эллиптических, квадратных и ромбовидных отверстий, а также размеры зон предразрушения.

Закключение. Модель зоны предразрушения в состоянии пластического течения при постоянном напряжении позволяет провести анализ трещинообразования в тонкой пластине,

ослабленной периодической системой криволинейных отверстий с помощью деформационного критерия. Анализ трещинообразования в тонкой перфорированной пластине сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (11), (18), (24) и критерия появления трещины (25) при различных механических характеристиках материала, а также при геометрических параметрах пластины.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Болотин, В. В.* Механика зарождения трещин и начального развития усталостных трещин / В. В. Болотин // ФХММ. – 1986. – Т. 22. – № 1. – С. 18–23.
- [2] *Витвицкий, П. М.* Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения. Обзор / П. М. Витвицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–19.
- [3] *Гасанов, Ф. Ф.* Взаимодействие периодической системы ортотропных упругих включений и двух систем прямолинейных когезионных трещин в изотропной среде / Ф. Ф. Гасанов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2012. – № 3 (13). – С. 57–63.
- [4] *Григолоук, Э. И.* Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолоук, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 556 с.
- [6] *Искендеров, Р. А.* Однородный изгиб пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий и прямолинейными сквозными трещинами / Р. А. Искендеров // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 2. – С. 36–40.
- [7] *Искендеров, Р. А.* Зарождение трещины при поперечном изгибе изотропной пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий / Р. А. Искендеров // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 3. – С. 18–28.
- [8] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с.
- [9] *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [10] *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. – 124 с.
- [11] *Мирсалимов, В. М.* Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары / В. М. Мирсалимов // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – № 2. – С. 35–45.
- [12] *Мирсалимов, В. М.* Периодическая задача о развитии полостей в вязких средах / В. М. Мирсалимов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2011. – № 2. – С. 104–111.
- [13] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [14] *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1991. – 416 с.
- [15] *Rusinko, A.* Plasticity and Creep of Metals / A. Rusinko, K. Rusinko. – Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 436 с.
- [16] *Саврук, М. П.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – Киев : Наукова думка, 1989. – 248 с.
- [17] *Савин, Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1951. – 496 с.

Ахмедова Майя Вели гызы,

аспирант кафедры технической механики, Азербайджанский технический университет, г. Баку

e-mail: sopromat_v@mail.ru

M. V. Akhmedova

CRACKS NUCLEATION IN THIN PLATE, WEAKENED BY THE PERIODIC SYSTEM OF THE CURVILINEAR HOLES

Azerbaijan Technical University

Abstract. The fracture mechanics problem of cracks nucleation in thin plate weakened by a periodic system of curvilinear holes is considered. It is assumed that during loading along the x -axis symmetrical rectilinear prefracture zones are emanated from the contours of holes. The condition that determines the critical value of the external load at which the crack occurs was obtained.

Keywords: prefracture zones, periodic system of curvilinear holes, conformal mapping function.

REFERENCES

- [1] *Bolotin, V. V.* Mechanics of the initiation and initial development of fatigue cracks // Soviet materials science, 1986. – Vol. 22. – Issue 1. – P. 14–19
- [2] *Vitvitskii, P. M.* Plastic deformation in the vicinity of a crack and the criteria of fracture a review / P. M. Vitvitskii, V. V. Panasyuk, S. Ya. Yarema // Strength of Materials. – 1973. – Vol. 5. – Issue 2. – P. 135–151.
- [3] *Hasanov, F. F.* Interaction of periodic system of orthotropic elastic inclusions and two systems of rectilinear cohesive cracks in isotropic medium / F. F. Hasanov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Line : Mechanics of definable state. – 2012. – No. 3 (14). – P. 57–63.
- [4] *Grigolyuk, E. I.* Perforated plates and shells / E. I. Grigolyuk, L. A. Filshtinskii. – M. : Nauka, 1970. – 556 p.
- [5] *Ivlev, D. D.* Limiting condition of deformable bodies and rocks / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin, Y. N. Radaev, S. I. Senashov, E. I. Shemyakin. – M. : Fizmatlit, 2008. – 556 p.
- [6] *Isgandarov, R. A.* Pure bending of the plate weakened by the periodic system of circular holes and rectilinearly through cracks / R. A. Isgandarov // Structural mechanics of engineering constructions and buildings. – 2013. – No. 2. – P. 36–41.
- [7] *Iskenderov, R. A.* The crack nucleation in the isotropic plate, weakened by a periodical system of circular holes under transverse bending / R. A. Iskenderov // Structural mechanics of engineering constructions and buildings, – 2013. – No. 3. – P. 18–28.
- [8] *Ishlinskii, A. Yu.* The mathematical theory of plasticity / A. Yu. Ishlinskii, D. D. Ivlev. – M. : Fizmatlit, 2001. – 704 p.
- [9] *Mirsalimov, V. M.* Not-one dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [10] *Mirsalimov, V. M.* Fracture of elastic and elastic-plastic bodies with cracks / V. M. Mirsalimov. – Baku : Elm, 1984. – 124 p.
- [11] *Mirsalimov, V. M.* Periodic problem of cavity development in viscous media / V. M. Mirsalimov // Fluid Dynamics. – 2011. – Vol. 46. – Issue 2. – P. 262–269.
- [12] *Muskhelishvili, N. I.* Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1966. – 707 p.
- [13] *Panasyuk, V. V.* Mechanics of Quasibrittle Fracture of Materials / V. V. Panasyuk. – Kiev : Naukova Dumka, 1991. – 416 p.
- [14] *Rusinko, A.* Plasticity and Creep of Metals / A. Rusinko, K. Rusinko. – Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 436 p.
- [15] *Savruk, M. P.* Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks / M. P. Savruk. – Kiev : Naukova Dumka, 1981. – 248 p.

[16] *Savin, G. N.* Concentration of stresses about holes / G. N. Savin. – М. ; L. : Qostekhizdat, 1951. – 496 p.

Akhmedova, Maya Veli qizi

Post-Graduate Student of department of Mechanical Engineering, Azerbaijan Technical University, Baku

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ О ВЛИЯНИИ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА РАЗВИТИЕ КОГЕЗИОННЫХ ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Азербайджанский технический университет

Аннотация. Рассмотрена задача механики разрушения для составного тела (композита), ослабленного трещинами продольного сдвига. Предложена модель разрушения композитных материалов с периодической структурой, основанная на рассмотрении зоны процесса разрушения вблизи вершины трещины. Зона процесса разрушения представляется слоем конечной длины, содержащим материал с частично нарушенными связями между его отдельными структурными элементами (концевая зона), который рассматривается как часть трещины. Связи между берегами трещины в концевой зоне моделируются приложением вызванных их присутствием сил сцепления к поверхностям трещины. Анализ предельного равновесия когезионной трещины при продольном сдвиге выполняется на основе нелокального критерия силовым условием продвижения вершины трещины и деформационным условием продвижения края концевой зоны трещины.

Ключевые слова: изотропная среда, периодическая система круговых отверстий, жесткие включения, трещины со связями между берегами в концевых зонах, силы сцепления, продольный сдвиг.

УДК: 539.375

1. Введение. Перфорированные элементы конструкций и машин имеют широкое применение во многих отраслях современной техники, в связи с чем актуальна разработка методов расчета на прочность перфорированных элементов машин и конструкций. Интенсивное развитие энергетики, химической промышленности, других отраслей техники при широком использовании материалов, имеющих периодическую структуру, делает важным исследование вопросов разрушения композитных материалов с периодической структурой.

2. Постановка задачи. Рассматривается плоская задача теории упругости для изотропной среды с периодической системой круговых отверстий, заполненных абсолютно жесткими включениями, спаянными вдоль обвода, и ослабленной прямолинейными трещинами со связями между берегами в концевых зонах коллинеарных оси абсцисс (рис. 1). Пусть имеется изотропная среда, ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющих радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2.$$

Круговые отверстия среды заполнены абсолютно жесткими включениями, спаянными вдоль обвода. Изотропная среда ослаблена периодической системой прямолинейных когезионных трещин вдоль оси абсцисс. Берега трещины вне концевых зон свободны от внешних нагрузок. В плоскости имеет место антиплоская деформация $\tau_y = \tau_y^\infty$, $\tau_x = 0$ (продольный сдвиг на бесконечности). Требуется определить напряженное и деформированное состояние в

изотропной среде по граничным условиям, выражающим отсутствие упругих смещений вдоль обвода круговых отверстий и внешних нагрузок на берегах периодической системы трещин вне концевых зон.

С ростом внешней нагрузки τ_y^∞ на продолжении трещин будут возникать зоны предразрушения (концевые зоны). Используется модель трещины со связями между берегами в концевых зонах предразрушения [1]. Концевые зоны трещин моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале среды. В рассматриваемом случае, когда длина концевой зоны трещины не является малой по сравнению с длиной трещины, невозможно применять методы оценки сопротивления материала разрушению, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой зоной. Моделирование напряженного состояния в концевой зоне трещины следует проводить с учетом деформационных характеристик связей и применения двухпараметрического критерия разрушения, описывающего как развитие вершины трещины, так и изменение размера концевой зоны трещины при ее росте. Если процессы деформирования и разрушения в концевых зонах трещин включают несколько физических механизмов, как, например, в композиционных материалах, то эффективным является использование модели концевой зоны с сингулярностью в вершине трещины.

Моделирование концевых зон состоит в рассмотрении их как части трещин и в явном приложении к поверхности трещин в концевых зонах сил сцепления, сдерживающих их раскрытие. Размеры концевых зон трещин считаются соизмеримыми по сравнению с длиной трещин. Взаимодействие берегов концевых зон моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала.

При действии внешней нагрузки τ_y^∞ на составное тело в связях, соединяющих берега зон предразрушения (a_1, a) и (b, b_1) , возникают касательные усилия $q_y(x)$. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению.

Граничные условия задачи имеют вид:

$$w = 0 \quad \text{— на контурах круговых отверстий,} \quad (1)$$

$$\tau_y = 0 \quad \text{— на свободных берегах трещин,} \quad (2)$$

$$\tau_y = q_y(x) \quad \text{— на берегах концевых зон трещин.}$$

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим сдвиг берегов зон предразрушения (концевые зоны) и усилия в связях. Без потери общности это соотношение представим в виде

$$w^+(x, 0) - w^-(x, 0) = C(x, q_y(x))q_y(x), \quad (3)$$

где функция $C(x, q_y(x))$ представляет собой эффективную податливость связей; $(w^+ - w^-)$ — сдвиг берегов концевых зон трещин.

Выражая напряжения и смещения через аналитическую функцию [4]

$$\tau_x - i\tau_y = f'(z), \quad w = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z), \quad z = x + iy,$$

(где μ — постоянная материала среды; $i^2 = -1$), краевые условия рассматриваемой задачи представим в виде

$$f(\tau) + \overline{f(\tau)} = 0 \quad \text{— на контурах круговых отверстий,} \quad (4)$$

$$f'(t) - \overline{f'(t)} = f_x(t), \quad (5)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); t — аффикс точек берегов трещин с концевыми зонами;

$$f_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{на свободных берегах трещин} \\ -2iq_y(t) & \text{на берегах концевых зон трещин.} \end{cases}$$

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом среды, напряжения являются периодическими функциями с периодом ω .

3. Метод решения краевой задачи. Решение краевой задачи (5)–(7) ищем в виде:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad (6)$$

$$f'_1(z) = F_1(z) = \tau_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (7)$$

$$f'_2(z) = F_2(z) = \frac{1}{i\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt, \quad (8)$$

где интеграл в формуле (9) берется по линии $L = \{[-a_1, -b_1] \cup [a_1, b_1]\}$; $g(t)$ – искомая функция, характеризующая сдвиг берегов трещин с концевыми зонами;

$$g(x) = \frac{\mu}{2} \frac{d}{dx} [w^+(x, 0) - w^-(x, 0)] \quad \text{на } L, \quad (9)$$

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega}} - \frac{1}{3} \right].$$

Неизвестная функция $g(x)$ и искомые коэффициенты α_{2k} должны быть определены из краевых условий (5)–(6).

К основным представлениям (7)–(9) добавляются дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-a_1}^{-b_1} g(t) dt = 0, \quad \int_{a_1}^{b_1} g(t) dt = 0, \quad (10)$$

Для вывода уравнений относительно коэффициентов α_{2k} функции $F_1(z)$ преобразуем краевое условие (5) к виду

$$F_1(\tau) + \overline{F_1(\tau)} = f_0(\tau), \quad (11)$$

где $f_0(\tau) = -F_2(\tau) - \overline{F_2(\tau)}$.

Для решения краевой задачи (11) применим метод степенных рядов. Относительно функции $f_0(\tau)$ будем считать, что она разлагается на контуре $|\tau| = \lambda$ в ряд Фурье. Подставив в левую часть краевого условия (11) вместо $F_1(\tau)$, $\overline{F_1(\tau)}$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки $z = 0$, а в правую часть (11) вместо функции $f_0(\tau)$ – ряд Фурье и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$ в обеих частях, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} :

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{0,k} + 2\tau_y^\infty = A_0, \quad (12)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{j,k} \lambda^{2j} + \alpha_{2j} = A_{2j}.$$

Здесь $A_{2k+1} = -\frac{1}{i\omega} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt$,

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k+2)}(t), \quad \gamma = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t,$$

$$r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)!}{(2j)!(2k+1)!} \frac{g_{j+k+1}}{2^{2j+2k+2}}, \quad r_{0,0} = 0, \quad g_j = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}.$$

Требую, чтобы функции (7)–(9) удовлетворяли краевому условию на берегах L , для нахождения неизвестной функции $g(x)$, получаем сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt - \operatorname{Im} F_1(x) = f_x^*(x) \quad \text{на } L, \quad (13)$$

$$f_x^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{на свободных берегах трещин} \\ 2q_y(x) & \text{на берегах концевых зон трещин.} \end{cases}$$

Система (12) алгебраических уравнений совместно с сингулярными уравнениями (13) позволяет определить искомую функцию $g(x)$ и коэффициенты α_{2k} . Используя в основной полосе периодов разложение функции $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z$ и замену переменных после некоторых преобразований, сингулярное интегральное уравнение (13) приводится к стандартному виду:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau - \operatorname{Im} F_*(\eta) = f_x^*(\eta). \quad (14)$$

Здесь $B(\eta, \tau) = -\frac{1-\lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} B_{j+1} \left(\frac{b_1}{2}\right)^{2j+2} \cdot w_0^j A_j$,

$$A_j = \left[(2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1) \dots [(2j+1) - (2j+1-1)]}{1 \cdot 2 \dots (2j+1)} \cdot \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right],$$

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad p(\tau) = g(\tau), \quad u = \frac{1-\lambda_1^2}{2} (\tau+1) + \lambda_1^2,$$

$$u_0 = \frac{1-\lambda_1^2}{2} (\eta+1) + \lambda_1^2.$$

Для решения интегрального уравнения применим метод Мультиппа–Каландия [5], [6]. Решение интегрального уравнения представим в виде

$$p(\eta) = \frac{g_0(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad (15)$$

где функция $g_0(\eta)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$, причем она заменяется [5] интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

Используя квадратурные формулы, после некоторых преобразований сингулярное интегральное уравнение с дополнительным условием (10) сводится к следующей конечной алгебраической системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_{m,k} g_k^0 - \frac{1}{2} \operatorname{Im} F_*(\eta_m) = \frac{1}{2} f_x^*(\eta_m) \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^M \frac{g_k^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_1^2)(\tau_k+1) + \lambda_1^2}} = 0.$$

$$\text{Здесь } a_{m,k} = \frac{1}{2M} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\tau_k, \eta_m) \right],$$

$$\eta_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi (m = 1, 2, \dots, M), \quad \tau_m = \eta_m.$$

В правую часть полученных систем входят неизвестные значения напряжений $q_y(\eta_m)$ в узловых точках, принадлежащих концевым зонам трещины. Неизвестные напряжения в связях $q_y(\eta_m)$, возникающие на берегах концевых зон (a_1, a) и (b, b_1) , определяются из дополнительных условий (4). Используя построенное решение, уравнение (4) представим в виде

$$\frac{d}{dx} [C(x, q_y(x)) q_y(x)] = \frac{2}{\mu} g(x). \quad (17)$$

Требую выполнения условий (15) в узловых точках, принадлежащих концевым зонам (a_1, a) и (b, b_1) , получим еще систему из M_1 уравнений для определения приближенных значений $q_y(\eta_{m_1})$ ($m_1 = 1, 2, \dots, M_1$). При этом используется метод конечных разностей.

После определения значений функций g_k^0 коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин находились соотношениями:

$$K_{\text{III}}^{a_1} = \sqrt{\frac{\pi b_1 (1 - \lambda_1^2)}{\lambda_1}} \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} g_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2},$$

$$K_{\text{III}}^{b_1} = \sqrt{\pi b_1 (1 - \lambda_1^2)} \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (-1)^k g_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2}.$$

Для анализа предельного равновесия трещин с концевыми зонами необходимы два условия (двухпараметрический критерий) разрушения. Первым критерием является условие продвижения вершины трещины, а вторым – условие критического сдвига связей на краю концевой зоны. В качестве условия продвижения вершины трещины используем силовой критерий разрушения Ирвина. Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнение условия

$$K_{\text{III}} = K_{\text{III}c}, \quad (18)$$

где $K_{\text{III}c}$ – постоянная материала.

В качестве второго условия разрушения среды в случае когезионной трещины продольного сдвига используем критерий критического сдвига берегов трещины

$$w^+ - w^- = \delta_{\text{III}c}, \quad (19)$$

где $\delta_{\text{III}c}$ – характеристика материала, определяемая опытным путем [2], [3].

Решение системы алгебраических уравнений (12), (16) и (17) позволяет (при заданной длине трещин и характеристиках связей) найти критическую внешнюю нагрузку τ_y^∞ и критический сдвиг берегов концевой зоны в состоянии предельного равновесия трещин.

Для заданных размеров трещин и концевых зон, используя предельные значения $K_{\text{III}c}$ и $\delta_{\text{III}c}$, можно выделить режимы равновесия и роста трещин при монотонном нагружении. Если выполняются условия

$$K_{\text{III}} \geq K_{\text{III}c}, \quad V(y_*) < \delta_{\text{III}c},$$

то происходит продвижение вершины трещины с одновременным увеличением длины концевой зоны без предельного сдвига связей. Этот этап развития трещин можно рассматривать как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок.

Рост вершины трещины с одновременным предельным сдвигом связей на краю концевой зоны будет происходить при выполнении условий

$$K_{\text{III}} \geq K_{\text{III}c}, \quad V(x_*) \geq \delta_{\text{III}c}.$$

Так, например, при выполнении условий

$$K_{III} < K_{IIIc}, \quad V(x_*) \geq \delta_{IIIc}$$

происходит предельный сдвиг связей без продвижения вершины трещины и размер концевой зоны сокращается, стремясь к критическому значению для данного уровня нагрузки. При выполнении условий

$$K_{III} < K_{IIIc}, \quad V(x_*) < \delta_{IIIc}$$

положения вершины трещины и концевой зоны не будут изменяться.

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения касательных усилий в концевых зонах используется итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [7]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей в концевой зоне линейный при $(w^+ - w^-) \leq w_*$. Первый шаг итерационного процесса счета состоит в решении системы уравнений для линейно-упругих связей. Следующие итерации выполняются, если на части концевой зоны имеет место неравенство $(w^+ - w^-) > w_*$. Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с изменяющейся вдоль берегов концевой зоны и зависящей от величины усилий в связях эффективной податливости, которая вычислена на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [8]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия вдоль концевой зоны, полученные на двух последовательных итерациях, практически не различаются. Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью, восходящий участок которой соответствовал деформированию связей ($0 < (w^+ - w^-) \leq w_*$) с их максимальным усилием связей. При $(w^+ - w^-) > w_*$ закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками (w_*, τ_*) и (δ_{IIIc}, τ_c) , причем при $\tau_c \geq \tau_*$ имело место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Численными расчетами найдены усилия в связях, размеры концевых зон и сдвиг противоположных берегов концевых зон трещин от параметра нагружения τ_y^∞ . На рис. 2 представлены графики зависимости относительной длины концевой зоны трещины $d_* = (b_1 - b)/\lambda$ от безразмерного значения внешнего нагружения τ_y^∞/τ_* для различных значений радиуса отверстий: $\lambda = 0, 2 \div 0, 5$ (кривые 1 – 4). На рис. 3 приведена зависимость усилий в связях q_y/τ_{xy}^∞ от относительного размера d_* для различных значений радиуса отверстий $\lambda = 0, 2 \div 0, 5$ (кривые 1–4).

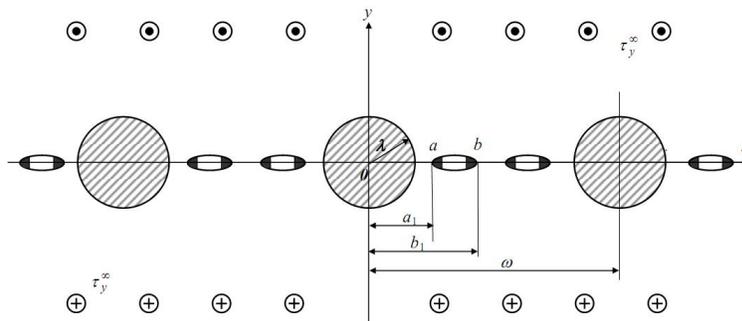


Рис. 1. Расчетная схема задачи о взаимодействии жестких включений и когезионных трещин в изотропной среде при продольном сдвиге

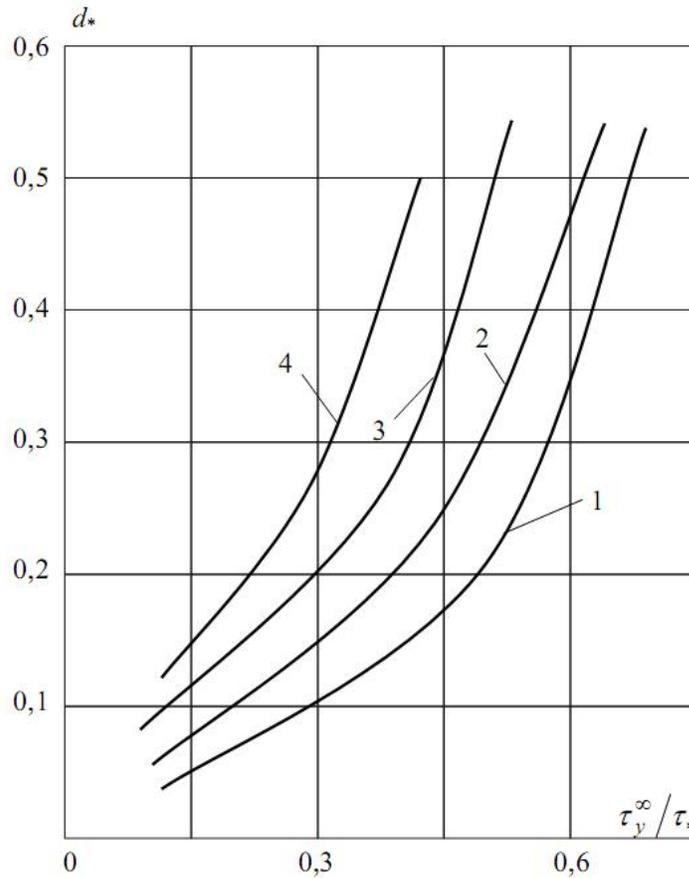


Рис. 2. Зависимость относительной длины концевой зоны трещины $d_* = (b_1 - b)/\lambda$ от безразмерного значения внешнего нагружения τ_y^∞/τ_* для различных значений радиуса отверстий: $\lambda = 0, 2 \div 0, 5$ (кривые 1–4)

Расчеты показывают, что при линейном законе деформирования связей усилия в связях всегда имеют максимальные значения на краю концевой зоны. Аналогичная картина наблюдается и для величины сдвига берегов трещины, т. е. сдвиг берегов трещины на краю концевой зоны имеет максимум при линейном и нелинейном законах деформирования. Причем сдвиг берегов трещины возрастает с увеличением относительной податливости связей.

Из совместного решения объединенной алгебраической системы и условий (16), (17) можно (при заданных характеристиках трещиностойкости материала) определить критическую величину внешней нагрузки, размеры концевых зон для состояния предельного равновесия, при которых происходит рост трещины.

На рис. 4 построены графики зависимости критической нагрузки $\tau_* = \tau_y^\infty/\tau_*$ от расстояния $a_* = a_1 - \lambda$ для обоих концов трещины (кривая 1 соответствует левому концу) при $\lambda = 0, 3$.

4. Заключение. Модель трещины с концевыми зонами дает возможность исследовать закономерности распределения усилий в связях при различных законах деформирования, проводить анализ предельного равновесия трещин с учетом деформационного и силового

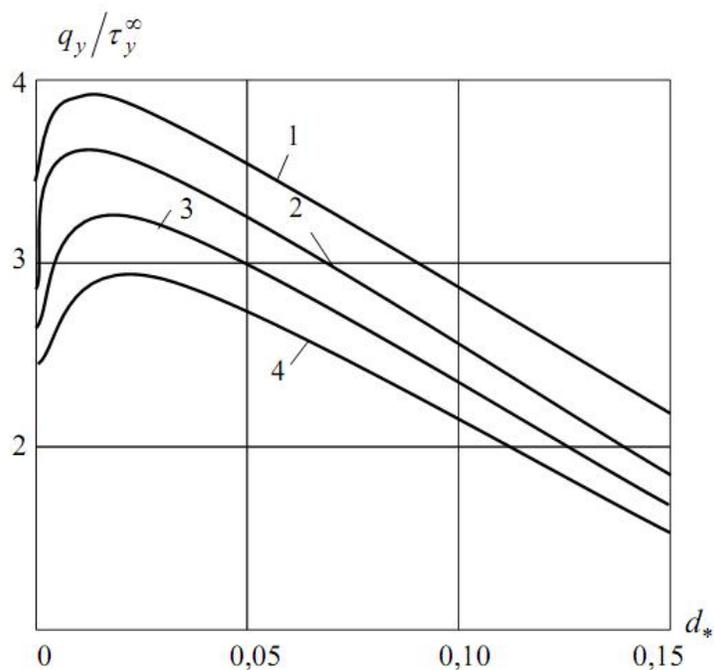


Рис. 3. Зависимость касательных напряжений в связях q_y / τ_{xy}^∞ от относительного размера d_* концевой зоны для различных значений радиуса отверстий $\lambda = 0, 2 \div 0, 5$ (кривые 1–4)

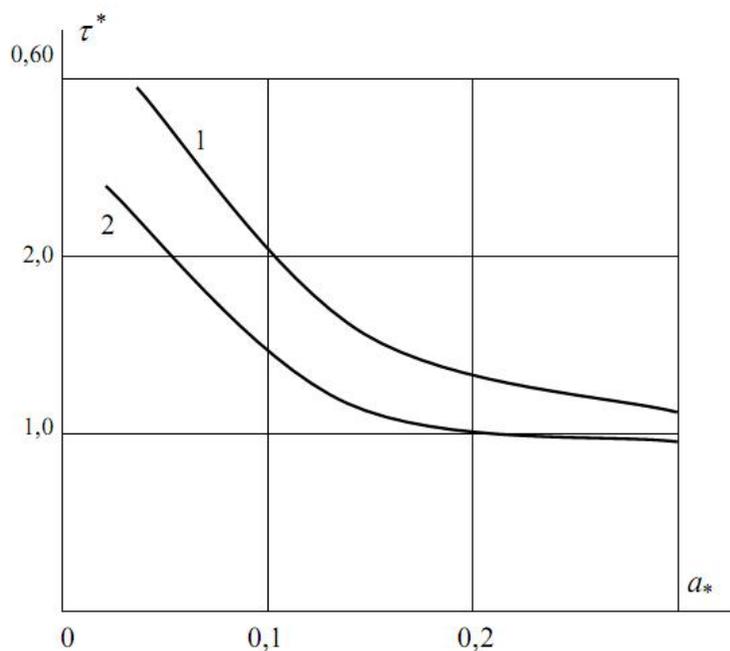


Рис. 4. Зависимости критической нагрузки $\tau^* = \tau_y^\infty / \tau_*$ от расстояния $a_* = a_1 - \lambda$ для обоих концов трещины (кривая 1 – соответствует левому концу) при $\lambda = 0, 3$

критерий разрушения, а также прогнозировать критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкость составного тела (композита).

Анализ предельно-равновесного состояния составного тела с периодической системой жестких включений и прямолинейных трещин со связями между берегами в концевых зонах при продольном сдвиге сводится к параметрическому исследованию объединенной алгебраической системы (12), (13), (17), (15) и критерия разрушения (16), (17) при различных законах деформирования межчастичных связей материала, упругих постоянных и геометрических характеристиках составного тела. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются усилия в связях и сдвиг берегов с концевыми зонами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *The special issue: Cohesive models* // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No 14. – P. 1741–1987.
- [2] *Панасюк, В. В.* Деформационные критерии в механике разрушения / В. В. Панасюк // ФХММ. – 1986. – Т. 22. – № 1. – С. 7–17.
- [3] *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наукова думка, 1991. – 416 с.
- [4] *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. – 124 с.
- [5] *Каландия, А. И.* Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.
- [6] *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [7] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [8] *Биргер, И. А.* Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М. : Наука, 1975. – С. 51–73.

Гасанов Фуад Фазиль оглы,

кандидат технических наук, доцент, Азербайджанский технический университет, г. Баку

e-mail: e-mail: hff74@mail.ru

F. F. Hasanov

**PERIODIC FRACTURE MECHANICS PROBLEM OF INFLUENCE OF RIGID
INCLUSION ON THE DEVELOPMENT OF LONGITUDINAL SHEAR
COHESIVE CRACKS**

Azerbaijan Technical University

Abstract. The problem of fracture mechanics for the composite body, weakened by longitudinal shear cracks was considered. The fracture model of composite materials with the periodic structure, based on consideration of a zone of fracture process formed near the crack tip was proposed. The zone of fracture process is represents as a layer of finite length containing a material with partially broken bonds between its separate structural elements (the end zone) and considered as a part of a crack. The bonds between the crack surfaces are modelled by applying to crack surfaces cohesive forces caused by bonds. Analysis of the limit equilibrium of shear cracks in the end zone model is performed on the basis of non-local fracture criterion with the force condition of the crack tip motion and deformation condition for determining the motion faces of the end zone cracks.

Keywords: isotropic medium, periodic system of circular holes, rigid inclusions, bridged cracks, cohesive forces, longitudinal shear.

REFERENCES

- [1] *The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech.* – 2003. – Vol. 70. – No 14. – P. 1741–1987.
- [2] *Panasyuk, V. V. Deformation criteria in fracture mechanics / V. V. Panasyuk // Materials Science.* – 1986 – Vol. 22. – No 1. – P. 7–17.
- [3] *Panasyuk, V. V. Mechanics of quasibrittle fracture of material / V. V. Panasyuk.* – Kiev : Naukova Dumka, 1991. – 416 p.
- [4] *Mirsalimov, V. M. Fracture of elasto – and elastoplastic bodies with cracks / V. M. Mirsalimov.* – Baku : Science, 1984. – 124 p.
- [5] *Kalandiya, A. I. Mathematical methods of two-dimensional elasticities / A. I. Kalandiya.* – M. : Science, 1973. – 256 p.
- [6] *Mirsalimov, V. M. Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov.* – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [7] *Il'yushin, A. A. Plasticity / A. A. Il'yushin.* – M. ; L. : Gostekhizdat, 1948. – 376 p.
- [8] *Birger, I. A. General algorithms for solving theories of elasticity, plasticity and creep / I. A. Birger // Adv. deformable environments.* – M. : Nauka, 1975. – P. 51–73.

Hasanov, Fuad Fazil

Cand. of Tech. Sci., Assoc. Professor, Azerbaijan Technical University, Baku

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ВТУЛКИ КОНТАКТНОЙ ПАРЫ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Сформулирован критерий начала теплового разрушения материалов деталей контактных пар в процессе работы. Проведен расчет критического теплового состояния втулки контактной пары. Решена задача об определении температурных напряжений втулки контактной пары, когда на контактной поверхности втулки достигнута предельно допустимая температура для материала втулки. Предложен способ расчета критических параметров втулки контактной пары. Даны рекомендации для стадии проектирования деталей контактных пар.

Ключевые слова: втулка, контактная пара, тепловое разрушение, критическое тепловое состояние, критические параметры втулки.

УДК: 539.375

Контактная пара “втулка-плунжер” работает в условиях сложного напряженного состояния. Для обоснованного управления процессом трения и износа в контактной паре необходимо исследование разрушения материалов при трении, вызванного контактным взаимодействием и сопровождаемого совместным действием температуры и температурного градиента. Тепловое разрушение вызывается теплообразованием при трении.

Согласно многим исследованиям [4], [5] на пятнах фактического касания происходит сильный нагрев в тонких приповерхностных слоях материала, что служит причиной образования прижогов, термических пятен и очагов микротрещин.

Известно, что при действии температурной вспышки в приповерхностном слое материала в случае сильного нагрева зарождаются трещины.

Для каждого материала существует предельная температура T_* , превышение которой может быть причиной образования прижогов и очагов микротрещин в материале.

Эта температура T_* является характеристикой фрикционного материала узла трения. Согласно этому критерию, как только максимальная температура деталей контактной пары достигнет предельного значения T_* , допустимого для данного материала, произойдет трещинообразование.

Рассмотрим задачу об отыскании напряженно-деформированного состояния втулки контактной пары при критическом тепловом состоянии, когда на контактной поверхности достигается предельно допустимая температура T_* для материала втулки.

В процессе работы контактной пары на внутренней поверхности втулки на площадке контакта с плунжером во время многократного возвратно-поступательного движения действует поверхностный источник тепла, вызванный внешним трением.

Ниже рассматривается задача об определении температурных напряжений во втулке контактной пары при наличии критического теплового состояния.

Втулку моделируем изотропным однородным упругим телом. Принято, что внутренний контур втулки близок к круговому. Отнесем втулку контактной пары к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0 и L с радиусами R_0 и R , соответственно. Считается, что выполняются условия плоской деформации.

Рассмотрим некоторую реализацию шероховатой внутренней поверхности втулки.

Представим границу внутреннего контура втулки L'_0 в следующем виде

$$r = \rho(\theta); \quad \rho(\theta) = R_0 + \varepsilon H(\theta), \quad (1)$$

где $\varepsilon = R_{\max}/R_0$ – малый параметр; R_{\max} – наибольшая высота выступа неровности внутренней поверхности втулки; функция $H(\theta)$ описывает профиль обработанной внутренней поверхности втулки.

В зоне контакта между втулкой и плунжером, кроме давления $p(\theta, t)$, действует касательное напряжение, связанное с контактным давлением по закону Кулона. Касательные усилия способствуют тепловыделению в зоне контакта. При этом общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности трения, а количество тепла, выделяемое в малом элементе зоны контакта с координатой θ , будет находиться следующей формулой

$$Q(\theta, t) = Vfp(\theta, t), \quad (2)$$

где V – скорость относительного движения плунжера; f – коэффициент трения контактной пары.

Количество тепла будет делиться на две части:

1) Q_* – среднее по интервалу $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ (площадка контакта) значение потока тепла во втулку, обеспечивающее равенство температуры в зоне контакта температуре T_* .

2) Q^* – аналогичное значение потока тепла в плунжер.

Граничные условия задачи о температурных напряжениях для втулки будут иметь вид:

$$\sigma_n^b = 0; \quad \tau_{nt}^b = 0 \quad \text{при} \quad r = \rho(\theta). \quad (3)$$

$$v_r^b - iv_\theta^b = g(\theta) \quad \text{при} \quad r = R. \quad (4)$$

Здесь v_r^b, v_θ^b – перемещения, возникающие во втулке; $\sigma_r^b, \tau_{r\theta}^b$ – компоненты напряжений во втулке; $g(\theta)$ – заданная функция перемещений в точках внешнего контура втулки.

Для решения краевой задачи (4)–(4) необходимо знание распределения температуры во втулке в предельном состоянии.

Определение температуры во втулке можно свести к решению краевой задаче теории теплопроводности:

$$\text{во втулке} \quad \Delta T = 0, \quad (5)$$

$$\text{при} \quad r = \rho \quad T = T_0 \quad \text{на площадке контакта}, \quad (6)$$

$$\text{при} \quad r = \rho \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} - \alpha_1(T - T_c) = 0 \quad \text{— вне площадки контакта},$$

$$\text{при} \quad r = R \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_2(T - T_c) = 0.$$

Здесь $T(r, \theta)$ – температурная функция во втулке; λ – коэффициент теплопроводности втулки; Δ – оператор Лапласа; α_1 – коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности втулки; α_2 – коэффициент теплоотдачи с наружной цилиндрической поверхности втулки с внешней средой с температурой T_c ; n – нормаль к контуру втулки.

Введем в рассмотрении избыточную температуру

$$t = T - T_c.$$

Температуру во втулке ищем в следующем виде:

$$t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \dots, \quad (7)$$

в котором пренебрегаем членами, содержащими малый параметр ε в степени, выше первой.

Здесь $t^{(0)}$, $t^{(1)}$ – температуры нулевого и первого приближений. Каждое из приближений удовлетворяет уравнению теории теплопроводности.

Граничные условия задачи теории теплопроводности с точностью до величин первого порядка малости имеют следующий вид:

для нулевого приближения

$$\text{при } r = R_0 \quad t^{(0)} = t_*^{(0)} \quad - \quad \text{на контактной площадке,} \quad (8)$$

при $r = R_0$ $\lambda \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} - \alpha_1 t^{(0)} = 0$ – вне площадки контакта,

при $r = R$ $\lambda \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} + \alpha_2 t^{(0)} = 0$,

для первого приближения

$$\text{при } r = R_0 \quad t^{(1)} = -\frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} H(\theta) \quad - \quad \text{на контактной площадке,} \quad (9)$$

при $r = R_0$ $\lambda \frac{\partial t^{(1)}}{\partial r} - \alpha_1 t^{(1)} = \left[\alpha_1 \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} - \lambda \frac{\partial^2 t^{(0)}}{\partial r^2} \right] H(\theta)$ – вне контактной площадки,

при $r = R$ $\lambda \frac{\partial t^{(1)}}{\partial r} + \alpha_2 t^{(1)} = 0$.

Для решения краевых задач теории теплопроводности в каждом приближении используем метод разделения переменных [3].

Опуская промежуточные выкладки, для нулевого и первого приближения находим:

$$t^{(0)} = C_{10} + C_{20} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{10}^{(k)} r^k + C_{20}^{(k)} r^{-k} \right) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{10}^{(k)} r^k + A_{20}^{(k)} r^{-k} \right) \sin k\theta, \quad (10)$$

$$t^{(1)} = C_{11} + C_{21} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{11}^{(k)} r^k + C_{21}^{(k)} r^{-k} \right) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{11}^{(k)} r^k + A_{21}^{(k)} r^{-k} \right) \sin k\theta. \quad (11)$$

Напряжения и перемещения ищем в виде разложений по малому параметру:

$$\begin{aligned} \sigma_r^b &= \sigma_r^{b(0)} + \varepsilon \sigma_r^{b(1)} + \dots \quad ; \\ \sigma_\theta^b &= \sigma_\theta^{b(0)} + \varepsilon \sigma_\theta^{b(1)} + \dots \quad ; \\ \tau_{r\theta}^b &= \tau_{r\theta}^{b(0)} + \varepsilon \tau_{r\theta}^{b(1)} + \dots \quad ; \\ v_r^b &= v_r^{b(0)} + \varepsilon v_r^{b(1)} + \dots \quad ; \\ v_\theta^b &= v_\theta^{b(0)} + \varepsilon v_\theta^{b(1)} + \dots \quad ; \end{aligned} \quad (12)$$

в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε в степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений теории плоской термоупругости.

Значения компонента тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R_0$.

Используя метод возмущений и граничные условия (4)–(4), приходим к последовательности краевых задач плоской теории термоупругости:
для нулевого приближения

$$v_r^{b(0)} - iv_\theta^{b(0)} = g(\theta) \quad \text{при } r = R, \quad (13)$$

$$\sigma_r^{b(0)} = 0; \quad \tau_{r\theta}^{b(0)} = 0 \quad \text{при } r = R_0,$$

для первого приближения

$$\sigma_r^{b(1)} = N; \quad \tau_{r\theta}^{b(1)} = T \quad \text{при } r = R_0, \quad (14)$$

$$v_r^{b(1)} - iv_\theta^{b(1)} = 0 \quad \text{при } r = R,$$

где

$$N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{b(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{b(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta};$$

$$T = (\sigma_\theta^{b(0)} - \sigma_r^{b(0)}) \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{b(0)}}{\partial r}.$$

Для получения решения задачи о температурных напряжениях во втулке в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений $\Phi(r, \theta)$ [2]

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (15)$$

В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений в нулевом и первом приближениях определяется уравнениями:

$$\Delta \Phi^{(0)} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha t^{(0)}; \quad (16)$$

$$\Delta \Phi^{(1)} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha t^{(1)}. \quad (17)$$

Температурные функции $t^{(0)}(r, \theta)$ и $t^{(1)}(r, \theta)$ берутся в виде рядов Фурье (см. формулы (6)–(7)); Δ – оператор Лапласа; α – коэффициент линейного температурного расширения материала втулки; μ – коэффициент Пуассона материала втулки.

Ищем решение уравнения (12) в следующем виде:

$$\Phi^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Phi_n^{(0)} \cos n\theta + \Phi_n^{*(0)} \sin n\theta \right]. \quad (18)$$

Для функций $\Phi_n^{(0)}$, $\Phi_n^{*(0)}$ получаем

$$\frac{d^2 \Phi_n^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_n^{(0)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \Phi_n^{(0)} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha F_n^{(0)}, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 \Phi_n^{*(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_n^{*(0)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \Phi_n^{*(0)} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha F_n^{*(0)}.$$

Частные решения уравнений (15) ищем методом вариации постоянных:

$$\Phi_0^{(0)} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha \left[-\ln r \int_{R_0}^r \rho F_0^{(0)}(\rho) d\rho + \int_r^R F_0^{(0)}(\rho) \ln \rho d\rho \right],$$

$$\begin{aligned}\Phi_n^{(0)} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha}{2n} \left[r^n \int_r^R F_n^{(0)}(\rho) \rho^{1-n} d\rho + r^{-n} \int_{R_0}^r F_n^{(0)}(\rho) \rho^{1+n} d\rho \right], \\ \Phi_n^{*(0)} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\alpha}{2n} \left[r^n \int_r^R F_n^{*(0)}(\rho) \rho^{1-n} d\rho + r^{-n} \int_{R_0}^r F_n^{*(0)}(\rho) \rho^{1+n} d\rho \right].\end{aligned}\quad (20)$$

С помощью найденного термоупругого потенциала [2] вычисляем соответствующие напряжения $\overline{\sigma_r^{b(0)}}$, $\overline{\sigma_\theta^{b(0)}}$, $\overline{\tau_{r\theta}^{b(0)}}$ во втулке. Это напряженное состояние, полученное по найденным термоупругим потенциалам (14), (16) не будут удовлетворять краевым условиям (9). Таким образом, необходимо для втулки найти второе напряженное состояние $\overline{\sigma_r^{b(0)}}$, $\overline{\sigma_\theta^{b(0)}}$, $\overline{\tau_{r\theta}^{b(0)}}$ такое, чтобы выполнялись краевые условия (9).

Итак, для определения второго напряженного состояния во втулке имеем следующие краевые условия:

$$\overline{\sigma_r^{b(0)}} = -\overline{\sigma_r^{b(0)}}; \quad \overline{\tau_{r\theta}^{b(0)}} = -\overline{\tau_{r\theta}^{b(0)}} \quad \text{при } r = R_0, \quad (21)$$

$$\overline{v_r^{b(0)}} - i\overline{v_\theta^{b(0)}} + \left(\overline{v_r^{b(0)}} - i\overline{v_\theta^{b(0)}} \right) = g(\theta).$$

Краевую задачу (21) для втулки решаем методом Мусхелишвили [1]. Комплексные потенциалы $\Phi_b(z)$, $\Psi_b(z)$ для втулки, описывающие напряженное состояние $\overline{\sigma_r^{b(0)}}$, $\overline{\sigma_\theta^{b(0)}}$, $\overline{\tau_{r\theta}^{b(0)}}$ соответственно ищем в следующем виде

$$\Phi_b(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k; \quad \Psi_b(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k z^k, \quad (22)$$

где $z = re^{i\theta}$.

Удовлетворяя функциями (17) краевым условиям (21), получим системы уравнений для определения коэффициентов a_k , a'_k . Решение этих систем не представляет трудностей [1].

С помощью формул Колосова – Мусхелишвили находим напряжения $\overline{\sigma_r^{b(0)}}$, $\overline{\sigma_\theta^{b(0)}}$, $\overline{\tau_{r\theta}^{b(0)}}$, а тем самым напряжения во втулке в нулевом приближении

$$\sigma_r^{b(0)} = \overline{\sigma_r^{b(0)}} + \overline{\overline{\sigma_r^{b(0)}}}, \quad \sigma_\theta^{b(0)} = \overline{\sigma_\theta^{b(0)}} + \overline{\overline{\sigma_\theta^{b(0)}}}, \quad \tau_{r\theta}^{b(0)} = \overline{\tau_{r\theta}^{b(0)}} + \overline{\overline{\tau_{r\theta}^{b(0)}}}. \quad (23)$$

Аналогично, определяем термоупругие потенциалы перемещений в первом приближении из решения дифференциальных уравнений (13). Температурная функция $t^{(1)}(r, \theta)$ берется в виде ряда Фурье (см. формулу (7)). Дальнейший ход решения аналогичен отысканию решения в нулевом приближении с очевидными изменениями.

Изложенный метод позволил определить температурные напряжения во втулке контактной пары. Общее решение задачи термоупругости для втулки представится в виде суммы

$$\sigma_r^b = \sigma_r^u + \sigma_r^T, \quad \sigma_\theta^b = \sigma_\theta^u + \sigma_\theta^T, \quad \tau_{r\theta}^b = \tau_{r\theta}^u + \tau_{r\theta}^T,$$

где первые слагаемые σ_r^u , σ_θ^u , $\tau_{r\theta}^u$ есть решение изотермической задачи теории упругости для втулки при внешних нагрузках, а вторые слагаемые σ_r^T , σ_θ^T , $\tau_{r\theta}^T$ есть решение задачи о температурных напряжениях для втулки при предельном тепловом состоянии.

Для оценки прочности втулки контактной пары находили нормальное тангенциальное напряжение во внутренней поверхности втулки

$$\sigma_*^b = \sigma_{\theta|r=R_0}^{b(0)} + \varepsilon \left[\frac{\partial \sigma_{\theta}^{b(0)}}{\partial r} H(\theta) + \sigma_{\theta}^{b(1)} \right]_{|r=R_0} \quad (24)$$

Полученные формулы позволяют для каждого профиля обработанной поверхности втулки известной заранее, проводить расчет теплового и напряженно-деформированного состояний вызванного неравным нагревом, а также прочности втулки контактной пары.

Расчет критических параметров втулки.

Для величины теплового потока Q_* имеем

$$R_0 (\theta_2 - \theta_1) Q_* = -\lambda \int_S \frac{\partial T}{\partial n} dS, \quad (25)$$

где S – площадь (длина дуги) контактной поверхности, θ_2, θ_1 – являются концами участка соприкосновения плунжера со втулкой.

На основании (20) и найденного выше распределения температуры во втулке контактной пары будем иметь

$$\begin{aligned} R_0 (\theta_2 - \theta_1) Q_* &= \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \frac{\partial t^{(0)}(R_0, \theta)}{\partial r} + \varepsilon \left[\frac{\partial t^{(1)}(R_0, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^{(0)}(R_0, \theta)}{\partial r^2} H(\theta) \right] \right\} R_0 d\theta = \quad (26) \\ &= \lambda R_0 \left\{ d_0 (\theta_2 - \theta_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k} (\sin k\theta_2 - \sin k\theta_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{k} (\cos k\theta_1 - \cos k\theta_2) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{C_{20}}{R_0} + \varepsilon \left(\frac{C_{21}}{R_0} + a_0 \right); \\ d_k &= k \left(C_{10}^{(k)} R_0^{k-1} - C_{20}^{(k)} R_0^{-k-1} \right) + \varepsilon \left[\left(C_{11}^{(k)} R_0^{k-1} - C_{21}^{(k)} R_0^{-k-1} \right) + \alpha_k \right]; \\ q_k &= k \left(A_{10}^{(k)} R_0^{k-1} - A_{20}^{(k)} R_0^{-k-1} \right) + \varepsilon \left[\left(A_{11}^{(k)} R_0^{k-1} - A_{21}^{(k)} R_0^{-k-1} \right) + \beta_k \right]; \\ \alpha_k &= C_k + C_{-k}; \quad \beta_k = \frac{C_{-k} - C_k}{2t}; \quad C_m = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k F_{m-k}; \quad \alpha_0 = C_0; \\ \Pi_0 &= a_0^0; \quad \Pi_k = \frac{a_k^0 - ib_k^0}{2}; \quad \Pi_{-k} = \frac{a_k^0 + ib_k^0}{2}; \\ F_k &= \frac{D_k - iM_k}{2}; \quad F_{-k} = \frac{D_k + iM_k}{2}; \quad F_0 = -\frac{C_{20}}{R^2}; \\ D_k &= k \left[(k-1) C_{10}^{(k)} R_0^{k-2} + (k+1) C_{20}^{(k)} R_0^{-k-2} \right]; \\ M_k &= k \left[(k-1) A_{10}^{(k)} R_0^{k-2} + (k+1) A_{20}^{(k)} R_0^{-k-2} \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая среднее по интервалу $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ количество тепла, выделяемые при трении, к среднему значению потока тепла во втулке Q_* , необходимого для обеспечения критической температуры T_* в зоне контакта, находим условие для определения критических параметров контактной пары.

На основании формул (2), (21) находим

$$\alpha_{m..п.} V f P = \alpha R \left\{ \alpha_0 (\theta_2 - \theta_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k} (\sin k\theta_2 - \sin k\theta_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{k} (\cos k\theta_1 - \cos k\theta_2) \right\}, \quad (27)$$

где $\alpha_{m..п.}$ – среднеэффективный коэффициент распределения тепловых потоков; P – сила, прижимающая плунжер к границе внутреннего контура втулки.

В полученное соотношение (22) входят такие параметры контактной пары, как скорость возвратно-поступательного движения плунжера, коэффициент трения фрикционной пары, геометрические размеры втулки, параметры шероховатости (класс шероховатости) обработанной поверхности втулки и другие теплофизические и механические характеристики контактной пары.

Соотношение (22) позволяет определить, например, критическую скорость движения плунжера, подойти к выбору шероховатости, обеспечивающего повышение несущей способности контактной пары или другие критические параметры узла трения.

Другими словами, соотношение (22) позволяет определять области допустимых значений параметров контактной пары.

При выполнении условия прочности

$$\sigma_{* \max}^b = \sigma_0, \quad (28)$$

будут появляться остаточные деформации, если σ_0 есть предел текучести материалов втулки.

Если σ_0 представляет собой предел хрупкой прочности материала, то выполнение условия (23) означают нарушение сплошности материала втулки (появление поверхностных трещин). В процессе работы контактной пары эти трещины постепенно распространяются в глубину материала. Будучи очень тонкими, они концентрируют значительные напряжения.

Расчеты показывают, что для некоторых типов контактных пар из-за высоких температур на поверхности втулки возникают напряжения, которые превышают напряжения от силовой нагрузки.

Необходимо на стадии проектирования путем конструкторско-технологических решений добиваться выполнения условий

$$T < T_*, \quad \sigma_{* \max}^b < \sigma_0. \quad (29)$$

В результате удовлетворения неравенств (24) определяем области допустимых значений параметров деталей контактных пар.

Таким образом, зная основные значения критических параметров теплового разрушения и влияния на них свойств материалов, класса технологической обработки поверхности фрикционных пар, параметров охлаждения и др., можно обоснованно управлять явлением теплового разрушения путем конструкторско-технологических решений на стадии их проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [2] *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М. : Физматгиз, 1963. – 252 с.
- [3] *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 724 с.
- [4] *Чичинадзе, А. В.* Материалы в триботехнике нестационарных процессов / А. В. Чичинадзе, Р. М. Матвеевский, Э. Д. Браун. – М. : Наука, 1986. – 296 с.
- [5] *Newcomb, T. P.* Energy dissipated during braking / T. P. Newcomb // Wear. – 1980. – Vol. 32. – No 2. – P. 32–43.

Ахундова Парвана Эльман гызы,

кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН
Азербайджана, г. Баку

e-mail: irakon63@hotmail.com

P. E. Axundova

CALCULATION OF CRITICAL PARAMETERS OF THE HUB OF A CONTACT PAIR

Institute Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. The criterion of the beginning of thermal fracture of materials of details of a contact pairs is formulated during work. Calculation of a critical thermal state of the bushing of contact pair is lead. The problem about definition of temperature stresses of the bushing of contact pair when on a contact surface of the bush the maximum permissible temperature for a material of the bush is achieved is solved. The way of calculation of critical parameters of the hut of contact pair is offered. Recommendations for a design stage of details contact pairs are given.

Keywords: the hut, contact pair, thermal facture, a critical thermal condition, critical parameters of the hub.

REFERENCES

- [1] *Mushelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Mushelishvili. – Amsterdam : Kluwer, 1977. – 707 p.
- [2] *Parkus, H.* Instationare Warmes / H. Parkus. – Wien : Springer, 1959 – 252 p.
- [3] *Tihonov, A. N.* Equation of mathematical physics / A. N. Tihonov, A. A. Samarskiy. – M. : Nauka. 1966. – 724 p.
- [4] *Chichinadze, A. V.* Material in tribo-engineering non-stationary processes / A. V. Chichinadze, R. M. Matveevskiy, E. D. Brown. – M. : Nauka, 1986. – 296 p.
- [5] *Newcomb, T. P.* Energy dissipated during braking / T. P. Newcomb // *Wear.* – 1980. – Vol. 32. – No 2. – P. 32–43.

Axundova, Parvana Elman qizi

Cand. Phys. and Math. Sci., Doktorant, Institute of Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan, Baku

Э. И. Зульфугаров

ТЕПЛОВОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В БАРАБАНЕ С ИСКРИВЛЕННОЙ ЗОНОЙ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ

Азербайджанский технический университет

Аннотация. Рассматривается задача о температурных напряжениях в тормозном барабане при торможении колесной машины. Считается, что при многократном торможении на пятнах фактического касания элементов фрикционной пары тормозной системы происходит образование прижогов, термических пятен и очагов микротрещин. Проведено математическое описание модели зарождения трещины, имеющей малые случайные отклонения от прямолинейной формы, в тормозном барабане в процессе торможения колесной машины.

Ключевые слова: тормозной барабан, искривленная зона предразрушения, трещинообразование в барабане.

УДК: 539.375

Фрикционная пара “барабан-накладка” грузовых автомобилей работает в условиях сложного напряженного состояния. Как показывают исследования [7], [8], на пятнах фактического касания происходит сильный нагрев в тонких приповерхностных слоях, что служит причиной образования прижогов, термических пятен и очагов микротрещин.

Вопросам разрушения тормозного барабана при торможении автомобиля были посвящены работы [1], [2]. Одной из причин появления напряжений и деформаций в тормозном барабане при торможении колесной машины является неравномерный нагрев. В связи с этим, важное значение имеет разработка расчетной модели, позволяющая прогнозировать напряженно-деформированное состояние в стадии предразрушения (образования трещин) в тормозном барабане с учетом температурных напряжений.

При повторно-кратковременном режиме торможения барабан тормозного механизма автомобиля испытывает многократное циклическое нагружение. Считается, что при этом в материале тормозного барабана будет возникать концентратор напряжений (область ослабленных межчастичных связей материала). При нагружении в нем (прослойки перенапряженного материала) образуется зона пластического течения. Пусть для определенности нагрузка изменяется так, что в области ослабленных межчастичных связей материала осуществляется пластическое деформирование. Через некоторое число циклов нагружений (торможений) возможность пластического деформирования в области ослабленных межчастичных связей материала исчерпывается, и раскрытие берегов полосы пластического течения резко возрастает. Если раскрытие берегов зоны предразрушения в точке максимальной концентрации достигает предельного значения δ_c для данного материала тормозного барабана, то в этой точке зарождается [3] усталостная трещина.

По мере эксплуатации фрикционной пары “барабан-накладка” автомобиля в барабане будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между ее берегами линий пластического скольжения (вырожденных полос пластических деформаций). Размеры зон пластического течения материала при постоянном напряжении зависят от вида материала. В реальных материалах, используемых для изготовления тормозных барабанов, из-за структурных и технологических причин поверхности берегов зоны предразрушения имеют неровности и искривления.

Таким образом, зону зарождения трещины моделируем полосой предразрушения (зоной ослабленных межчастичных связей материала), имеющей неровности и искривления.

Отнесем тормозной барабан к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0 и L с радиусами R_0 и R .

Принято, что внутренний контур барабана близок к круговому. Рассмотрим некоторую произвольную реализацию шероховатости внутренней поверхности тормозного барабана.

Представим границу внутреннего контура L' в виде

$$\rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta),$$

где $\varepsilon = R_{\max}/R$ – малый параметр; R_{\max} – наибольшая высота выступа (впадины) неровности внутренней поверхности барабана; $H(\theta)$ – функция не зависящая от малого параметра.

Полоса предразрушения, образующая в барабане в процессе эксплуатации автомобиля, считается близкой к прямолинейной форме, допуская лишь малые отклонения линии полосы от прямой $y_1 = 0$. Уравнение полосы предразрушения принимается в виде $y_1 = f_1(x_1)$, $|x_1| \leq \ell$. Размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Так как зона предразрушения (прослойка “перенапряженного” материала) мала по сравнению с остальной частью тормозного барабана, ее можно мысленно удалить, заменив разрезом, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. В исследуемом случае возникновение дефекта типа трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала барабана.

Считаем, что полоса предразрушения ориентирована в направлении действия максимальных растягивающих напряжений, возникающих в тормозном барабане.

В центре полосы предразрушения разместим начало локальной системы координат $x_1 O_1 y_1$, ось x_1 которой совпадает с линией полосы и образует угол α_1 с осью Ox ($\theta = 0$).

Считается, что в начальной стадии образования полосы предразрушения, их размеры гораздо меньше толщины барабана.

Температурное поле описывается уравнением теории теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\omega}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -Q_b(\theta) - \quad \text{на контактной площадке,}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} - \alpha(T - T_c) = 0 - \quad \text{вне контактной площадки,} \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_0(T - T_c) = 0 - \quad \text{на наружной поверхности барабана.}$$

Здесь $T(r, \theta)$ – температурная функция; λ – теплопроводность материала барабана; a – температуропроводность материала барабана; α – коэффициент теплоотдачи с внутренней

цилиндрической поверхности барабана с температурой среды T_c ; n – нормаль к контуру барабана; α_0 – коэффициент теплоотдачи с внешней цилиндрической поверхности барабана; $Q_b(\theta)$ – интенсивность поверхностного источника тепла, приходящаяся на барабан; ω – угловая скорость вращения барабана в момент торможения автомобиля.

Используя метод возмущений, краевая задача теории теплопроводности сводится к последовательности граничных задач. В каждом приближении граничная задача решается методом разделения переменных.

Граничные условия задачи о термоупругом напряженном состоянии на внутреннем и внешнем контурах барабана при торможении автомобиля будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0, \\ \sigma_n = 0; \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{при} \quad r = \rho(\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

На берегах полосы предразрушения, на основании сказанного выше, граничные условия будут иметь вид

$$\sigma_{y_1} = \sigma_s; \quad \tau_{x_1 y_1} = \tau_s. \quad (4)$$

На основании принятого допущения о форме линии полосы предразрушения функции $f_1(x_1)$ и $f'_1(x_1)$ есть малые величины. Рассмотрим некоторую реализацию шероховатой поверхности полосы предразрушения. Граничные условия на берегах полосы предразрушения представим в следующем виде:

$$-\sigma_n + = \sigma_n - = \sigma_{y_1} \cos^2 \theta_1 + \sigma_{x_1} \sin^2 \theta_1 - 2\tau_{x_1 y_1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 = \sigma_s;$$

$$-\tau_{nt} + = \tau_{nt} - = (\sigma_{y_1} - \sigma_{x_1}) \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \tau_{x_1 y_1} (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) = \tau_s,$$

где знак “+” соответствует верхнему берегу полосы предразрушения, “-” – нижнему берегу полосы предразрушения; θ_1 – угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси $O_1 y_1$ к внешней нормали n верхнего или нижнего берега полосы предразрушения.

Так как функции $f_1(x_1)$ и $f'_1(x_1)$ являются малыми величинами, то функцию $f_1(x_1)$ можно представить в следующем виде

$$f_1(x_1) = \varepsilon_1 H_1(x_1) \quad |x_1| \leq \ell,$$

где ε_1 – малый параметр.

Напряжения и перемещения в тормозном барабане ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε_1 степени выше первой.

Граничные условия задачи в нулевом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} = 0; \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0, \\ \sigma_r^{(0)} = 0; \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma_{y_1}^0 = \sigma_s; \quad \tau_{x_1 y_1}^0 = \tau_s \quad \text{на берегах полосы предразрушения.}$$

Краевые условия задачи в первом приближении имеют вид

$$\sigma_r^{(1)} = 0; \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_0, \quad (6)$$

$$\sigma_r^{(1)} = N_1; \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T_1.$$

На берегах зоны предразрушения

$$\sigma_{y_1}^{(1)} = N_2; \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = T_2.$$

Здесь $N_1 = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{(0)} \frac{1}{R} \frac{dH(\theta)}{d\theta}$ при $r = R$;

$$T_1 = (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \frac{1}{R} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r}; \quad (7)$$

$$N_2 = 2\tau_{x_1 y_1}^{(0)} \frac{dH_1}{dx_1} - H_1 \frac{\partial \sigma_{y_1}^{(0)}}{\partial y_1} \text{ при } y_1 = 0;$$

$$T_2 = (\sigma_{x_1}^{(0)} - \sigma_{y_1}^{(0)}) \frac{dH_1}{dx_1} - H_1 \frac{\partial \tau_{x_1 y_1}^{(0)}}{\partial y_1}.$$

Для получения решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [6].

В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений определяется уравнениями

$$\Delta F^{(0)} = \beta T^{(0)}; \quad \Delta F^{(1)} = \beta T^{(1)}, \quad (8)$$

где $\beta = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha_*$; Δ – оператор Лапласа; μ – коэффициент Пуассона материала барабана; α_* – коэффициент линейного температурного расширения.

Температурные функции $T^{(0)}(r, \theta)$ и $T^{(1)}(r, \theta)$ берутся в виде ряда Фурье из решения задачи теории теплопроводности (1)–(2).

Для решения дифференциальных уравнений (6) использовали методы разделения переменных и вариации постоянных. После определения $F^{(0)}(r, \theta)$ по известным формулам [5] вычисляем соответствующие напряжения $\bar{\sigma}_r^{(0)}$, $\bar{\sigma}_\theta^{(0)}$, $\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}$ в нулевом приближении.

Найденные напряжения не будут удовлетворять граничным условиям (5) термоупругого напряженного состояния, возникающего от действия неравномерного температурного поля в тормозном барабане.

Поэтому необходимо найти второе напряженное состояние $\bar{\bar{\sigma}}_r^{(0)}$, $\bar{\bar{\sigma}}_\theta^{(0)}$, $\bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)}$.

Граничные условия задачи для отыскания второго напряженного состояния примут в нулевом приближении следующий вид

$$\bar{\bar{\sigma}}_r^{(0)} = -\bar{\sigma}_r^{(0)}; \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \text{ при } r = R, \quad (9)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_r^{(0)} = -\bar{\sigma}_r^{(0)}; \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \text{ при } r = R_0.$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{y_1}^{(0)} = \sigma_s - \bar{\sigma}_{y_1}^{(0)}; \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_1 y_1}^{(0)} = \tau_s - \bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(0)} \quad \text{на берегах полосы предразрушения.} \quad (10)$$

Комплексные потенциалы, описывающие второе напряженное состояние ищем в виде

$$\Phi^{(0)}(z) = \Phi_0^{(0)}(z) + \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z); \quad (11)$$

$$\Psi^{(0)}(z) = \Psi_0^{(0)}(z) + \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z).$$

Здесь $\Phi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$; $\Psi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$;

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{g_1^0(t) dt}{t - z_1}; \quad \Psi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-\ell}^{\ell} \left[\frac{\overline{g_1^0(t)}}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1 g_1^0(t) e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} \right] dt;$$

$$T_1 = t e^{i\alpha_1} + z_1^0; \quad z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0),$$

где $g_1^0(t)$ – искомая функция, характеризующая раскрытие перемещений при переходе через линию полосы предразрушения

$$g_1^{(0)}(x_1) = \frac{2G}{i(1+\kappa_0)} \frac{\partial}{\partial x_1} [u_1^+(x_1, 0) - u_1^-(x_1, 0) + i(v_1^+(x_1, 0) - v_1^-(x_1, 0))].$$

Комплексные потенциалы $\Phi_2^{(0)}(z)$ и $\Psi_2^{(0)}(z)$ ищем в виде

$$\Phi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \left\{ \left(\frac{1}{z\bar{T}_1 - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_1 e^{i\alpha_1} g_1^0(t) + \left[\frac{\bar{T}_1}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_1 - 2z + T_1}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1^0(t)} \right\} dt;$$

$$\Psi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \left[\frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1^0(t) + \left(z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1 \bar{T}_1 - 3T_1 \bar{T}_1 \right) \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1^0(t)} \right] dt.$$

Сумма (8) комплексных потенциалов описывает второе напряженное состояние тормозного барабана с условиями (9)–(10) и раскрытием смещений $g_1^{(0)}(x_1)$ на отрезке $|x_1| \leq \ell$.

Удовлетворяя функциями (11) краевым условиям (10) на берегах полосы предразрушения, получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1^{(0)}(x_1)$:

$$\int_{-\ell}^{\ell} [R(t, x) g_1^{(0)}(t) + S(t, x) \overline{g_1^{(0)}(t)}] dt = \pi f^0(x) \quad (12)$$

$$|x| \leq \ell.$$

$$\text{Здесь } f^0(x) = -(\sigma_s - i\tau_s) - \left(\bar{\sigma}_{y_1}^{(0)} - i\bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(0)} \right) - \left[\Phi_0^{(0)}(x) + \overline{\Phi_0^{(0)}(x)} + x \overline{\Phi_0^{(0)'(x)}} + \overline{\Psi_0^{(0)}(x)} \right]$$

К сингулярному интегральному уравнению для внутренней полосы предразрушения следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи и выражающее однозначность смещений при обходе контура полосы предразрушения

$$\int_{-\ell}^{\ell} g_1^{(0)}(t) dt = 0. \quad (13)$$

Удовлетворяя краевым условиям (9), записанных через комплексные потенциалы, функциями (8), получаем после некоторых преобразований бесконечную линейную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_k, b_k потенциалов $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$.

Ввиду некоторой громоздкости система алгебраических уравнений не приводится. В правую часть этой системы входят интегралы от искомых функций $g_1^{(0)}(x_1)$. С помощью формул Колосова – Мухелишвили [6] и комплексных потенциалов (8) находим напряжения $\bar{\sigma}_r^{(0)}, \bar{\sigma}_\theta^{(0)}, \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}$. Применяя процедуру алгебраизации [7], комплексное сингулярное интегральное уравнение сведем к системе Малгебраических уравнений относительно значений искомой функции $g_1^{(0)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) в чебышевских узлах.

Для замкнутости полученных алгебраических уравнений не хватает двух уравнений, определяющих размеры полосы предразрушения. Условиями, служащими для определения размеров полос предразрушения, являются условия конечности напряжений в вершинах зоны предразрушения. Записывая условия конечности напряжений для каждой вершины полосы предразрушения, находим еще два недостающих уравнения в следующем виде:

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{(0)}(t_m) ctg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0; \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{(0)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

После решения объединенной алгебраической системы перейдем к построению решения задачи в первом приближении. На основании полученного решения находим компоненты напряжений

$$\sigma_r^{(0)} = \bar{\sigma}_r^{(0)} + \bar{\bar{\sigma}}_r^{(0)}; \quad \sigma_\theta^{(0)} = \bar{\sigma}_\theta^{(0)} + \bar{\bar{\sigma}}_\theta^{(0)}; \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} + \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)} \quad (15)$$

в тормозном барабане в нулевом приближении.

При $r = R$ находим функции N_1 и T_1 , а при $y_1 = 0$ N_2 и T_2 .

С помощью термоупругого потенциала перемещений $F^{(1)}(r, \theta)$ по известным формулам [5] находим соответствующие напряжения $\bar{\sigma}_r^{(1)}$, $\bar{\sigma}_\theta^{(1)}$, $\bar{\tau}_{r\theta}^{(1)}$ в первом приближении. Найденные напряжения не удовлетворяют граничным условиям (6). Поэтому необходимо найти второе напряженное состояние $\bar{\bar{\sigma}}_r^{(1)}$, $\bar{\bar{\sigma}}_\theta^{(1)}$, $\bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(1)}$.

Граничные условия задачи для отыскания второго напряженного состояния примут в первом приближении следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r^{(1)} &= N_1 - \bar{\sigma}_r^{(1)}; & \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(1)} &= T_1 - \bar{\tau}_{r\theta}^{(1)} \text{ при } r = R, \\ \bar{\bar{\sigma}}_r^{(1)} &= -\bar{\sigma}_r^{(1)}; & \bar{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(1)} &= -\bar{\tau}_{r\theta}^{(1)} \text{ при } r = R_0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{y_1}^{(1)} = N_2 - \bar{\sigma}_{y_1}^{(1)}; \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_1 y_1}^{(1)} = T_2 - \bar{\tau}_{x_1 y_1}^{(1)} \quad \text{на берегах полосы предразрушения.} \quad (17)$$

Граничные условия задачи (16)–(17) для отыскания второго напряженного состояния с помощью формул Колосова – Мусхелишвили можно записать в виде краевой задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$. Комплексные потенциалы $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$ ищутся в виде аналогично (8) с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения задачи такой же, как в нулевом приближении. После определения искомым величин для прогнозирования предельного состояния барабана тормозного механизма автомобиля, когда может появиться трещина, использовали критерий критического раскрытия берегов полосы предразрушения

$$|(u_1^+ - u_1^-) - i(v_1^+ - v_1^-)| = \delta_c, \quad (18)$$

где δ_c – характеристика трещиностойкости материала барабана, определяемая опытным путем.

Полученные в работе соотношения позволяют исследовать термоупругое напряженное состояние тормозного барабана с искривленной полосой предразрушения, прогнозировать предельный уровень напряженного состояния, при котором происходит трещинообразование в барабане при торможении автомобиля.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гейдаров, Ш. Г. Исследование дефектов в тормозном барабане автомобиля / Ш. Г. Гейдаров // Ученые записки АзГУ. – 1999. – Т. VIII. – № 2. – С. 171–175.

[2] Гейдаров, Ш. Г. Предельно-равновесное состояние тормозного барабана при наличии малых трещин в момент торможения автомобиля / Ш. Г. Гейдаров // Динамика и прочность механических систем. – Баку : Элм, 1997. – С. 13–27.

[3] Мирсалимов, В. М. Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары / В. М. Мирсалимов // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – № 2. – С. 35–45.

[4] Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.

[5] Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

[6] *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус – М. : Физматгиз, 1963. – 252 с.

[7] *Чичинадзе, А. В.* Материалы в триботехнике нестационарных процессов / А. В. Чичинадзе, Р. М. Матвеевский, Э. Д. Браун. – М. : Наука, 1986. – 296 с.

[8] *Newcomb, T. P.* Energy dissipated during braking / T. P. Newcomb // *Wear.* – 1980. – Vol. 32. – No 2. – P. 32–43.

Зульфугаров Эльчин Иззетали оглы,

аспирант, Азербайджанский технический университет, г. Баку

e-mail: irakon63@hotmail.com

E. I. Zulfugarov

**THERMAL STRESS STATE IN THE DRUM WITH THE CURVED
PREFRACTURE ZONE AT BRAKING THE WHEEL MACHINE**

Azerbaijan Technical University

Abstract. The problem about temperature stresses in a brake drum is considered at braking the wheel machine. It is considered, that at repeated braking on macules an actual contact of elements of frictional pair brake system there is a formation burns, thermal spots and the centers of microcracks. The mathematical description of model of nucleation of the crack having small casual deviations {rejections} from the rectilinear form, in a brake drum is lead during braking the wheel machine.

Keywords: the brake drum, the curved zone of prefracture, fracturing in a drum.

REFERENCES

- [1] *Qeydarov, SH. G.* Research of defects in a brake drum of the automobile // Scientists of note AzTU. – 1999. – Vol. VIII. – No 2. – P. 171–175.
- [2] *Qeydarov, SH. G.* Limiting a condition of a brake drum at presence of small cracks at the moment of braking the automobile / SH. G. Qeydarov // Dynamics and durability of mechanical systems. – Baku : Elm, 1997. – P. 13–27.
- [3] *Mirsalimov, V. M.* Nucleation of defect such as a crack in the cartridge of contact pair / V. M. Mirsalimov // Mathematical modelling. 2005. – Vol. 17. – № 2. – P. 35–45.
- [4] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [5] *Mushelishvili, N. I.* 1966. Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Mushelishvili. – Amsterdam : Kluwer. 1977. – 707 p.
- [6] *Parkus, H.* Instationare Warmes – Pannungen. Wien : Springer, 1959. – 252 p.
- [7] *Chichinadze, A. V.* Material in tribo-engineering non-stationary processes / A. V. Chichinadze, R. M. Matveevskiy, E. D. Brown. – M. : Nauka, 1986. – 296 p.
- [8] *Newcomb, T. P.* Energy dissipated during braking / T. P. Newcomb // Wear. – 1980. – Vol. 32. – No 2. – P. 32–43.

Zulfugarov, Elchin Izzatali oglu

Postgraduate student, Azerbaijan Technical University, Baku

ТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматривается обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной частью четвертой степени, обладающее подвижными особыми точками и в общем случае не разрешимое в квадратурах. В статье предлагаются точные критерии существования подвижных особых точек решений данного уравнения. Критерии необходимы для построения подвижных особых точек решения уравнения с заданной точностью. Исследования проведены для случая комплексной области.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, необходимые и достаточные условия существования, подвижные особые точки, точные критерии существования.

УДК: 517.927.4

Введение

Рассматриваемые нелинейные дифференциальные уравнения по причине наличия подвижных особых точек относятся к уравнениям, неразрешимым в общем случае в квадратурах [1]. Поэтому, к таким уравнениям нельзя применить известные численные и аналитические приближенные методы решения.

Метод приближенного решения данной категории уравнений применялся к уравнениям Абеля [2], Риккати [3], Пенлеве [4], а так же к нелинейным уравнениям первого порядка с полиномиальной частью пятой степени [5]. К дифференциальному уравнению первого порядка с полиномиальной частью четвертой степени он применяется в данной работе. Метод содержит шесть основных задач, возникающих в результате исследований. В работах [6], [7], [8], [9], [10], [11] решены три задачи из этого перечня и часть четвертой: доказательство теорем существования и единственности решения одного нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки и в области аналитичности; построение аналитических продолжений данного уравнения; исследования влияния возмущения начальных данных и подвижной особой точки на приближенное решение и получение точных критериев существования подвижных особых точек в области аналитичности. В настоящей статье предлагается решение второй части четвертой задачи: получение точных критериев существования подвижных особых точек в комплексной области (случай правильной линии). Решение этой части задачи позволит существенно продвинуться к цели: построению алгоритмов нахождения подвижных особых точек с заданной точностью.

Для осуществления поставленной задачи, в работе используются методы аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики, математического анализа.

Поступила 19.11.2013

Постановка задачи. Рассмотрим случай комплексной области.

Для оптимизации поиска подвижных особых точек, так же как и в публикациях [1], [2], [3], [10] используется понятие правильной линии, данное в работе [4].

Определение: Линия в некоторой области комплексной плоскости называется правильной, если для координат точек данной линии существует взаимно-однозначное бинарное соответствие.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение:

$$y'(z) = f_0(z) + f_1(z) \cdot y(z) + f_2(z) \cdot y^2(z) + f_3(z) \cdot y^3(z) + f_4(z) \cdot y^4(z), \quad (1)$$

где f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 – функции комплексной переменной в некоторой области голоморфности.

Данное дифференциальное уравнение с помощью замены переменной, приводится к нормальному виду [7]:

$$y'(z) = y^4(z) + R(z), \quad (2)$$

вместе с начальным условием

$$y(z_0) = z_0, \quad (3)$$

получаем задачу Коши.

Теорема 1. Если z^* – подвижная особая точка решения задачи Коши (2)–(4), то функция $|y(z)| \rightarrow \infty$, при условии, что $z \rightarrow z^*$.

Доказательство:

Представив решение уравнения (2) в виде ряда

$$y(z) = (z - z^*)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n/3}, \quad (4)$$

где $\rho = -1/3$, $C_0 = -1/\sqrt[3]{3}$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = C_9 = 0$ [6].

Или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n-1/3} = C_0 (z - z^*)^{-1/3} + C_1 (z - z^*)^0 + C_2 (z - z^*)^{1/3} + \\ &+ C_3 (z - z^*)^{2/3} + C_4 (z - z^*)^1 + C_5 (z - z^*)^{4/3} + C_6 (z - z^*)^{5/3} + C_7 (z - z^*)^2 + \\ &+ C_8 (z - z^*)^{7/3} + C_9 (z - z^*)^{8/3} + C_{10} (z - z^*)^3 + \dots = \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{3(z-z^*)}} + C_4 (z - z^*) + C_7 (z - z^*)^2 + C_8 (z - z^*)^{7/3} + C_{10} (z - z^*)^3 + \dots = y_1(z) + y_2(z), \end{aligned}$$

где $y_1(z) = -\frac{1}{\sqrt[3]{3(z-z^*)}}$; $y_2(z) = C_4 (z - z^*) + C_7 (z - z^*)^2 + C_8 (z - z^*)^{7/3} + C_{10} (z - z^*)^3 + \dots$

Из этого следует, что $|y_2(z)|$, при $z \rightarrow z^*$, стремится к нулю.

Представим главную часть ряда в показательной форме

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{3(z-z^*)}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}|z-z^*|} \cdot e^{-i(1/3)\varphi},$$

где $\varphi_i = \arg(z - z^*)$, $i = 1, 2, 3$, $\varphi_1 = \frac{\varphi}{3}$; $\varphi_2 = \frac{\varphi+2\pi}{3}$; $\varphi_3 = \frac{\varphi+4\pi}{3}$, и $|e^{-i(1/3)\varphi}| \leq 1$, тогда на основании этого получаем, что при условии, что $z \rightarrow z^*$, $|y(z)| \rightarrow \infty$.

С помощью инверсии

$$\omega(z) = \frac{1}{y(z)}, \quad (5)$$

получаем из уравнения (2):

$$\omega'(z) \cdot \omega^2(z) = -1 - R(z) \cdot \omega^4(z). \quad (6)$$

Введем начальное условие

$$\omega(z_0) = \omega_0. \quad (7)$$

рассмотрим задачу Коши (7)–(8).

Теорема 2. Пусть $y(z)$ - решение задачи (2)–(4). Для того чтобы z^* являлась подвижной особой точкой решения $y(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция, обратная к решению инверсной задачи $\omega(z)$ была :

голоморфной в некоторой окрестности точки $(0, z^*)$;
выполнялись соотношения

$$z(0) = z^*, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = 0, \quad z'''(0) = -2. \quad (8)$$

Доказательство. *Необходимость.* С учетом инверсии, представив $y(z)$ в виде регулярного ряда (5), где $\rho = -1/3$, $C_0 = -1/\sqrt[3]{3}$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = C_9 = 0$ [9], [11], получим:

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z^*)^{n/3}, \quad (9)$$

где $A_0 = 0$, $A_1 = 1/C_0$, $A_2 = A_3 = A_5 = A_6 = A_9 = 0$.

Учитывая, что z^* является нулем инверсной функции и $\omega(z^*) = 0$, на основании обращения рядов [12], имеем:

$$(z - z^*)^{1/3} = B_1 \omega + B_2 \omega^2 + B_3 \omega^3 + B_4 \omega^4 + \dots,$$

где $B_1 = C_0$.

Далее следует

$$z - z^* = (B_1 \omega + B_2 \omega^2 + B_3 \omega^3 + B_4 \omega^4 + \dots)^3.$$

Или

$$z - z^* = B_1^3 \omega^3 + \tilde{B}_2 \omega^4 + \tilde{B}_3 \omega^5 + \tilde{B}_4 \omega^6 + \dots. \quad (10)$$

Данное соотношение доказывает пункт 1 теоремы. Далее при условии, что $\omega = 0$, получаем $z(0) = z^*$

Дифференцируем (12) по ω , имеем:

$$z' = 3B_1^3 \omega^2 + 4\tilde{B}_2 \omega^3 + 5\tilde{B}_3 \omega^4 + 6\tilde{B}_4 \omega^5 + \dots,$$

$$z'' = 6B_1^3 \omega + 12\tilde{B}_2 \omega^2 + 20\tilde{B}_3 \omega^3 + 30\tilde{B}_4 \omega^4 + \dots,$$

$$z''' = 6B_1^3 + 24\tilde{B}_2 \omega + 60\tilde{B}_3 \omega^2 + 120\tilde{B}_4 \omega^3 + \dots.$$

Находим $z'(0) = 0$, $z''(0) = 0$, $z'''(0) = 6B_1^3 = -2$. Что и требовалось доказать.

Достаточность.

Покажем, что z^* является подвижной особой точкой решения задачи (2)–(4).

По условию функция $z(\omega)$ голоморфна в некоторой окрестности точки $(0, z^*)$, исходя из условия, разложим её в степенной ряд:

$$z(\omega) = B_0 + B_1 \omega + B_2 \omega^2 + B_3 \omega^3 + B_4 \omega^4 + \dots. \quad (11)$$

Дифференцируя (12) по ω , получим:

$$z' = B_1 + 2B_2 \omega + 3B_3 \omega^2 + 4B_4 \omega^3 + 5B_5 \omega^4 \dots,$$

$$z'' = 2B_2 + 6B_3\omega + 12B_4\omega^2 + 20B_5\omega^3 \dots ,$$

$$z''' = 6B_3 + 24B_4\omega + 60B_5\omega^4 \dots .$$

Из (9), (12) и последних соотношений находим:

$$B_0 = z^*, B_1 = 0, B_2 = 0, B_3 = -\frac{1}{3}.$$

Тогда (12) принимает вид:

$$z(\omega) = z^* - \frac{1}{3}\omega^3 + \tilde{B}_4\omega^4 + \tilde{B}_5\omega^5 \dots ,$$

или

$$z - z^* = -\frac{1}{3}\omega^3 + \tilde{B}_4\omega^4 + \tilde{B}_5\omega^5 \dots .$$

На основании обращения рядов [12] следует, что

$$\omega(z) = A_1(z - z^*)^{1/3} + A_2(z - z^*)^{2/3} + A_3(z - z^*) + \dots ,$$

где $A_1 = -\sqrt[3]{3}$.

Принимая во внимание (6), получаем

$$y(z) = C_0(z - z^*)^{-1/3} + C_1(z - z^*)^0 + C_2(z - z^*)^{1/3} + C_3(z - z^*)^{2/3} + \dots ,$$

или

$$y(z) = (z - z^*)^{-1/3} \cdot (C_0 + C_1(z - z^*)^{1/3} + C_2(z - z^*)^{2/3} + C_3(z - z^*)^1 + \dots),$$

т. е.

$$y(z) = (z - z^*)^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n/3} ,$$

где $C_0 = -1/\sqrt[3]{3}$.

Таким образом, z^* является подвижной особой точкой решения задачи (2)–(4). Что и требовалось доказать.

Представим решение инверсного уравнения (5) в виде функции комплексных переменных

$$\omega(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) \quad (12)$$

и рассмотрим два фазовых пространства, характеризующие решение уравнения (7)

$$\Psi_1 = \{x, y, u(x, y)\}, \Psi_2 = \{x, y, v(x, y)\}.$$

Примем за G_1 область, определяющую теорему существования решения в окрестности подвижной особой точки z^* , [9]. Пусть L_1, L_2 – некоторые непрерывные правильные линии. Линии L_i ($i=1,2$) проходят через точку z^* в фазовых пространствах Ψ_1 и Ψ_2 , ($L_i \subset G_1$);

Теорема 3. *Для того чтобы точка z^* была подвижной особой точкой решения задачи Коши (2)–(3), необходимо и достаточно, чтобы, в некоторой области G_1 ($z^* \in G_1$) в фазовых пространствах Ψ_1 и Ψ_2 , функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывными относительно своих аргументов и одновременно меняли знаки при переходе через точку $z^*(x^*, y^*)$, двигаясь вдоль некоторых правильных линий L_1, L_2 соответственно ($z^* \in L_{1,2} \subset G_1$).*

Доказательство. Необходимость.

На основании работы [10] имеем представление решения в окрестности G_1 , подвижной особой точки z^* , для ряда

$$y(z) = (z - z^*)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^{n/3}, \quad (13)$$

где $\rho = -1/3$, $C_0 = -1/\sqrt[3]{3}$, $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = C_9 = 0$ [6].

В некоторой области $G_2 \subset G_1$, в которой окрестности G_1 решение $y(z)$ определяется главной частью:

$$y(z) = O\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}(z - z^*)}\right).$$

Тогда в силу инверсии для решения $\omega(z)$, уравнения (5) в области G_2 , будем иметь

$$\omega(z) = O(-\sqrt[3]{3}(z - z^*)).$$

Или

$$u(x, y) = -\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} \cdot \cos \frac{\varphi_i}{3},$$

$$v(x, y) = -\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} \cdot \sin \frac{\varphi_i}{3},$$

где $\varphi_i = \arg(z - z^*)$, $i = 1, 2, 3$, $\varphi_1 = \frac{\varphi}{3}$; $\varphi_2 = \frac{\varphi+2\pi}{3}$; $\varphi_3 = \frac{\varphi+4\pi}{3}$.

Рассмотрим два фазовых пространства, которые характеризуют уравнение (7)

$$\Psi_1 = \{x, y, u(x, y)\}, \Psi_2 = \{x, y, v(x, y)\}.$$

Двигаясь вдоль некоторых замкнутых линий L_1, L_2 проходящих через точку z^* , в соответствующих фазовых пространствах Ψ_1 и Ψ_2 , функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ меняют знаки.

Для доказательства этого утверждения, рассмотрим случай для одной Римановой поверхности ($i=1$). Перейдем к новой системе координат с началом в точке z^* .

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \cdot \cos \frac{\tilde{\varphi}_1}{3},$$

$$v(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \cdot \sin \frac{\tilde{\varphi}_1}{3},$$

где $\tilde{\varphi}_1 = \arg(\tilde{z})$.

При переходе из первого квадранта во второй, выражения $\cos \frac{\tilde{\varphi}_i}{3}$ и $\sin \frac{\tilde{\varphi}_i}{3}$ меняют знаки, что влечет за собой изменение знаков функций $u(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $v(\tilde{x}, \tilde{y})$ в фазовом пространстве Ψ_1 и Ψ_2 соответственно, что доказывает необходимость.

Достаточность. По условию теоремы $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются непрерывными относительно своих аргументов и при движении вдоль некоторых правильных линий L_1, L_2 ($L_i \subset G_1$) одновременно меняют знаки.

В силу непрерывности и обращения в нуль в точке z^* , $\omega(z)$ можно представить в следующем виде

$$\omega(z) = (z - z^*)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z - z^*)^n,$$

где $\rho > 0$.

Так как $\omega(z) = \frac{1}{y(z)}$, тогда

$$y(z) = \frac{1}{\omega(z)} = \frac{1}{(z - z^*)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z - z^*)^n} = \frac{1}{(z - z^*)^\rho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z^*)^n \Rightarrow$$

точка z^* является подвижной особой точкой алгебраического типа, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Орлов, В. Н. Связь нелинейного дифференциального уравнения с наличием и характером подвижных особых точек / В. Н. Орлов // *Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий* : сборник статей по материалам международной научно-практической конференции (Чебоксары, 12-15 августа 2013 г.): в 2 ч. Ч. 2. – Чебоксары, 2013. – С. 30–35.

[2] Орлов, В. Н. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля / В. Н. Орлов // *Известия института инженерной физики*. – 2009. – № 4 (14). – С. 12–14.

[3] Орлов, В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // *Вестник МАИ*. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.

[4] Орлов, В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. Монография / В. Н. Орлов. – М. : МПГУ, 2013. – С. 174

[5] Орлов, В. Н. Необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек решений одного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, А. З. Пчелова // *Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий* : сборник статей по материалам международной научно-практической конференции (Чебоксары, 12-15 августа 2013 г.): в 2 ч. Ч. 2. – Чебоксары, 2013. – С. 53–59.

[6] Орлов, В. Н. Об одной теореме существования нелинейного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, А. Я. Корнилов, М. П. Гузь // *Об одной теореме существования нелинейного дифференциального уравнения. Понтрягинские чтения – XXIII, XXVI, Воронежской весенней математической школы “Современные методы теории краевых задач”* (Воронеж, 3–9 мая, 2012). – Воронеж, 2012. – С. 44–47.

[7] Орлов, В. Н. О приближенном решении в области голоморфности одного нелинейного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // *Труды Третьей международной научной конференции “Математическое моделирование и дифференциальные уравнения”* (Брест, 17–22 сент., 2012). – Брест, 2012. – С. 208–212.

[8] Орлов, В. Н. Аналитическое приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния*. – 2012. – № 2 (12). – С. 75–82.

[9] Орлов, В. Н. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // *Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий* : сборник статей по материалам международной научно-практической конференции (Чебоксары, 12-15 августа 2013 г.): в 2 ч. Ч. 2. – Чебоксары, 2013. – С. 36–46.

[10] Орлов, В. Н. Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Естественные и технические науки*. – 2013. – № 4 (80). – Ч. 2. – С. 156–161.

[11] Орлов, В. Н. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения в комплексной области / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния*. – 2013. – № 3 (17). – С. 117–128.

[12] *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 436 с.

Гузь Марина Павловна,
аспирант кафедры алгебры, Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары
e-mail: archelova@mail.ru

M. P. Guz

**INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF DISTURBANCES MOVING
SINGULAR POINT ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE CAUCHY
PROBLEM OF THE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE
COMPLEX DOMAIN**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Is considered an ordinary non-linear differential equation of the first order with polynomial part of the fourth degree, having movable singularities and generally not resolvable in quadratures. The article provides precise criteria for the existence of movable singular points of solutions of the given equation. Criteria need to build a movable singular points of solutions of the equation with the required accuracy. Research carried out for the case of the complex domain.

Keywords: nonlinear differential equation, Cauchy problem, the necessary and sufficient conditions of existence, movable singular points, the exact criteria for existence.

REFERENCES

- [1] *Orlov, V. N.* Studies of the approximate solution of the second Painleve equation / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich // Differential equations. – 1989. – Vol. 25. – No. 10. – P. 1829–1832.
- [2] *Orlov, V. N.* About one constructive method of first and second Painleve transcendental meromorphic / V. N. Orlov, V. P. Filchakova // Symmetry and Analytic Method in matetychnly physics. IM NAN Ukraine. – 1998. – Vol. 19. – P. 155–165.
- [3] *Orlov, V. N.* About the approximate solution of the first Painleve equation / V. N. Orlov // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. – 2008. – No. 2. – P. 42–46.
- [4] *Orlov, V. N.* The method for the approximate solution of Riccati differential equation / V. N. Orlov // Scientific and technical vedomosti of the St. Petersburg State Polytechnical University – 2008. – No. 63. – P. 102–108.
- [5] *Orlov, V. N.* About one method for the approximate solution of matrix Riccati differential equations / V. N. Orlov // Vestnik of the Moscow Aviation Institute. – 2008. – Vol. 15. – No. 5. – P. 128–135.
- [6] *Orlov, V. N.* Precise boundaries of the area of approximate solutions of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point / V. N. Orlov // Vestnik of the Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – No. 10. – P. 192–195.
- [7] *Orlov, V. N.* Mathematical modeling of the Abel differential equation in the neighborhood of movable special point / V. N. Orlov, S. A. Redkozubov // Izvastia of the Institute of Engineering Physics. – 2010. – No. 4 (19). – P. 2–6.
- [8] *Orlov, V. N.* Precise boundaries for the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of approximate value of movable special point in the complex domain / V. N. Orlov // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. – 2010. – No. 2 (9). – P. 399–405.
- [9] *Orlov, V. N.* Method of approximate solutions of scalar and matrix Riccati differential equation. Monograph / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfektum, 2012. – 112 p.
- [10] *Orlov, V. N.* Approximate solution for a nonlinear differential equation in the region of holomorphy / V. N. Orlov, A. Z. Pchelova // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Natural and Technical Sciences. – 2012. – No. 4 (76). – P. 133–139.
- [11] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytic theory of differential equations / V. V. Golubev. – Moscow-Leningrad : Gostechizdat Publ., 1950. – 436 p.

Guz, Marina Pavlovna

*Post-graduate Student, Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University,
Cheboksary*

В. Д. Кулиев, А. К. Курбанмагомедов

К ТЕОРИИ РОСТА ТРЕЩИН ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

Аннотация. Предлагается количественная теория роста усталостных трещин, учитывающая комплексное влияние параметров нагружения, частоту нагружения, внешнюю температуру, свойства окружающей среды, структуру и геометрию тела и другие факторы.

Ключевые слова: трещина нормального разрыва, энергия активации, энергия диссипации, коэффициент интенсивности напряжений, число циклов, частота нагружения и др.

УДК: 539.1

Введение. В большинстве случаев конструкции или их силовые элементы вступают в эксплуатацию с трещиноподобными дефектами металлургического и технологического происхождения. Начальные трещины, подрастая в процессе эксплуатации, могут вызвать разрушение конструкции при сравнительно невысоких напряжениях. При этом в случае повторно-переменных нагрузок лимитирующим фактором в расчетах на прочность может оказаться скорость роста усталостной трещины, а не трещиностойкость материала непосредственно.

Как известно, факторы, влияющие на усталость, разделяют на две группы. К первой относятся условия испытания (или эксплуатации), такие, как характеристики цикла, частоты нагружения, температура, свойства окружающей среды и т. д., к другой – свойства самих испытываемых материалов, зависящие от их химического состава и структуры, от состояния и конфигурации поверхности и т. д.

В литературе известно (см. напр. [1], [2], [3]) много формул для скорости роста усталостных трещин. Эти формулы получены в основном эмпирическим способом или на основе феноменологических подходов.

Все эмпирические формулы для скорости роста усталостных трещин, предложенными разными исследователями, имеют недостатки (см. напр. [3]): во-первых каждая формула учитывает влияние лишь некоторых отдельных факторов на рост усталостных трещин; во-вторых, описывает процесс роста трещины лишь на отдельных участках диаграммы усталостного разрушения.

Формулы, полученные на основе феноменологической модели квазихрупкого развития усталостных трещин, либо не учитывают влияния кинетических эффектов на рост усталостных трещин, либо учитывают, используя модель Журкова-Александрова [4].

В последнем случае скорость роста трещины пропорциональна фактору Больцмана

$$\frac{dl}{dt} = v \cdot \exp \left[\frac{-U(\sigma)}{RT} \right], \quad (1)$$

где U – энергия активации, зависящая от напряжения σ реагирующего структурного элемента в конце трещины, T – абсолютная температура, R – постоянная Больцмана.

Функцию $U(\sigma)$ можно представить в виде [1], [2]:

$$U(\sigma) = U_0 - \gamma\sigma, \sigma = \frac{\alpha K_I}{\sqrt{d}}. \quad (2)$$

Здесь d – характерный размер структурного элемента (согласно концепции Нейбера [2] d можно считать постоянной материала), K_I – коэффициент интенсивности напряжений для трещин нормального разрыва, U_0 – начальная энергия активации, α – некоторая постоянная.

Таким образом, из (1) и (2) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= v_0 e^{\lambda K_I}, \\ \left(v_0 &= v e^{\frac{U_0}{RT}}, \lambda = \frac{\gamma\alpha}{RT\sqrt{\alpha}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отсюда следует: если внешняя нагрузка σ равна нулю, то $K_I = 0$. Тогда

$$\left. \frac{dl}{dt} \right|_{\sigma=0} = v e^{\frac{U_0}{RT}}. \quad (4)$$

Это явление всегда имеет место, если рассматривается термоактивационный химический механизм последовательного обрыва связей в конце трещины.

Ниже развивается количественная теория роста усталостных трещин с учетом чистого последствия.

§1. Скорость роста трещины нормального разрыва

При монотонно возрастающей нагрузке $\frac{dK_I}{dt}$ всегда имеет место следующая формула для скорости роста трещины нормального разрыва:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl_1}{dt} + \frac{dl_2}{dt}. \quad (1.1)$$

Пусть первое слагаемое $\frac{dl_1}{dt}$ в (1.1) характеризует мгновенную реакцию. Тогда $\frac{dl_1}{dt}$ определяется приращением коэффициента интенсивности напряжений. Далее, пусть второе слагаемое $\frac{dl_2}{dt}$ характеризует чистое последствие. Тогда $\frac{dl_2}{dt}$ определяется приращением времени t .

Формула для $\frac{dl_1}{dt}$ получена в работе Г. П. Черепанова [2]. Она имеет вид:

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{\beta_1 K_1^3}{K_{IC}^2 - K_I^2} \frac{dK_I}{dt}. \quad (1.2)$$

Здесь K_{IC} – трещиностойкость материала, β_1 – постоянная материала.

Формулу (1.2) можно записать так:

$$\frac{dl_1}{dK_I} = \frac{\beta_1 K_1^3}{K_{IC}^2 - K_I^2}. \quad (1.3)$$

Аналогично модели при ползучести (см., например, модель при ползучести, предложенной Надаи [5]) скорости роста трещины $\frac{dl_2}{dt}$, характеризующее последствие, можно представить в виде:

$$\frac{dl_2}{dt} = A_1 [Sh(\lambda K_I)]^n. \quad (1.4)$$

Здесь λ, A_1 – некоторые постоянные, n ($n \geq 1$) – натуральное число.

Формулу (1.4) можно представить в виде:

$$\frac{dl_2}{dt} = \frac{A_1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} e^{\lambda(n-2k)K_I} \right]. \quad (1.5)$$

Пусть нагрузка p представляет собой периодическую функцию времени

$$p = \sigma_m + \sigma_\alpha \sin \omega t, \quad (1.6)$$

где σ_m – среднее напряжение; σ_α – амплитуда напряжений; ω – частота нагружения.

Тогда коэффициент интенсивности напряжений для трещин нормального разрыва K_I определяется формулой

$$K_I = \eta (\sigma_m + \sigma_\alpha \sin \omega t), \quad (1.7)$$

где η – некоторая функция длины трещины l и геометрии тела.

В дальнейшем предполагается, что $\sigma_m \geq \sigma_\alpha > 0$.

Из (1.7) следует:

$$\begin{aligned} K_{I \max} &= \eta (\sigma_m + \sigma_\alpha), \\ K_{I \min} &= \eta (\sigma_m - \sigma_\alpha). \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} 2\eta\sigma_m &= K_{I \max} + K_{I \min} \\ 2\eta\sigma_\alpha &= K_{I \max} - K_{I \min} \end{aligned} \quad (1.8)$$

В силу формул (1.1), (1.2) и (1.5) находим скорости роста трещин:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\beta_1 K_I^3}{K_{IC}^2 - K_I^2} \frac{dK_I}{dt} + \frac{A_1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} e^{\lambda(n-2k)K_I} \right]. \quad (1.9)$$

§2. Чистое последствие

Пусть в выражении (1.9) первое слагаемое пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Тогда из (1.9) с учетом соотношения (1.7) получаем

$$\frac{dl_2}{dt} = \frac{A_1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} e^{\lambda\eta(n-2k)(\sigma_m + \sigma_\alpha \sin \omega t)} \right]. \quad (2.1)$$

Положим, что в течение одного цикла величина η остается неизменной. Интегрируя уравнение (2.1) от нуля до T (где T – период циклического нагружения) в силу формулы (1.8. 109 а) в [6], получаем приращение длины трещины Δl_2 в течение одного цикла.

$$\Delta l_2 = \frac{A_1 2\pi}{2^n \omega} \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} \exp \left[\frac{\lambda}{2(n-2k)(K_{I \max} + K_{I \min})} \right] l_0 \left[\frac{\lambda}{2(n-2k)(K_{I \max} - K_{I \min})} \right] \right\}. \quad (2.2)$$

Здесь $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [6].

Из (2.2) при $n = 4$ замечая, что $I_0(-x) = I_0(x)$ имеем

$$\Delta l_2 = \frac{2\pi A_1}{8\omega} \{ ch [2\lambda (K_{I \max} + K_{I \min})] I_0 [2\lambda (K_{I \max} - K_{I \min}) + 3 - 4ch[\lambda (K_{I \max} + K_{I \min})] I_0[\lambda (K_{I \max} - K_{I \min})] \}. \quad (2.3)$$

Этот случай рассмотрен в работе [7].

§3. Мгновенная реакция

Пусть в формуле (1.9) второе слагаемое пренебрежительно мало по сравнению с первым. Тогда из (1.9) получаем

$$\frac{dl_1}{dK_I} = \frac{\beta_1 K_I^3}{K_{IC}^2 - K_I^2}. \quad (3.1)$$

Пусть при разгрузке от $K_{I \max}$ до $K_{I \min}$ длина трещины l_1 не изменяется. Интегрируя при этом выражения (3.1) от $K_{I \min}$ до $K_{I \max}$, получаем приращение длины трещины Δl_1 в течение одного цикла

$$\Delta l_1 = -\beta \left(\frac{K_{I\max}^2 - K_{I\min}^2}{K_{IC}^2} + \frac{\ln(K_{IC}^2 - K_{I\max}^2)}{K_{IC}^2 - K_{I\min}^2} \right), \quad (3.2)$$

где $(\beta = \beta_1 K_{IC}^2)$.

Этот случай рассмотрен Г. П. Черепановым в работе [2].

§4. Общий случай. Скорость роста усталостных трещин

Если механизм пластичности и кинетические эффекты действуют независимо, то прирост длины трещины в течение одного цикла

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Здесь Δl_1 – определяется формулой (3.2), Δl_2 – формулой (2.2).

Переходя к непрерывным переменным, находим искомую скорость роста усталостных трещин в общем случае:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dN} = & -\beta \left(\frac{K_{I\max}^2 - K_{I\min}^2}{K_{*f}^2} + \ln \frac{K_{*f}^2 - K_{I\max}^2}{K_{*f}^2 - K_{I\min}^2} \right) + \\ & + \frac{v_0}{2^n \omega} \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} \exp \left[\frac{\lambda}{2} (n-2k)(K_{I\max} + \right. \right. \\ & \left. \left. + K_{I\min}) I_0 \left[\frac{\lambda}{2} (n-2k)(K_{I\max} - K_{I\min}) \right] \right\} \equiv f(K_{I\max}, K_{I\min}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$v_0 = 2\pi A_1.$$

Здесь N – число циклов нагружения. Величина K_{*f} равна K_{IC} при плоской деформации и равна K_C при плоском напряженном состоянии, соответственно.

Заметим, что постоянные β, v_0, λ и n определяются из диаграммы усталостного разрушения.

§5 Анализ скорости роста усталостных трещин (4.1)

В формуле (4.1) постоянную λ всегда можно представить в виде:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{K_{*f}}, \quad (5.1)$$

где λ_0 – постоянная материала, определяемая экспериментально.

Далее, пусть $\beta \ll \frac{v_0}{\omega}$ и $n = 1$. Тогда из (4.1) имеем

$$\frac{dl}{dN} \approx \frac{v_0}{\omega} Sh \left[\frac{\lambda}{2} (K_{I\max} + K_{I\min}) \right] I_0 \left[\frac{\lambda}{2} (K_{I\max} - K_{I\min}) \right]. \quad (5.2)$$

Если $\frac{\lambda}{2} (K_{I\max} - K_{I\min}) \gg 1$, то

$$\frac{dl}{dN} \approx \frac{v_0^*}{\omega} e^{\frac{\lambda}{2} (K_{I\max} + K_{I\min})} I_0 \left[\frac{\lambda}{2} (K_{I\max} - K_{I\min}) \right], \quad (5.3)$$

где $(v_0^* = \frac{v_0}{2})$.

Этот случай соответствует термоактивационному химическому механизму обрыва связей в конце трещины [1].

Если $n = 4$, то из (4.1) следует:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dN} = & -\beta \left(\frac{K_{I\max}^2 - K_{I\min}^2}{K_{*f}^2} + \ln \frac{K_{*f}^2 - K_{I\max}^2}{K_{*f}^2 - K_{I\min}^2} \right) + \\ & + \frac{v_0}{8\omega} \{ ch [2\lambda (K_{I\max} + K_{I\min})] I_0 [2\lambda (K_{I\max} - K_{I\min})] + 3 - \\ & - 4ch [\lambda (K_{I\max} + K_{I\min})] I_0 [\lambda (K_{I\max} - K_{I\min})] \}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Пусть в формуле (5.4) $K_{I\min} = 0$ и $K_{I\max} \ll K_{*f}$. Разложив функции

$$\begin{aligned} & \ln \left(1 - \frac{K_{I \max}^2}{K_{*f}^2} \right), Ch \left(2\lambda \frac{K_{I \max}}{K_{*f}} \right), \\ & I_0 \left(2\lambda \frac{K_{I \max}}{K_{*f}} \right), Ch \left(\frac{\lambda_0 K_{I \max}}{K_{*f}} \right), \\ & I_0 \left(\frac{\lambda_0 K_{I \max}}{K_{*f}} \right). \end{aligned}$$

в ряд и отбросив слагаемые $\left(\frac{K_{I \max}}{K_{*f}} \right)^6$ из (5.4) приходим к формуле Пэриса [8]

$$\frac{dl}{dN} = CK_{I \max}^4. \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что формула Пэриса (5.5) имеет место при малых значениях $K_{I \max}$ в диаграмме усталостного разрушения.

Формула Пэриса также имеет место, если $K_{I \max} \ll K_{*f}$ и $n \geq 5$.

В работе [10] методом Винера-Хопфа дано точное аналитическое решение задачи о трещине, выходящей на границу свободной полуплоскости, когда пластическая зона сосредоточена на продолжении трещины некоторой длины d (модель Леонова-Панасюка-Дагдейла). Заметим, что на таких материалах, как малоуглеродистая сталь, реализуется именно указанная форма пластической зоны [11].

Далее в [6] получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения безразмерной длины трещины λ^* ($\lambda^* = \frac{2l\sigma_s}{\pi E \gamma_*}$, где σ_s – предел текучести, E – модуль упругости, γ_* – полная диссипация энергии на единицу длины трещины) в зависимости от безразмерной нагрузки β^* ($\beta^* = \frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}$, где σ – приложенная на берегах трещины нагрузка) при монотонном нагружении:

$$\frac{d\beta^*}{d\lambda^*} = f_0(\beta^*, \lambda^*). \quad (5.6)$$

Здесь $f_0(\beta^*, \lambda^*)$ – известная функция (см. [6], с. 269, (2.8.41)).

Уравнение (5.6) дает возможность исследовать докритический рост трещин в упруго-пластических телах при монотонном нагружении. Уравнение (5.6) может быть использовано также для решения задачи о развитии краевой трещины (в рамках модели Леонова-Панасюка-Дагдейла) вплоть до разрушения при любом пути нагружения, в частности при циклической нагрузке, если пренебречь влиянием остаточных напряжений. Рост трещин при этом происходит на каждом этапе нагружения, а при разгрузке длина трещины остается постоянной. Используя этот подход, можно определить число циклов до разрушения (см. рис. 2.19, в [6]), когда неприменимо условие “тонкой структуры” [2] конца трещины (при развитии трещин в стадии малоциклового усталости или при развитии усталостных микротрещин условие “тонкой структуры” часто не выполняется).

Интегрируя (5.6) от β_{\min}^* до β_{\max}^* и принимая λ^* постоянной в течение одного цикла, получаем

$$\frac{d\lambda^*}{dN} = \int_{\beta_{\min}^*}^{\beta_{\max}^*} \frac{d\beta^*}{f_0(\beta^*, \lambda^*)} \equiv F(\beta_{\max}^*, \beta_{\min}^*, \lambda^*). \quad (5.7)$$

Вычисляя интеграл (5.7) при $d \ll l$, приходим к формуле Г. П. Черепанова, полученной на основе обобщенной энергетической концепции [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dN} &= -\beta \left(\frac{K_{I \max}^2 - K_{I \min}^2}{K_C^2} + \frac{\ln(K_C^2 - K_{I \max}^2)}{K_C^2 - K_{I \min}^2} \right), \\ \beta &= \frac{\pi K_C^2}{12\sigma_s}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Очевидно, в формуле (5.8) отсутствуют влияния кинетических эффектов.

§6 Влияние различных факторов на рост усталостных трещин. Сравнение теории с имеющимися экспериментальными данными

6.1 Влияние напряжения и коэффициента асимметрии цикла на рост трещины

Среднее напряжение σ_m и коэффициент асимметрии R по-разному влияют на скорость роста трещины в зависимости от их значений, условий нагружения, интервалов скоростей роста и материала. В общем случае при увеличении σ_m и R разрушение ускоряется. Существенную роль при этом играют пластическая деформация и релаксационные явления. Поэтому материалы неодинаково чувствительны к воздействию σ_m и R . Исследована скорость роста усталостной трещины в стали повышенной прочности *15G2ANb* при растяжении для двух значений коэффициента асимметрии цикла R (рис. 1). Результаты данных исследований хорошо описываются уравнением (4.1) в интервале изменения скоростей от 10^{-8} до 10^{-6} м/цикл.

Показана кинетическая диаграмма усталостного разрушения (КДУР) углеродистой стали с содержанием 0,55% С при различных значениях R (рис.2). Сильное влияние R наблюдается при малых значениях $\frac{dl}{dN}$. Теоретические кривые построены согласно формуле (4.1). При низких значениях скоростей роста трещин зависимость (4.1) хорошо аппроксимирует экспериментальные данные.

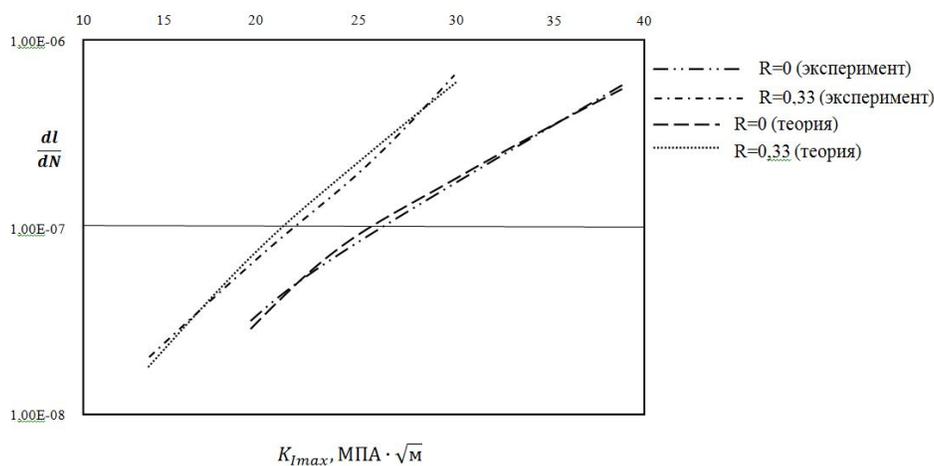


Рис. 1. КДУР стали 15G2ANb при циклическом растяжении: $R=0$ и $R=0,33$ (см. [7])

6.2 Влияние частоты на рост трещины

Скорость роста усталостных трещин увеличивается с уменьшением частоты нагружения. Эффект частоты, количественно незначительный при нормальных условиях испытания, растет с увеличением температуры. На рис. 3 приведены экспериментальные данные по росту усталостных трещин в титановом сплаве *Ti-8Al-1Mo-1V* в соленой воде при двух различных частотах нагружения. Теоретические кривые построены согласно формуле (4.1).

6.3 Влияние температуры на рост трещины

Обобщение исследований, выполненных на различных материалах в широком диапазоне температурных условий, позволяет заключить, что повышение температуры увеличивает скорость роста усталостных трещин как на воздухе, так и в жидкой среде.

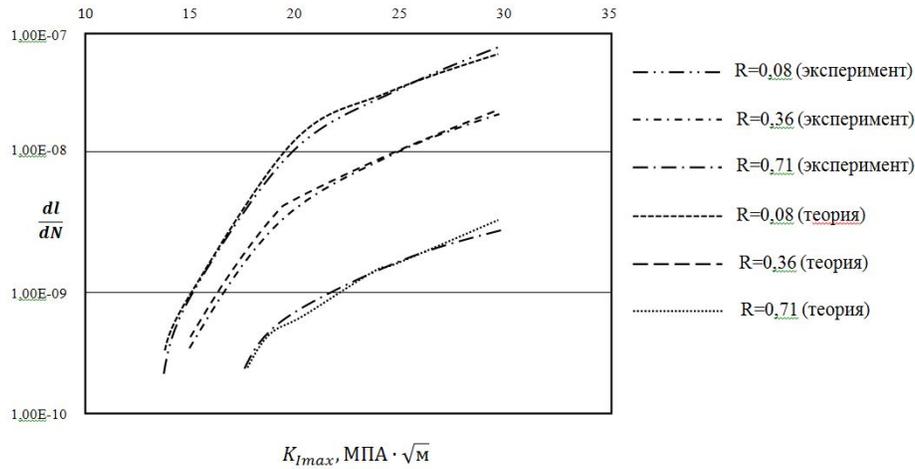


Рис. 2. КДУР углеродистой стали с содержанием 0,55 С и 0,66 Мп при разных значениях коэффициента R (см. [7])

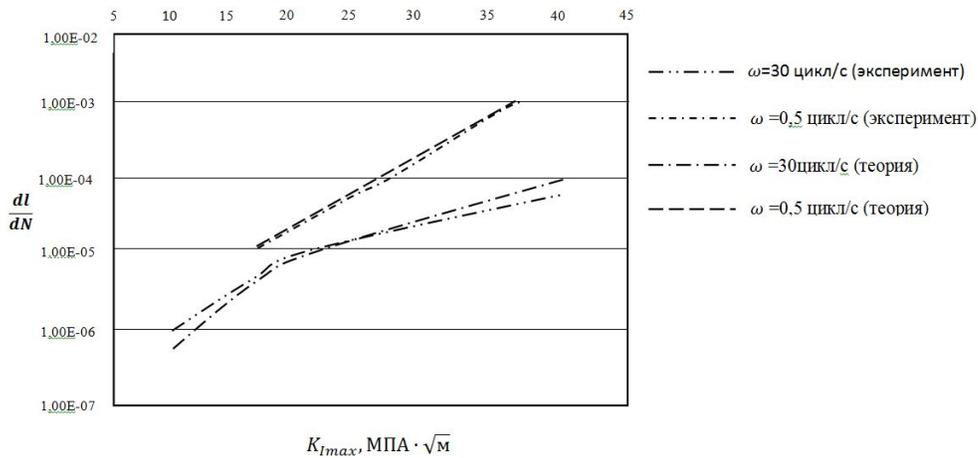


Рис. 3. Титанового сплава Ti-8Al-1Mo-1V в соленой воде при двух различных частотах нагружения (см. [7])

На рис. 4 приведены КДУР сплава *Co-Ni-Cr-W* при разных температурах. Теоретические кривые построены по формуле (4.1). Из рис. 4 видно, что зависимость (4.1) хорошо описывает экспериментальные данные при больших скоростях роста усталостной трещины $\frac{dl}{dN} > 10^{-7}$ м/цикл.

6.4 Влияние различных сред на рост трещины

Среды, отличные от лабораторных (комнатных), существенно влияют на скорость роста трещины в зависимости от их свойств и особенно, от чувствительности материала к воздействию среды, проявляющейся также и в трещиностойкости в этой среде. Данное влияние заметно снижается при высоких значениях ΔK_I .

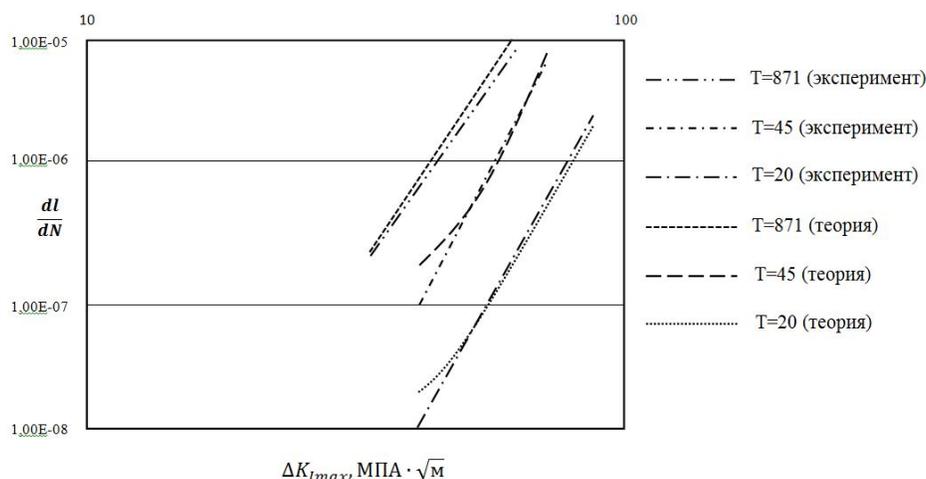


Рис. 4. КДУР сплава Co-Ni-Cr-W при разных температурах (см. [7])

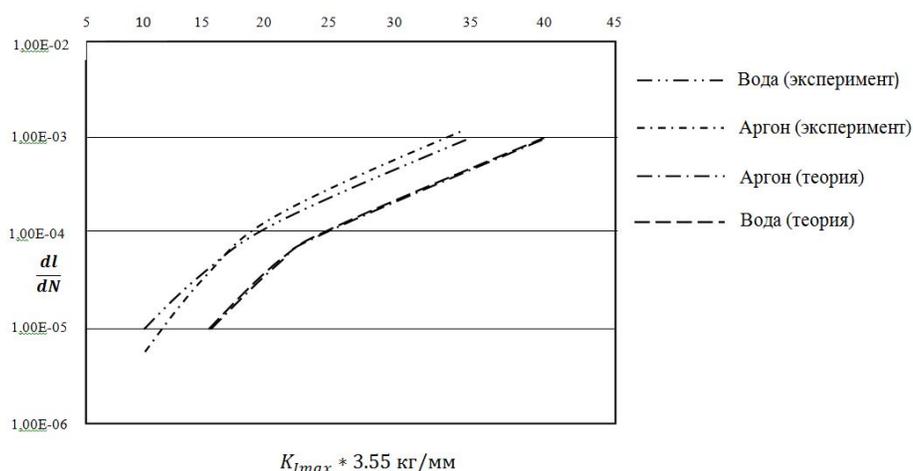


Рис. 5. КДУР сплава AlCuMg в аргоне и дистиллированной воде (см. [3], [4])

Процесс разрушения (в том числе усталостное разрушение) с трещиной исследован в [1], [2], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68]. Результаты этих исследований могут быть успешно использованы при оценке прочности и усталостной долговечности силовых элементов конструкций из многослойных материалов (см., например, [6]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кулиев, В. Д. Влияние частоты нагружения и инактивных сред на рост усталостных трещин / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // Проблема прочности. – 1972. – № 1.
 [2] Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974.

- [3] *Кулиев, В. Д.* Рост трещин при циклическом и переменном нагружении / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов, Х. Халманов // В сб. : Усталость и вязкость разрушения металлов. – М. : Наука, 1974.
- [4] *Кулиев, В. Д.* Влияние параметров нагружения на рост усталости трещин / В. Д. Кулиев // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 246. – № 3.
- [5] *Nadai, A.* Plasticity, McGraw-Hill Book Co., N. Y. – London, 1931. (Русск. пер.: Надаи А., Пластичность, ОНТИ, Москва, 1937)
- [6] *Кулиев, В. Д.* Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев. – М. : Физматлит, 2005.
- [7] *Кулиев, В. Д.* Усталостная долговечность многослойных материалов / В. Д. Кулиев, О. Д. Гречухина, А. Ю. Лоран // Материалы X Международного семинара “Технологические проблемы прочности”. – Подольск : ПИ МГОУ, 2003. – С. 64–68.
- [8] *Пэрис* Критический анализ законов распространения трещин / Пэрис, Ф. Эрдоган // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Сер. Д. – 1964. – № 4.
- [9] *Kuliev, V. D.* Fracture and strength of the bimetal under thermal loading. – Mechanic of impact loading: Prog. 2nd Int. symposium / V. D. Kuliev, Yu. V. Zaytsev, O. B. Zlochevskaia. – Sendai, Japan, 1992.
- [10] *Кулиев, В. Д.* Пластическая деформация на конце краевой трещины / В. Д. Кулиев // ПММ. – 1979. – Т. 43. – Вып. 1.
- [11] *Dugdale, D. S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J.Mech. and Phys. Solids. – 1960. – № 8.
- [12] *Kuliev, V. D. Zaytsev Yu. V.* Experimental investigation of the fatigue fracture of bimetal reactor vessels – Composite materials and structures symposium / V. D. Kuliev, Yu. V. Zaytsev. – Pekinm China, 1992.
- [13] *Кулиев, В. Д.* Влияние симметричных отростков в конце трещины на ее развитие / В. Д. Кулиев // Прикл. Мех. 1979. – Т. 15. – № 8.
- [14] *Кулиев, В. Д.* К теории разложения функций в двойной ряд по бесселевым функциям целых порядков / В. Д. Кулиев // Новые технологии. Сер. Матем. – 2000. – № 6.
- [15] *Кулиев, В. Д.* Некоторые задачи о ветвлении трещины сдвига в кусочно однородной упругой среде / В. Д. Кулиев // Докл. АН Азерб. ССР. – 1979. – № 6.
- [16] *Кулиев, В. Д.* Некоторые проблемы механики разрушения и связанной с ней математики на рубеже XXI века / В. Д. Кулиев // Новые технологии. Сер. Матем. – 1999. – № 2.
- [17] *Кулиев, В. Д.* Новый метод решения канонических сингулярных задач теории упругости кусочно однородных сред / В. Д. Кулиев // В сб.: Механика разрушения. – М. : Изд-во “Истек”, 1999.
- [18] *Кулиев, В. Д.* О росте усталостных трещин / В. Д. Кулиев // В сб.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – М. : МАИ им. С. Орджоникидзе, 1978. – Вып. 467.
- [19] *Кулиев, В. Д.* Пластическая деформация на конце клина / В. Д. Кулиев // Прикл. мех. – 1979. – Т. 15. – № 3.
- [20] *Кулиев, В. Д.* Преломление трещины продольного сдвига / В. Д. Кулиев // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249. – № 2.
- [21] *Кулиев, В. Д.* Связь между плотностями интегралов типа Фурье первого и второго рода / В. Д. Кулиев // Новые технологии. Сер. матем. – 2000. – № 5.
- [22] *Кулиев, В. Д.* Сингулярная задача теории упругости для полубесконечного прямоугольного выреза / В. Д. Кулиев // ПММ. – 1980. – Т. 44. – Вып. 5.
- [23] *Кулиев, В. Д.* Теория роста усталостных трещин продольного и поперечного сдвига / В. Д. Кулиев // В сб.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – М. : МАИ им. С. Орджоникидзе, 1978. – Вып. 467
- [24] *Кулиев, В. Д.* Трещина на границе раздела двух сред с ответвлением в одну из них в случае антиплоской деформации / В. Д. Кулиев // Пробл. прочности. – 1979. – № 7.

- [25] *Кулиев, В. Д.* Трещина с конечным ответвлением в кусочно однородной упругой среде / В. Д. Кулиев // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 246. – № 6.
- [26] *Кулиев, В. Д.* Краевая трещина под действием циклической температуры / В. Д. Кулиев, А. С. Ахиев // Физ.-хим. механика материалов. – 1983. – № 2.
- [27] *Кулиев, В. Д.* Разработка критериев проектирования многослойных материалов ИТЭР. Хрупкое разрушение многослойных материалов / В. Д. Кулиев, С. Е. Бугаенко, И. А. Разумовский // В сб. : Термоядерный синтез. – М. : НИКИЭТ, 1998.
- [28] *Кулиев, В. Д.* Хрупкая прочность многослойных материалов ИТЭР. Анализ особенностей НДС в зонах стыка разнородных материалов. 15th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology / В. Д. Кулиев, С. Е. Бугаенко, И. А. Разумовский. – 1999. – Seoul, Korea.
- [29] *Кулиев, В. Д.* Краевая трещина в ортотропной полуплоскости / В. Д. Кулиев, Н. Д. Жеков // Физ.-хим. Механика материалов. – 1987. – № 1.
- [30] *Кулиев, В. Д.* Сингулярные задачи теории упругости для трещин, перпендикулярных границы раздела двух сред / В. Д. Кулиев, Н. Д. Жеков // ПММ. – 1985. – Т. 49. – Вып. 3.
- [31] *Кулиев, В. Д.* Влияние остаточных напряжений на докритический рост усталостных трещин в сварных соединениях / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Проблема прочности. – 1980. – № 3.
- [32] *Кулиев, В. Д.* Влияние остаточных напряжений на прочность и долговечность сварных соединений / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Докл. АН Азерб. ССР. – 1979. – № 8
- [33] *Кулиев, В. Д.* О росте усталостных трещин в панели гермофюзеляжа самолета / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Авиационная техника. – 1977. – № 2
- [34] *Кулиев, В. Д.* О хрупкой прочности элементов конструкций из композиционных материалов при сдвиговых нагрузках / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // В сб.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – М. : МАИ им С. Орджоникидзе, 1980.
- [35] *Кулиев, В. Д.* Об оценке подрастания трещины в плоских элементах конструкций / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун. – Физ.-хим. Механика материалов. – 1979. – № 6.
- [36] *Кулиев, В. Д.* Определение долговечности элементов конструкций летательных аппаратов при усталостном разрушении / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Проблемы прочности. – 1979. – № 7.
- [37] *Кулиев, В. Д.* Применение механики разрушения к оценке долговечности деталей машин при усталостном нагружении / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Изв. ВУЗов. Машиностроение. – 1979. – № 4.
- [38] *Кулиев, В. Д.* Разрушение гетерогенных сред (антиплоская деформация) / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Докл. АН СССР. Механика. – 1981. – № 3.
- [39] *Кулиев, В. Д.* Трещина продольного сдвига в кусочно однородной упругой среде / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Мех. Композитных материалов. – 1981. – № 4
- [40] *Кулиев, В. Д.* Усталостная прочность элементов конструкций летательных аппаратов / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // В сб. : Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – М. : МАИ им. С. Орджоникидзе. – 1978. – Вып. 467.
- [41] *Кулиев, В. Д.* Прочность и долговечность слоистых композиционных материалов с центральной трещиной. / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун, Н. Э. Садыхов // Физ.-хим. Механика материалов. – 1989. – № 2.
- [42] *Кулиев, В. Д.* Центральная трещина в многослойных материалах / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун, Н. Э. Садыхов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – Москва-Будапешт. – 1989. – № 28.
- [43] *Кулиев, В. Д.* Полупространство с трещиной, неперпендикулярной его границы / В. Д. Кулиев, Л. А. Кипнис // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. И матем. Наук. – 1979. – № 3.
- [44] *Кулиев, В. Д.* К проблеме разрушения многослойных сред с трещинами / В. Д. Кулиев, А. К. Мехтиев, В. И. Насибов // Физ.-хим. Механика материалов. – 1986. – № 2.

- [45] *Кулиев, В. Д.* К проблеме торможения трещины в многослойных схемах / В. Д. Кулиев, В. И. Насибов // Докл. АН СССР. – 1986. – Е. 288. – № 3.
- [46] *Кулиев, В. Д.* Краевая трещина в биупругой полосе / В. Д. Кулиев, В. И. Насибов // Мех. Композитных материалов. – 1983. – № 4.
- [47] *Кулиев, В. Д.* Центральная трещина в двухкомпонентном слоистом материале / В. Д. Кулиев, В. И. Насибов // Деп. ВИНТИ. – 1982. – № 3287-82.
- [48] *Кулиев, В. Д.* Некоторые математические вопросы механики разрушения слоистых композитных сред / В. Д. Кулиев, В. И. Насибов, Г. М. Новрузов, А. М. Мамедов // Деп. АзНИИНТИ. – №1620-Аз 91, 13.03.1991.
- [49] *Кулиев, В. Д.* Плоская задача для кусочно однородной среды с ломаной трещиной / В. Д. Кулиев, Г. М. Новрузов // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20. – № 9.
- [50] *Кулиев, В. Д.* К проблеме разрушения кусочно однородной среды с трещиной / В. Д. Кулиев, Г. П. Новрузов // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 288. – № 5.
- [51] *Кулиев, В. Д.* Торможение трещины на границе раздела различных упругих сред / В. Д. Кулиев, Ю. Н. Работнов, Г. П. Черепанов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 4.
- [52] *Кулиев, В. Д.* Краевая трещина в двухслойных материалах. Аналитические и экспериментальные методы определения хрупкой прочности и остаточных напряжений / В. Д. Кулиев, И. А. Разумовский, О. Б. Злочевская // Научно-технический прогресс в машиностроении. – 1990. – Вып. 29.
- [53] *Кулиев, В. Д.* Расчетные и экспериментальные методы анализа хрупкой прочности и усталостной долговечности конструкций из многослойных материалов / В. Д. Кулиев, И. А. Разумовский, Ф. А. Искендер-заде, А. Б. Каплун // В сб.: Прочность и надежность конструкций (к 50-летию проф. В. Д. Кулиева). – М.: Изд-во МГОУ, 1993.
- [54] *Кулиев, В. Д.* К проблеме определения остаточных напряжений в биметаллах / В. Д. Кулиев, И. А. Разумовский // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 315. – № 3.
- [55] *Кулиев, В. Д.* К проблеме разрушения многослойных материалов с центральной трещиной / В. Д. Кулиев, А. И. Сейфуллаев // Деп. ВИНТИ. – 1987. – № 3967-87.
- [56] *Кулиев, В. Д.* К теории “горячих” трещин / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // ПМТФ. – 1974. – №2.
- [57] *Кулиев, В. Д.* Влияние частоты нагружения и инактивных сред на рост усталостных трещин / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // Проблема прочности. – 1972. – № 1.
- [58] *Кулиев, В. Д.* О начальном развитии линий скольжения от свободной границы тела / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // ПММ. – 1979. – Т. 43. – Вып. 2.
- [59] *Кулиев, В. Д.* Усталостная прочность валов / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // ПМТФ. – 1978. – № 6.
- [60] *Максудов, Ф. Г.* К проблеме разрушения биупругой среды / Ф. Г. Максудов, В. Д. Кулиев, Ф. А. Искендер-заде // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 264. – № 6.
- [61] *Нейбер, Г.* Концентрация напряжений / Г. Нейбер. – ГИ ТТЛ, 1947.
- [62] *Образцов, И. Ф.* К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Статическое нагружение / И. Ф. Образцов, В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 303. – № 5.
- [63] *Образцов, И. Ф.* К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Циклическое нагружение / И. Ф. Образцов, В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 303. – № 5.
- [64] *Образцов, И. Ф.* К проблеме разрушения биметаллических материалов с краевой трещиной / И. Ф. Образцов, В. Д. Кулиев, И. А. Разумовский, Н. Э. Фарзалибеков // Докл. АН СССР. – Т. 308. – № 3.
- [65] *Черепанов, Г. П.* Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике // ПММ. – 1977. – Т. 41. – Вып. 3.
- [66] *Кулиев, В. Д.* К теории криволинейных трещин // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. – 1978. – № 6.

[67] *Кулиев, В. Д.* Пластические линии разрыва разрыва в конце клина // Прикл. мех. – 1979. – Т. 15. – № 3.

[68] *Кулиев, В. Д.* Теория устойчивости скальных откосов с тектоническими трещинами / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // В сб. : Теоритична и приложна механика. Кн. I. – Изд-во на Българса Академия на науките, 1977.

Кулиев Валех Джафарович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: pmdekanat@rambler.ru

Курбанмагомедов Арслан Курбанмагомедович,

аспирант кафедры высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: pmdekanat@rambler.ru

V. D. Kuliev, A. K. Kurbanmagomedov

ABOUT GEOMETRICAL INTERPRETATION PHASE INVARIANT TRSOR STRESS

Moscow State Machine-Building University (MAMI)

Abstract. Proposed in the first part of summation formula used for the solution of boundary value problems of the distribution of heat in rod finite length.

Keywords: thermal conductivity, rod, Fourier series.

REFERENCES

- [1] *Кулиев, В. Д.* Влияние частоты нагружения и инактивных сред на рост усталостных трещин / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // Проблема прочности. – 1972. – № 1.
- [2] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974.
- [3] *Кулиев, В. Д.* Рост трещин при циклическом и переменном нагружении / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов, Х. Халманов // В сб. : Усталость и вязкость разрушения металлов. – М. : Наука, 1974.
- [4] *Кулиев, В. Д.* Влияние параметров нагружения на рост усталости трещин / В. Д. Кулиев // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 246. – № 3.
- [5] *Nadai, A.* Plasticity, McGraw-Hill Book Co., N. Y. – London, 1931. (Русск. пер.: Надаи А., Пластичность, ОНТИ, Москва, 1937)
- [6] *Кулиев, В. Д.* Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев. – М. : Физматлит, 2005.
- [7] *Кулиев, В. Д.* Усталостная долговечность многослойных материалов / В. Д. Кулиев, О. Д. Гречухина, А. Ю. Лоран // Материалы X Международного семинара “Технологические проблемы прочности”. – Подольск : ПИ МГОУ, 2003. – С. 64–68.
- [8] *Пэрис* Критический анализ законов распространения трещин / Пэрис, Ф. Эрдоган // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Сер. Д. – 1964. – № 4.
- [9] *Kuliev, V. D.* Fracture and strength of the bimetal under thermal loading. – Mechanic of impact loading: Prog. 2nd Int. symposium / V. D. Kuliev, Yu. V. Zaytsev, O. B. Zlochevskaja. – Sendai, Japan, 1992.
- [10] *Кулиев, В. Д.* Пластическая деформация на конце краевой трещины / В. Д. Кулиев // ПММ. – 1979. – Т. 43. – Вып. 1.
- [11] *Dugdale, D. S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – № 8.
- [12] *Kuliev, V. D. Zaytsev Yu. V.* Experimental investigation of the fatigue fracture of bimetal reactor vessels – Composite materials and structures symposium / V. D. Kuliev, Yu. V. Zaytsev. – Pekinm China, 1992.
- [13] *Кулиев, В. Д.* Влияние симметричных отростков в конце трещины на ее развитие / В. Д. Кулиев // Прикл. Мех. 1979. – Т. 15. – № 8.
- [14] *Кулиев, В. Д.* К теории разложения функций в двойной ряд по бесселевым функциям целых порядков / В. Д. Кулиев // Новые технологии. Сер. Матем. – 2000. – № 6.
- [15] *Кулиев, В. Д.* Некоторые задачи о ветвлении трещины сдвига в кусочно однородной упругой среде / В. Д. Кулиев // Докл. АН Азерб. ССР. – 1979. – № 6.
- [16] *Кулиев, В. Д.* Некоторые проблемы механики разрушения и связанной с ней математики на рубеже XXI века / В. Д. Кулиев // Новые технологии. Сер. Матем. – 1999. – № 2.
- [17] *Кулиев, В. Д.* Новый метод решения канонических сингулярных задач теории упругости кусочно однородных сред / В. Д. Кулиев // В сб.: Механика разрушения. – М. : Изд-во “Истек”, 1999.

- [18] *Кулиев, В. Д.* О росте усталостных трещин / В. Д. Кулиев // В сб.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – М. : МАИ им. С. Орджоникидзе, 1978. – Вып. 467.
- [19] *Кулиев, В. Д.* Пластическая деформация на конце клина / В. Д. Кулиев // Прикл. мех. – 1979. – Т. 15. – № 3.
- [20] *Кулиев, В. Д.* Преломление трещины продольного сдвига / В. Д. Кулиев // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249. – № 2.
- [21] *Кулиев, В. Д.* Связь между плотностями интегралов типа Фурье первого и второго рода / В. Д. Кулиев // Новые технологии. Сер. матем. – 2000. – № 5.
- [22] *Кулиев, В. Д.* Сингулярная задача теории упругости для полубесконечного прямоугольного выреза / В. Д. Кулиев // ПММ. – 1980. – Т. 44. – Вып. 5.
- [23] *Кулиев, В. Д.* Теория роста усталостных трещин продольного и поперечного сдвига / В. Д. Кулиев // В сб.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – М. : МАИ им. С. Орджоникидзе, 1978. – Вып. 467
- [24] *Кулиев, В. Д.* Трещина на границе раздела двух сред с ответвлением в одну из них в случае антиплоской деформации / В. Д. Кулиев // Пробл. прочности. – 1979. – № 7.
- [25] *Кулиев, В. Д.* Трещина с конечным ответвлением в кусочно однородной упругой среде / В. Д. Кулиев // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 246. – № 6.
- [26] *Кулиев, В. Д.* Краевая трещина под действием циклической температуры / В. Д. Кулиев, А. С. Ахиев // Физ.-хим. механика материалов. – 1983. – № 2.
- [27] *Кулиев, В. Д.* Разработка критериев проектирования многослойных материалов ИТЭР. Хрупкое разрушение многослойных материалов / В. Д. Кулиев, С. Е. Бугаенко, И. А. Разумовский // В сб. : Термоядерный синтез. – М. : НИКИЭТ, 1998.
- [28] *Кулиев, В. Д.* Хрупкая прочность многослойных материалов ИТЭР. Анализ особенностей НДС в зонах стыка разнородных материалов. 15th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology / В. Д. Кулиев, С. Е. Бугаенко, И. А. Разумовский. – 1999. – Seoul, Korea.
- [29] *Кулиев, В. Д.* Краевая трещина в ортотропной полуплоскости / В. Д. Кулиев, Н. Д. Жеков // Физ.-хим. Механика материалов. – 1987. – № 1.
- [30] *Кулиев, В. Д.* Сингулярные задачи теории упругости для трещин, перпендикулярных границы раздела двух сред / В. Д. Кулиев, Н. Д. Жеков // ПММ. – 1985. – Т. 49. – Вып. 3.
- [31] *Кулиев, В. Д.* Влияние остаточных напряжений на докритический рост усталостных трещин в сварных соединениях / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Проблема прочности. – 1980. – № 3.
- [32] *Кулиев, В. Д.* Влияние остаточных напряжений на прочность и долговечность сварных соединений / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Докл. АН Азерб. ССР. -1979. -№8
- [33] *Кулиев, В. Д.* О росте усталостных трещин в панели гермофюзеляжа самолета / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Авиационная техника. -1977. -№2
- [34] *Кулиев, В. Д.* О хрупкой прочности элементов конструкций из композиционных материалов при сдвиговых нагрузках / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // В сб.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. –М. : МАИ им С. Орджоникидзе, 1980.
- [35] *Кулиев, В. Д.* Об оценке подрастания трещины в плоских элементах конструкций / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун. – Физ.-хим. Механика материалов. – 1979. – № 6.
- [36] *Кулиев, В. Д.* Определение долговечности элементов конструкций летательных аппаратов при усталостном разрушении / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Проблемы прочности. – 1979. – № 7.
- [37] *Кулиев, В. Д.* Применение механики разрушения к оценке долговечности деталей машин при усталостном нагружении / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Изв. ВУЗов. Машиностроение. – 1979. – № 4.
- [38] *Кулиев, В. Д.* Разрушение гетерогенных сред (антиплоская деформация) / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Докл. АН ССР. Механика. – 1981. – № 3.

- [39] *Кулиев, В. Д.* Трещина продольного сдвига в кусочно однородной упругой среде / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // *Мех. Композитных материалов.* -1981. -№4
- [40] *Кулиев, В. Д.* Усталостная прочность элементов конструкций летательных аппаратов / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // В сб. : Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – М. : МАИ им. С. Орджоникидзе. – 1978. –Вып. 467.
- [41] *Кулиев, В. Д.* Прочность и долговечность слоистых композиционных материалов с центральной трещиной. / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун, Н. Э. Садыхов // *Физ.-хим. Механика материалов.* – 1989. – № 2.
- [42] *Кулиев, В. Д.* Центральная трещина в многослойных материалах / В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун, Н. Э. Садыхов // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* –Москва-Будапешт. – 1989. – № 28.
- [43] *Кулиев, В. Д.* Полупространство с трещиной, перпендикулярной его границы / В. Д. Кулиев, Л. А. Кишнис // *Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. И матем. Наук.* – 1979. – № 3.
- [44] *Кулиев, В. Д.* К проблеме разрушения многослойных сред с трещинами / В. Д. Кулиев, А. К. Мехтиев, В. И. Насибов // *Физ.-хим. Механика материалов.* – 1986. – № 2.
- [45] *Кулиев, В. Д.* К проблеме торможения трещины в многослойных схемах / В. Д. Кулиев, В. И. Насибов // *Докл. АН СССР.* – 1986. – Е. 288. – № 3.
- [46] *Кулиев, В. Д.* Краевая трещина в биупругой полосе / В. Д. Кулиев, В. И. Насибов // *Мех. Композитных материалов.* – 1983. – № 4.
- [47] *Кулиев, В. Д.* Центральная трещина в двухкомпонентном слоистом материале / В. Д. Кулиев, В. И. Насибов // *Деп. ВИНТИ.* – 1982. – № 3287-82.
- [48] *Кулиев, В. Д.* Некоторые математические вопросы механики разрушения слоистых композитных сред / В. Д. Кулиев, В. И. Насибов, Г. М. Новрузов, А. М. Мамедов // *Деп. АзНИИНТИ.* – №1620-Аз 91, 13.03.1991.
- [49] *Кулиев, В. Д.* Плоская задача для кусочно однородной среды с ломаной трещиной / В. Д. Кулиев, Г. М. Новрузов // *Прикл. механика.* – 1984. – Т. 20. – № 9.
- [50] *Кулиев, В. Д.* К проблеме разрушения кусочно однородной среды с трещиной / В. Д. Кулиев, Г. П. Новрузов // *Докл. АН СССР.* -1986. – Т. 288. – № 5.
- [51] *Кулиев, В. Д.* Торможение трещины на границе раздела различных упругих сред / В. Д. Кулиев, Ю. Н. Работнов, Г. П. Черепанов // *Изв. АН СССР. МТТ.* – 1978. – № 4.
- [52] *Кулиев, В. Д.* Краевая трещина в двухслойных материалах. Аналитические и экспериментальные методы определения хрупкой прочности и остаточных напряжений / В. Д. Кулиев, И. А. Разумовский, О. Б. Злочевская // *Научно-технический прогресс в машиностроении.* – 1990. – Вып. 29.
- [53] *Кулиев, В. Д.* Расчетные и экспериментальные методы анализа хрупкой прочности и усталостной долговечности конструкций из многослойных материалов / В. Д. Кулиев, И. А. Разумовский, Ф. А. Искендер-заде, А. Б. Каплун // В сб.: Прочность и надежность конструкций (к 50 –летию проф. В. Д. Кулиева). – М. : Изд-во МГОУ, 1993.
- [54] *Кулиев, В. Д.* К проблеме определения остаточных напряжений в биметаллах / В. Д. Кулиев, И. А. Разумовский // *Докл. АН СССР.* – 1990. – Т. 315. – № 3.
- [55] *Кулиев, В. Д.* К проблеме разрушения многослойных материалов с центральной трещиной / В. Д. Кулиев, А. И. Сейфуллаев // *Деп. ВИНТИ.* – 1987. – № 3967-87.
- [56] *Кулиев, В. Д.* К теории “горячих” трещин / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // *ПМТФ.* – 1974. – №2.
- [57] *Кулиев, В. Д.* Влияние частоты нагружения и инактивных сред на рост усталостных трещин / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // *Проблема прочности.* – 1972. – № 1.
- [58] *Кулиев, В. Д.* О начальном развитии линий скольжения от свободной границы тела / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // *ПММ.* – 1979. – Т. 43. – Вып. 2.
- [59] *Кулиев, В. Д.* Усталостная прочность валов / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // *ПМТФ.* – 1978. – № 6.

- [60] *Максудов, Ф. Г.* К проблеме разрушения биупругой среды / Ф. Г. Максудов, В. Д. Кулиев, Ф. А. Искендер-заде // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 264. – № 6.
- [61] *Нейбер, Г.* Концентрация напряжений / Г. Нейбер. – ГИ ТТЛ, 1947.
- [62] *Образцов, И. Ф.* К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Статическое нагружение / И. Ф. Образцов, В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 303. – № 5.
- [63] *Образцов, И. Ф.* К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Циклическое нагружение / И. Ф. Образцов, В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 303. – № 5.
- [64] *Образцов, И. Ф.* К проблеме разрушения биметаллических материалов с краевой трещиной / И. Ф. Образцов, В. Д. Кулиев, И. А. Разумовский, Н. Э. Фарзалибеков // Докл. АН СССР. – Т. 308. – № 3.
- [65] *Черепанов, Г. П.* Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике // ПММ. – 1977. – Т. 41. – Вып. 3.
- [66] *Кулиев, В. Д.* К теории криволинейных трещин // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. – 1978. – № 6.
- [67] *Кулиев, В. Д.* Пластические линии разрыва разрыва в конце клина // Прикл. мех. – 1979. – Т. 15. – № 3.
- [68] *Кулиев, В. Д.* Теория устойчивости скальных откосов с тектоническими трещинами / В. Д. Кулиев, Г. П. Черепанов // В сб. : Теоритична и приложна механика. Кн. I. – Изд-во на България Академия на науките, 1977.

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

Курбанмагомедов Арслан Курбанмагомедович,

Postgraduate student, Department of the Higher Mathematic, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

Е. С. Лапикова, М. Н. Юринкина, А. П. Кержаев, А. В. Никитин

РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, РАБОТАЮЩИМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Построены примеры разложений Лагранжа в ряды по функциям Фадля-Папковича, возникающим при решении периодической краевой задачи теории упругости для полуполосы, продольные стороны которой усилены ребрами жесткости, работающими только на растяжение-сжатие.

Ключевые слова: полуполоса, ребра жесткости, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+517.95

Актуальность исследуемой проблемы. Свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с какими-либо однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам изучались в работах [1], [2], [3]. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в обычном смысле [1]. Поэтому разложения по ним обладают рядом особенностей, например, они не единственны [3]. Разложениями Лагранжа, в отличие от разложений, возникающих при решении краевых задач, называются разложения одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича [1]. Они являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в разложениях Файлона – Рибьера.

Материал и методика исследований. Рассмотрим полуполосу $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$, у которой продольные стороны $y = \pm 1$ подкреплены ребрами жесткости, работающими только на растяжение-сжатие и не работающими на изгиб.

Обозначим: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра; ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра; f – площадь поперечного сечения ребра, $q(x)$ – внешняя распределенная нагрузка, действующая вдоль ребра; $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения в пластине, $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$; $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$.

Из условия равновесия элемента ребра (рис. 1), на основании закона Гука, можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{E_1 f}{2Gt} \cdot \frac{d^2 U(x, \pm 1)}{dx^2} - \tau_{xy}(x, \pm 1) = \frac{q(x)}{2t}. \quad (1)$$

Будем считать, что ребро не прогибается, т. е.

Поступила 20.09.2013

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00118).

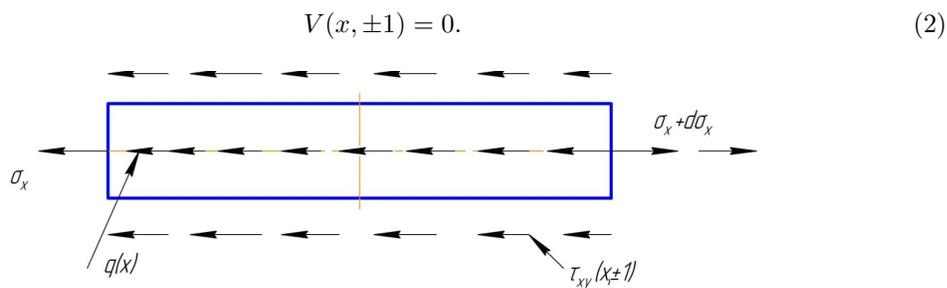


Рис. 1. Условие равновесия элемента ребра длиной dx

Граничные условия (1), (2) соответствуют периодической краевой задаче, условно показанной на рис. 2. Граничные условия при $x = 0$ могут быть различными, например, к ребрам могут быть приложены сосредоточенные силы P , действующие вдоль ребер, а на торцах пластин могут быть заданы как напряжения, так и перемещения.

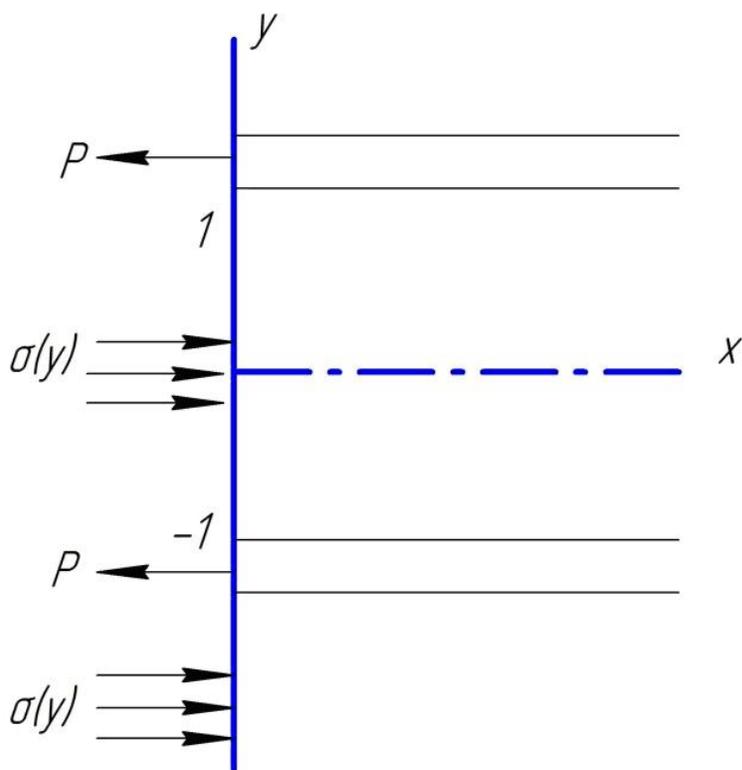


Рис. 2. Полуплоскость с ребрами жесткости (периодическая задача)

Для построения решения краевой задачи воспользуемся методом начальных функций [4], который позволяет быстро получать выражения для функций Фадля – Папковича. Основные соотношения метода начальных функций имеют вид:

$$U(x, y) = L_{UU}(y)U_0(x) + L_{UV}(y)V_0(x) + L_{UY}(y)Y_0(x) + L_{UX}(y)X_0(x),$$

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= L_{VU}(y)U_0(x) + L_{VV}(y)V_0(x) + L_{VY}(y)Y_0(x) + L_{VX}(y)X_0(x), \\
\sigma_x(x, y) &= A_U(y)U_0(x) + A_V(y)V_0(x) + A_Y(y)Y_0(x) + A_X(y)X_0(x), \\
\sigma_y(x, y) &= L_{YU}(y)U_0(x) + L_{YV}(y)V_0(x) + L_{YY}(y)Y_0(x) + L_{YX}(y)X_0(x), \\
\tau_{xy}(x, y) &= L_{XU}(y)U_0(x) + L_{XV}(y)V_0(x) + L_{XY}(y)Y_0(x) + L_{XX}(y)X_0(x).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
L_{UU}(y) &= L_{XX}(y) = \cos \alpha y - \frac{1+\nu}{2} \alpha y \sin \alpha y, \\
L_{UV}(y) &= L_{YX}(y) = -\frac{1}{2} [(1-\nu) \sin \alpha y + (1+\nu) \alpha y \cos \alpha y], \\
L_{UX}(y) &= \frac{1}{4} \left[\frac{3-\alpha}{\alpha} \sin \alpha y + (1+\nu) y \cos \alpha y \right], \\
L_{VU}(y) &= L_{XY}(y) = \frac{1}{2} [(1-\nu) \sin \alpha y - (1+\nu) \alpha y \cos \alpha y], \\
L_{VV}(y) &= L_{YY}(y) = \frac{1}{2} (1+\nu) \alpha y \sin \alpha y + \cos \alpha y, \\
L_{VY}(y) &= \frac{1}{4} \left[\frac{3-\alpha}{\alpha} \sin \alpha y - (1+\nu) y \cos \alpha y \right], \\
L_{YU}(y) &= L_{XU}(y) = (1+\nu) \alpha^2 y \sin \alpha y, \\
L_{YV}(y) &= (1+\nu) \alpha (\alpha y \cos \alpha y - \sin \alpha y), \\
L_{XU}(y) &= -(1+\nu) \alpha (\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y), \\
A_U(y) &= (1+\nu) \alpha (2 \cos \alpha y - \alpha y \sin \alpha y), \\
A_V(y) &= -(1+\nu) \alpha (\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y), \\
A_Y(y) &= \nu \cos \alpha y - \frac{1}{2} (1+\nu) \alpha y \sin \alpha y, \\
A_X(y) &= \frac{1}{2} [(1+\nu) \alpha y \cos \alpha y + (3+\nu) \sin \alpha y].
\end{aligned} \tag{4}$$

Через α обозначена производная $\frac{\partial}{\partial x}$, поэтому выражения (5) представляют собой дифференциальные операторы бесконечного порядка.

Функции

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= Gu(x, 0), \quad V_0(x) = Gv(x, 0), \\
Y_0(x) &= \sigma_y(x, 0), \quad X_0(x) = \tau_{xy}(x, 0),
\end{aligned} \tag{5}$$

определенные при $y = 0$, называются начальными функциями. Зная начальные функции, с помощью формул (4) можно найти все перемещения и напряжения. В качестве начальных функций могут быть выбраны функции $U(x, y)$, $V(x, y)$, $Y(x, y)$, $X(x, y)$, определенные при любом $y = const$. Практически их удобно выбирать так, чтобы две из них были известны сразу, например, из условий симметрии задачи.

Выберем начальные функции на оси симметрии $y = 0$. Тогда нечетные начальные функции

$$V_0(x) = X_0(x) = 0.$$

С помощью формул (4) удовлетворим граничным условиям (1), (2), которые теперь будут выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned} [D\alpha^2 L_{UU}(1) - L_{XU}(1)]U_0(x) + [D\alpha^2 L_{UY}(1) - L_{XY}(1)]Y_0(x) &= 0, \\ L_{VU}(1)U_0(x) + L_{VY}(1)Y_0(x) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $L_{UU}(1)$, $L_{XU}(1)$ и т.д. – соответствующие операторы метода начальных функций (5), определенные при $y = 1$, а

$$D = \frac{E_1 f}{2Gt}.$$

Введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$U_0(x) = -L_{VY}(1)F(x), \quad Y_0(x) = L_{VU}(1)F(x). \quad (7)$$

При этом второе уравнение будет тождественно удовлетворено, а первое примет такой вид:

$$\sin^2 \alpha - D \frac{\alpha}{4} \left((\nu - 3) \frac{\sin 2\alpha}{2} + (1 + \nu)\alpha \right) = 0. \quad (8)$$

Разыскивая его решение в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}, \quad (9)$$

получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$\sin^2 \lambda - D \frac{\lambda}{4} \left((\nu - 3) \frac{\sin 2\lambda}{2} + (1 + \nu)\lambda \right) = 0, \quad (10)$$

которое имеет два нулевых корня, один вещественный и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Ниже для иллюстрации приведены значения первых пяти корней уравнения (11) (табл. 1).

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	1,20731	0,00000
2	3,83309	1,00339
3	6,99890	1,31685
4	10,15369	1,50509
5	13,30382	1,64078

Следовательно, функция

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k = 1$$

(элементарное решение, соответствующее нулевым корням, не рассматривается).

Подставляя функцию $F(x)$ в формулы (8), найдем начальные функции, а затем по формулам (4) – все перемещения и напряжения ($Re\lambda_k < 0$).

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},$$

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k V(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Функции Фадля – Папковича $U(\lambda_k, y)$, $V(\lambda_k, y)$ и т. д. имеют вид:

$$\begin{aligned}
U(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{4} \cos \lambda_k + \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{4} y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
V(\lambda_k, y) &= \frac{1+\nu}{4} (-\cos \lambda_k \sin \lambda_k y + y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\
\sigma_x(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k - \frac{3+\nu}{2} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
\sigma_y(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
\tau_{xy}(\lambda_k, y) &= \left(\sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y.
\end{aligned} \tag{12}$$

Удовлетворяя с помощью выражений (12) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения коэффициентов a_k , \bar{a}_k из разложений по функциям Фадля – Папковича, например,

$$\begin{aligned}
\sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y), \\
\tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y),
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\sigma(y)$ и $\tau(y)$ – заданные на торце полуполосы нормальные и касательные напряжения.

Коэффициенты a_k определяются отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций, которые находятся из решения уравнений:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^f \\
&\int_{-\infty}^f \\
&\int_{-\infty}^f \\
&\int_{-\infty}^f
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\infty.$$

Здесь $U(\lambda_k, y)$, $V(\lambda_k, y)$ и т. д. – порождающие функции, а

$$L(\lambda) = \sin^2 \lambda - D \frac{\lambda}{4} \left((\nu - 3) \frac{\sin 2\lambda}{2} + (1 + \nu)\lambda \right).$$

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (15) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T U(\lambda_m, y) U_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T V(\lambda_m, y) V_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m^2} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T \sigma_x(\lambda_m, y) X_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m^2} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T \sigma_y(\lambda_m, y) Y_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T \tau_{xy}(\lambda_m, y) \cdot T_k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

где $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$.

Для комплексных значений λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (15) нужно заменить Т-образным контуром, лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [2].

Следует иметь в виду, что при всех $\overline{\lambda_m}$

$$\begin{aligned} \int_T U(\overline{\lambda_m}, y) \cdot U_k(y) dy &= \int_T U(\lambda_m, y) \cdot \overline{U_k(y)} dy = 0, \\ \int_T V(\overline{\lambda_m}, y) \cdot V_k(y) dy &= \int_T V(\lambda_m, y) \cdot \overline{V_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \sigma_x(\overline{\lambda_m}, y) \cdot X_k(y) dy &= \int_T \sigma_x(\lambda_m, y) \cdot \overline{X_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \sigma_y(\overline{\lambda_m}, y) \cdot Y_k(y) dy &= \int_T \sigma_y(\lambda_m, y) \cdot \overline{Y_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \tau_{xy}(\overline{\lambda_m}, y) \cdot T_k(y) dy &= \int_T \tau_{xy}(\lambda_m, y) \cdot \overline{T_k(y)} dy = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

При выборе правых частей уравнений (15) необходимо учесть следующие соображения: левые и правые части уравнений (15) должны быть одновременно либо четными, либо нечетными функциями по λ ; первые члены разложений в ряд Тейлора по степеням λ порождающих функций в формулах (15) имеют вид:

$$\begin{aligned}
U(\lambda, y) &= \frac{\nu - 1}{2} + \dots; \\
V(\lambda, y) &= -\frac{\nu + 1}{12}(y^3 - y)\lambda^3 + \dots; \\
\sigma_x(\lambda, y) &= -\lambda + \dots; \\
\sigma_y(\lambda, y) &= -\lambda\nu + \dots; \\
\tau_{xy}(\lambda, y) &= \lambda^2 y + \dots,
\end{aligned} \tag{17}$$

а первые члены разложений правых частей равенств (15) равны:

$$\begin{aligned}
\frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} &= -\frac{\lambda^2}{\lambda k^2} \left[\frac{D(1 - \nu)}{2} + 1 \right] + \dots; \\
\frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda k^2)} &= -\frac{\lambda}{\lambda k^2} \left[\frac{D(1 - \nu)}{2} + 1 \right] + \dots; \\
\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda k^2} &= -\frac{\lambda^3}{\lambda k^2} \left[\frac{D(1 - \nu)}{2} + 1 \right] + \dots
\end{aligned} \tag{18}$$

Сравнивая степенные разложения (18) и (19), можно заметить, что при $\lambda \rightarrow 0$ (при $k = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu - 1}{2} \cdot U_k(y) dy &= 0, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} -1 \cdot X_k(y) dy &= -\frac{1}{\lambda k^2} \cdot \left[\frac{D(1 - \nu)}{2} + 1 \right], \\
\int_{-\infty}^{+\infty} -\nu \cdot Y_k(y) dy &= 0, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot T_k(y) dy &= -\frac{1}{\lambda k^2} \cdot \left[\frac{D(1 - \nu)}{2} + 1 \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Функции $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $Y_k(y)$ и $T_k(y)$ биортогональных систем можно представить в виде суммы финитных, не равных нулю на отрезке $|y| \leq 1$, и не финитных частей, ортогональных ко всем функциям $\{\sin m\pi\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos m\pi\}_{m=1}^{\infty}$.

Финитные части биортогональных функций, имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
u_k(y) &= \frac{C}{2} \cdot \left[\frac{\lambda k \cos \lambda k^y}{\sin \lambda k} + \delta(y + 1) + \delta(y - 1) \right]; \\
v_k(y) &= -D \cdot \frac{\sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k}; \\
x_k(y) &= D \cdot \frac{\cos \lambda k^y}{4 \lambda k \sin \lambda k}; \\
y_k(y) &= -\frac{D}{4} \cdot \left[\frac{\lambda k \cos \lambda k y}{\sin \lambda k} + \delta(y + 1) + \delta(y - 1) \right];
\end{aligned} \tag{20}$$

$$t_k(y) = -D \cdot \frac{\sin \lambda k y}{4 \sin \lambda k}.$$

Здесь δ – дельта-функции. Формулы (21) строятся следующим образом. Построим, например, функцию $u_k(y)$. Примем в первой формуле (15) $\lambda = m\pi$ ($m = 1, 2, \dots$). Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(m\pi, y) \cdot u_k(y) dy = \frac{L(m\pi)}{(m\pi)^2 - \lambda k^2}$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\nu}{4} \cdot (-1)^m \cdot \cos m\pi y \cdot u_k(y) \cdot dy = -\frac{D \cdot \frac{(1+\nu)}{4} (m\pi)^2}{(m\pi)^2 - \lambda_k^2}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos m\pi y \cdot u_k(y) dy = -\frac{D \cdot (m\pi)^2}{(m\pi)^2 - \lambda_k^2} \cdot (-1)^m.$$

Слева в последнем выражении стоит преобразование Фурье функции $u_k(y)$ с параметром $m\pi$. Используя обратное преобразование Фурье, получим нужную функцию $u_k(y)$ (21).

Рассмотрим примеры разложений Лагранжа по функциям Фадля – Папковича (15). Пусть, например, нужно найти коэффициенты a_k, \bar{a}_k разложения в ряд Лагранжа по системе функций $\{U(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$

$$U(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot U(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \cdot U(\bar{\lambda}_k, y). \quad (21)$$

Умножим обе части равенства (22) на некоторую функцию $U_m(y)$ ($m = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем по y от $-\infty$ до $+\infty$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) \cdot U_m(y) dy &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda_k, y) \cdot U_m(y) dy + \\ &+ \bar{a}_k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} U(\bar{\lambda}_k, y) \cdot U_m(y) dy. \end{aligned} \quad (22)$$

Значение интеграла слева обозначим через u_m , то есть

$$u_m = \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) \cdot U_m(y) dy.$$

Интегралы, стоящие справа, не существуют для комплексных λ_k , поэтому интегрирование справа нужно заменить интегрированием по Т-образному контуру, как в формулах (16) и (17). Тогда, в соответствии с соотношениями биортогональности (16), (17), из (23) получим

$$u_m = a_m \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Отсюда находим

$$a_m = \frac{u_m \cdot 2\lambda_m}{L'(\lambda_m)} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Аналогично находятся коэффициенты разложений a_k по другим системам функций Фадля – Папковича.

Окончательно получим такие разложения в ряды Лагранжа по функциям Фадля – Папковича.

$$\begin{aligned}
 U(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{u_k \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k)} \cdot U(\lambda_k, y) \right\}; \\
 V(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{v_k \cdot 2\lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} \cdot V(\lambda_k, y) \right\}; \\
 \sigma_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{x_k \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}; \\
 \sigma_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{y_k}{L'(\lambda_k)} \cdot \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}; \\
 \tau_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{t_k \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k)} \cdot \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $U(y)$, $V(y)$, $\tau_{xy}(y)$, $\sigma_x(y)$ и $\sigma_y(y)$ – раскладываемые функции, заданные на отрезке $[-1, 1]$, а числа u_k , v_k , x_k , y_k и t_k равны:

$$\begin{aligned}
 u_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_k(y)dy; \\
 v_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(y)V_k(y)dy; \\
 x_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(y)X_k(y)dy \quad ; \\
 y_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y)Y_k(y)dy; \\
 t_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(y)T_k(y)dy.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Из формул (26) видно, что для определения чисел u_k , v_k , и т. д. необходимо раскладываемые функции, первоначально определенные при $y \in [-1, 1]$, каким-то образом продолжить вне этого отрезка. В зависимости от того, как выполнено это продолжение, числа u_k , v_k и т. д. будут разными. Однако ряды Лагранжа (25) в любом случае будут сходиться при $y \in (-1, 1)$ к своим функциям. Неединственность разложений в ряды Лагранжа – одно из важнейших свойств систем функций Фадля – Папковича.

Пусть раскладываемыми функциями в формулах (26) являются соответствующие порождающие функции, т. е. $U(y) = U(t, y)$, $V(y) = V(t, y)$ и т. д., где t – вещественный параметр. Тогда, в соответствии с формулами (15) ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}
 u_k &= \frac{L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \\
 v_k &= \frac{L(t)}{t(t^2 - \lambda_k^2)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{L(t)}{t(t^2 - \lambda_k^2)}; \\ y_k &= \frac{tL(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \\ t_k &= \frac{L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя числа (27) в формулы (25), получим ($|y| < 1$):

$$\begin{aligned} U(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(t) \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} \cdot U(\lambda_k, y) \right\}; \\ V(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(t) \cdot 2\lambda_k^2}{L'(\lambda_k) \cdot t \cdot (t^2 - \lambda_k^2)} \cdot V(\lambda_k, y) \right\}; \\ \sigma_x(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(t) \cdot 2\lambda_k^2}{L'(\lambda_k) \cdot t \cdot (t^2 - \lambda_k^2)} \cdot \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}; \\ \sigma_y(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t \cdot L(t)}{L'(\lambda_k) \cdot (t^2 - \lambda_k^2)} \cdot \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}; \\ \tau_{xy}(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(t) \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k) \cdot (t^2 - \lambda_k^2)} \cdot \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

На рис. 3–7 показаны графики раскладываемых функций и соответствующие им ряды Лагранжа (28) при $t = 1$ и $D = 4$. Через $U_r(y)$, $V_r(y)$ и т. д. обозначены значения сумм соответствующих рядов.

Ряды Лагранжа для функций $U(t, y)$, $\sigma_x(t, y)$ и $\sigma_y(t, y)$ отличаются от раскладываемых функций по той причине, что биортогональные системы функций к функциям $\{U(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\sigma_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_y(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны к константе. Это легко проверить в соответствующих равенствах (15) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$.

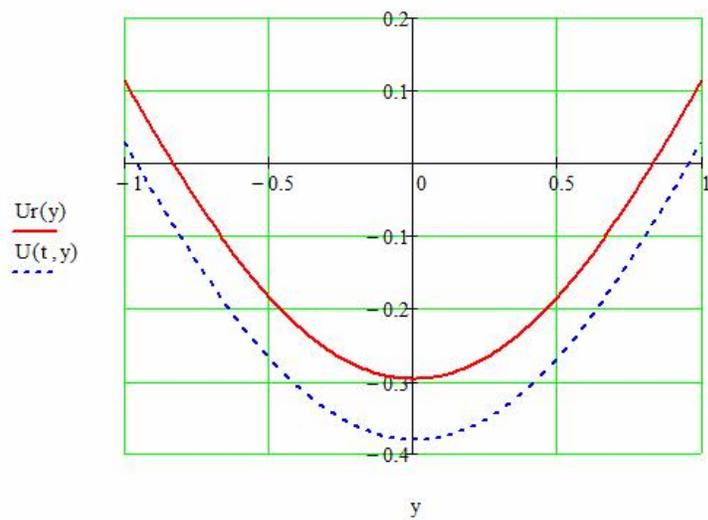


Рис. 3

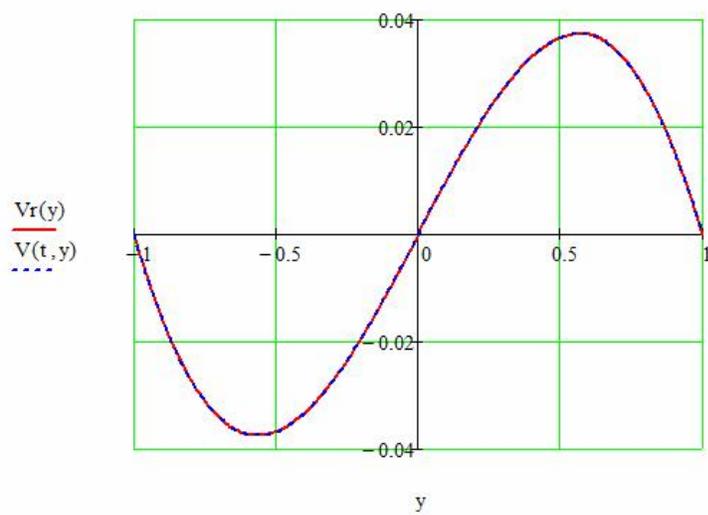


Рис. 4

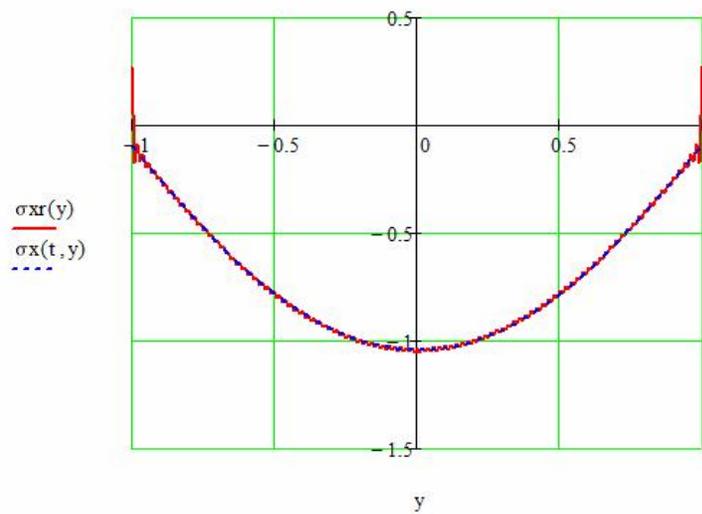


Рис. 5

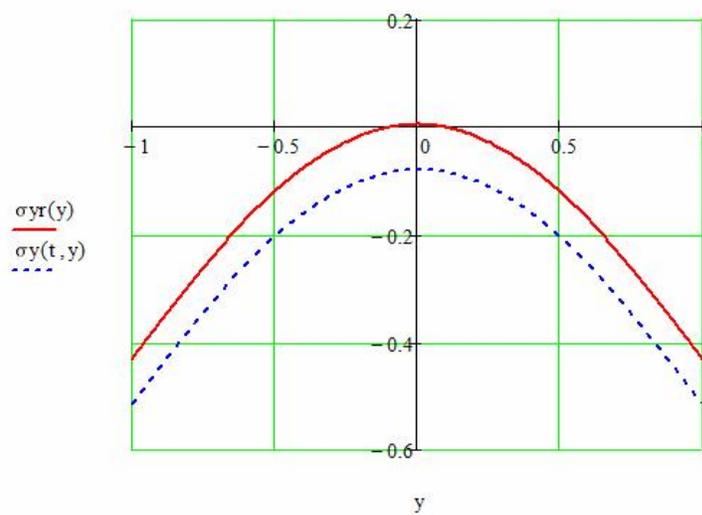


Рис. 6

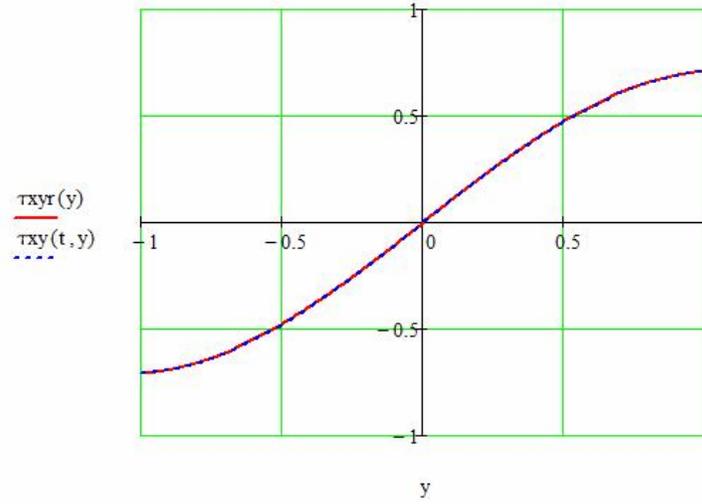


Рис. 7

Если раскладываемые функции, стоящие в правых частях формул (25) и первоначально заданные на отрезке $[-1, 1]$, продолжить периодически вне отрезка $[-1, 1]$ с периодом, равным 2, то для чисел u_k , v_k , и т. д. можно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 u_k &= \int_{-1}^{+1} U(y)u_k(y)dy; \\
 v_k &= \int_{-1}^{+1} V(y)v_k(y)dy; \\
 x_k &= \int_{-1}^{+1} \sigma_x(y)x_k(y)dy \quad ; \\
 y_k &= \int_{-1}^{+1} \sigma_y(y)y_k(y)dy; \\
 t_k &= \int_{-1}^{+1} \tau_{xy}(y)t_k(y)dy.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Приведем примеры разложений с числами (29). Пусть $U(y) = y^2 - 1$. По первой формуле (29) находим

$$u_k = \frac{2 \cdot D \cdot (\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k)}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k}. \tag{29}$$

Соответствующее разложение функции $U(y) = y^2 - 1$ таково:

$$y^2 - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2u_k \cdot \lambda_k}{L'(\lambda_k)} U(\lambda_k, y) \right\}. \tag{30}$$

Аналогично можно получить такие разложения:

$$\begin{aligned}
 y^3 - y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2v_k \cdot \lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} V(\lambda_k, y) \right\}; \\
 y^2 - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2x_k \cdot \lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}; \\
 y^2 - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2y_k}{L'(\lambda_k)} \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}; \\
 y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2 \cdot \lambda_k t_k}{L'(\lambda_k)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\},
 \end{aligned} \tag{31}$$

в которых числа

$$\begin{aligned}
 v_k &= 2D \cdot \frac{\lambda_k^2 \sin \lambda_k + 3\lambda_k \cos \lambda_k - 3 \sin \lambda_k}{\lambda_k^4 \sin \lambda_k}; \\
 x_k &= D \cdot \frac{\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k}{\lambda_k^4 \sin \lambda_k}; \\
 y_k &= -x_k \cdot \lambda_k^2; \\
 \tau_k &= -D \cdot \frac{(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k)}{2\lambda_k^2 \sin \lambda_k}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

На рис. 8–12 показаны раскладываемые функции, стоящие в левых частях формул (31), (32), и их ряды Лагранжа.

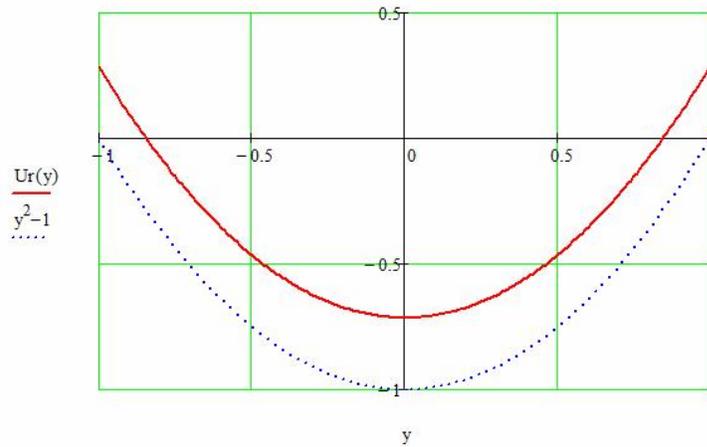


Рис. 8

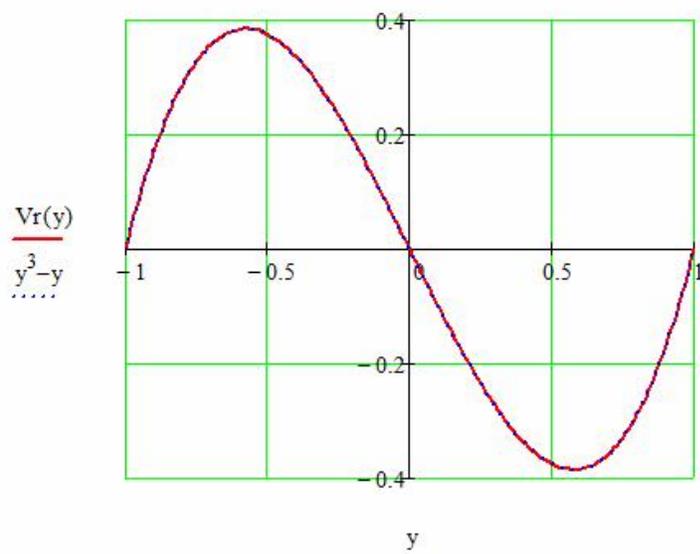


Рис. 9

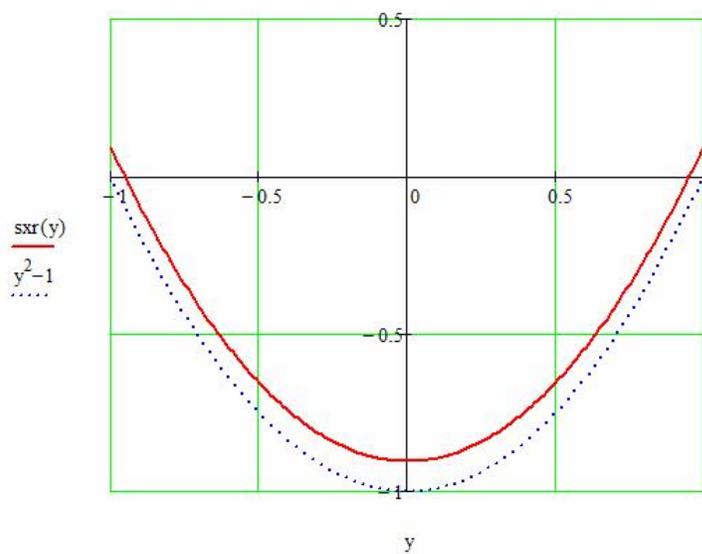


Рис. 10

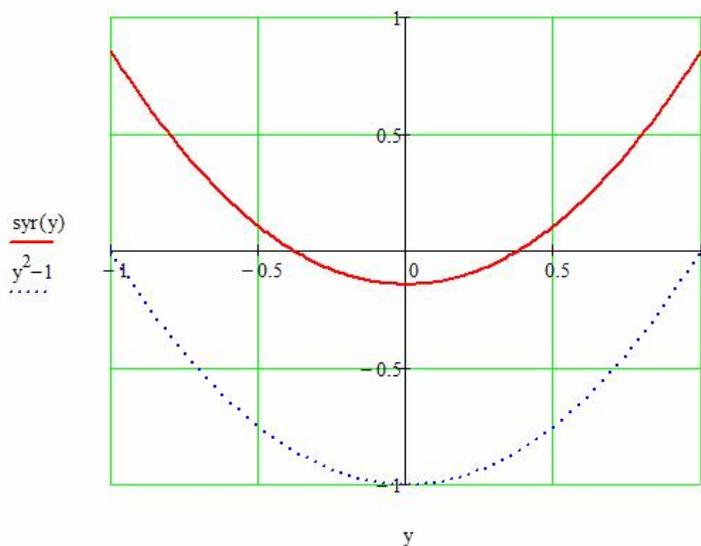


Рис. 11

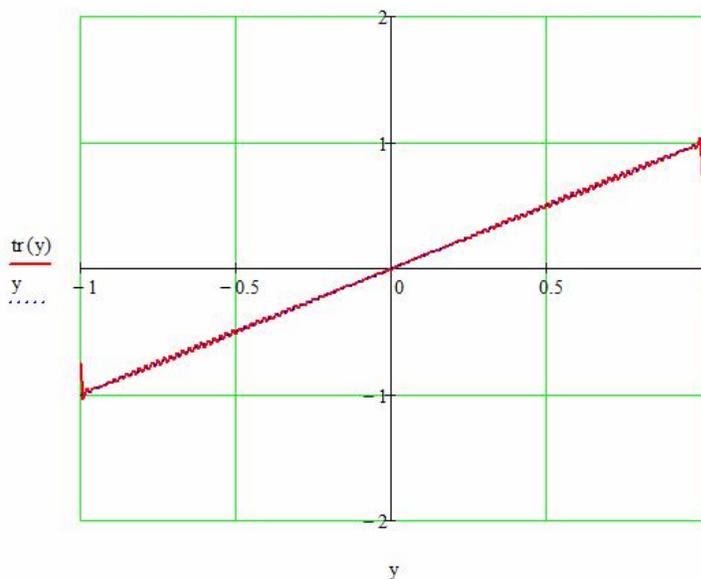


Рис. 12

Результаты исследований и их обсуждение. Получены интегральные соотношения для определения систем функций, биортогональных к функциям Фадля-Папковича, возникающим при решении периодической краевой задачи для подкрепленной полуполосы с продольными ребрами жесткости, расположенными вдоль ее длинных сторон и работающими только на растяжение-сжатие.

Резюме. Эти разложения являются основой при решении разнообразных задач, связанных с прочностными расчетами тонких пластин с ребрами жесткости, широко используемыми в аэрокосмической промышленности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям / М. Д. Коваленко // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352. – № 4. – С. 480–482.

[2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.

[3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.

[4] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.

Лапикова Елена Семеновна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sopromat_v@mail.ru

Юринкина Мария Николаевна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sopromat_v@mail.ru

Кержаев Александр Петрович,

преподаватель кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sopromat_v@mail.ru

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sopromat_v@mail.ru

E. S. Lapikova, M. N. Yurinkina, A. P. Kerzhaev, A. V. Nikitin

**THE LAGRANGE EXPANSION IN THE PERIODIC BOUNDARY VALUE
PROBLEM FOR THE SEMISTRIP WITH LONGITUDINAL STIFFENING RIBS**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The examples of Lagrange expansions on the Fadle-Papkovich functions for the periodic problem for the semistrip are constructed. The longitudinal sides of the semistrip have the tension-compression ribs.

Keywords: emistrip, stiffening ribs, Fadle-Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

[1] *Kovalenko, M. D.* Lagrange's decomposition and uncommon zero representations according to uniform decisions / M. D. Kovalenko // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1997. – Vol. 352. – № 4. – P. 480–482.

[2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich's functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.

[3] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.

[4] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.

Lapikova, Elena Semenovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Yurinkina, Maria Nikolaevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Kerzhaev, Alexandr Petrovich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Е. С. Лапикова, М. Н. Юринкина, А. П. Кержаев, А. В. Никитин

**ПОЛУПОЛОСА С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ,
РАБОТАЮЩИМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ.
РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА**

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Построены примеры разложений Лагранжа в ряды по функциям Фадля – Папковича, возникающим при решении неперiodической краевой теории упругости задачи для полуполосы, продольные стороны которой усилены ребрами жесткости, работающими только на растяжение-сжатие.

Ключевые слова: полуполоса, ребра жесткости, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+517.95

Актуальность исследуемой проблемы. Свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с какими-либо однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам изучались в работах [1], [2], [3]. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в классическом смысле [1], поэтому разложения по ним обладают рядом особенностей, например, они не единственны [3]. Разложениями Лагранжа, в отличие от разложений, возникающих при решении краевой задачи, называются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича [1]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в разложениях Файлона – Рибьера.

Материал и методика исследований. Рассмотрим полуполосу $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$, у которой продольные стороны $y = \pm 1$ подкреплены ребрами жесткости, работающими только на растяжение-сжатие и не работающими на изгиб.

Обозначим: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра; ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра; f – площадь поперечного сечения ребра, t – толщина пластины, $q(x)$ – внешняя распределенная нагрузка, действующая вдоль ребра; $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения в пластине, $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$; $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$.

Из условия равновесия элемента ребра (рис. 1), на основании закона Гука можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{E_1 f}{Gt} \cdot \frac{d^2 U(x, \pm 1)}{dx^2} - \tau_{xy}(x, \pm 1) = \frac{q(x)}{t}. \quad (1)$$

Поступила 20.09.2013

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00118)

Будем считать, что внешняя нормальная нагрузка, действующая на ребро, отсутствует, то есть

$$\sigma_y(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

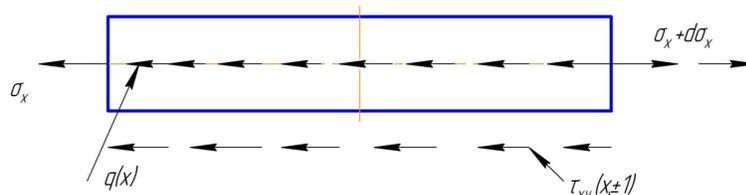


Рис. 1. Условие равновесия элемента ребра длиной

Граничные условия (1), (2) соответствуют неперiodической краевой задаче, условно показанной на рис. 2. Граничные условия при $x = 0$ могут быть различными, например, к ребрам могут быть приложены сосредоточенные силы P , направленные вдоль ребер, а на торцах пластин могут быть заданы как напряжения, так и перемещения.

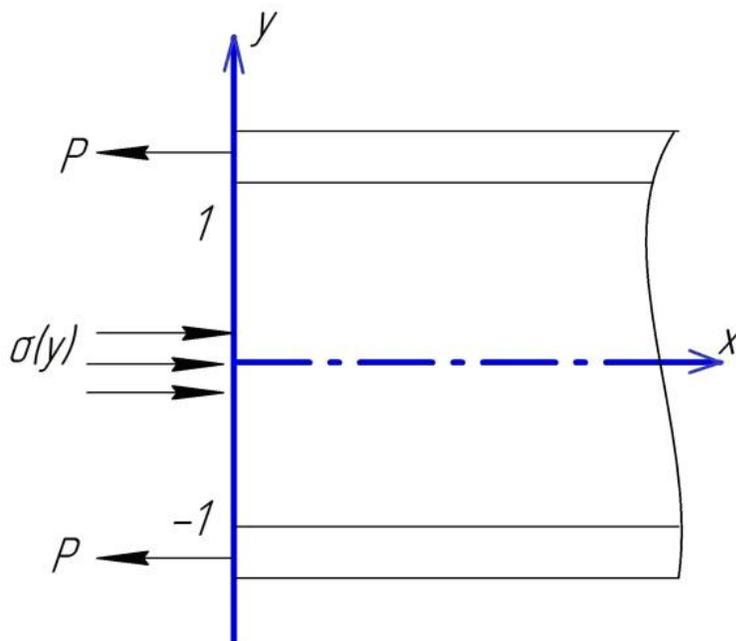


Рис. 2. Полуполоса с продольными ребрами жесткости (неперiodическая задача)

Для построения решения воспользуемся методом начальных функций [4]. Метод начальных функций позволяет эффективно получать выражения для функций Фадля – Папковича. Основные соотношения метода начальных функций имеют вид:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= L_{UU}(y)U_0(x) + L_{UV}(y)V_0(x) + L_{UY}(y)Y_0(x) + L_{UX}(y)X_0(x), \\
V(x, y) &= L_{VU}(y)U_0(x) + L_{VV}(y)V_0(x) + L_{VY}(y)Y_0(x) + L_{VX}(y)X_0(x), \\
\sigma_x(x, y) &= A_U(y)U_0(x) + A_V(y)V_0(x) + A_Y(y)Y_0(x) + A_X(y)X_0(x), \\
Y(x, y) &= L_{YU}(y)U_0(x) + L_{YV}(y)V_0(x) + L_{YY}(y)Y_0(x) + L_{YX}(y)X_0(x), \\
X(x, y) &= L_{XU}(y)U_0(x) + L_{XV}(y)V_0(x) + L_{XY}(y)Y_0(x) + L_{XX}(y)X_0(x).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
L_{UU}(y) &= L_{XX}(y) = \cos \alpha y - \frac{1+\nu}{2}\alpha y \sin \alpha y, \\
L_{UV}(y) &= L_{YX}(y) = -\frac{1}{2}[(1-\nu) \sin \alpha y + (1+\nu)\alpha y \cos \alpha y], \\
L_{UX}(y) &= \frac{1}{4} \left[\frac{3-\alpha}{\alpha} \sin \alpha y + (1+\nu)y \cos \alpha y \right], \\
L_{VU}(y) &= L_{XY}(y) = \frac{1}{2}[(1-\nu) \sin \alpha y - (1+\nu)\alpha y \cos \alpha y], \\
L_{VV}(y) &= L_{YY}(y) = \frac{1}{2}(1+\nu)\alpha y \sin \alpha y + \cos \alpha y, \\
L_{VY}(y) &= \frac{1}{4} \left[\frac{3-\alpha}{\alpha} \sin \alpha y - (1+\nu)y \cos \alpha y \right], \\
L_{YU}(y) &= L_{XV}(y) = (1+\nu)\alpha^2 y \sin \alpha y, \\
L_{YV}(y) &= (1+\nu)\alpha(\alpha y \cos \alpha y - \sin \alpha y), \\
L_{XU}(y) &= -(1+\nu)\alpha(\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y), \\
A_U(y) &= (1+\nu)\alpha(2 \cos \alpha y - \alpha y \sin \alpha y), \\
A_V(y) &= -(1+\nu)\alpha(\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y), \\
A_Y(y) &= \nu \cos \alpha y - \frac{1}{2}(1+\nu)\alpha y \sin \alpha y, \\
A_X(y) &= \frac{1}{2}[(1+\nu)\alpha y \cos \alpha y + (3+\nu) \sin \alpha y].
\end{aligned} \tag{4}$$

Через α обозначена производная $\frac{\partial}{\partial x}$, поэтому выражения (4) представляют собой дифференциальные операторы бесконечного порядка.

Функции

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= Gu(x, 0), \quad V_0(x) = Gv(x, 0), \\
Y_0(x) &= \sigma_y(x, 0), \quad X_0(x) = \tau_{xy}(x, 0),
\end{aligned} \tag{5}$$

определенные при $y = 0$, называются начальными функциями. Зная начальные функции, по формулам (3) можно найти все перемещения и напряжения. В качестве начальных функций

могут быть выбраны функции $U(x, y)$, $V(x, y)$, $Y(x, y)$, $X(x, y)$, определенные при любых значениях $y = const$. Однако практически их удобно выбирать так, чтобы две из них были известны сразу, например, из условий симметрии задачи.

Выберем начальные функции на оси симметрии полуполосы $y = 0$. Тогда нечетные начальные функции

$$V_0(x) = X_0(x) = 0.$$

С помощью формул (3) удовлетворим граничным условиям (1), (2), которые теперь будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} [D\alpha^2 L_{UU}(1) - L_{XU}(1)]U_0(x) + [D\alpha^2 L_{UY}(1) - L_{XY}(1)]Y_0(x) &= 0, \\ L_{YU}(1)U_0(x) + L_{YY}(1)Y_0(x) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $L_{UU}(1)$, $L_{XU}(1)$ и др. – соответствующие операторы метода начальных функций (4), определенные при $y = 1$, а

$$D = \frac{E_1 f}{Gt}.$$

Введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$U_0(x) = L_{YY}(1)F(x), \quad Y_0(x) = -L_{YU}(1)F(x). \quad (7)$$

При этом второе уравнение будет тождественно удовлетворено, а первое примет вид

$$\alpha^2 \left(D \cdot \cos^2 \alpha + (1 + \nu) \cdot \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \right) = 0. \quad (8)$$

Разыскивая его решение в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}, \quad (9)$$

получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$\lambda^2 \left(D \cdot \cos^2 \lambda + (1 + \nu) \cdot \left(1 + \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda} \right) \right) = 0, \quad (10)$$

которое имеет два нулевых корня и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Ниже для иллюстрации приведены значения первых пяти комплексных корней уравнения (10) (табл. 1).

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	1,65555	0,51230
2	4,74665	0,54387
3	7,87495	0,54729
4	11,01064	0,54827
5	14,14891	0,54868

Следовательно, функцию $F(x)$ можно представить в виде ряда

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k = 1$$

(элементарное решение, соответствующее нулевым корням, не рассматривается).

Подставляя функцию $F(x)$ в формулы (7), найдем начальные функции, а затем по формулам (3) – все перемещения и напряжения ($Re\lambda_k < 0$):

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k V(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},
\end{aligned} \tag{11}$$

Функции Фадля – Папковича $U(\lambda_k, y)$, $V(\lambda_k, y)$ и др. имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
U(\lambda_k, y) &= -\left(\frac{1+\nu}{2} \cdot \lambda_k \sin \lambda_k + \cos \lambda_k\right) \cdot \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
V(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \cdot \lambda_k \sin \lambda_k - \cos \lambda_k \cdot \frac{1-\nu}{2}\right) \cdot \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \cdot \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
\sigma_x(\lambda_k, y) &= \lambda_k(1+\nu) \cdot (-\lambda_k \sin \lambda_k + 2 \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \lambda_k \cdot y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
\sigma_y(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \lambda_k^2 \cdot (-y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y + \sin \lambda_k \cos \lambda_k y),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\tau_{xy}(\lambda_k, y) = (1+\nu) \cdot \lambda_k \cdot ((\lambda_k \sin \lambda_k + \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y).$$

Удовлетворяя с помощью выражений (11) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения коэффициентов a_k , \bar{a}_k из разложений по функциям Фадля – Папковича, например,

$$\begin{aligned}
\sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y), \\
\tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y),
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\sigma(y)$ и $\tau(y)$ – нормальные и касательные напряжения, заданные на торце полуполосы.

Коэффициенты a_k определяются отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций, которые находятся из решения уравнений

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^f \\
&\int_{-\infty}^f \\
&\int_{-\infty}^f
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\infty.$$

Здесь $U(\lambda, y)$, $V(\lambda, y)$ и др. – порождающие функции, а

$$L(\lambda) = \lambda^2 \left(D \cdot \cos^2 \lambda + (1 + \nu) \cdot \left(1 + \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda} \right) \right).$$

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (14) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\int_T U(\lambda_m, y) U_k(y) dy = \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T V(\lambda_m, y) V_k(y) dy = \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m^2} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T \sigma_x(\lambda_m, y) X_k(y) dy = \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m^2} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad (15)$$

$$\int_T \sigma_y(\lambda_m, y) Y_k(y) dy = \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int_T \tau_{xy}(\lambda_m, y) \cdot T_k(y) dy = \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} \text{ при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$.

Для комплексных значений λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (14) нужно заменить Т-образным контуром, лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [2].

Следует иметь в виду, что при всех $\overline{\lambda_m}$

$$\int_T U(\overline{\lambda_m}, y) \cdot U_k(y) dy = \int_T U(\lambda_m, y) \cdot \overline{U_k(y)} dy = 0,$$

$$\int_T V(\overline{\lambda_m}, y) \cdot V_k(y) dy = \int_T V(\lambda_m, y) \cdot \overline{V_k(y)} dy = 0,$$

$$\int_T \sigma_x(\overline{\lambda_m}, y) \cdot X_k(y) dy = \int_T \sigma_x(\lambda_m, y) \cdot \overline{X_k(y)} dy = 0, \quad (16)$$

$$\int_T \sigma_y(\overline{\lambda_m}, y) \cdot Y_k(y) dy = \int_T \sigma_y(\lambda_m, y) \cdot \overline{Y_k(y)} dy = 0,$$

$$\int_T \tau_{xy}(\overline{\lambda_m}, y) \cdot T_k(y) dy = \int_T \tau_{xy}(\lambda_m, y) \cdot \overline{T_k(y)} dy = 0.$$

При выборе правых частей уравнений (14) необходимо учесть следующие соображения:

- левые и правые части уравнений (14) должны быть одновременно либо четными, либо нечетными функциями по λ ;
- первые члены разложений в ряд Тейлора по степеням λ порождающих функций в формулах (14) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U(\lambda, y) &= -1 + \lambda^2 \left(\frac{\nu + 2}{2} \cdot y^2 - \frac{\nu}{2} \right) + \dots, \\
 V(\lambda, y) &= \lambda \nu y + \dots, \\
 \sigma_x(\lambda, y) &= -2\lambda(\nu + 1) + \dots, \\
 \sigma_y(\lambda, y) &= \lambda^3(1 + \nu)(1 - y^2) + \dots, \\
 \tau_{xy}(\lambda, y) &= 2\lambda^2(\nu + 1)y + \dots,
 \end{aligned} \tag{17}$$

а первые члены разложений правых частей равенств (14) равны:

$$\begin{aligned}
 \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda k^2} &= -\frac{\lambda^2}{\lambda k^2} \left[\frac{D + 2(1 + \nu)}{2} \right] + \dots, \\
 \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda k^2)} &= -\frac{\lambda}{\lambda k^2} (D + 2(1 + \nu)) + \dots, \\
 \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda k^2} &= -\frac{\lambda^3}{\lambda k^2} (D + 2(1 + \nu)) + \dots.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Сравнивая степенные разложения (17) и (18), можно заметить, что (при $\lambda \rightarrow 0$) биортогональные функции $U_k(y)$ ортогональны константе при всех $k \geq 1$, а

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \nu \cdot y \cdot V_k(y) dy &= -\frac{D + 2(1 + \nu)}{\lambda k^2}, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} -2 \cdot (1 + \nu) \cdot X_k(y) dy &= -\frac{D + 2(1 + \nu)}{\lambda k^2}, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \nu) \cdot (1 - y^2) Y_k(y) dy &= -\frac{D + 2(1 + \nu)}{\lambda k^2}, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot (1 + \nu) \cdot y \cdot T_k(y) dy &= -\frac{D + 2(1 + \nu)}{\lambda k^2}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Функции $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $Y_k(y)$ и $T_k(y)$ биортогональных систем можно представить в виде суммы финитных, не равных нулю на отрезке $|y| \leq 1$, и нефинитных частей, которые ортогональны ко всем функциям $\left\{ \sin \frac{2m-1}{2} \pi \right\}_{m=1}^{\infty}$ и $\left\{ \cos \frac{2m-1}{2} \pi \right\}_{m=1}^{\infty}$ [2].

При решении краевых задач, как правило, используются финитные части биортогональных функций, поэтому важно знать их явное представление. Приведем их:

$$\begin{aligned}
 u_k(y) &= -\frac{\cos \lambda k y}{\cos \lambda k}, \\
 v_k(y) &= \frac{\sin \lambda k y}{\lambda k \cos \lambda k},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_k(y) &= -\frac{1}{2\lambda k^2} \cdot \left(\frac{\cos \lambda k y}{\cos \lambda k} - 1 \right), \\
 y_k(y) &= \frac{\cos \lambda k y}{2 \cos \lambda k}, \\
 t_k(y) &= \frac{\sin \lambda k y}{2\lambda k \cos \lambda k}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Формулы (20) строятся следующим образом. Например, построим функцию $v_k(y)$. Примем во второй формуле (14) $\lambda = \frac{2m-1}{2} \cdot \pi = q_m$ ($m = 1, 2, \dots$). Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(q_m, y) \cdot v_k(y) dy = \frac{L(q_m)}{q_m \cdot (q_m^2 - \lambda_k^2)}$$

или

$$-\frac{1+\nu}{2} \cdot q_m \cdot (-1)^m \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin q_m y \cdot v_k(y) \cdot dy = \frac{(1+\nu) \cdot q_m^2}{q_m (q_m^2 - \lambda_k^2)}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin q_m y \cdot v_k(y) \cdot dy = \frac{(-1)^m \cdot 2}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

Слева стоит преобразование Фурье с параметром q_m функции $v_k(y)$. Используя обратное преобразование Фурье, получим функцию $v_k(y)$.

Дадим примеры разложений Лагранжа по всем функциям Фадля – Папковича (14). Пусть, например, нужно найти коэффициенты a_k, \bar{a}_k следующего разложения в ряд Лагранжа по системе функций $\{U(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$U(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot U(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \cdot U(\bar{\lambda}_k, y). \tag{21}$$

Умножим обе части равенства (21) на некоторую функцию $U_m(y)$ ($m = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем по y от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) \cdot U_m(y) dy &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda_k, y) \cdot U_m(y) dy + \\
 &+ \bar{a}_k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} U(\bar{\lambda}_k, y) \cdot U_m(y) dy.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Значение интеграла слева обозначим через u_m , то есть

$$u_m = \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) \cdot U_m(y) dy.$$

Интегралы, стоящие справа, не существуют для комплексных λ_k , поэтому интегрирование справа нужно заменить интегрированием по Т-образному контуру, фигурирующему в формулах (15) и (16). Тогда в соответствии с соотношениями биортогональности (15), (16) из (22) получим

$$u_m(y) = a_m \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Отсюда находим

$$a_m = \frac{u_m \cdot 2\lambda_m}{L'(\lambda_m)} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Аналогично находятся коэффициенты разложений a_k по другим системам функций Фадля – Папковича.

Окончательно получим такие разложения в ряды Лагранжа по функциям Фадля – Папковича.

$$\begin{aligned} U(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{u_k \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k)} U(\lambda_k, y) \right\}, \\ V(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{v_k \cdot 2\lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} V(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{x_k \cdot 2\lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2y_k}{L'(\lambda_k)} \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}, \\ \tau_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_k \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k)} \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $U(y)$, $V(y)$, $\tau_{xy}(y)$, $\sigma_x(y)$ и $\sigma_y(y)$ – раскладываемые функции, заданные на отрезке $[-1, 1]$, а числа u_k , v_k , x_k , y_k и t_k находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} u_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_k(y)dy, \\ v_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(y)V_k(y)dy, \\ x_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(y)X_k(y)dy, \\ y_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y)Y_k(y)dy, \\ t_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(y)T_k(y)dy. \end{aligned} \quad (25)$$

Из формул (25) видно, что для определения чисел u_k , v_k и т. д. необходимо раскладываемые функции, первоначально определенные при $y \in [-1, 1]$, каким-то образом продолжить вне этого отрезка. В зависимости от того, как выполнено это продолжение, числа u_k , v_k и т. д. будут разными. Однако независимо от способа продолжения ряды Лагранжа (24) будут сходиться при $y \in (-1, 1)$ к своим функциям. Неединственность разложений в ряды Лагранжа – одно из важнейших свойств систем функций Фадля – Папковича.

Пусть раскладываемыми функциями в формулах (25) являются соответствующие порождающие функции, т. е. $U(y) = U(t, y)$, $V(y) = V(t, y)$ и т. д., где t – вещественный параметр. Тогда в соответствии с формулами (14) ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{L(t)}{t^2 - \lambda_k}, \\ v_k &= \frac{L(t)}{t(t^2 - \lambda_k)}, \\ x_k &= \frac{L(t)}{t(t^2 - \lambda_k)}, \\ y_k &= \frac{tL(t)}{t^2 - \lambda_k}, \\ t_k &= \frac{L(t)}{t^2 - \lambda_k}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя числа (26) в формулы (24), получим ($|y| < 1$):

$$\begin{aligned} U(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(t) \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k)} \cdot U(\lambda_k, y) \right\}, \\ V(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(t) \cdot 2\lambda_k^2}{L'(\lambda_k) \cdot t \cdot (t^2 - \lambda_k)} \cdot V(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_x(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(t) \cdot 2\lambda_k^2}{L'(\lambda_k) \cdot t \cdot (t^2 - \lambda_k)} \cdot \sigma_x(\lambda_k, y) \right\}, \\ \sigma_y(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t \cdot L(t)}{L'(\lambda_k) \cdot (t^2 - \lambda_k)} \cdot \sigma_y(\lambda_k, y) \right\}, \\ \tau_{xy}(t, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(t) \cdot 2\lambda_k}{L'(\lambda_k) \cdot (t^2 - \lambda_k)} \cdot \tau_{xy}(\lambda_k, y) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

На рис. 3–7 показаны графики раскладываемых функций и соответствующие им ряды Лагранжа (27) при $t = 1$ и $D = 4$. Через $U_r(y)$, $V_r(y)$ и т. д. обозначены значения сумм соответствующих рядов.

Ряд Лагранжа для функции $U(t, y)$ отличается от раскладываемой функции на константу в силу того, что биортогональная система функций $\{U_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна к постоянной. Это следует из сравнения правой и левой частей первого равенства (14) при $\lambda \rightarrow 0$.

Переходя в формулах (27) к пределу при $t \rightarrow 0$ и учитывая (17), получим такие разложения:

$$\begin{aligned} \nu y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2(D + 2(1 + \nu))}{L'(\lambda_k)} \cdot V(\lambda_k y) \right\}, \\ 2(1 + \nu) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2(D + 2(1 + \nu))}{L'(\lambda_k)} \cdot \sigma_x(\lambda_k y) \right\}, \\ (1 + \nu) \cdot (y^2 - 1) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2(D + 2(1 + \nu))}{L'(\lambda_k) \lambda_k^2} \cdot \sigma_y(\lambda_k y) \right\}, \\ 2(1 + \nu) \cdot y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2(D + 2(1 + \nu))}{L'(\lambda_k) \lambda_k^2} \cdot \tau_{xy}(\lambda_k y) \right\}. \end{aligned}$$

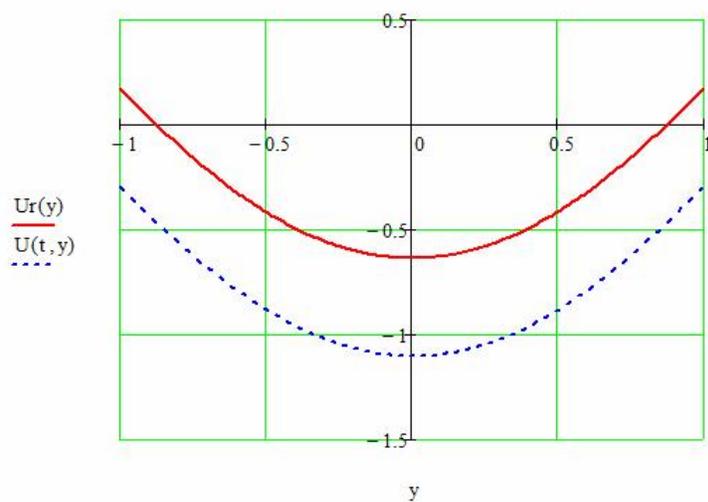


Рис. 3

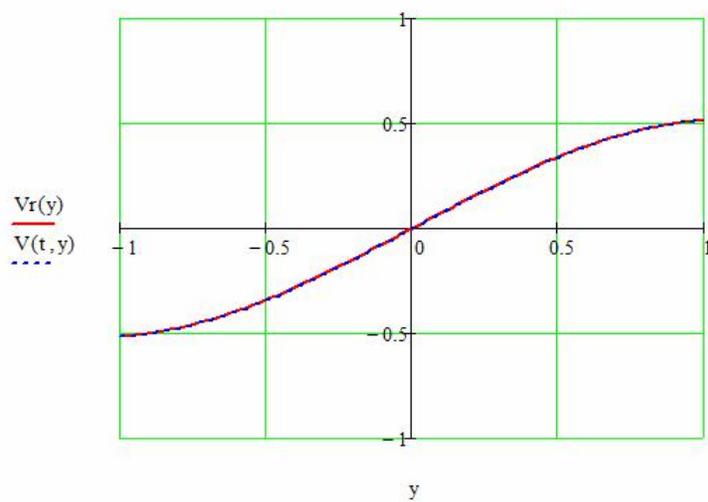


Рис. 4

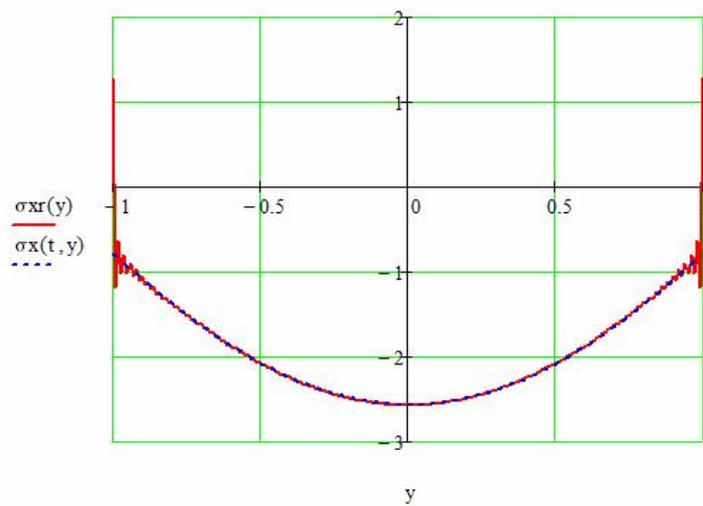


Рис. 5

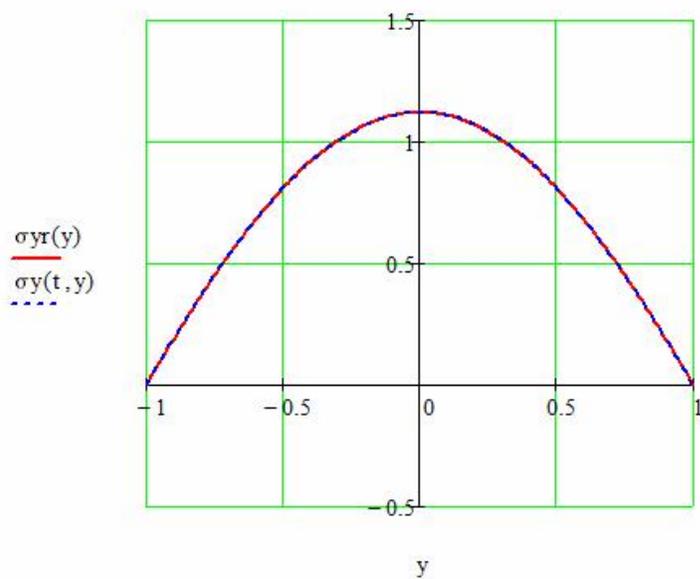


Рис. 6

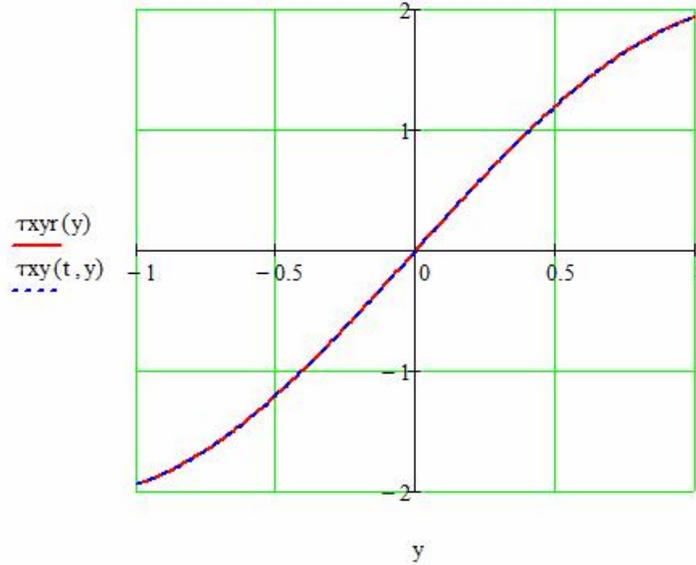


Рис. 7

Если раскладываемые функции, стоящие в правой части формул (24) и первоначально заданные на отрезке $[-1, 1]$, продолжить периодически вне отрезка $[-1, 1]$ с периодом, равным 4π , то для чисел u_k, v_k и т. д. можно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 u_k &= \int_{-1}^{+1} U(y)u_k(y)dy, \\
 v_k &= \int_{-1}^{+1} V(y)v_k(y)dy, \\
 x_k &= \int_{-1}^{+1} \sigma_x(y)x_k(y)dy, \\
 y_k &= \int_{-1}^{+1} \sigma_y(y)y_k(y)dy, \\
 t_k &= \int_{-1}^{+1} \tau_{xy}(y)t_k(y)dy.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Приведем примеры разложений с числами (28).

Пусть $U(y) = y^2 - 1$. По первой формуле (28) находим

$$u_k = \frac{4(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k)}{\lambda_k^3 \cos \lambda_k}. \tag{29}$$

Соответствующее разложение функции $U(y) = y^2 - 1$ таково:

$$y^2 - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\left\{\frac{2u_k \lambda_k}{L'(\lambda_k)} U(\lambda_k, y)\right\}. \quad (30)$$

Аналогично можно получить такие разложения:

$$\begin{aligned} y^3 - y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\left\{\frac{2v_k \cdot \lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} V(\lambda_k, y)\right\}, \\ y^2 - \frac{1}{3} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\left\{\frac{2x_k \cdot \lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} \sigma_x(\lambda_k, y)\right\}, \\ y^2 - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\left\{\frac{2y_k}{L'(\lambda_k)} \sigma_y(\lambda_k, y)\right\}, \\ y &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\left\{\frac{2 \cdot \lambda_k t_k}{L'(\lambda_k)} \tau_{xy}(\lambda_k, y)\right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

в которых числа

$$\begin{aligned} v_k &= 4 \frac{\lambda_k^2 \sin \lambda_k + 3\lambda_k \cos \lambda_k - 3 \sin \lambda_k}{\lambda_k^5 \cos \lambda_k}, \\ x_k &= -2 \frac{\lambda_k^2 \cdot \sin \lambda_k + 3(\lambda_k \cdot \cos \lambda_k - \sin \lambda_k)}{3 \cdot \lambda_k^5 \cdot \cos \lambda_k}, \\ y_k &= 2 \frac{\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k}{\lambda_k^3 \cos \lambda_k}, \\ \tau_k &= \frac{\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k}{\lambda_k^3 \cos \lambda_k}. \end{aligned} \quad (32)$$

На рис. 8–12 показаны раскладываемые функции стоящих в левой части формул (30), (31) и их ряды Лагранжа.

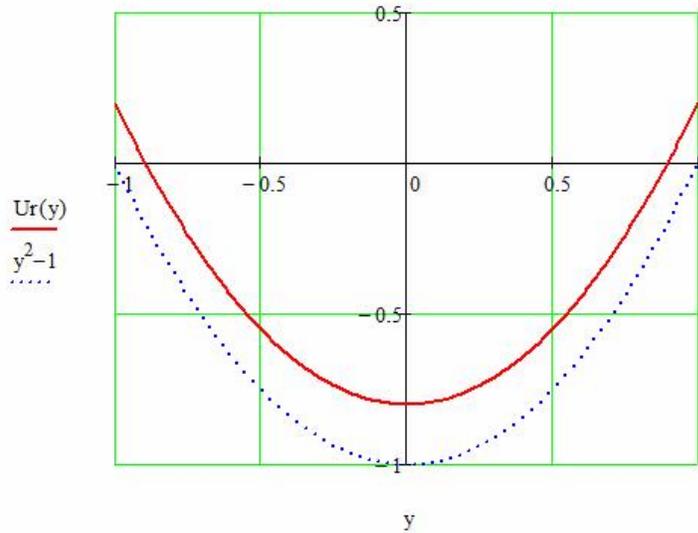


Рис. 8

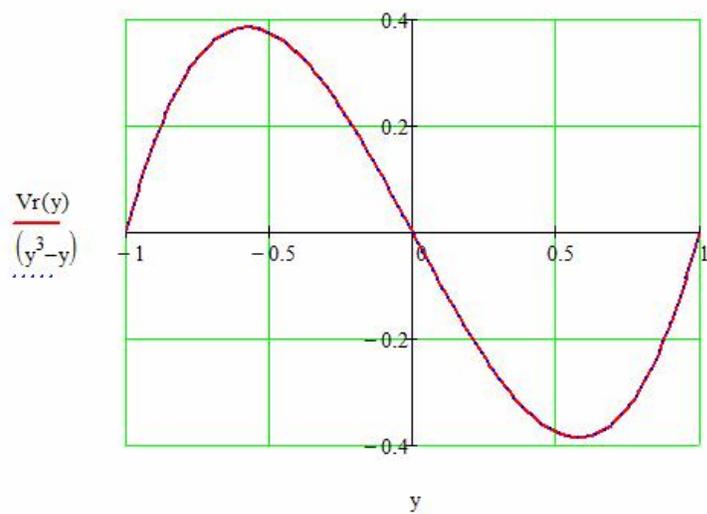


Рис. 9

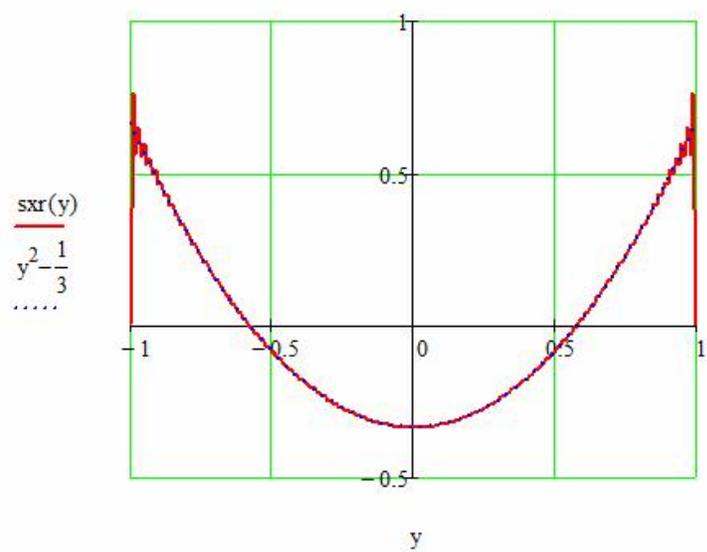


Рис. 10

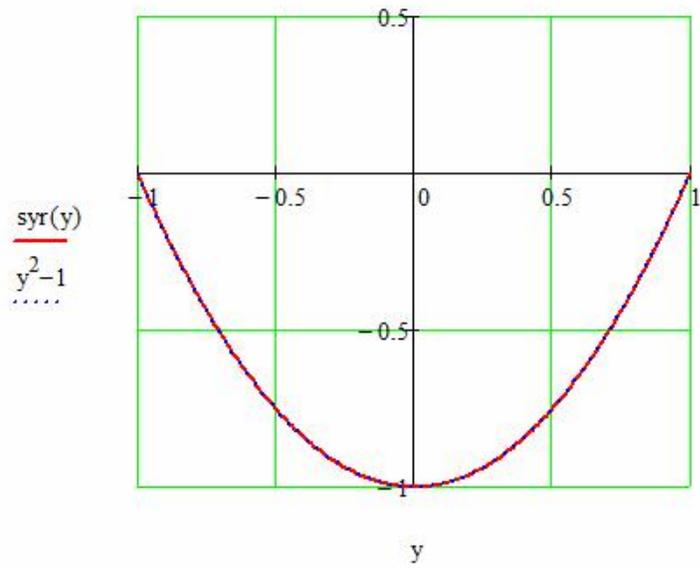


Рис. 11

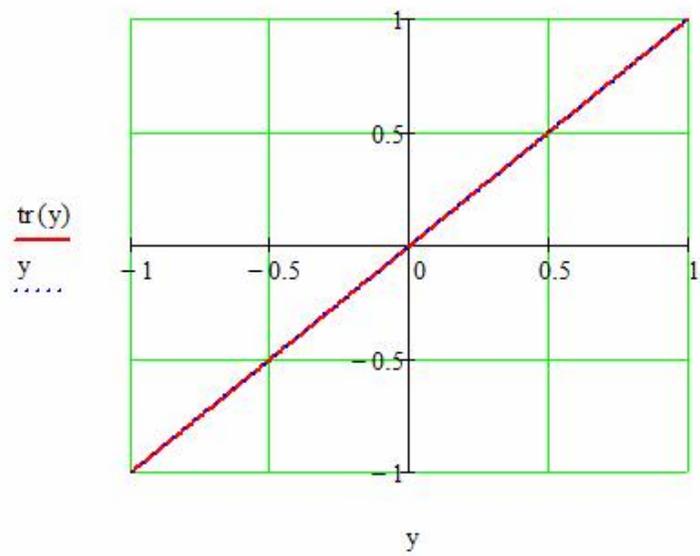


Рис. 12

Результаты исследований и их обсуждение. Выписаны интегральные соотношения для определения систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича, возникающим при решении симметричной краевой задачи теории упругости для полуполосы (прямоугольника), продольные стороны которой подкреплены ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие.

Резюме. Опираясь на полученные результаты, можно получить точные аналитические решения различных краевых задач теории упругости для полуполосы или прямоугольника, продольные стороны которых усилены ребрами жесткости, воспринимающими растягивающие или сжимающие усилия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям / М. Д. Коваленко // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352. – № 4. – С. 480–482.
- [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [4] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.

Лапикова Елена Семеновна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sopromat_v@mail.ru

Юринкина Мария Николаевна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sopromat_v@mail.ru

Кержаев Александр Петрович,

преподаватель кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sopromat_v@mail.ru

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: sopromat_v@mail.ru

E. S. Lapikova, M. N. Yurinkina, A. P. Kerzhaev, A. V. Nikitin

**THE SEMISTRIP WITH LONGITUDINAL STIFFENING RIBS. THE
LAGRANGE EXPANSION**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The examples of Lagrange expansions on the Fadle-Papkovich functions for the nonperiodic problem for the semistrip are constructed. The longitudinal sides of the semistrip have the tension-compression ribs.

Keywords: semistrip, stiffening ribs, Fadle-Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

[1] *Kovalenko, M. D.* Lagrange's decomposition and uncommon zero representations according to uniform decisions / M. D. Kovalenko // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1997. – Vol. 352. – № 4. – P. 480–482.

[2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich's functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.

[3] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.

[4] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.

Lapikova, Elena Semenovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Yurinkina, Maria Nikolaevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Kerzhaev, Alexandr Petrovich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук (1996), профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный открытый университет, г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (екс_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение Российской академии наук "Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН", г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marucbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ахмедова М. В.</i> Зарождение трещин в тонкой пластине, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий	3
<i>Гасанов Ф. Ф.</i> Периодическая задача механики разрушения о влиянии жестких включений на развитие когезионных трещин продольного сдвига	16
<i>Ахундова П. Э.</i> Расчет критических параметров втулки контактной пары	26
<i>Зульфугаров Э. И.</i> Тепловое напряженное состояние в барабане с искривленной зоной предразрушения при торможении колесной машины	35
<i>Гузъ М. П.</i> Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в комплексной области	43
<i>Кулиев В. Д., Курбанмагомедов А. К.</i> К теории роста трещин при циклическом нагружении	52
<i>Лапикова Е. С., Юринкина М. Н., Кержаев А. П., Никитин А. В.</i> Разложения Лагранжа в периодической задаче для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие	68
<i>Лапикова Е. С., Юринкина М. Н., Кержаев А. П., Никитин А. В.</i> Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. Разложения Лагранжа	86
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	104
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	107
СОДЕРЖАНИЕ	109

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2013. № 4 (18)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, Н. А. Осипова, Л. А. Судленкова

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 27.12.2013 г. Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.
Усл. печ. л. 13,75. Тираж 400 экз. Заказ №

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38