

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал
№ 2(20)
Апрель – июнь 2014 г.**

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых
должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов, д-р физ.-мат. наук, профессор
Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев, д-р физ.-мат. наук, профессор
Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, д-р физ.-мат. наук, про-
фессор

Ответственный секретарь: С. В. Тихонов, канд. физ.-мат. наук, доцент
Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов,
С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов,
А. И. Шашкин

Международный совет: Р. Ю. Амензаде (Азербайджан), С. В. Варданян (Армения),
В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж (Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-16-19.

Email: predel21@mail.ru.

WWW: <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2014

КРАЕВАЯ ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В БИМЕТАЛЛАХ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

Аннотация. С помощью K_α -формулы суммирования функциональных рядов [1] получен новый сингулярный интеграл, имеющий многочисленные приложения.

От этого сингулярного интеграла получаются сингулярный интеграл Пуассона и формула Шварца, дающая возможность выразить аналитическую в круге функцию через ее действительную часть на окружности с точностью до постоянного мнимого слагаемого. Кроме того, из нового сингулярного интеграла также получается сингулярный интеграл с ядром Гильберта, связанный с краевой задачей Гильберта.

Ключевые слова: биметаллы, краевая трещина продольного сдвига, численный анализ, уравнение Фредгольма, сингулярные интегральные уравнения.

УДК: 517.5

Некоторые проблемы механики разрушения $N(N \geq 1)$ -слойных композиционных материалов и более адекватный подход к оценке прочности и усталостной долговечности элементов конструкций из этих материалов в рамках механики разрушений разработаны в [1]. При этом процесс разрушения n -слойных материалов с поверхностной или центральной трещиной последовательно исследуется в три этапа: 1) трещина полностью находится на одном из боковых слоев; 2) трещина образована разрывом в этом слое и ее вершина находится на границе раздела разорванного и соседнего целого слоев; 3) направление роста трещины и ее тип согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям зависят от G_j , v_j , где G_j – модуль сдвига j -го слоя, v_j – коэффициент Пуассона того же слоя; от прочности адгезии на границах раздела (прочность адгезии согласно теории адгезии при сдвиге аналогичной теории Гриффитса – Ирвина, определяется одной новой постоянной – вязкостью скольжения контактного слоя K_{II} [1], а также размером дефекта или слабого места на контакте двух материалов); от микроструктуры пограничного слоя, примыкающего с одной или двух сторон к границе раздела.

Заметим, что при создании и эксплуатации биметаллов в пограничном слое возможны сложные релаксационные процессы, такие как рекристаллизация, образование новых фаз и другие, изменяющие его физико-механические свойства. Для того чтобы в более точном приближении оценить влияние пограничного слоя на прочность материала, необходимо определить толщину этого слоя, например, определить границы зоны диффузии при диффузионной сварке, т. е. смещение поверхности Крикденелла [2], а также изменение его механических характеристик при удалении от первоначальной границы раздела.

Решение соответствующих краевых задач для вышеприведенных трех этапов при антиплоской деформации построено в [1]. Определены коэффициенты интенсивности напряжений K_{III} для краевой трещины в $N(N \geq 1)$ -слойных материалах. Однако в этой работе не приведен анализ поведения соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений K_{III} .

Ниже рассматривается только первый этап для краевой трещины продольного сдвига. Дается подробный численный анализ коэффициента интенсивности напряжений K_{III} для биметаллов. При анализе K_{III} возникла необходимость в построении точных и замкнутых решений трех задач (см. ниже раздел "Анализ решения", случаи 1-3). Решение этих задач помогает четко описать процесс разрушения биметаллов с краевой трещиной продольного сдвига.

1. Постановка задачи. Пусть полоса $0 \leq x \leq H$, $|y| < \infty$, составленная из N различных однородных изотропных упругих материалов μ_k ($k = \overline{1, N}$), где μ_k – модуль сдвига, жестко сцепленных вдоль плоскостей $x = h_j$ ($j = \overline{1, N-1}$, $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_{N-1} < h_N = H$), содержит краевую трещину продольного сдвига ($y=0$, $0 < x < l < h_1$), перпендикулярную свободным от внешних нагрузок границам $x=0$ и $x=H$ (рис. 1).

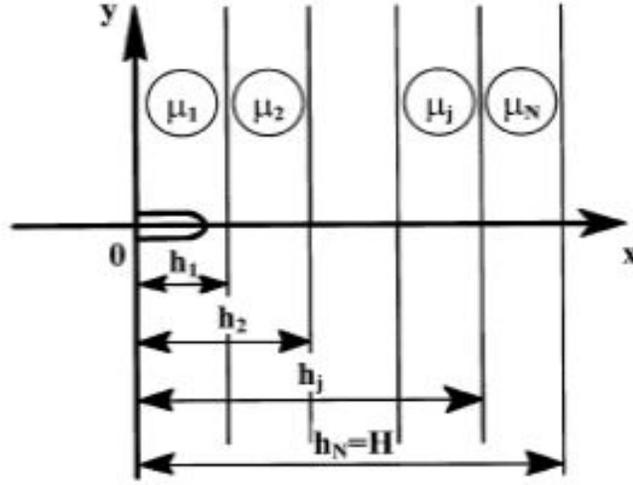


Рис. 1. Краевая трещина продольного сдвига в многослойных материалах

К берегам трещины приложено некоторое заданное напряжение. На бесконечности напряжения отсутствуют, а смещение исчезает.

Граничные условия имеют вид

$$x = 0 \quad (\sigma_{xz})_1 = 0; \quad x = H \quad (\sigma_{xz})_N = 0, \quad (1)$$

$$y = 0 \quad 0 < x < l < h_1 \quad (\sigma_{yz})_1 = -\sigma_1(x), \quad (2)$$

$$y = 0 \quad l < x < h_1 \quad (w)_1 = 0, \quad (3)$$

$$y = 0 \quad h_j < x < h_{j+1} \quad (w)_{j+1} = 0 \quad (j = \overline{1, N-1}), \quad (4)$$

$$x = h_j \quad (w)_j = (w)_{j+1}, \quad (\sigma_{xz})_j = (\sigma_{xz})_{j+1} \quad (j = \overline{1, N-1}). \quad (5)$$

Условие на конце трещины [1]:

$$K_{III} = - \lim_{x \rightarrow l-0} \left[\sqrt{2\pi(l-x)} (\sigma_{xz})_1(x, 0) \right]. \quad (6)$$

Условия на бесконечности ($|y| \rightarrow \infty$, $0 < x < H$):

$$\begin{aligned} (\sigma_{yz})_j \rightarrow 0, \quad (\sigma_{xz})_j \rightarrow 0, \quad (w)_j = O(r^\alpha) \\ \left(r = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \alpha < 0 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $(\sigma_{yz})_j$, $(\sigma_{xz})_j$ – напряжения, а $(w)_j$ – смещение, K_{III} – коэффициент интенсивности напряжений.

Эту задачу можно рассмотреть следующим образом: пусть краевая трещина продольного сдвига перпендикулярна к свободным поверхностям упругой полосы $0 \leq x \leq H$, $|y| < \infty$ и пусть модуль сдвига μ меняется по оси Ox . Разделим упругую полосу на N частей так, чтобы внутри каждой полученной полосы и на их границах μ_i ($i=1, 2, \dots, n$) можно считать постоянной величиной.

Решение задачи, когда модуль сдвига μ является случайной функцией координат x, y и не зависит от z , построено в работе [3], где определен эффективный коэффициент интенсивности напряжений k_{III}^* для трещин продольного сдвига.

Сначала построим решение краевой задачи (1)-(7), а затем проведем полный анализ задачи для случая $N = 2$.

2. Решение краевой задачи. Решение краевой задачи в областях $0 < x < h_1$, $y \geq 0$ ищем в форме $0 < x < h_1$ (первая упругая среда: μ_1):

$$(w)_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A_1 ch \lambda x \sin \lambda y d\lambda + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty b e^{-\eta y} \cos \eta x d\eta, \quad (8)$$

$$h_j < x < h_{j+1} \quad ((j+1) - \text{я среда}, \quad j = \overline{1, N-1}: \quad \mu_{j+1})$$

$$(w)_{j+1}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (A_{j+1} ch \lambda x + B_{j+1} sh \lambda x) \sin \lambda y d\lambda. \quad (9)$$

Напряжения $(\sigma_{xz})_j$ и $(\sigma_{yz})_j$ через гармоническую функцию $(w)_j$ определяются так:

$$(\sigma_{xz})_j = \mu_j \frac{\partial (w)_j(x, y)}{\partial x}, \quad (\sigma_{yz})_j = \mu_j \frac{\partial (w)_j(x, y)}{\partial y}. \quad (10)$$

Условия (1) и (4) удовлетворяются тождественно. При помощи (1), (5), (8), (9) и (10) находим:

$$A_1 ch \lambda h_1 - A_2 ch \lambda h_1 - B_2 sh \lambda h_1 = \gamma_1(\lambda),$$

$$k_{1,2} A_1 sh \lambda h_1 - A_2 sh \lambda h_1 - B_2 ch \lambda h_1 = k_{1,2} \gamma_2(\lambda),$$

$$A_{j+1} ch \lambda h_{j+1} + B_{j+1} sh \lambda h_{j+1} - A_{j+2} ch \lambda h_{j+1} - B_{j+2} sh \lambda h_{j+1} = 0, \quad (11)$$

$$k_{j+1, j+2} [A_{j+1} sh \lambda h_{j+1} + B_{j+1} ch \lambda h_{j+1}] - A_{j+2} sh \lambda h_{j+1} - B_{j+2} ch \lambda h_{j+1} = 0,$$

$$A_N sh \lambda h_N + B_N ch \lambda h_N = 0 \quad (j = \overline{1, N-2}).$$

Здесь

$$k_{1,2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad k_{j+1, j+2} = \frac{\mu_{j+1}}{\mu_{j+2}}.$$

$$\gamma_1(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda y \int_0^{\infty} b(\eta) e^{-\eta y} \cos \eta h_1 d\eta dy, \quad (12)$$

$$\gamma_2(\lambda) = \frac{2}{\lambda\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda y \int_0^{\infty} \eta b(\eta) e^{-\eta y} \sin \eta h_1 d\eta dy.$$

Система уравнений (11) с матрицей $(2N-1) \times (2N-1)$ является алгебраической относительно $2N-1$ неизвестных функций $A_j(\lambda)$ ($j = \overline{1, N}$) и $B_j(\lambda)$ ($j = \overline{2, N}$). Следовательно, все искомые функции $A_j(\lambda)$ ($j = \overline{1, N}$) и $B_j(\lambda)$ ($j = \overline{2, N}$) выражаются через интегралы $\gamma_j(\lambda)$ ($j = 1, 2$) от одной неизвестной функции $b(\eta)$.

Функцию $b(\eta)$ представим в виде

$$b(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \eta t}{\eta} dt \quad (13)$$

или

$$b(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t \psi(t) J_0(\eta t) dt. \quad (14)$$

Здесь функции $f(t)$ и $\psi(t)$ – новые неизвестные функции, $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Следует доказать:

- справедливость представления функции $b(\eta)$ в виде (13) или (14);
- принадлежность функций $f(t)$ и $\psi(t)$, $t \in [0, l]$ к определенным классам.

Кроме того, докажем, что если функция $b(\eta)$ дается формулой (13), то решение краевой задачи (1)–(7) сводится к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода типа Коши, а если функция дается формулой (14), – к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Покажем, что теорема 1 ([1], гл. I) дает возможность равносильного перехода от одного интегрального уравнения к другому.

Пусть функция $b(\eta)$ дается формулой (13).

Докажем, что если $0 < x < l$, то $\frac{d(w)_1(x, 0)}{dx} = -f(x)$. Действительно, пусть $0 < x < l$. Тогда из (13) и (8) находим

$$(w)_1(x, 0) = \frac{2}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0+ \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0-}} \left\{ \int_0^{x-\varepsilon_1} f(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta t}{\eta} \cos \eta x d\eta dt + \int_{x+\varepsilon_2}^l f(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta t}{\eta} \cos \eta x d\eta dt \right\}. \quad (15)$$

Отсюда при $0 < x < l$, используя разрывный интеграл Дирихле [1], получаем

$$(w)_1(x, 0) = \int_x^l f(t) dt, \quad (16)$$

т. е.

$$f(x) = -\frac{d(w)_1(x, 0)}{dx}. \quad (17)$$

Из (8) и (10а) при $j = 1$ с учетом (17) и (13) находим

$$(\sigma_{xz})_1(x, 0) = \mu_1 \frac{2}{\pi} \int_0^{h_1} \frac{d(w)_1(t, 0)}{dt} \int_0^\infty \sin \eta t \sin \eta x d\eta dt = \mu_1 \frac{d(w)_1(x, 0)}{dx}, \quad (18)$$

$$(w)_1(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{h_1} (w)_1(t, 0) \int_0^\infty \cos \eta x \cos \eta t d\eta dt = (w)_1(x, 0). \quad (19)$$

Эти формулы оправдывают справедливость представления функции в виде (13).

Из (17) следует: $f(x) \in K_\delta [0, l[$, $\delta = \frac{1}{2}$, т. е. $f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}$; $f_0(x) \in H^\alpha [-l, l]$, $0 < \alpha \leq 1$; $f_0(x) = -f_0(-x)$.

Таким образом, из (17)–(19) следует правомерность представления функции $b(\eta)$ в виде

$$b(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{\sin \eta t}{\eta} dt, \quad f(t) = -\frac{d(w)_1(t, 0)}{dt}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (8), непосредственно убеждаемся, что условие (3) удовлетворяется автоматически.

Учитывая (20) в (10) при $j = 1$, согласно (2) получаем

$$\frac{\sigma_1(x)}{\mu_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t) dt}{t - x} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda A_1(\lambda) ch \lambda x d\lambda, \quad (21)$$

($0 < x < l$).

Подставив (20) в (12) и разрешив систему уравнений (11) относительно функций $A_j(\lambda)$ ($j = \overline{1, N}$) и $B_j(\lambda)$ ($j = \overline{2, N}$) и подставив значение функции $A_1(\lambda)$ в (21), приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода типа Коши.

Пусть $N = 2$. Тогда из (11) находим

$$A_j(\lambda) = \frac{e^{-\lambda h_1}}{\Delta_0} (kch\lambda h - sh\lambda h) M(\lambda),$$

$$A_2(\lambda) = \frac{k}{\Delta_0} ch\lambda h M(\lambda), \quad B_2(\lambda) = -\frac{k}{\Delta_0} sh\lambda h M(\lambda), \quad (22)$$

$$\Delta_0 = ch\lambda h_1 sh\lambda h + ksh\lambda h_1 ch\lambda h,$$

$$k = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad h = H - h_1, \quad h_2 = H,$$

$$M(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l f(t) \frac{sh\lambda t}{\lambda} dt.$$

Из (21) и (22) находим

$$\frac{\sigma_1(x)}{\mu_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) K(x, t) dt \quad (0 < x < l), \quad (23)$$

$$K(x, t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h_1} (sh\lambda h - kch\lambda h) sh\lambda t ch\lambda x}{ksh\lambda h_1 ch\lambda h + ch\lambda h_1 sh\lambda h} d\lambda.$$

Заметим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и леммы 1 (см. [1], гл. I, §2 и §3).

Заменив в (23) x на τ и применив к обеим частям (23) оператор Абеля

$$\int_0^x \frac{(\cdot) d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}},$$

приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (см. [1], гл. I, §3, теорему 1, следствие 1):

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi\mu_1} \int_0^x \frac{\sigma_1(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau &= \psi(x) + \int_0^l \psi(t) K_0(x, t) dt, \\ K_0(x, t) &= \int_0^\infty \frac{\lambda t e^{-\lambda h_1} (sh\lambda h - kch\lambda h) I_0(\lambda t) I_0(\lambda x)}{ksh\lambda h_1 ch\lambda h + ch\lambda h_1 sh\lambda h} d\lambda, \\ k &= \frac{\mu_1}{\mu_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь (см. [1], гл. I, §3, следствие 1)

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (25)$$

Функция $\psi(x)$ обладает свойствами:

1. В силу леммы 1 (см. [1], гл. I, §1)

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \psi(x) = \frac{f_0(l)}{l} = \psi(l), \quad (26)$$

так как $\psi(l)$ – непрерывная функция в промежутке $[0, l]$.

2. При $x = 0$

$$\psi(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Поскольку $f(x) \in K_\delta [0, l]$, $\delta = \frac{1}{2}$, т. е. $f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}$; $f_0(x) \in H^\alpha [-l, l]$, $0 < \alpha \leq 1$; $f_0(x) = -f_0(-x)$, то этот интеграл существует. Следовательно, функция $\psi(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$. Из (25) (см. [1], гл. I, §1, замечание 1)

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^l \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (27)$$

Отсюда, если функция $\psi(\tau)$ дифференцируемая, что принимается во многих работах (см., например, [1]), когда решения подобных задач другими методами сводятся к решению фредгольмова уравнения второго рода, то

$$-\frac{d(w)_1(x, 0)}{dx} \stackrel{def}{=} f(x) = \frac{x\psi(l)}{\sqrt{l^2 - x^2}} - x \int_x^l \frac{\psi'(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau, \quad (28)$$

$$\psi'(\tau) = \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}.$$

Формулу (27) согласно лемме 2 (см. [1], гл. I, §1) можно представить также в виде

$$f(x) = \frac{x\psi(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}} + x \int_x^l \frac{\tau [\psi(x) - \psi(\tau)]}{(\tau^2 - x^2) \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (29)$$

Формула (29) имеет по сравнению с (28) то преимущество, что требует от $\psi(x)$ только лишь гельдеровости с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$.

Согласно (29), (10) при $j = 1$ и (6) находим коэффициент интенсивности напряжений для трещин продольного сдвига:

$$K_{III} = \mu_1 \sqrt{\pi l} \psi(l) \quad (30)$$

или

$$K_{III} = \mu_1 \sqrt{\frac{\pi}{l}} f_0(l). \quad (31)$$

Здесь $\psi(l)$ определяется из фредгольмова уравнения (24), а $f_0(l)$ – из сингулярного уравнения первого рода типа Коши (23).

Теперь остается доказать, что если функция $b(\eta)$ дается формулой (14), то решение краевой задачи также сводится к решению фредгольмова уравнения второго рода (24). Рассмотрим случай $N = 2$.

Согласно условиям (2), (3) и (8) приходим к парным (дуальным) интегральным уравнениям с тригонометрическим ядром $\cos \eta x$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} b(\eta) \cos \eta x d\eta = 0, \quad l < x < h, \quad (32)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \eta b(\eta) \cos \eta x d\eta = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \quad (33)$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{\sigma_1(x)}{\mu_1} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda A_1(\lambda) ch \lambda x d\lambda. \quad (34)$$

Используя разрывный интеграл Вебера [1], непосредственно убеждаемся, что функция (14) удовлетворяет уравнению (32).

Подставляя (14) в (33), приходим к уравнению Абеля:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t\psi(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = \varphi(x) \quad 0 < x < l, \quad (35)$$

решение которого имеет вид

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} dx \quad 0 < x < l. \quad (36)$$

Учитывая (14) в (12), из системы алгебраических уравнений (11) находим

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= \frac{e^{-\lambda h_1}}{\Delta_0} (kch\lambda h - sh\lambda h) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t\psi(t) I_0(\lambda t) dt, \\ A_2(\lambda) &= \frac{k}{\Delta_0} ch\lambda H \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t\psi(t) I_0(\lambda t) dt, \\ B_2(\lambda) &= -\frac{k}{\Delta_0} sh\lambda H \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^l t\psi(t) I_0(\lambda t) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставив (36) в (34), из (36) приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\frac{2}{\pi\mu_1} \int_0^x \frac{\sigma_1(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \psi(x) + \int_0^l \psi(t) K_0(x, t) dt, \quad (38)$$

$$K_0(x, t) = \int_0^\infty \frac{\lambda t e^{-\lambda h_1} (sh\lambda h - kch\lambda h) I_0(\lambda t) I_0(\lambda x)}{ksh\lambda h_1 ch\lambda h + ch\lambda h_1 sh\lambda h} d\lambda, \quad (39)$$

что совпадает с уравнением (24), полученным с помощью теоремы 1 (см. [1], гл. I, §3) из сингулярного интегрального уравнения первого рода типа Коши.

3. Анализ решения. Рассмотрим три важных случая разрушения биметаллов.

Случай 1. Пусть в формуле (23) $k = 1$, т. е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, тогда имеем:

$$\frac{\sigma_1(x)}{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{f(t)}{t+x} dt - \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \left[\int_0^\infty \frac{sh\lambda(t+x) + sh\lambda(t-x)}{e^{2\lambda H} - 1} d\lambda \right] dt, \quad (40)$$

$0 < x < l$.

Здесь функция $f(x) \in K_{1/2}[0, l]$, т. е.

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad f_0(x) \in C^1[0, l], \quad (41)$$

$$f(-x) = -f(x), \quad f_0(l) \neq 0, \quad f_0(x) \in H^\alpha[0, l], \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Вычисляя интеграл, находящийся внутри квадратной скобки в формуле (40), методом контурного интегрирования [1], получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) = & \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{f(x)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{f(x)}{t+x} dt + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^l f(t) \left\{ \frac{\pi}{4H} [ctg \frac{\pi}{2H}(t+x) + ctg \frac{\pi}{2H}(t-x)] - \frac{1}{2(t+x)} - \frac{1}{2(t-x)} \right\} dt, \end{aligned} \quad (42)$$

$$0 < x < l < H.$$

Из (42) приходим к особому интегралу с обобщенным ядром Коши:

$$\frac{\sigma_1(x)}{\mu_1} = -\frac{1}{H} \int_0^l f(t) \frac{\sin \frac{\pi}{H} t}{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} x} dt, \quad (43)$$

$$(0 < x < l < H).$$

Обращение особого интеграла с обобщенным ядром Коши

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{W'(t)}{W(t) - W(x)} G(t) dt, \quad (a \leq x \leq b) \quad (44)$$

дано в работе [4].

Здесь функция $W(t)$ является монотонно возрастающей (убывающей) функцией в строгом смысле и непрерывной в промежутке $[a, b]$; $G(x)$ – искомая функция. Формулы обращения особого интеграла с обобщенным ядром Коши (44) при определенных условиях, накладываемых на искомую функцию $G(x)$, получены в работе [4]. Поскольку $f(t)$ принадлежит к классу $K_{1/2}[a, b]$, то в силу формулы обращения, полученной в [4] из (43), находим

$$f(x) = \frac{1}{\mu_1 H} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{H} x}{\cos \frac{\pi}{H} x - \cos \frac{\pi}{H} l}} \int_0^l \sqrt{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} l} \frac{\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{H} t}}{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} x} \sigma_1(t) dt \quad (45)$$

($0 < x < l$).

Отсюда с учетом (41) при $x \rightarrow l - 0$ получаем

$$f_0(l) = \frac{1}{\mu_1} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \sqrt{\frac{2}{H} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2H} l \right)} \int_0^l \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{H} t}{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} l}} \sigma_1(t) dt. \quad (46)$$

Подставляя (46) в (31), окончательно находим коэффициент интенсивности напряжений для трещин продольного сдвига:

$$K_{III} = \sqrt{\frac{2}{H} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2H} l \right)} \int_0^l \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{H} t}{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} l}} \sigma_1(t) dt. \quad (47)$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Пусть $H \rightarrow +\infty$. Тогда из (47) приходим к известной формуле [1]:

$$K_{III} = \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{\sigma_1(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}} dt. \quad (48)$$

1.1. Если в формуле (48) $\sigma_1(t) = \sigma_0 \equiv \text{const}$, то

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l}. \quad (49)$$

1.2. Если в формуле (48) $\sigma_1(t) = \sigma_0 \delta(x)$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, то

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l}. \quad (50)$$

2. Пусть в формуле (47) $\sigma_1(t) = \sigma_0 \equiv \text{const}$.

Тогда

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{2H \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2H} l \right)}, \quad (51)$$

так как

$$\int_0^l \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{H} t}{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} l}} dt = H. \quad (52)$$

Равенство (52) можно доказать двумя способами. Первый способ – это непосредственное интегрирование, второй способ опирается на представление Дирихле – Мелера многочленов Лежандра [5], [6]:

$$P_n(\cos \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\varphi \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \varphi}} d\Theta \quad (0 < \varphi < \pi). \quad (53)$$

Докажем, что

$$P_0(\cos \varphi) = \frac{1}{H} \int_0^l \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{H} t}{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} l}} dt \quad (l < H). \quad (54)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \int_0^l \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{H} t}{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} l}} dt &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{H} t = 0 \Rightarrow 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{H} l = \varphi < \pi; \\ t = \frac{H}{\pi} \Theta \Rightarrow dt = \frac{H}{\pi} d\Theta. \end{array} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\varphi \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \varphi}} d\Theta \stackrel{def}{=} P_0(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Известно [5], [6], что $P_0(\cos \varphi) = 1$ для любого $\varphi \in]0, \pi]$.

Равенство (52) доказано.

2.1. Пусть в формуле (51) $H \rightarrow +\infty$. Тогда

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l}, \quad (55)$$

что и следовало ожидать.

2.2. Пусть в формуле (51) $l \rightarrow H - 0$. Тогда

$$K_{III} \sim \frac{2\sigma_0 \sqrt{H}}{\sqrt{\pi(1 - \frac{l}{H})}}. \quad (56)$$

3. Пусть в формуле (47) $\sigma_1(t) = \sigma_0 \delta(x)$. Тогда

$$K_{III} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{H \sin(\frac{\pi}{H} l)}}. \quad (l < H). \quad (57)$$

3.1. Пусть в формуле (57) $H \rightarrow +\infty$. Тогда

$$K_{III} = \sigma_0 / \sqrt{\pi l}. \quad (58)$$

3.2. Пусть в формуле (57) $l \rightarrow H - 0$. Тогда

$$K_{III} \sim \frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi H(1 - \frac{l}{H})}}. \quad (59)$$

Замечание. Поскольку функция $\psi(x)$ определяется из решения фредгольмова уравнения (36) с ядром (39) и связано с функцией $f(x) \in K_{1/2}[0, l]$ по формуле (25), то решением фредгольмова уравнения при $k = 1$ будет

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau \quad (0 \leq x \leq l). \quad (60)$$

Здесь $f(\tau)$ определяется по формуле (45).

Из (60) в силу (25) и (46) имеем

$$\psi(l) = \frac{1}{\mu_1} \sqrt{\frac{2}{\pi H l} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2H} l\right)} \int_0^l \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{H} t}{\cos \frac{\pi}{H} t - \cos \frac{\pi}{H} l}} \sigma_1(t) dt. \quad (61)$$

Отсюда при $\sigma_1(t) = \sigma_0$ в силу (56) получаем

$$\psi(l) = \frac{\sigma_0}{\mu_1} \sqrt{\frac{2}{\pi l} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2H} l\right)}. \quad (62)$$

Подставляя (62) в (30), приходим к формуле (51).

Случай 2. Предположим, что $k \rightarrow +\infty$ (μ_1 – конечная величина, $\mu_2 \rightarrow +0$). Тогда из второй формулы в (23) получаем

$$K(x, t) = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h_1} sh\lambda t \cdot ch\lambda x}{sh\lambda h_1} d\lambda. \quad (63)$$

Аналогично первому случаю находим коэффициент интенсивности напряжения:

$$K_{III} = \sqrt{\frac{2}{h_1} tg \left(\frac{\pi}{2h_1} l \right)} \int_0^l \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{h_1} t}{\cos \frac{\pi}{h_1} t - \cos \frac{\pi}{h_1} l}} \sigma_1(t) dt. \quad (64)$$

Отсюда при $\sigma_1(t) = \sigma_0$ имеем

$$\frac{K_{III}}{\sigma_0 \sqrt{\pi h_1}} = \sqrt{\frac{2}{h_1} tg \left(\frac{\pi}{2h_1} l \right)} \quad (0 \leq l \leq h_1). \quad (65)$$

Случай 3. Пусть $k \rightarrow +0$ ($\mu_1 > 0, \mu_2 \rightarrow +\infty$). Тогда из второй формулы (23) находим

$$K(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{sh\lambda(t-x) + sh\lambda(t+x)}{e^{2\lambda h_1} + 1} d\lambda$$

$$(0 < x \leq l < h_1).$$

Отсюда в силу первой формулы (23) имеем

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{2h_1} \int_0^l f(t) \left[\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2h_1}(t-x)} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2h_1}(t+x)} \right] dt \quad (66)$$

$$(0 < x \leq l < h_1).$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Из (66) после несложных преобразований получаем

$$\sigma_1(x) = -\frac{1}{h_1} \int_0^l \frac{\sin \frac{\pi}{h_1} t}{\cos \frac{\pi}{h_1} t - \cos \frac{\pi}{h_1} x} f_1(t) dt. \quad (67)$$

Здесь

$$\sigma(x) = \frac{\sigma_1(x)}{\cos \frac{\pi}{2h_1} x}, \quad f_1(t) = \frac{f(t)}{\cos \frac{\pi}{2h_1} t} \quad (68)$$

$$(0 < x \leq l < h_1).$$

Очевидно, что $\sigma(x) \in C^1 [0, l]$, $f_1(t) \in K_{1/2} [0, l]$. Поэтому в силу формулы обращения особого интеграла, полученной в (3) из (67) с учетом (68), находим

$$f(x) = \frac{\cos \frac{\pi}{2h_1} x}{\mu_1 h_1} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{h_1} x}{\cos \frac{\pi}{h_1} x - \cos \frac{\pi}{h_1} l}} \times$$

$$\times \int_0^l \sqrt{\cos \frac{\pi}{h_1} t - \cos \frac{\pi}{h_1} l} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{h_1} t}}{\cos \frac{\pi}{h_1} t - \cos \frac{\pi}{h_1} x} \cdot \frac{\sigma_1(t)}{\cos \frac{\pi}{2h_1} t} dt. \quad (69)$$

Отсюда с учетом (41) при $x \rightarrow l - 0$ получаем

$$f_0(l) = \frac{1}{\mu_1} \sqrt{\frac{2l}{\pi h_1}} \sin \frac{\pi}{h_1} l \int_0^l \frac{\sigma_1(t)}{\sqrt{\cos \frac{\pi}{h_1} t - \cos \frac{\pi}{h_1} l}} dt. \quad (70)$$

Тогда в силу (31) коэффициент интенсивности напряжения имеет вид

$$K_{III} = \sqrt{\frac{2}{h_1}} \sin \frac{\pi}{h_1} l \int_0^l \frac{\sigma_1(t)}{\sqrt{\cos \frac{\pi}{h_1} t - \cos \frac{\pi}{h_1} l}} dt. \quad (71)$$

Пусть $\sigma_1(t) = \sigma_0 \equiv Const$. Тогда из (71) имеем

$$\frac{K_{III}}{\sigma_0 \sqrt{\pi h_1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\pi}{h_1} l \int_0^{l/h_1} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \frac{\pi}{h_1} l}}. \quad (72)$$

Следовательно, полученное нами решение является решением следующей краевой задачи:

1. Граничные условия:

$$x = 0 \quad (\sigma_{xz})_1 = 0, \quad x = h_1 \quad (w)_1 = 0,$$

$$y = 0 \quad 0 < x < l < h_1, \quad (\sigma_{yz})_1 = -\sigma_1(x),$$

$$y = 0 \quad l < x < h_1 \quad (w)_1 = 0.$$

2. Условие на концах трещины:

$$K_{III} = - \lim_{x \rightarrow l-0} \left[\sqrt{2\pi(l-x)} (\sigma_{xz})_1(x, 0) \right].$$

3. Условия на бесконечности ($|y| \rightarrow \infty; 0 < x < h_1$):

$$(\sigma_{yz})_1 \rightarrow 0, \quad (\sigma_{xz})_1 \rightarrow 0, \quad (w)_1 = 0(r^\alpha),$$

$$(r = \sqrt{x^2 - y^2}, \alpha < 0).$$

Случай 4. Пусть $\sigma_1(t) = \sigma_0 \equiv const$ и $H \rightarrow +\infty$. Тогда из (38) и (39) с учетом (30) имеем

$$1 = \Psi(x_1) + \int_0^1 \Psi(t_1) K_0^*(x_1, t_1) dt_1, \quad (73)$$

$$K_0^*(x_1, t_1) = \frac{2(1-k)}{1+k} \int_0^\infty \frac{\eta t_1 I_0(\eta t_1) I_0(\eta x_1)}{e^{2\eta \frac{h_1}{t_1}} + \frac{1-k}{1+k}} d\eta, \quad (74)$$

$$\Psi(x_1) = \frac{\mu_1}{\sigma_0} \psi(x), \quad x_1 = \frac{x}{l} \quad (0 \leq x_1 \leq 1), \quad (75)$$

$$\frac{K_{III}}{\sigma_0 \sqrt{\pi h_1}} = \sqrt{\frac{l}{h_1}} \Psi\left(1, k, \frac{l}{h_1}\right). \quad (76)$$

Из (74) для любого k следует следующее неравенство:

$$-2 \int_0^\infty \frac{\eta t_1 I_0(\eta t_1) I_0(\eta x_1)}{e^{2\eta \frac{h_1}{t_1}} - 1} d\eta \leq \frac{2(1-k)}{1+k} \int_0^\infty \frac{\eta t_1 I_0(\eta t_1) I_0(\eta x_1)}{e^{2\eta \frac{h_1}{t_1}} + \frac{1-k}{1+k}} d\eta \leq$$

$$\leq 2 \int_0^{\infty} \frac{\eta t_1 I_0(\eta t_1) I_0(\eta x_1)}{e^{2\eta \frac{h_1}{t}} + 1} d\eta. \quad (77)$$

Очевидно, что знак равенства в (77) имеет место: слева при $k \rightarrow +\infty$ (μ_1 – конечная положительная величина, $\mu_2 \rightarrow +0$), а справа при $k \rightarrow +0$ (μ_1 – конечная положительная величина, $\mu_2 \rightarrow +\infty$).

Коэффициенты интенсивности напряжений K_{III} при $k \rightarrow +\infty$ (μ_1 – конечная положительная величина, $\mu_2 \rightarrow +0$) и при $k \rightarrow +0$ (μ_1 – конечная положительная величина, $\mu_2 \rightarrow +\infty$) определяются по формулам (64) и (70) соответственно.

В силу формулы (25) и (26) приходим к выводу о том, что решения уравнений Фредгольма второго порядка для этих двух предельных случаев существуют и единственны. Проведенный анализ (73) и (74) показывает: если h_1 – некоторая положительная величина, то при любых фиксированных значениях h_1 и l/h_1 ($0 < \frac{l}{h_1} < 1$) безразмерная величина $K_{III}/(\sigma_0 \sqrt{\pi h_1})$ увеличивается с увеличением k , так как

$$0 < \Psi(1, 0, l/h_1) < \Psi(1, k, \frac{l}{h_1}) < \Psi(1, +\infty, \frac{l}{h_1}) \quad (78)$$

$$(0 < k < \infty).$$

Результаты численного расчета зависимости $K_{III}/(\sigma_0 \sqrt{\pi h_1})$ от l/h_1 ($l < h_1$) при различных значениях k представлены на рис. 2 и 3. Анализ этих кривых показывает, что характер изменения кривой зависимости поправочной для K_{III} функции от l/h_1 зависит от величины k ($k = \mu_1/\mu_2$). При $k \leq 0.5$ значения поправочной функции в области $l/h_1 = 0,9$ проходят через максимум, а затем уменьшаются (рис. 3). Это говорит о том, что происходит торможение трещины. В то же время, как при $k \rightarrow \infty$, поправочная функция в этой же области монотонно возрастает (рис. 2), т. е. происходит разрушение материала.

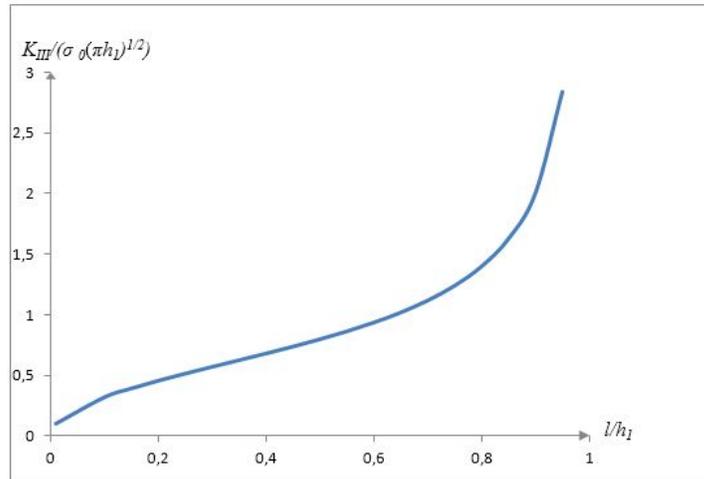


Рис. 2. График зависимости поправочной функции от отношения $\frac{l}{h_1}$, построенный по формуле (65) при $k \rightarrow \infty$

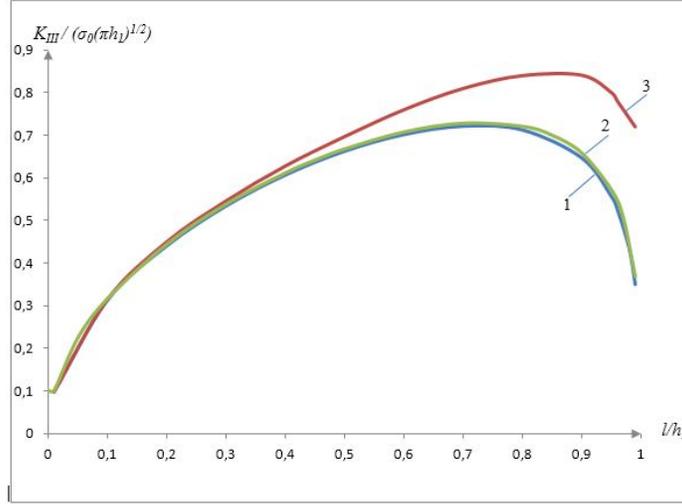


Рис. 3. График зависимости поправочной функции от отношения $\frac{l}{h_1}$, построенный:
 1 - по формуле (72), при $k \rightarrow +0$
 2, 3 - по формулам (73) и (74), при и , соответственно

Общий анализ. Влияние k ($k = \mu_1/\mu_2$) и толщины второго слоя на коэффициент интенсивности напряжений.

Пусть $\sigma_1(t) = \sigma_0 = const$, $0 < k < \infty$ и толщина биметалла H конечна. Тогда из (38), (39) и (30) находим

$$1 = \Psi(\xi) + \int_0^1 \Psi(\tau) K^*(\xi, \tau) d\tau, \quad (79)$$

$$K^*(\xi, \eta) = \int_0^\infty \frac{\tau \eta e^{-\eta \frac{h_1}{l}} [sh(\eta \frac{h}{l}) - kch(\eta \frac{h}{l})] I_0(\eta \tau) I_0(\eta \xi)}{ksh(\eta \frac{h_1}{l})ch(\eta \frac{h}{l}) + ch(\eta \frac{h_1}{l})sh(\eta \frac{h}{l})} d\eta, \quad (80)$$

$$\Psi(\xi) = \frac{\mu_1}{\sigma_0} \psi(l\xi) \quad (0 \leq \xi \leq 1, 0 < l < h_1), \quad (81)$$

$$K_{III} = \sigma_0 \sqrt{\pi l} \Psi(1, k, \frac{l}{h_1}, \frac{h_1}{H}) \quad (\frac{h}{l} = \frac{h_1}{l} (\frac{H}{h_1} - 1)). \quad (82)$$

Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (79) обычным способом (см., например, [1]) сведено к решению системы неоднородных алгебраических линейных уравнений, порядок матрицы коэффициентов которой $m \times m$. В данной задаче принята точность $\pm 5 \cdot 10^{-6}$, что потребовало 20 уравнений.

Проведен численный анализ зависимости поправочной на K_{III} функции $\Psi(1, k, l/h_1, h_1/H)$ от величины l/h_1 ($0 < l/h_1 < 1$) для различных соотношений упругих свойств слоев, k и толщины второго слоя (рис. 4-6).

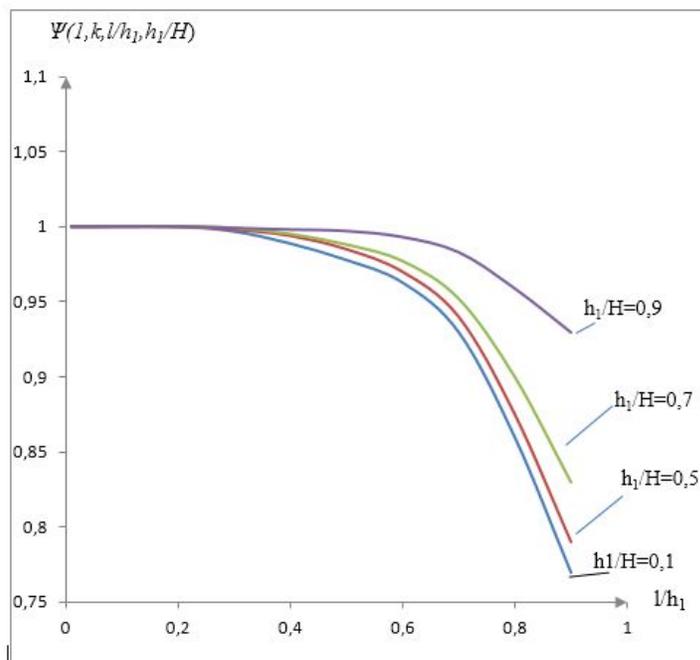


Рис. 4. Влияние толщины второго слоя на поправочную функцию при заданных значениях $\frac{l}{h_1}$ и при $k = 0.1$

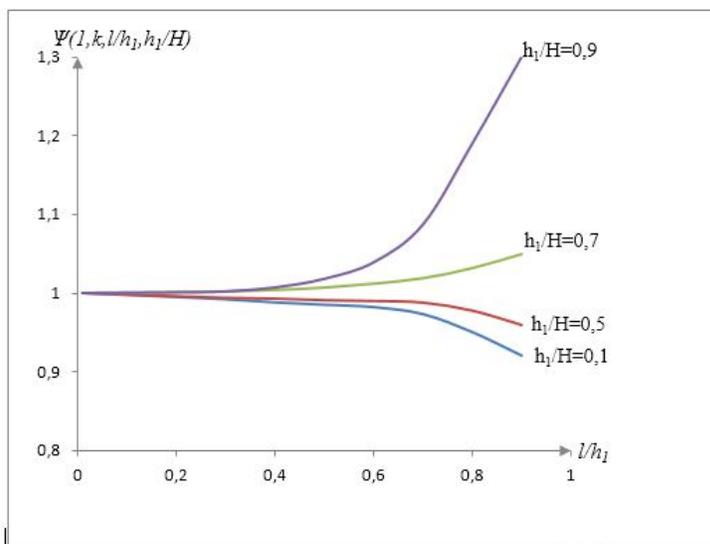


Рис. 5. Влияние толщины второго слоя на поправочную функцию при заданных значениях $\frac{l}{h_1}$ и при $k = 0.5$

Отсюда приходим к выводам:

1. Если $0 < k \leq 0,5$ и $0 < h_1/H \leq 0,5$, то с увеличением l/h_1 поправочная функция $\Psi(1, k^l/h_1, h_1/H)$ уменьшается, причем чем меньше h_1/H , тем меньше значения поправочной

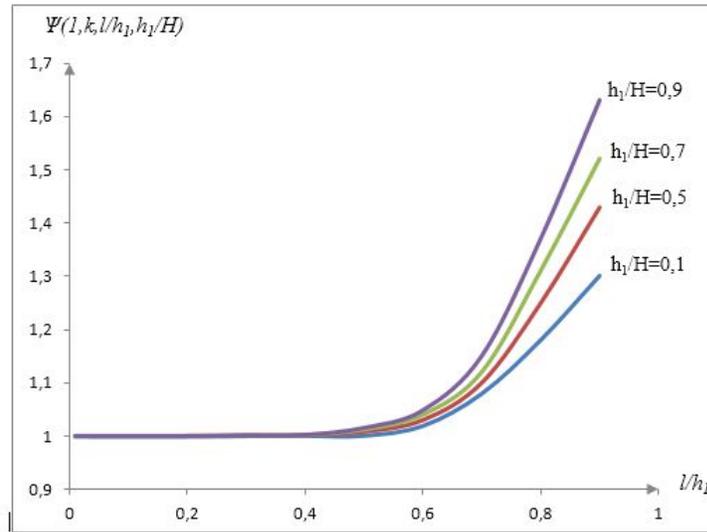


Рис. 6. Влияние толщины второго слоя на поправочную функцию при заданных значениях $\frac{l}{h_1}$ и при $k = 5$

функции при одних и тех же значениях $\frac{l}{h_1}$. Следовательно, происходит торможение трещины продольного сдвига.

2. Если $k = 0,5$ и $0,5 < h_1/H \leq 0,9$, то с увеличением $\frac{l}{h_1}$ поправочная на K_{III} функция $\Psi(1, k, \frac{l}{h_1}, \frac{h_1}{H})$ увеличивается.

3. Если $k \geq 1$ и $0,1 \leq h_1/H \leq 0,9$, то с увеличением $\frac{l}{h_1}$ функция $\Psi(1, k, \frac{l}{h_1}, \frac{h_1}{H})$ увеличивается.

Закон “преломления” трещины продольного сдвига в кусочно-однородной среде (рис. 7) установлен в работе [7], а в работе [1] (см. стр. 346–357) доказано, что этот закон совершенно аналогичен закону преломления света на границе раздела двух оптических сред.

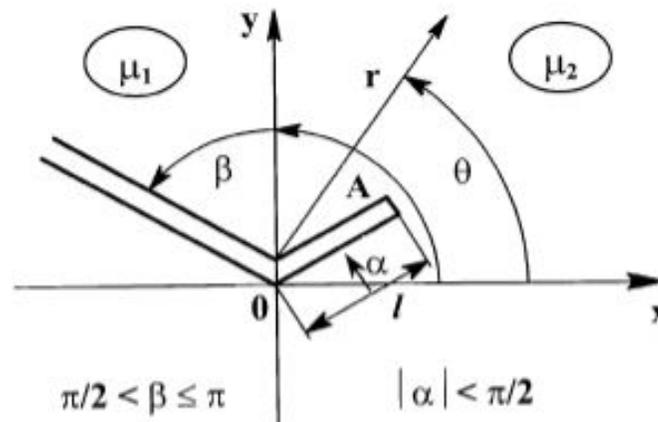


Рис. 7. Преломление трещины на границе раздела двух сред

Из (72) следует, что если $k \rightarrow +0$, то коэффициент интенсивности напряжения при $l \rightarrow h_1$ стремится к нулю. С физической точки зрения это означает, что упругая полоса, содержащая краевую трещину продольного сдвига, опирающаяся на абсолютно твердый материал, полностью разрушена, а опора не дает возможности трещине двигаться дальше (рис. 2).

Эти результаты важны при проектировании конструкции из двухслойных материалов.

Аналогичная задача для краевой трещины нормального разрыва в $N(N \geq 2)$ -слойных средах при различных условиях нагружения и для различных конфигураций рассмотрена в [8]–[10].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кулиев, В. Д.* Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 719 с.
- [2] *Жуховицкий, А. А.* Физическая химия / А. А. Жуховицкий, Л. А. Шварцман. – М. : Металлургия, 1976. – 687 с.
- [3] *Ромалис, Р. Б.* Разрушение структурно-неоднородных тел / Р. Б. Ромалис, В. П. Тамужс. – Рига : Зинатне, 1989. – 224 с.
- [4] *Кулиев, В. Д.* Обращение особого интеграла с обобщенным ядром Коши и одно его применение / В. Д. Кулиев // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки” (к 145-летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). – Чебоксары : ЧПИ МГОУ, 2008. – С. 317–333.
- [5] *Сеге, Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М. : Физматгиз, 1962. – 500 с.
- [6] *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1987. – 688 с.
- [7] *Кулиев, В. Д.* Преломление трещины продольного сдвига / В. Д. Кулиев // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 249. – № 2. – С. 315–318.
- [8] *Максудов, Ф. Г.* К проблеме разрушения биупругой среды / Ф. Г. Максудов, В. Д. Кулиев, Ф. А. Искандерзаде // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 264. – № 6. – С. 1349–1352.
- [9] *Образцов, И. Ф.* К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Статическое нагружение / И. Ф. Образцов, В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 303. – № 4. – С. 818–821.
- [10] *Образцов, И. Ф.* К теории разрушения многослойных материалов с трещиной. Циклическое нагружение / И. Ф. Образцов, В. Д. Кулиев, А. Б. Каплун // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 303. – № 5. – С. 1065–1068.

Кулиев Валех Джафарович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: pmdekanat@rambler.ru

Раджабов Закир Рамазанович,

доцент кафедры высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: pmdekanat@rambler.ru

V. D. Kuliev, Z. R. Radzhabov

BOUNDARY LONGITUDINAL SHEAR CRACK IN BIMETALS

Moscow State Machine-Building University (MAMI)

Abstract. With the help of K_{α} – summation formula functional series [1] obtained a new singular integral having numerous applications .

Of singular integral is obtained as a consequence of the singular Poisson integral and thus – Schwartz formula , enabling express an analytic function in the disc through its real part on circle up to a constant imaginary term . In addition, from new singular integral is obtained as a consequence of the singular integral with Hilbert associated with the boundary value problem of Hilbert .

Keywords: bimetal, boundary longitudinal shear crack, computational analysis, Fredholm equation, singular integral equations.

REFERENCES

- [1] *Kuliev, V. D.* Singular regional tasks / V. D. Kuliev. – M. : Fizmatlit, 2005. – 719 p.
- [2] *Zhukhovitsky, A. A.* Physical chemistry / A. A. Zhukhovitsky, L. A. Schwarzman. – M. : Metallurgy, 1976. – 687 p.
- [3] *Romalis, R. B.* Destruction of structural and non-uniform bodies / R. B. Romalis, V. P. Tamuzhs. – Riga : Zinatne, 1989. – 224 p.
- [4] *Kuliev, V. D.* The address of special integral with Cauchy’s generalized kernel and one it application / V. D. Kuliev // Collection of works X of the International school of sciences "Hydrodynamics big speeds" and International scientific conference "Hydrodynamics. Mechanics. Power installations" (to 145 - to the anniversary since birth academician A. N. Krylova). – Cheboksary : SIP MGOU, 2008. – P. 317–333.
- [5] *Sege, G.* Orthogonal polynomials / G. Sege. – M. : Fizmatgiz, 1962. – 500 p.
- [6] *Lavrentyev, M. A.* Methods of the theory of function of the complex variable / M. A. Lavrentyev, B. V. Shabat. – M. : Nauka, 1987. – 688 p.
- [7] *Kuliev, V. D.* Refraction crack of longitudinal shift / V. D. Kuliev // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1979. – Vol. 249. – № 2. – P. 315–318.
- [8] *Maksudov, F. G.* To a problem of destruction of the biuprugy environment / F. G. Maksudov, V. D. Kuliev, F. A. Iskanderzade // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1982. – Vol. 264. – № 6. – P. 1349–1352.
- [9] *Obraztsov, I. F.* To the theory of destruction of the multilayered materials with a crack. Static loading / I. F. Obraztsov, V. D. Kuliev, A. B. Kaplun // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1988. – Vol. 303. – № 4. – P. 818–821.
- [10] *Obraztsov, I. F.* To the theory of destruction of the multilayered materials with a crack. Cyclic loading / I. F. Obraztsov, V. D. Kuliev, A. B. Kaplun // Reports of Academy of Sciences of the USSR. – 1988. – Vol. 303. – № 5. – P. 1065–1068.

Kuliev, Valekh Dzhafarovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

Radzhabov, Zakir Ramazanovich

Assoc. Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

СВОЙСТВО ЗАПАЗДЫВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ГЛАДКИХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Тверской государственный технический университет

Аннотация. Рассматривается свойство запаздывания векторных свойств материалов на гладких траекториях деформирования и их классификация по отношению к сложности нагружения.

Ключевые слова: скалярные и векторные свойства материалов, упругость, пластичность, траектории деформирования, сложное нагружение, след запаздывания, кривизна траекторий.

УДК: 539.3

1. Определяющие соотношения.

В работах [1], [2] приведены основные уравнения теории процессов сложного нагружения в плоских задачах:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} + M \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\varepsilon} = \Theta_k \hat{i}_k, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

– векторы напряжений и деформаций формоизменения в девiatorном линейном пространстве А. А. Ильюшина; $\{\hat{i}_k\}$ – ортонормированный базис, к которому отнесено это пространство;

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{11} - \sigma_0), \quad S_2 = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}, \quad S_4 = S_5 = 0, \\ \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \Theta_2 = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, \quad \Theta_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, \quad \Theta_4 = \Theta_5 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

– компоненты этих векторов; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – компоненты тензоров напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij});

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 \quad (1.4)$$

– компоненты девiatorов напряжений и деформаций; δ_{ij} – символ Кронекера;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{S_k S_k}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_{ij}\Theta_{ij}} = \sqrt{\Theta_k \Theta_k} \quad (1.5)$$

– модули шаровых тензоров и девiatorов напряжений и деформаций соответственно [1], [2], [3].

Закон упрочнения для траекторий малой и средней кривизны

$$\sigma = \Phi(\Theta) \quad (1.6)$$

представляет собой единую универсальную кривую (диаграмму) Роша и Эйхингера для любого сложного напряженно-деформированного состояния (НДС) при простом (пропорциональном) нагружении. При сложном нагружении по траекториям малой и средней кривизны в большинстве известных теорий пластичности принимается закон Одквиста-Ильюшина [1], [3]:

$$\sigma = \Phi(s), \quad (1.7)$$

где функция $\Phi(s)$ та же, что и в (1.6), но с другим параметром прослеживания процесса $s \geq \Theta$, который является длиной дуги траектории деформирования. Соотношение (1.7) описывает скалярные свойства материалов для процессов сложного нагружения, достаточно близких к простому нагружению. Функция (1.7) не отражает влияние векторных свойств материалов, которое характеризуется углом сближения $\vartheta_1(s, \mathfrak{a}_1)$ вектора напряжений $\bar{\sigma}$ с касательной к траектории деформирования в текущей ее точке. В связи с этим остается открытым вопрос о диапазоне изменения кривизны $0 \leq \mathfrak{a}_1 \leq \mathfrak{a}_1^*$ траектории, для которого это изменение не оказывает заметного влияния на процессы сложного нагружения.

Для функционалов пластичности M_1 , M , $\frac{d\sigma}{ds}$ в [1] предложены следующие аппроксимации:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} - (2G + \frac{d\Phi_0}{ds}) f^p, & M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p) f^q, \\ M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1, & f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \end{cases} \quad (1.8)$$

где G – упругий модуль сдвига; $G_p = \frac{\Phi(s)}{s}$ – пластический модуль сдвига; $\Phi_0(s_0)$ – значение функции в точке К излома траектории $s_0 = s_K$; p и q – экспериментально определяемые параметры материала в базовом опыте типа веера траекторий; $f(\vartheta_1)$ – функция сложного нагружения, введенная В. Г. Зубчаниновым [1].

Для функционала M_1 из (1.8) можно получить более простую аппроксимацию

$$M_1 = k = \frac{\alpha 2G}{\sigma_K^T}, \quad (1.9)$$

где σ_K^T – новый предел текучести на диаграмме простого нагружения в точке К, которая соответствует точке излома траектории деформирования. В теории средних кривизн принимается $\alpha \approx 0,7$ [1].

В работах [1], [2] был предложен линеаризованный вариант ($\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1$, $\cos \vartheta_1 \approx 1$) представления соотношений (1.1)

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \right) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \quad (1.10)$$

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + n\vartheta_1 = -\mathfrak{a}_1, \quad (1.11)$$

где

$$n(s) = \frac{M_1}{\sigma} = \frac{\alpha 2G}{\sigma_K^T} = k. \quad (1.12)$$

Решение уравнения (1.11) приводит к выражению

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + (\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*) e^{-k\Delta s}, \quad (1.13)$$

где ϑ_1^0 – угол излома траектории деформирования,

$$\vartheta_1^* = -\frac{\mathfrak{a}_1}{k}. \quad (1.14)$$

Если траектория гладкая по определению А. А. Ильюшина [3], то на ней отсутствуют точки излома, но функция $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}(s)$, описывающая траекторию в линейном пространстве, имеет только первую непрерывную производную. На рис. 1 в качестве примера приведена такая гладкая траектория в виде прямолинейного участка ОК и окружности радиуса кривизны R и кривизны $\varkappa_1 = 1/R$. В точке К стыковки участков сложной траектории первая производная непрерывна, но вторая претерпевает разрыв.

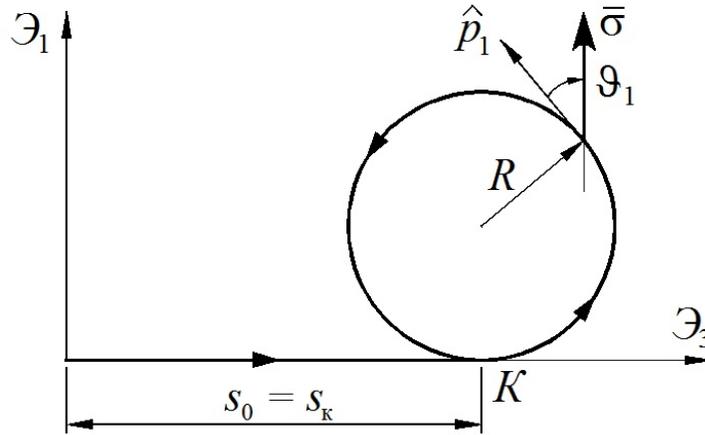


Рис. 1

Для гладкой траектории угол излома $\vartheta_1^0 = 0$ и соотношение (1.13) принимает вид

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* (1 - e^{-k\Delta s}). \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что при $\Delta s \rightarrow \infty$ получаем $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_1^*$. Для определения следа запаздывания векторных свойств материала λ вводим допуск $\varepsilon = 0,122$ (7°) на угол сближения ϑ_1 при его приближении к асимптоте ϑ_1^* при увеличении длины дуги так, что

$$\vartheta_1 - \vartheta_1^* = \vartheta_1^* e^{-k\lambda} \leq \varepsilon,$$

откуда находим длину следа запаздывания

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{\vartheta_1^*}{\varepsilon} \right|. \quad (1.16)$$

2. Классификация траекторий процессов деформирования.

Свойство запаздывания векторных свойств материалов – это общее свойство пластически деформируемых материалов [3]. Обычно след запаздывания λ определяется в опытах на двузвенных ломаных траекториях или на прямолинейных участках после деформирования по какому-либо прямолинейному участку траектории. В настоящей работе след запаздывания предлагается определять на криволинейных траекториях различной постоянной кривизны. На таких траекториях с достаточной для практических расчетов точностью устанавливается режим процесса деформирования с постоянным углом сближения $\vartheta_1^* = -k\varkappa_1 = \text{const}$ после исчерпания следа запаздывания λ по допуску ε на угол сближения ϑ_1 . След запаздывания λ оказывается в опытах различным для различных значений кривизны \varkappa_1 траекторий.

В данной работе след запаздывания λ определялся для гладких траекторий (рис. 1). Для материала сталь 45 при расчетах принимались $\sigma_K^T = 300$ МПа, $2G = 1,54 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 0,7$. В этом случае согласно (1.12) $k = 400$. На рис. 2 представлены расчетные в соответствии

с формулой (1.15) значения углов сближения $\vartheta_1(s)$ для различных значений кривизны \varkappa_1 окружных траекторий.

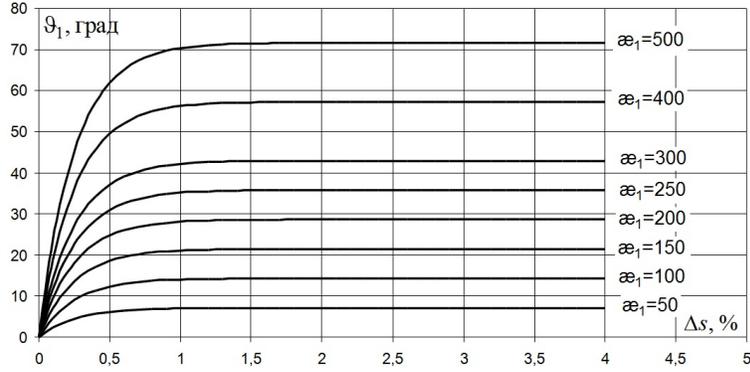


Рис. 2

При достижении приращением дуги Δs после точки К значения следа запаздывания λ согласно (1.16) устанавливался режим деформирования с практически постоянным углом сближения ϑ_1^* по допуску $\vartheta_1^* \varepsilon = 0,122$. Из серии кривых на рис. 2 кривая для $\varkappa_1 = 50$ соответствует данному условию. Поэтому мы можем сделать вывод о том, что все траектории с кривизной из интервала $(0 \leq x\varkappa_1 \leq \varkappa^* = 50)$ можно отнести к *траекториям малой кривизны*, для которых закон упрочнения Одквиста – Ильюшина (1.7) приемлем для выполнения в расчетной практике определяющего соотношения А. А. Ильюшина в теории пластичности для траекторий малой кривизны

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad (\hat{\sigma} = \hat{p}_1), \quad (2.1)$$

где

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}$$

– единичный вектор касательной к траектории деформирования.

На основании зависимостей ϑ_1 от Δs для различных кривизн на рис. 3 приведена зависимость следа запаздывания λ в зависимости от кривизны \varkappa_1 . Как видно, след запаздывания λ не является стабильной характеристикой материала.

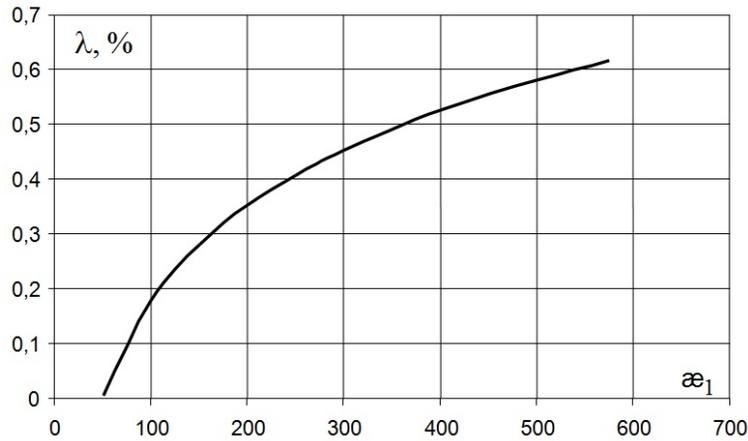


Рис. 3

По рекомендации В. С. Ленского [3] траекториями средней кривизны были названы такие, для которых след запаздывания имеет порядок радиуса кривизны $\lambda \sim R$ или $\lambda \alpha_1 = 1$. Если принять эту рекомендацию, то из рис. 4 следует, что граничное значение $\alpha_1^{**} = 250$. Следовательно, можно рекомендовать считать траекториями средней кривизны такие, для которых кривизна α_1 лежит в диапазоне

$$\alpha_1^* = 50 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^{**} = 250. \quad (2.2)$$

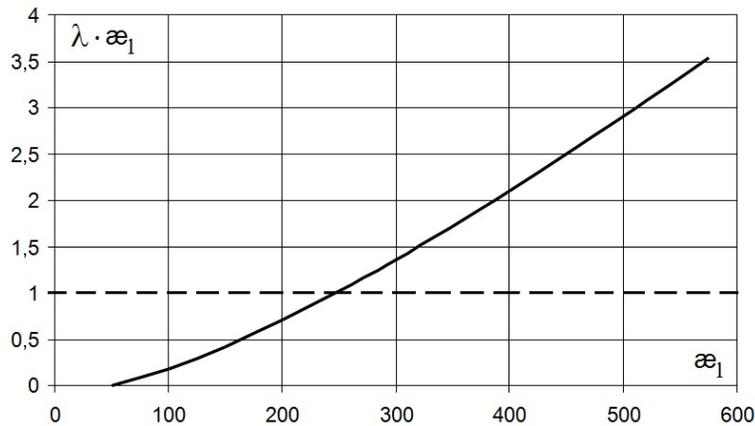


Рис. 4

В этом случае удовлетворительные результаты для практических расчетов дает теория пластичности для траекторий средней кривизны А. С. Кравчука и В. И. Малого [1]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \alpha 2G \frac{d\bar{\epsilon}}{ds} + \left(\frac{d\Phi}{ds} - \alpha 2G \right) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \quad (2.3)$$

где $\alpha = 0,68$, $\sigma = \Phi(s)$.

При использовании теории Прандтля – Рейсса следует считать $\alpha = 1$.

Более точная оценка по классификации траекторий деформирования была предложена В. Г. Зубчаниновым при использовании функции сложного нагружения

$$f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \quad (2.4)$$

то есть непосредственно по влиянию угла сближения $\vartheta_1(s, \varkappa_1)$, характеризующего напрямую векторные свойства материалов. Так как угол ϑ_1 является функцией s и \varkappa_1 , то отклонение ϑ_1 от нуля не сразу, как и \varkappa_1 , начинает влиять на процессы сложного нагружения. Существует некоторый диапазон изменения

$$0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_1^{**}, \quad (2.5)$$

в котором процессы сложного нагружения близки к процессам простого нагружения, что наглядно прослеживается на основе экспериментальных данных.

На рис. 5 представлено изменение функции сложного нагружения $f^p(\vartheta_1)$ от $\vartheta_1(s, \varkappa_1)$. Эта функция $f^p(\vartheta_1)$ представлена для различных значений параметра $p > 0$, который определяется для каждого материала из базовых опытов по типу веера. Для многих материалов, в т. ч. стали 45, влияние сложного нагружения начинается при значениях угла сближения $\vartheta_1^0 \geq 60^\circ$. Для стали 45 хорошие результаты имеют место при $p = 1,6$. Оценивая ошибку численного решения задачи в 10° , из рис. 5 находим, что влияние сложного нагружения начинается при $\vartheta_1^0 = 60^\circ$.

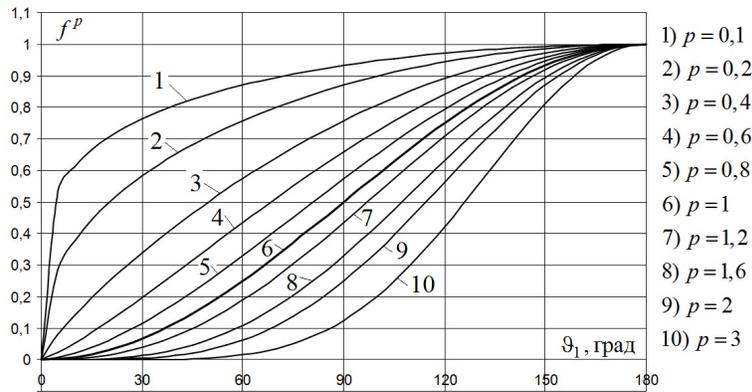


Рис. 5

Для некоторых материалов влияние сложного нагружения начинает проявляться при других углах излома $\vartheta_1^0 > 60^\circ$. Например, у материалов, для которых $p = 3$ при той же погрешности в 10 % влияние кривизны при сложном нагружении начинается при углах излома $\vartheta_1^0 \approx 90^\circ$ и кривизне $\varkappa_1^{**} \approx 600$.

На рис. 6 представлены зависимости $\vartheta_1^* = k\varkappa_1$ и f^p от кривизны \varkappa_1 для значений параметра $p = 1$, $p = 1,6$, $p = 3$ соответственно. Как видно, для различных материалов, которые соответствуют различным параметрам при одной и той же погрешности расчетов в 10 %, граница для траекторий средней кривизны будет $\varkappa_1^{**} \approx 250$, $\varkappa_1^{**} \approx 400$ и $\varkappa_1^{**} \approx 600$. Поэтому граница для классификации траекторий средней кривизны различна и подлежит уточнению в экспериментальных исследованиях.

Если $\varkappa_1 > \varkappa_1^{**}$, то мы имеем класс траекторий большой кривизны и закон упрочнения 91.7) теряет свою силу, так как он должен явно зависеть от параметра сложного нагружения \varkappa_1 :

$$\sigma = \Phi(s, \varkappa_1), \quad (1)$$

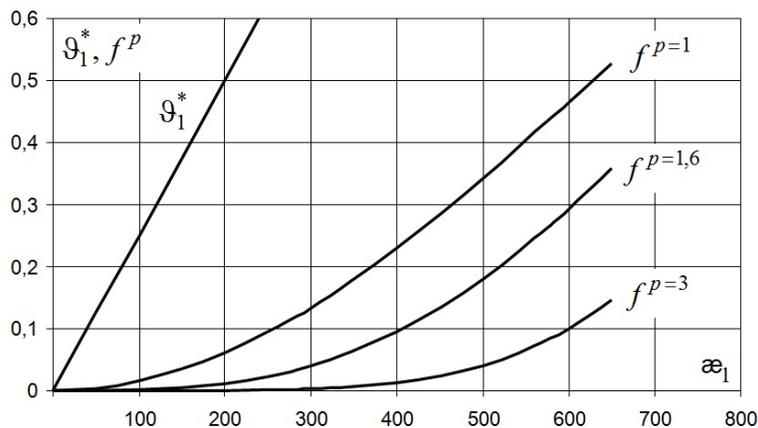


Рис. 6

что в настоящее время учитывается только в основных соотношениях теории процессов [1]. Предложенная оценка при классификации траекторий деформирования необходима при оценке достоверности различных вариантов теории пластичности с упрочнением, использующих приближенный закон упрочнения материала (7), не учитывающий векторные свойства материала в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубчиных, В. Г.* Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчиных. – М. : Физматлит, 2010. – 352 с.
- [2] *Зубчиных, В. Г.* О влиянии кривизны траекторий деформирования на классификацию и запаздывание свойств материалов при сложном нагружении / В. Г. Зубчиных, Е. Г. Алексеева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 1 (19). – С. 78–87.
- [3] *Ильюшин, А. А.* Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 2004. – 480 с.

Зубчанинов Владимир Георгиевич,

доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Алексеева Елена Геннадьевна,

кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь

e-mail: kafsm@yandex.ru

V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva

**PROPERTY OF THE DELAY A VECTOR PROPERTIES OF MATERIALS FOR
SMOOTH PATH UNDER COMPLEX LOADING**

Tver State Technical University

Abstract. Considered property of the delay a vector properties of materials on smooth deformation path and their classification in relation to complexity of loading.

Keywords: scalar and vector properties of materials, elasticity, plasticity, deformation path, complex loading, delay trace of delay, curvature of path.

REFERENCES

[1] *Zubchaninov, V. G.* Mechanics processes of plastic media / V. G. Zubchaninov. – M. : Fizmatlit, 2010. – 352 p.

[2] *Zubchaninov, V. G.* О влиянии кривизны траекторий деформирования на классификацию и запаздывание свойств материалов при сложном нагружении / V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2014. – № 1 (19). – P. 78–87.

[3] *Ilyushin, A. A.* Proceedings (1946–1966). Vol. 2. Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. : Fizmatlit, 2004. – 480 p.

Zubchaninov, Vladimir Georgievich

doctor of sciences, professor, department of the resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver state technical university, Tver

Alekseeva, Elena Gennadievna

candidate of technical sciences, senior lecturer, department of the resistance of materials, elasticity and plasticity theories, Tver state technical university, Tver

А. В. Ковалев, И. Г. Хвостов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ОСЛАБЛЕННОМ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ, С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Воронежский государственный университет

Аннотация. Метод малого параметра применен к решению связанной задачи термоупругости для пространства, ослабленного сферической полостью. Получены выражения для полей температуры, перемещения и напряжений в трех приближениях.

Ключевые слова: малый параметр, упругое пространство, сферическая полость, связанная задача термоупругости.

УДК: 539.32

Введение. В настоящее время существует множество подходов для получения аналитических решений связанной задачи термоупругости. Так, в работе [1] были построены замкнутые решения линейных задач связанной термоупругости для конечного цилиндра и шара в виде разложений по системам собственных функций дифференциальных операторов, порождаемых рассмотренными краевыми задачами. В работе [2] был применен метод голоморфных разложений к линейной связанной системе уравнений термоупругости, были получены и исследованы явные решения в виде функций трех комплексных переменных, а также решения, получающиеся в результате вырождения упомянутых рядов в конечные суммы. В монографии [3] с помощью методов теории поля построены решения ряда задач волновой термоупругости, изучены особенности распространения гармонических термоупругих волн некоторых видов.

В данной работе в рамках метода малого параметра получено приближенное аналитическое решение задачи связанной термоупругости.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную упругую среду с температурой $T = T_0 = \text{const}$, содержащую сферическую полость радиуса R . В момент времени $t = 0$ поверхность этой полости мгновенно нагревается до температуры $V + T_0$, где $V = \text{const}$, и поддерживается при этой температуре. Начальные и граничные условия для температуры выглядят следующим образом:

$$T(r, 0) = T_0, \quad T(R, t) = V + T_0, \quad T(\infty, t) = T_0. \quad (1)$$

Перемещения и напряжения должны обращаться в нуль на бесконечности. Примем также, что поверхность упругого тела свободна от напряжений:

$$\sigma_r(R, t) = 0, \quad \sigma_r(\infty, t) = 0. \quad (2)$$

В соответствии с [4] и [5] запишем систему для связанной осесимметричной задачи термоупругости в сферических координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{3\alpha_t^2 E T_0}{\lambda_t (1 - 2\nu)} \right) \dot{T} - \frac{\alpha_t T_0}{\lambda_t} (\dot{\sigma}_r + 2\dot{\sigma}_\theta) = 0, \quad (4)$$

где u – радиальная компонента вектора перемещений, σ_r, σ_θ – компоненты тензора напряжений, λ_t – коэффициент теплопроводности, a – коэффициент температуропроводности, α_t – коэффициент теплового расширения, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Построение решения. Для определения приближенного аналитического решения системы будем применять метод возмущений [6]. Для этого введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{a} + \frac{3\alpha_t^2 E T_0}{\lambda_t (1 - 2\nu)} = \frac{1}{\kappa}, \quad \frac{\alpha_t T_0}{\lambda_t} = \delta \cdot d, \quad (5)$$

где δ – малый параметр, κ, d – постоянные величины.

Выполнив разложения, аналогичные [6], для всех функций, входящих в уравнения, начальные и граничные условия связанной задачи термоупругости (1)–(4) с учетом принятых обозначений (5), получим:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\kappa} \dot{T}^{(0)} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} - \frac{2u^{(0)}}{r^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}, \quad (7)$$

– для нулевого приближения;

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\kappa} \dot{T}^{(n)} = d \left(\frac{\partial \sigma_r^{(n-1)}}{\partial t} + 2 \frac{\partial \sigma_\theta^{(n-1)}}{\partial t} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial r} - \frac{2u^{(n)}}{r^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r}, \quad (9)$$

– для всех остальных приближений. Индексы $(n - 1)$ и (n) обозначают принадлежность к соответствующему приближению.

Следует отметить, что граничные и начальные условия для поиска нулевого приближения будут совпадать с условиями для исходной системы, в то время как для последующих приближений начальные и граничные условия будут нулевыми.

Для решения однородного уравнения теплопроводности (6) при заданных условиях воспользуемся преобразованием Лапласа. Тогда дифференциальное уравнение в частных производных преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение с учетом краевого условия $T^* = \frac{V}{s}$ при $r = R$ запишется в следующем виде:

$$T^*(r, s) = \frac{V}{s} \cdot \frac{R}{r} e^{-(r-R)\sqrt{s/\kappa}} + \frac{T_0}{s}.$$

Применение обратного преобразования дает [7]

$$T^{(0)}(r, t) = V \frac{R}{r} \operatorname{erfc} \frac{r - R}{2\sqrt{\kappa t}} + T_0. \quad (10)$$

Перейдем к определению полей перемещений и напряжений в нулевом приближении. В рассматриваемой задаче только радиальная компонента перемещения $u(r, t)$ не равна нулю. Через нее компоненты напряжения можно выразить по следующим формулам, верным для всех приближений [8]:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \frac{u_r}{r} - \alpha_t (1 + \nu) T \right], \quad (11)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \frac{u_r}{r} + \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha_t (1 + \nu) T \right]. \quad (12)$$

Здесь G – модуль сдвига, а ν – коэффициент Пуассона. Таким образом, вследствие этого поиск перемещения в нулевом приближении сводится к решению одного дифференциального уравнения (7). Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u^{(0)} = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{\alpha_t}{r^2} \int_R^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx.$$

Перемещение и напряжения должны обращаться в ноль на бесконечности согласно (2), поэтому $C_1 = 0$. Используя уравнение (11) и первое условие из (2), получим, что в этом случае $C_2 = 0$. Таким образом, окончательно

$$u^{(0)} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{\alpha_t}{r^2} \int_R^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx. \quad (13)$$

Далее, подставив выражение (13) в уравнения (11) и (12), получим

$$\sigma_r^{(0)} = -\frac{2E\alpha_t}{1 - \nu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_R^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx, \quad (14)$$

$$\sigma_\theta^{(0)} = \frac{E\alpha_t}{1 - \nu} \left[\frac{1}{r^3} \int_R^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx - T^{(0)}(r, t) \right]. \quad (15)$$

Подставим теперь найденное значение нулевого приближения температуры (10) в подынтегральное выражение в формулах (13), (14) и (15). Вычислим интеграл, содержащийся в этих выражениях. Сделаем обозначение согласно [9]:

$$F(\rho, \tau) = \int_1^\rho \eta \cdot \operatorname{erfc} \frac{\eta - 1}{2\sqrt{\tau}} d\eta,$$

где $\rho = \frac{r}{R}$ и $\tau = \frac{\kappa t}{R^2}$.

Тогда будет иметь место следующее соотношение:

$$\frac{1}{r^3} \int_R^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx = \frac{V}{\rho^3} F(\rho, \tau).$$

Используя замену $\xi = \frac{\rho - 1}{2\sqrt{\tau}}$, получим

$$F(\rho, \tau) = 4\tau \int_0^\xi \xi \operatorname{erfc} \xi d\xi + 2\sqrt{\tau} \int_0^\xi \operatorname{erfc} \xi d\xi.$$

После интегрирования по частям получаем окончательно

$$F(\rho, \tau) = \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\tau - 1) \operatorname{erfc} \frac{\rho - 1}{2\sqrt{\tau}} - (\rho + 1) \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{(\rho - 1)^2}{4\tau}} + \tau + 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}. \quad (16)$$

Переходя обратно в значении (16) к переменным r и t и используя его в (13), (14) и (15), получим выражения для нулевых приближений перемещения и напряжений:

$$u^{(0)} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha_t RV}{r^2} \left[\left(\frac{r^2 - R^2}{2} - \kappa t \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \left((r+R)e^{\frac{-(r-R)^2}{4\kappa t}} + 2R \right) + \kappa t \right], \quad (17)$$

$$\sigma_r^{(0)} = -\frac{2E\alpha_t}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \left[\left(\frac{r^2 - R^2}{2} - \kappa t \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \left((r+R)e^{\frac{-(r-R)^2}{4\kappa t}} + 2R \right) + \kappa t \right], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(0)} &= \frac{E\alpha_t}{1-\nu} \left(\frac{RV}{r^3} \left[\left(\frac{r^2 - R^2}{2} - \kappa t \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \left((r+R)e^{\frac{-(r-R)^2}{4\kappa t}} + 2R \right) + \kappa t \right] - \frac{RV}{r} \operatorname{erfc} \left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - T_0 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Перейдем к отысканию неизвестных функций температуры, перемещения и напряжений в первых приближениях. Для этого подставим выражения (17), (18) и (19) в уравнение (8) для $n = 1$. Выполнив необходимые преобразования, получим уравнение теплопроводности с известной правой частью, которое имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\kappa} \dot{T}^{(1)} = \frac{dE\alpha_t}{1-\nu} \cdot \frac{RV}{r} \cdot \frac{(R-r)}{\sqrt{\pi\kappa t^3}} \exp \left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t} \right). \quad (20)$$

Преобразуем уравнение (20) с помощью замены $U = T^{(1)}r$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dE\alpha_t RV}{1-\nu} \cdot \frac{(R-r)}{\sqrt{\pi\kappa t^3}} \exp \left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t} \right). \quad (21)$$

Применим к уравнению (21) преобразование Лапласа. Получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 U^*}{dr^2} - \frac{p}{\kappa} U^* = \frac{2dE\alpha_t RV}{1-\nu} e^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(R-r)} \quad (22)$$

с условиями $U^*(R) = 0$ и $U^*(\infty) = 0$.

Решением уравнения (22) при заданных условиях является функция

$$U^*(r) = \frac{2dE\alpha_t RV \sqrt{\kappa}}{1-\nu} \cdot \frac{r-R}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(r-R)}.$$

Переходя к оригиналу, получаем

$$U(r) = \frac{2dE\alpha_t RV \sqrt{\kappa}}{(1-\nu)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{r-R}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(r-R)}.$$

Подставив замену в полученное решение, окончательно имеем выражение первого приближения температуры:

$$T^{(1)}(r, t) = \frac{dE\alpha_t}{1-\nu} \cdot \frac{RV}{r} \cdot \frac{(r-R)\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-(r-R)^2}{4\kappa t}}. \quad (23)$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (9) для $n = 1$. Решение этого уравнения будет определяться выражением, аналогичным (13):

$$u^{(1)} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha_t}{r^2} \int_R^r x^2 T^{(1)}(x, t) dx.$$

После вычисления интеграла, выполнив необходимые преобразования, получим

$$u^{(1)} = \frac{2(1+\nu)dE\alpha_t^2 RV \sqrt{\kappa^3}}{(1-\nu)^2 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{t}}{r^2} \left[R + \sqrt{\pi\kappa t} \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - r e^{\frac{-(r-R)^2}{4\kappa t}} \right].$$

По формулам, аналогичным (14) и (15), найдем первые приближения напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)} &= -\frac{2E\alpha_t}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_R^r x^2 T^{(1)}(x, t) dx, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{E\alpha_t}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^3} \int_R^r x^2 T^{(1)}(x, t) dx - T^{(1)}(r, t) \right], \\ \sigma_r^{(1)} &= -\frac{4dE^2\alpha_t^2 RV\sqrt{\kappa^3}}{(1-\nu)^2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{r^3} \left[R + \sqrt{\pi\kappa t} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - re^{\left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t}\right)} \right], \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{2dE^2\alpha_t^2 RV\sqrt{\kappa^3}}{(1-\nu)^2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{r^3} \left[R + \sqrt{\pi\kappa t} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - re^{\left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t}\right)} \right] - \\ &\quad - \frac{dE^2\alpha_t^2}{(1-\nu)^2} \frac{RV}{r} \frac{(r-R)\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi t}} e^{\left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t}\right)}.\end{aligned}$$

Следуя описанному выше алгоритму поиска последовательных приближений, найдем температуру, перемещение и напряжения во втором приближении. Уравнение теплопроводности с известной правой частью для второго приближения будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}) - \frac{1}{\kappa} \dot{T}^{(2)} = \frac{d^2 E^2 \alpha_t^2}{(1-\nu)^2} \cdot \frac{RV\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(r-R)}{r\sqrt{t^3}} \left[1 - \frac{(r-R)^2}{2\kappa t} \right] \exp\left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t}\right).$$

Решение этого уравнения, полученное с помощью преобразования Лапласа, будет выглядеть следующим образом:

$$T^{(2)} = \frac{d^2 E^2 \alpha_t^2 RV\sqrt{\kappa}}{4(1-\nu)^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(r-R)}{r\sqrt{t}} \left[\frac{(r-R)^2}{2t} + \kappa \right] \exp\left(\frac{-(r-R)^2}{4\kappa t}\right). \quad (24)$$

Рассмотрим уравнение (9) для $n = 2$. Решением уравнения для поиска перемещения во втором приближении с учетом (24) будет являться функция

$$u^{(2)} = \frac{A_1}{r^2\sqrt{t}} \left[\kappa \exp\left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t}\right) (2\kappa t(R-4r) - r(r-R)^2) + 8\sqrt{\pi\kappa^5 t^3} \operatorname{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}}\right) + 6R\kappa^2 t \right],$$

$$\text{где } A_1 = \frac{(1+\nu)d^2 E^2 \alpha_t^3 RV\sqrt{\kappa}}{4(1-\nu)^3\sqrt{\pi}}.$$

Напряжения во втором приближении будут выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(2)} &= -\frac{A_2}{r^2\sqrt{t}} \left[\kappa \exp\left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t}\right) (2\kappa t(R-4r) - r(r-R)^2) + 8\sqrt{\pi\kappa^5 t^3} \operatorname{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}}\right) + 6R\kappa^2 t \right], \\ \sigma_\theta^{(2)} &= \frac{2A_2}{r^2\sqrt{t}} \left[\kappa \exp\left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t}\right) (2\kappa t(R-4r) - r(r-R)^2) + 8\sqrt{\pi\kappa^5 t^3} \operatorname{erf}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}}\right) + 6R\kappa^2 t \right] - \\ &\quad - 2A_2 \frac{(r-R)}{r\sqrt{t}} \left[\frac{(r-R)^2}{2t} + \kappa \right] \exp\left(-\frac{(r-R)^2}{4\kappa t}\right),\end{aligned}$$

$$\text{где } A_2 = \frac{2E}{1+\nu} A_1.$$

Таким образом, в результате решения связанной задачи о термоупругом пространстве, ослабленном сферической полостью, в трех приближениях были получены поля температур, перемещений и напряжений в виде

$$\begin{aligned}T(r, t) &= T^{(0)}(r, t) + \delta T^{(1)}(r, t) + \delta^2 T^{(2)}(r, t), \\ u(r, t) &= u^{(0)}(r, t) + \delta u^{(1)}(r, t) + \delta^2 u^{(2)}(r, t), \\ \sigma_r(r, t) &= \sigma_r^{(0)}(r, t) + \delta \sigma_r^{(1)}(r, t) + \delta^2 \sigma_r^{(2)}(r, t), \\ \sigma_\theta(r, t) &= \sigma_\theta^{(0)}(r, t) + \delta \sigma_\theta^{(1)}(r, t) + \delta^2 \sigma_\theta^{(2)}(r, t).\end{aligned}$$

Заметим, что при $\delta = 0$ последние равенства приводят к известным выражениям для температуры, перемещения и напряжений, полученным в [9].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Жигалин, А. Г. Замкнутые решения динамических задач связанной термоупругости для цилиндра и шара / А. Г. Жигалин, С. А. Лычев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4. – № 2. – С. 17–34.

[2] Родионов, А. Ю. Точные решения уравнений термоупругости / А. Ю. Родионов // Владикавказский математический журнал. – 2009. – Т. 11. – № 1. – С. 54–62.

- [3] *Ковалев, В. А.* Волновые задачи теории поля и термомеханика / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. – 328 с.
- [4] *Коваленко, А. Д.* Введение в термоупругость / А. Д. Коваленко. – Киев : Наукова думка, 1965. – 204 с.
- [5] *Подстригач, Я. С.* Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач и др. – Киев : Наукова думка, 1977. – 248 с.
- [6] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругоупругого тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
- [7] *Карлслю, Г.* Теплопроводность твердых тел / Г. Карлслю, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.
- [8] *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
- [9] *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М. : Физматгиз, 1970. – 252 с.

Ковалев Алексей Викторович,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: kovalev@amm.vsu.ru

Хвостов Иван Геннадьевич,

аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж

e-mail: ig_hvostov@mail.ru

A. V. Kovalev, I. G. Khvostov

**STRESS AND DISPLACEMENT ANALYSIS OF AN ELASTIC SPACE
WEAKENED BY A SPHERICAL CAVITY IN A THERMAL FIELD**

Voronezh State University

Abstract. The method of the small parameter is applied to the coupled thermoelastic problem in a space with a spherical cavity. The approximations with three components of the temperature, displacement and stresses are given.

Keywords: small parameter, elastic space, spherical cavity, coupled thermoelastic problem.

REFERENCES

- [1] *Zhigalin, A. G.* Closed-form solutions of dynamic coupled thermoelasticity problems for a cylinder and a sphere / A. G. Zhigalin, S. A. Lychev // Computational continuum mechanics. – 2011. – V. 4. – No. 2. – P. 17–34.
- [2] *Rodionov, A. Yu.* Exact solutions of the thermoelasticity equations / A. Yu. Rodionov // Vladikavkaz mathematical journal. – 2009. – V. 11. – No. 1. – P. 54–62.
- [3] *Kovalev, V. A.* Wave problems of the field theory and thermomechanics / V. A. Kovalev. – Saratov : Saratov university press, 2010. – 328 p.
- [4] *Kovalenko, A. D.* Introduction to thermoelasticity / A. D. Kovalenko. – Kiev : Naukova Dumka, 1965. – 204 p.
- [5] *Podstrigach, Ya. S.* Thermoelasticity of electrically conductive bodies / Ya. S. Podstrigach. – Kiev : Naukova Dumka, 1977. – 248 p.
- [6] *Ivlev, D. D.* Perturbation method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.
- [7] *Carslaw, H. S.* Conduction of heat in solids / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. – M. : Nauka, 1964. – 488 p.
- [8] *Timoshenko, S. P.* Theory of elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. – M. : Nauka, 1975. – 576 p.
- [9] *Parkus, H.* Transient thermal stresses / H. Parkus. – M. : Fizmatgiz, 1970. – 252 p.

Kovalev Alexey Viktorovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

Khvostov Ivan Gennadyevich

Postgraduate student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh

О ДЕФОРМИРОВАНИИ РАСТЯГИВАЕМОЙ ПОЛОСЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПОЛОГИМИ ВЫТОЧКАМИ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова

Аннотация. В работе рассматривается напряженное и деформированное состояние полосы, ослабленной пологими выточками, используются соотношения теории малых упругопластических деформаций. В отличие от решения Жукова А. М. [1] и решения Ивлева Д. Д. [2], ниже дано решение в полиномах.

Ключевые слова: напряжение, деформация, сжатие, растяжение, алгоритм.

УДК: 539.375

Соотношения теории малых упругопластических деформаций в случае плоской задачи в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma + \frac{2\sigma_i}{3e_i} + (e_x - e), \\ \sigma_y &= \sigma + \frac{2\sigma_i}{3e_i} + (e_y - e), \quad \tau_{xy} = \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_{xy}, \quad \sigma_i = \Phi(e_i),\end{aligned}\quad (1)$$

где σ_i , e_i – интенсивность напряжений и деформаций соответственно, которые выражаются формулами

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad e_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(e_x - e_y)^2 + 4e_{xy}^2}.\quad (2)$$

Соотношение $\sigma_i = \Phi(e_i)$ определяет характер упрочнения материала, для простоты примем материал полосы несжимаемым:

$$e_x + e_y = 0.\quad (3)$$

Если обозначить $\Phi(e_i) = 3\psi(e_i)e_i$, то соотношения (1) согласно (3) примут вид

$$\sigma_x = \sigma + 2\psi(e_i)e_x, \quad \sigma_y = \sigma - 2\psi(e_i)e_x, \quad \tau_{xy} = 2\psi(e_i)e_{xy}.\quad (4)$$

Граница полосы, ослабленной выточками, имеет вид

$$y = \pm (h + \delta qx^2), \quad q - const.\quad (5)$$

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma'_{ij} + \delta^2\sigma''_{ij}, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 + \delta e'_{ij} + \delta^2 e''_{ij},\quad (6)$$

где

$$\sigma_x^0 = p, \quad e_x^0 = \text{const}, \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \quad (7)$$

– компоненты невозмущенного состояния.

В силу (2), (6), (7) получим

$$e_i^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_x^0, \quad e_i^* = \frac{2}{\sqrt{3}} e_x^*, \quad e_i'' = \frac{2}{\sqrt{3}} e_x'' + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e_{xy}^{\prime 2}}{e_x^0}, \quad (8)$$

$$\sigma_i^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_x^0, \quad \sigma_i^* = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_x^* - \sigma_y^*), \quad \sigma_i'' = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_x'' - \sigma_y'') + \sqrt{3} \frac{\tau_{xy}^{\prime 2}}{e_x^0}. \quad (9)$$

Из (1), (6), (7), (8), (9) получаем

$$\sigma_x^* = \sigma^* + 2Ae_x^*, \quad \sigma_y^* = \sigma^* - 2Ae_x^*, \quad \tau_{xy}^* = 2Be_{xy}^*, \quad (10)$$

$$\sigma_x'' = \sigma'' + 2A_1 e_x'' + A_2 e_x^{\prime 2} + A_3 e_{xy}^{\prime 2}, \quad \sigma_y'' = \sigma'' + 2A_1 e_x'' - A_2 e_x^{\prime 2} - A_3 e_{xy}^{\prime 2}, \quad ,$$

$$\tau_{xy}'' = 2B_1 e_{xy}'' + B_2 e_x^* e_{xy}^*, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\psi^0}{de_i} e_x^0 + \psi^0, \quad B_1 = \psi^0 (e_i^0), \\ A_2 &= 4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\psi^0}{de_i} + \frac{1}{3} \frac{d^2\psi^0}{de_i^2} e_x^0 \right), \\ A_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\psi^0}{de_i}, \quad B_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{d\psi^0}{de_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим соотношения (10) и (11) в линеаризованные уравнения равновесия и получим две системы уравнений:

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} + 2A_1 \frac{\partial e_x^*}{\partial x} + 2B_1 \frac{\partial e_{xy}^*}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma^*}{\partial y} - 2A_1 \frac{\partial e_x^*}{\partial y} + 2B_1 \frac{\partial e_{xy}^*}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

$$\frac{\partial \sigma''}{\partial x} + 2A_1 \frac{\partial e_x''}{\partial x} + 2B_1 \frac{\partial e_{xy}''}{\partial y} + A_2 \frac{\partial e_x^{\prime 2}}{\partial x} + A_3 \frac{\partial e_{xy}^{\prime 2}}{\partial x} + B_2 \frac{\partial e_x^* e_{xy}^*}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma''}{\partial y} - 2A_1 \frac{\partial e_x''}{\partial y} + 2B_1 \frac{\partial e_{xy}''}{\partial x} - A_2 \frac{\partial e_x^{\prime 2}}{\partial y} - A_3 \frac{\partial e_{xy}^{\prime 2}}{\partial y} + B_2 \frac{\partial e_x^* e_{xy}^*}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Удовлетворим условию несжимаемости, положив

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y}, \quad v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x}, \quad (15)$$

$$u'' = \frac{\partial \psi''}{\partial y}, \quad v'' = -\frac{\partial \psi''}{\partial x}. \quad (16)$$

Тогда

$$e_x^* = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y}, \quad e_{xy}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right), \quad (17)$$

$$e_x'' = \frac{\partial^2 \psi''}{\partial x \partial y}, \quad e_{xy}'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi''}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi''}{\partial x^2} \right), \quad (18)$$

а системы (13) и (14) сведутся к системам

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} + B_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial \sigma^*}{\partial y} - B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \sigma''}{\partial x} + B_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial^2 \psi''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi''}{\partial y^2} \right) = -A_2 \frac{\partial e_x'^2}{\partial x} - A_3 \frac{\partial e_{xy}'^2}{\partial x} - B_2 \frac{\partial e_x^* e_{xy}^*}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \sigma''}{\partial y} - B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial^2 \psi''}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi''}{\partial x^2} \right) = +A_2 \frac{\partial e_x'^2}{\partial y} + A_3 \frac{\partial e_{xy}'^2}{\partial y} - B_2 \frac{\partial e_x^* e_{xy}^*}{\partial x} \quad (20)$$

или уравнениям

$$\frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial y^4} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^4 \psi''}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^4 \psi''}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi''}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (22)$$

где

$$\alpha = \frac{2A_1 - B_1}{B_1},$$

$$f(x, y) = -\frac{2}{B_1} \left(A_2 \frac{\partial^2 e_x'^2}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 e_{xy}'^2}{\partial x \partial y} + \frac{B_2}{2} \left(\frac{\partial^2 e_x^* e_{xy}^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_x^* e_{xy}^*}{\partial x^2} \right) \right). \quad (23)$$

Предполагая начало координат в центре симметрии, имеем следующие условия симметрии перемещений в шейке:

$$u'(x, -y) = u'(x, y), \quad u'(-x, y) = -u'(x, y),$$

$$v^*(x, -y) = -v^*(x, y), \quad v^*(-x, y) = v^*(x, y). \quad (24)$$

Решение задачи будем искать в виде полиномов. Решение уравнения (21), удовлетворяющее (24), имеет вид

$$\psi^*(x, y) = a_1 x y^3 + b_1 x^3 y + c_1 x y, \quad (25)$$

тогда согласно (17), (10), (25) получим

$$e_x^* = 3(a_1 y^2 + b_1 x^2) + c_1, \quad e_{xy}^* = 3(a_1 - b_1) x y, \quad (26)$$

$$\tau_{xy}^* = 6B_1(a_1 - b_1) x y. \quad (27)$$

Подставляя (25) в (19), из (10) находим

$$\sigma_y^* = 3B_1 y^2 (b_1 - a_1) - 3x^2 ((4A_1 - B_1) b_1 + B_1 a_1) - 2A_1 c_1, \quad (28)$$

$$\sigma_x^* = 3B_1 x^2 (a_1 - b_1) + 3y^2 ((4A_1 - B_1) a_1 + B_1 b_1) + 2A_1 c_1.$$

Линеаризированные граничные условия имеют вид

$$\sigma_y^* = 0, \quad \tau_{xy}^* = 2qrx, \quad y = h, \quad (29)$$

$$\sigma_y'' = +2qx\tau_{xy}^* - qx^2 \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y}, \quad \tau_{xy}'' = +2qx\sigma_x^* - qx^2 \frac{\tau_{xy}^*}{\partial y}, \quad y = \pm h. \quad (30)$$

Удовлетворяя выражения (27) и (28) условиям (29), находим

$$a_1 = -\frac{qp(B_1 - 4A_1)}{12B_1A_1h}, \quad b_1 = -\frac{qp}{12A_1h}, \quad c_1 = -\frac{qph}{2A_1}. \quad (31)$$

Таким образом, (31), (28), (27), (26), (10), (25), (15) получаем соотношения для компонент напряжений, деформаций и перемещений в первом приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= -qp \left(\frac{1}{h}x^2 + h - \frac{2\alpha}{h}y^2 \right), \\ \sigma_y^* &= -qp \left(\frac{1}{h}y^2 - h \right), \quad \tau_{xy}^* = \frac{2qp}{h}xy, \\ e_x^* = -e_y^* &= -\frac{qp}{4A_1} \left(\frac{(B_1 - 4A_1)}{B_1h}y^2 + \frac{1}{h}x^2 + 2h \right), \quad e_{xy}^* = \frac{qp}{B_1h}xy, \\ u^* &= -\frac{qp}{4A_1} \left(\frac{(B_1 - 4A_1)}{B_1h}xy^2 + \frac{1}{3h}x^3 + 2hx \right), \\ v^* &= \frac{qp}{4A_1} \left(\frac{(B_1 - 4A_1)}{3B_1h}y^3 + \frac{1}{h}yx^2 + 2hy \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Согласно (31) в первом приближении напряжения, деформации и перемещения пропорциональны глубине выточки q .

Подставим соотношения (26), (27) в (23) и получим

$$f(x, y) = -\frac{18xy}{B_1} \left(8A_2a_1b_1 + (a_1 - b_1)^2(4A_3 + 3B_2) \right). \quad (33)$$

Решение уравнения (22) с правой частью (33), удовлетворяющее условиям симметрии, аналогичным соотношениям (24), имеет вид

$$\psi''(x, y) = a_2xy^3 + b_2x^3y + c_2xy + k_1x^5y + k_2x^3y^3 + k_3xy^5, \quad (34)$$

где

$$k_3 = -k_1 - \frac{3\alpha k_2}{5} - \frac{3 \left(8A_2a_1b_1 + (a_1 - b_1)^2(4A_3 + 3B_2) \right)}{20B_1}. \quad (35)$$

Из соотношений (33), (18), (11), (26), (20) находим

$$u'' = 3a_2xy^2 + b_2x^3 + c_2x + k_1x^5 + 3k_2x^3y^2 + 5k_3xy^4,$$

$$v'' = -a_2y^3 - 3b_2x^2y - c_2y - 5k_1x^4y - 3k_2x^2y^3 - k_3y^5,$$

$$e_x'' = -e_y'' = 3(a_2y^2 + b_2x^2) + c_2 + 5(k_1x^4 + k_3y^4) + 9k_2x^2y^2, \quad (36)$$

$$e_{xy}'' = 3(a_2 - b_2)xy + (3k_2 - 10k_1)x^3y + (10k_3 - 3k_2)xy^3, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}'' &= [6B_1(a_2 - b_2) + 3B_2c_1(a_1 - b_1)]xy + [2B_1(3k_2 - 10k_1) + 9B_2b_1(a_1 - b_1)]x^3y + \\ &\quad + [2B_1(10k_3 - 3k_2) + 9B_2a_1(a_1 - b_1)]xy^3, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y'' = & -12b_2A_1x^2 - 20A_1k_1x^4 - 36A_1k_2x^2y^2 + 3B_1(y^2 + x^2)(b_2 - a_2) - 5B_1(k_3y^4 + k_1x^4) + \\ & + 9B_1k_2x^2y^2 + \frac{3}{2}B_1k_2(y^4 - x^4) - 30B_1k_3x^2y^2 - 18A_2b_1^2x^4 - 12A_2c_1b_1x^2 - 36A_2a_1b_1x^2y^2 - \\ & - 18A_3(a_1 - b_1)^2x^2y^2 - 9B_2(a_1 - b_1)\left(\frac{1}{4}(a_1y^4 + b_1x^4) + \frac{c_1}{6}(y^2 + x^2) + \frac{3a_1}{2}x^2y^2\right) - 2A_1c_2 - \\ & - A_2c_1^2, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x'' = & 12a_2A_1y^2 + 20A_1k_3x^4 + 3B_1(y^2 + x^2)(b_2 - a_2) + 5B_1(k_1x^4 - k_3y^4) + 9B_1k_2x^2y^2 + \\ & + \frac{3}{2}B_1k_2(y^4 - x^4) - 30B_1k_3x^2y^2 + 18A_2a_1^2y^4 + 12A_2c_1a_1y^2 - \\ & - 9B_2(a_1 - b_1)\left(\frac{1}{4}(a_1y^4 + b_1x^4) + \frac{c_1}{6}(y^2 + x^2) + \frac{3a_1}{2}x^2y^2\right) + 2A_1c_2 + A_2c_1^2. \end{aligned} \quad (40)$$

В силу (27) и (28) граничные условия (30) примут вид

$$\sigma_y'' = 18qhB_1(a_1 - b_1)x^2, \quad y = \pm h,$$

$$\tau_{xy}'' = \pm qx(6h^2(B_1b_1 + (4A_1 - B_1)a_1) + 4A_1c_1) \mp 12qx^3(a_1 - b_1)B_1. \quad (41)$$

Подставим (39), (38) и (31) в (41), тогда получим

$$-20A_1k_1 + 5B_1k_1 - \frac{3}{2}B_1k_2 - 18A_2b_1^2 - \frac{9}{4}B_2(a_1 - b_1)b_1 = 0, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} -12b_2A_1 - 36A_1k_2h^2 + 3B_1(b_2 - a_2) + 9B_1k_2h^2 - 30B_1k_3h^2 - 12A_2c_1b_1 - 36A_2a_1b_1h^2 - \\ - 18A_3(a_1 - b_1)^2h^2 - \frac{3}{2}B_2(a_1 - b_1)c_1 - \frac{27}{2}B_2(a_1 - b_1)a_1h^2 = 6q^2p, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} 3B_1(b_2 - a_2)h^2 - 5B_1k_3h^4 + \frac{3}{2}B_1k_2h^4 - \frac{9}{4}B_2(a_1 - b_1)a_1h^4 - \frac{3}{2}B_2(a_1 - b_1)c_1h^2 - \\ - 2A_1c_2 - A_2c_1^2 = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$2B_1(3k_2 - 10k_1) + 9B_2b_1(a_1 - b_1) = -\frac{4q^2p}{h^2}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} [6B_1(a_2 - b_2) + 3B_2(a_1 - b_1)c_1]h + [2B_1(10k_3 - 3k_2) + 9B_2a_1(a_1 - b_1)]h^3 = \\ = q[6h^2(B_1b_1 + (4A_1 - B_1)a_1) + 4A_1c_1]. \end{aligned} \quad (46)$$

Из (45), (42) и (31) следует, что

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{q^2p}{20A_1h^2} \left(1 - \frac{A_2p}{8A_1^2}\right), \\ k_2 = \frac{q^2p}{6A_1h^2} \left(-\frac{4A_1 - B_1}{B_1} - \frac{A_2p}{8A_1^2} + \frac{B_2p}{8B_1^2}\right), \end{aligned} \quad (47)$$

тогда из (35), (31) и (47) получаем

$$\begin{aligned} k_3 = \frac{q^2p}{5h^2} \left(\frac{1}{4A_1} + \frac{4A_1}{B_1^2} - \frac{3}{B_1}\right) + \\ + \frac{q^2p^2}{5h^2} \left(\frac{A_2}{12B_1A_1^2} + \frac{A_2}{6A_1B_1^2} - \frac{A_2}{32A_1^3} - \frac{A_3}{3B_1^3} - \frac{B_2}{2B_1^3} + \frac{B_2}{8B_1^2A_1}\right). \end{aligned} \quad (48)$$

Из (31), (43), (44), (46) находим

$$\begin{aligned} a_2 = \frac{q^2p}{3} \left(-\frac{1}{4A_1} - \frac{4A_1}{B_1^2} + \frac{2}{B_1}\right) + \\ + q^2p^2 \left(\frac{B_2}{24A_1B_1^2} - \frac{A_2}{9A_1B_1^2} - \frac{A_2}{36A_1^2B_1} - \frac{A_2}{36A_1^3} + \frac{B_2}{6B_1^3} - \frac{A_3}{18A_1B_1^2}\right), \end{aligned} \quad (49)$$

$$b_2 = \frac{q^2p}{3} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{4A_1}\right) + \frac{q^2p^2}{12A_1} \left(\frac{A_2}{3A_1B_1} + \frac{2A_2}{3A_1^2} - \frac{2A_3}{3B_1^2} - \frac{B_2}{2B_1^2}\right), \quad (50)$$

$$c_2 = \frac{h^2 q^2 p}{2A_1} + \frac{h^2 q^2 p^2}{4A_1} \left(\frac{A_2}{3A_1 B_1} - \frac{A_2}{3A_1^2} - \frac{2A_3}{3B_1^2} - \frac{B_2}{2B_1^2} \right). \quad (51)$$

Согласно (38), (39), (40), (47), (48), (49), (50) и (51) компоненты напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_x'' &= x^4 \frac{q^2 p}{h^2} + \\ &+ y^4 \left[\frac{q^2 p}{h^2} \left(\frac{16A_1^2}{B_1^2} - \frac{16A_1}{B_1} + 3 \right) + \frac{q^2 p^2}{h^2} \left(-\frac{5A_2}{6A_1 B_1} + \frac{8A_2}{3B_1^2} - \frac{A_2}{12A_1^2} - \frac{4A_1 A_3}{3B_1^3} - \frac{2A_1 B_2}{B_1^3} + \frac{3B_2}{4B_1^2} + \frac{A_3}{3B_1^2} \right) \right] + \\ &+ x^2 \left[q^2 p \left(\frac{4A_1}{B_1} - 1 \right) + q^2 p^2 \left(\frac{A_2}{3A_1 B_1} + \frac{A_2}{6A_1^2} + \frac{A_2 B_1}{4A_1^3} - \frac{3A_3}{4B_1^2} - \frac{B_2}{2B_1^2} \right) \right] + \\ &+ y^2 \left[2q^2 p \left(-\frac{8A_1^2}{B_1^2} + \frac{6A_1}{B_1} - 1 \right) + q^2 p^2 \left(-\frac{4A_2}{B_1^2} - \frac{2A_2}{A_1 B_1} + \frac{A_2}{3A_1^2} + \frac{3A_1 A_3}{B_1^3} + \frac{2A_1 B_2}{B_1^3} - \frac{17A_3}{12B_1^2} + \frac{A_1 B_1}{4A_1^3} \right) \right] + \\ &+ x^2 y^2 \left[12 \frac{q^2 p}{h^2} \left(-\frac{2A_1}{B_1} + 1 \right) + \frac{q^2 p^2}{h^2} \left(-\frac{A_2}{2A_1^2} - \frac{A_2}{A_1 B_1} + \frac{2A_3}{B_1^2} + \frac{3B_2}{2B_1^2} \right) \right] + \\ &+ h^2 q^2 p + h^2 q^2 p^2 \left(\frac{A_2}{6A_1 B_1} + \frac{A_2}{12A_1^2} - \frac{A_3}{3B_1^2} - \frac{B_2}{4B_1^2} \right), \\ \sigma_y'' &= y^4 \left[\frac{2q^2 p}{h^2} \left(1 - \frac{2A_1}{B_1} \right) + \frac{q^2 p^2}{h^2} \left(-\frac{A_2}{12A_1^2} - \frac{A_2}{6A_1 B_1} + \frac{A_3}{3B_1^2} + \frac{B_2}{4B_1^2} \right) \right] + \\ &+ x^2 \left[q^2 p^2 \left(-\frac{A_2}{A_1^2} - \frac{A_3}{12B_1^2} + \frac{A_2 B_1}{4A_1^3} \right) \right] + \\ &+ y^2 \left[q^2 p \left(\frac{4A_1}{B_1} - 1 \right) + q^2 p^2 \left(\frac{A_2}{6A_1^2} + \frac{A_2 B_1}{4A_1^3} + \frac{A_2}{3A_1 B_1} - \frac{3A_3}{4B_1^2} - \frac{B_2}{2B_1^2} \right) \right] + \\ &+ x^2 y^2 \frac{6q^2 p}{h^2} + \frac{3q^2 p^2}{h^2} \left(\frac{A_3}{A_1^2} - \frac{A_2}{A_1^2} \right) - h^2 q^2 p - h^2 q^2 p^2 \left(\frac{A_2}{6A_1 B_1} + \frac{A_2}{12A_1^2} - \frac{A_3}{3B_1^2} - \frac{B_2}{4B_1^2} \right), \\ \tau_{xy}'' &= xy \left[2q^2 p \left(1 - \left(1 - \frac{4A_1}{B_1} \right) + q^2 p^2 \left(-\frac{A_2}{3A_1^2} - \frac{A_2 B_1}{2A_1^3} - \frac{2A_2}{3A_1 B_1} + \frac{3A_3}{2B_1^2} + \frac{B_2}{B_1^2} \right) \right) \right] - \\ &- x^3 y \frac{4q^2 p}{h^2} + xy^3 \left[\frac{8q^2 p}{h^2} \left(\frac{2A_1}{B_1} - 1 \right) + \frac{q^2 p^2}{h^2} \left(\frac{A_2}{3A_1^2} + \frac{2A_2}{3A_1 B_1} - \frac{4A_3}{3B_1^2} - \frac{B_2}{B_1^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Согласно (36)–(40) и (47)–(52) во втором приближении напряжения, деформации и перемещения пропорциональны квадрату глубины выточки q^2 .

Расчеты произведем на основе экспериментальных данных, приведенных в работе А. М. Жукова [1].

А. М. Жуков по экспериментальным данным Мак-Грегори определил физические константы для трех случаев: мягкой отожженной стали с содержанием углерода 0,2%; отожженной стали SAE-1112; отожженной стали SAE-1045 при комнатной температуре.

Экспериментальные данные сведены в таблицу:

Таблица 1

Металл	σ_0 , кг/мм ²	e_0	G_0	A , кг/мм ²	B , кг/мм ²
12%	45	0,247	34,5	9,2	52,5
SAE-1112	53,2	0,267	35,3	9,3	57,4
SAE-1045	77	0,217	63,7	17,3	102

где $\sigma_0 = \sigma_x^0$ – напряжение одноосного растяжения, $e_0 = e_x^0$ – деформация одноосного растяжения.

Зависимость интенсивности напряжений σ_i и интенсивности деформаций e_i определяется формулой $\sigma_i = \Phi(e_i)$, где σ_i и e_i определяются соотношениями (2), (3), тогда

$$e_i^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_0, \quad \sigma_i^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0. \quad (53)$$

Так как модуль упрочнения $G_0 = \frac{d\Phi^0}{de_i}$, то

$$A = A_1 = \frac{G_0}{3}, B = B_1 = \frac{\sigma_0}{4e_0}. \quad (54)$$

Формулы А. М. Жукова приведены с поправкой на обработку экспериментальных данных.

Полученные выше результаты позволяют из характеристики вторых производных определить кривую упрочнения.

Кривую упрочнения можно аппроксимировать различным образом. Рассмотрим два случая:

1) линейное упрочнение.

В этом случае зависимость интенсивностей напряжений и деформаций имеет вид

$$\sigma_i = \Phi = G_0 e_i + k = 3\Psi e_i. \quad (55)$$

Тогда, используя выражения (12), (55) и (54), можем составить следующую таблицу:

Таблица 2

Металл	σ_0	e_0	G_0	A_1	B_1	k	A_2	A_3	B_2	α
12%	45	0,247	34,5	11,5	45,547	29,131	0	-137,839	-275,678	-0,495
SAE-1112	53,2	0,267	35,3	11,766	49,813	35,189	0	-142,494	-284,988	-0,528
SAE-1045	77	0,217	63,7	21,233	88,709	50,796	0	-311,401	-633,802	-0,521

2) степенное упрочнение.

В этом случае зависимость интенсивностей напряжений и деформаций имеет вид

$$\sigma_i = \Phi = G_0 e_i + k = 3\Psi e_i. \quad (56)$$

Тогда, используя выражения (12), (55), (56) и (54), можем составить таблицу.

Таблица 3

Металл	σ_0	e_0	G_0	A_1	B_1	k	A_2	A_3	B_2
12%	45	0,247	34,5	11,5	45,547	0,253	-34,799	843,735	1687,469
SAE-1112	53,2	0,267	35,3	11,766	49,813	0,236	-33,669	815,531	1631,062
SAE-1045	77	0,217	63,7	21,233	88,709	0,239	-74,463	8745,531	17491,061

Подставляя полученные значения из таблиц 2 и 3 в выражения для определения компонент напряжения в первом приближении (32), при $x = 0$ получим

$$\tau_{xy}'' = 0, \quad (57)$$

$$\frac{\sigma_x^*}{|p|} \approx q'', \quad (58)$$

$$\frac{\sigma_y^*}{|p|} \approx q'', \quad (59)$$

где q'' , т. е. меняется от -1 до 1. Таким образом, для всех трех рассмотренных видов сталей графики для компонент напряжения будут иметь один и тот же вид (рис. 1):

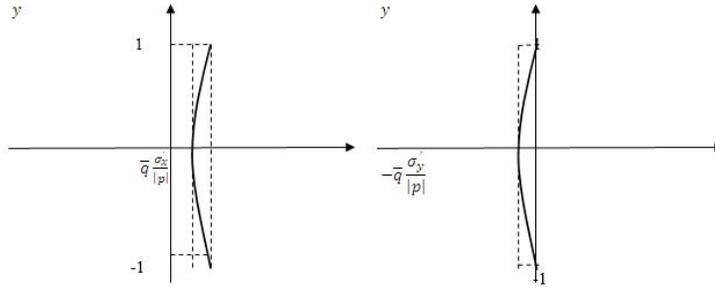


Рис. 1

Подставляя значения величин из таблиц 2 и 3 в выражения для определения компонент напряжения во втором приближении (52), для каждой зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций (линейного и степенного упрочнений) получим различные выражения.

Так, для линейного упрочнения соотношения (52) при $x = 0$ примут вид:

$$\tau''_{xy} = 0, \quad (60)$$

$$\frac{\sigma''_x}{|p|} = q^2 [-0,055y^4 + 8,976y^2 + 33,545], \quad (61)$$

$$\frac{\sigma''_x}{|p|} = q^2 [-0,048y^4 + 8,85y^2 + 34,401], \quad (62)$$

$$\frac{\sigma''_x}{|p|} = q^2 [-0,034y^4 + 8,89y^2 + 62,776], \quad (63)$$

$$\frac{\sigma''_y}{|p|} = q^2 [-0,055y^4 + 2,956y^2 - 33,545], \quad (64)$$

$$\frac{\sigma''_y}{|p|} = q^2 [-0,048y^4 + 2,962y^2 - 34,401], \quad (65)$$

$$\frac{\sigma''_y}{|p|} = q^2 [-0,034y^4 + 2,976y^2 - 62,776], \quad (66)$$

а для степенного упрочнения соотношения (64)–(66) при $x = 0$ примут вид:

$$\tau''_{xy} = 0, \quad (67)$$

$$\frac{\sigma''_x}{|p|} = q^2 [0,471y^4 + 9,004y^2 + 33,118], \quad (68)$$

$$\frac{\sigma''_x}{|p|} = q^2 [0,393y^4 + 8,847y^2 + 34,049], \quad (69)$$

$$\frac{\sigma''_x}{|p|} = q^2 [1,007y^4 + 9,172y^2 + 61,796], \quad (70)$$

$$\frac{\sigma''_y}{|p|} = q^2 [0,471y^4 + 9,004y^2 - 33,118], \quad (71)$$

$$\frac{\sigma_y''}{|p|} = q^2 [0,393y^4 + 8,847y^2 - 34,049], \quad (72)$$

$$\frac{\sigma_y''}{|p|} = q^2 [1,007y^4 + 9,172y^2 - 61,796]. \quad (73)$$

Графики, соответствующие полученным соотношениям, имеют следующий вид:

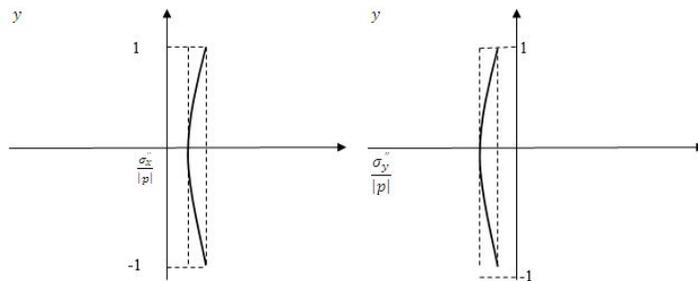


Рис. 2

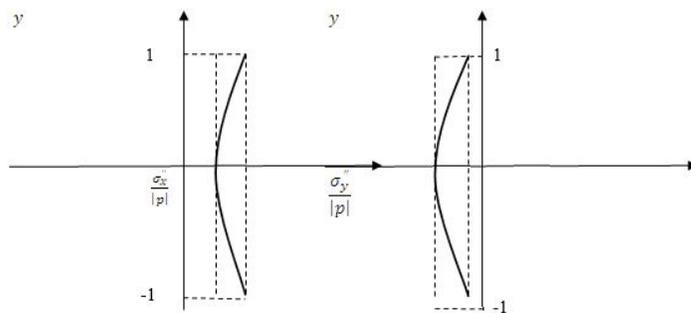


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жуков, А. М. К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении / А. М. Жуков // Инженерный сборник. – Т. V. – Вып. 2. – 1949.
 [2] Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

Петров Николай Ильич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары

e-mail: anfiska@mail.ru

N. I. Petrov

ABOUT DEFORMATION OF THE STRETCHED STRIP WEAKENED BY FLAT BORES

Chuvash State University named after I. N. Ulyanov

Abstract. In work it is considered intense and a strained state of the strip weakened by flat bores, ratios of the theory of small plasto-elastic deformations are used. Unlike Zhukov A.M. decision. [1] and D.D. Ivlev's[2] decisions, the decision in polynoms is given below.

Keywords: tension, deformation, compression, stretching, algorithm.

REFERENCES

- [1] *Zhukov, A. M.* On the question of occurrence in a sample of cervical tensile / A. M. Zhukov // Engineering collection. – 1949. – Vol. V. – Issue 2.
- [2] *Ivlev, D. D.* Method of indignations in the theory of an uprugoplastichesky body / D. D. Ivlev, L. V. Yershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p.

Petrov, Nikolay Iuich

Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of general physics, Chuvash State University, Cheboksary

Н. М. Калантарлы

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В КОЛЬЦЕВОМ ДИСКЕ, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОГО ЗАДАНЫ УСЛОВИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. Дается математическое описание и расчет трещинообразования в кольцевом диске, на границе которого заданы условия первой основной задачи. Принято, что в материале кольцевого диска имеется концентратор напряжений (зона ослабленных межчастичных связей материала). Сформулирован критерий зарождения трещины в кольцевом диске.

Ключевые слова: кольцевой диск, зона ослабленных межчастичных связей материала, силы сцепления.

УДК: 539.375

Введение. Для анализа надежности кольцевых дисков необходимо знание их напряженно-деформированного состояния и разрушения. Кольцевые диски часто работают в очень напряженных условиях. Задачи их прочности актуальны в настоящее время и, несомненно, интерес к этим задачам будет повышаться в связи с существующей тенденцией развития машиностроения и энергетики. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния в кольцевых дисках имеют особое прикладное значение, в первую очередь, для правильного выбора их конструкции, оптимальных размеров и допустимых величин рабочих нагрузок.

Постановка задачи. Пусть поперечное сечение кольцевого диска заполняет в плоскости $z = x + iy$ область S , ограниченную извне окружностью радиуса R_1 , а изнутри окружностью радиуса R (рис. 1). Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в кольцевом диске при действии нормальной и касательной к контуру нагрузки. Считается, что имеет место плоско-напряженное состояние.

По мере нагружения кольцевого диска силовой нагрузкой в диске будут возникать зоны предразрушения, которые моделируются [1] как области ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Через некоторое число циклов нагружения кольцевого диска возможность деформирования в области ослабленных межчастичных связей материала исчерпывается и раскрытие берегов зоны предразрушения резко увеличивается. Если величина раскрытия берегов зоны предразрушения в точке максимальной концентрации достигнет предельного для материала диска значения δ_c , то в этой точке произойдет зарождение усталостной трещины. В предлагаемой расчетной модели рост трещины в кольцевом диске происходит непрерывно от нулевой длины. Задача моделирования процессов образования и роста усталостной трещины в кольцевом диске сводится к последовательно решаемым задачам механики разрушения.

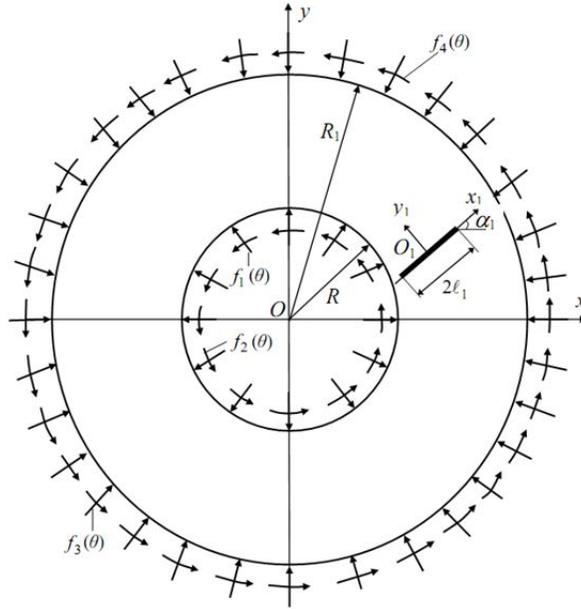


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Считается, что зона предразрушения ориентирована в направлении действия максимальных растягивающих напряжений, возникающих в кольцевом диске. Рассмотрим зону предразрушения длины $2\ell_1$, расположенную на отрезке $|x_1| \leq \ell$, $y_1 = 0$ (рис. 1). В центре зоны предразрушения разместим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$, ось x_1 которой совпадает с линией зоны предразрушения и образует угол α_1 с осью x . Между берегами зоны предразрушения имеется взаимодействие, сдерживающее зарождение трещины. Согласно используемой математической модели, считается, что между берегами зоны предразрушения имеются связи, закон деформирования которых задан. Под действием на кольцевой диск внешних и внутренних нагрузок в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, появятся нормальные $q_{y_1}(x_1)$ и касательные $q_{x_1y_1}(x_1)$ напряжения, смыкающие берега зоны предразрушения. Таким образом, к берегам зоны предразрушения будут приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1y_1}(x_1)$ соответственно. Значения этих напряжений заранее неизвестны и требуют определения.

Отнесем кольцевой диск к полярной системе координат $r\theta$ с началом координат в центре концентрических окружностей L_1, L с радиусами R_1, R соответственно.

Пусть заданы внешние усилия, действующие на границе кольцевого диска (условия первой основной задачи):

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = f_1(\theta) - if_2(\theta) \quad \text{при} \quad |z| = R, \quad (1)$$

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = f_3(\theta) - if_4(\theta) \quad \text{при} \quad |z| = R_1,$$

главный вектор и главный момент этих усилий равны нулю; $i^2 = 1$.

Принято, что в начальной стадии образования размер зоны предразрушения гораздо меньше толщины стенки диска. Краевые условия на берегах зоны предразрушения будут

$$\sigma_{y_1} - i\tau_{x_1y_1} = q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1) \quad \text{при} \quad y_1 = 0, \quad |x_1| \leq \ell_1. \quad (2)$$

Основные соотношения постановленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытие берегов предразрушения и напряжения в связях, которое можно представить в виде

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = \Pi(x_1, \sigma_1) [q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1)], \quad (3)$$

где $(v_1^+ - v_1^-)$ и $(u_1^+ - u_1^-)$ – нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов зоны предразрушения соответственно; функция $\Pi(x_1, \sigma_1)$ представляет собой податливость связей, зависящую от натяжения связей; $\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + iq_{x_1 y_1}^2}$ – модуль вектора сил сцепления в связях.

При постоянном значении Π имеем в (3) линейный закон деформирования связей. В общем случае закон деформирования связей является нелинейным и задан.

Для определения значения внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины (трещинообразование), нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины. В качестве такого условия принимается критерий критического раскрытия берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала (зоны предразрушения)

$$|(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-)| = \delta_c, \quad (4)$$

где δ_c – характеристика сопротивления материала кольцевого диска образованию трещины, определяемая опытным путем. Это дополнительное условие позволяет находить параметры кольцевого диска, при которых происходит трещинообразование.

Математическая модель зарождения трещины в кольцевом диске состоит из уравнений теории упругости [2], граничных условий (1), (2) на поверхностях диска и берегах зоны предразрушения и критерия образования трещины (4).

Метод решения краевой задачи. Для исследования напряженно-деформированного состояния кольцевого диска с одной прямолинейной зоной предразрушения требуется совместное решение уравнений теории упругости при граничных условиях нагружения диска (1). К граничным условиям (1) добавляются и условия для усилий в связях при нагружении. Для решения граничной задачи (1)–(2) используем метод Н. И. Мусхелишвили [2]. Для компонент тензора напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ и составляющих вектора смещений u, v справедливы формулы Колосова – Мусхелишвили [2]:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}\Phi(z), \quad z = x + iy, \quad (5)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\theta},$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)},$$

где $\Phi(z) = \varphi'(z)$; $\Psi(z) = \psi'(z)$; μ – модуль сдвига материала диска; ν – коэффициент Пуассона материала диска; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Используя формулы Колосова – Мусхелишвили (5), граничные условия (1)–(2) запишем в следующем виде:

$$\text{при } r = R \quad \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = f_1(\theta) - if_2(\theta), \quad (6)$$

$$\text{при } r = R_1 \quad \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = f_3(\theta) - if_4(\theta),$$

$$\text{при } y_1 = 0, |t| \leq \ell_1 \quad \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t) = q_{y_1} + iq_{x_1 y_1}.$$

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние в кольцевой области S , ищем в виде [2], [3]:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (7)$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z),$$

где

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \quad (8)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t) dt}{t - z_1}, \quad (9)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{\overline{g_1(t)}}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1(t) \right] dt,$$

$$T_1 = t e^{i\alpha_1} + z_1^0, \quad z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0),$$

где $g_1(t)$ – искомая функция, характеризующая раскрытие берегов зоны предразрушения

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{\partial}{\partial x_1} [v_1^+(x_1, 0) - v_1^-(x_1, 0) - i(u_1^+(x_1, 0) - u_1^-(x_1, 0))]. \quad (10)$$

Неизвестную искомую функцию $g_1(t)$ и комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ следует определить из краевых условий на берегах зоны предразрушения и на контуре $r = R_1$. С помощью некоторых преобразований и вычисляя соответствующие интегралы, находим

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left\{ \left(\frac{1}{z\bar{T}_1 - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_1 e^{i\alpha_1} g_1(t) + \left[\frac{T_1}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_1 - 2z + T_1}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \right\} dt, \quad (11)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{\bar{T}_1^3 e^{i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1(t) + (z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1 \bar{T}_1^2 - 3T_1 \bar{T}_1) \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1(t)} \right] dt.$$

Для нахождения комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ краевые условия задачи (6) можно записать в следующем виде:

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] = f_1(\theta) - i f_2(\theta) - (f_{12}^*(\theta) - i f_{22}^*(\theta)) \quad \tau = R e^{i\theta}, \quad (12)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \overline{\Phi_0(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_1 \Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1)] = f_3(\theta) - i f_4(\theta) \quad \tau_1 = R_1 e^{i\theta},$$

$$\text{где } f_1^*(\theta) - i f_2^*(\theta) = \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)],$$

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

Решение граничной задачи (12) находится методом степенных рядов. Для этого правые части граничных условий (12) необходимо разложить в ряды Фурье:

$$f_1^*(\theta) - i f_2^*(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^* e^{ik\theta}, \quad f_1(\theta) - i f_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta} \quad \text{при } r = R, \quad (13)$$

$$f_3(\theta) - i f_4(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\theta} \quad \text{при } r = R_1.$$

Здесь $A_k^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1^*(\theta) - if_2^*(\theta)) e^{-ik\theta} d\theta$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) - if_2(\theta)) e^{-ik\theta} d\theta, \quad B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_3(\theta) - if_4(\theta)) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Вычисляя интегралы с помощью теории вычетов, находим:

$$A_n^* = -\frac{2}{\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{e^{i\alpha_1} g_1(t)}{T_1^{n+1}} - e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^{n+1} g_1(t) \right] dt + C_n,$$

$$A_0^* = -\frac{2}{\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{e^{i\alpha_1} g_1(t)}{T_1} - \frac{3}{2} e^{i\alpha_1} \bar{T}_1 g_1(t) \right] dt + C_0,$$

$$C_n = C'_{n-2} - 2C''_{n-1} + C_n^* \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$C_1 = -2C''_0 + C_1^*, \quad C_0 = C_0^* + C_*,$$

$$C'_n = \frac{n+1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} e^{-i\alpha_1} g_1(t) \bar{T}_1^{n+1} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$C''_1 = \frac{n+1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} e^{-i\alpha_1} \bar{T}_1^n g_1(t) dt, \quad C_n^* = \frac{n+1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} e^{-i\alpha_1} T_1 \bar{T}_1^n \overline{g_1(t)} dt.$$

Удовлетворяя комплексными потенциалами (7) граничным условиям (12) и осуществляя некоторые преобразования, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов a_k и b_k комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$:

$$a_0 + \bar{a}_0 - b_{-2} R^{-2} = A_0 - A_0^*, \quad a_0 + \bar{a}_0 - b_{-2} R_1^{-2} = B_0, \quad (14)$$

$$(1-k)a_k R_1^k + \bar{a}_{-k} R^{-k} - b_{k-2} R^{k-2} = A_k - A_k^*,$$

$$(1-k)a_k R_1^k + \bar{a}_{-k} R_1^{-k} - b_{k-2} R_1^{k-2} = B_k.$$

Решение системы (14) не представляет [2] трудностей и имеет вид

$$a_0 = \frac{B_0 R_1^2 - (A_0 - A_0^*) R^2}{2(R^2 - R_0^2)}, \quad a_{-1} = \frac{(\bar{A}_1 - \bar{A}_1^*) R}{1 + \kappa},$$

$$b_{-1} = -\frac{\kappa(A_1 - A_1^*) R}{1 + \kappa}, \quad a_1 = \frac{\bar{M}_{-1}}{R_1^4 - R^4} - \frac{2(A_1 - A_1^*) R}{(1 + \kappa)(R_1^2 + R^2)},$$

$$a_k = \frac{(1+k)(R_1^2 - R^2)M_k - (R_1^{-2k+2} - R^{-2k+2})\bar{M}_{-k}}{(1-k^2)(R_1^2 - R^2)^2 - (R_1^{2k+2} - R^{2k+2})(R_1^{-2k+2} - R^{-2k+2})} \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots),$$

$$M_k = B_k R_1^{-k+2} - (A_k - A_k^*) R_1^{-k+2}, \quad b_{-2} R^{-2} = 2a_0 - A_0 + A_0^*,$$

$$b_{k-2} R_1^{k-2} = (1-k)a_k R_1^k + \bar{a}_{-k} R_1^{-k} - B_k.$$

Удовлетворяя функциями (7)–(9) и (11) граничным условиям на берегах зоны предразрушения, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1(x_1)$:

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[R(t, x_1)g_1(t) + S(t, x_1)\overline{g_1(t)} \right] dt = \pi f_*(x_1) \quad |x_1| \leq \ell_1, \quad (15)$$

где $f_*(x_1) = q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} + f_0(x_1)$,

$$\begin{aligned} f_0(x_1) &= - \left[\Phi_0(x_1) + \overline{\Phi_0(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'_0(x_1)} + \overline{\Psi_0(x_1)} \right], \\ R(t, x_1) &= \frac{e^{i\alpha_1}}{2} \left(\frac{1}{T_1 - X_1} + \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\overline{T_1} - \overline{X_1}} \right) - \frac{e^{i\alpha_1}}{2} \left[\frac{X_1 \overline{T_1}^2}{1 - X_1 \overline{T_1}} + \frac{\overline{X_1}^2 T_1 - 2\overline{X_1} + \overline{T_1}}{(1 - T_1 \overline{X_1})^2} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-2i\alpha_1} \frac{2X_1(T_1 \overline{T_1} - 1) + \overline{T_1}^2(\overline{X_1} + \overline{T_1})(\overline{X_1} T_1 - 3) + 4T_1}{(1 - T_1 \overline{X_1})^3} \right], \\ S(t, x_1) &= \frac{e^{-i\alpha_1}}{2} \left[\frac{1}{\overline{T_1} - \overline{X_1}} - \frac{T_1 - X_1}{(\overline{T_1} - \overline{X_1})^2} e^{-2i\alpha_1} \right] - \\ &\quad - \frac{e^{-i\alpha_1}}{2} \left[\frac{T_1^2 \overline{X_1}}{1 - T_1 \overline{X_1}} + \frac{X_1^2 \overline{T_1} - 2X_1 + T_1}{(1 - \overline{T_1} X_1)^2} + \frac{T_1^2 (X_1 - T_1) e^{-2i\alpha_1}}{(1 - T_1 \overline{X_1})^2} \right], \\ X_1 &= x_1 e^{i\alpha_1} + z_1^0. \end{aligned}$$

Для внутренней зоны предразрушения к сингулярному интегральному уравнению (15) следует добавить условие, обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура зоны предразрушения:

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1(t) dt = 0. \quad (16)$$

Сингулярное интегральное уравнение (15) и дополнительное условие (16) с помощью замены переменных и квадратурных формул [3], [4] сводится к системе M алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^0(t_m) = v_1^0(t_m) - iu_1^0(t_m)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell_1 \left[\varphi_0(t_m) R(\ell_1 t_m, \ell_1 \eta_r) + \overline{\varphi_0(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 \eta_r) \right] = f(\eta_r) \\ \sum_{m=1}^M \varphi_0(t_m) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$t_m = \cos \frac{2m-1}{M} \pi \quad (m=1, 2, \dots, M), \quad \eta_r = \cos \frac{r}{M} \pi \quad (r=1, 2, \dots, M-1).$$

Переходя в системе (17) к комплексно-сопряженным величинам, получаем еще M алгебраических уравнений.

Учитывая, что напряжения в кольцевом диске всюду ограничены, решение уравнения (15) будем искать в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Следовательно, к системе (17) необходимо добавить следующие условия ограниченности напряжений в окрестности концов зоны предразрушения:

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^0(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (18)$$

Добавив условия (18) к системе (17), получаем конечную алгебраическую систему для определения M неизвестных $g_1^0(t_m)$ ($m=1, 2, \dots, M$) и размера зоны предразрушения.

В правые части системы (17) входят неизвестные значения нормальных $q_{y_1}(x_1)$ и касательных $q_{x_1y_1}(x_1)$ напряжений в узловых точках зоны ослабленных межчастичных связей материала. Для их определения используется дополнительное уравнение (3). Используя полученное решение, можно записать

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \frac{d}{dx_1} [\Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1))]. \quad (19)$$

Это комплексное уравнение служит для определения неизвестных напряжений $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1y_1}(x_1)$ в связях между берегами зоны предразрушения. С целью построения недостающих уравнений, служащих для определения напряжений в связях между берегами предразрушения, потребуем выполнения условий (19) в узловых точках t_m , содержащихся в зоне предразрушения. В результате получим еще две системы из M уравнений соответственно для определения приближенных значений $q_{y_1}(t_m)$ и $q_{x_1y_1}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$). При этом используем метод конечных разностей.

Полученные системы уравнений относительно a_k , b_k , $g_1^0(t_m)$, $q_{y_1}(t_m)$, $q_{x_1y_1}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) позволяют при заданной внешней силовой нагрузке найти напряженно-деформированное состояние кольцевого диска при наличии прямолинейной зоны предразрушения.

Из-за неизвестного размера ℓ_1 длины зоны предразрушения алгебраические системы (17), (18) оказались нелинейными даже при линейных связях. Полученные алгебраические системы (14), (17)–(19) являются связанными и должны решаться совместно. Для их решения использовали метод последовательных приближений следующим образом. Систему решали при некотором определенном значении ℓ_{1*} относительно неизвестных $v_1^0(t_m)$, $u_1^0(t_m)$, $q_{y_1}(t_m)$, $q_{x_1y_1}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$). Затем значение ℓ_{1*} и найденные величины $v_1^0(t_m)$, $u_1^0(t_m)$, $q_{y_1}(t_m)$, $q_{x_1y_1}(t_m)$ подставляли в (18), т. е. в неиспользованное уравнение объединенной системы. Взятое значение параметра ℓ_{1*} и соответствующие ему значения $v_1^0(t_m)$, $u_1^0(t_m)$, $q_{y_1}(t_m)$, $q_{x_1y_1}(t_m)$, вообще говоря, не будут удовлетворять уравнению (18) системы, поэтому, подбирая значения параметра ℓ_{1*} , многократно повторяли вычисления до тех пор, пока уравнения (18) системы не были удовлетворены с заданной точностью. При этом алгебраическая система в каждом приближении решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей для нахождения напряжений в зоне предразрушения использовали итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [5].

На рис. 2 представлены графики зависимости относительной длины зоны предразрушения в кольцевом диске от безразмерного значения силового параметра p_0/σ_* для различных значений угла α_1 . Кривая 1 соответствует $\alpha_1 = 45^\circ$, кривая 2 – $\alpha_1 = 30^\circ$.

На основе полученного решения был проведен анализ характера зарождения трещины в кольцевом диске. Состояние предельного равновесия зоны ослабленных межчастичных связей материала диска наступает при выполнении условия

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \ell_1} = 0, \quad (20)$$

где Π – потенциальная энергия деформации.

Левая часть уравнения (20) состоит из двух слагаемых, одно из которых представляет собой скорость высвобождения энергии деформации при образовании новой поверхности зоны предразрушения, а другое определяет скорость потребления энергии деформации связями. Состоянию предельного равновесия кольцевого диска с зоной предразрушения соответствует выполнение условия

$$G_b(\ell_1) = G_n(\ell_1). \quad (21)$$

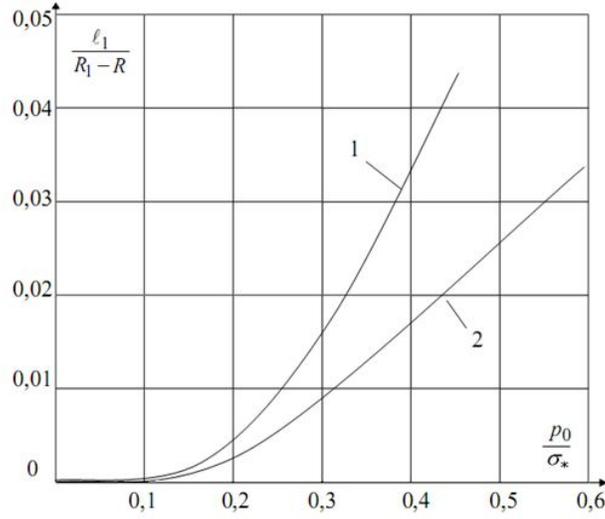


Рис. 2. Зависимость относительной длины зоны предразрушения в кольцевом диске

Энергетическое условие (21) необходимо, но недостаточно для перехода в состояние предельного равновесия зоны предразрушения в диске. Поэтому для определения предельного равновесия зоны предразрушения в кольцевом диске используем дополнительное критическое условие – критерий предельного раскрытия берегов зоны предразрушения (4). Таким образом, разрыв межчастичных связей материала диска на берегах зоны предразрушения при $x_1 = x_0$ происходит при выполнении условия (4)

$$\sqrt{[u_1^+(x_0, 0) - u_1^-(x_0, 0)]^2 + [v_1^+(x_0, 0) - v_1^-(x_0, 0)]^2} = \delta_c. \quad (22)$$

Используя решение задачи о равновесии зоны предразрушения в кольцевом диске, находим смещения на берегах зоны предразрушения при $x_1 = x_0$:

$$-\frac{1 + \kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_0} g_1(x_1) dx_1 = v_1^0(x_0, 0) - iu_1^0(x_0, 0),$$

где $v_1^0(x_0, 0) = v_1^+(x_0, 0) - v_1^-(x_0, 0)$; $u_1^0(x_0, 0) = u_1^+(x_0, 0) - u_1^-(x_0, 0)$.

Используя замену переменных интегрирования и заменяя интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса, получаем

$$-\frac{1 + \kappa}{2\mu} \cdot \frac{\pi \ell_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} g_1(t_m) = v_1^0(x_0, 0) - iu_1^0(x_0, 0), \quad (23)$$

где M_1 – число узловых точек разбиения интервала интегрирования, принадлежащих отрезку $(-\ell_1, x_0)$. Разрыв межчастичных связей материала кольцевого диска будет происходить в средней части зоны предразрушения, т. е. $2M_1 = M$.

Отделяя в (23) действительные и мнимые части, находим

$$v_1^0(x_0, 0) = -\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} v_1(t_m), \quad u_1^0(x_0, 0) = -\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} u_1(t_m)$$

и в результате получаем для модуля вектора перемещений на берегах зоны предразрушения при $x_1 = x_0$ следующее выражение:

$$V_{01} = \sqrt{[v_1^+(x_0, 0) - v_1^-(x_0, 0)]^2 + [u_1^+(x_0, 0) - u_1^-(x_0, 0)]^2} = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_1}{M} \sqrt{A_1^2 + B_1^2},$$

$$\text{где } A_1 = \sum_{m=1}^{M_1} v_1^0(t_m); B_1 = \sum_{m=1}^{M_1} u_1^0(t_m).$$

Таким образом, критическое значение внешней нагрузки, при котором в кольцевом диске появляется трещина, определяется условием

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_1}{M} \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \delta_c. \quad (24)$$

Решая полученные уравнения при заданных характеристиках материала диска, можно определить критическую величину внешней силовой нагрузки и предельный размер зоны предразрушения ℓ_1^c . Найденная скорость потребления энергии деформации $G_n(\ell_1^c)$ считается энергетической характеристикой сопротивления разрушению, т. е.

$$G_c = G_n(\ell_1^c).$$

Можно выделить различные режимы равновесия зоны предразрушения и зарождения трещины в кольцевом диске. При выполнении условий

$$G_b(\ell_1) < G_c, \quad V_{01}(x_0) < \delta_c$$

состояние зоны предразрушения не будет изменяться. Когда выполняются условия

$$G_b(\ell_1) \geq G_c, \quad V_{01}(x_0) < \delta_c,$$

имеет место продвижение вершины зоны предразрушения без разрыва межчастичных связей материала, т. е. трещина не зарождается. Это состояние зоны предразрушения можно интерпретировать как процесс приспособления к действующей внешней нагрузке. При выполнении условий

$$G_b(\ell_1) \geq G_c, \quad V_{01}(x_0) \geq \delta_c$$

происходит рост вершины зоны предразрушения и одновременный разрыв межчастичных связей материала кольцевого диска на берегах зоны предразрушения, т. е. зарождается трещина и растет размер зоны предразрушения. В случае, когда

$$G_b(\ell_1) < G_c, \quad V_{01}(x_0) \geq \delta_c,$$

нет продвижения вершины зоны предразрушения, но происходит разрыв межчастичных связей материала. В этом случае имеет место трещинообразование, но размер зоны предразрушения уменьшается.

Проведенный анализ показывает, что величина внешней нагрузки и критические параметры материала δ_c , G_c определяют характер разрушения (зарождения трещины). Изменяя значения параметров α_1 и z_1^0 , можно исследовать различные случаи расположения зоны предразрушения в кольцевом диске. При этом, если зона предразрушения одним концом выходит на поверхность диска, то нет необходимости в дополнительном равенстве (16).

Выводы. На основе предложенной расчетной модели разработан метод расчета параметров кольцевого диска, при которых происходит трещинообразование. Размер предельной минимальной зоны ослабленных межчастичных связей материала, при которой происходит трещинообразование, следует рассматривать как проектную характеристику материала кольцевого диска.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мирсалимов, В. М.* К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 132–151.
- [2] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [3] *Panasyuk, V. V.* A general method of solution of two-dimensional problems in the theory of cracks / V.V. Panasyuk, M.P. Savruk and A.P. Datsyshyn // Eng. Fract. Mech. – 1977. – V. 9. – № 2. – P. 481–497.
- [4] *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [5] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Калантарлы Наиля Мерадж кызы,

кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: nailyak1975@gmail.com

N. M. Kalantarly

CRACK INITIATION IN CIRCULAR DISC, ON BOUNDARY OF THAT ARE GIVEN FIRST BASIC PROBLEM CONDITIONS

Institute of mathematics and mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. A mathematical description and calculation of cracking in a circular disc on the boundary conditions given the first fundamental problem are given. It is assumed that in material of circular disc is located a stress concentrator (zone of weakened interparticle bonds of the material). The criterion of crack initiation in the circular disc is formulated.

Keywords: circular disk, zone of weakened interparticle bonds of material, cohesive forces.

REFERENCES

- [1] Mirsalimov, V. M. The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair / V. M. Mirsalimov // J. of Applied Math. and Mech. – 2007. – Vol. 71. – P. 120–136.
- [2] Muskhelishvili, N. I. Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1977. – 707 p.
- [3] Panasyuk, V.V., Savruk, M.P. and Datsyshyn, A.P. A general method of solution of two-dimensional problems in the theory of cracks / V. V. Panasyuk, M. P. Savruk, A. P. Datsyshyn // Eng. Fract. Mech. – 1977. – V. 9. – № 2. – P. 481–497.
- [4] Mirsalimov, V. M. Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p.
- [5] Il'yushin, A. A. Plasticity / A. A. Il'yushin. – M. ; L. : Gostekhizd, 1948. – 376 p.

Kalantarly, Nailya Merach kizi

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku

Д. А. Абриуков

ЗАДАЧА ИЗГИБА ПОЛУПОЛОСЫ СО СВОБОДНЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ КРАЯМИ. РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ – ПАПКОВИЧА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Даны примеры разложений Лагранжа по функциям Фадля – Папковича, возникающим при решении краевой задачи об изгибе полуполосы, у которой два противоположных края свободны, а граничные условия на торце могут быть различными. Опираясь на результаты [1], [2], [3] по плоской задаче теории упругости, можно получить замкнутые аналитические решения различных краевых задач теории изгиба тонких пластин, точные решения которых ранее не были найдены. Эти решения представляются в виде рядов по функциям Фадля – Папковича. Искомые коэффициенты разложений находятся с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича. Функции Фадля – Папковича являются обобщением тригонометрических рядов Фурье, а разложения по ним (разложения Лагранжа) являются обобщением разложений в тригонометрические ряды Фурье.

Ключевые слова: изгиб пластины, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+517.95

В статьях [1], [2], [3] изучались свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающих при решении двумерной краевой задачи теории упругости в прямоугольнике (полуполосе) с какими-либо однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам. Функции Фадля – Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке в классическом смысле [1]. Поэтому разложения по ним невозможно построить, опираясь на классический аппарат теории базиса функций [3]. Разложениями Лагранжа, в отличие от разложений, возникающих при решении краевой задачи, называются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича [1]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в разложениях Файлона – Рибьера.

Рассмотрим прямоугольную пластину, отнесенную к декартовым координатам x, y . Дифференциальные уравнения ее равновесия имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x, y) = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $P(x, y)$ – произвольная поперечная нагрузка, Q_x, Q_y – поперечные силы, M_x, M_y, M_{xy} ($M_{xy} = -M_{yx}$) – изгибающие и крутящие моменты (см. рис. 1).

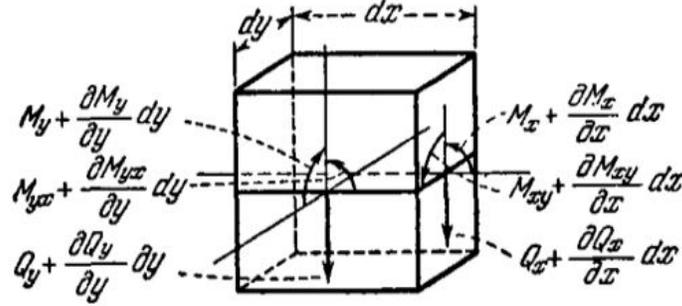


Рис. 1

Уравнения равновесия (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x, y) = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + T_x = 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$T_x(x, y) = \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y} - Q_x(x, y), \quad T_y(x, y) = \frac{\partial M_y(x, y)}{\partial y} - Q_y(x, y). \quad (3)$$

Связь между функциями моментов M_x , M_y , M_{xy} , а также углов поворота Φ_x , Φ_y и прогибом $w(x, y)$ определяется зависимостями

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], & M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \Phi_x(x, y) &= D \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, & \Phi_y(x, y) &= D \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ν – коэффициент Пуассона;

$$D = \frac{E\rho^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины (E – модуль упругости); ρ – толщина пластины.

Из соотношений (1) с учетом (4) найдем зависимости для поперечных сил:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (5)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа на плоскости. Подставляя выражения (5) в первое из уравнений (1), получим основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = P(x, y). \quad (6)$$

Помимо обычных сил Q_x , Q_y вводятся также обобщенные в смысле Кирхгоффа поперечные силы [5]:

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для построения решения воспользуемся методом начальных функций [4]. Метод начальных функций позволяет эффективно получать выражения для функций Фадля – Папковича. Основные соотношения метода начальных функций имеют вид:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= L_{WW}(y)W_0(x) + L_{W\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{WM}(y)M_0(x) + L_{WQ}(y)Q_0(x), \\ \Phi_y(x, y) &= L_{\Phi W}(y)W_0(x) + L_{\Phi\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{\Phi M}(y)M_0(x) + L_{\Phi Q}(y)Q_0(x), \\ M_y(x, y) &= L_{MW}(y)W_0(x) + L_{M\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{MM}(y)M_0(x) + L_{MQ}(y)Q_0(x), \\ K_y(x, y) &= L_{QW}(y)W_0(x) + L_{Q\Phi}(y)\Phi_0(x) + L_{QM}(y)M_0(x) + L_{QQ}(y)Q_0(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_{WW}(y) &= L_{QQ}(y) = \cos \alpha y + \frac{1-\nu}{2} \alpha y \sin \alpha y; \\ L_{WM}(y) &= L_{\Phi Q}(y) = -\frac{1}{2\alpha} y \sin \alpha y; \\ L_{W\Phi}(y) &= L_{MQ}(y) = -\frac{1}{2\alpha} [(1+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu) \alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{WQ}(y) &= \frac{1}{2\alpha^3} [-\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{\Phi\Phi}(y) &= L_{MM}(y) = \cos \alpha y - \frac{1-\nu}{2} \alpha y \sin \alpha y; \\ L_{\Phi W}(y) &= L_{QM}(y) = \frac{1}{2} [-(1+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu) \alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{\Phi M}(y) &= -\frac{1}{2\alpha} [\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{WM}(y) &= L_{Q\Phi}(y) = \frac{1}{2} (1-\nu)^2 \alpha^3 y \sin \alpha y; \\ L_{M\Phi}(y) &= \frac{1-\nu}{2} \alpha [(3+\nu) \sin \alpha y + (1-\nu) \alpha y \cos \alpha y]; \\ L_{QW}(y) &= \frac{1-\nu}{2} \alpha^3 [(3+\nu) \sin \alpha y - (1-\nu) \alpha y \cos \alpha y], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha = \partial/\partial x$. При этом $\alpha^2 = \partial^2/\partial x^2$ и т. д. Поэтому выражения (9) представляют собой дифференциальные операторы бесконечного порядка. $W(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $K_y(x, y)$ – соответственно прогиб, угол поворота и изгибающий момент вдоль оси y , обобщенная в смысле Кирхгоффа поперечная сила, умноженные на D . Те же функции, определенные при $y = 0$:

$$\begin{aligned} W_0(x) &= Dw(x, 0), & \Phi_0(x) &= \frac{\partial W(x, 0)}{\partial y}, \\ M_0(x) &= M_y(x, 0), & Q_0(x) &= K_y(x, 0), \end{aligned} \quad (10)$$

называются начальными функциями. Зная начальные, можно найти все остальные факторы. В качестве начальных функций могут быть выбраны функции $W(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$, $M_y(x, y)$, $K_y(x, y)$, определенные при любом значении $y = const$. Однако практически их удобно выбирать так, чтобы две из них были известны сразу, например, из условий симметрии задачи.

Рассмотрим пластину $\{\Pi : x \geq 0, |y| \leq h\}$ шириной $2h$ со свободными от закрепления краями $y = \pm h$:

$$M_y(x, \pm h) = K_y(x, \pm h) = 0 \quad (11)$$

и некоторыми граничными условиями на торце $x = 0$. Решение задачи будем искать с разделением на симметрическое и обратно симметрическое относительно линии симметрии пластины $y = 0$.

В случае симметрической задачи начальные функции $\Phi_0(x) = Q_0(x) = 0$. С помощью формул (8) удовлетворим граничным условиям (11), которые теперь будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{QW}(h)W_0(x) + L_{QM}(h)M_0(x) &= 0, \\ L_{MW}(h)W_0(x) + L_{MM}(h)M_0(x) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $L_{MW}(h)$, $L_{MM}(h)$ и т. д. – операторы метода начальных функций (9), определенные при $y = h$.

Введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$M_0(x) = L_{QW}(h)F(x), \quad W_0(x) = -L_{QM}(h)F(x). \quad (13)$$

При этом первое из уравнений (12) будет тождественно удовлетворено, а второе примет такой вид:

$$\alpha^3 (2(\nu - 1)\alpha h + (\nu + 3) \sin 2\alpha h) F(x) = 0. \quad (14)$$

В равенствах (13) использован первый вариант представления начальных функций (13) из первого уравнения (12). В дальнейшем его будем называть представлением I. Функции Фадля – Папковича, а также все функции, связанные с ними, для представления I будем обозначать индексом s .

Нулевым корням уравнения (14) отвечает функция (представление I)

$$F(x) = C_4 x^3 + C_3 x^2 + C_2 x + C_1, \quad (15)$$

где произвольные постоянные интегрирования. По формулам (13) найдем начальные функции, а затем, подставляя их в соотношения (8) и раскладывая операторы метода начальных функций в ряды по степеням параметра α ([4], стр. 127), получим следующее ненулевое элементарное решение:

$$W_s(x, y) = 2h\nu(3xC_4 + C_3), \quad \Phi_{xs}(x, y) = 6h\nu C_4. \quad (16)$$

Используя второе уравнение (12), введем разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$M_0(x) = L_{MW}(h)F(x), \quad W_0(x) = -L_{MM}(h)F(x). \quad (17)$$

При этом второе из уравнений (12) будет тождественно удовлетворено, а первое примет вид (14). Решение, связанное с таким введением начальных функций, будем называть представлением II и обозначать его индексом c .

Элементарное решение для представления II имеет такой вид:

$$\begin{aligned} W_c(x, y) &= (3xC_4 + C_3)((\nu - 2)h^2 - \nu y^2) + x^3 C_4 + x^2 C_3 + x C_2 + C_1, \\ \Phi_{xc}(x, y) &= 3C_4((h^2 - y^2)\nu - 2h^2 + x^2) + 2C_3 x + C_2, \\ \Phi_{yc}(x, y) &= -2y\nu(3xC_4 + C_3), \quad M_{xc}(x, y) = 2(\nu^2 - 1)(3xC_4 + C_3), \end{aligned} \quad (18)$$

$$M_{xyc}(x, y) = -6(\nu - 1)\nu y C_4, \quad K_{xc}(x, y) = -6(\nu - 1)^2 C_4, \quad Q_{xc}(x, y) = 6(\nu - 1) C_4,$$

$$T_{xc}(x, y) = -6(\nu^2 - 1) C_4.$$

Будем искать решение обыкновенного дифференциального уравнения бесконечного порядка (14) в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (14), получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$\lambda^3 (2(\nu - 1)\lambda h + (\nu + 3) \sin 2\lambda h) = 0, \quad (20)$$

которое имеет четыре нулевых корня, два действительных и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Ниже для иллюстрации приведены значения пяти ненулевых корней уравнения (20) при $h = 2$, $\nu = \frac{1}{3}$, принадлежащих первой координатной четверти (табл. 1).

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	0,6489347699124498204415	0
2	1,920926875876095578757,	0,2534177319545075720067
3	3,502055248275297722192,	0,4246957870594158390368
4	5,078718900627479816160,	0,5213277636781326527900
5	6,653374600317019693510,	0,5900791876440081757655

Следовательно, функцию $F(x)$ можно представить в виде ряда

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k e^{\bar{\lambda}_k x}, \quad (\lambda_k \in \Lambda, Re\lambda_k < 0).$$

Подставляя функцию $F(x)$ в формулы (13), с учетом элементарного решения (16) найдем начальные функции, а затем по формулам (8) – функции прогиба, угла поворота, изгибающего момента и обобщенной поперечной силы ($Re\lambda_k < 0$):

$$\begin{aligned} W_s(x, y) &= 2h\nu(3xC_4 + C_3) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k W_s(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k W_s(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \Phi_{ys}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_{ys}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \Phi_{ys}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_{ys}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k M_{ys}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k M_{ys}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ K_{ys}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k K_{ys}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k K_{ys}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}. \end{aligned} \quad (21)$$

Функции $W_s(\lambda_k, y)$, $\Phi_{ys}(\lambda_k, y)$, $M_{ys}(\lambda_k, y)$, $K_{ys}(\lambda_k, y)$ называются функциями Фадля – Папковича. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} W_s(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2}\lambda_k [(\nu + 1) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1)\lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \\ &+ \frac{\nu-1}{2}\lambda_k^2 y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y); \\ \Phi_{ys}(\lambda_k, y) &= \frac{\nu-1}{2}\lambda_k^3 y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - \\ &- \lambda_k^2 \left[\frac{\nu-1}{2}\lambda_k h \cos(\lambda_k h) + \sin(\lambda_k h) \right] \sin(\lambda_k y); \\ M_{ys}(\lambda_k, y) &= -\frac{1}{2}\lambda_k^3(\nu - 1) [(\nu + 3) \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1)\lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - \\ &- \frac{(\nu-1)^2}{2}\lambda_k^4 y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y); \\ K_{ys}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{2}\lambda_k^5 [y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - h \cos(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим уравнения для нахождения биортогональных систем функций:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\lambda, y) W_s^k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_k^2)}; & \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ys}(\lambda, y) \Phi_{ys}^k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} M_{ys}(\lambda, y) M_{ys}^k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}; & \int_{-\infty}^{\infty} K_{ys}(\lambda, y) K_{ys}^k(y) dy &= \frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $W_s(\lambda, y)$, $\Phi_{ys}(\lambda, y)$, $M_{ys}(\lambda, y)$, $K_{ys}(\lambda, y)$ – порождающие функции, а

$$L(\lambda) = -\frac{1}{4}(\nu - 1)\lambda^3(2(\nu - 1)\lambda h + (\nu + 3)\sin 2\lambda h).$$

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (23) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T W_s(\lambda_m, y) W_s^k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m^3} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T \Phi_{ys}(\lambda_m, y) \Phi_{ys}^k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T M_{ys}(\lambda_m, y) M_{ys}^k(y) dy &= \begin{cases} \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k; \end{cases} \\ \int_T K_{ys}(\lambda_m, y) K_{ys}^k(y) dy &= \begin{cases} \frac{\lambda_m^3 L'(\lambda_m)}{2} & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

где $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$.

Для комплексных значений λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (23) нужно заменить Т-образным контуром, лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [2].

Заметим, что при всех $\bar{\lambda}_m$

$$\begin{aligned} \int_T W_s(\bar{\lambda}_m, y) W_s^k(y) dy &= \int_T W_s(\lambda_m, y) \overline{W_s^k(y)} dy = 0, \\ \int_T \Phi_{ys}(\bar{\lambda}_m, y) \Phi_{ys}^k(y) dy &= \int_T \Phi_{ys}(\lambda_m, y) \overline{\Phi_{ys}^k(y)} dy = 0, \\ \int_T M_{ys}(\bar{\lambda}_m, y) M_{ys}^k(y) dy &= \int_T M_{ys}(\lambda_m, y) \overline{M_{ys}^k(y)} dy = 0; \\ \int_T K_{ys}(\bar{\lambda}_m, y) K_{ys}^k(y) dy &= \int_T K_{ys}(\lambda_m, y) \overline{K_{ys}^k(y)} dy = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Это сразу следует из формул (23). При выборе правых частей уравнений (23) необходимо учесть следующие соображения:

- левые и правые части уравнений (23) должны быть одновременно либо четными, либо нечетными функциями по λ ;
- первые и вторые члены разложений в ряд Тейлора по степеням λ порождающих функций в формулах (23) имеют вид

$$W_s(\lambda, y) = h\nu\lambda^2 - \frac{h(2h^2\nu - h^2 + 3y^2)}{6}\lambda^4 + \dots;$$

$$\begin{aligned}\Phi_{ys}(\lambda, y) &= -hy\lambda^4 + \frac{hy(h^2\nu - y^2\nu + 2y^2)}{6}\lambda^6 + \dots; \\ M_{ys}(\lambda, y) &= -(\nu^2 + 1)h\lambda^4 + \frac{h(\nu - 1)(h^2\nu + 3y^2)}{3}\lambda^6 + \dots; \\ K_{ys}(\lambda, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{6}hy(h^2 - y^2)\lambda^8 - \frac{hy(h^4 - y^4)(\nu - 1)^2}{60}\lambda^{10} + \dots,\end{aligned}\tag{26}$$

а первые члены разложений правых частей равенств (23) равны

$$\begin{aligned}\frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} &= \frac{(\nu^2 - 1)h}{\lambda_k^2}\lambda^4 + \dots; \quad \frac{L(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_k^2)} = \frac{(\nu^2 - 1)h}{\lambda_k^2}\lambda^2 + \dots; \\ \frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} &= \frac{(\nu^2 - 1)h}{\lambda_k^2}\lambda^8 + \dots.\end{aligned}\tag{27}$$

Сравнивая степенные разложения (23) и (24), с учетом (26) можно заметить, что (при $\lambda \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h\nu W_s^k(y)dy &= \frac{(\nu^2 - 1)h}{\lambda_k^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} -hy^4 \Phi_{ys}^k(y)dy = \frac{(\nu^2 - 1)h}{\lambda_k^2}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} -(\nu^2 + 1)hM_{ys}^k(y)dy &= \frac{(\nu^2 - 1)h}{\lambda_k^2}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\nu - 1)^2}{6}hy(h^2 - y^2)K_{ys}^k(y)dy &= \frac{(\nu^2 - 1)h}{\lambda_k^2}.\end{aligned}\tag{28}$$

Дадим примеры разложений Лагранжа по всем функциям Фадля – Папковича (22). Пусть, например, нужно найти коэффициенты a_k, \bar{a}_k разложения в ряд Лагранжа по системе функций $\{W_s(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$

$$W_s(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k W_s(\lambda_k, y) + \bar{a}_k W_s(\bar{\lambda}_k, y).\tag{29}$$

Умножим обе части равенства (29) на некоторую функцию W_s^m ($m = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем по y от $-\infty$ до $+\infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_s(y) W_s^m(y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(\lambda_k, y) W_s^m(y)dy + \bar{a}_k \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(\bar{\lambda}_k, y) \cdot W_s^m(y)dy.\tag{30}$$

Значение интеграла слева обозначим через w_s^m , то есть

$$w_s^m = \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(y) W_s^m(y) dy.$$

Интегралы, стоящие справа, не существуют для комплексных λ_k , поэтому интегрирование справа нужно заменить интегрированием по Γ -образному контуру, фигурирующему в формулах (24) и (25). Тогда согласно соотношениям биортогональности (24), (25) из (30) получим

$$w_s^m = a_m \frac{L'(\lambda_m)}{2\lambda_m^3} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Отсюда находим

$$a_m = \frac{w_s^m 2\lambda_m^3}{L'(\lambda_m)} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (31)$$

Аналогично находятся коэффициенты разложений a_k по другим системам функций Фадля – Папковича.

Окончательно получим такие разложения в ряды Лагранжа по функциям Фадля – Папковича.

$$\begin{aligned} W_s(y) &= \frac{2w_s^1 \lambda_1^3}{L'(\lambda_1)} W_s(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2w_s^k \lambda_k^3}{L'(\lambda_k)} W_s(\lambda_k, y) \right\}, \\ \Phi_{ys}(y) &= \frac{2\varphi_{ys}^1 \lambda_1}{L'(\lambda_1)} \Phi_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\varphi_{ys}^k \lambda_k}{L'(\lambda_k)} \Phi_{ys}(\lambda_k, y) \right\}, \\ M_{ys}(y) &= \frac{2\mu_{ys}^1 \lambda_1}{L'(\lambda_1)} M_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\mu_{ys}^k \lambda_k}{L'(\lambda_k)} M_{ys}(\lambda_k, y) \right\}, \\ K_{ys}(y) &= \frac{2\chi_{ys}^1}{\lambda_1^3 L'(\lambda_1)} K_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\chi_{ys}^k}{\lambda_k^3 L'(\lambda_k)} K_{ys}(\lambda_k, y) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь $W_s(y)$, $\Phi_{ys}(y)$, $M_{ys}(y)$, $K_{ys}(y)$ – раскладываемые функции, заданные на отрезке $[-1, 1]$, а числа w_s^k , φ_{ys}^k , μ_{ys}^k , χ_{ys}^k находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} w_s^k &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(y) W_s^k(y) dy; \quad \varphi_{ys}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ys}(y) \Phi_{ys}^k(y) dy; \quad \mu_{ys}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} M_{ys}(y) M_{ys}^k(y) dy, \\ \chi_{ys}^k &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ys}(y) K_{ys}^k(y) dy. \end{aligned} \quad (33)$$

Из формул (32) видно, что для определения чисел w_s^k , φ_{ys}^k , μ_{ys}^k , χ_{ys}^k необходимо раскладываемые функции, первоначально определенные при $y \in [-1, 1]$, каким-то образом продолжить вне этого отрезка. В зависимости от того, как выполнено это продолжение, числа w_s^k , φ_{ys}^k , μ_{ys}^k , χ_{ys}^k будут разными. Однако независимо от способа продолжения ряды Лагранжа (32) будут сходиться при $y \in (-1, 1)$ к своим функциям. Неединственность разложений в ряды Лагранжа – одно из важнейших свойств систем функций Фадля – Папковича.

Пусть раскладываемыми функциями в формулах (33) являются соответствующие порождающие функции, т. е. $W_s(y) = W_s(t, y)$, $\Phi_{ys}(y) = \Phi_{ys}(t, y)$ и т. д., где t – вещественный параметр. Тогда в соответствии с формулами (23), ($k = 1, 2, \dots$)

$$w_s^k = \frac{L(t)}{t^2(t^2 - \lambda_k^2)}; \quad \varphi_{ys}^k = \frac{L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \quad \mu_{ys}^k = \frac{L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \quad \chi_{ys}^k = \frac{t^4 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}. \quad (34)$$

Подставляя числа (34) в формулы (32), получим ($|y| < 1$, λ_1 – действительный корень, $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ – комплексные корни из первой координатной четверти):

$$\begin{aligned} W_s(t, y) &= \frac{2L(t)\lambda_1^3}{L'(\lambda_1)t^2(t^2 - \lambda_1^2)} W_s(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2L(t)\lambda_k^3}{L'(\lambda_k)t^2(t^2 - \lambda_k^2)} W_s(\lambda_k, y) \right\}, \\ \Phi_{ys}(t, y) &= \frac{2L(t)\lambda_1}{L'(\lambda_1)(t^2 - \lambda_1^2)} \Phi_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2L(t)\lambda_k}{L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} \Phi_{ys}(\lambda_k, y) \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$M_{ys}(t, y) = \frac{2L(t)\lambda_1}{L'(\lambda_1)(t^2 - \lambda_1^2)} M_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2L(t)\lambda_k}{L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} M_{ys}(\lambda_k, y) \right\},$$

$$K_{ys}(t, y) = \frac{2t^4 L(t)}{\lambda_1^3 L'(\lambda_1)(t^2 - \lambda_1^2)} K_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^4 L(t)}{\lambda_k^3 L'(\lambda_k)(t^2 - \lambda_k^2)} K_{ys}(\lambda_k, y) \right\}.$$

На рис. 2–5 показаны графики раскладываемых функций $W_s(y)$, $\Phi_{ys}(y)$, $M_{ys}(y)$, $K_{ys}(y)$ (сплошная линия) и соответствующие им ряды Лагранжа (35) (штриховая линия) при $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 2$, $t = 1$.

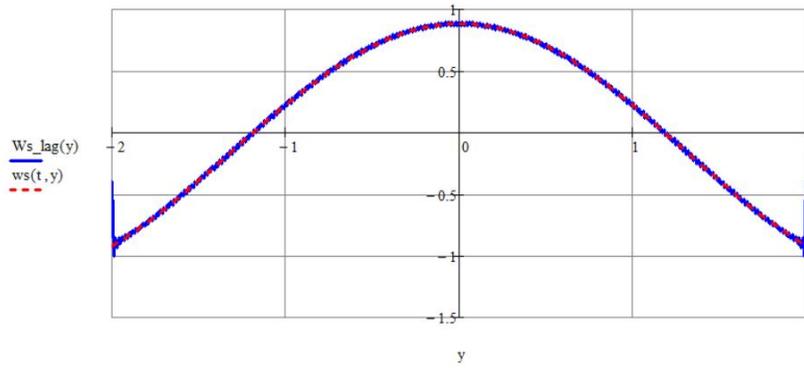


Рис. 2

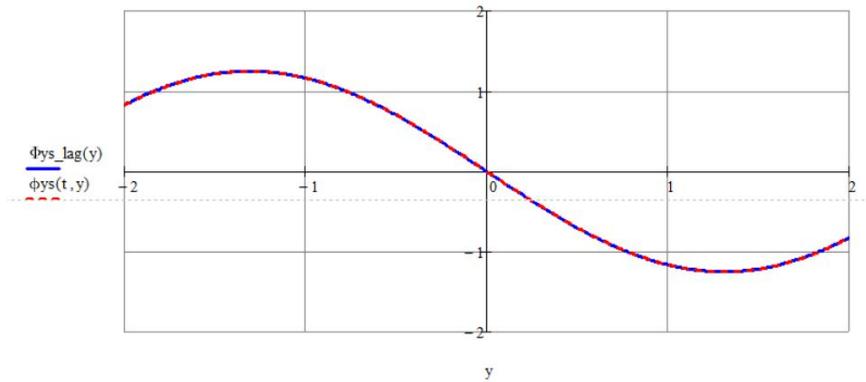


Рис. 3

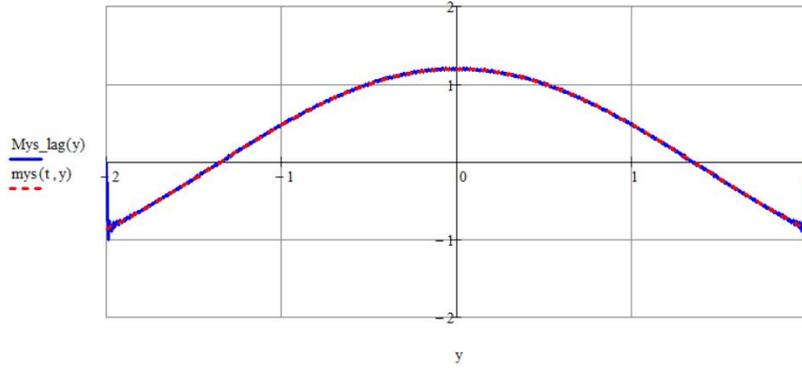


Рис. 4

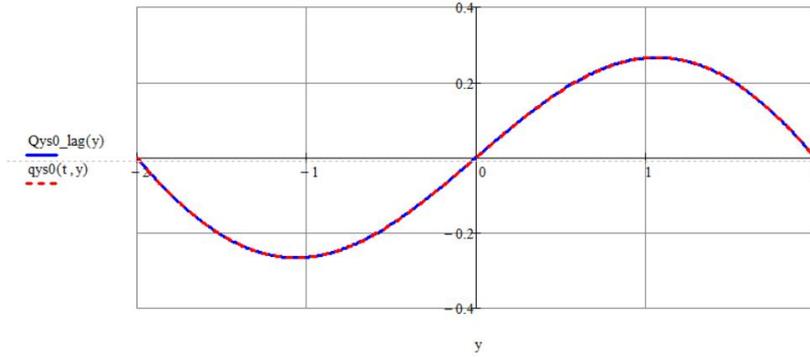


Рис. 5

Переходя в формулах (35) к пределу при $t \rightarrow 0$ и учитывая (26), (27), получим следующие разложения:

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2(\nu^2 - 1)\lambda_k^3}{L'(\lambda_k)} W_s(\lambda_k, y) \right\}, \quad -y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2(\nu^2 - 1)\lambda_k}{L'(\lambda_k)} \Phi_{ys}(\lambda_k, y) \right\}, \\ & -1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\lambda_k}{L'(\lambda_k)} M_{ys}(\lambda_k, y) \right\}; \\ \frac{(\nu - 1)^2}{6} y(h^2 - y^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2(\nu^2 - 1)}{\lambda_k^3 L'(\lambda_k)} K_{ys}(\lambda_k, y) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

По аналогии с (21) с учетом элементарных решений (16) найдем функции $M_{xs}(x, y)$, $M_{xys}(x, y)$, $\Phi_{xs}(x, y)$, $K_{xs}(x, y)$, $Q_{xs}(x, y)$, $Q_{ys}(x, y)$, $T_x(x, y)$, $T_y(x, y)$, входящие в основные уравнения и соотношения (2)–(7) задачи изгиба прямоугольной пластины ($Re\lambda_k < 0$):

$$\begin{aligned} M_{xs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k M_{xs}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k M_{xs}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ M_{xys}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k M_{xys}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k M_{xys}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{xs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_{xs}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \Phi_{xs}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
K_{xs}(x, y) &= 6h\nu C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k K_{xs}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k K_{xs}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
Q_{xs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k Q_{xs}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k Q_{xs}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
Q_{ys}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k Q_{ys}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k Q_{ys}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
T_{xs}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_{xs}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k T_{xs}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
T_{ys}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_{ys}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k T_{ys}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},
\end{aligned} \tag{37}$$

где $M_{xs}(\lambda_k, y)$, $M_{xys}(\lambda_k, y)$, $\Phi_{xs}(\lambda_k, y)$, $K_{xs}(\lambda_k, y)$, $Q_{xs}(\lambda_k, y)$, $Q_{ys}(\lambda_k, y)$, $T_{xs}(\lambda_k, y)$, $T_{ys}(\lambda_k, y)$ – функции Фадля – Папковича, полученные дифференцированием $W_s(\lambda_k, y)$ (см. (22)) с использованием соотношений (3)–(5), (7):

$$\begin{aligned}
M_{xs}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu-1)^2}{2} \lambda_k^3 \{ [\lambda_k^h \cos(\lambda_k h) - \sin(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \}, \\
M_{xys}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu-1)}{2} \lambda_k^3 \{ (\nu-1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) - \\
&\quad - [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \}, \\
\Phi_{xs}(\lambda_k, y) &= \frac{1}{2} \lambda_k^2 \{ [(\nu+1) \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k^h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + \\
&\quad + (\nu-1) \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \}, \\
K_{xs}(\lambda_k, y) &= \left[\frac{(\nu-1)(\nu-5)}{2} \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) - \frac{(\nu-1)^2}{2} \lambda_k^5 h \cos(\lambda_k h) \right] \cos(\lambda_k y) - \\
&\quad - \frac{(\nu-1)^2}{2} \lambda_k^5 y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y), \\
Q_{xs}(\lambda_k, y) &= -(\nu-1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y); \quad Q_{ys}(\lambda_k, y) = (\nu-1) \lambda_k^4 \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y), \\
T_{xs}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu-1)^2}{2} \lambda_k^4 \{ [\sin(\lambda_k h) - \lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - \lambda_k^y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y) \}, \\
T_{ys}(\lambda_k, y) &= \frac{(\nu-1)}{2} \lambda_k^4 \{ -(\nu-1) \lambda_k y \sin(\lambda_k h) \cos(\lambda_k y) + \\
&\quad + [2 \sin(\lambda_k h) + (\nu-1) \lambda_k y \cos(\lambda_k h)] \sin(\lambda_k y) \}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Отметим, что функции (37) с учетом (38) удовлетворяют условиям равновесия (2).

Удовлетворяя с помощью выражений (37) граничным условиям, заданным на крае пластины $x = 0$, приходим к задаче определения коэффициентов a_k , \bar{a}_k из разложений по функциям Фадля – Папковича, например,

$$\begin{aligned}
W_s(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k W_s(\lambda_k, y) + \bar{a}_k W_s(\bar{\lambda}_k, y), \\
\Phi_{xs}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_{xs}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \Phi_{xs}(\bar{\lambda}_k, y),
\end{aligned}$$

где $W_s(y)$, $\Phi_{xs}(y)$ – заданные на крае пластины $x = 0$ прогиб и угол поворота пластины.

Коэффициенты a_k определяются отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций, которые находятся из решения уравнений

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} M_{xs}(\lambda, y) M_{xs}^k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xs}(\lambda, y) \Phi_{xs}^k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} M_{xys}(\lambda, y) M_{xys}^k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{\infty} K_{xs}(\lambda, y) K_{xs}^k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} Q_{xs}(\lambda, y) Q_{xs}^k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ys}(\lambda, y) Q_{ys}^k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} T_{xs}(\lambda, y) T_{xs}^k(y) dy &= \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{\infty} T_{ys}(\lambda, y) T_{ys}^k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Здесь $M_{xs}(\lambda, y)$, $M_{xys}(\lambda, y)$, $\Phi_{xs}(\lambda, y)$, $K_{xs}(\lambda, y)$, $Q_{xs}(\lambda, y)$, $Q_{ys}(\lambda, y)$, $T_{xs}(\lambda, y)$, $T_{ys}(\lambda, y)$ – порождающие функции.

Отметим, что первые и вторые члены разложений в ряд Тейлора по степеням λ порождающих функций в формулах (39) имеют вид:

$$\begin{aligned}
M_{xs}(\lambda, y) &= \frac{(\nu - 1)^2}{6} h(3y^2 - h^2) \lambda^6 + \frac{(\nu - 1)^2}{60} h(h^4 - 5y^4) \lambda^8 + \dots; \\
M_{xys}(\lambda, y) &= -hy(\nu - 1) \lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6} hy(h^2\nu - \nu y^2 + 2y^2) \lambda^7 + \dots, \\
\Phi_{xs}(\lambda, y) &= \nu h \lambda^3 + \frac{h}{6} (h^2 - 3y^2 - 2h^2\nu) \lambda^5 + \dots, \\
K_{xs}(\lambda, y) &= -2h(\nu - 1) \lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6} h(h^2\nu - 3\nu y^2 + h^2 + 9y^2) \lambda^7 + \dots,
\end{aligned} \tag{40}$$

$$Q_{xs}(\lambda, y) = -h(\nu - 1) \lambda^5 + \frac{(\nu - 1)}{6} h(h^2 + 3y^2) \lambda^7 + \dots; \quad Q_{ys}(\lambda, y) = (\nu - 1) hy \lambda^6 - \frac{(\nu - 1)}{6} hy(h^2 + y^2) \lambda^8 + \dots,$$

$$T_{xs}(\lambda, y) = -\frac{(\nu - 1)^2}{6} h(3y^2 - h^2) \lambda^7 + \frac{(\nu - 1)^2}{60} h(5y^4 - h^4) \lambda^9 + \dots,$$

$$T_{ys}(\lambda, y) = (\nu - 1) yh \lambda^6 - \frac{(\nu - 1)}{6} hy(2y^2 + h^2\nu - \nu y^2) \lambda^8 + \dots$$

Как и для функций $W_s(y)$, $\Phi_{ys}(y)$ и т. д., получим разложения в ряды Лагранжа по функциям Фадля – Папковича (38):

$$\begin{aligned}
M_{xs}(y) &= \frac{2\mu_{xs}^1}{\lambda_1 L'(\lambda_1)} M_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\mu_{xs}^k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} M_{xs}(\lambda_k, y) \right\}, \\
M_{xys}(y) &= \frac{2\mu_{xys}^1}{L'(\lambda_1)} M_{xys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\mu_{xys}^k}{L'(\lambda_k)} M_{xys}(\lambda_k, y) \right\}, \\
\Phi_{xs}(y) &= \frac{2\varphi_{xs}^1 \lambda_1^2}{L'(\lambda_1)} \Phi_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\varphi_{xs}^k \lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} \Phi_{xs}(\lambda_k, y) \right\}, \\
K_{xs}(y) &= \frac{2\chi_{xs}^1}{L'(\lambda_1)} K_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\chi_{xs}^k}{L'(\lambda_k)} K_{xs}(\lambda_k, y) \right\}, \\
Q_{xs}(y) &= \frac{2q_{xs}^1}{L'(\lambda_1)} Q_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2q_{xs}^k}{L'(\lambda_k)} Q_{xs}(\lambda_k, y) \right\}, \\
Q_{ys}(y) &= \frac{2q_{ys}^1}{\lambda_1 L'(\lambda_1)} Q_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2q_{ys}^k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} Q_{ys}(\lambda_k, y) \right\},
\end{aligned} \tag{41}$$

$$T_{xs}(y) = \frac{2\tau_{xs}^1}{\lambda_1^2 L'(\lambda_1)} T_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\tau_{xs}^k}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} T_{xs}(\lambda_k, y) \right\},$$

$$T_{ys}(y) = \frac{2\tau_{ys}^1}{\lambda_1 L'(\lambda_1)} T_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\tau_{ys}^k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} T_{ys}(\lambda_k, y) \right\}.$$

Здесь $M_{xs}(y)$, $M_{xys}(y)$, $\Phi_{xs}(y)$, $K_{xs}(y)$, $Q_{xs}(y)$, $Q_{ys}(y)$, $T_{xs}(y)$, $T_{ys}(y)$ – раскладываемые функции, заданные на отрезке $[-1, 1]$, а числа μ_{xs}^k , μ_{xys}^k , φ_{xs}^k , χ_{xs}^k , q_{xs}^k , q_{ys}^k , τ_{xs}^k , τ_{ys}^k находятся следующим образом:

$$\mu_{xs}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} M_{xs}(y) M_{xs}^k(y) dy; \quad \mu_{xys}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} M_{xys}(y) M_{xys}^k(y) dy,$$

$$\varphi_{xs}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xs}(y) \Phi_{xs}^k(y) dy, \tag{42}$$

$$\chi_{xs}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xs}(y) K_{xs}^k(y) dy; \quad q_{xs}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{xs}(y) Q_{xs}^k(y) dy; \quad q_{ys}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{ys}(y) Q_{ys}^k(y) dy,$$

$$\tau_{xs}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} T_{xs}(y) T_{xs}^k(y) dy; \quad \tau_{ys}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} T_{ys}(y) T_{ys}^k(y) dy.$$

Пусть раскладываемыми функциями в формулах (42) являются соответствующие порождающие функции, т. е. $M_{xs}(y) = M_{xs}(t, y)$, $M_{xys}(y) = M_{xys}(t, y)$ и т. д., где t – вещественный параметр. Тогда в соответствии с формулами (39) ($k = 1, 2, \dots$):

$$\mu_{xs}^k = \frac{t^2 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \quad \mu_{xys}^k = \frac{tL(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \quad \varphi_{xs}^k = \frac{L(t)}{t(t^2 - \lambda_k^2)}; \quad \chi_{xs}^k = \frac{tL(t)}{t^2 - \lambda_k^2},$$

$$q_{xs}^k = \frac{tL(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \quad q_{ys}^k = \frac{t^2 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \quad \tau_{xs}^k = \frac{t^3 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}; \quad \tau_{ys}^k = \frac{t^2 L(t)}{t^2 - \lambda_k^2}. \tag{43}$$

Подставляя числа (43) в формулы (41), получим ($|y| < 1$, λ_1 – действительный корень, $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ – комплексные корни из первой координатной четверти):

$$M_{xs}(t, y) = \frac{2t^2 L(t)}{L'(\lambda_1) \lambda_1 (t^2 - \lambda_1^2)} M_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^2 L(t)}{L'(\lambda_k) \lambda_k (t^2 - \lambda_k^2)} M_{xs}(\lambda_k, y) \right\},$$

$$M_{xys}(t, y) = \frac{2tL(t)}{L'(\lambda_1) (t^2 - \lambda_1^2)} M_{xys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2tL(t)}{L'(\lambda_k) (t^2 - \lambda_k^2)} M_{xys}(\lambda_k, y) \right\},$$

$$\Phi_{xs}(t, y) = \frac{2L(t) \lambda_1^2}{L'(\lambda_1) t (t^2 - \lambda_1^2)} \Phi_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2L(t) \lambda_k^2}{L'(\lambda_k) t (t^2 - \lambda_k^2)} \Phi_{xs}(\lambda_k, y) \right\},$$

$$K_{xs}(t, y) = \frac{2tL(t)}{L'(\lambda_1) (t^2 - \lambda_1^2)} K_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2tL(t)}{L'(\lambda_k) (t^2 - \lambda_k^2)} K_{xs}(\lambda_k, y) \right\}, \tag{44}$$

$$Q_{xs}(t, y) = \frac{2tL(t)}{L'(\lambda_1) (t^2 - \lambda_1^2)} Q_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2tL(t)}{L'(\lambda_k) (t^2 - \lambda_k^2)} Q_{xs}(\lambda_k, y) \right\},$$

$$Q_{ys}(t, y) = \frac{2t^2 L(t)}{L'(\lambda_1)\lambda_1(t^2 - \lambda_1^2)} Q_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^2 L(t)}{L'(\lambda_k)\lambda_k(t^2 - \lambda_k^2)} Q_{ys}(\lambda_k, y) \right\},$$

$$T_{xs}(t, y) = \frac{2t^3 L(t)}{L'(\lambda_1)\lambda_1^2(t^2 - \lambda_1^2)} T_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^3 L(t)}{L'(\lambda_k)\lambda_k^2(t^2 - \lambda_k^2)} T_{xs}(\lambda_k, y) \right\},$$

$$T_{ys}(t, y) = \frac{2t^2 L(t)}{L'(\lambda_1)\lambda_1(t^2 - \lambda_1^2)} T_{ys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2t^2 L(t)}{L'(\lambda_k)\lambda_k(t^2 - \lambda_k^2)} T_{ys}(\lambda_k, y) \right\}.$$

На рис. 6–13 показаны графики раскладываемых функций $M_{xs}(y)$, $M_{xys}(y)$, $\Phi_{xs}(y)$, $K_{xs}(y)$, $Q_{xs}(y)$, $Q_{ys}(y)$, $T_{xs}(y)$, $T_{ys}(y)$ (сплошная линия) и соответствующие им ряды Лагранжа (44) (штриховая линия) при $h = 2$, $\nu = \frac{1}{3}$, $t = 1$.

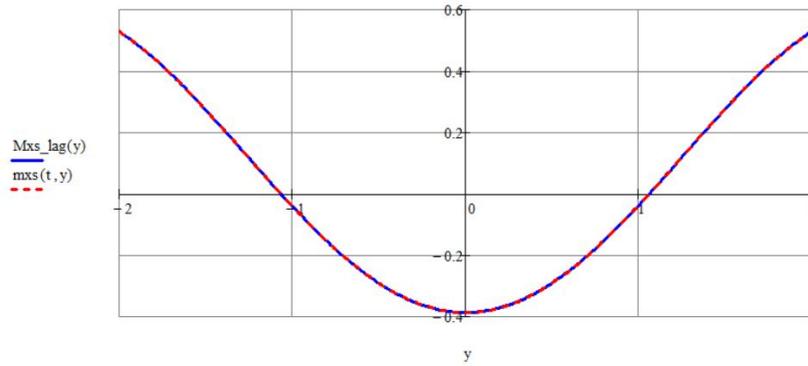


Рис. 6

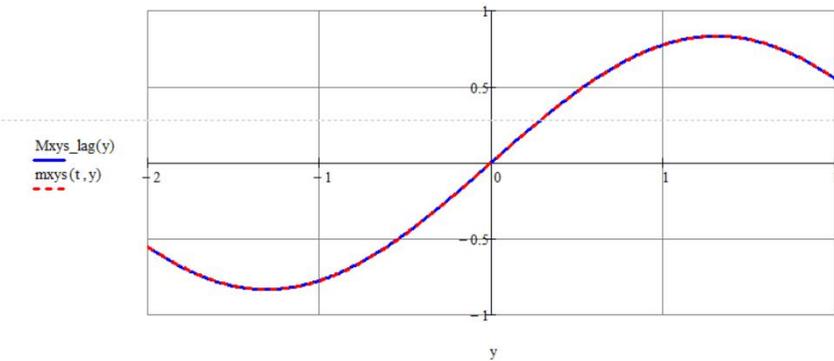


Рис. 7

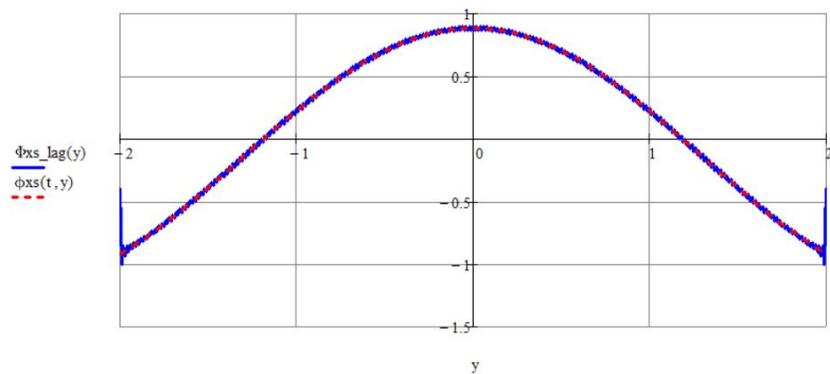


Рис. 8

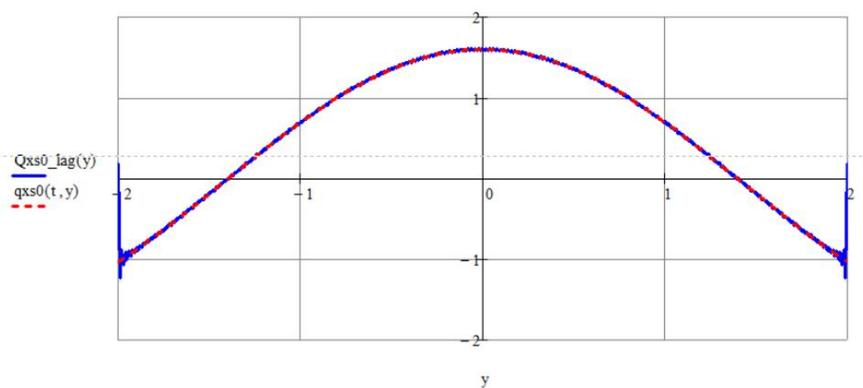


Рис. 9

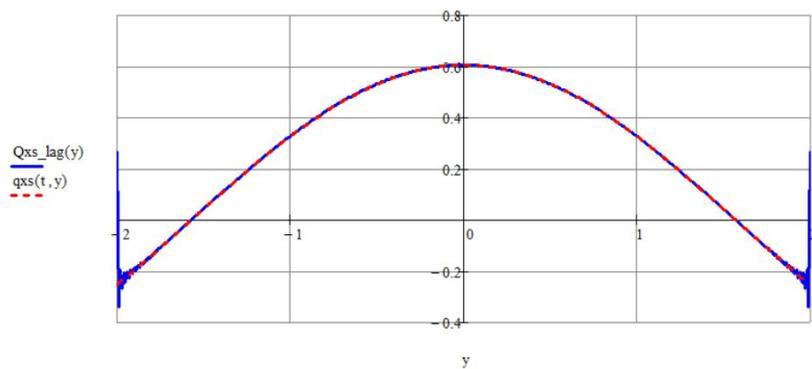


Рис. 10

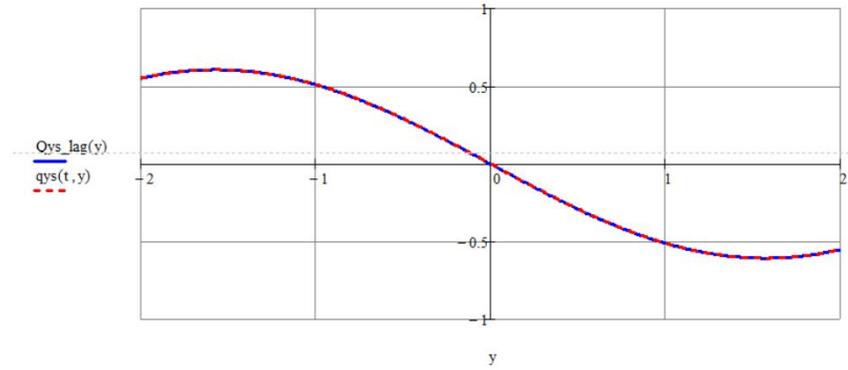


Рис. 11

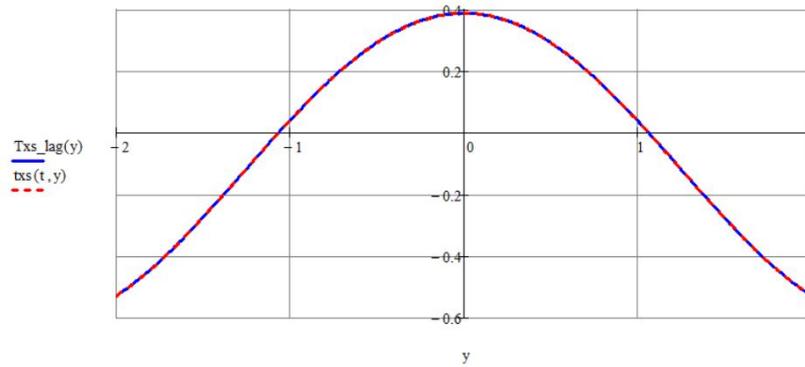


Рис. 12

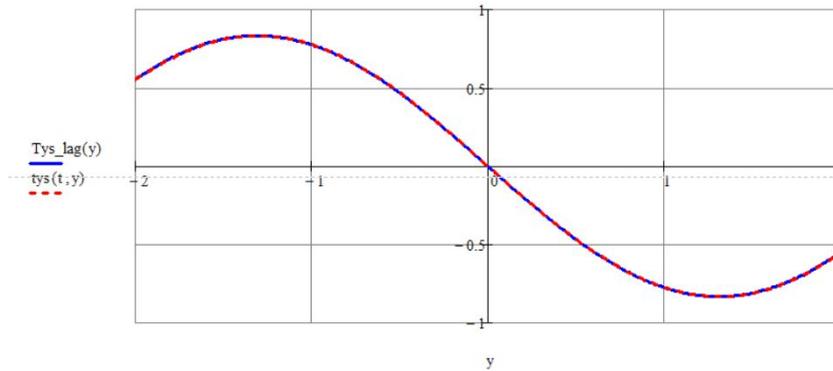


Рис. 13

Функции $W_s^k(y)$, $\Phi_{ys}^k(y)$, $M_{ys}^k(y)$, $K_{ys}^k(y)$, $M_{xs}^k(y)$, $M_{xys}^k(y)$, $\Phi_{xs}^k(y)$, $K_{xs}^k(y)$, $T_{xs}^k(y)$, $T_{ys}^k(y)$ биортогональных систем (см. (23), (39)) можно представить в виде суммы финитных, не равных нулю на отрезке $|y| \leq h$, и нефинитных частей, которые ортогональны ко всем функциям $\{\sin \frac{m}{h} \pi\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos \frac{m}{h} \pi\}_{m=1}^{\infty}$.

При решении краевых задач, как правило, используются финитные части биортогональных функций, поэтому важно знать их явное представление. Приведем их:

$$\begin{aligned}
 w_s^k(y) &= \frac{\nu-1}{2} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k h}; & \varphi_{xs}^k(y) &= \frac{\nu-1}{2} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k h}; & \mu_{xys}^k(y) &= -\frac{1 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h}; \\
 \chi_{xs}^k(y) &= -\frac{1}{2} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k h}; & \mu_{xs}^k(y) &= \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h} - \frac{1}{2}(\delta(y-h) + \delta(y+h)); & & \\
 \tau_{xs}^k(y) &= -\frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h} + \frac{1}{2}(\delta(y-h) + \delta(y+h)),
 \end{aligned} \tag{45}$$

где δ – дельта-функция. Формулы (45) строятся следующим образом. Например, построим функцию $\mu_{xs}^k(y)$. Примем в первой формуле (39) $\lambda = \frac{m}{h}\pi = q_m$ ($m = 1, 2, \dots$). Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_{xs}(q_m, y) M_{xs}^k(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}$$

или

$$\frac{(\nu-1)^2}{2} q_m^4 h (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(q_m y) \mu_{xs}^k(y) dy = \frac{-\frac{1}{2}(\nu-1)^2 q_m^6 h}{q_m^2 - \lambda_m^2}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(q_m y) \mu_{xs}^k(y) dy = -\frac{(-1)^m q_m^2}{q_m^2 - \lambda_m^2}.$$

Слева стоит преобразование Фурье с параметром q_m функции $\mu_{xs}^k(y)$. Используя обратное преобразование Фурье, получим функцию $\mu_{xs}^k(y)$.

Если раскладываемые функции, стоящие в правых частях формул (32), (41) и первоначально заданные на отрезке $[-1, 1]$, продолжить периодически вне отрезка $[-1, 1]$ с периодом, равным 4, то для чисел $w_s^k, \varphi_{xs}^k, \chi_{xs}^k, \mu_{xs}^k, \mu_{xys}^k, \tau_{xs}^k$ можно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 w_s^k &= \int_{-h}^{+h} W_s(y) w_s^k(y) dy; & \varphi_{xs}^k &= \int_{-h}^{+h} \Phi_{xs}^k(y) \varphi_{xs}^k(y) dy; & \chi_{xs}^k &= \int_{-h}^{+h} K_{xs}^k(y) \chi_{xs}^k(y) dy, \\
 \mu_{xs}^k &= \int_{-h}^{+h} M_{xs}^k(y) \mu_{xs}^k(y) dy, & \mu_{xys}^k &= \int_{-h}^{+h} M_{xys}^k(y) \mu_{xys}^k(y) dy, \\
 \tau_{xs}^k &= \int_{-h}^{+h} T_{xs}^k(y) \tau_{xs}^k(y) dy.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Приведем примеры разложений (46) с числами.

Пусть $W_s(y) = y^2 - 1$. По первой формуле (46) находим

$$w_s^k = \frac{2(\lambda_k^2 - \lambda_k^2 h^2 - 2h\lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_k h + 2)}{3\lambda_k^4}. \tag{47}$$

Соответствующее разложение функции $W_s(y) = y^2 - 1$ таково (см. (32)):

$$y^2 - 1 = \frac{2w_s^1 \lambda_1^3}{L'(\lambda_1)} W_s(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2w_s^k \lambda_k^3}{L'(\lambda_k)} W_s(\lambda_k, y) \right\}. \tag{48}$$

Аналогично можно получить такие разложения (см. (41)):

$$\begin{aligned}
y^2 - 1 &= \frac{2\varphi_{xs}^1 \lambda_1^2}{L'(\lambda_1)} \Phi_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\varphi_{xs}^k \lambda_k^2}{L'(\lambda_k)} \Phi_{xs}(\lambda_k, y) \right\}, \\
y^2 &= \frac{2\chi_{xs}^1}{L'(\lambda_1)} K_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\phi_{xs}^k}{L'(\lambda_k)} K_{xs}(\lambda_k, y) \right\}, \\
y^2 - 1 &= \frac{2\mu_{xs}^1}{\lambda_1 L'(\lambda_1)} M_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\mu_{xs}^k}{\lambda_k L'(\lambda_k)} M_{xs}(\lambda_k, y) \right\}, \\
y^3 &= \frac{2\mu_{xys}^1}{L'(\lambda_1)} M_{xys}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\mu_{xys}^k}{L'(\lambda_k)} M_{xys}(\lambda_k, y) \right\}, \\
y^2 - 1 &= \frac{2\tau_{xs}^1}{\lambda_1^2 L'(\lambda_1)} T_{xs}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{2\tau_{xs}^k}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} T_{xs}(\lambda_k, y) \right\},
\end{aligned} \tag{49}$$

в которых числа

$$\begin{aligned}
\varphi_{xs}^k &= \frac{2(\lambda_k^2 - \lambda_k^2 h^2 - 2h\lambda_k \text{ctg} \lambda_k h + 2)}{3\lambda_k^4}, \quad \chi_{xs}^k = -\frac{\lambda_k^2 h^2 + 2h\lambda_k \text{ctg} \lambda_k h - 2}{\lambda_k^4}, \\
\mu_{xs}^k &= \frac{\lambda_k^2 h^2 - \lambda_k^2 + 2h\lambda_k \text{ctg} \lambda_k h - 2}{\lambda_k^2}, \quad \mu_{xys}^k = \frac{\lambda_k^3 h^3 \text{ctg} \lambda_k h - 3\lambda_k^2 h^2 - 6h\lambda_k \text{ctg} \lambda_k h + 6}{\lambda_k^4}, \\
\tau_{xs}^k &= -\frac{\lambda_k^2 h^2 - \lambda_k^2 + 2h\lambda_k \text{ctg} \lambda_k h - 2}{\lambda_k^2}.
\end{aligned} \tag{50}$$

На рис. 14–19 показаны графики раскладываемых функций $W_s^{(\nu)}(y)$, $\Phi_{xs}(y)$, $K_{xs}(y)$, $M_{xs}(y)$, $M_{xys}(y)$, $T_{xs}(y)$ (сплошная линия) и соответствующие им ряды Лагранжа (49) (штриховая линия) при $\nu = \frac{1}{3}$, $h = 2$.

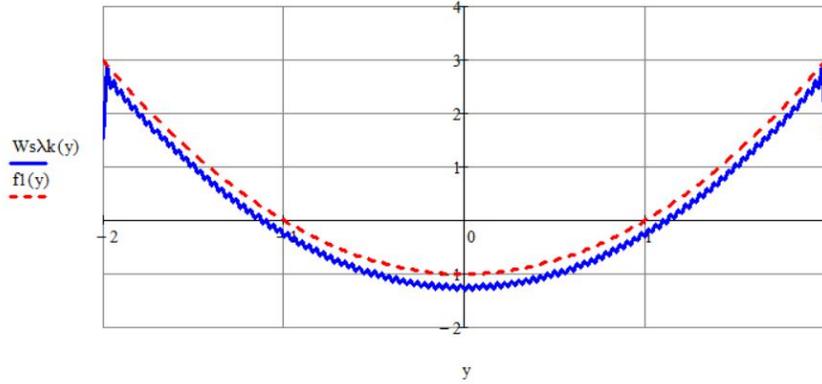


Рис. 14

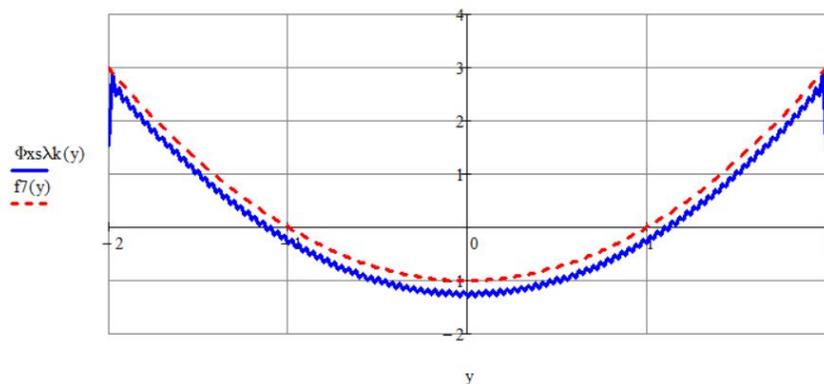


Рис. 15

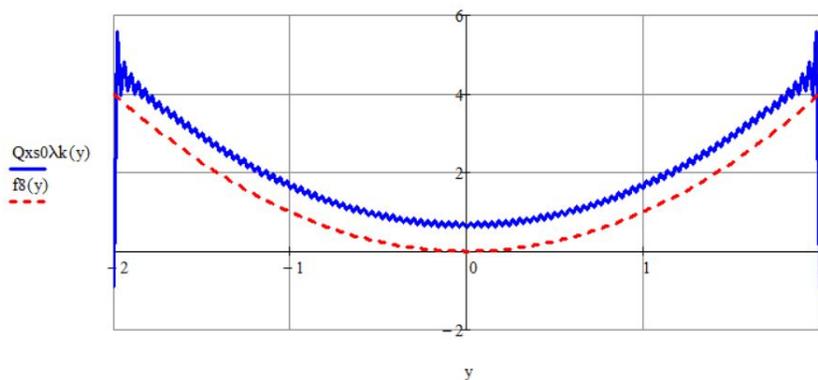


Рис. 16

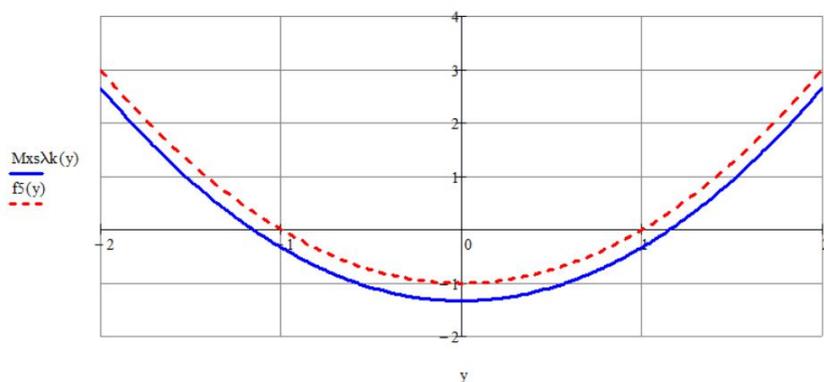


Рис. 17

Опираясь на полученные результаты, можно получить точные аналитические решения различных краевых задач теории упругости для изгиба полуполосы (прямоугольной пластины), продольные стороны которой свободны от закрепления.

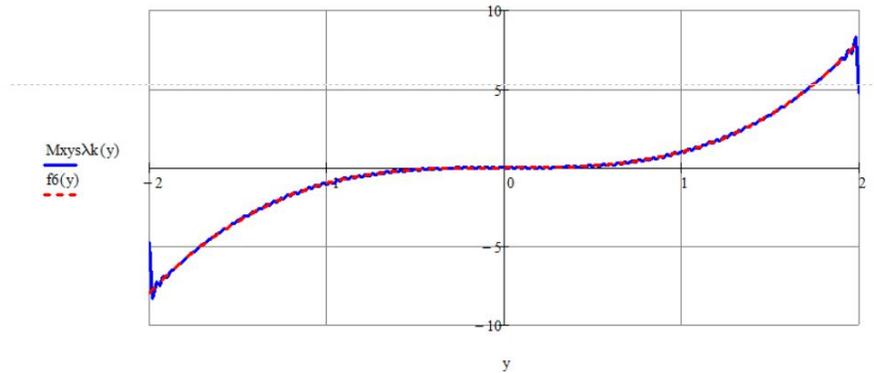


Рис. 18

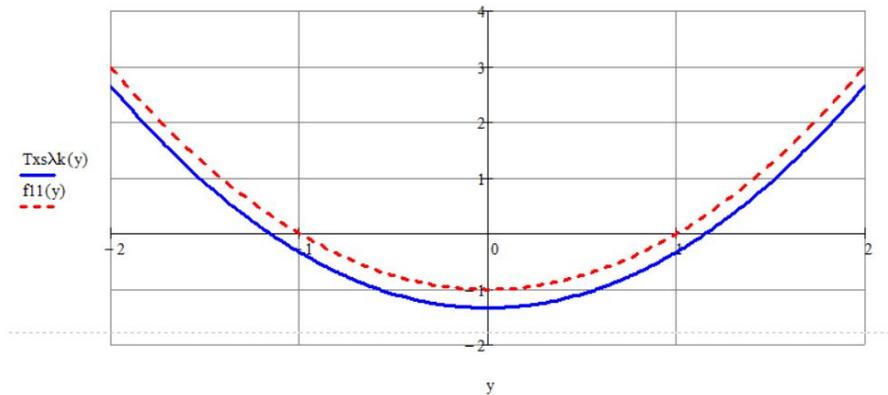


Рис. 19

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям / М. Д. Коваленко // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352. – № 4. – С. 480–482.
- [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МТТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – №5. – С. 136–158.
- [4] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
- [5] Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.

Абруков Денис Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: AbrukovDA@yandex.ru

D. A. Abrukov

**THE PROBLEM OF THE BENDING OF THE SEMI-INFINITE STRIP WITH
FREE LONGITUDINAL SIDES. THE LAGRANGE EXPANSIONS ON THE
FADLE-PAPKOVICH FUNCTIONS**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Examples of expansions Lagrange function of Fadl-Papkovich arising in the solution of a boundary value problem of the bending of the semistrip, of which two opposite ends of the free and the boundary conditions at the end may be different. Based on the results of [1-3] for the planar problem of elasticity theory, you can get closed analytic solutions of various boundary value problems of the theory of bending of thin plates, exact solutions which were not found. These solutions are presented in the form of series of functions of Fadl-Papkovich. Decision coefficients of expansions are using systems of functions, biorthogonol to the functions of the Fadl-Papkovich. Functions Fadl-Papkovich are a generalization of trigonometric Fourier series and the expansion in him (decomposition of Lagrange) are a generalization of expansions in trigonometric Fourier series.

Keywords: plate bending, Fadle-Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] *Kovalenko, M. D.* Lagrange's decomposition and uncommon zero representations according to uniform decisions / M. D. Kovalenko // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1997. – Vol. 352. – № 4. – P. 480–482.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich's functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.
- [3] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.
- [4] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [5] *Tymoshenko, S. P.* Plates and shells / S. P. Tymoshenko, S. Voynovskiy-Krieger. – M. : Nauka, 1966. – 636 p.

Abrukov, Denis Alexandrovich

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Ю. В. Немировский

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ ОДНОРОДНЫЕ И КОМПОЗИТНЫЕ БАЛКИ

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН

Аннотация. Рассматриваются различные типы слоисто-волоконистых балок из жестко-пластических материалов при одних и тех же условиях нагружения и закрепления. Вводится понятие эквивалентных конструкций с одинаковой несущей способностью. В рамках подкласса эквивалентных конструкций разработан подход, позволяющий осуществлять отбор наилучших изделий с точки зрения веса и стоимости.

Ключевые слова: слоистые, слоисто-волоконистые балки, эквивалентные конструкции, жестко-пластические материалы, несущая способность, минимальный вес, стоимость.

УДК: 539.374

Балочные элементы широко используются как самостоятельные несущие элементы (пролеты мостов, трубо- и газопроводов, временные и постоянные переправы, подкрановые балки и др.), так и в составе многих промышленных и технических объектов в качестве скелетной основы (каркасы зданий, сооружений или плоских защитных преград, остовы надводных кораблей и т. д.). В последние десятилетия при создании технических устройств и промышленных сооружений стали активно использоваться композитные конструкции (слоистые, армированные, слоисто-волоконистые). При этом, естественно, возникает вопрос оценки пригодности и сравнительных качеств рассматриваемых типов конструкций при одинаковых эксплуатационных требованиях. В данной статье этот вопрос будет рассмотрен на основе требования одинаковой несущей способности различных типов композитных балок постоянных поперечных сечений при одинаковых условиях их нагружения и закрепления. Будем предполагать, что все материалы, из которых изготавливаются разнообразные типы композитных балок, соответствуют модели идеального жесткопластического тела. Тогда конструкции, нагружаемые и закрепляемые вышеуказанным способом, будут эквивалентными с точки зрения несущей способности, и вопрос будет заключаться в разработке других полезных качеств отбора конструкций из рассматриваемого множества.

1. Слоистые конструкции из одинаково сопротивляющихся растяжению-сжатию изотропных материалов. Большинство существующих конструкционных материалов обладает свойством практически одинакового сопротивления растяжению и сжатию, и существующие современные технологии (склейки, сварки взрывом, диффузионной сварки и др.) позволяют создавать слоистые конструкции из практически любых наборов материалов [1], [2]. Тогда для слоистых балок с двойной симметричной структурой сечения (рис. 1) безразмерные характеристики предельного изгибающего момента M_0 , веса W и стоимости C будут определяться выражениями

Поступила 08.06.2014

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №14-01-00102а.

$$M_0 = 4 \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} S_i, \quad S_i = \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(z) z dz, \quad (1)$$

$$W = 4 \sum_{i=1}^n \rho_i F_i, \quad F_i = \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(z) dz, \quad (2)$$

$$C = 4 \sum_{i=1}^n \gamma_i \rho_i F_i, \quad (h = 0), \quad (3)$$

$$\sigma_{0i} = \frac{\bar{\sigma}_{0i}}{\bar{\sigma}_{00}}, \quad \rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_0}, \quad \gamma_i = \frac{\bar{\gamma}_i}{\bar{\gamma}_0},$$

$$\bar{M}_0 = \frac{\bar{M}_0}{\bar{M}_{00}}, \quad \bar{b}_i = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_0}, \quad \bar{h}_i = \frac{\bar{H}_i}{\bar{H}_0}, \quad (4)$$

$$\bar{M}_{00} = 4\bar{\sigma}_{00}\bar{b}_{00}\bar{H}_0,$$

где $\bar{\sigma}_{00}$, $\bar{\rho}_0$, $\bar{\gamma}_0$ – предел текучести, удельный вес и удельная стоимость материала эталонной балки прямоугольного сечения с размерами $2\bar{b}_{00} \times 2\bar{H}_0$.

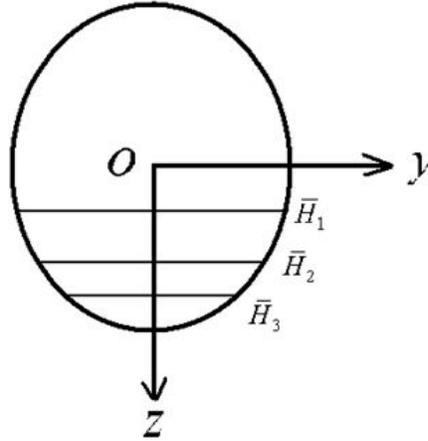


Рис. 1

Для эталонной балки длины l , нагружаемой равномерно распределенной нагрузкой, амплитуда предельной нагрузки будет равна

$$\bar{q}_0^* = \frac{2\bar{M}_{00} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}{l^2} - 4\bar{\gamma}_0 \bar{b}_{00} \bar{H}_0, \quad (5)$$

где параметры α и β определяют характер закрепления балки [3], [4], [5]:
 $\alpha = \beta = 1$ – оба края шарнирно опертые; $\alpha = \beta = 2$ – оба края защемлены; $\alpha = 1$,
 $\beta = 2$ – левый край шарнирно оперт, правый защемлен; $\alpha = 2$, $\beta = 1$ – левый край
 защемлен, правый шарнирно оперт.

Для слоистой балки амплитуда предельной нагрузки будет определяться равенством

$$\bar{q}^* = \frac{2\bar{M}_0 (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}{l^2} - 4 \sum \bar{\rho}_i \bar{F}_i \bar{S}_i, \quad (6)$$

$$\bar{F}_i = \int_{\bar{H}_{i-1}}^{\bar{H}_i} \bar{b}_i(z) dz, \quad \bar{M}_0 = 4 \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_{0i} \bar{S}_i, \quad \bar{S}_i = \int_{\bar{H}_{i-1}}^{\bar{H}_i} \bar{b}_i(z) z dz.$$

Равенство

$$\bar{q}^* = \bar{q}_0^* \quad (7)$$

выделяет подкласс эквивалентных по несущей способности балок. И если в рамках этого подкласса определять конструкции минимального веса или стоимости, то решение такой задачи приводится к решению классической изопериметрической задачи вариационного исчисления [6]. В частном подклассе конструкций с кусочно-линейным изменением ширины i -го слоя будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{b}_i(z) &= \bar{a}_i + \bar{c}_i z, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \bar{a}_i &= \frac{\bar{b}_{i-1}^0 \bar{H}_i - \bar{b}_i^0 \bar{H}_{i-1}}{\bar{H}_i - \bar{H}_{i-1}}, \quad \bar{c}_i = \frac{\bar{b}_i^0 - \bar{b}_{i-1}^0}{\bar{H}_i - \bar{H}_{i-1}}, \quad (\bar{H}_0 = 0), \quad \bar{H}_i \geq \bar{H}_{i-1}, \\ \bar{S}_i &= \left[\frac{1}{2} (\bar{H}_i + \bar{H}_{i-1}) + \frac{1}{3} (H_i^2 + H_i H_{i-1} + H_{i-1}^2) \right] (\bar{b}_i^0 - \bar{b}_{i-1}^0), \\ \bar{F}_i &= \frac{1}{2} (\bar{b}_i^0 + \bar{b}_{i-1}^0) (\bar{H}_i - \bar{H}_{i-1}) \end{aligned}$$

\bar{b}_i^0 , \bar{b}_{i-1}^0 , \bar{H}_i , \bar{H}_{i-1} – постоянные. В этом случае задача минимума веса или стоимости является стандартной задачей параметрической оптимизации.

2. Слоистые балки из разносопротивляющихся материалов. Существует множество материалов, обладающих свойством существенно разного сопротивления при растяжении и сжатии [7], [8], [9] (чугуны, бетоны, пластики, титаны и др.). Некоторые алюминиевые, медные, никелевые и ферросплавы приобретают свойство разносопротивляемости в результате специальной технологической обработки [8]. Отмечается, что свойство разносопротивляемости особенно значительно проявляется при неупругом деформировании. Поэтому представляется интересным рассмотреть проблему эквивалентных по несущей способности конструкций при наличии в них разносопротивляющихся материалов. В рамках рассматриваемой модели идеальных жесткопластических материалов будем считать пределы текучести при растяжении σ_0^+ и сжатии σ_0^- различными. Для определенности рассмотрим трехслойные шарнирно опертые балки, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой. В таком случае поперечное сечение балки будет иметь вид, изображенный на рис. 2, и в предельном состоянии продольное усилие N_0 ($= 0$) и предельный изгибающий момент будут определяться выражениями

$$N_0 = -2\sigma_{03}^- \int_{-H_4}^{-H_3} b_3(z) dz - 2\sigma_{01}^- \int_{-H_3}^0 b_1^-(z) dz + 2\sigma_{01}^+ \int_0^{H_1} b_1^+(z) dz + 2\sigma_{02}^+ \int_{H_1}^{H_2} b_2(z) dz = 0, \quad (8)$$

$$\bar{M}_0 = -2\sigma_{03}^- \int_{-H_4}^{-H_3} b_3(z) z dz - 2\sigma_{01}^- \int_{-H_3}^0 b_1^-(z) z dz + 2\sigma_{01}^+ \int_0^{H_1} b_1^+(z) z dz + 2\sigma_{02}^+ \int_{H_1}^{H_2} b_2(z) z dz = 0. \quad (9)$$

Предельная нагрузка в этом случае будет равна

$$\bar{q}^* = \frac{8\bar{M}_0}{l^2} - \bar{W}, \quad (10)$$

а вес и стоимость конструкции будут определяться выражениями

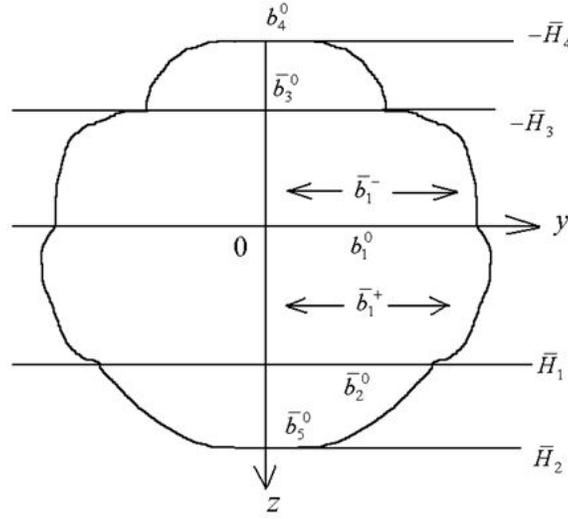


Рис. 2

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \sum_{j=1}^3 \bar{\rho}_j \bar{F}_j, \quad \bar{C} = \sum_{j=1}^3 \bar{\gamma}_j \bar{\rho}_j \bar{F}_j, \\ \bar{F}_1 &= \int_{-\bar{H}_3}^0 \bar{b}_1^-(z) dz + \int_0^{\bar{H}_1} \bar{b}_1^+(z) dz, \\ \bar{F}_2 &= \int_{\bar{H}_1}^{\bar{H}_2} \bar{b}_2(z) dz, \quad \bar{F}_3 = \int_{-\bar{H}_4}^{-\bar{H}_3} \bar{b}_3(z) dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Пользуясь условием эквивалентности (7) и выражениями (8)–(11), здесь также задачу минимума веса или стоимости слоистой конструкции с помощью известных процедур [6] задачи минимума веса или стоимости рассматриваемых слоистых конструкций можно свести к классическим изопериметрическим задачам. При использовании кусочно-линейной аппроксимации контура поперечного сечения будем иметь:

$$\begin{aligned} b_1^-(z) &= \frac{1}{H_3} [(b_1^0 - b_3^0)z + b_1^0 H_3], \\ b_1^+(z) &= \frac{1}{H_1} [(b_2^0 - b_1^0)z + b_1^0 H_1], \\ b_2(z) &= \frac{1}{(H_2 - H_1)} [(b_5^0 - b_1^0)z + b_2^0 H_2 - b_5^0 H_1], \\ b_3(z) &= \frac{1}{(H_4 - H_3)} [(b_3^0 - b_4^0)z + b_3^0 H_4 - b_4^0 H_3]. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в формулы (8)–(11) и вычисления соответствующих интегралов получим в конечном итоге задачу параметрической оптимизации.

3. Слоисто-волокнистые конструкции. Часто композитные конструкции в своем составе помимо слоев однородных изотропных материалов содержат слои, армированные высокопрочными волокнами. В итоге сечение слоисто-волокнистой балки может иметь вид, изображенный на рис. 3.

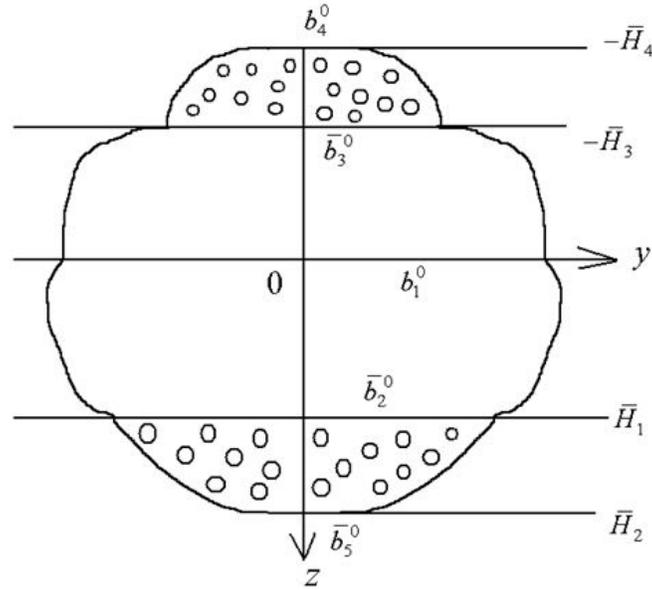


Рис. 3

В этом случае, используя методологию моделирования армированного слоя, описанную в [10], получим задачу, описанную в предыдущем пункте, если вместо σ_{01}^- , ρ_1 , σ_{01}^+ , ρ_2 , γ_2 будем использовать выражения

$$\sigma_{01}^- = \omega_1 \sigma_{01}^c + (1 - \omega_1) \sigma_{01}^a, \quad \rho_1 = \omega_1 \rho_1^c + (1 - \omega_1) \rho_1^a, \quad \gamma_1 = \omega_1 \gamma_1^c + (1 - \omega_1) \gamma_1^a,$$

$$\sigma_{02}^+ = \omega_2 \sigma_{02}^c + (1 - \omega_2) \sigma_{02}^a, \quad \rho_2 = \omega_2 \rho_2^c + (1 - \omega_2) \rho_2^a, \quad \gamma_2 = \omega_2 \gamma_2^c + (1 - \omega_2) \gamma_2^a.$$

Здесь индексы “с” и “а” относятся к материалам связующего и арматуры в армированном слое, ω_1 , ω_2 – коэффициенты армирования. При указанных заменах остальные формулы будут подобны формулам предыдущего пункта.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Дерибас, А. А.* Физика упрочнения и сварки взрывом / А. А. Дерибас. – Новосибирск : Наука, 1972. – 188 с.
- [2] *Король, В. К.* Основы производства многослойных металлов / В. К. Король, М. С. Гильдергорн. – М. : Metallurgia, 1978. – 237 с.
- [3] *Саймондс, П.* Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа / П. Саймондс // Механика. – 1956. – № 4. – С. 90–108.
- [4] *Иванов, Г. В.* Динамика жестко-пластической системы перекрестных связей / Г. В. Иванов, Ю. В. Немировский, Ю. Н. Работнов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 2. – С. 51–57.
- [5] *Комаров, К. Л.* Динамика жестко-пластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 1984. – 216 с.
- [6] *Ахиезер, Н. И.* Лекции по вариационному исчислению / Н. И. Ахиезер. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 248 с.
- [7] *Лихарев, К. К.* Сопоставление характеристик материалов при одноосном растяжении и сжатии / К. К. Лихарев // Расчеты на прочность в машиностроении. – М. : Машгиз, 1958. – С. 168–196.
- [8] *Конюшко, З. М.* Исследование прочности термически обработанной стали при растяжении и сжатии / З. М. Конюшко // Вестник машиностроения. – 1955. – № 2.
- [9] *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – М. ; Тула : ТулГУ, 2000. – 179 с.
- [10] *Немировский, Ю. В.* Динамический изгиб армированных пластических стержней / Ю. В. Немировский // Динамика сплошной среды. – 1979. – Вып. 41. – С. 38–42.

Немировский Юрий Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Y. V. Nemirovsky

EQUIVALENT TO THE LIMIT OF HOMOGENEOUS AND COMPOSITE BEAMS

Institute of Theoretical and Applied Mechanics. SA Christianovich SB RAS

Abstract. The different types of layered fibrous beams of rigid-plastic materials under the same conditions of loading and securing. Introduce the concept of equivalent structures with the same carrying capacity. Within subclass equivalent structures developed an approach that allows for selection of the best products in terms of weight and cost.

Keywords: layered, layered fiber beams, equivalent structures, rigid-plastic materials, load capacity, minimum weight, cost.

REFERENCES

- [1] *Deribas, A. A.* Physics of hardening and explosion welding / A. A. Deribas. – Novosibirsk : Science, 1972. – 188 p.
- [2] *King, V. K.* Gildergorn MS Basics of multilayer metal / V. K. King. – M. : Metallurgy, 1978. – 237 p.
- [3] *Symonds, P.* Large plastic deformation of bars under the load of explosive type / P. Symonds // *Mechanic*. – 1956. – № 4. – P. 90–108.
- [4] *Ivanov, G. V.* Dynamics of rigid-plastic system of cross-links / G. V. Ivanov, Y. V. Nemirovsky, Yu. N. Rabotnov // *Math. AN SSSR. OTN. Mechanics and Mechanical Engineering*. – 1963. – № 2. – P. 51–57.
- [5] *Komarov, K. L.* Dynamics of rigid-plastic structural elements / K. L. Komarov, Y. V. Nemirovsky. – Novosibirsk : Nauka, 1984. – 216 p.
- [6] *Akhiezer, N. I.* Lectures on the calculus of variations / N. I. Akhiezer. – M. : GITTL, 1955. – 248 p.
- [7] *Likharev, K. K.* Comparing the performance of materials under uniaxial tension and compression / K. K. Liharev // *Calculations of strength in engineering*. – M. : Mashgiz, 1958. – P. 168–196.
- [8] *Konyushko, Z. M.* Strength of thermally treated steel in tension and compression / Z. M. Konyushko // *Bulletin of Mechanical Engineering*. – 1955. – № 2.
- [9] *Matchenko, N. M.* Deformation theory raznosoprotivlyayuschih materials. Defining relations / N. M. Matchenko, A. A. Treshchev. – M. ; Tula : Tula State University, 2000. – 179 p.
- [10] *Nemirovsky, Y. V.* Dynamic bending reinforced plastic rods / Y. V. Nemirovsky // *Continuum Dynamics*. – 1979. – Issue 41. – P. 38–42.

Nemirovsky, Yuri Vladimirovich

Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics. SA Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

И. Т. Вохмянин, Ю. В. Немировский

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК С УСЛОВИЕМ ТЕКУЧЕСТИ МИЗЕСА

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)*

Аннотация. Получены полные и точные решения задач определения несущей способности и оптимального проектирования шарнирно опертой жесткопластической круглой пластинки под действием ступенчатого равномерно распределенного давления. Выполнен анализ решений задач и выявлены особенности напряженно-деформированного предельного состояния пластинки при различных значениях параметра нагружения.

Ключевые слова: пластинка, условие текучести, предельное состояние, критерий оптимального проектирования, толщина, вес.

УДК: 624.072:539.4

Исследованию предельных состояний и оптимальному проектированию круглых пластинок на основе модели идеального жесткопластического материала посвящены многие работы. Получены статические и кинематические оценки предельных нагрузок. Точные решения задач предельного равновесия крайне малочисленны и основаны главным образом на условии текучести Треска для пластин под действием равномерно распределенного давления. Применение условия текучести Треска с более сложными нагрузками и граничными условиями затруднено необходимостью определения границ многочисленных режимов деформирования. Свободное от такого недостатка условие текучести Мизеса приводит к более сложным дифференциальным уравнениям, в частности, имеющим особенности и неопределенности. Поставлена задача о предельном состоянии круглой шарнирно опертой жесткопластической пластинки под действием ступенчатого равномерно распределенного давления на основе условия текучести Мизеса в обобщенных моментах. После раскрытия неопределенности в одном из обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений получен недостающий начальный параметр, равный значению правой части уравнения в начальной точке интегрирования, для выполнения одного из граничных условий. В результате получено точное решение задачи о несущей способности пластинки. Полученное решение положено в основу оптимального проектирования пластинки переменной толщины минимального веса. Поставлена задача оптимального проектирования пластинки на основе критерия Шилда. Полученная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений пятого порядка имеет неопределенность правой части. Показано, что определение поля скоростей аналогично определению поля скоростей в задаче о несущей способности пластинки. В результате получено точное решение задачи оптимального проектирования пластинки, для которой статически допустимо поле обобщенных моментов совместно с кинематически допустимым полем скоростей перемещений. Выявлена

эффективность оптимальных проектов в зависимости от параметра нагружения. Результаты численного решения задач представлены на рисунках.

Введение. Определению несущей способности жесткопластических шарнирно опертых круглых пластинок на основе условия текучести Треска посвящены работы [1], [2]. Другие решения на основе условия текучести Треска связаны с трудоемкими вычислениями границ режимов пластичности и практически отсутствуют [3]. Использование условия текучести Мизеса не требует определения границ режимов пластичности, но приводит к необходимости исследования сингулярных особенностей краевых задач. Точные решения задач о несущей способности шарнирно опертых и жестко заделанных круглых пластинок под действием неравномерного давления на основе условия текучести Мизеса получены в работах [4], [5].

Оптимальному проектированию жесткопластических элементов конструкций посвящен ряд работ [6], [7], [8]. В работе [9] получен критерий оптимального проектирования жесткопластических пластин и оболочек минимального веса, на основании которого в работе [10] решены задачи оптимального проектирования круглых пластинок под действием равномерно распределенного давления без построения кинематически допустимого поля скоростей совместно с допустимым статическим полем обобщенных усилий и моментов.

В настоящей работе получены точные численные решения задач о несущей способности и оптимальном проектировании круглых шарнирно опертых пластинок под действием ступенчатого равномерно распределенного давления в пределе, стремящемся к сосредоточенной силе, с построением совместных кинематически допустимых полей скоростей деформаций и статически допустимых полей обобщенных силовых факторов.

1. Постановка задачи о несущей способности пластинки. Рассмотрим шарнирно опертую по краю круглую пластинку постоянной толщины $2H_0$ радиуса R , выполненную из идеального жесткопластического материала под действием неравномерно распределенного давления $P(r)$. Предполагается, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью (r, φ) цилиндрической системы координат, ось z которой направлена вниз, нормальное напряжение $\sigma_z = 0$.

Уравнения равновесия пластинки в безразмерных величинах имеют вид [1]

$$\frac{dq}{dx} + \frac{q}{x} + ph_0 = 0, \quad \frac{dm_r}{dx} - \frac{(m_\varphi - m_r)}{x} - \frac{2q}{h_0} = 0, \quad (1)$$

где

$$m_r = M_r/M_0, \quad m_\varphi = M_\varphi/M_0, \quad h_0 = H_0/R, \quad x = r/R,$$

$$p = P/(2\sigma_0 h_0^2), \quad q = Q_r/(2\sigma_0 H_0).$$

Здесь P – интенсивность приложенной нагрузки, Q_r – перерезывающая сила, M_r и M_φ – изгибающие моменты, $M_0 = \sigma_0 H_0^2$ – предельный момент, σ_0 – предел текучести материала пластинки.

Кинематические соотношения Кирхгофа для скоростей деформаций ε_r и ε_φ при поперечном изгибе пластинки [1, 11]:

$$\varepsilon_r = z_1 \kappa_r, \quad \varepsilon_\varphi = z_1 \kappa_\varphi, \quad \kappa_r = -\frac{h_0^2}{2} \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \kappa_\varphi = -\frac{h_0^2}{2x} \frac{dw}{dx}, \quad z_1 = \frac{z}{H},$$

$$w = W/H_0, \quad (2)$$

где W – скорость прогиба.

Условие текучести Мизеса [11]:

$$m_r^2 - m_r m_\varphi + m_\varphi^2 = 1. \quad (3)$$

Ассоциированный закон течения с условием (3)

$$\kappa_r = \lambda(2m_r - m_\varphi), \quad \kappa_\varphi = \lambda(2m_\varphi - m_r). \quad (4)$$

Давление на пластинку равномерно распределено по кругу с радиусом $r_0 \leq R$ (ступенчатая равномерно распределенная нагрузка):

$$p = a \text{ при } 0 \leq x \leq \xi, p = 0 \text{ при } \xi < x \leq 1, \xi = r_0/R, \quad (5)$$

где a – безразмерный параметр нагрузки, требуется определить предельное значение $a = p_*$.

Семь уравнений (1)–(4) составляют полную систему уравнений для решения задачи о несущей способности пластинки с определением семи неизвестных – $m_r, m_\varphi, \kappa_r, \kappa_\varphi, w, \lambda, p_*$. Сведем решение полученной системы уравнений для определения параметра нагрузки p_* к решению краевой задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка. Для этого преобразованием продифференцируем уравнение (3) и определим из него производную $\partial m_\varphi / \partial x$, обеспечив выполнение условия текучести (3) выбором граничных условий, так как производная от выражения (3) равна нулю, исключим множитель λ в законе течения (4) и воспользуемся гипотезой Кирхгофа (2), в результате получим каноническую систему уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f, \quad (6)$$

где введены вектор-столбцы переменных $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)'$ (штрих означает транспонирование) и правых частей $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)'$, причем

$$y_1 = q, y_2 = m_r, y_3 = m_\varphi, y_4 = dw/dx, y_5 = w,$$

$$f_1 = -\frac{y_1}{x} - ph_0, \quad f_2 = \frac{(y_3 - y_2)}{x} + \frac{2y_1}{h_0}, \quad f_3 = -\frac{(2y_2 - y_3)}{(2y_3 - y_2)} f_2,$$

$$f_4 = \frac{(2y_2 - y_3)}{(2y_3 - y_2)} \frac{y_4}{x}, \quad f_5 = y_4.$$

Известные граничные условия с шарнирно опертым краем пластинки [1], [4]:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 1,$$

$$y_2(1) = 0, \quad y_4(0) = 0, \quad y_5(1) = 0, \quad y_5(0) = w_0, \quad (7)$$

где w_0 – произвольное положительное значение скорости прогиба в центре пластинки.

2. Метод решения задачи и числовые примеры. Решением первых трех уравнений системы (6) с первыми тремя граничными условиями (7) варьированием параметра a удовлетворим четвертому граничному условию (7) и определим предельное значение $a = p_*$ параметра нагрузки.

Полученное решение не является полным, так как неизвестно поле скоростей, для определения которого остались два линейных последних уравнения системы (6) и три последних граничных условия (7). Затруднение в определении поля скоростей связано с наличием неопределенности $0/0$ в четвертом уравнении (6) вследствие пятого граничного условия (7), $y_4(0) = 0$. Раскрыв неопределенность, получим равенство

$$3 \frac{dy_4}{dx}(0) \frac{(y_3(0) - y_2(0))}{(2y_3(0) - y_2(0))} = 0. \quad (8)$$

Из равенства (8) следует, что величину правой части $f_4(0) = dy_4(0)/dx$ в начальной точке интегрирования двух последних уравнений (6) можно рассматривать как произвольный

параметр для удовлетворения предпоследнего граничного условия (7), так как, согласно граничным условиям (7), $y_3(0) = y_2(0)$. Значение скорости прогиба $y_5(0) = w_0$ в центре пластинки зададим произвольно, согласно свойству поля скоростей идеального жесткопластического тела. Полученное поле скоростей кинематически допустимо и совместно со статически допустимым полем обобщенных моментов. Следовательно, найденное решение задачи о несущей способности пластинки является полным и точным.

В числовых примерах определены предельные нагрузки (несущие способности) круглых пластинок с параметром $h_0 = 0,02$ под действием нагрузки (5), $\xi = 0,2i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Зависимости предельной нагрузки от параметра ξ показаны на рисунке 1 линией p_* . На рисунках 2–3 приведены зависимости изгибающих моментов и скоростей прогибов соответственно от величины параметра $\xi = 0,2$ и $\xi = 1$.

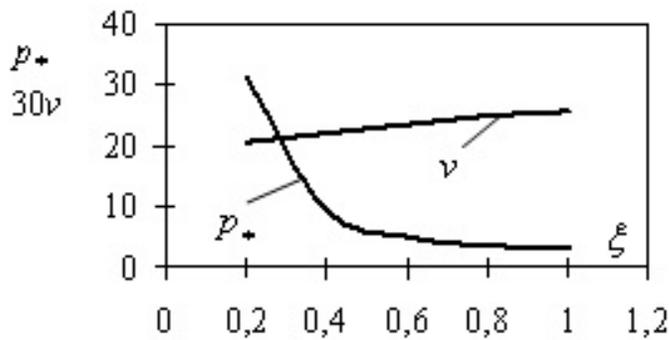


Рис. 1. Зависимости предельной нагрузки $p_*(\xi)$ и относительного веса $v(\xi)$ от параметра нагружения ξ

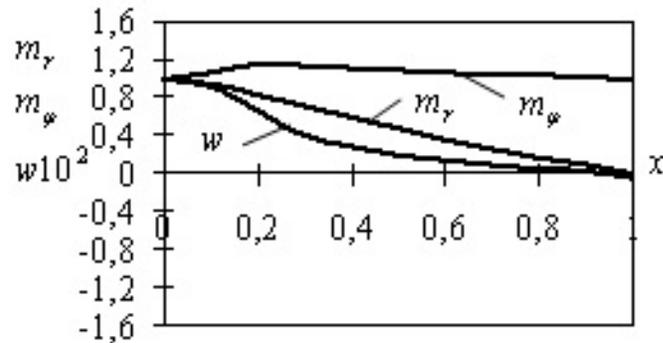


Рис. 2. Зависимости моментов $m_r(x)$, $m_\phi(x)$ и скорости прогиба $w(x)$ от полярного радиуса

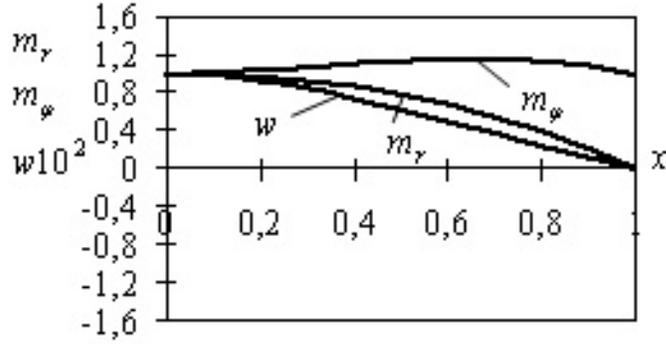


Рис. 3. Зависимости моментов $m_r(x)$, $m_\varphi(x)$ и скорости прогиба $w(x)$ от полярного радиуса

3. Постановка задачи оптимального проектирования пластинки. Оптимальное проектирование пластинки переменной толщины H выполним с условием текучести [4], [11]

$$F = m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 - 1 = 0, \quad (9)$$

где

$$m_1 = M_r/M_{00}, \quad m_2 = M_\varphi/M_{00}, \quad h = H/H_0 = h_p/h_0, \quad h_p = H/R,$$

$$m_1 = m_r/h^2, \quad m_2 = m_\varphi/h^2, \quad M_{00} = 2\sigma_0 H^2,$$

величины m_1 и m_2 являются обобщенными моментами для пластинки переменной толщины, а величины m_r и m_φ – обобщенными моментами пластинки постоянной толщины.

Ассоциированный закон течения с условием (9):

$$\kappa_1 = \lambda_o(2m_1 - m_2), \quad \kappa_2 = \lambda_o(2m_2 - m_1), \quad (10)$$

где обобщенные скорости деформаций κ_1 и κ_2 пластинки переменной толщины связаны с обобщенными скоростями κ_r и κ_φ пластинки постоянной толщины равенствами

$$\kappa_1 = \kappa_r h, \quad \kappa_2 = \kappa_\varphi h. \quad (11)$$

Критерий оптимального проектирования пластинки или оболочки состоит в том, что множитель λ_o в равенствах (10) имеет определенное выражение [9]:

$$\lambda_o = 1/E_1. \quad (12)$$

Здесь

$$E_1 = \sqrt{4a_1 + 2b_1 + c_1} + \sqrt{4a_1 - 2b_1 + c_1},$$

$$a_1 = F_{m_1}^2 + F_{m_1} F_{m_2} + F_{m_2}^2 + (F_{m_3}^2 + F_{m_4}^2 + F_{m_5}^2)/4,$$

$$b_1 = F_{n_1}(2F_{m_1} + F_{m_2}) + F_{n_2}(2F_{m_2} + F_{m_1}) + (F_{n_3} F_{m_3} + F_{n_4} F_{m_4} +$$

$$+ F_{n_5} F_{m_5})/2, \quad c_1 = F_{n_1}^2 + F_{n_1} F_{n_2} + F_{n_2}^2 + (F_{n_3}^2 + F_{n_4}^2 + F_{n_5}^2)/4.$$

Для рассматриваемой пластинки все обобщенные усилия и моменты, за исключением m_1 и m_2 , равны нулю, и условие текучести имеет вид (9) [11]. Поэтому на основании равенств (9) и (12) оптимальное проектирование выполним с множителем в законе течения

$$\lambda_o = h_0^2/2, \quad (13)$$

определенным с точностью до произвольного положительного сомножителя, согласно известному свойству жесткопластического тела.

Выражение для переменной толщины оптимальной по весу пластинки определим с учетом связи обобщенных моментов из равенства (9)

$$h = (m_r^2 - m_r m_\varphi + m_\varphi^2)^{1/4}. \quad (14)$$

Закон течения (10) с учетом равенств (2), (9), (11) и (13) для обобщенных скоростей деформаций, усилий и моментов примет вид

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\lambda_o}{h^3}(2m_1 - m_2), \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{\lambda_o x}{h^3}(2m_2 - m_1). \quad (15)$$

Исключим множитель λ_o из равенств (15), продифференцируем второе равенство (15), воспользуемся первым равенством (15) и продифференцированным равенством (14). В результате получим следующую каноническую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f, \quad (16)$$

где введены вектор-столбцы переменных $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)'$ и правых частей $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)'$, причем

$$y_1 = q, y_2 = m_r, y_3 = m_\varphi, y_4 = dw/dx, y_5 = w,$$

$$f_1 = -\frac{y_1}{x} - ph_0, \quad f_2 = \frac{(y_3 - y_2)}{x} + \frac{2y_1}{h_0}, \quad f_3 = \frac{B}{C}, \quad f_4 = \frac{(2y_2 - y_3) y_4}{(2y_3 - y_2) x},$$

$$f_5 = y_4, \quad B = (y_2 - y_3)a/x - by_1, \quad C = 5y_2^2 + 4y_2y_3 - 4y_3^2,$$

$$a = 14y_2^2 - 23y_2y_3 + 14y_3^2, \quad b = 2(2y_2^2 - 11y_2y_3 + 2y_3^2)/h_0.$$

Четвертое и пятое уравнения совпадают с соответствующими уравнениями краевой задачи предельного равновесия (6), но с различными статически допустимыми полями обобщенных усилий и моментов.

Известные граничные условия с шарнирно опертым краем пластинки [1], [4]:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) - y_3(0) = 0, \quad y_2(0) = m_0,$$

$$y_2(1) = 0, \quad y_4(0) = 0, \quad y_5(1) = 0, \quad y_5(0) = w_0, \quad (17)$$

где величина m_0 является начальным параметром, а w_0 – произвольной положительной величиной.

4. Метод решения задачи оптимального проектирования и числовые примеры. В результате краевая задача (16)–(17) распадается на две задачи. Решением первой краевой задачи с тремя первыми уравнениями (16) и первыми тремя граничными условиями (17) определим статически допустимое поле усилий и моментов, причем варьированием параметра m_0 удовлетворим четвертому граничному условию (17). Из равенства (14) определим переменную толщину h . Решением другой краевой задачи с четвертым и пятым уравнениями равновесия (16), пятым и шестым граничными условиями (17) определим кинематически допустимое

поле скоростей перемещений. При этом шестое граничное условие удовлетворим варьированием значения правой части четвертого уравнения (16) в начальной точке интегрирования, $f_4(0) = f_{40}$, вследствие неопределенности $0/0$ в четвертом уравнении (16), раскрытой, как в задаче о несущей способности на основании пятого граничного условия (17) и равенства (8). Значение скорости прогиба $y_5(0) = w_0$ в центре пластинки зададим произвольно согласно свойству поля скоростей идеального жесткопластического тела. Полученное поле скоростей кинематически допустимо и совместно со статически допустимым полем обобщенных моментов. Следовательно, найденное решение задачи об оптимальном проектировании пластинки является полным и точным. Таким образом, определение поля скоростей прогибов в задаче оптимального проектирования аналогично определению поля скоростей прогибов в задаче о несущей способности пластинки.

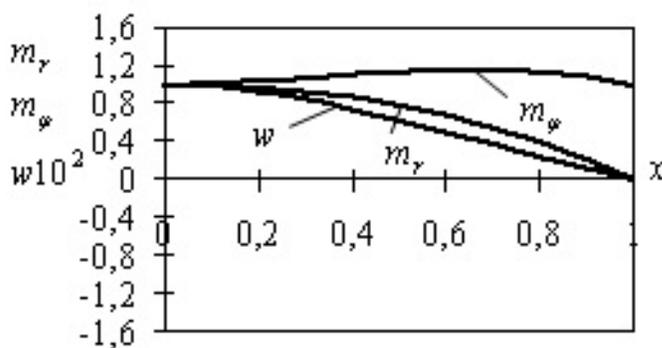


Рис. 4. Зависимости моментов $m_r(x)$, $m_\phi(x)$ и скорости прогиба $w(x)$ от полярного радиуса

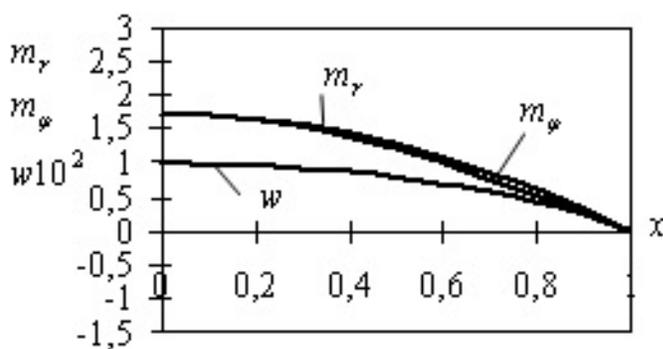


Рис. 5. Зависимости моментов $m_r(x)$, $m_\phi(x)$ и скорости прогиба $w(x)$ от полярного радиуса

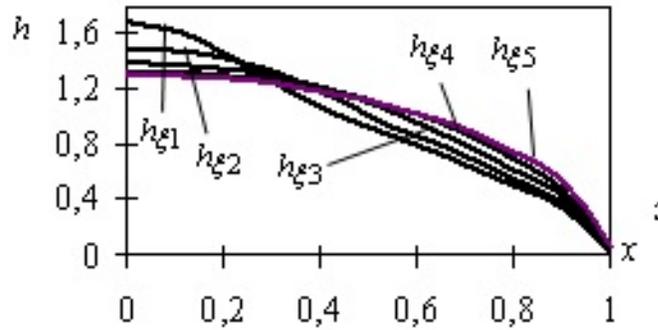


Рис. 6. Зависимости толщины пластинки $h(x)$ от полярного радиуса

Относительный объем (вес) v оптимальной однородной пластинки по сравнению с весом пластинки постоянной толщины и найденной несущей способности определим согласно полю обобщенных моментов из выражения

$$v = 2 \int_0^1 h x dx, \quad (18)$$

где h определено равенством (14).

Расчеты проведены для пластинок с геометрическим параметром $h_0 = 0,02$ и параметрами $\xi_i = 0,2i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) в равенстве (5), соответствующими найденным предельным нагрузкам p_* .

Зависимость относительного веса (18) от параметра ξ показана на рисунке 1 линией v . Зависимости изгибающих моментов и скоростей прогибов от полярного радиуса приведено для значений параметра $\xi = 0,2$ и $\xi = 1$ на рисунках 4 и 5 соответственно. Зависимости толщины оптимальной пластинки минимального веса от полярного радиуса x под действием ступенчатой равномерно распределенной нагрузки (5) показаны линиями $h_{\xi i}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) на рисунке 6.

5. Полученные результаты и выводы. Решения задач о несущей способности и оптимальном проектировании пластинки получены с высокой точностью выполнения всех граничных условий. В задаче о несущей способности пластинки численно определенный из равенств (4) множитель λ неотрицателен во всем интервале интегрирования. Из полученного решения (рис. 2–3) следует, что преобразование пятого граничного условия (7) вследствие раскрытия неопределенности не приводит к изменению его качественного характера, производная dw/dx в центре пластинки сохраняет нулевое значение. Определенная на основе условия Мизеса предельная нагрузка больше предельной нагрузки, полученной на основе условия текучести Треска. Так, в случае $\xi = 1$ первая равна $p_* = 3.26$, а другая, полученная в работе [1], равна $p_* = 3$.

Предельная нагрузка (давление) возрастает с уменьшением площади равномерно распределенного давления. В случае $\xi = 0,02$ предельная нагрузка равна $p_* = 1982$ (на рис. 1 не показана), то есть в 608 раз больше, чем для пластинки под действием равномерно распределенного давления по всей ее площади. Следовательно, в реальной пластинке с приближением нагружения к сосредоточенной силе давление превзойдет предел текучести на сжатие

и произойдет исчерпание местной несущей способности. Для жесткопластической пластинки предельная сосредоточенная сила равна пределу равнодействующей равномерно распределенного давления при стремлении площади его нагружения к нулю. Для предотвращения местного исчерпания несущей способности реальной пластинки в условии текучести Мизеса жесткопластической пластинки следует учесть нормальное поперечное напряжение, то есть обжатие нормали. В такой постановке на основе условия текучести Мизеса в обобщенных усилиях и моментах задача определения предельной сосредоточенной силы в центре круглой пластинки остается нерешенной.

В задаче оптимального проектирования полученный вес меньше веса пластинки постоянной толщины (рис. 1). Следовательно, критерий, доказанный на основе необходимого условия экстремума веса Эйлера-Остроградского (достаточное условие минимума веса остается неопределенным) в работе [9] и совпадающий с критерием Шилда [7], доставляет относительный минимум веса рассматриваемой пластинки как решение изопериметрической вариационной задачи. Вес оптимальной пластинки уменьшается с уменьшением параметра ξ , то есть площади приложения равномерно распределенного давления. Из полученного решения (рис. 4–5) следует, что преобразование пятого граничного условия (17) вследствие раскрытия неопределенности так же, как и в задаче о несущей способности, не приводит к изменению его качественного характера, производная dw/dx в центре пластинки сохраняет нулевое значение. Особое свойство полученных оптимальных проектов состоит в том, что вблизи опертого края толщина жесткопластической пластинки близка к нулевому значению, что может быть причиной разрушения (среза) реальной пластинки под действием поперечного касательного напряжения. Для предотвращения такого разрушения в условии текучести Мизеса необходимо учесть обобщенные перерезывающие силы, с учетом которых задача оптимального проектирования пластинки также остается нерешенной. В продолжение работы требуется развитие имеющей практическое значение теории предельного равновесия и оптимального проектирования с учетом, по возможности, большего числа компонент тензоров напряжений, скоростей деформаций, обобщенных усилий и моментов, обобщенных скоростей деформаций, в частности, нормального напряжения поперечного сжатия и поперечного касательного напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Прагер, В. Проблемы теории пластичности / В. Прагер. – М. : Наука, 1958. – 136 с.
- [2] Гудьер, Дж. Н. Упругость и пластичность / Дж. Н. Гудьер, Ф. Г. Ходж. – М. : Иностранная литература, 1960. – 191 с.
- [3] Вохмянин, И. Т. Несущая способность гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек / И. Т. Вохмянин, Ю. В. Немировский // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3. – Вып. 1. – С. 18–23.
- [4] Вохмянин, И. Т. О несущей способности жесткопластической круглой пластинки / И. Т. Вохмянин // Динамика сплошной среды. – 2012. – Вып. 127. – С. 29–31.
- [5] Вохмянин, И. Т. Несущая способность жесткопластических круглых пластинок с условием текучести Мизеса / И. Т. Вохмянин // Всероссийская научно-техническая конференция “Актуальные вопросы строительства”: сборник докладов. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2013. – Т. 1. – С. 80–84.
- [6] Freiburger, W. Minimum Weight Design of Circular Plates / W. Freiburger, B. Tekinalp // Journal of Mechanics and Physics of Solids. – 1956. – Vol. 4 – P. 294–299.
- [7] Shield, R. T. On the optimum design of shells / R. T. Shield // J. Appl. Mech. – 1960. – № 27. – P. 316–322.
- [8] Немировский, Ю. В. Об оценках веса пластических оптимальных конструкций / Ю. В. Немировский // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1968. – № 4. – С. 159–162.

[9] *Немировский, Ю. В.* Оценки и критерий оптимального проектирования жесткопластических элементов конструкций минимального объема. / Ю. В. Немировский, И. Т. Вохмянин // Известия вузов. Строительство. – 1966. – № 3. – С. 16–25.

[10] *Немировский, Ю. В., Вохмянин И. Т.* Оптимальное проектирование по времени разрушения ползущих пластин и оболочек / Ю. В. Немировский, И. Т. Вохмянин // 17 Межреспубликанская конференция “Численные методы решения задач теории упругости и пластичности”: сб. докладов. – Новосибирск : Издательская компания "Лада", 2001. – С. 157–170.

[11] *Вохмянин, И. Т.* К условию текучести Мизеса для тонких оболочек вращения / И. Т. Вохмянин // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1983. – № 7. – С. 37–41.

Немировский Юрий Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Вохмянин Иван Тимофеевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), г. Новосибирск

e-mail: vokhmyanin@bk.ru

I. T. Vokhmianin, Y. V. Nemirovsky

THE LOAD CARRYING CAPACITY AND THE OPTIMUM DESIGN OF RIGIDPLASTIC CIRCULAR PLATES WITH MISES YIELD CONDITION

Institute of Theoretical and Applied Mechanics. SA Christianovich SB RAS

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)

Abstract. Complete and accurate task solutions to determine the bearing capacity and optimal design of simply supported rigidplastic circular plate under step uniform distributed pressure action are received. Analysis of task solutions is fulfilled and peculiarities of stress deformation limit state plates with different values of the parameter loading are revealed.

Keywords: plate, condition of fluidity, limit state, the criterion of the optimal design, thickness, weight.

REFERENCES

- [1] *Prager, W.* Probleme der plasizitätstheorie. Birkhäuser Basel und Stuttgart. – 1955. – 141 p. (Russ. ed.: V. Prager. Problemy teorii plastichnosti. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury. – 1958. – 136 p.).
- [2] *Goodier, J. N.* The mathematical theory of elasticity. The mathematical theory of plasticity / J. N. Goodier, P. G. Hodge. – New York. John Willey and Sons, Inc. London . Capman and Hall, Limited. – 1958. – 198 p. (Russ ed.: Uprugost' i plastichnost'. Moscow, Izdatel's'tvo "Inostrannaia literatura". – 1960. – 191 p.)
- [3] *Vokhmianin, I. T.* Load carrying capacities of the smooth and strengthened cylindrical shells / I. T. Vokhmianin, Yu. V. Nemirovskii // Prikladnaia mekhanika. – 1967. – Vol. 3. – Issue 1. – P. 18–23.
- [4] *Vokhmianin, I. T.* On the load carrying capacities of the rigidplastic circular plate / I. T. Vokhmianin // Dinamika sploshnoi sredy. – 2012. – Issue 127. – P. 29–31.
- [5] *Vokhmianin, I. T.* The load carrying capacities of the rigidplastic circular plate with the Mises yield condition / I. T. Vokhmianin, Yu. V. Nemirovskii // Materialy 6th Science-Technical Conference "Actual question of building. – Novosibirsk. – 2013. – Vol. 1. – P. 80–84.
- [6] *Freiberger, W.* Minimum Weight Design of Circular Plates / W. Freiberger, B. Tekinalp // Journal of Mechanics and Physics of Solids. – 1956. – Vol. 4 – P. 294–299.
- [7] *Shield, R. T.* On the optimum design of shells / R. T. Shield // J. Appl. Mech. – 1960. – № 27. – P. 316–322.
- [8] *Nemirovskii, Yu. V.* On the evaluation of plastical optimum constructions / Yu. V. Nemirovskii // Inzhenernyi zhurnal. Mekhanika tverdogo tela. – 1968. – No. 4. – P. 159–162.
- [9] *Nemirovskii, Yu. V.* The evaluations and criterion of the optimum design of rigidplastic minimum weight construction element / I. T. Vokhmianin, Yu. V. Nemirovskii // Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo. – 1966. – No. 3. – P. 16–25.
- [10] *Nemirovskii, Yu. V.* The optimum design by destruction time of the creep plates and shells / I. T. Vokhmianin, Yu. V. Nemirovskii // Trudy XVII Interrepublic Conf. "Numerical methods of elasticity and plasticity theory". – Novosibirsk, 2001. – P. 157–170.
- [11] *Vokhmianin, I. T.* To Mises yield condition for the thin revolution shells / I. T. Vokhmianin // Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. – 1983. – No 7. – P. 37–41.

Nemirovsky, Yuri Vladimirovich

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics.
SA Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

Vokhmyanin, Ivan Timofeevich

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Novosibirsk State University of Architecture and
Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk*

Ю. В. Немировский

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

Аннотация. На основе модели идеального жесткопластического материала для многослойных гибридных балок разработан метод расчета однородных и слоистых балок при воздействии динамических нагрузок “взрывного типа”. Метод позволяет определить закономерности расположения и распределения материалов вдоль конструкции, при которых обеспечивается существенное снижение остаточных прогибов.

Ключевые слова: однородные и слоистые балки, модель идеального жесткопластического тела, пределы текучести, предельный изгибающий момент, вес конструкции, остаточный прогиб, рациональный проект.

УДК: 539.374

Первоначальные основы разработки методов динамического расчета балок и плит из однородного жесткопластического материала при воздействии нагрузок “взрывного” типа были заложены в работах А. А. Гвоздева [1] и П. Саймондса [2]. Развитие этих исследований в дальнейшем шло по путям расширения типов конструктивных элементов: различных видов перекрестных систем как совокупностей балочных элементов [3], [4], углубленного изучения влияния новых эффектов типа сдвига, инерции вращения [5], армирования [6], запаздывания текучести [7], скорости нагружения и других.

Успешное преодоление некоторых технических трудностей при решении возникающих при этом математических систем уравнений побуждало исследователей расширять попытки поиска на основе модели идеального жесткопластического тела решений динамических задач для все более широкого множества конструктивных элементов. Больших успехов удалось добиться для криволинейных стержней и тонкостенных элементов типа пластин и оболочек. Подробные обзоры найденных решений динамических задач теории пластичности разнообразных тонкостенных элементов содержатся в источниках [4], [8], [9], [10].

Обнадеживающие усилия по разработке методов решения прямых задач динамики пластических конструкций показывают, как и в задачах статики, необходимость поиска решений обратных задач. Однако в этом направлении получено мало результатов, и они имеют пока разрозненный набор частных и приближенных решений, основанных на использовании приближенного метода модальных решений применительно к однородным балкам и пластинам с кусочно-постоянными толщинами. Большинство решений получено в статьях Ю. Р. Лепика с соавторами, которые детально отражены в обзоре [11] и монографии [12].

Будем рассматривать слоистые балочные элементы с симметричными сечениями (рис. 1).

Поступила 08.06.2014

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №14-01-00102.

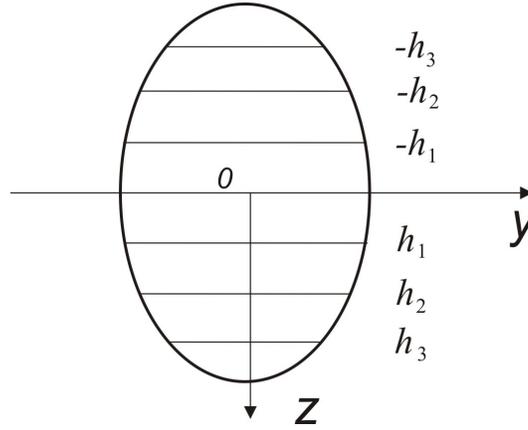


Рис. 1

Предполагаем симметрию расположения материалов относительно плоскостей $z = 0$ и $y = 0$. Считаем, что все составляющие материалы обладают достаточно высоким сопротивлением поперечным сдвигам, так что для всего пакета справедливы гипотезы Бернулли. Тогда в соответствии с моделью идеального жесткопластического состояния все материалы в сечении будут находиться либо в жестком, либо в пластическом состоянии.

Безразмерный предельный изгибающий момент в сечении балки будет равен

$$M_0(x) = 4 \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z) z dz, \quad (1)$$

а удельная осевая масса –

$$m(x) = 4 \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z) dz. \quad (2)$$

Здесь

$$\sigma_{oi} = \frac{\bar{\sigma}_{0i}}{\bar{\sigma}_0}, \quad b_i = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_0}, \quad z_i = \frac{\bar{z}}{\bar{H}_0}, \quad \rho_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_0},$$

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{l}_0}, \quad l = \frac{\bar{l}}{\bar{l}_0}.$$

Величины $\bar{\sigma}_{0i}, \bar{z}, \bar{\rho}_i, \bar{x}, \bar{l}$ – размерные величины, $\bar{\sigma}_0, \bar{b}_0, \bar{\rho}_0, \bar{l}_0$ – обезразмеривающие параметры.

Если не учитывать влияние инерции вращения, безразмерные уравнения динамического изгиба балки можно записать в виде

$$M'' = m\ddot{w} - f(x, t), \quad (3)$$

$$M' = Q, \quad f(x, t) = q_0 f_1(x) f_2(t), \quad (4)$$

Здесь $(...)' = \frac{\partial}{\partial x}(...)$, $(\dots) = \frac{\partial}{\partial t}(\dots)$, $t = \frac{\bar{t}}{t_0}$ – безразмерное время, q_0 – безразмерная амплитуда распределенной нагрузки.

Для нагрузки взрывного типа

$$\int_0^t f_2(t)dt \geq t \cdot f_2(t). \quad (5)$$

В соответствии с гипотезой Бернулли для деформации имеем

$$\varepsilon(x, z) = z\kappa(x), \quad \kappa(x) = -w'', \quad (6)$$

где $w(x, t)$ – безразмерный прогиб.

Если A_* – безразмерная работа деформирования материала в момент разрушения, то для идеальнопластического материала в момент разрушения возникнет предельная деформация

$$\varepsilon_* = A_*/\sigma_0.$$

Критерием рационального использования материала в конструкции следует считать ситуацию, при которой возникшее в сечении пластическое состояние остается пластическим до остановки балки в некоторый момент времени t_* и когда каждый из входящих в сечение балки материалов в один и тот же момент реализует свою предельную деформацию. Последнее означает, что в момент остановки в рациональной слоистой балке должны выполняться условия

$$\frac{h_{k+1}}{h_k} = \frac{\varepsilon_{k+1}^*}{\varepsilon_k^*} > 1, \quad \varepsilon_k^* = \frac{A_k^*}{\sigma_{0k}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$h_k = \frac{\varepsilon_k^*}{\varepsilon_1^*} h_1. \quad (8)$$

Выражения (7), (8) определяют порядок расстановки материалов в сечении и значения координат раздела всех слоев через координату первого слоя.

Для установления сравнительных характеристик качества проектов в динамическом режиме необходимо установить некоторое общее качество сходности проектов. Таким качеством естественно считать одинаковый вес сравниваемых проектов, то есть необходимо требовать выполнения условия

$$\int_0^l m(x)dx = lm_0,$$

где m_0 – удельная масса эталонного проекта постоянного сечения. Это требование примет вид

$$4 \int_0^l \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(x, z)dz = lm_0. \quad (9)$$

При этом следует иметь в виду зависимости (8).

При нагрузках взрывного типа обычные начальные условия для балок имеют вид

$$\dot{w}(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0. \quad (10)$$

Представим теперь уравнение (3) в форме

$$\frac{M_0''(x)}{m(x)} + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} f_2(t) = \ddot{w}(x, t) \quad (11)$$

и проинтегрируем его по t с учетом начальных условий (9), в результате чего получим выражения

$$\dot{w}(x, t) = \frac{M_0''(x)}{m(x)}t + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} I_1(t), \quad (12)$$

$$w(x, t) = \frac{M_0''(x)}{2m(x)}t^2 + q_0 \frac{f_1(x)}{m(x)} J_1(t), \quad (13)$$

$$I_1(t) = \int_0^t f_2(t) dt; \quad J_1(t) = \int_0^t I_1(t) dt.$$

Если в момент времени t_* балка останавливается, то $\dot{w}(x, t_*) = 0$, при этом для закона распределения предельного изгибающего момента $M_0(x)$ и остаточного прогиба $w_*(x) = W(x, t_*)$ получим уравнения

$$M_0''(x) = -q_0 f_1(x) p_*, \quad p_* = t_*^{-1} I_1(t_*), \quad (14)$$

$$w_*(x) = \frac{q_0 f_1(x)}{2m(x)} [2J_1(t_*) - p_* t_*^2]. \quad (15)$$

Полученные выражения справедливы для некоторого участка балки $x_1 < x < x_2$, который в течение всего времени движения $0 \leq t \leq t_*$ деформируется пластически. При определенном характере распределения нагрузки и закрепления краев балки такое состояние может быть реализовано на всем пролете. В общем же случае наряду с пластически деформируемыми в балке могут существовать жесткие участки, для которых выполняется условие $\dot{\kappa}(x, t) = 0$ и, следовательно, скорость и ускорение прогиба подчиняются зависимостям

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)x + \dot{C}_2(t), \quad \ddot{w} = \ddot{C}_1(t)x + \ddot{C}_2(t), \quad (16)$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ – искомые функции. Для их нахождения необходимо получить соответствующие решения уравнений движения (3) с использованием зависимостей (16), необходимых граничных условий и условий сопряжения на границах пластических и жестких состояний.

Соответствующие процедуры удобнее всего продемонстрировать на конкретных ситуациях. Поэтому далее рассмотрим некоторые примеры.

1. Шарнирно опертые балки длины $2l$, нагруженные симметрично распределенными относительно середины пролета нагрузками

В силу симметрии будем рассматривать решение на отрезке $0 \leq x \leq l$. В этом случае должны выполняться граничные условия

$$Q(0, t) = 0, \quad M(l, t) = 0, \quad \dot{w}(l, t) = 0. \quad (17)$$

Если пластическое состояние реализуется на отрезке $0 \leq x \leq x_2$, ($x_1 = 0$), то на нем будем иметь выражения

$$Q(x) = M_0^1(x) = -q_0 p_* \int_0^x f_1(x) dx, \quad (18)$$

$$M_{01}(x) = M_{01}^* - q_0 p_* \int_{x_2}^x \left[\int_0^x f_1(x) dx \right] dx, \quad M_{01}^* = M(x_2), \quad (19)$$

$$w(x, t) = \frac{q_0 f_1(x)}{m(x)} (-p_* t + I_1(t)), \quad (20)$$

$$I_1(t) = \int_0^t f_2(t) dt, \quad p_* = t_*^{-1} I_1(t_*).$$

Если $f_1(l) = 0$, то все условия (17) выполнены на отрезке $0 \leq x \leq l$ и $x_2 = l$. Если же распределение нагрузки таково, что $f_1(l) \neq 0$, то формулы (18)–(20) будут справедливы лишь на участке $0 \leq x \leq x_2 < l$. Отрезок балки $x_2 \leq x \leq l$ будет оставаться жестким, и на нем имеем

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l), \quad \ddot{w}(x, t) = \ddot{C}_1(t)(x - l), \quad (21)$$

$$m(x) = m_*(x),$$

$$M(x, t) = \ddot{C}_1(t) \int_l^x \left[\int_{x_2}^x (x - l) m_*(x) dx \right] dx - q_0 \left\{ f_2(t) \int_l^x \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx + p_*(x - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx \right\}. \quad (22)$$

Пользуясь условием сопряжения $M(x_2, t) = M_*(x_2)$, получим

$$M_*(x_2) = \ddot{C}_1(t) \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x (x - l) m(x) dx \right] dx - q_0 \left\{ f_2(t) \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx + p_*(x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx \right\}. \quad (23)$$

Поскольку $M_*(x_2)$ не зависит от t , то из последнего равенства следуют выражения

$$\ddot{C}_1(t) = A_1 + q_0 A_2 f_2(t), \quad (24)$$

$$M_*(x_2) + q_0 p (x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx = q_0 \lambda_1 = const, \quad (25)$$

$$A_1 = \frac{q_0 \lambda_1}{\Psi_1(x_2)}, \quad A_2 = \frac{\Psi_2(x_2)}{\Psi_1(x_2)},$$

$$\Psi_1(x_2) = \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x (x - l) m_*(x) dx \right] dx,$$

$$\Psi_2(x_2) = \int_l^{x_2} \left[\int_{x_2}^x f_1(x) dx \right] dx.$$

Интегрируя (24) при нулевых начальных условиях, получим

$$\dot{C}_1(t) = A_1 t + A_2 q_0 I_1(t),$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2} A_1 t^2 + A_2 q_0 J_1(t), \quad J_1(t) = \int_0^t I_1(t) dt.$$

Тогда участок балки $x_2 \leq x \leq l$ будет устанавливаться в момент времени $t = t_*$ и распределение остаточного прогиба на нем будет выражаться формулой

$$w(x, t) = q_0 A_2 \left[-p_* \frac{t^2}{2} + J_1(t) \right] (x - l).$$

Постоянная A_2 определяется из условия непрерывности скоростей прогиба на границе $x = x_2$:

$$A_2 = \frac{f_1(x_2)}{m_1(x_2)(x_2 - l)}.$$

Граница x_2 определяется из уравнения (24), которое примет вид

$$M_*(x_2) = q_0 p_* \left[(x_2 - l) \int_0^{x_2} f_1(x) dx - \Psi_2(x_2) \right].$$

Закон распределения материала вдоль балки на участке $0 \leq x \leq x_2$ определяется выражением (19).

Защемленная балка. При нагружении симметрично распределенной нагрузкой относительно середины пролета должны выполняться условия

$$Q(0, t) = 0 \text{ (или } M_{01}^*(0, t) = 0), \quad \dot{w}(0, t) = 0, \quad (26)$$

и на границе $x = l$ в этом случае выполняются условия

$$\dot{w}(l, t) = 0, \quad M(l, t) = -M_{02}^*, \quad (27)$$

Тогда в области $0 \leq x \leq x_1$ имеем решение

$$Q(x) = M_{01}^*(x) = \lambda_0 q_0 \int_0^x f_1(x) dx, \quad (28)$$

$$M_{01}(x) = M_{01}^* + \lambda_0 q_0 \int_{x_1}^x \left[\int_0^x f_1(x) dx \right] dx, \quad \lambda_0 = -t_*^{-1} I_1(t_*), \quad (29)$$

$$\dot{w}(x, t) = \frac{q_0 f_1(x)}{m_1(x)} (\lambda_0 t + I_1(t)), \quad (30)$$

$$\dot{w}^*(x, t) = q_0 \frac{[f_1^*(x) m_1(x) - m_1^*(x) f_1(x)]}{m_1^2(x)} (\lambda_0 t + I_1(t)). \quad (31)$$

В силу условия (26) должно выполняться равенство

$$[f_1^*(x) m_1(x) - m_1(x) f_1(x)]_{x=0} = 0. \quad (32)$$

В области $x_1 \leq x \leq l$ имеем жесткий участок ($\dot{\kappa}(x, t) = 0$) с предельными значениями моментов на концах $M(x_1) = M_{02}^* = M_{01}^*$, $M(l) = -M_{03}^*$.

В результате на отрезке $x_1 \leq x \leq l$ имеем решение

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l), \quad \ddot{w}(x, t) = \ddot{C}_1(t)(x - l),$$

$$M(x, t) + M_{03}^* = \ddot{C}_1(t) \Psi_1(x) - q_0 f_2(t) \Psi_2(x) + \lambda_0 q_0 (x - l) \int_0^{x_1} f_1(x) dx.$$

Используя граничное условие $M(x_1, t) = M_{02}^*$, получим

$$\ddot{C}_1(t) = \frac{q_0 \Psi_2(x_1)}{\Psi_1(x_1)} (f_2(t) + A_1),$$

$$\dot{C}_1(t) = \frac{q_0 \Psi_2(x_1)}{\Psi_1(x)} (I_1(t) + A_1 t),$$

$$\dot{w}(x, t) = \dot{C}_1(t)(x - l),$$

$$A_1 = \frac{M_{02}^* + M_{03}^* - \lambda_0 q_0 (x_1 - l) \int_0^{x_1} f_1(x) dx}{q_0 \Psi_2(x_1)}.$$

Из условия непрерывности скорости прогиба на границе $x = x_1$ имеем

$$\frac{q_0 \Psi_2(x_1)(x_1 - l)}{\Psi_1(x_1)} (I_1(t) + A_1 t) = \frac{f_1(x_1)}{m_1(x_1)} (I_1(t) + \lambda_0 t).$$

Это равенство будет выполняться для любого t , если $A_1 = \lambda_0$ и

$$\frac{q_0 \Psi_2(x_1)(x_1 - l)}{\Psi_1(x_1)} = \frac{f_1(x_1)}{m_1(x_1)}.$$

Последнее равенство служит для определения координаты x_1 . При этом на участке $0 \leq x \leq x_1$ распределение материала вдоль балки определяется по формуле (20), а на отрезке $x_1 \leq x \leq l$ распределение материала считается заданным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гвоздев, А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны / А. А. Гвоздев // Строительная промышленность. – 1943. – № 1–2. – С. 18–21.
- [2] Саймондс, П. Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа / П. Саймондс // Механика : сборник переводов. – М. : Мир, 1956. – № 4. – С. 90–108.
- [3] Иванов, Г. В. Динамика жесткопластической системы перекрестных связей / Г. В. Иванов, Ю. В. Немировский, Ю. Н. Работнов // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 2. – С. 51–57.
- [4] Комаров, К. Л. Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск, 1984. – 234 с.
- [5] Немировский, Ю. В. Влияние сдвига и инерции вращения на динамический изгиб пластических балок / Ю. В. Немировский // Динамика сплошной среды. – Новосибирск : Институт гидродинамики СО АН СССР, 1974. – Вып. 19–20. – С. 83–100.
- [6] Немировский, Ю. В. Динамический изгиб армированных пластических стержней / Ю. В. Немировский // Динамика сплошной среды. – Новосибирск : Институт гидродинамики СО АН СССР, 1979. – Вып. 47. – С. 37–44.
- [7] Работнов, Ю. Н. Динамика жестко-пластической балки с запаздыванием текучести / Ю. Н. Работнов, Ю. В. Суворова // Известия АН СССР. МГТ. – 1968. – № 6. – С. 25–33.
- [8] Рейтман, М. И. Динамическая теория пластичности / М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро. – Деп. в ВИНТИ. – М., 1968. – 112 с.
- [9] Мазалов, В. Н. Оптимальное проектирование конструкций / В. Н. Мазалов, Ю. В. Немировский // Библиографический указатель за 1948–1974 гг. – Новосибирск : Институт гидродинамики СО АН СССР, 1975. – Ч. I–II. – 472 с.
- [10] Мазалов, В. Н. Динамика тонкостенных пластических конструкций / В. Н. Мазалов, Ю. В. Немировский // Механика : Проблемы динамики упруго-пластических сред. – 1975. – Вып. 5. – С. 155–247.
- [11] Лепик, Ю. Р. Оптимальное проектирование неупругих конструкций при динамических воздействиях / Ю. Р. Лепик // Прикладная механика. – 1981. – Т. XVII. – № 9. – С. 3–20.
- [12] Лепик, Ю. Р. Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения / Ю. Р. Лепик // Таллин : Валгус, 1982.

Немировский Юрий Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Y. V. Nemirovsky

EQUIVALENT TO THE LIMIT OF HOMOGENEOUS AND COMPOSITE BEAMS*Institute of Theoretical and Applied Mechanics. SA Christianovich SB RAS*

Abstract. The different types of layered fibrous beams of rigid-plastic materials under the same conditions of loading and securing. Introduce the concept of equivalent structures with the same carrying capacity. Within subclass equivalent structures developed an approach that allows for selection of the best products in terms of weight and cost.

Keywords: layered, layered fiber beams, equivalent structures, rigid-plastic materials, load capacity, minimum weight, cost.

REFERENCES

- [1] *Gvozdeff, A. A.* For the calculation of structures on the action blast wave / A. A. Gvozdeff // The construction industry. – 1943. – № 1–2. – P. 18–21.
- [2] *Simonds, P.* Large plastic deformation of the rods under a load of explosive type / P. Simonds. – M. : Mir, 1956. – № 4. – P. 90–108.
- [3] *Ivanov, G. V.* Dynamics of a rigid-plastic system cross-linking / G. V. Ivanov, Yu. V. Nemirovsky, Yu. N. Rabotnov // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. AHM. Mechanics and Mechanical Engineering. – 1963. – № 2. – P. 51–57.
- [4] *Komarov, K. L.* Dynamics of rigid-plastic elements designs / K. L. Komarov, Yu. V. Nemirovsky. – Novosibirsk, 1984. – 234 p.
- [5] *Nemirovsky, Yu. V.* Influence of the shear and inertia rotation dynamic bending of plastic beams / Yu. V. Nemirovsky // Dynamics solid environment. Institute gidrodinamiki WITH AN USSR. – Novosibirsk, 1974. – Issue 19–20. – P. 83–100.
- [6] *Nemirovsky, Yu. V.* Dynamic bending reinforced plastic rods / Yu. V. Nemirovsky // Dynamics solid environment. Institute gidrodinamiki WITH AN USSR. – Novosibirsk, 1979. – Issue 47. – P. 37–44.
- [7] *Rabotnov, Yu. N.* Dynamics of a rigid-plastic beam with delay yield / Yu. N. Rabotnov, Yu. V. Suvorova // Notifications USSR. MTT. – 1968. – № 6. – P. 25–33.
- [8] *Reitman, M. I.* Dynamic theory of plasticity / M. I. Reitman, G. S. Shapiro. Dep. in VINITI. – M., 1968. – 112 p.
- [9] *Mazalov, V. N.* Optimal design of structures / V. N. Mazalov, Yu. V. Nemirovsky // Bibliographic index for 1948–1974. – Novosibirsk : Institute gidrodinamiki WITH AN USSR, 1975. – Part I–II. – 472 p.
- [10] *Mazalov, V. N.* Dynamics of thin-walled plastic designs / V. N. Mazalov, Yu. V. Nemirovsky // Mechanics : Problems of dynamics of elastic-plastic media. – 1975. – Issue 5. – P. 155–247.
- [11] *Lepik, Yu. R.* Optimal design of inelastic structures under dynamic loads / Yu. R. Lepik // Applied Mechanics. – 1981. – Vol. XVII. – № 9. – P. 3–20.
- [12] *Lepik, Yu. R.* Optimal design of inelastic structures in the case of dynamic loading / Yu. R. Lepik // Tallinn : Valgus, 1982.

Nemirovsky, Yuri Vladimirovich

Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics. SA Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk

И. В. Меньшова, Е. С. Лапикова

ПОЛУПОЛОСА С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, РАБОТАЮЩИМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В виде явных разложений по функциям Фадля – Папковича дается решение краевой задачи для полубесконечной полосы $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$, продольные стороны которой подкреплены ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. Задача рассматривается в двух вариантах: как неперiodическая и как периодическая для полуплоскости. Базисные свойства систем функций Фадля – Папковича, возникающие при решении этих задач, подробно изучались в работах [1], [2]. Заметим, что при их построении использовался очень удобный в такого рода задачах аппарат метода начальных функций [3]. Решение получено только для симметричной относительно оси x деформации полуполосы.

Ключевые слова: полуполоса, ребра жесткости, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3+517.95

1. Непериодическая краевая задача.

Следуя [1], [2], обозначим: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра, ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра, f – площадь поперечного сечения ребра, t – толщина пластины, $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – соответственно продольное и поперечное перемещения в пластине. Из условия равновесия элемента ребра, следуя закону Гука, можно получить следующее дифференциальное уравнение [1], [2]:

$$\frac{E_1 f}{Gt} \cdot \frac{d^2 U(x, \pm 1)}{dx^2} - \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0. \quad (1.1)$$

Будем считать, что внешняя нормальная нагрузка, действующая на ребро, отсутствует, то есть

$$\sigma_y(x, \pm 1) = 0. \quad (1.2)$$

Решения в полуполосе, записанные в виде разложений по функциям Фадля – Папковича, имеют вид [1]

$$U(x, y) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k U(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x},$$
$$V(x, y) = -\nu C_1 y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k V(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x},$$

Поступила 08.06.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Грант 13-08-00118.

$$\sigma_x(x, y) = 2(1 + \nu)C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \quad (1.3)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}.$$

Постоянные C_0 , C_1 отвечают элементарному решению сопротивления материалов. Можно считать, что они известны. Кроме того, так как решение должно затухать на бесконечности, то следует принять, что $Re\lambda_k < 0$.

Ниже выписаны функции Фадля – Папковича для перемещений и напряжений в полуполосе:

$$\begin{aligned} U(\lambda_k, y) &= \left(-\frac{1+\nu}{2}\lambda_k \sin \lambda_k - \cos \lambda_k\right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ V(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2}\lambda_k \sin \lambda_k - \cos \lambda_k \frac{1-\nu}{2}\right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2}\lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y, \\ \sigma_x(\lambda_k, y) &= -\lambda_k(1+\nu)[(\lambda_k \sin \lambda_k + 2 \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y], \\ \sigma_y(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k^2(\sin \lambda_k \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\tau_{xy}(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k[(\lambda_k \sin \lambda_k + \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y].$$

Числа $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$ множество всех комплексных нулей целой функции

$$L(\lambda) = \lambda^2 \left(D \cos^2 \lambda + (1+\nu) \left(1 + \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda} \right) \right). \quad (1.5)$$

В таблице 1 приведены значения первых пяти ненулевых корней уравнения (1.5).

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	1,65555	0,51230
2	4,74665	0,54387
3	7,87495	0,54729
4	11,01064	0,54827
5	14,14891	0,54868

Удовлетворяя с помощью выражений (1.3) заданным на торце полуполосы граничным условиям, приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов разложений a_k . В частности, если на торце полуполосы заданы нормальное $\sigma(y)$ и касательное $\tau(y)$ напряжения, то имеем

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y), \\ \tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Искомые коэффициенты разложений определяются отсюда в явном виде по той же схеме, что и в решениях Файлона – Рибьера в тригонометрических рядах, т. е. при помощи систем функций биортогональных к функциям Фадля – Папковича.

В краевых разложениях (1.6) двух функций, в отличие от разложений Лагранжа одной функции, рассматривавшихся в статьях [1], [2], нужно найти набор коэффициентов $\{a_k, \bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$, общий для двух этих разложений. Недостающий произвол при этом обеспечивается существованием чисто мнимых векторов, входящих в состав разложений (1.6). Т. к. они не дают проекций на вещественные направления, то их разложения были названы нуль-рядами [4]. Нуль-ряды нужно выделять в окончательных выражениях для напряжений и перемещений в полуполосе, приводя их тем самым к разложениям Лагранжа. Подробно схема решения краевой задачи описана в статьях [5], [6]. Приведем окончательные выражения для перемещений и напряжений в полуполосе, обозначив $c_k = Re\lambda_k$, $b_k = Im\lambda_k$, $c_k < 0$. Их можно представить в следующем виде (элементарные решения опущены):

а) на торце полуполосы заданы только нормальные напряжения $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а касательные напряжения равны нулю:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{U(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \frac{Im(-e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{V(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k^2 \frac{Im(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k^2 \frac{Im(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\sigma_y(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{Im(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \frac{Im(-e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}; \end{aligned} \quad (1.7)$$

б) на торце полуполосы заданы только касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$, а нормальные равны нулю:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{U(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{V(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k^2 \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k^2 \frac{Im(e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\sigma_y(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2 \frac{Im(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} 2\lambda_k \frac{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $L'(\lambda_k)$ – производная функции $L(\lambda)$ (1.5) при $\lambda = \lambda_k$. Числа σ_k и τ_k определяются по формулам

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y)x_k(y)dy, \quad \tau_k = \int_{-1}^1 \tau(y)t_k(y)dy, \quad (1.9)$$

в которых функции

$$x_k(y) = -\frac{1}{2\lambda_k^2} \left(\frac{\cos \lambda_k^y}{\cos \lambda_k} - 1 \right), \quad t_k(y) = \frac{\sin \lambda_k y}{2\lambda_k \cos \lambda_k}. \quad (1.10)$$

Эти функции были построены в статье [1]. Они представляют собой финитные части (с носителем на $|y| \leq 1$) функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича $\sigma_x(\lambda_k, y)$ и $\tau_{xy}(\lambda_k, y)$ соответственно.

Пусть, например,

$$\sigma(y) = 1/3 - y^2, \quad \tau(y) = y. \quad (1.11)$$

По формулам (1.9), (1.10) найдем

$$\sigma_k = -2 \frac{\lambda_k^2 \sin \lambda_k + 3(\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k)}{3\lambda_k^5 \cos \lambda_k}, \quad (1.12)$$

$$\tau_k = \frac{\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k}{\lambda_k^3 \cos \lambda_k}. \quad (1.13)$$

Подставляя числа (1.12) в формулы (1.7), а числа (1.13) – в формулы (1.8), получим решения двух краевых задач: когда на торце подкрепленной полуполосы заданы нормальные напряжения $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а касательные равны нулю, и, наоборот, когда на торце полуполосы заданы только касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$, а нормальные равны нулю.

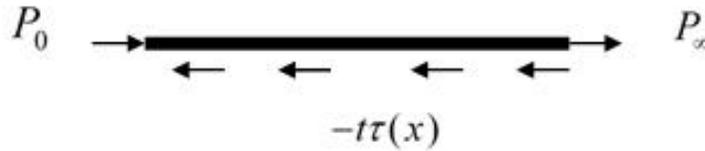


Рис. 1.1

Получим формулу для силы $f\sigma(x)$ в ребре. Отделим ребро от пластины, заменив действие пластины на ребро касательными напряжениями $\tau(x) = \tau_{xy}(x, 1)$ (рис. 1.1). Можно считать, что на торце полуполосы к ребрам приложены сосредоточенные силы P_0 , показанные на рис. 1.1. Условие равновесия элементарного участка ребра имеет вид

$$f \frac{d\sigma_x(x)}{dx} = -t\tau(x). \quad (1.14)$$

Интегрируя, получим

$$f\sigma(x) = -t \int_0^x \tau(x)dx + C. \quad (1.15)$$

Неизвестную постоянную интегрирования C найдем из равенства (1.15), приняв в нем верхний предел интегрирования равным нулю. Тогда

$$f\sigma(0) = C = P_0.$$

Если считать, что $C = P_0 = 0$, то из (1.15) получим значения сил в ребрах жесткости на бесконечности:

$$f\sigma(\infty) = P_\infty = -t \int_0^\infty \tau(x) dx. \quad (1.16)$$

Вычислим интеграл (1.15)

$$\begin{aligned} f\sigma(x) &= -t \int_0^x \tau(x) dx = -t \int_0^x \tau_{xy}(x, 1) dx = \\ &= -t \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2\tau_{xy}(\lambda_k, 1)}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \sigma_k \int_0^x \frac{\operatorname{Im}(-\lambda_k \bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} dx \right\} = \\ &= -t \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2\tau_{xy}(\lambda_k, 1)}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \sigma_k \frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k (e^{\lambda_k x} - 1))}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} = \\ &= -t \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2\tau_{xy}(\lambda_k, 1)}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \sigma_k \left[\frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} + 1 \right] \right\}, \quad \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

При $x = \infty$ отсюда найдем

$$P_\infty = -t \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{2\tau_{xy}(\lambda_k, 1)}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \sigma_k \right\}. \quad (1.18)$$

Пусть на торце полуполосы действуют нормальные напряжения $\sigma(y) = 1$, а касательные равны нулю. В этом случае

$$\sigma_k = -\frac{1}{\lambda_k^2} (\frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k \cos \lambda_k} - 1). \quad (1.19)$$

Осталось подставить числа (1.19) в формулы (1.7), чтобы получить окончательное решение краевой задачи.

На рис. 1.2 показано распределение нормальных напряжений на торце полуполосы. Можно видеть, что они разрывны.

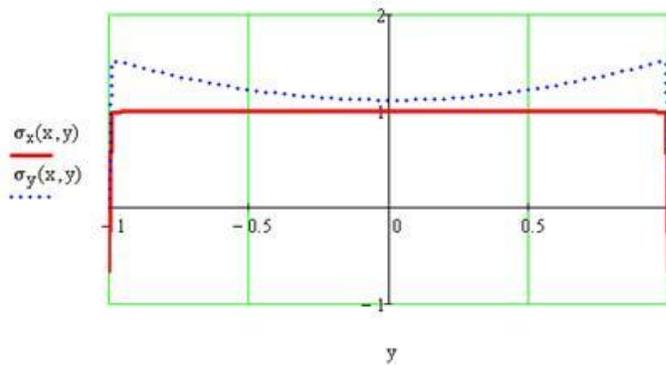


Рис. 1.2

На рис. 1.3 напряжения $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ и $\tau_{xy}(x, y)$ показаны в сечении $x = 0.1$, а на рис.1.4 показано распределение силы в ребре

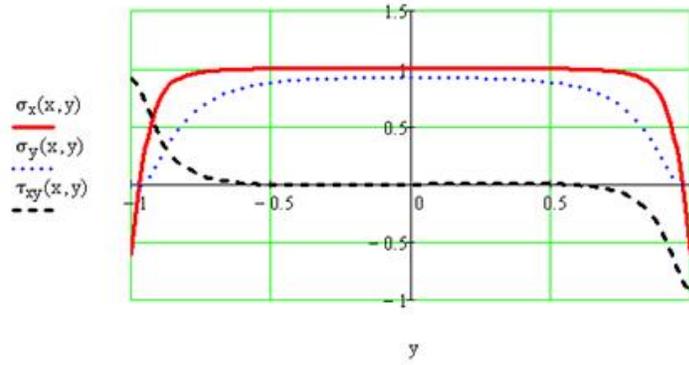


Рис. 1.3

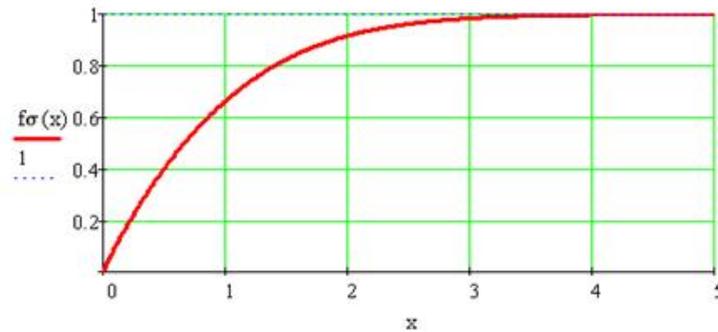


Рис. 1.4

На рис. 1.5, 1.6 приведены графики изменения напряжения вдоль полулопосы при $y = 1$ и при $y = 0$.

Рассмотрим пример, когда на торце полулопосы на отрезке $|y| \leq \alpha$ приложены самоуравновешенные нормальные напряжения

$$\sigma(y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2, \quad \alpha < 1, \tag{1.20}$$

равные нулю вне этого отрезка. По формулам (1.9), (1.10) найдем числа σ_k , подставляя которые в ряды (1.7), получим решение задачи. Ниже показаны распределение напряжений в сечении полулопосы $x = 0.1$ (рис. 1.7), изменение силы в ребре (рис. 1.8) и графики изменения напряжения вдоль полулопосы при $y = 1$ и при $y = 0$ (рис. 1.9 и 1.10).

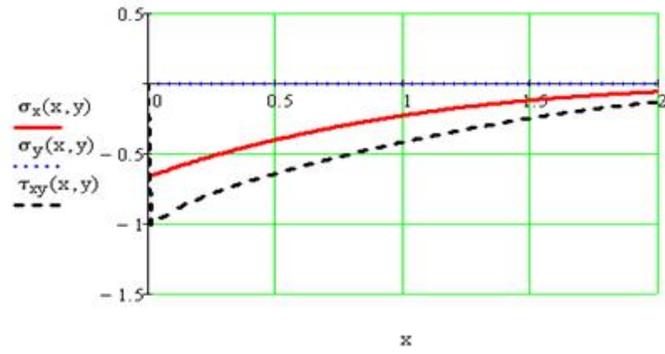


Рис. 1.5

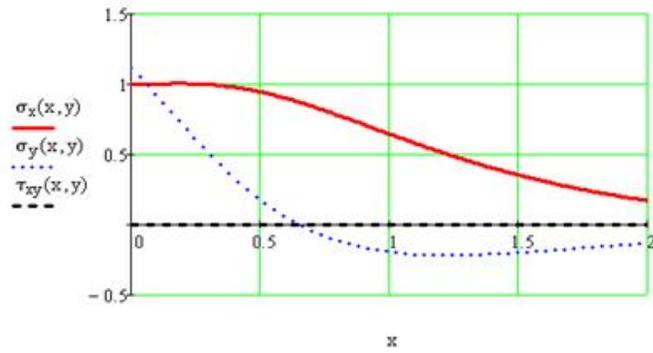


Рис. 1.6

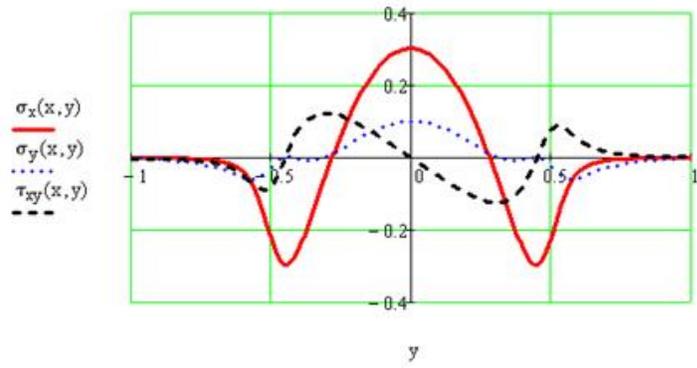


Рис. 1.7

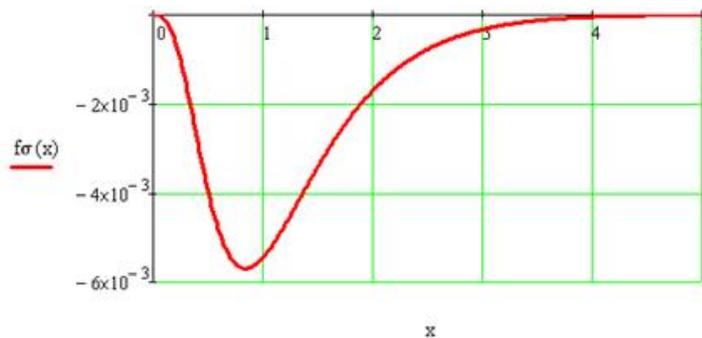


Рис. 1.8

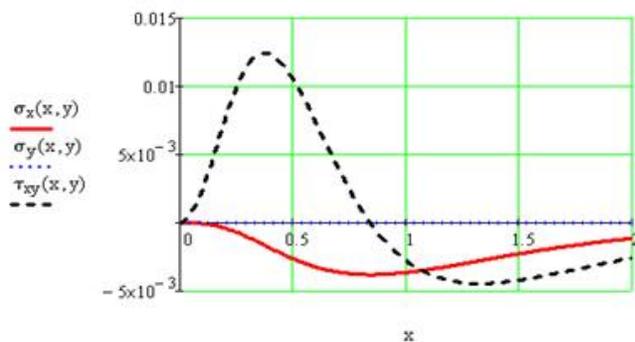


Рис. 1.9

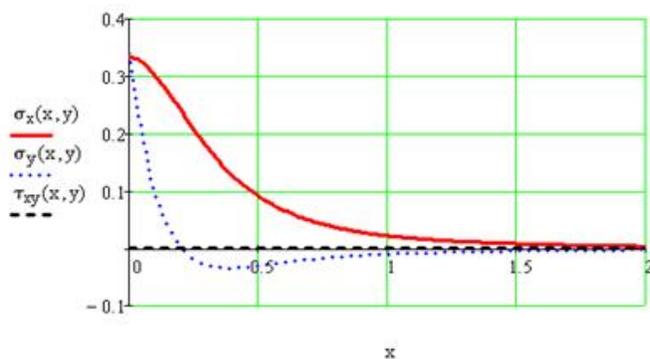


Рис. 1.10

2. Периодическая краевая задача.

Периодической краевой задаче, условная схема которой показана на рис. 2.1, соответствуют следующие граничные условия:

$$\frac{E_1 f}{2Gt} \frac{d^2 U(x, \pm 1)}{dx^2} - \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad V(x, \pm 1) = 0. \tag{2.1}$$

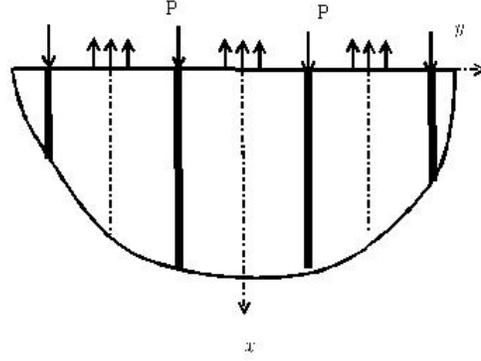


Рис. 2.1

Функции Фадля – Папковича в случае периодической краевой задачи для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими только на растяжение-сжатие, имеют вид

$$\begin{aligned}
 U(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{4} \cos \lambda_k + \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{4} y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
 V(\lambda_k, y) &= \frac{1+\nu}{4} (-\cos \lambda_k \sin \lambda_k y + y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \quad \sigma_x(\lambda_k, y) = \\
 &= \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k - \frac{3+\nu}{2} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
 \sigma_y(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
 \tau_{xy}(\lambda_k, y) &= \left(\sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$ нули (за исключением нулевых) целой функции

$$L(\lambda) = \sin^2 \lambda - D \frac{\lambda}{4} \left((\nu-3) \frac{\sin 2\lambda}{2} + (1+\nu)\lambda \right), \tag{2.3}$$

а разложения по ним выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= -\frac{1-\nu}{2} (C_0 + C_1 x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k U(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k V(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k V(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= -C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 \sigma_y(x, y) &= -\nu C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

В таблице 2 показаны значения первых пяти нулей целой функции (2.3).

Таблица 2

№ корня λ_k	$Re\lambda_k$	$Im\lambda_k$
1	1.20730	000000
2	3.83309	1.00338
3	10.15369	1.31685
4	10.15369	1.50507
5	13.30381	1.64078

Будем считать по-прежнему, что на торце полуполосы заданы нормальные и касательные напряжения. Схема решения краевой задачи не меняется, т. е. вначале изучаются разложения Лагранжа по всем системам функций Фадля – Папковича, а затем решается краевая задача. Коэффициенты a_k разложений определяются в явном виде с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича. Формулы для них получены в статье [2]. Окончательные формулы для напряжений и перемещений совпадают с формулами (1.7), (1.8), в которых числа σ_k и τ_k определяются по формулам (1.9), но функции $x_k(y)$ и $t_k(y)$ другие:

$$x_k(y) = D \frac{\cos \lambda_k y}{4\lambda_k \sin \lambda_k}, \quad t_k(y) = -D \frac{\sin \lambda_k y}{4 \sin \lambda_k}. \quad (2.5)$$

Пусть к торцам полуполос, из которых склеена рассматриваемая подкрепленная полуплоскость, приложены те же нормальные самоуравновешенные напряжения (1.20), что и в предыдущей задаче. Числа σ_k в этом случае равны

$$\sigma_k = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{y}{\alpha} \right)^2 \right] D \frac{\cos \lambda_k y}{4\lambda_k \sin \lambda_k} dy. \quad (2.6)$$

Ниже для иллюстрации приведены графики, соответствующие рассматриваемой нагрузке: распределение напряжений в сечении полуполосы $x = 0.1$ (рис. 2.2), изменение напряжений вдоль полуполосы при $y = 1$ и при $y = 0$ (рис. 2.3 и 2.4).

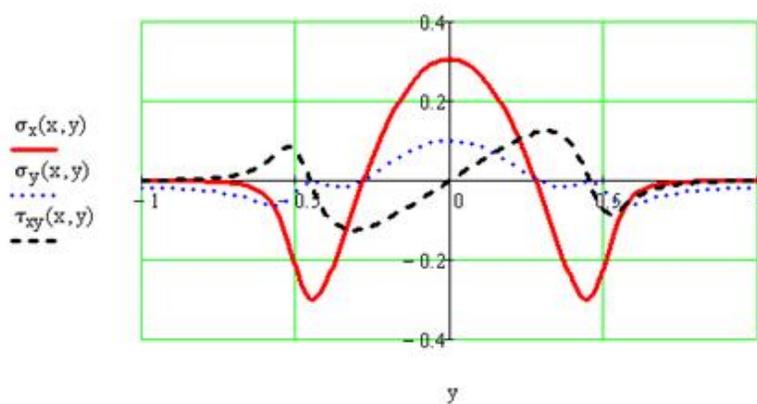


Рис. 2.2

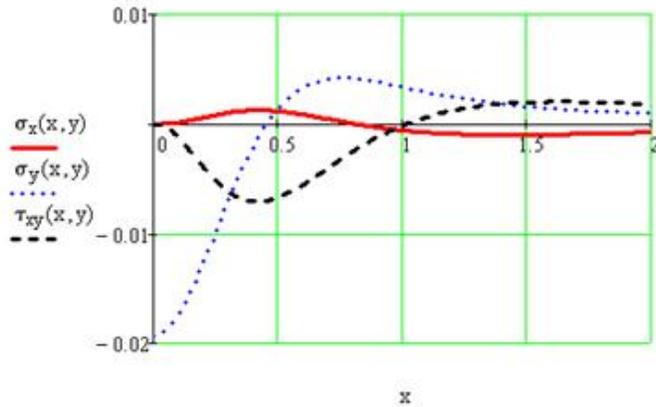


Рис. 2.3

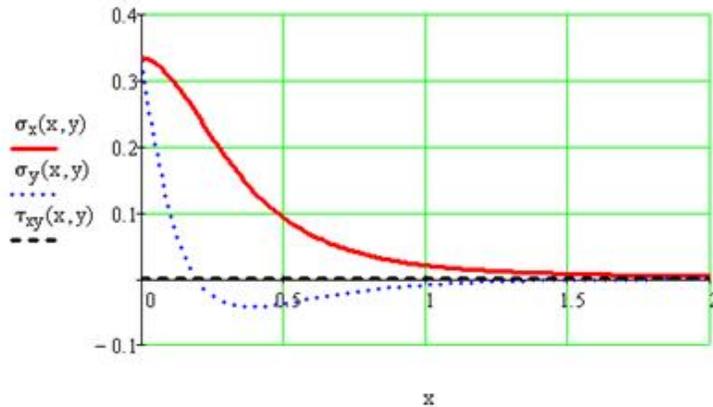


Рис. 2.4

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лапикова, Е. С. Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. Разложения Лагранжа / Е. С. Лапикова, М. Н. Юринкина, А. П. Кержаев, А. В. Никитин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 4 (18). – С. 80–97.
- [2] Лапикова, Е. С. Разложения Лагранжа в периодической задаче для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие // Е. С. Лапикова, М. Н. Юринкина, А. П. Кержаев, А. В. Никитин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 4 (18). – С. 63–79.
- [3] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
- [4] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям / М. Д. Коваленко // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352. – № 4. – С. 480–482.
- [5] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.

[6] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – №5. – С. 136–158.

Лапикова Елена Семеновна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: enchantress_tais@mail.ru

Меньшова Ирина Владимировна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: kov08@inbox.ru

I. V. Menshova, E. S. Lapikova

THE SEMISTRIP WITH LONGITUDINAL STIFFENING RIBS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In the form of explicit expansions the Fadde-Papkovich functions for the semistrip give a solution of the boundary value problem for a semi-infinite strip $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$, with longitudinal stiffening ribs. The problem is considered in two ways as non-periodic and periodic for the half-plane. Basis properties of systems of functions Fadl Papkovich arising in the solution of these problems have been studied in detail [1], [2]. We used in for the solution the method of initial functions [3]. The solutions are obtained only for symmetric deformation about the x -axis.

Keywords: semistrip, stiffening ribs, Fadde-Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] *Lapikova, E. S.* The semistrip with longitudinal stiffening ribs. The Lagrange expansion / E. S. Lapikova, M. N. Yurinkina, A. P. Kerzhaev, A. V. Nikitin // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – No. 18. – P. 86–103.
- [2] *Lapikova, E. S.* The Lagrange expansion in the periodic boundary value problem for the semistrip with longitudinal stiffening ribs / E. S. Lapikova, M. N. Yurinkina, A. P. Kerzhaev, A. V. Nikitin // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – No. 18. – P. 68–85.
- [3] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [4] *Kovalenko, M. D.* Lagrange's decomposition and uncommon zero representations according to uniform decisions / M. D. Kovalenko // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1997. – Vol. 352. – № 4. – P. 480–482.
- [5] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich's functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.
- [6] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.

Lapikova, Elena Semenovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Menchova, Irina Vladimirovna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Applied mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

И. В. Меньшова, И. А. Семенова, Н. В. Храмова

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ – ПАПКОВИЧА В ПОЛУПОЛОСЕ. ОБРАТНО-СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В виде явных разложений по функциям Фадля – Папковича даются примеры решений антисимметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе.

Ключевые слова: краевая задача, функции Фадля – Папковича, аналитические решения, обратно-симметричная задача.

УДК: 539.3+517.95

1. Введение. Рассмотрим решение первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе $\{P^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$. Будем считать, что на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ напряжения равны нулю, т. е.

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad (1)$$

а на торце $x = 0$ заданы нормальное и касательное напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \quad (2)$$

Равенство нулю напряжений на продольных сторонах полуполосы не принципиально, так как в случае ненулевых граничных условий (1) решение краевой задачи будет складываться из соответствующего решения для бесконечной полосы с ненулевыми граничными условиями при $y = \pm 1$ и решения для полуполосы с нулевыми граничными условиями (1), у которой на торце

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y) - p(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y) - q(y), \quad (3)$$

где $p(y)$ и $q(y)$ – соответственно нормальное и касательное напряжения в сечении $x = 0$ в решении для бесконечной полосы. Решение для бесконечной полосы достаточно просто находится при помощи интегрального преобразования Фурье, поэтому можно считать, что оно известно.

Искомое решение краевой задачи, описывающее напряженно-деформируемое состояние в полуполосе, должно удовлетворять уравнениям равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

и условию совместности деформаций

Поступила 08.06.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-08-00118).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5)$$

После введения функции напряжений Эри $\Phi(x, y)$ по формулам

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

уравнения равновесия тождественно удовлетворятся, а из (5) получим бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} = 0, \quad (7)$$

решение которого должно удовлетворять граничным условиям (1), (2), т. е.

$$\begin{aligned} \text{а) при } y = \pm 1 \quad & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \\ \text{б) при } x = 0 \quad & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma(y), \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \tau(y), \end{aligned} \quad (8)$$

и условиям затухания решения на бесконечности (при $x \rightarrow \infty$ $\sigma(x, y) \rightarrow 0$). Решение уравнения (7) ищется методом разделения переменных. Полагая

$$\Phi(x, y) = \phi(y)e^{\lambda x} \quad (9)$$

и подставляя (9) в (7) и (8), приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^4 \phi(y)}{dy^4} + 2\lambda^2 \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} + \lambda^4 \phi(y) = 0, \quad (10)$$

решение которого можно записать таким образом:

$$\phi(y) = C_1 \sin \lambda y + C_2 \cos \lambda y + C_3 y \sin \lambda y + C_4 y \cos \lambda y. \quad (11)$$

Из (8) следует, что функция $\phi(y)$ должна удовлетворять условиям

$$\phi(\pm 1) = \phi'(\pm 1) = 0, \quad (12)$$

вытекающим из граничных условий (8). Подставляя (11) в (12), получим трансцендентное характеристическое уравнение для определения собственных чисел λ_k и выражения для собственных функций $\phi_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots$) краевой задачи (10), (12). Возвращаясь к бигармонической функции $\Phi(x, y)$, можно записать

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(y) e^{\lambda_k x} \quad (Re \lambda_k < 0), \quad (13)$$

где a_k – неизвестные коэффициенты разложений. Подставляя (13) в формулы (6), получим следующие выражения для напряжений в полуполосе:

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}, \quad \sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}, \quad (14)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}.$$

Функции $\sigma_x(\lambda_k, y)$, $\sigma_y(\lambda_k, y)$, $\tau_{xy}(\lambda_k, y)$, входящие в эти формулы, называются функциями Фадля – Папковича. Они таковы, что граничные условия по продольным сторонам полуполосы удовлетворяются автоматически, поскольку для всех $k = 1, 2, \dots$ $\sigma_y(\lambda_k, \pm 1) = \tau_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = 0$.

Удовлетворяя с помощью формул (14) граничным условиям на торце полуполосы (2), приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов разложений a_k из соотношений

$$\sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y), \quad \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y). \quad (15)$$

Отметим, что при решении краевых задач теории упругости в виде разложений по функциям Фадля – Папковича очень удобным, а в некоторых случаях просто незаменимым является метод начальных функций [1], позволяющий, в частности, легко получать формулы для функций Фадля – Папковича.

Системы функций Фадля – Папковича можно рассматривать как обобщение тригонометрических рядов Фурье, по которым строятся классические периодические решения Файлона – Рибьера. Это показано в статье [2]. Но устроены они существенно сложнее. Главное их отличие от тригонометрических рядов заключается в том, что они не образуют базиса на отрезке (торце полуполосы), на котором задаются раскладываемые функции, в частности, не ортогональны здесь. Поэтому получить формулы для коэффициентов разложений по функциям Фадля – Папковича на основе классических методов теории базиса функций не удастся. На протяжении нескольких десятилетий, особенно в 40–80-е годы прошлого столетия, были предложены многочисленные приемы определения коэффициентов разложений по неортогональным системам функций Фадля – Папковича [3]. Однако почти все они, так или иначе, были эквивалентны приближенному определению искомых коэффициентов из бесконечной, нераспадающейся системы алгебраических уравнений.

В теории упругости речь идет о разложениях сразу двух функций (15) по двум системам функций Фадля – Папковича с одним набором коэффициентов a_k . Но прежде чем построить разложения (15), надо знать, как раскладывать в ряд одну функцию по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича, т. е. как находить коэффициенты A_k и B_k из разложений типа

$$\sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sigma_x(\lambda_k, y), \quad \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \tau_{xy}(\lambda_k, y). \quad (16)$$

Можно провести такую аналогию: хорошо известные, периодические решения Файлона – Рибьера [4], где речь также идет о разложении двух заданных на торце полуполосы функций с общим для этих разложений набором коэффициентов, в основе своей имеют теорию тригонометрических рядов Фурье. Здесь нужно отметить, что недостающий произвол, необходимый для одновременного разложения двух функций, обеспечивается тем, что в разложениях Файлона – Рибьера дважды участвует одна и та же тригонометрическая система функций (например, двукратная система функций $\{\cos k\pi y\}_{k=0}^{\infty}$ в разложениях Файлона). Поэтому в разложениях Файлона-Рибьера присутствуют, как известно, два набора искомых коэффициентов разложений. Но для каждой из раскладываемых функций после определения коэффициентов разложений в каждом сечении полуполосы $x = const$ получается обычный ряд Фурье.

Разложения (16) только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича впервые рассматривались в заметке [5], где они были названы разложениями Лагранжа. Функции Фадля – Папковича являются обобщением рядов экспонент [6] с вырожденной в отрезок (торец полуполосы) областью аналитичности и относятся к числу представляющих систем функций, изучавшихся в работах [7], [8], [9]. Они комплекснозначны, а числа λ_k ($k \geq 1$) являются нулями целой функции экспоненциального типа [10], [11], [12],

равного 2. Значения чисел λ_k зависят от вида граничных условий по продольным сторонам полуполосы. Однако они всегда распределены попарно симметрично относительно начала координат комплексной плоскости λ , образуя множество $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому формулы (14), (15), (16) соответственно можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \sigma_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x} \\ \sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y), \\ \tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y)\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \bar{A}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y), \\ \tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{B}_k \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y).\end{aligned}\quad (19)$$

В разложениях (18) двух функций с одним набором коэффициентов разложений a_k , в сравнении с разложениями Лагранжа (19) только одной функции, необходимый произвол достигается, в известной степени, проще, чем в разложениях Файлона – Рибьера по вещественнозначным системам функций. Это происходит благодаря тому, что, например, к комплексному вектору $a_k \sigma_x(\lambda_k, y)$ в формуле (18) всегда можно добавить некоторый чисто мнимый вектор, и при этом сумма векторов $a_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y)$ в (18) не изменится. Меняя числа a_k , можно единственным образом так подобрать чисто мнимые векторы, что оба ряда (18) сходятся к раскладываемым функциям. Эти ряды по построению содержат разложения чисто мнимых функций, однако они не видны явно в силу того, что мнимую единицу, стоящую при раскладываемой чисто мнимой функции, невозможно отличить от мнимой единицы, входящей в функции Фадля – Папковича. Но их нетрудно выделить, проектируя полученные разложения на вещественное направление. Так как проекции разложений чисто мнимых функций будут равны нулю, то такие разложения были названы нуль-рядами [5]. Способ выделения нуль-рядов подробно описан, например, в [13]. После выделения нуль-рядов полученные решения (в полном согласии с разложениями Файлона – Рибьера) в каждом сечении полуполосы $x = const$ будут представлять собой разложения Лагранжа.

Системы функций Фадля – Папковича не образуют базиса на отрезке (торце полуполосы). Но к ним благодаря обобщению понятия базиса все же удается построить биортогональные системы функций. В основе соответствующей теории лежит преобразование Бореля в классе квазицелых функций экспоненциального типа [14], [15]. Преобразование Бореля в классе квазицелых функций является обобщением преобразования Бореля в классе целых функций экспоненциального типа, лежащего в основе классической теории базиса на отрезке. Поэтому биортогональность для функций Фадля – Папковича является обобщением классической ортогональности на отрезке.

В силу того, что биортогональной к функциям Фадля – Папковича системы функций на отрезке не существует, но она есть на некотором контуре, содержащем этот отрезок, для того чтобы построить разложение Лагранжа некоторой функции по какой-либо системе функций Фадля – Папковича, необходимо раскладываемую функцию, первоначально заданную на отрезке – торце полуполосы, каким-либо образом продолжить вне отрезка, на котором она

задана. В зависимости от того, как выполнено это продолжение, коэффициенты разложения этой функции в ряд Лагранжа будут разными. Следовательно, разложения Лагранжа заданных на отрезке $|y| \leq 1$ функций не единственны. Поэтому аналитическое решение краевой задачи, полученное в виде разложений по функциям Фадля – Папковича, коэффициенты которых найдены при помощи биортогональных систем функций, будет не единственным. Заметим, что Е. И. Шемякин в статье [16] впервые показал, что решения краевых задач двумерной теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы и точками смены типа граничных условий не единственны. Из неединственности аналитических решений в виде разложений по функциям Фадля – Папковича вытекают два важных вывода. Во-первых, так как граничные функции, заданные на торце полуполосы, приходится продолжать вне отрезка, то в угловых точках полуполосы будут известны не только значения граничных функций, но и значения всех их производных. Следовательно, угловые точки полуполосы не являются собственно точками (как, например, в задаче для бесконечного клина), а подобны внутренним точкам полуполосы. Во-вторых, из неединственности аналитических решений для полуполосы вытекает существование нетривиальных решений с нулевыми граничными условиями на торце полуполосы. Эти решения описывают так называемые остаточные или собственные напряжения (перемещения). Впервые как точные, аналитические решения они обсуждались, наверное, в статье [13]. В этой статье для полуполосы Π^+ со свободными продольными сторонами $y = \pm 1$ и различными граничными условиями на ее торце $x = 0$ в виде явных разложений по функциям Фадля – Папковича построены решения симметричной относительно продольной оси краевой задачи.

2. Решение краевой задачи. В настоящей работе рассматривается обратно-симметричная краевая задача для той же полуполосы. Продольные стороны по-прежнему считаются свободными, а на торце заданы касательные и нормальные напряжения. Следуя [13], решение задачи будем искать в виде разложений по функциям Фадля – Папковича ($Re\lambda_k < 0$):

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \sigma_x(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \sigma_y(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \tau_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) e^{\overline{\lambda_k} x}. \end{aligned} \tag{20}$$

Функции Фадля – Папковича в случае обратно-симметричной деформации полуполосы имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k \{ (2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \}, \\ \sigma_y(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k^2 \{ \cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \}, \\ \tau_{xy}(\lambda_k, y) &= (1 + \mu)\lambda_k \{ (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}, \end{aligned} \tag{21}$$

причем $\tau_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = \sigma_y(\lambda_k, \pm 1) = 0$, μ – коэффициент Пуассона, λ_k – множество $\{\pm \lambda_k, \pm \overline{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$ всех комплексных нулей целой функции экспоненциального типа

$$L(\lambda) = \lambda - \sin \lambda \cos \lambda. \tag{22}$$

Точные значения λ_k можно определить, воспользовавшись асимптотической формулой

$$\lambda_k \approx (k + 2)\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{i}{2} \ln[4(k + 2)\pi - 3\pi]. \tag{23}$$

Формулы типа (23) получаются на основе анализа поведения функции (22) при $\lambda \rightarrow \infty$ [17]. Если с помощью соответствующих выражений (20) удовлетворить заданным на торце

полуполосы напряжениям, то придем к задаче определения неизвестных коэффициентов a_k из разложений ($\sigma(y)$ – нечетная, а $\tau(y)$ – четная функции)

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} \sigma_x(\overline{\lambda_k}, y), \\ \tau(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} \tau_{xy}(\overline{\lambda_k}, y).\end{aligned}\quad (24)$$

Они находятся отсюда в явном виде с помощью функций $X_k(y)$ и $T_k(y)$, биортогональных к функциям $\{\sigma_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tau_{xy}(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно. Уравнения для определения функций $X_k(y)$, $T_k(y)$ имеют вид [18]

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \\ \lambda_k &\in \Lambda \quad (k \geq 1).\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь $\sigma_x(\lambda, y)$, $\tau_{xy}(\lambda, y)$ – порождающие функции [12]. Необходимые для построения разложений соответствующие финитные части функций биортогональных систем определяются так, как описано в статье [13]. Окончательные формулы для них таковы ($|y| \leq 1$):

$$x_k(y) = \frac{1}{2(1 + \mu)\lambda_k^2} \left(\frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \right), \quad t_k(y) = \frac{1}{2(1 + \mu)\lambda_k} \frac{\cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k}.\quad (26)$$

Есть еще финитная функция

$$x_0(y) = \frac{3}{2}y,\quad (27)$$

отвечающая нулевым корням характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$. Она определяется из следующего уравнения, аналогичного первому уравнению (25):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda, y) X_0(y) dy = 3(1 + \mu)L(\lambda).\quad (28)$$

Функции (26), (27) равны нулю вне отрезка $[-1, 1]$.

Пусть на торце полуполосы Π^+ заданы только самоуравновешенные по моменту нормальные напряжения $\sigma(y)$, т. е. такие, что

$$\int_{-1}^1 y \sigma(y) dy = 0,\quad (29)$$

а касательные напряжения $\tau(y) = 0$. Спроектируем разложения (24) на вещественные подпространства: первое – на $X_m(y) + \overline{X_m(y)}$, второе – на $T_m(y) + \overline{T_m(y)}$. В результате для каждого номера $m \geq 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений a_m . Подставляя найденные коэффициенты в формулы (20) и выделяя в них нуль-ряды так, как это было сделано, например, в работе [13], получим следующие формулы для напряжений в полуполосе:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\sigma_y(\lambda_k, y) \lambda_k \overline{\lambda_k}}{M_k \lambda_k^2} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\},\end{aligned}\quad (30)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}.$$

Здесь введены такие обозначения: $c_k = Re \lambda_k$, $b_k = Im \lambda_k$, $c_k < 0$,

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy, \quad M_k = \sin^2 \lambda_k / \lambda_k. \tag{31}$$

Если же на торце полуполосы заданы только касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$, а нормальные равны нулю, то формулы для напряжений будут следующими:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\sigma_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \left(2c_k \cos b_k x + \frac{c_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) e^{c_k x} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\tau_k = \int_{-1}^1 \tau(y) t_k(y) dy. \tag{33}$$

3. Численные результаты. Пусть на торце полуполосы заданы самоуравновешенные по моменту нормальные напряжения

$$\sigma(y) = y^5 - \frac{10}{7}y^3 + \frac{3}{7}y. \tag{34}$$

Подставляя (34) в интеграл (31), найдем числа σ_k и полное решение задачи (30) с этими числами. На рис. 1 показаны кривые распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ и $\sigma_y(x, y)$ на торце полуполосы, обозначенные как $sx(x, y)$ и $sy(x, y)$. Нормальные напряжения $\sigma_x(0, y)$ совпадают с раскладываемой функцией (34).

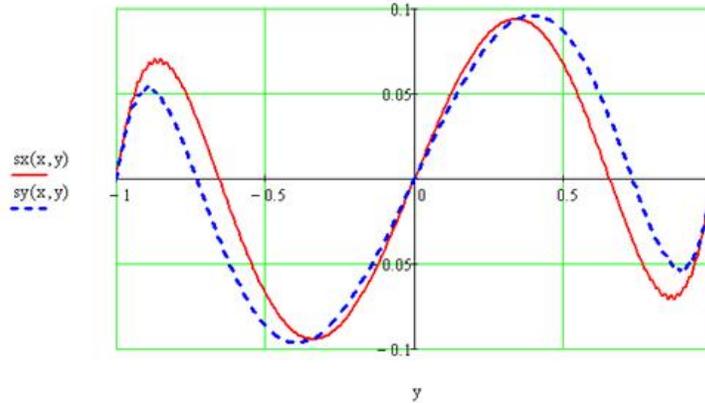


Рис. 1

На рис. 2 показано распределение нормальных и касательных напряжений (они обозначены как $txy(x, y)$) в сечении полуполосы $x = 0.5$.

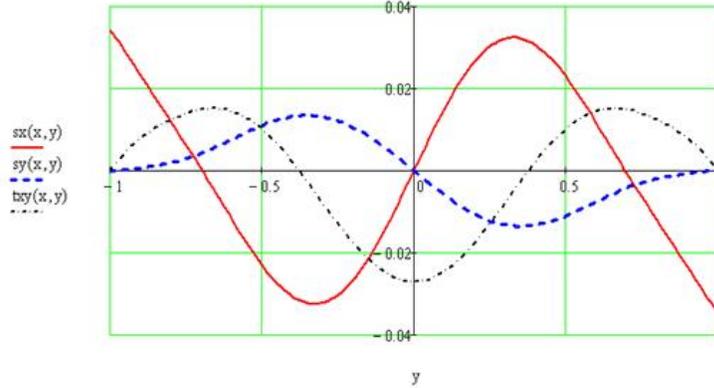


Рис. 2

Пусть на торце полуполосы в ее центре приложен сосредоточенный момент интенсивности 1, т. е.

$$\sigma(y) = \delta'(y). \quad (35)$$

Напряжения (35) не самоуравновешены по моменту. Поэтому формула для напряжений $\sigma_x(x, y)$ будет такой (остальные формулы не изменятся):

$$\sigma_x(x, y) = By + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \quad (36)$$

где

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \delta'(y) x_k(y) dy = \frac{\sin \lambda_k - \lambda_k}{2(\mu + 1)\lambda_k^2 \sin \lambda_k}, \quad (37)$$

$$B = \int_{-1}^1 \delta'(y) x_0(y) dy = -\frac{3}{2}. \quad (38)$$

На рис. 3 показаны соответствующие этой нагрузке кривые распределения нормальных и касательных напряжений в сечении полуполосы $x = 0.2$.

Рассмотрим еще один пример, когда на торце полуполосы заданы самоуравновешенные касательные напряжения

$$\tau(y) = \text{sign}(y) \sin(2\pi y). \quad (39)$$

По формуле (33) найдем

$$\tau_k = \frac{2\pi(\cos \lambda_k - 1)}{(\mu + 1)\lambda_k \sin \lambda_k (\lambda_k^2 - 4\pi^2)}. \quad (40)$$

Подставляя числа (40) в формулы (32), получим решение задачи. На рис. 4 показано распределение напряжений в сечении $x = 0.02$.

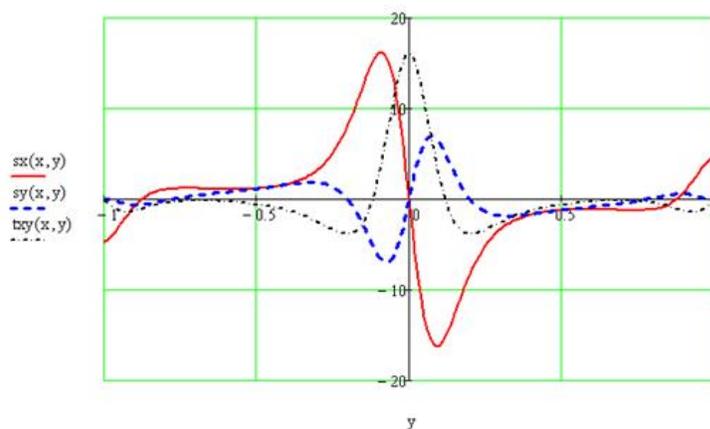


Рис. 3

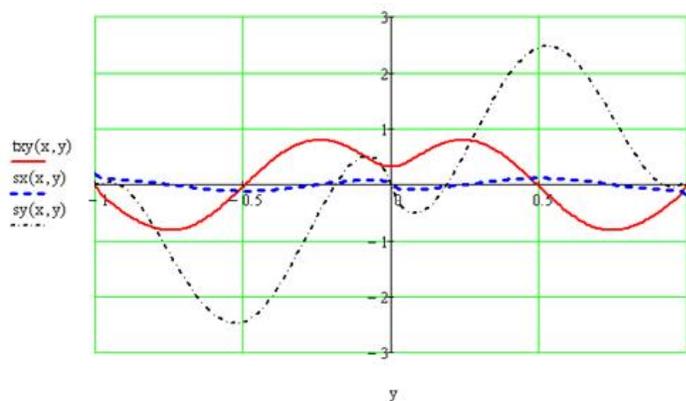


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
- [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [3] Meleshko, V. V. Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. #1. – 2003. – P. 33–85.
- [4] Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
- [5] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям / М. Д. Коваленко // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352. – № 4. – С. 480–482.
- [6] Леонтьев, А. Ф. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1976. – 536 с.
- [7] Коробейник, Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Математика. – 1980. – Т. 44. – № 5. – С. 1066–1114.

- [8] Коробейник, Ю. Ф. Представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // УМН. - 1981. - Т.36. - Вып. 1. - С. 73-126.
- [9] Коробейник, Ю. Ф. Представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Изв. АН СССР. Математика. - 1978. - Т. 42. - № 2. - С. 325-355.
- [10] Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. - М. : Гостехиздат, 1956. - 632 с.
- [11] Ахиезер, Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. - М. : Наука, 1965. - 407 с.
- [12] Ибрагимов, И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И. И. Ибрагимов. - М. : Наука, 1971. - 518 с.
- [13] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля - Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. - 2013. - №5. - С. 136-158.
- [14] Pflüger A. Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen // Commentarii Mathem. Helv. - 1935/36. - Vol. 8. - P. 89-129.
- [15] Коваленко, М. Д. О преобразовании Бореля в классе W квазицелых функций / М. Д. Коваленко // Фундаментальная и прикладная математика. - 2001. - № 3. - С. 761-774.
- [16] Шемякин, Е. И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) / Е. И. Шемякин // Доклады РАН. - 1996. - Т. 347. - № 3. - С. 342-345.
- [17] Маркушевич, А. И. Целые функции. Элементарный очерк / А. И. Маркушевич. - М. : Наука, 1965. - 108 с.
- [18] Коваленко, М. Д. Разложения Лагранжа по функциям Фадля - Папковича в обратно-симметричной задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. - 2013. - № 5(15). - С. 81-89.

Семенова Ирина Александровна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: irishka_g_05@mail.ru

Храмова Наталия Владимировна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: xramova.nataliya@mail.ru

Меньшова Ирина Владимировна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

e-mail: kov08@inbox.ru

I. V. Menshova, I. A. Semenova, N. V. Khramova

THE SEMISTRIP WITH LONGITUDINAL STIFFENING RIBS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The examples of the exact solutions for anti-symmetric boundary value problem in the semi strip are given.

Keywords: semistrip, stiffening ribs, Fadde-Papkovich functions, analytical solution.

REFERENCES

- [1] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadly – Papkovich’s functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.
- [3] *Meleshko, V. V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – P. 33–85.
- [4] *Tymoshenko, S. P.* Theory of Elasticity / S. P. Tymoshenko, J. Goodier. – M. : Nauka, 1975. – 576 p.
- [5] *Kovalenko, M. D.* Lagrange’s decomposition and uncommon zero representations according to uniform decisions / M. D. Kovalenko // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1997. – Vol. 352. – № 4. – P. 480–482.
- [6] *Leontiev, A. F.* Exponential series / A. F. Leontiev. – M. : Nauka, 1976. – 536 p.
- [7] *Korobeynik, Yu. F.* Interpolation problems, nontrivial expansions of zero, and representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. USSR Academy of Sciences. Mathematics. – 1980. – Vol. 44. – № 5. – P. 1066–1114.
- [8] *Korobeynik, Yu. F.* Representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. - 1981. – Vol. 36. – Issue 1. – P. 73–126.
- [9] *Korobeynik, Yu. F.* Representing systems / Yu. F. Korobeynik // Math. USSR Academy of Sciences. Mathematics. – 1978. – Vol. 42. – № 2. – P. 325–355.
- [10] *Levin, B. Ya.* Distribution of zeros of entire functions / B. Ya. Levin. – M. : Gostekhizdat, 1956. – 632 p.
- [11] *Akhiezer, N. I.* Lectures on the theory of approximation / N. I. Akhiezer. – M. : Nauka, 1965. – 407 p.
- [12] *Ibragimov, I. I.* Interpolation methods and functions some of their applications / I. I. Ibragimov. – M. : Nauka, 1971. – 518 p.
- [13] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadly – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158.
- [14] *Pflüger A.* Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet’scher Reihen // Commentarii Mathem. Helv. – 1935/36. – Vol. 8. – P. 89–129.
- [15] *Коваленко, М. Д.* Borel transformations in the class W quasi-functions / М. Д. Коваленко // Fundamental and Applied mathematics. – 2001. – № 3. – P. 761–774.
- [16] *Shemyakin, E. I.* On boundary value problems of elasticity theory for domains with corners (plane strain) / E. I. Shemyakin // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1996. – Vol. 347. – № 3. – P. 342–345.
- [17] *Markushevich, A. I.* Entire functions. elementary outline / A. I. Markushevich. – M. : Nauka, 1965. – 108 p.

[18] *Kovalenko, M. D.* Decompose in Lagrange funktsiyam Fadlan – Papkovicha in back-simmetrichnoy Theories uprugosti dlya pryamougolnoy polupolosy / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 5 (15). – P. 81–89.

Semenova, Irina Alexandrovna

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Khramova, Nataliya Vladimirovna

Postgraduate student, Departament of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Menchova, Irina Vladimirovna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Applied mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

Варданян Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone_mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Матченко Николай Михайлович (екс_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

Спориных Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Кулиев В. Д., Раджабов З. Р.</i> Краевая трещина продольного сдвига в биметаллах	3
<i>Зубчанинов В. Г., Алексеева Е. Г.</i> Свойство запаздывания векторных свойств материалов для гладких траекторий при сложном нагружении	21
<i>Ковалев А. В., Хвостов И. Г.</i> Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры	29
<i>Петров Н. И.</i> О деформировании растягиваемой полосы, ослабленной пологими выточками	36
<i>Калантарлы Н. М.</i> Зарождение трещины в кольцевом диске, на границе которого заданы условия первой основной задачи	46
<i>Абруков Д. А.</i> Задача изгиба полуполосы со свободными продольными краями. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича	57
<i>Немировский Ю. В.</i> Эквивалентные по предельному состоянию однородные и композитные балки	78
<i>Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В.</i> Несущая способность и оптимальное проектирование жесткопластических круглых пластинок с условием текучести Мизеса	85
<i>Немировский Ю. В.</i> Рациональное проектирование гибридных пластических балок при динамическом нагружении	97
<i>Меньшова И. В., Лапикова Е. С.</i> Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие	106
<i>Меньшова И. В., Семенова И. А., Храмова Н. В.</i> Разложения по функциям Фадля – Папковича в полуполосе. Обратносимметричная задача	119
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	131
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	134
СОДЕРЖАНИЕ	136

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2014. № 2 (20)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: Л. Н. Улюкова, Л. А. Судленкова

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 27.06.2014 г. Выход в свет 30.06.2014.
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 17,13.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38