

ВЕСТНИК

ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

им. И. Я. ЯКОВЛЕВА

СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

№ 2 • 2007

ББК 95.4; 22.251

Ч-823

Учредитель

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Главный редактор Г. Н. Григорьев

Учредители серии

Г. Н. Григорьев, Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,

Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Г. П. Черепанов, Е. И. Шемякин,

А. А. Шуканов.

Редакционная коллегия:

Ивлев Д. Д. – ответственный редактор,

Максимова Л. А., Матченко Н. М., Миронов Б. Г. – зам. ответственного редактора,

Радаев С. Ю. – ученый секретарь,

Баженов В. Г., Буренин А. А., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Каюмов Р. А., Климов Д. М.,

Маркин А. А., Манжиров А. В., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е.,

Радаев Ю. Н., Редкозубов С. А., Сенашев С. И., Спорыхин А. Н., Трещев А. А., Хромов А. И.,

Шашкин А. И., Шемякин Е. И.

Международный совет

Амензаде Р. Ю. (Азербайджан), Варданян С. В. (Армения), Мирсалимов В. М. (Азербайджан),

Тамуж В. П. (Латвия), Черепанов Г. П. (США), Чигарев А. В. (Белоруссия).

ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2007

Немировский Ю. В., Романова Т. П.

ДИНАМИКА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ДВУСВЯЗНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

*(Институт теоретической и прикладной механики СО РАН
им. С. А. Христиановича)*

В работе получено общее решение задачи о динамическом изгибе идеальной жесткопластической двусвязной пластины переменной толщины шарнирно опертой или защемленной по обоим контурам, на которую действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов деформирования пластины. Для каждого из них получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия реализации. Приведены примеры численных решений.

Ключевые слова: жесткопластическая пластина, двусвязная пластина, криволинейный контур, переменная толщина, динамическая нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

Введение. Оценка повреждения элементов конструкций в результате воздействия взрывных нагрузок является частью инженерных приложений теории динамической пластичности. Для таких задач широкое применение получила модель идеального жесткопластического тела. Упрощающие предположения этой модели полезны и разумны при анализе усложненных элементов конструкций [2].

При создании преград, защищающих от воздействия нагрузок взрывного типа, важнейшей является проблема подбора и перераспределения материала по конструкции, обеспечивающей минимальную степень повреждаемости. Эта задача непосредственно связана с проблемой оптимального проектирования, которая достаточно хорошо изучена применительно к статическим и динамическим гармоническим воздействиям на конструкции [7; 8]. В литературе неоднократно обсуждался вопрос о необходимости решения задачи оптимизации конструкций при воздействии динамических нагрузок [9]. Однако авторам настоящей работы не известны исследования по этой теме, за исключением работ [5] для балок и [3] для оболочек вращения. Предлагаемая статья продолжает исследования в данном направлении применительно к криволинейным двусвязным пластинам.

В работе предложена методика, основанная на модели идеального жесткопластического тела, которая позволяет рассчитывать криволинейные двусвязные пластины переменной толщины определенного вида под действием кратковременных интенсивных динамических нагрузок. Методика может быть использована специалистами, работающими в областях, связанных со взрывными нагрузками.

1. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую двусвязную пластину переменной толщины. Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой интенсивностью $P(t)$, которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ с последующим быстрым его уменьшением. Внешний и внутренний контуры пластины шарнирно оперты или защемлены. Пластина имеет произвольный гладкий выпуклый внешний контур L_1 , заданный в параметрической форме: $x = x_1(\varphi)$, $y = y_1(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Радиус кривизны контура L_1 равен $R(\varphi) = L^3(\varphi)/(x_1' y_1'' - x_1'' y_1')$, где $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$, $(\quad)' = \partial(\quad)/\partial\varphi$. Для определенности рассматриваем пластины, симметричные относительно оси x , имеющие геометрические размеры по оси y не больше, чем по оси x (рис. 1). Рассмотрим такие двусвязные пластины, у которых внутренний контур L_2 находится на одинаковом расстоянии λ от внешнего контура L_1 , причем величину λ выбираем так, чтобы нормали, опущенные из L_1 во внутрь пластины, не пересекались между собой внутри пластины (рис. 1). Это условие выполняется, если $0 < \lambda \leq \min_{\varphi} [R(\varphi)]$.

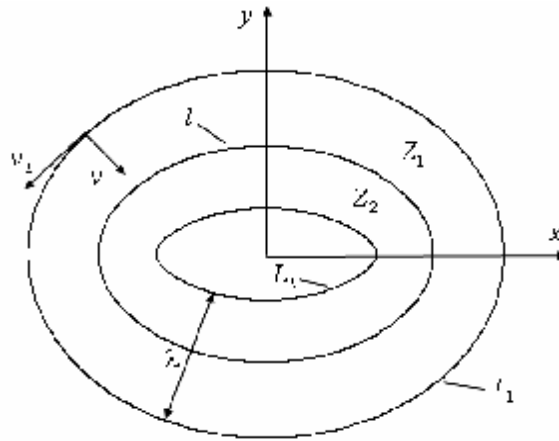


Рис. 1

Введем криволинейную ортогональную систему координат (v_1, v_2) (рис. 1), связанную с декартовой системой координат (x, y) соотношениями

$$x = x_1(v_2) - v_1 y_1'(v_2) / L(v_2), \quad y = y_1(v_2) + v_1 x_1'(v_2) / L(v_2).$$

Кривые $v_1 = \text{const}$ находятся на расстоянии v_1 от контура l и имеют радиус кривизны $\rho_1 = R(v_2) - v_1$. Прямые линии $v_2 = \text{const}$ перпендикулярны к контуру l (радиус кривизны $\rho_2 = \infty$). В этом случае уравнения контуров пластины L_i ($i = 1, 2$) имеют вид $v_1 = (i-1)\lambda$ ($0 \leq v_2 \leq 2\pi$).

Считаем, что толщина пластины h является функцией параметра v_1 и изменяется симметрично относительно срединной поверхности пластины. В работе предлагается модель деформирования пластины с постоянной толщиной в центральной части пластины и изменяющейся вблизи контуров, т. е.

$$h(v_1) = \text{const} \quad \text{при} \quad v_{11}^{\tilde{n}} \leq v_1 \leq v_{12}^{\tilde{n}}, \quad (1)$$

где $v_{li}^{\bar{n}}$ ($i=1,2$) – некоторые заданные значения. Другие ограничения на функцию $h(v_1)$ и величину P_{\max} , связанные с предлагаемой моделью, приведены ниже.

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала в зависимости от значения P_{\max} возможно деформирование по двум схемам. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки (“низких” нагрузках), пластина остается в покое. Как и в случае постоянной толщины [7], при нагрузках, незначительно превышающих предельные нагрузки (“средних” нагрузках), во внутренней области пластины образуется криволинейный пластический шарнир l , а вся пластина деформируется в две конические поверхности Z_1 и Z_2 (схема 1, представленная на рис. 1). При достаточно высоких значениях P_{\max} динамика пластины может сопровождаться возникновением области Z_p , движущейся поступательно (схема 2, представленная на рис. 2; “высокие” нагрузки). Область постоянной толщины ($v_{11}^{\bar{n}} \leq v_1 \leq v_{12}^{\bar{n}}$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$) должна включать в себя область Z_p . Обозначим толщину пластины в области Z_p через h_c . Контуры области Z_p – линии l_i ($i=1,2$) являются пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом $\sigma_0 h_c^2 / 4$.

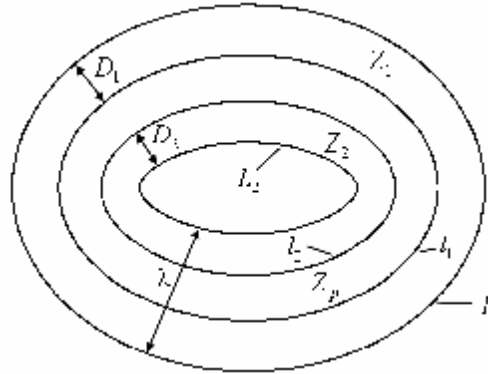


Рис. 2

Нормаль к L_i ($i=1,2$), опущенная во внутрь пластины, попадает на l_i – контур области Z_p . В работе [7] показано, что расстояние D_i по нормали к L_i между L_i и l_i ($i=1,2$) не зависит от параметра v_2 , а уравнения l_i имеют вид

$$v_1 = (i-1)\lambda + (-1)^{i-1} D_i, \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi \quad (i=1,2). \quad (2)$$

Обозначим скорость прогиба в области Z_p через $\dot{\alpha}_i(t)$. В силу непрерывности скоростей на границах областей Z_p и Z_i ($i=1,2$) и независимости D_i от параметра v_2 , скорость угла поворота областей Z_i вокруг опорного контура L_i не зависит от параметра v_2 . Обозначим ее через $\dot{\alpha}_i(t)$. В случае схемы деформирования 1, когда выполняется соотношение

$$D_1 + D_2 = \lambda, \quad (3)$$

область Z_p вырождается в кривую l , имеющую вид (1) при условии (2). Следовательно, при схеме 1 скорость угла поворота областей Z_i вокруг опорного контура L_i также не зависит от параметра v_2 . Обозначим ее тоже через $\dot{\alpha}_i(t)$. Нормальный изгибающий мо-

мент на кривой l равен $\sigma_0 h^2(D_1)/4$, где σ_0 – предел текучести материала пластины. Поле скоростей прогибов $w(v_1, v_2, t)$ пластины имеет вид

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \in Z_p : w(v_1, v_2, t) &= w_c(t), \\ (v_1, v_2) \in Z_i : w(v_1, v_2, t) &= w_i(t) \left[(i-1)\lambda + (-1)^{i-1} v_1 \right] \quad (i=1, 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины в областях Z_i ($i=1, 2$) имеют вид:

$$(\kappa_1)_i = \frac{\partial^2 w}{\partial v_1^2} = 0, \quad (\kappa_2)_i = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial w}{\partial v_1} = \frac{(-1)^{i-1} w_i(t)}{R(v_2) - v_1}.$$

Уравнение движения пластины получим из принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера [9]:

$$K = A - N. \quad (5)$$

Здесь

$$K = \iiint_V \rho_V \dot{w}^* dV, \quad A = \iint_S P(t) \dot{w}^* dS;$$

K , A , N – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно; V , S – объем и площадь пластины; ρ_V – плотность материала пластины, w – прогиб; dV , dS – элементы объема и площади. Точки над символами обозначают производные по времени. Величины с верхним индексом “*” – допустимые скорости. Выражение для N запишем ниже.

В областях Z_i ($i=1, 2$) изгибающий момент равен $M_{22} = \sigma_0 h^2(v_1)/4$. На контуре L_i пластины $M_{11} = -\sigma_0 h^2((i-1)\lambda)(1-\eta_i)/4$, где $\eta_i = 0$ при защемлении контура L_i и $\eta_i = 1$ при его шарнирном опирании.

Учитывая распределение скорости прогибов (4), и то, что $dV = h(v_1) ds$ и $ds = L(1 - v_1/R) dv_1 dv_2$, а в области Z_p выполняется равенство $h(v_1) = h_c$, получим

$$\begin{aligned} K &= \rho_V \left[\sum_{i=1,2} w_i^* \iint_{Z_i} h(v_1) v_1^2 ds + w_c^* \iint_{Z_p} h ds \right] = \rho_V \left(\sum_{i=1,2} w_i^* \Omega_{1i} + w_c^* h_c \iint_{Z_p} ds \right), \\ A &= P(t) \left[\sum_{i=1,2} w_i^* \iint_{Z_i} v_1 ds + w_c^* \iint_{Z_p} ds \right] = P(t) \left(\sum_{i=1,2} w_i^* \Omega_{2i} + w_c^* \iint_{Z_p} ds \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Omega_{11}(D_1) = \int_0^{2\pi} L \left[\int_0^{D_1(t)} h(v_1) v_1^2 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2, \quad \Omega_{21}(D_1) = \int_0^{2\pi} L \left[\int_0^{D_1(t)} v_1 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2,$$

$$\Omega_{12}(D_2) = \int_0^{2\pi} L \left[\int_{\lambda - D_2(t)}^{\lambda} h(v_1) (\lambda - v_1)^2 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2,$$

$$\Omega_{22}(D_2) = \int_0^{2\pi} L \left[\int_{\lambda - D_2(t)}^{\lambda} (\lambda - v_1) \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2.$$

Выражение для мощности внутренних сил N в (5) представим в виде

$$N = \sum_{j=1}^6 N_j,$$

где $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ – мощности внутренних сил на контурах L_1 и L_2 , внутри областей Z_1 и Z_2 , на контурах l_1 и l_2 соответственно:

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1-\eta_1)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{4} \int_{L_1} [\mathfrak{G}]_{L_1} dL_1 \quad (dL_1 = Ldv_2), \\
N_2 &= (1-\eta_2)\sigma_0 \frac{h^2(\lambda)}{4} \int_{L_2} [\mathfrak{G}]_{L_2} dL_2 \quad (dL_2 = L(1-\frac{\lambda}{R})dv_2), \\
N_3 &= \frac{\sigma_0}{4} \iint_{Z_1} h^2(v_1)(\kappa_2)_1 ds, & N_4 &= \frac{\sigma_0}{4} \iint_{Z_2} h^2(v_1)(\kappa_2)_2 ds, \\
N_5 &= \frac{\sigma_0}{4} h^2(D_1) \int_{l_1} [\mathfrak{G}]_{l_1} dl_1 \quad (dl_1 = L(1-\frac{D_1}{R})dv_2), \\
N_6 &= \frac{\sigma_0}{4} h^2(\lambda - D_2) \int_{l_2} [\mathfrak{G}]_{l_2} dl_2 \quad (dl_2 = L(1-\frac{\lambda - D_2}{R})dv_2).
\end{aligned}$$

Здесь $[\mathfrak{G}]_{l_m}$ – разрыв угловой скорости на линии l_m ; dL_i , dl_i – элементы длины линий L_i , l_i ($i=1,2$). Из (4) с учетом того что нормаль к линии l_i является нормалью к контуру L_i , следует, что $[\mathfrak{G}]_{L_i} = [\mathfrak{G}]_{l_i} = \mathfrak{G}_i$. Тогда

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1-\eta_1)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{4} \mathfrak{G}_1^* \int_0^{2\pi} L dv_2, & N_2 &= (1-\eta_2)\sigma_0 \frac{h^2(\lambda)}{4} \mathfrak{G}_2^* \int_0^{2\pi} L(1-\frac{\lambda}{R}) dv_2, \\
N_3 &= \frac{\sigma_0}{4} \mathfrak{G}_1^* \iint_{Z_1} h^2(v_1) \frac{1}{R(v_2)-v_1} ds = \frac{\sigma_0}{4} \mathfrak{G}_1^* (\int_0^{2\pi} \frac{L}{R} dv_2) \int_0^{D_1(t)} h^2 dv_1, \\
N_4 &= \frac{-\sigma_0}{4} \mathfrak{G}_2^* \iint_{Z_2} h^2(v_1) \frac{1}{R(v_2)-v_1} ds = \frac{-\sigma_0}{4} \mathfrak{G}_2^* (\int_0^{2\pi} \frac{L}{R} dv_2) \int_{\lambda-D_2(t)}^{\lambda} h^2 dv_1, \\
N_5 &= \frac{\sigma_0}{4} h^2(D_1) \mathfrak{G}_1^* \int_0^{2\pi} L(1-\frac{D_1}{R}) dv_2, & N_6 &= \frac{\sigma_0}{4} h^2(\lambda - D_2) \mathfrak{G}_2^* \int_0^{2\pi} L(1-\frac{\lambda - D_2}{R}) dv_2.
\end{aligned}$$

Полная мощность внутренних сил пластины N определяется выражением

$$N = \sigma_0 \sum_{i=1,2} (\mathfrak{G}_i^* \Omega_{3i}), \quad (7)$$

$$\Omega_{31}(D_1) = (N_1 + N_3 + N_5) / (\mathfrak{G}_1^* \sigma_0), \quad \Omega_{32}(D_2) = (N_2 + N_4 + N_6) / (\mathfrak{G}_2^* \sigma_0).$$

Заметим, что если $h(v_1) = \text{const}$, то

$$N = \sigma_0 \frac{h^2}{4} [(2-\eta_1) \mathfrak{G}_1^* \int_0^{2\pi} L dv_2 + (2-\eta_2) \mathfrak{G}_2^* \int_0^{2\pi} L(1-\frac{\lambda}{R}) dv_2].$$

Подставляя выражения для K , A , N в (5) и учитывая, что \mathfrak{G}_i^* ($i=1,2$), \mathfrak{V}_c^* независимы, получим уравнения движения при деформировании по схеме 2:

$$\rho_V \mathfrak{G}_i^* \Omega_{1i} = P(t) \Omega_{2i} - \sigma_0 \Omega_{3i} \quad (i=1,2), \quad (8)$$

$$\rho_V h_c \mathfrak{V}_c^* = P(t). \quad (9)$$

Из условия непрерывности скоростей на границах областей Z_i и Z_p получим

$$\mathfrak{G}_i D_i = \mathfrak{V}_c \quad (i=1,2). \quad (10)$$

Начальные условия имеют вид

$$\mathfrak{G}_i(0) = \alpha_i(0) = \mathfrak{V}_c(0) = w_c(0) = 0. \quad (11)$$

Начальные значения $D_{i0} = D_i(0)$ для функций $D_i(t)$, ($i = 1, 2$) определяются в зависимости от значения P_{\max} (см. ниже).

Система уравнений (8) – (10) описывает движение в случае деформирования по схеме 2. В случае схемы 1 область Z_p отсутствует, а движение определяется уравнениями (8), (3) и

$$\mathfrak{G}_1 D_1 = \mathfrak{G}_2 (\lambda - D_1). \quad (12)$$

2. Проведем анализ деформирования пластины. Если $0 < P_{\max} \leq P_0$ («низкие» нагрузки), где P_0 – предельная нагрузка, то пластина остается в состоянии покоя. Величину P_0 определим из уравнений (8), (3) в момент начала движения $t = 0$, считая $\mathfrak{G}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$). Тогда

$$P_0 = \sigma_0 \Omega_{31}(D_1^*) / \Omega_{21}(D_1^*), \quad (13)$$

где D_1^* – значение D_1 при $P_{\max} = P_0$; D_1^* удовлетворяет уравнению

$$\Omega_{31}(D_1^*) / \Omega_{21}(D_1^*) = \Omega_{32}(\lambda - D_1^*) / \Omega_{22}(\lambda - D_1^*).$$

Если $P_0 < P_{\max} \leq P_1$ («средние» нагрузки), где P_1 – нагрузка, соответствующая появлению области Z_p , то движение происходит без области Z_p по схеме 1. Дифференцируя (10) по времени и исключая величины \mathfrak{G}_i ($i = 1, 2$), \mathfrak{G}_c из полученных равенств с помощью (8), (9), получим соотношения

$$\frac{-\rho_V \mathfrak{G}_i D_i}{D_i} \Omega_{1i} = P(t) (\Omega_{2i} - \frac{\Omega_{1i}}{D_i h_c}) - \sigma_0 \Omega_{3i} \quad (i = 1, 2). \quad (14)$$

Нагрузку P_1 определим из (14), учитывая, что при возникновении области Z_p в момент времени $t = 0$ условие (3) имеет вид $D_1^{**} + D_2^{**} = \lambda$, где D_i^{**} – значение D_i ($i = 1, 2$) при $P_{\max} = P_1$. Тогда

$$P_1 = \frac{\sigma_0 \Omega_{31}(D_1^{**})}{\Omega_{21}(D_1^{**}) - \Omega_{11}(D_1^{**}) / (D_1^{**} h_c)},$$

где D_1^{**} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Omega_{31}(D_1^{**})}{\Omega_{21}(D_1^{**}) - \Omega_{11}(D_1^{**}) / (D_1^{**} h_c)} = \frac{\Omega_{32}(\lambda - D_1^{**})}{\Omega_{22}(\lambda - D_1^{**}) - \Omega_{12}(\lambda - D_1^{**}) / [(\lambda - D_1^{**}) h_c]}.$$

При схеме 1 движение описывается уравнениями (3), (8), (12). Определим начальные значения D_{i0} ($i = 1, 2$) для схемы 1. Из (8), учитывая (11), имеем

$$\rho_V \mathfrak{G}_i = \int_0^t \frac{P(\tau) \Omega_{2i} - \sigma_0 \Omega_{3i}}{\Omega_{1i}} d\tau \quad (i = 1, 2).$$

Из последних равенств и (12) получим

$$D_1 / D_2 = \left\{ \int_0^t [(P(\tau) \Omega_{22} - \sigma_0 \Omega_{32}) / \Omega_{12}] d\tau \right\} / \left\{ \int_0^t [(P(\tau) \Omega_{21} - \sigma_0 \Omega_{31}) / \Omega_{11}] d\tau \right\}.$$

Переходя в последнем выражении к пределу $t \rightarrow 0$ и учитывая (3), получим уравнение для определения D_{10} :

$$D_{10} \frac{P_{\max} \Omega_{21}(D_{10}) - \sigma_0 \Omega_{31}(D_{10})}{\Omega_{11}(D_{10})} = (\lambda - D_{10}) \frac{P_{\max} \Omega_{22}(\lambda - D_{10}) - \sigma_0 \Omega_{32}(\lambda - D_{10})}{\Omega_{12}(\lambda - D_{10})}; \quad (15)$$

D_{20} определяется из равенства (3):

$$D_{20} = \lambda - D_{10}. \quad (16)$$

Система уравнений (3), (8), (12) с начальными условиями (11), (15), (16) решается численно методом Рунге – Кутта. Момент остановки движения t_f определяется из условия

$$\dot{\mathcal{E}}_i(t_f) = 0 \quad (i=1,2). \quad (17)$$

Прогибы в пластине определяются из соотношений (4).

Если $P_{\max} > P_1$ («высокие» нагрузки), то движение начнется с развитой областью Z_p . В первой фазе деформирования ($0 < t \leq t_1$) движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (8) – (10) с начальными условиями (11). Начальные условия D_{i0} ($i=1,2$) для схемы 2 определяются из (12) при $t=0$:

$$P_{\max} [\Omega_{2i}(D_{i0}) - \Omega_{1i}(D_{i0}) / (D_{i0} h_c)] = \sigma_0 \Omega_{3i}(D_{i0}) \quad (18)$$

В этой фазе происходит уменьшение области Z_p ($\dot{D}_i > 0$, $i=1,2$) по закону (14). Система определяющих уравнений решается численно методом Рунге – Кутта. Время t_1 , соответствующее исчезновению области Z_p , определяется из условия $D_1(t_1) + D_2(t_1) = \lambda$. В момент времени t_1 определяются значения $w_c(t_1)$, $\dot{\mathcal{E}}_i(t_1)$, $\alpha_i(t_1)$ ($i=1,2$). В этой фазе возможна остановка движения при $D_1(t_{1f}) + D_2(t_{1f}) < \lambda$ в момент t_{1f} , определяемый из уравнения $\dot{\mathcal{E}}_i(t_{1f}) = 0$. Если $t_1 < t_{1f}$, то движение продолжится во второй фазе.

Вторая фаза ($t_1 < t \leq t_f$) движения пластины происходит по схеме 1 до остановки в момент времени t_f . Деформирование описывается уравнениями (3), (8), (12) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения. Время остановки определяется условием (17). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (4) с учетом всех фаз движения.

3. Рассматриваемая схема деформирования применима для пластин с толщиной $h(v_1)$ специального вида (1). Рассмотрим другие ограничения, налагаемые на функцию $h(v_1)$ и величину P_{\max} при использовании предлагаемой схемы деформирования. Эти условия можно получить, сравнивая предельную нагрузку P_0 с предельной нагрузкой для других возможных схем движения.

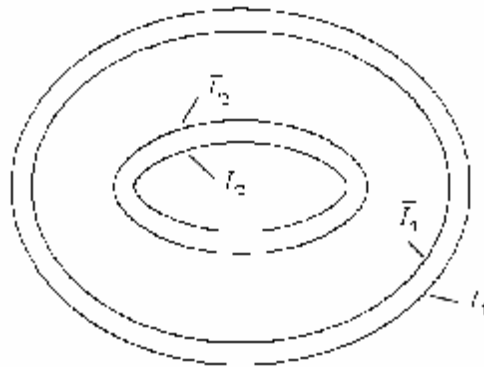


Рис. 3

Пластины переменной толщины могут деформироваться с образованием краевых пластических шарниров \bar{L}_i ($i=1,2$) не по периметру контура опирания, а на некотором расстоянии v_{li}^a от контура L_i внутри пластины. При этом область у опорного контура пластины остается недеформированной. Уравнение контура \bar{L}_i имеет вид $v_1 = v_{li}^a$ ($0 \leq v_2 \leq 2\pi$) (рис. 3). На линии \bar{L}_i нормальный изгибающий момент равен $\sigma_0 h^2 (v_{li}^a) / 4$.

Если образуется шарнир \bar{L}_1 , а \bar{L}_2 – нет, то в выражениях (6, 7) для A и N значения Ω_{21} и Ω_{31} следует заменить на $\Omega_{21}^{a_1}$ и $\Omega_{31}^{a_1}$ соответственно, где

$$\begin{aligned}\Omega_{21}^{a_1}(D_1) &= \int_0^{2\pi} L \left[\int_{v_{11}^a}^{D_1(t)} (v_1 - v_{11}^a) \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2, \\ \Omega_{31}^{a_1}(D_1) &= (N_1^{a_1} + N_3^{a_1} + N_5) / (\mathfrak{E}_1^* \sigma_0), \\ N_1^{a_1} &= \sigma_0 \frac{h^2 (v_{11}^a)}{4} \mathfrak{E}_1^* \int_0^{2\pi} L \left(1 - \frac{v_{11}^a}{R}\right) dv_2, \quad N_3^{a_1}(D_1) = \frac{\sigma_0}{4} \mathfrak{E}_1^* \left(\int_0^{2\pi} \frac{L}{R} dv_2 \right) \int_{v_{11}^a}^{D_1(t)} h^2 dv_1.\end{aligned}$$

Тогда предельная нагрузка $P_0^{a_1}$ равна

$$P_0^{a_1} = \sigma_0 \Omega_{31}^{a_1}(D_1^{a_1}) / \Omega_{21}^{a_1}(D_1^{a_1}), \quad (19)$$

где величина $D_1^{a_1}$ определяется из уравнения

$$\Omega_{31}^{a_1}(D_1^{a_1}) / \Omega_{21}^{a_1}(D_1^{a_1}) = \Omega_{32}(\lambda - D_1^{a_1}) / \Omega_{22}(\lambda - D_1^{a_1}).$$

Если образуется шарнир \bar{L}_2 , а \bar{L}_1 – нет, то в выражениях (6, 7) для A и N значения Ω_{22} и Ω_{32} следует заменить на $\Omega_{22}^{a_2}$ и $\Omega_{32}^{a_2}$ соответственно, где

$$\begin{aligned}\Omega_{22}^{a_2}(D_2) &= \int_0^{2\pi} L \left[\int_{v_{12}^a - D_2}^{v_{12}^a} (v_{12}^a - v_1) \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2, \\ \Omega_{32}^{a_2}(D_2) &= (N_2^{a_2} + N_4^{a_2} + N_6) / (\mathfrak{E}_2^* \sigma_0), \quad N_2^{a_2} = \sigma_0 \frac{h^2 (v_{12}^a)}{4} \mathfrak{E}_2^* \int_0^{2\pi} L \left(1 - \frac{v_{12}^a}{R}\right) dv_2, \\ N_4^{a_2}(D_2) &= \frac{-\sigma_0}{4} \mathfrak{E}_2^* \left(\int_0^{2\pi} \frac{L}{R} dv_2 \right) \int_{v_{12}^a - D_2}^{v_{12}^a} h^2 dv_1.\end{aligned}$$

В этом случае предельная нагрузка $P_0^{a_2}$ равна

$$P_0^{a_2} = \sigma_0 \Omega_{31}(D_1^{a_2}) / \Omega_{21}(D_1^{a_2}),$$

где величина $D_1^{a_2}$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega_{31}(D_1^{a_2}) / \Omega_{21}(D_1^{a_2}) = \Omega_{32}^{a_2}(v_{12}^a - D_1^{a_2}) / \Omega_{22}^{a_2}(v_{12}^a - D_1^{a_2}).$$

Если образуются оба шарнира \bar{L}_1 и \bar{L}_2 , то предельная нагрузка $P_0^{a_3}$ равна

$$P_0^{a_3} = \sigma_0 \Omega_{31}^{a_1}(D_1^{a_3}) / \Omega_{21}^{a_1}(D_1^{a_3}),$$

где величина $D_1^{a_3}$ определяется из уравнения

$$\Omega_{31}^{a_1}(D_1^{a_3}) / \Omega_{21}^{a_1}(D_1^{a_3}) = \Omega_{32}^{a_2}(v_{12}^a - D_1^{a_3}) / \Omega_{22}^{a_2}(v_{12}^a - D_1^{a_3}).$$

В данной работе мы не будем рассматривать случай, когда значение h_c достаточно большое. При очень большом значении h_c в некоторой центральной области Z_c

($v_{11}^c \leq v_1 \leq v_{12}^c$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$) изгибающий момент $M_{22} = \sigma_0 h_c^2 / 4$ будет намного больше, чем в остальной части пластины. Следовательно, область Z_c деформироваться не будет. Тогда движение пластины будет происходить при наличии центральной жесткой области Z_c , которая может двигаться поступательно или жестко вращаться в зависимости от значений v_{1i}^a ($i = 1, 2$). Это будет отдельное самостоятельное исследование поведения криволинейной двусвязной пластины с жесткой вставкой.

Если функция $h(v_1)$ имеет такой вид, что выполняется неравенство $P_0 < \min(P_0^{a_1}, P_0^{a_2}, P_0^{a_3})$, то пластина будет деформироваться по схемам 1 и 2, рассмотренным в пп. 1, 2. Поскольку предложенная модель движения получена в предположении, что $h(v_1) = \text{const} = h_c$ в области Z_p , то из (18) следует, что должно выполняться ограничение на величину P_{\max} :

$$P_{\max} \leq \min_{i=1,2} \frac{\sigma_0 \Omega_{3i}(v_{1i}^c)}{\Omega_{2i}(v_{1i}^c) - \Omega_{1i}(v_{1i}^c) / (v_{1i}^c h_c)}.$$

Для пластин с постоянной толщиной модель применима при любых значениях величины P_{\max} . При нагрузках с $P_{\max} \leq P_1$ модель верна для любой функции $h(v_1)$, а деформирование происходит по схеме 1.

Если выполняется условие

$$P_0^{a_1} < \min(P_0, P_0^{a_2}, P_0^{a_3}), \quad (20)$$

то пластина деформируется только в области с контурами \bar{L}_1 ($v_1 = v_{11}^a$; $0 \leq v_2 \leq 2\pi$) и L_2 . При этом величина v_{11}^a соответствует минимальному значению $P_0^{a_1}$, для которого выполняется неравенство (20). Анализ поведения в рассматриваемом случае подобен исследованию, проведенному в п. 2, но с заменой контура L_1 на заземленный контур \bar{L}_1 .

Если выполняется неравенство

$$P_0^{a_2} < \min(P_0, P_0^{a_1}, P_0^{a_3}), \quad (21)$$

то пластина деформируется только в области с контурами L_1 и \bar{L}_2 ($v_1 = v_{12}^a$; $0 \leq v_2 \leq 2\pi$). При этом величина v_{12}^a соответствует минимальному значению $P_0^{a_2}$, для которого выполняется неравенство (21). Анализ поведения в рассматриваемом случае подобен анализу, выполненному в п. 2, но с заменой контура L_2 на заземленный контур \bar{L}_2 .

Если выполняется условие

$$P_0^{a_3} < \min(P_0, P_0^{a_1}, P_0^{a_2}), \quad (22)$$

то пластина деформируется только в области с контурами \bar{L}_1 и \bar{L}_2 . При этом величины v_{11}^a и v_{12}^a соответствуют минимальному значению $P_0^{a_3}$, для которого выполняется неравенство (22). Анализ поведения в этом случае будет подобен анализу, проведенному в п. 2 при замене контуров L_1 и L_2 на заземленные контуры \bar{L}_1 и \bar{L}_2 соответственно.

4. В качестве примера рассмотрим двусвязную пластину переменной толщины в форме эллипса с полуосями a и b ($b/a = \gamma \leq 1$). Для такой пластины величина λ выбирается в интервале $0 < \lambda \leq b^2/a$ и выполняются равенства: $L(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$,

$\int_0^{2\pi} \frac{L}{R} d\varphi = 2\pi$, $\int_0^{2\pi} L d\varphi \approx \pi Q a$, где $Q = 1,5(1 + \gamma) - \sqrt{\gamma}$ (см. [8]). Рассмотрим случай функции

толщины пластины, линейно увеличивающейся вблизи внешнего контура пластины и постоянной в остальной части:

$$h(v_1) = \begin{cases} h(0) \left(-\frac{1-\xi}{\lambda_1} v_1 + 1 \right) & (0 \leq v_1 \leq \lambda_1), \\ h(0) \xi & (\lambda_1 \leq v_1 \leq \lambda), \end{cases} \quad (23)$$

где $\xi = h(\lambda_1)/h(0) \leq 1$, $\lambda_1 > 0$ (рис. 4). При $\xi = 1$ толщина постоянная.

Для рассматриваемой пластины имеем

$$\Omega_{11}(D_1) = h(0) \frac{\pi a^4}{60} \left\{ \gamma_1^3 (1-\xi) [5Q - 6\gamma_1 (1-\xi)] + 10\xi \left(\frac{D_1}{a}\right)^3 (2Q - 3\frac{D_1}{a}) \right\},$$

$$\Omega_{12}(D_2) = h(0) \frac{\pi a^4 \xi}{6} \left(\frac{D_2}{a}\right)^3 \left[2(Q - 2\gamma_1) + 3\frac{D_2}{a} \right],$$

$$\Omega_{21}(D_1) = \frac{\pi a^3}{6} \left(\frac{D_1}{a}\right)^2 (3Q - 4\frac{D_1}{a}), \quad \Omega_{22}(D_2) = \frac{\pi a^3}{6} \left(\frac{D_2}{a}\right)^2 \left[3(Q - 2\gamma_1) + 4\frac{D_2}{a} \right],$$

$$\Omega_{31}(D_1) = \pi a \frac{h^2(0)}{4} \left[Q(1 - \eta_1 + \xi^2) + \frac{2}{3}(1 - \xi)(1 + 2\xi)\gamma_2 \right],$$

$$\Omega_{32}(D_2) = \pi a \frac{h^2(0)}{4} \xi^2 (2 - \eta_2)(Q - 2\gamma_1),$$

где $\gamma_1 = \lambda/a \leq \gamma^2$, $\gamma_2 = \lambda_1/a > 0$. Тогда предельная нагрузка по формуле (13) равна:

$$P_0 = 6 \frac{\sigma_0 h^2(0)}{4a^2} \frac{[Q(1 - \eta_1 + \xi^2) + 2(1 - \xi)(1 + 2\xi)\gamma_2/3]}{(D_1^*/a)^2 (3Q - 4D_1^*/a)}, \quad (24)$$

где величина D_1^* определяется из уравнения

$$\begin{aligned} [Q(1 - \eta_1 + \xi^2) + 2(1 - \xi)(1 + 2\xi)\gamma_2/3] (\gamma_1 - D_1^*/a)^2 [3(Q - 2\gamma_1) + 4(\gamma_1 - D_1^*/a)] = \\ = \xi^2 (2 - \eta_2)(Q - 2\gamma_1)(D_1^*/a)^2 (3Q - 4D_1^*/a). \end{aligned} \quad (25)$$

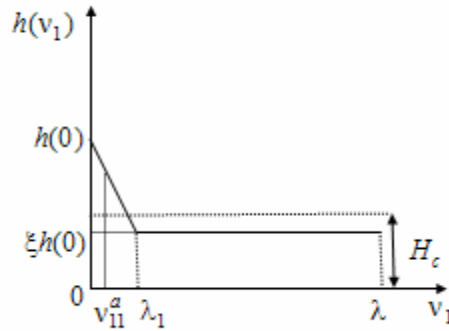


Рис. 4

Объем рассматриваемой пластины равен

$$V = \int_0^{2\pi} L \left[\int_0^{\lambda} h(v_1) \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2 = h(0) \pi a^2 \left[Q(\xi \gamma_1 + \frac{1-\xi}{2} \gamma_2) - \xi \gamma_1^2 - \frac{1-\xi}{3} \gamma_2^2 \right]. \quad (26)$$

Двусвязную эллиптическую пластину с постоянной толщиной H_c ($\xi=1$; рис. 4), имеющую равный объем с рассматриваемой пластиной переменной толщины, назовем эталонной. Объем эталонной пластины вычисляется по формуле

$$V = H_c \int_0^{2\pi} L \left[\int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2 = H_c \pi a^2 \gamma_1 (Q - \gamma_1). \quad (27)$$

Приравняв выражения (26) и (27), получим равенство

$$h(0) = H_c Q_1, \quad (28)$$

$$Q_1 = \frac{\gamma_1 (Q - \gamma_1)}{Q[\xi \gamma_1 + (1-\xi) \gamma_2 / 2] - \xi \gamma_1^2 - (1-\xi) \gamma_2^2 / 3}.$$

Подставляя значение $h(0)$ из (28) в формулу (24), получим предельную нагрузку для двусвязных эллиптических пластин переменной толщины (23), имеющих одинаковый объем (27):

$$P_0 = \frac{6M_0 Q_1^2 [Q(1 - \eta_1 + \xi^2) + 2(1-\xi)(1+2\xi)\gamma_2/3]}{a^2 (D_1^*/a)^2 (3Q - 4D_1^*/a)}, \quad (29)$$

где $M_0 = \sigma_0 H_c^2 / 4$. Величина D_1^* удовлетворяет уравнению (25).

На рис. 5 приведена зависимость (29) предельной нагрузки p_0 ($p_0 = P_0 a^2 / M_0$) от величины ξ для двусвязных эллиптических пластин переменной толщины (23), имеющих одинаковый объем при $\gamma = 0,8$ и $\gamma_1 = 0,62$. Кривые 1 соответствуют случаю $\eta_1 = \eta_2 = 0$; кривые 2 изображают случай $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$; кривые 3 – $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$; кривые 4 – $\eta_1 = 1, \eta_2 = 1$. Тонкой линией нарисованы предельные нагрузки при $\gamma_2 = 0,1$, толстые линии соответствуют случаю $\gamma_2 = 0,2$.

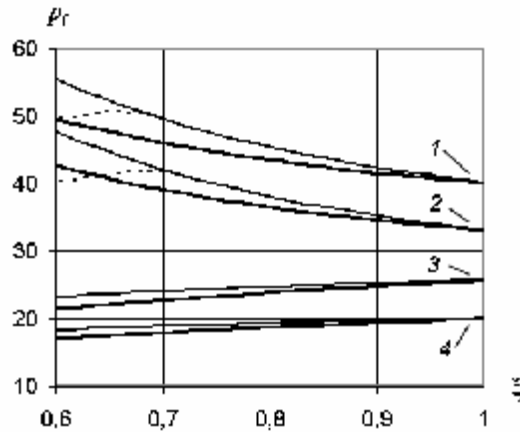


Рис. 5

Из рис. 5 видно, что при выборе функции толщины в виде (23) в случае защемления внешнего контура при уменьшении значения ξ предельная нагрузка увеличивается по сравнению с предельной нагрузкой эталонной пластины и уменьшается при шарнирном

опирании внешнего контура. Этот вывод справедлив для случаев как защемленного, так и шарнирно опертого внутреннего контура пластины при разных значениях величин γ , γ_1 .

Для рассматриваемой пластины в случае защемления внешнего контура возможно образование нового внешнего контура – пластического шарнира \bar{L}_1 ($v_1 = v_{11}^a$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$) при любом креплении внутреннего контура. В этом случае предельная нагрузка пластины будет равна

$$P_0 = \min_{0 \leq v_{11}^a \leq \lambda_1} P_0^{a_1},$$

где $P_0^{a_1}$ в соответствии с (19) вычисляется по формуле

$$P_0^{a_1} = \frac{6M_0 Q_1^2}{a^2 (D_1^{a_1} / a - v_a)^2 [3Q - 2(2D_1^{a_1} / a + v_a)]} \times \\ \times \left\{ \left[\left(1 - \frac{1-\xi}{\gamma_2} v_a\right)^2 + \xi^2 \right] Q - 4v_a + \frac{2\gamma_2}{3} (1-\xi)(1+2\xi) + \frac{2(1-\xi)v_a^2}{\gamma_2} \left[3 - \frac{4(1-\xi)}{3\gamma_2} v_a \right] \right\},$$

где $v_a = v_{11}^a / a$, а величина $D_1^{a_1}$ определяется из уравнения

$$\frac{\left[\left(1 - \frac{1-\xi}{\gamma_2} v_a\right)^2 + \xi^2 \right] Q - 4v_a + \frac{2\gamma_2}{3} (1-\xi)(1+2\xi) + \frac{2(1-\xi)v_a^2}{\gamma_2} \left[3 - \frac{4(1-\xi)}{3\gamma_2} v_a \right]}{(D_1^{a_1} / a - v_a)^2 [3Q - 2(2D_1^{a_1} / a + v_a)]} = \\ = \frac{\xi^2 (2 - \eta_2)(Q - 2\gamma_1)}{(\gamma_1 - D_1^* / a)^2 [3(Q - 2\gamma_1) + 4(\gamma_1 - D_1^* / a)]}.$$

Расчеты показали, что в случае $\gamma = 0,8$ и $\gamma_1 = 0,62$ новый опорный контур \bar{L}_1 не образуется при $\gamma_2 = 0,2$ и $0,6 \leq \xi \leq 1$. В случае $\gamma_2 = 0,1$ контур \bar{L}_1 образуется при $\xi \leq 0,72$ как в случае защемления, так и в случае шарнирного опирания внутреннего контура пластины. Для $\gamma_2 = 0,1$ предельная нагрузка при $0,6 \leq \xi \leq 0,72$ изображена на рис. 5 пунктирной линией. Зависимость величины v_a от значения ξ приведена на рис. 6, где линия 1 соответствует $\eta_2 = 0$, а линия 2 относится к случаю $\eta_2 = 1$.

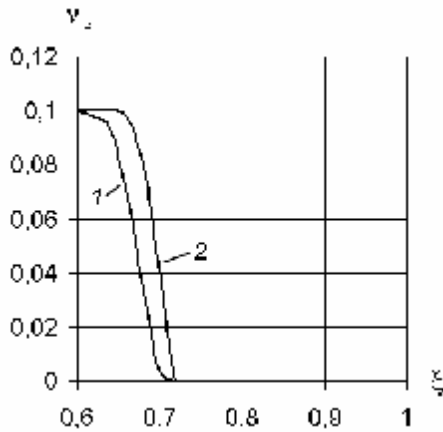


Рис. 6

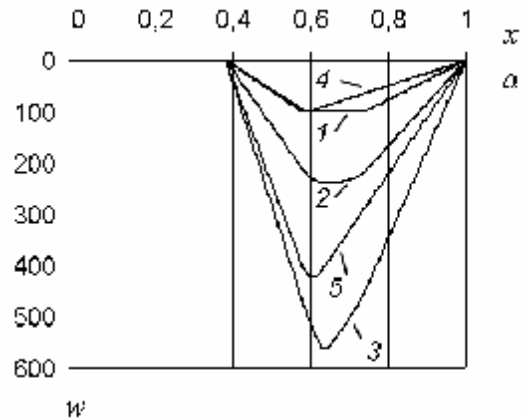


Рис. 7

Для рассматриваемой пластины с параметрами $\eta_1 = \eta_2 = 0$; $\gamma = 0,8$; $\gamma_1 = 0,62$; $\gamma_2 = 0,1$ (рис. 7) приведены безразмерные прогибы $w = ua^2 \rho_V H_c / (M_0 T^2)$ в сечении $y = 0$. На пластину действует нагрузка, представленная прямоугольным импульсом: $P(t) = 200M_0 / a^2$ при $0 \leq t \leq T$, $P(t) = 0$ при $t > T$. Для случая $\xi = 1$ (эталонная пластина) такая нагрузка является «высокой», а для $\xi = 0,8$ – «средней» нагрузкой. Кривые 1 – 3 изображают прогибы эталонной пластины в моменты времени $t = T$, $t = t_1 = 2,55T$, $t = t_f = 7,46T$ соответственно. Кривые 4, 5 изображают прогибы в случае $\xi = 0,8$ в моменты времени $t = T$, $t = t_f = 6,61T$ соответственно.

Из рис. 5, 7 видно, что переменная толщина значительно влияет как на несущую способность, так и на остаточные прогибы пластин. Изменяя только толщину пластины при одинаковом расходе материала (одинаковом объеме) можно получать более прочные и менее повреждаемые двусвязные криволинейные элементы конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

г. Новосибирск

Поступила: 25 апреля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерхов, М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
2. *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 232 с.
3. *Люкшин, Б. А.* Расчет упругопластических оболочек вращения переменной толщины при динамическом нагружении / Б. А. Люкшин, В. А. Ковалев // Механика сплошных сред : сборник статей / под ред. Т. М. Платовой. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та, 1983. – С. 10–17.
4. *Немировский, Ю. В.* Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // ПМТФ. – 2002. – № 2. – Т. 43. – С. 142–154.
5. *Немировский, Ю. В.* Оптимальное проектирование однородных и слоистых пластических балок при динамическом нагружении / Ю. В. Немировский // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады 5-го Всерос. семинара, Новосибирск, 7-8 апр. 2005 г. – Новосибирск : Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т., 2005. – С. 261–267.
6. *Немировский, Ю. В.* Пластическое деформирование двусвязных пластин с криволинейным контуром при динамических нагрузках / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск : Технопринт, 2001. – С. 515–525.
7. *Оптимальное проектирование конструкций* : библиогр. указ. / под ред. Ю. В. Немировского, В. Н. Мазалова. – Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1975. – Т. 1. – 475 с.; Т. 2. – 472 с.
8. *Рейтман, М. И.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел / М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро. – М. : Наука, 1976. – 266 с.
9. *Якимава, Х.* Проектирование оптимальных динамически нагружаемых конструкций / Х. Якимава // Новые направления в строительном проектировании. – М. : Стройиздат, 1989. – С. 245–262.

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

(Институт механики НАН Армении)

Рассматривается задача определения напряжений на границе упругого полупространства по заданным перемещениям. Решение находится методом интегральных трансформант Лапласа и Фурье, оно приводится к системе трех уравнений Винера-Хопфа, которая решается путем приведения к системе трех интегральных уравнений Фредгольма.

Полученные численные значения коэффициентов интенсивности напряжений позволяют определить значения постоянных, входящих в граничные перемещения, начиная с которых наступает неупругое поведение среды.

1. Постановка задачи и ее сведение к системе Винера – Хопфа. Рассматривается задача движения изотропного упругого полупространства $z \geq 0$, на границе которого $z = 0$ вдоль полуплоскости $x \geq 0$ заданы перемещения $u_{1,2,3}$, а вне ее граница свободна от напряжений. Эта задача является обобщением задачи [3; 8] о передаче перемещений от пластины, контактирующей с полупространством, с учетом граничного условия и для нормального перемещения. Решение рассматриваемых динамических смешанных граничных задач для полупространства получается методом интегральных преобразований и приводится к системе трех уравнений Винера-Хопфа или к векторной задаче Гильберта, которая сводится к системе [4; 5; 7; 14; 15] трех интегральных уравнений Фредгольма. Дается численное решение задачи путем обращения интегральных преобразований [2] с определением коэффициентов интенсивности напряжений. В ходе решения используется известная особенность около края, разделяющего граничные условия, которая известна из решения соответствующей статической плоской задачи теории упругости [11]. Динамические задачи о дифракции сдвиговых волн на полубесконечных включениях и конечных трещин другими методами решены в работах [1; 9; 13]. Плоская динамическая задача, подобная пространственной задаче, [3] решена в [10].

Уравнения теории упругости имеют вид $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$,

$$(a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + b^2 \Delta u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где по повторяющимся индексам суммируется от 1 до 3, $j = 1, 2, 3$, Δ есть оператор Лапласа.

Граничные условия имеют вид $(z = 0, |y| < \infty)$,

$$\sigma_{zz} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, -\infty < x < 0, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -P\delta(x - \xi')\delta(y - \eta')H(t), \\ u_2 &= -Q\delta(x - \xi')\delta(y - \eta')H(t), \\ u_3 &= -R\delta(x - \xi')\delta(y - \eta')H(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$0 < x < \infty$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, P, Q, R, ξ', η' – постоянные. Это есть задача определения функции Грина, из решения которой можно получить решение общей задачи для произвольных граничных функций $u_{1,2,3} = U_{1,2,3}^o(t, x, y)$.

Обозначая полученные далее решения задач (1.2), (1.3)

$$U_j = PU_j^P(t, x - x', y - h') + QU_j^Q + RU_j^R, \quad j = 1, 2, 3$$

соответственно для перемещений при $z = 0$ в виде

$$\begin{aligned} U_j(t, x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial U_1^o(t, x'', h'')}{\partial t} U_j^P(t - t, x - x'', y - h'') + \right. \\ &+ \frac{\partial U_2^o(t, x'', h'')}{\partial t} U_j^Q(t - t, x - x'', y - h'') + \\ &\left. + \frac{\partial U_3^o(t, x'', h'')}{\partial t} U_j^R(t - t, x - x'', y - h'') \right\} dt dx'' dh''. \end{aligned}$$

В заключительной части статьи приводится также решение для включаемых при $t = 0$ постоянных перемещений на поверхности $z = 0, x > 0$, заданных на прямоугольнике, вне которого перемещения отсутствуют. Обозначая через \bar{U}_j преобразование Лапласа по t от u_j , а через $\bar{\bar{U}}_j$ – преобразование Фурье по x, y от $\bar{U}_j|_{z=0}$, можно написать решение в виде

$$\bar{U}_j = \sum_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{U}}_j^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \exp(\bar{\alpha}ix + \bar{\beta}iy + \bar{\gamma}_n iz) d\bar{\alpha} d\bar{\beta}. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получим соотношения

$$\bar{g}_n = \sqrt{\frac{w^2}{c_n^2} - \bar{a}^2 - \bar{b}^2}, \quad s = -iw, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad (1.5)$$

где s – параметр преобразования Лапласа, и

$$\bar{\bar{U}}_2^{(1)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1^{(1)}, \quad \bar{\alpha} \bar{\bar{U}}_1^{(2)} + \bar{\beta} \bar{\bar{U}}_2^{(2)} + \bar{\gamma}_2 \bar{\bar{U}}_3^{(2)} = 0, \quad \bar{\bar{U}}_3^{(1)} = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}} \bar{\bar{U}}_1^{(1)}. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.4) в граничные условия (1.2), (1.3) и обращая преобразования Фурье по x, y , можно получить

$$\begin{aligned}
i\bar{U}_1^{(1)} \frac{4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_2^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2} + i\bar{U}_1^{(2)}\bar{\gamma}_2 + \frac{i\bar{\alpha}\bar{\sigma}_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2i\rho} &= \frac{\tau_{xz}^-}{b^2\rho}, \\
i\bar{U}_2^{(1)} \frac{\bar{\beta}}{\alpha} \frac{4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_2^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2} + i\bar{U}_2^{(2)}\bar{\gamma}_2 + \frac{i\bar{\beta}\bar{\sigma}_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2i\rho} &= \frac{\tau_{yz}^-}{b^2\rho}, \\
\bar{U}_3^{(2)} &= -\frac{\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2\bar{\alpha}}\bar{U}_1^{(1)} + \frac{\bar{\sigma}_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2i\rho},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_1^{(1)} + \bar{U}_1^{(2)} &= P\varphi_0 + U_1^+, \quad \frac{\bar{\beta}}{\alpha}\bar{U}_1^{(1)} + \bar{U}_2^{(2)} = Q\varphi_0 + U_2^+, \\
\bar{U}_3^{(1)} + \bar{U}_3^{(2)} &= R\varphi_0 + U_3^+, \quad \frac{\bar{\gamma}_2^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}{2\bar{\alpha}}\bar{U}_1^{(1)} - \bar{\alpha}\bar{U}_1^{(2)} - \bar{\beta}\bar{U}_2^{(2)} = 0, \\
\varphi_0 &= -\frac{\exp(-i\bar{\alpha}\xi' - i\bar{\beta}\eta')}{4\pi^2 s}, \\
U_{1,2,3}^+ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-st - i\bar{\alpha}x - i\bar{\beta}y} U_{1,2,3}(t, x, y, 0) dt, \\
\tau_{xz, yz}^-, \sigma_{zz}^- &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-st - i\bar{\alpha}x - i\bar{\beta}y} \tau_{xz, yz}^-, \sigma_{zz}^- dt,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где индекс (+) дает функции, аналитические в верхней полуплоскости $\bar{\alpha}$, а индекс (-) – функции аналитические в нижней полуплоскости.

2. Решение системы Винера-Хопфа. Исключая из (1.7) функции $\bar{U}_{1,2,3}$, можно получить систему трех уравнений Винера-Хопфа, которая после введения обозначений в безразмерных переменных величинах

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha}\eta, \quad \bar{\beta} = \frac{\omega}{\alpha}\lambda, \quad \bar{\gamma}_{1,2} = \frac{\omega}{\alpha}\gamma_{1,2}, \quad \gamma_1 = \sqrt{1 - \eta^2 - \lambda^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2 - \lambda^2}$$

в матричной форме примет вид

$$A\Phi^+ + B\Phi^- + C = 0, \tag{2.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 f & a_0 & 0 \\ a_3 \eta & a_3 \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \chi\lambda \\ 0 & 1 & \chi\eta \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\Phi^+ = \gamma_1^+ \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ U_3^+ \end{pmatrix}, \quad \Phi^- = \frac{ia}{b^2\rho\omega\gamma_1^-} \begin{pmatrix} \tau_{yz}^- \\ \tau_{xz}^- \\ -\sigma_{zz}^- \end{pmatrix}, \quad C = \gamma_1^+ A \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \varphi_0, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^\pm(\eta) &= \sqrt{\sqrt{1 - \lambda^2} \pm \eta}, \\
\gamma_2 a_0(\eta) &= (4\gamma_1\gamma_2 - 3\gamma_2^2 + \eta^2 + \lambda^2)\lambda\eta, \\
\gamma_2 a_1(\eta) &= 4\gamma_1\gamma_2\lambda^2 + (\gamma_2^2 - \lambda^2)^2 + \eta^2(\gamma_2^2 + \lambda^2), \\
\gamma_2 a_1(\eta)f(\eta) &= 4\gamma_1\gamma_2\eta^2 + (\gamma_2^2 - \eta^2)^2 + \lambda^2(\gamma_2^2 + \eta^2),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

причем функции a_0, a_1, f зависят от λ как от параметра. Кроме того, в (2.2)

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{b^2}{g_2 a^2} (g_1 g_2 + h^2 + I^2), \\
g_2 a_3 &= \frac{b^2}{a^2} (2g_1 g_2 - g_2^2 + h^2 + I^2), \\
g_2 c &= \frac{b^2}{a^2} (2g_1 g_2 - g_2^2 + h^2 + I^2).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Система Винера-Хопфа (2.1) запишется в виде задачи Гильберта

$$\Phi^+ = G\Phi^- + g, \tag{2.6}$$

где

$$G = -A^{-1}B, \quad g = -g_1^+ \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \mathbf{j}_0. \tag{2.7}$$

Следует отметить, что в первоначальной переменной $\bar{\alpha}$ матрица $G(\bar{\alpha})$ имеет в знаменателе множители $\left(\bar{\alpha} - \frac{\omega}{C_R}\right) \left(\bar{\alpha} + \frac{\omega}{C_R}\right)$, где C_R есть скорость волн Релея. Однако, как показано в [6,12], параметр ω в преобразовании Лапласа может быть предположен комплексным с малой положительной мнимой частью, и поэтому $G(\bar{\alpha})$ для действительных $\bar{\alpha}$ не имеет особенностей. Эти факты относятся также к точкам ветвления $\pm \frac{W}{a}, \pm \frac{W}{b}$. Переходя к безразмерной переменной η , можно интегрирование по ξ проводить вблизи отмеченных точек $\pm \frac{a}{C_R}, \pm 1, \pm \frac{a}{b}$ в комплексной плоскости, и снова $G(\xi)$ не имеет особенностей, и теория [4] применима.

Решение уравнения (2.6) можно найти в виде [4]:

$$\Phi(\eta) = \frac{X(\eta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \{X^+(\xi)\}^{-1} \frac{g(\xi)}{\xi - \eta} d\xi, \tag{2.8}$$

где матрицы $X = X^+ X^-$ удовлетворяют однородной задаче Гильберта

$$X^+ = GX^- \tag{2.9}$$

или запишутся в форме факторизации

$$G = X^+ (X^-)^{-1}. \tag{2.10}$$

Как показано в [4], задача определения X^- может быть приведена к системе интегральных уравнений Фредгольма

$$X^-(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{-1}(\eta)G(\xi) - E}{\xi - \eta} X^-(\xi) d\xi = \gamma(\eta), \tag{2.11}$$

где матрица $\gamma(\eta)$ представляет собой аналитическое поведение $X^-(\eta)$ для больших η .

3. Численное решение граничных задач. Нужно факторизовать матрицу $G(\eta)$, которая на прямой $(-\infty, \infty)$ удовлетворяет условию H , но проверив ее поведение для $\eta \approx \infty$.

Из (2.4), (2.5) получится

$$\begin{aligned}
 a_0 &\approx \frac{2 \frac{b^2}{a^2} - 1}{i} l \operatorname{sgn} h, \quad a_1 \approx i|h|, \\
 a_1 f &\approx \frac{2 \frac{b^2}{a^2} - 1}{i} |h|, \quad a_2 \approx \frac{\frac{b^2}{a^2} + 1}{2i|h|}, \\
 a_3 &\approx \frac{b^2}{a^2 i |h|}, \quad c = \frac{b^2}{a^2 i |h|}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Из (2.2) получится

$$A \approx \begin{pmatrix} 2 \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{i} l \operatorname{sgn} h & |h| & 0 \\ 2 \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{i} |h| & 2 \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{i} l & -1 \\ \frac{b^2}{a^2 i} \operatorname{sgn} h & 2 \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{i} l & -1 \end{pmatrix}, \quad B \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b^2}{a^2 i |h|} l \\ 0 & 1 & \frac{b^2}{a^2 i} \operatorname{sgn} h \\ 0 & 0 & \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{2i|h|} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Отсюда можно получить, учитывая, что из (2.7) в основном порядке члены с λ не дадут вклада в G

$$G(h) = \frac{1}{2 \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} h \\ 2 - 2 \frac{b^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -i \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} h & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Как видно, матрица $G(\eta)$ имеет разрыв первого рода при $\eta = \pm\infty$, который следует устранить. Согласно [4], можно получить особенность решения системы (2.1), вводя $\kappa = \frac{1}{\eta}$ при $\kappa = \pm 0$, изучая уравнение

$$|G^{-1}(+0)G(-0) - \bar{I}E| = 0. \tag{3.4}$$

Тогда с учетом (3.3) получится

$$\bar{\lambda}_1 = 1, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \tag{3.5}$$

и, если полагать $\bar{\lambda} = e^{2\pi s_2}$, особенность решения будет [4]

$$h^{-\frac{1}{2}}, \quad h^{-\frac{1}{2} \pi s_2}, \quad s_2 = \frac{1}{2p} \ln \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \tag{3.6}$$

что после обратного преобразования по x соответствует особенности при $x \approx 0, x \frac{1}{2}, x \frac{1}{2} \pm is_2$, последняя известна для решения плоской задачи о штампе [11].

Из (2.1) можно в раскрытом виде записать, полагая $(\tau_{yz}^-, \tau_{xz}^-, \sigma_{zz}^-) = \frac{\omega}{a} (\bar{\tau}_{yz}^-, \bar{\tau}_{xz}^-, \bar{\sigma}_{zz}^-)$,

$$\begin{aligned} a_0 U_1^+ \gamma_1^+ + a_1 U_2^+ \gamma_1^+ - \frac{\bar{\tau}_{yz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + a_3 \lambda \frac{\bar{\sigma}_{zz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + P \Phi_0 a_0 \gamma_1^+ + Q \Phi_0 a_1 \gamma_1^+ &= 0, \\ a_1 f U_1^+ \gamma_1^+ + a_0 U_2^+ \gamma_1^+ - \frac{\bar{\tau}_{xz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + a_3 \eta \frac{\bar{\sigma}_{zz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} + a_1 f P \Phi_0 \gamma_1^+ + Q \Phi_0 a_0 \gamma_1^+ &= 0, \\ a_3 \eta U_1^+ \gamma_1^+ + a_3 \lambda U_2^+ \gamma_1^+ - U_3^+ \gamma_1^+ + \\ + a_2 \frac{\bar{S}_{yz}^- g_1}{b^2 i r g_1^-} + P j_0 a_3 h g_1^+ + Q j_0 I a_3 g_1^+ - R j_0 g_1^+ &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу (3.1) для $|\eta| \sim \infty$ в первом уравнении в основных порядках получится

$$U_2^+ g_1^+ + \frac{i \bar{\tau}_{yz}^-}{b^2 r g_1^-} + g_1^+ j_0 Q = 0. \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что задача для компонент перемещений и напряжений по оси y разделяется от задачи для соответствующих компонент по осям x, z , причем для первой задачи в соответствии с первым корнем в (3.5) имеет место непрерывное на оси η значение коэффициента для $U_2^+ \gamma_1^+, \frac{\bar{\tau}_{yz}^-}{\gamma_1^-}$ при $|\eta| \approx \infty$, и получится порядок этих решений $\frac{1}{\eta}$, т. е. для τ_{yz} особенность $x \frac{1}{2}$. Оставшиеся два уравнения для $|\eta| \approx \infty$ дают при удерживании только слагаемые, влияющие на особенность или отбрасывание свободных членов с Φ_0

$$\begin{aligned} 2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) U_1^+ g_1^+ - \frac{\bar{\tau}_{xz}^-}{b^2 i r g_1^-} - i \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} h \frac{\bar{S}_{zz}^-}{b^2 i r g_1^-} &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\bar{S}_{zz}^-}{b^2 i r g_1^-} + \frac{b^2}{a^2 i} \operatorname{sgn} h U_1^+ g_1^+ - U_3^+ g_1^+ &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаются уравнения

$$\begin{aligned} U_1^+ g_1^+ - i \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} h U_3^+ g_1^+ &= \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}_{xz}^-}{b^2 i r g_1^-} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right), \\ \frac{b^2}{a^2} i \operatorname{sgn} h U_1^+ g_1^+ + U_3^+ g_1^+ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\bar{S}_{zz}^-}{b^2 i r g_1^-}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Обозначая [13]

$$\begin{aligned} (U_1^+ \pm iU_3^+) \mathbf{g}_1^+ &= V_{1,2}^+, \\ \frac{t_{xz}^- \pm i\bar{s}_{xz}^-}{2b^2 i r g_1^-} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) &= \Omega_{1,2}^-, \end{aligned} \quad (3.10)$$

можно из (3,9) получить скалярные уравнения

$$\begin{aligned} V_1^+ - \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} h V_1^+ &= \Omega_1^-, \\ V_2^+ + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sgn} h V_2^+ &= \Omega_2^-. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Каждое уравнение является скалярной однородной задачей Гильберта с разрывными коэффициентами при $\frac{1}{h} = \pm 0$:

$$V_1^+ \bar{g}(h) = \Omega_1^-, \quad V_2^+ \bar{g}(-h) = \Omega_2^-. \quad (3.12)$$

Отношения коэффициентов в левых частях в точке $\frac{1}{h} = -0$ к их значениям в точке

$\frac{1}{h} = +0$ будут соответственно $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, причем для $|\eta| \approx \infty$ выражение

$\left(\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)^{2is_2} = e^{2is_2 \left(\ln \left|\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right| + i \arg \frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)}$, $\arg \frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}$ изменится при движении от $\eta = -\infty$ до $\eta = \infty$ и от $-\frac{\pi}{2}$

до $\frac{\pi}{2}$, и отношение указанного выражения при $\eta = -\infty$ к значению при $\eta = \infty$ будет

$e^{2\pi s_2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, поэтому, умножив (3.11) соответственно на $\left(\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)^{\pm 2is_2}$, получим непре-

рывные коэффициенты $\bar{g}_1(\pm \eta) = \bar{g}(\pm \eta) \left(\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)^{\pm 2is_2}$ уравнений (3.12) для функций

$\tilde{\phi}^+$, $\tilde{\psi}^+$, $\Omega_{3,4}^-$, где

$$\begin{aligned} V_1^+ &= \tilde{f}^+(g_1^+)^{-2is_2}, \quad V_2^+ = \tilde{y}^+(g_1^+)^{2is_2}, \\ \Omega_1^- &= \Omega_3^-(g_1^-)^{-2is_2}, \quad \Omega_2^- = \Omega_4^-(g_1^-)^{2is_2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Приведенные соотношения об изменении аргументов степеней γ_1^\pm после формулы

(3.12) наглядны для размерных функций $\bar{\gamma}_1^\pm(\bar{\alpha}) = \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\beta}^2} \pm \bar{\alpha}}$, для которых

$\bar{\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\beta}^2}$ значения находятся в верхней и нижней полуплоскости и остаются в силе

для безразмерных функций $\gamma_1^\pm(\eta)$.

Из (3.10), (3.13) можно получить

$$\begin{aligned}
U_1^+ \mathbf{g}_1^+ &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{-2is_2} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{y}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{2is_2}, \\
U_3^+ \mathbf{g}_1^+ &= \frac{1}{2i} \tilde{\mathbf{f}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{-2is_2} - \frac{1}{2i} \tilde{\mathbf{y}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{2is_2}, \\
\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\bar{\mathbf{t}}_{xz}^-}{b^2 i r \mathbf{g}_1^-} &= \Omega_3^- (\mathbf{g}_1^-)^{-2is_2} + \Omega_4^- (\mathbf{g}_1^-)^{2is_2}, \\
\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\bar{\mathbf{s}}_{zz}^-}{b^2 r \mathbf{g}_1^-} &= \Omega_3^- (\mathbf{g}_1^-)^{-2is_2} - \Omega_4^- (\mathbf{g}_1^-)^{2is_2}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

и подставить в исходную систему (3.7), которую следует записать для функций $\tilde{\Phi}^+$, $\tilde{\Psi}^+$, $\Omega_{3,4}^-$ и преобразовать, подобно преобразованию для больших η системы к (3.9).

С учетом того, что U_2^+ и $\bar{\tau}_{yz}^-$ не заменяются, первое уравнение (3.7) дает

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} a_0 \tilde{\Phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} + \frac{1}{2} a_0 \tilde{\Psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2} + a_1 U_2^+ \gamma_2^+ - \frac{\bar{\tau}_{yz}^- \gamma_1}{b^2 i \rho \gamma_1^-} - a_3 \lambda \frac{i \gamma_1}{2} \Omega_3^- (\gamma_1^-)^{-2is_2} + \\
+ a_3 \lambda \frac{i \gamma_1}{2} \Omega_4^- (\gamma_1^-)^{2is_2} + P \Phi_0 a_0 \gamma_1^+ + Q \Phi_0 a_1 \gamma_1^+ = 0,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Так же, как при выводе (3.9), следует подставить из третьего уравнения (3.7) первое слагаемое во второе уравнение и получить

$$\begin{aligned}
(a_2 a_1 f - a_3^2 h^2) U_1^+ \mathbf{g}_1^+ + a_3 h U_3^+ \mathbf{g}_1^+ + (a_0 a_2 - a_3^2 h l) U_2^+ \mathbf{g}_1^+ = \frac{\bar{\mathbf{t}}_{xz}^- \mathbf{g}_1 a_2}{b^2 i r \mathbf{g}_1^-} + \\
+ (a_3^2 h^2 - a_1 f) P j_{0 \mathbf{g}_1^+} + (a_3^2 h l - a_0) Q j_{0 \mathbf{g}_2^+} - a_3 h R j_{0 \mathbf{g}_1^+}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Следует совместно решать систему (3.15), (3.16) и третье уравнение (3.7), причем последние два уравнения в переменных (3.13) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{-2is_2} \left(a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 + \frac{a_3 h}{i} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{y}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{2is_2} \left(a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 - \frac{a_3 h}{i} \right) + \\
+ (a_0 a_2 - a_3^2 h l) \mathbf{g}_1^+ U_2^+ = \frac{\mathbf{g}_1}{b^2} \Omega_3^- (\mathbf{g}_1^-)^{-2is_2} a_2 + \frac{\mathbf{g}_2}{b^2} \Omega_4^- (\mathbf{g}_1^-)^{2is_2} a_2 + \\
+ \frac{a_2}{a^2 + 1} + \frac{a_2}{a^2 + 1} \\
+ (a_3^2 h^2 - a_1 f) P j_{0 \mathbf{g}_1^+} + (a_3^2 h l - a_0) Q j_{0 \mathbf{g}_1^+} - a_3 h R j_{0 \mathbf{g}_1^+},
\end{aligned} \tag{3.17a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{-2is_2} \left(a_3 h - \frac{1}{i} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{y}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{2is_2} \left(a_3 h + \frac{1}{i} \right) + \\
+ a_3 l \mathbf{g}_1^+ U_2^+ = - \frac{\mathbf{g}_1}{b^2} \frac{a_2}{i} \Omega_3^- (\mathbf{g}_1^-)^{-2is_2} + \frac{\mathbf{g}_1}{b^2} \frac{a_2}{i} \Omega_4^- (\mathbf{g}_1^-)^{2is_2} - \\
- \frac{a_2}{a^2 + 1} + \frac{a_2}{a^2 + 1} \\
- a_3 h P j_{0 \mathbf{g}_1^+} - a_3 l Q j_{0 \mathbf{g}_1^+} + R j_{0 \mathbf{g}_1^+},
\end{aligned} \tag{3.17b}$$

далее следует к (3.17a) прибавить и вычесть, умноженное на i , (3.17b), тогда получится система

$$\frac{1}{2} \tilde{\Phi}^+ (\gamma_1^+)^{-2is_2} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 - 1) + \frac{1}{2} \tilde{\Psi}^+ (\gamma_1^+)^{2is_2} (a_2 a_1 f - a_3^2 \eta^2 + 2i a_3 \eta + 1) +$$

$$\begin{aligned}
& + (a_0 a_2 - a_3^2 h l + i a_3 l) \mathbf{g}_1^+ U_2^+ = \frac{2 \mathbf{g}_2}{b^2} \Omega_4^- (\mathbf{g}_1^-)^{2is_2} a_2 + \\
& \frac{1}{a^2} + 1 \\
& + (a_3^2 h^2 - a_1 f - i a_3 h) P j_0 \mathbf{g}_1^+ + (a_3^2 h l - a_0 - i a_3 l) Q j_0 \mathbf{g}_1^+ + (i - a_3 h) R j_0 \mathbf{g}_1^+, \quad (3.18a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{-2is_2} \left(a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 + 2 \frac{a_3 h}{i} + 1 \right) + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{y}}^+ (\mathbf{g}_1^+)^{2is_2} (a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 - 1) + \\
& + (a_0 a_2 - a_3^2 h l - i a_3 l) \mathbf{g}_1^+ U_2^+ = \frac{2 a_2 \mathbf{g}_2}{b^2} \Omega_3^- (\mathbf{g}_1^-)^{-2is_2} + \\
& \frac{1}{a^2} + 1
\end{aligned}$$

$$+ (a_3^2 h^2 - a_1 f + i a_3 h) P j_0 \mathbf{g}_1^+ + (a_3^2 h^2 - a_0 + i a_3 l) Q j_0 \mathbf{g}_1^+ - (i + a_3 h) R j_0 \mathbf{g}_1^+. \quad (3.18b)$$

Система (3.15), (3.18a), (3.18b) связывает векторы

$$\mathbf{f}_1^+ = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}^+ \\ \tilde{\mathbf{y}}^+ \\ \bar{U}_2^+ \mathbf{g}_1^+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1^- = \begin{pmatrix} \Omega_3^- \\ \Omega_4^- \\ \frac{\bar{\mathbf{t}}_{yz}^-}{b^2 i r \mathbf{g}_1^-} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

При $|\eta| \approx \infty$ из (3.18a) выпадает $\tilde{\mathbf{f}}^+$, а из (3.18b) выпадает $\tilde{\mathbf{y}}^+$, что согласуется с (3.9). Систему (3.18a), (3.18b), (3.15) можно записать в виде

$$A_1 \mathbf{f}_1^+ + B_1 \mathbf{f}_1^- + C_1 = 0, \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned}
& A_1 = (a_{ij}), \quad B_1 = (b_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \\
& a_{11} = \frac{1}{2} (a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 - 1) (\mathbf{g}_1^+)^{-2is_2}, \quad a_{12} = \frac{1}{2} (a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 + 2 i a_3 h + 1) (\mathbf{g}_1^+)^{2is_2}, \\
& a_{13} = a_0 a_2 - a_3^2 h l + i a_3 l, \quad a_{21} = \frac{1}{2} (a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 - 2 i a_3 h + 1) (\mathbf{g}_1^+)^{-2is_2}, \\
& a_{22} = \frac{1}{2} (a_0 a_1 f - a_3^2 h^2 - 1) (\mathbf{g}_1^+)^{2is_2}, \quad a_{23} = a_0 a_2 - a_3^2 h l - i a_3 l, \\
& a_{31} = \frac{1}{2} a_0 (\mathbf{g}_1^+)^{-2is_2}, \quad a_{32} = \frac{1}{2} a_0 (\mathbf{g}_1^+)^{2is_2}, \quad a_{33} = a_1, \quad b_{11} = 0, \\
& b_{12} = -\frac{2 a_2 \mathbf{g}_1}{b^2} (\mathbf{g}_1^-)^{2is_2}, \quad b_{13} = 0, \quad b_{21} = -\frac{2 a_2 \mathbf{g}_1}{b^2} (\mathbf{g}_1^-)^{-2is_2}, \quad b_{22} = 0, \\
& \frac{1}{a^2} + 1 \\
& b_{23} = 0, \quad b_{31} = -\frac{a_3 l i \mathbf{g}_1}{2} (\mathbf{g}_1^-)^{-2is_2}, \quad b_{32} = \frac{a_3 l i \mathbf{g}_1}{2} (\mathbf{g}_1^-)^{2is_2}, \quad b_{33} = -\mathbf{g}_1, \\
& C_1 = -j_0 \mathbf{g}_1^+ \begin{pmatrix} a_3^2 h^2 - a_1 f - i a_3 h & a_3^2 h l - a_0 - i a_3 l & -a_3 h + i \\ a_3^2 h^2 - a_1 f + i a_3 h & a_3^2 h l - a_0 + i a_3 l & -a_3 h - i \\ -a_0 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Систему (3.20) можно привести к задаче Гильберта (2.6), (2.7), где следует у всех векторов и матриц ставить нижний номер 1. При этом, как следует из вышеприведенных исследований для $|\eta| \approx \infty$, матрица $G_1(\eta)$ непрерывна на всей оси с нулевым индексом и постоянна на бесконечности. Тогда, согласно [4], можно для $X_1^-(\eta)$ получить систему интегральных уравнений Фредгольма

$$X_1^-(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1^-(\eta)G_1(\xi) - E}{\xi - \eta} X_1^-(\xi) d\xi = \gamma(\eta), \quad (3.22)$$

причем можно считать матрицу $\gamma(\eta)$ постоянной, $\gamma(\eta) = E$. Учитывая (2.8), где подставлен индекс 1, (3.14), (3.19), можно провести обратное преобразование Лапласа и Фурье, и при $z = 0$, $x > 0$ получить напряжения в виде

$$\frac{a}{b^2 r} \begin{pmatrix} t_{xz} \\ s_{zz} \\ 2t_{yz} \\ \frac{b^2}{a^2} + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4p^2} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{st} s^2 ds \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-\frac{s}{a}hx - \frac{s}{a}ly} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{s}{a}xx'} e^{\frac{s}{a}lh'} X_1^-(h) \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{\frac{b^2}{a^2} + 1} \frac{g_1^-(h)}{x-h} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (g_1^-)^{-2is_2} & (g_1^-)^{2is_2} \\ \frac{1}{i}(g_1^-)^{-2is_2} & -\frac{1}{i}(g_1^-)^{2is_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3^- \\ \tilde{\Omega}_4^- \end{pmatrix} \\ \frac{\tilde{t}_{yz}^-}{b^2 i r g_1^-} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3^- \\ \tilde{\Omega}_4^- \\ \frac{\tilde{t}_{yz}^-}{b^2 i r g_1^-} \end{pmatrix} = \frac{1}{4p^2} \{X_1^+(x)\}^{-1} g_1^+(x) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Вычисляя первый интеграл, а затем интеграл от $\delta\left(t - \frac{\eta x}{a} + \frac{\xi' \xi}{a} - \lambda \frac{y - \eta_1}{a}\right)$, можно получить при $z = 0$ напряжения под штампом в виде двукратных интегралов. В случае $z = 0$, $x > 0$, $x \approx 0$ получится решение вблизи края

$$\eta_0 = \frac{t + \frac{\xi' \xi}{a} - \lambda \frac{y - \eta_1}{a}}{x} a, \quad \gamma_1^-(\eta_0) \approx i\eta_0^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{a}{b^2 \rho} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \frac{\sigma_{zz}}{2} \\ \frac{b^2}{a^2} + 1 \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{1}{\frac{b^2}{a^2} + 1} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}+is_2} iI_1 + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}-is_2} iI_2 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}+is_2} I_1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}-is_2} I_2 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} iI_3 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

где

$$I_{1,2} = i^{m_2 is_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-5}^5 d\lambda \int_{-5}^5 d\xi \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi'}{a} \xi \right)^{\frac{1}{2} - m_2 is_2} \tilde{\Omega}_{3,4}^-,$$

$$I_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-5}^5 d\lambda \int_{-5}^5 d\xi \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi'}{a} \xi \right)^{\frac{5}{2}} \frac{\tilde{\tau}_{yz}^-}{b^2 i \rho \gamma_1^-},$$

и согласно свойствам преобразования Лапласа,

$$t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi'}{a} \xi > 0 \quad (3.26)$$

проведены расчеты по формулам (3.22)–(3.25), причем вычислены интегралы, в которых

опущен $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$.

Для значений $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, $y = 0$, $t = 0.1$, $\frac{\xi'}{at} = 0.2$, $\frac{\eta'}{at} = 0.2$ результаты расчетов для $I_{1,2,3}$ коэффициентов при (P, Q, R) даны в таблице 1.

Таблица 1

	P	Q	R
I₁	-11384.5-37286.9 <i>i</i>	-5410440 -914067 <i>i</i>	-1593.92+654.23 <i>i</i>
I₂	-104.866+120.574 <i>i</i>	-2964.81+31720.2 <i>i</i>	69.0587+26.5321 <i>i</i>
I₃	-13757.5+4982.91 <i>i</i>	-118745.-160854 <i>i</i>	84065.1 +508648 <i>i</i>

В случае заданных граничных перемещений вместо (1.2), (1.3) в виде

$$z = 0, t_{xz} = 0, t_{yz} = 0, s_{zz} = 0, -\infty < x < 0,$$

$$(u_1, u_2, u_3) = -(P, Q, R) H(h_1 - |y|) H(x_0 - x) H(t)$$

$$0 < x < \infty,$$

где η_1, ξ_0 – постоянные, получится в (1.7)

$$\phi_0 = -\frac{\exp(-i\bar{\beta}\eta_1) - \exp(i\bar{\beta}\eta_1)}{4\pi^2 s \bar{\alpha} \bar{\beta}} \{1 - \exp(-i\bar{\alpha}\xi_0)\}.$$

Тогда, повторяя все выкладки, можно показать, что $X_1^-(\eta)X_1^+(\eta)$ будут прежними, а при $z = 0, x \approx 0$ получится, поскольку можно использовать (3.23), в котором делится на

$-s^2$, экспонента в интеграле по λ заменяется на $\left\{ e^{-\frac{s}{a}\lambda(y-\eta_1)} - e^{\frac{s}{a}\lambda(y+\eta_1)} \right\}$ и ставится $\frac{1}{\lambda}$, в

(3.24) добавится множитель $\frac{1}{\xi} \left(e^{\frac{\xi_0 s \xi}{a}} - 1 \right)$,

$$a^3 \frac{\frac{b^2}{a^2} + 1}{2b^2 r} \begin{pmatrix} t_{xz} \\ s_{zz} \\ \frac{b^2}{a^2} + 1 t_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{4p^2} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2} + is_2} (I_4 - I'_4) + \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2} - is_2} (I_5 - I'_5) \right) \\ \frac{1}{p} \left(-i \left(\frac{x}{a} \right)^{-\frac{1}{2} + is_2} (I_4 - I'_4) + i \left(\frac{x}{a} \right)^{-\frac{1}{2} - is_2} (I_5 - I'_5) \right) \\ \frac{1}{p} \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{2}} (I_6 - I'_6) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$I_{4,5} = \int_{-5}^5 \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{-5}^5 \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi_0}{a} \xi \right)^{-\frac{1}{2} m s_2} \frac{1}{2} (-1)^{m s_2} \tilde{\Omega}_{3,4}^- \frac{d\xi}{\xi},$$

$$I_6 = \int_{-5}^5 \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{-5}^5 \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} + \frac{\xi_0}{a} \xi \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\tau}_{yz}^-}{b^2 \rho i \gamma_1^-} d\xi,$$

при этом $I'_{4,5,6}$ получатся заменой η_1 на $-\eta_1$.

Третью граничную задачу можно задать в следующем виде:

$$u_{1,2,3} = -(P, Q, R) H(\eta_1 - |y|) H(t),$$

тогда

$$\Phi_0 = -\frac{e^{-i\bar{\beta}\eta_0} - e^{i\bar{\beta}\eta_0}}{4\pi^2 \bar{\alpha} \bar{\beta} s}.$$

В видоизмененном интеграле (3.23) имеется единственный полюс [13] $\xi = 0$, и получится

$$\begin{pmatrix} \Omega_3^- \\ \Omega_4^- \\ \tau_{yz}^- \\ b^2 \rho i \gamma_1^- \end{pmatrix} = \frac{X_1^-(\eta)}{\eta} \{X_1^+(0)\}^{-1} \gamma_1^+(0) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}.$$

Тогда в (3.27) следует считать $I_{4,5} \rightarrow I_{7,8}$, $I'_{4,5} \rightarrow I'_{7,8}$, $I_6 \rightarrow I_9$, $I'_6 \rightarrow I'_9$,

$$I_{7,8} = \int_{-5}^5 \left(t - \lambda \frac{y - \eta_1}{a} \right)^{-\frac{1}{2} m s_2} \frac{1}{2} (-1)^{m s_2} \tilde{\Omega}_{3,4}^- \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$I'_{7,8}$ получатся заменой η_1 на $-\eta_1$

$$I_9 = \int_{-5}^5 \left(t - l \frac{y - h_1}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{t}_{yz}^-}{b^2 \text{rig}_1^-} \frac{dl}{l},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3 \\ \tilde{\Omega}_4 \\ \frac{\bar{t}_{yz}^-}{b^2 \text{rig}_1^-} \end{pmatrix} = 2\pi i \{X_1^+(0)\}^{-1} g_1^+(0) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}.$$

В виде таких же квадратур получится и решение вдоль всей полуплоскости $z = 0$, $x > 0$. При этом в случае произвольной граничной функции в (1.2) $f(t)$ для компонент смещения $U_{1,2,3}$ решение для напряжений найдется из полученных выше в форме свертки, а затем из уравнения движения системы численно может быть найден закон ее движения.

г. Ереван

Поступила: 01 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаян, К. Л. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением / К. Л. Агаян, Э. Х. Григорян, С. А. Джилаван // Изв. НАН Армении. Механика. – 2003. – Т. 56. – № 4. – С. 35–47.
2. Багдоев, А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости / А. Г. Багдоев // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1974. – Т. 27. – № 2. – С. 15–23.
3. Багдоев, А. Г. Аналитическое и численное решение смешанной динамической задачи о перемещениях / А. Г. Багдоев, А. Н. Мартиросян, Г. А. Мартиросян, С. М. Погосян // Математика в высшей школе. – 2005. – № 2. – С. 5–13.
4. Векуа, Н. П. Система сингулярных интегральных уравнений / Н. П. Векуа. – М. : Наука, 1970. – 379 с.
5. Гахов, Ф. Д. Краевая задача Римана для систем функций / Ф. Д. Гахов // УМН. – Т. 7. – Вып. 4. – 1952. – С. 3–54.
6. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1949. – 635 с.
7. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили – М. : Наука, 1968. – 511 с.
8. Петросян, С. З. Об одном классе смешанных задач для неоднородного по степенному закону упругого полупространства / С. З. Петросян. – Ереван, 2002. – 154 с.
9. Саркисян, В. С. Дифракция сдвиговых упругих гармонических волн на полубесконечных включениях / В. С. Саркисян, И. М. Караханян // Проблемы механики тонких деформируемых тел. – Ереван : Изд-во НАН Армении, 2002. – С. 266–280.
10. Флитман, Л. М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости / Л. М. Флитман // ПММ. – 1959. – Т. 23. – Вып. 4. – С. 497–505.
11. Loghin, A. Asymptotic solution for mixed mode loading of cracks and wedges in power law hardening materials / A. Loghin, P. F. Joseph // Engineering Fracture Mechanics. – 2001. – № 68. – P. 1511–1534.
12. Baker, B. R. Dynamic stresses created by a moving crack / B. R. Baker // Trans. ASME Ser. E. J. Applied Mechanics. – 1962. – Vol. 29. – № 3. – P. 155–157.
13. Hakobyan, V. N. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading / V. N. Hakobyan, A. V. Sahakyan, A. H. Sargsyan // The problems of dynamics of interaction of deformable media / V International conference October 1-7. Goris, 2005. – P. 61–65.
14. Hilbert, D. Grundzuge der Integralgleichungen. Drittes Abschnit / D. Hilbert. – Leipzig-Berlin, 1912.
15. Plemelj, J. Riemannsche Funktionenschar mit gegebener Monodromiegruppe / J. Plemelj // Monatsch. für Math. und Phzs. XIX. – 1908. – P. 211–245.

Божанов П. В., Полтавец П. А., Трещев А. А.

**ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН,
ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ МАТЕРИАЛОВ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ
К НАВОДОРОЖИВАНИЮ**

(Тульский государственный университет)

Проникая в объем конструктивных элементов, агрессивные среды, как правило, приводят к значительным изменениям механических характеристик материалов и сокращению сроков службы сооружений и аппаратов. Прямоугольные пластины как элементы сооружений, приборов и аппаратов являются довольно распространенными элементами конструкций, работающими в этих средах. Разрушение деталей происходит под совместным воздействием нагрузки и среды, представляющей собой физико-химические процессы, возникающие на поверхности и распространяющиеся вглубь объема исследуемых элементов. В таких отраслях промышленности, как энергетическая, космическая, нефтеперерабатывающая, химическая, металлургическая, как правило, рабочей средой оказывается водородсодержащая.

Титановые сплавы, изначально не обладая чувствительностью к виду напряженного состояния, в процессе насыщения водородом (наводороживания) приобретают свойства разнсопротивляемости, которые меняются в течение времени, что приводит к снижению пределов текучести и раннему разрушению.

Изучение свойств и поведения материалов с начальной и наведенной разнсопротивляемостью показало, что ощутимые эффекты, возникающие в работе конструкций, обнаруживаются лишь при сложном напряженно-деформированном состоянии. Ярким примером такого состояния является изгиб пластин, который представляет большой интерес с позиции теории разнсопротивляющихся сред.

В предлагаемой работе построена математическая модель описания работы тонких пластинок из материалов, изначально не чувствительных к виду напряженного состояния и проявляющих свойства наведенной разнсопротивляемости в процессе насыщения активной водородсодержащей средой, за пределом упругости. В качестве примера произведен расчет шарнирно-опертой по контуру прямоугольной пластины, выполненной из титанового сплава ТС5 и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. При этом в качестве условия пластичности использовалось следующее предложенное авторами [1] условие:

$$F(\mathbf{s}_{ij}, C) = t \cdot f(\mathbf{x}, C) = k_t(C), \quad (1)$$

где C – объемная концентрация водорода в теле конструкционного материала, в общем случае это функция времени и координат $C = C(x, y, z, t)$; $f(\mathbf{x}, C)$ – функция, учитывающая вид напряженного состояния и зависящая от концентрации агрессивной среды в ма-

териале; $k_t(C) = \sqrt{2/3}t_s(C)$; $t_s(C)$ – предел текучести при простом сдвиге; $f(0,C)=1$; $f(x,0)=1$.

Аппроксимация для функции пластичности $f(x,C)$ использовалась на основе предложенной авторами ранее [1, 63], но несколько уточненной в виде:

$$f(x,C) = a_1(C) + a_2(C) \cdot e^{a_3(C)x}, \quad (2)$$

где

$$a_1(C) = \frac{A_{10} + A_{11}\text{sign}x}{\frac{C+(A_{14}+A_{15}\text{sign}x)}{A_{16}+A_{17}\text{sign}x}} + A_{18} + A_{19}\text{sign}x,$$

$$A_{10} = 0,188245; A_{11} = -0,035555; A_{12} = 1; A_{13} = 0; A_{14} = -0,0346205;$$

$$A_{15} = -0,0234495; A_{16} = 0,01372735; A_{17} = 0,00462765;$$

$$A_{18} = 0,840205; A_{19} = 0,013305;$$

$$a_2(C) = \frac{A_{20} + A_{21}\text{sign}x}{\frac{C+(A_{24}+A_{25}\text{sign}x)}{A_{26}+A_{27}\text{sign}x}} + A_{28} + A_{29}\text{sign}x,$$

$$A_{20} = -0,106284; A_{21} = 0,117504; A_{22} = 0,5; A_{23} = -0,5;$$

$$A_{24} = -0,0055855; A_{25} = 0,0055855; A_{26} = -0,0096306;$$

$$A_{27} = -0,0187303; A_{28} = 0,080935; A_{29} = -0,092155;$$

$$a_3(C) = A_{30} + A_{31}\text{sign}x - (A_{32} + A_{33}\text{sign}x) \cdot C,$$

$$A_{30} = 2,120775; A_{31} = 1,497475; A_{32} = 3,79925; A_{33} = 30,04925.$$

Решение задачи упругопластического изгиба пластин проводится на основе теории малых упруго-пластических деформаций. При решении поставленной задачи принимаются следующие предпосылки:

1) используются обычные положения технической теории изгиба пластин – гипотеза прямых нормалей и гипотеза плоского напряженного состояния;

2) диаграммы напряжений-деформаций материалов имеют замкнутую площадку текучести, такую, чтобы применение концепции идеально упругопластического тела к рассмотренному материалу не вызывало возражений;

3) активное нагружение считается простым.

Рассматривается три стадии работы пластин: стадия упругих деформаций (рис.1, а); упругопластическая стадия с односторонней пластичностью (рис.1, б) и упругопластическая стадия с двусторонней пластичностью (рис.1, в).

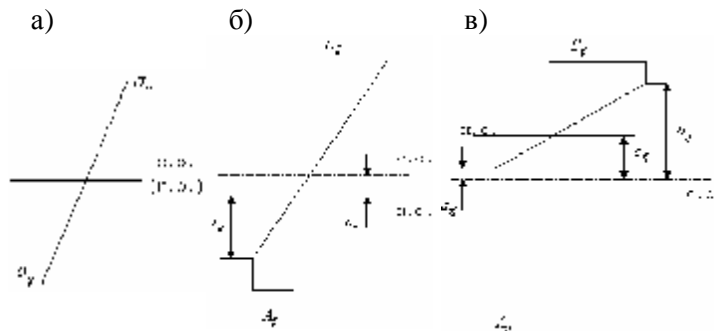


Рис. 1. Эпюры напряжений для трех стадий работы пластин

Для вывода разрешающего дифференциального уравнения воспользуемся уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0; \quad \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = 0; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - q = 0. \quad (3)$$

Геометрические соотношения для упругой стадии имеют вид:

$$m_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad m_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad m_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad e_{11} = z \cdot m_1; \quad e_{22} = z \cdot m_2; \quad g_{12} = 2 \cdot z \cdot m_{12}; \quad (4)$$

физические зависимости

$$M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right); \quad M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right); \quad M_{12} = -D(1-n) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (5)$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right); \quad Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \quad \text{где } D = \frac{E h^3}{12(1-n^2)}.$$

Рассматривая выражения (3) – (5) совместно, для упругой стадии получим известное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \frac{q}{D}. \quad (6)$$

С увеличением нагрузки и достижением напряженного состояния величины, соответствующей появлению пластичности в каких-либо волокнах, в рассматриваемой области начинает реализовываться упругопластическая стадия работы с односторонней пластичностью. Происходит смещение нейтральной оси сечения от срединной плоскости, и в срединной плоскости начинают развиваться деформации, и геометрические соотношения для произвольной точки приобретут следующую форму:

$$e_{11} = e_{11} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad e_{22} = e_{22} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad e_{12} = e_{12} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (7)$$

где e_{11}, e_{22}, e_{12} – деформации в срединной плоскости пластины.

Выражения для напряжений с учетом (7) запишутся в виде

$$s_{ij} = k_{ij} (r_{ij} - z \cdot \Delta_{ij}) \quad (i, j = 1, 2), \quad (\text{по индексам не суммировать}) \quad (8)$$

где

$$k_{11} = k_{22} = E/(1-n^2); \quad k_{12} = E/(1+n);$$

$$r_{11} = e_{11} + n \cdot e_{22}; \quad r_{22} = e_{22} + n \cdot e_{11}; \quad r_{12} = e_{12}$$

$$\Delta_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad \Delta_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad \Delta_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Положение нейтральной оси определяем из условия:

при

$$z = c_{ij}, \quad s_{ij} = 0 \Rightarrow c_{ij} = r_{ij} / \Delta_{ij}. \quad (9)$$

Координата начала зоны текучести a_{ij} (см. рис.1, б), вычисляется из условия:

при
$$z = a_{ij}, \quad s_{ij} = A_{ij} \Rightarrow a_{ij} = (k_{ij} \cdot r_{ij} - A_{ij}) / (k_{ij} \cdot \Delta_{ij}), \quad \text{где } A_{ij} = \Phi_{ij}(F). \quad (10)$$

Значения r_{ij} определяем из условия отсутствия в поперечных сечениях продольных сил $N_{ij} = 0$:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{ij} dz = \int_{-h/2}^{a_{ij}} \mathbf{s}_{ij} dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} dz = 0 \Rightarrow P_1 \cdot r_{11}^2 + V_1 \cdot r_{11} + U_1 = 0;$$

$$P_2 \cdot r_{22}^2 + V_2 \cdot r_{22} + U_2 = 0; \quad P_3 \cdot r_{12}^2 + V_3 \cdot r_{12} + U_3 = 0. \quad (11)$$

Коэффициенты P_k, V_k, U_k однозначно вычисляются через ранее определенные параметры.

Представим момент как сумму интегралов:

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{ij} z dz = \int_{-h/2}^{a_{ij}} \mathbf{s}_{ij} z dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} z dz \Rightarrow M_{ij} = C_{ij} + D_{ij} \cdot \Delta_{ij}, \quad (12)$$

где

$$C_{ij} = (h^2/4 - a_{ij}^2) \cdot (k_{ij} \cdot r_{ij} - A_{ij}^2)/2; \quad D_{ij} = -k_{ij} \cdot (a_{ij}^3 + h^3/8)/3.$$

Из рассмотрения полученного выражения (12) совместно с (3), (7), (8) получается разрешающее дифференциальное уравнение равновесия для упругопластической стадии работы пластины с односторонней пластичностью

$$D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta_{11} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Delta_{22} + 2D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta_{12} = q. \quad (13)$$

При дальнейшем увеличении нагрузки и распространении пластичности по глубине сечения в некоторой точке пластины возникает пластичность в противоположных волокнах, и работа материала пластины здесь переходит в упругопластическую стадию с двусторонней пластичностью. В рассматриваемой стадии соотношения (7) – (10) сохраняют свою силу.

Координату начала зоны пластичности b_{ij} (см. рис.1, в), определяется из условия:

при

$$z = b_{ij}, \quad \mathbf{s}_{ij} = B_{ij} \Rightarrow b_{ij} = \frac{k_{ij} \cdot r_{ij} - B_{ij}}{k_{ij} \cdot \Delta_{ij}}. \quad (14)$$

Выполнив аналогичные выкладки, проведенным для состояния односторонней пластичности, получим выражения для r_{ij} :

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{ij} dz = \int_{-h/2}^{b_{ij}} \mathbf{s}_{ij} dz + \int_{b_{ij}}^{a_{ij}} \mathbf{s}_{ij} dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} dz + \int_{-h/2}^{b_{ij}} B_{ij} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{11} = \frac{A_{11} + B_{11}}{2k_{11}} - \frac{A_{11} + B_{11}}{A_{11} - B_{11}} \cdot \frac{h}{2} \Delta_{11},$$

$$r_{22} = \frac{A_{22} + B_{22}}{2k_{22}} - \frac{A_{22} + B_{22}}{A_{22} - B_{22}} \cdot \frac{h}{2} \Delta_{22}, \quad (15)$$

$$r_{12} = \frac{A_{12} + B_{12}}{2k_{12}} - \frac{A_{12} + B_{12}}{A_{12} - B_{12}} \cdot h \cdot \Delta_{12}.$$

Выражение для момента представляется как сумма интегралов:

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{b_{ij}} B_{ij} z dz + \int_{b_{ij}}^{a_{ij}} \mathbf{s}_{ij} z dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} z dz \Rightarrow M_{ij} = R_{ij} + F_{ij} \cdot \Delta_{ij}. \quad (16)$$

Из совместного рассмотрения выражений (16), (3), (7), (8) вытекает разрешающее дифференциальное уравнение равновесия для упругопластической стадии работы мате-

риала пластины с двусторонней пластичностью

$$F_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta_{11} + F_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Delta_{22} + 2F_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta_{12} = q. \quad (17)$$

Для замкнутости системы уравнений необходимо задавать граничные условия.

Таким образом, полученные дифференциальные уравнения (6), (13) и (17) полностью описывают деформирование пластинок на всех стадиях работы материала.

Решение уравнений (13), (17) было произведено при использовании численного метода конечных разностей с использованием метода переменных параметров упругости при поэтапном увеличении нагрузки. Толщина прямоугольной пластины из титанового сплава TC5 принималась равной 0,08 м, а геометрические размеры в плане пластины – 2x1 м. Поверхность пластины покрывалась сеткой 40x20 ячеек и в силу симметрии, рассчитывалась четвертая часть пластины.

Для придания безразмерности величинам моментов и прогибов использовались следующие коэффициенты:

$$M_s = k_t(C) \cdot W \quad \text{и} \quad w_s = \frac{D \cdot 100}{M_s \cdot a^2},$$

где D – цилиндрическая жесткость, $W = ah^2/6$ – момент сопротивления изгибу (упругий момент сопротивления); a – длина пластины; h – толщина пластины.

Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, полученная при нулевой концентрации водорода, больше нагрузки, полученной при $C = 0,12\%$, примерно на 30% (рис.2). В стадии упругих деформаций кривые прогибов совпадают; в стадии упруго-пластических деформаций кривые, полученные при расчете ненаводороженной и наводороженной пластин имеют заметное расхождение, причем с увеличением нагрузки разница увеличивается.

На рис. 3 представлены картины развития текучести по поверхности пластины, полученные при $C = 0,05\%$ (поверхности, вступившие в состояние текучести, заштрихованы). Для пластины с отсутствием наводороживания области пластичности в верхней и нижней зонах развиваются одинаково, здесь же пластичность сначала возникает в нижней зоне – зоне растяжения – и развивается сначала в центре, затем в угловых точках нижней зоны и, наконец, в диагональном сечении.

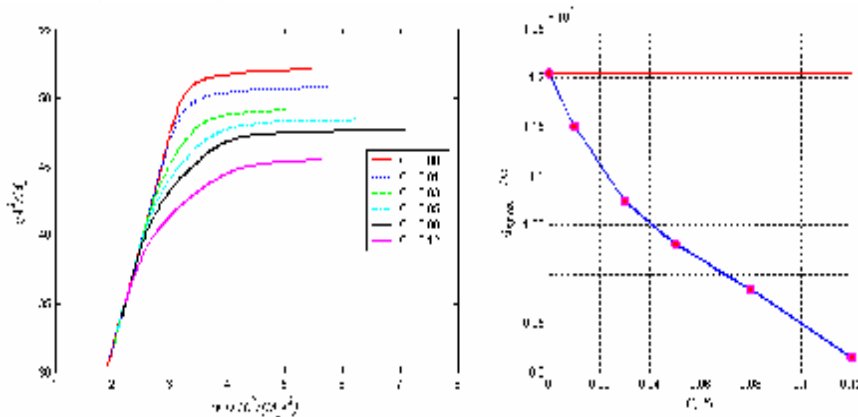


Рис. 2. Зависимость прогибов в центральной точке пластины от нагрузки и предельные нагрузки при разном уровне наводороживания

С увеличением концентрации водорода в теле пластины становится более очевид-

ной разницы вида кривых в эпюрах моментов по сечениям пластины, по сравнению с не-наводороженной пластиной, а различие в значениях достигает 25–30%.

На рис. 4 представлено развитие текучести вглубь наводороженной пластины по диагональному сечению (2-2) для указанного вида опирания. Здесь также явно заметна асимметричность развития зон пластичности.

Особый интерес представляет рис. 5, отражающий изменение прогибов пластины во времени. Наводороживание принимается нулевым (классический вариант), и затем на определенном шаге изменения нагрузки (в большинстве вариантов расчета, когда начинает образовываться пластичность) начинает действовать наводороживание, то есть устанавливается концентрация водорода $C = 0,05\%$, нагрузка фиксируется, и начинается время (точнее – число Фурье $F_0 = Dt/h^2$).

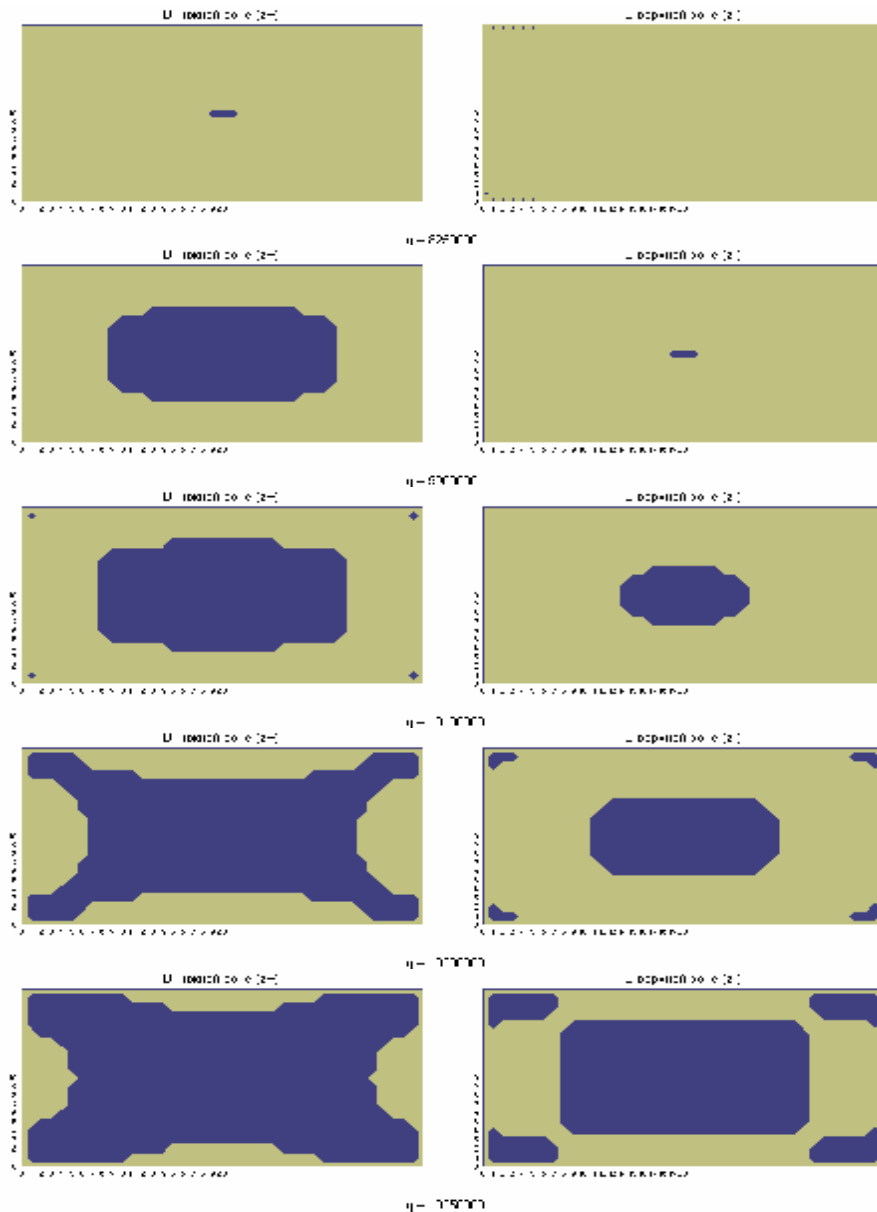


Рис. 3. Зоны текучести в плане пластины при наводороживании $C = 0,05 \%$

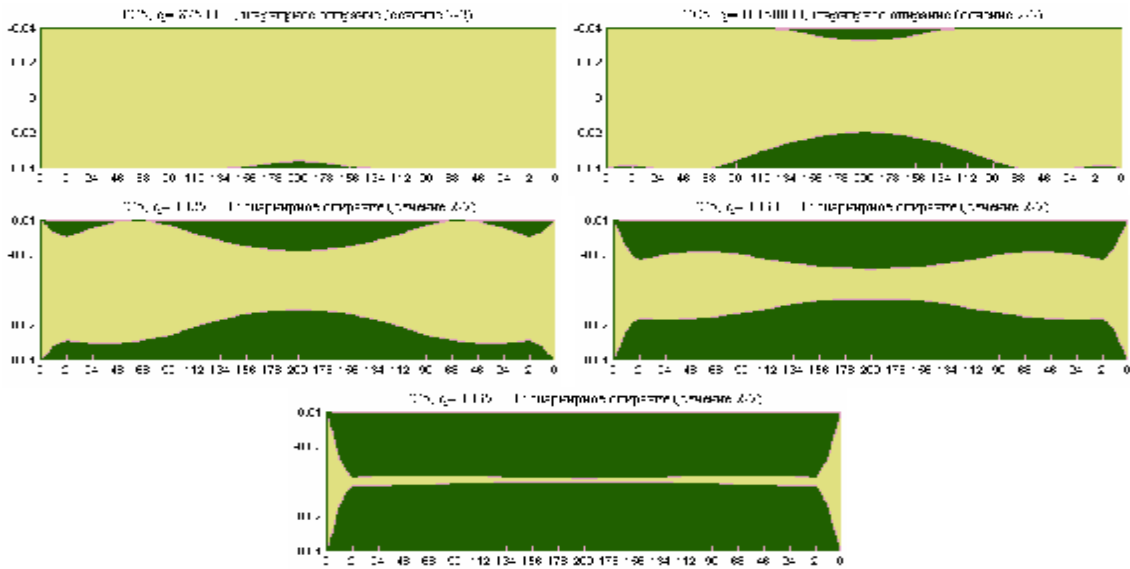


Рис. 4. Зоны текучести по толщине пластины при наводороживании $C = 0,05 \%$ (диагональное сечение)

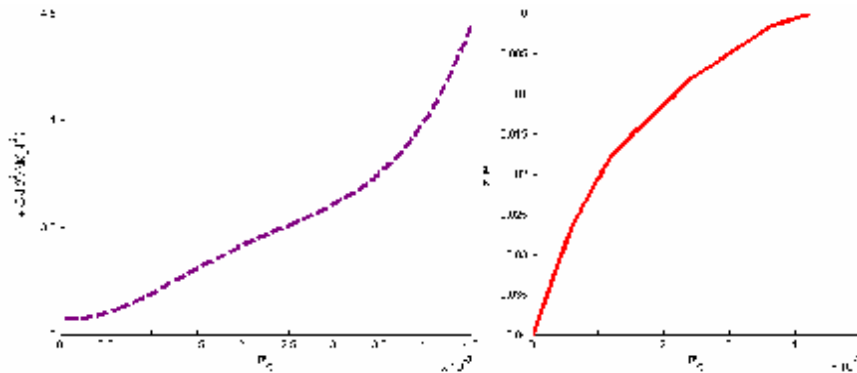


Рис. 5. Изменение прогибов в центре пластины и глубины проникновения водородосодержащей среды в процессе наводороживания тела пластины во времени

Как видно из рис. 5, график функции прогибов с увеличением глубины проникновения водорода в тело пластины меняет кривизну, и функция начинает расти быстрее, имея тенденцию в какой-то момент времени обратиться в бесконечность (во время образования пластического шарнира). По графикам рис. 5 делается вывод, что может произойти разрушение наводороживаемой пластины через определенное время даже при нагрузках, которые вызывают лишь появление пластических зон в отдельных ее точках при отсутствии водородосодержащей среды. Подобное явление наблюдается, например, для рассматриваемых прямоугольных шарнирно опертых пластин из сплава ТС5 при числе Фурье $F_o = 0,0045$.

Полученные результаты, очевидно, подтверждают тот факт, что к данным материалам, находящимся в активной водородной среде, недопустимо применение классических

подходов. К тому же исследование развития текучести по поверхности и по толщине пластины выявило качественно новую картину, не укладывающуюся в рамки классической теории изгиба пластин.

г. Тула

Поступила: 15 ноября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трещев, А. А.* К теории пластичности материалов, чувствительных к наводороживанию / А. А. Трещев, П. А. Полтавец // Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный журнал. – 2006. – № 2. – С. 60–67.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

(Институт Механики НАН Армении)

Исследуется упругопластическая задача быстровращающейся конической трубы. Определена предельная поверхность, разделяющая область пластичности от упругой области. Получено соответствующее значение Ωr .

Пластическое течение быстровращающейся конической трубы при условии пластичности Губера-Мизеса было исследовано М. А. Задояном [1]. В настоящей работе исследуется упругопластическое состояние той же задачи.

1. Постановка задачи. Для исследования пластического состояния конической трубы введем сферическую систему координат, начало координатной системы совпадает с точкой О (рис.

1.1), $(\alpha \leq \vartheta \leq \beta)$, $\beta < \frac{\pi}{2}$. Предполагается,

что коническая труба вокруг своей оси вращается с угловой скоростью Ω , а на внутренней и внешней поверхностях действуют нормальные силы p и q соответственно. Исходя из осесимметричности задачи, предположим, что имеем $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0$. Далее

предположим, что рассматриваемая

труба имеет малую конусность, тогда по всему объему трубы имеет место $\sigma_{r\vartheta} = 0$. Для скоростей перемещений принимаем: $u = u(r, \vartheta)$, $v = v(r, \vartheta)$, $w = 0$, следовательно, имеем:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \vartheta, \quad (1.3)$$

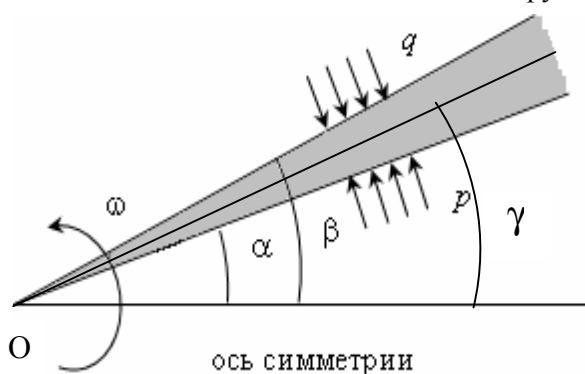


Рис. 1

$$2\gamma_{r\vartheta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\vartheta\varphi} = 0. \quad (1.4)$$

Дифференцируя соотношение (1.3) по ϑ , получаем:

$$\sin^2 \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - v = \sin^2 \vartheta \frac{\partial(r\varepsilon_\varphi)}{\partial \vartheta}. \quad (1.5)$$

Из (1.3) находим значение v , а из (1.2) – значение $\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ и, подставляя в (1.5), имеем:

$$\sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + r\varepsilon_\vartheta \cos^2 \vartheta + u \sin^2 \vartheta - r\varepsilon_\varphi = \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial(r\varepsilon_\varphi)}{\partial \vartheta}. \quad (1.6)$$

Дифференцируя (1.6) по r и учитывая (1.1), из (1.6) получим следующее уравнение неразрывности деформаций:

$$\sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \vartheta} + \cos^2 \vartheta \frac{\partial(r\varepsilon_\vartheta)}{\partial r} + \varepsilon_r \sin^2 \vartheta - \frac{\partial(r\varepsilon_\varphi)}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial^2(r\varepsilon_\varphi)}{\partial \vartheta \partial r}. \quad (1.7)$$

Во вращающейся трубе центробежная сила, направленная перпендикулярно к оси вращения, будет:

$$R = v\omega^2 \rho, \quad (1.8)$$

где v – масса единицы объема материала трубы, ρ – расстояние от оси вращения. Массовые силы можно представить в форме:

$$R_r = R \sin \vartheta, R_\vartheta = R \cos \vartheta. \quad (1.9)$$

Как в упругой, так и в пластической областях принимаем $2k=1$, $k = const$ (k – предел текучести на сдвиг), следовательно, при $\sigma_i \sim \frac{\sigma_i}{2k}$, $i = r, \vartheta, \varphi$ уравнения равновесия будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) + v\omega^2 r \sin^2 \vartheta &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} (\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \vartheta + v\omega^2 r \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

причем $v \sim \frac{v}{2k}$. В упругой области закон Гука при условии несжимаемости материала будет:

$$\varepsilon_r = \frac{2k}{E} \left[\sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_\vartheta + \sigma_\varphi) \right], \varepsilon_\vartheta = \frac{2k}{E} \left[\sigma_\vartheta - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) \right], \varepsilon_\varphi = \frac{2k}{E} \left[\sigma_\varphi - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\vartheta) \right]. \quad (1.11)$$

В пластической области условия пластичности в главных напряжениях принимают вид:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = \sigma_1 + 1, \sigma_i \sim \frac{\sigma_i}{2k}, i = 1, 2, 3. \quad (1.12)$$

Будем рассматривать три различные ребра призмы Треска:

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi - 1 \quad (1.13.a)$$

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_\vartheta - 1 \quad (1.13.б)$$

$$\sigma_\vartheta = \sigma_\varphi = \sigma_r - 1. \quad (1.13.в)$$

Предполагается, что область ($\alpha \leq \vartheta < \gamma$) соответствует пластическому состоянию, а область ($\gamma < \vartheta \leq \beta$) – упругому.

Граничные условия можем написать в виде:

$$s_J^p = p, \text{ при } J = a, \text{ и } s_J^e = q, \text{ при } J = b, \quad (1.14)$$

$$p, q \sim \frac{p}{2k}, \frac{q}{2k}.$$

где верхние индексы p, e соответствуют пластическому и упругому состоянию соответственно.

На границе раздела упругопластического состояния следует удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$[\sigma_r] = \sigma_r^p - \sigma_r^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (1.15)$$

$$[\sigma_\vartheta] = \sigma_\vartheta^p - \sigma_\vartheta^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (1.16)$$

$$[\sigma_\varphi] = \sigma_\varphi^p - \sigma_\varphi^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (1.17)$$

$$[u] = u^p - u^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (1.18)$$

$$[v] = v^p - v^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0. \quad (1.19)$$

Таким образом, требуется найти поле напряжений и поле скоростей деформаций упругопластического состояния. Требуется также анализировать характер влияния угловой скорости и действующих нормальных давлений на упругопластических области.

2. Решение задачи в пластической зоне. Учитывая условия пластичности (1.13.а), (1.13.б) и (1.13.в), из уравнения равновесия соответственно получим:

$$\sigma_r^p = \sigma_\vartheta^p = \ln(r \sin \vartheta) - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C, \quad (2.1.а)$$

$$\sigma_\varphi^p = (1 + \ln(r \sin \vartheta)) - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C,$$

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \ln\left(\frac{r}{\sin \vartheta}\right) - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C, \quad (2.1.б)$$

$$\sigma_\vartheta = 1 + \ln\left(\frac{r}{\sin \vartheta}\right) - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C,$$

$$s_J = s_j = -1 - 2 \ln r - \frac{1}{2} n \omega^2 r^2 \sin^2 J + C, \quad (2.1.в)$$

$$s_r = -2 \ln r - \frac{1}{2} n \omega^2 r^2 \sin^2 J + C,$$

где C – интегральная постоянная. Из граничного условия (1.14), определяя постоянную C , имеем:

$$\sigma_r^p = \sigma_\vartheta^p = \sigma_\varphi^p - 1 = \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha) + p, \quad (2.2.а)$$

$$\sigma_r^p = \sigma_\varphi^p = \sigma_\vartheta^p - 1 = -\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha) + p, \quad (2.2.б)$$

$$\sigma_\vartheta^p = \sigma_\varphi^p = \sigma_r^p - 1 = -\frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha) + p. \quad (2.2.в)$$

Решение задачи в упругой зоне. Введем функцию напряжений следующим образом:

$$\sigma_r^e = \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\Phi}{r^2 \sin \vartheta}, \sigma_{\vartheta}^e = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \sigma_{\varphi}^e = \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \vartheta} + \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (2.1)$$

Удовлетворив дифференциальным уравнениям равновесия и учитывая закон Гука, из условий неразрывности деформаций получим:

$$\begin{aligned} & -8r^2 \cos J \sin^2 J \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial J^2} - (\sin 3J - 7 \sin J) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial J} - 2r^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2 \partial J} \right) + r^2 (\cos 3J + 7 \cos J) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \\ & + 4 \cos J \sin^2 J \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2} - 2(\cos 3J + \cos J) \Phi - 4nr^4 w^2 (19 \cos J + 4 \cos 3J) \sin^3 J = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вводя новую функцию $\phi(\vartheta)$ следующим образом:

$$\Phi = r^2 \phi(\vartheta), \quad (2.3)$$

для (2.2) можем записать:

$$\begin{aligned} & 3j \cos J - 3j' (1 + \sin^2 J) \sin J - 3j'' \cos J \sin^2 J - \\ & - n w^2 r^2 \sin J (7 + 16 \cos^2 J) \cos J \sin^3 J = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Общее решение (2.4) можно представить в форме:

$$\begin{aligned} j(J) = & -\frac{\sin J}{4} \left(4C_1 + C_2 \ln \left| \frac{\cos J - 1}{\cos J + 1} \right| \right) - \frac{\operatorname{ctg} J}{2} C_2 + \\ & + \frac{1}{18} n w^2 r^2 \sin J \left(19 + 8 \cos 2J + \frac{10}{\sin^2 J} + 10 \ln \sin J \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где C_1, C_2 – интегральные постоянные. Определив C_1 из граничного условия (1.14) для тензора напряжений, получим:

$$\begin{aligned} s_r^e = & q + C_2 \left(\frac{\cos b}{\sin^2 b} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\frac{J}{2}} \right) - \\ & - \frac{1}{9} n w^2 r^2 \left(38 + 18 \cos 2b - 8 \cos 2J + 20 \left(\frac{1}{\sin^2 b} + \ln \sin b \right) - 5 \ln \sin J \right), \\ s_J^e = & q + C_2 \left(\frac{\cos b}{\sin^2 b} - \frac{\cos J}{\sin^2 J} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\frac{J}{2}} \right) + \\ & + \frac{1}{9} n w^2 r^2 \left(18(\cos 2J - \cos 2b) + 20 \left(\frac{1}{\sin^2 J} - \frac{1}{\sin^2 b} + \ln \frac{\sin J}{\sin b} \right) \right), \\ s_j^e = & q + C_2 \left(\frac{\cos b}{\sin^2 b} - \frac{\cos J}{\sin^2 J} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\frac{J}{2}} \right) - \\ & - \frac{1}{18} n w^2 r^2 \left(18 + 36 \cos 2b - 87 \cos 2J + 40 \left(\frac{1}{\sin^2 J} + \frac{1}{\sin^2 b} - \ln \frac{\sin J}{\sin b} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Определение соотношения предельного состояния. Из соотношений (1.15), (1.16) имеем:

$$\begin{aligned}
& v \omega^2 r^2 \left(55 \cos 2\gamma + 9 \cos 2\alpha - 8 \left(8 \cos 2\beta + \frac{10}{\sin^2 \beta} - 5 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin^2 \beta} \right) \right) - \\
& - 2 \left(2 \left(9(p-q) + 22v \omega^2 r^2 + 9 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) - 18C_2 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \right) = 0, \\
& v \omega^2 r^2 \left(55 \cos 2\gamma + 9 \cos 2\alpha - 16 \left(4 \cos 2\beta + \frac{5}{\sin^2 \beta} - \frac{5}{\sin^2 \gamma} - 5 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) \right) - \\
& - 18 \left(2 \left(p - q + \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) + 2C_2 \left(\frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \right) = 0, \\
& -1 - (p-q) - \frac{5}{6} v \omega^2 r^2 - \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + C_2 \left(\frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) + \\
& + \frac{1}{18} v \omega^2 r^2 \left(87 \cos 2\gamma - 32 \cos 2\beta - \frac{40}{\sin^2 \gamma} - \frac{40}{\sin^2 \beta} + 40 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + 9 \sin^2 \gamma - 9 \sin^2 \alpha \right) = 0, \\
& 4 \left(-9(p-q) - 22v \omega^2 r^2 + 9 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) + 36C_2 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) + \\
& + v \omega^2 r^2 \left(55 \cos 2\gamma + 9 \cos 2\alpha - 8 \left(8 \cos 2\beta + \frac{10}{\sin^2 \beta} - 5 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin^2 \beta} \right) \right) = 0, \\
& -p + q + \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + C_2 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) + \\
& + \frac{1}{18} v \omega^2 r^2 \left(32 \cos 2\gamma - 32 \cos 2\beta + 9 \cos^2 \alpha + 40 \left(\frac{10}{\sin^2 \gamma} - \frac{10}{\sin^2 \beta} + \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) + 9 \sin^2 \gamma \right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.1.a}$$

$$-p + q - \frac{5}{6}n w^2 r^2 + \ln \frac{\sin g}{\sin a} + C_2 \left(\frac{\cos g}{\sin^2 g} + \frac{\cos b}{\sin^2 b} - \ln \frac{tg \frac{g}{2}}{tg \frac{b}{2}} \right) + \quad (3.1.6)$$

$$+ \frac{1}{18}n w^2 r^2 \left(87 \cos 2g - 32 \cos 2b - \frac{40}{\sin^2 g} - \frac{40}{\sin^2 b} + 40 \ln \frac{\sin g}{\sin b} + 9 \sin^2 g - 9 \sin^2 a \right) = 0.$$

Решая (3.1.а), (3.1.б) относительно $(v\omega^2 r^2, p - q, C_2)$ получим

$$v\omega^2 r^2 = \frac{18}{73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma},$$

$$p - q = -\ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{1}{4} \left(11 + \frac{10}{\sin^2 \gamma} + 5 \ln \sin \gamma \right) (73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma)x$$

$$\left(\frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \left(55 \cos 2\gamma + 9 \cos 2\alpha - 8 \left(11 + 8 \cos 2\beta + \frac{10}{\sin^2 \beta} - 5 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin^2 \beta} \right) \right) + \quad (3.2.a)$$

$$+ \frac{8}{\cos \gamma} (31 - 11 \cos 2\gamma + 10 \sin^2 \gamma \ln \sin \gamma) \left(11 + \frac{10}{\sin^2 \gamma} + 5 \ln \sin \gamma \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{tg \frac{\gamma}{2}}{tg \frac{\beta}{2}} \right) \right)$$

$$C_2 = -4 \frac{\cos^2 \gamma (11 + 5 \ln \sin \gamma) - 21 - 5 \ln \sin \gamma}{\cos \gamma (73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma)}.$$

$$v\omega^2 r^2 = \frac{18}{73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma},$$

$$p - q = \frac{1}{16 \sin^4 \gamma} \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} (157 - 52 \cos 2\gamma + 55 \cos 4\gamma - 80 \sin^2 \gamma \ln \sin \gamma)^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} (73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma) \left(55 \frac{\cos 3\gamma}{\sin^2 \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \left(-121 + 18 \cos 2\alpha - 128 \cos 2\beta - \frac{160}{\sin^2 \beta} + \right.$$

$$\left. + 80 \ln \sin \gamma - 160 \ln \sin \beta \right) - 4 \left(29 + 55 \cos 2\gamma - \frac{40}{\sin^2 \gamma} + 20 \ln \sin \gamma \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{tg \frac{\gamma}{2}}{tg \frac{\beta}{2}} \right) \right) x$$

$$x \frac{1}{\cos \gamma} \left(\frac{160}{\sin \gamma} - 4 \sin \gamma (29 + 55 \cos 2\gamma + 20 \ln \sin \gamma) \right)^2, \quad (3.2.б)$$

$$C_2 = \frac{157 + 55 \cos 4\gamma - \cos 2\gamma (52 - 40 \ln \sin \gamma) - 40 \ln \sin \gamma}{4 \cos \gamma (73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma)}$$

Решение соответствующему (1.13.в) здесь не приводим, т. к. из них получаем:

$$v\omega^2 r^2 = -\frac{36}{73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma}, \quad (3.2)$$

но отмеченное выражение не имеет физического смысла.

Из (3.1.а) получаем графики, показанные на рис. 2, 3, а из (3.1.б) – на рис. 2, 4:

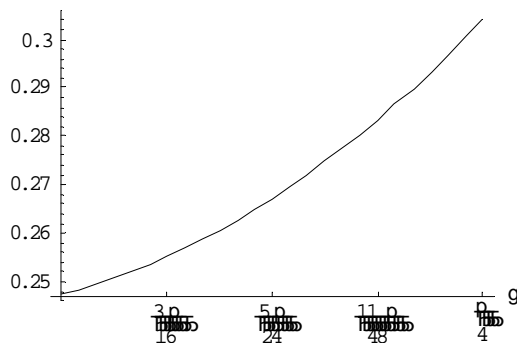


Рис. 2

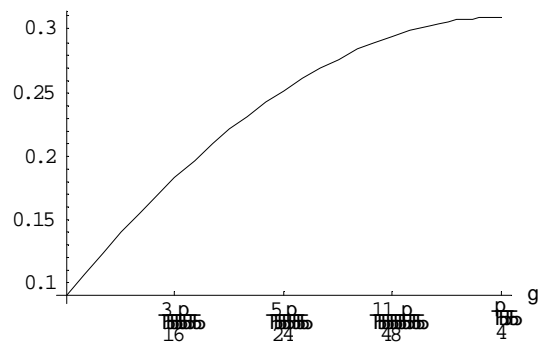


Рис. 3

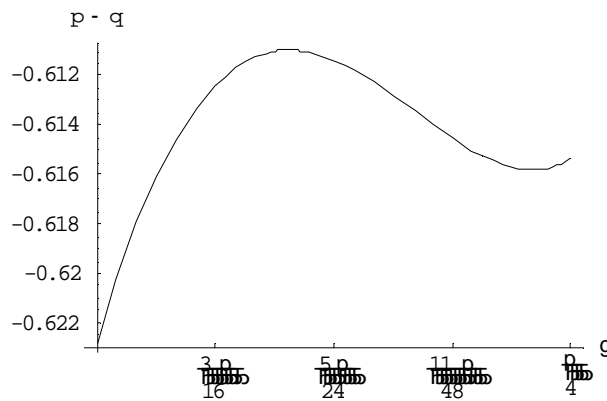


Рис. 4

Рис. 2 и 3 показывают, что пластические деформации в конической трубе возникают, начиная из значений $v\omega^2 r^2 = 0.243$, $q - p = 0.08$, а далее при увеличении значений $v\omega^2 r^2$ или $q - p$ пластическая область распространяется к наружной поверхности трубы. Приведем таблицу численных расчетов определения значения γ при заданных значениях $v\omega^2 r^2$ и $q - p$:

Определенная из условий (3.1.а)				Таблица	
$q - p$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
$v\omega^2 r^2$	0.247976	0.251731	0.257488	0.26678	0.287198
γ	30.397°	32.3294°	34.5846°	37.405°	42.0031°

Исходя из постановки задачи, при увеличении значения $p - q$ пластическая область в трубе не может увеличиваться до определенного значения, а потом уменьшаться, поэтому в данной задаче пластическое течение не может возникать, начиная с $\sigma_r = \sigma_\phi = \sigma_\psi - 1$ ребра призмы Треска.

г. Ереван

Поступила: 02 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Задоян, М. А.* Пластическое течение быстровращающейся конической трубы / М. А. Задоян // ДАН НАН РА. – 2001. – Т. 101. – № 2. – С. 122–127.

2. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 702 с.

Григорьев Я. Ю.

ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ С ОКРУЖНЫМИ УГЛОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ

(Государственный технический университет)

Рассматривается растяжение цилиндрических образцов с угловыми надрезами, усилиями, приложенными вдоль образующих. Для определения пластических деформаций в окрестности вершины углового выреза тело образца предполагается составным: материал в целом упругопластический, но в малой области в окрестности особой точки – вершины выреза – материал считается жесткопластическим, что позволяет реализовать численно-аналитический подход к определению полей деформаций.

1. Рассматривается задача о растяжении кругового цилиндрического образца с угловым круговым надрезом.

При пластическом течении в окрестности угловой точки деформации и напряжения распределены крайне неоднородно. Для поля напряжений и деформаций угловая точка является особой, то есть предельные значения тензоров по различным направлениям не совпадают.

Определение поля деформаций численными методами приводит к значительным математическим трудностям, так как операция определения тензора деформаций включает в себя операцию дифференцирования перемещений по пространственным переменным.

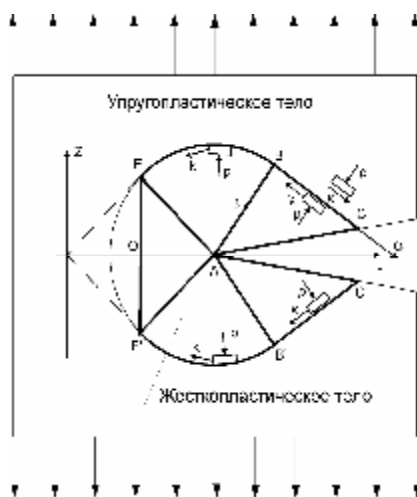


Рис. 1

Рассмотрим окрестность вершины углового выреза, где материал является идеальным жесткопластическим. Эту область будем представлять как суперэлемент (рис. 1). Жесткопластическая область состоит из прямоугольных треугольников ABC , $AB'C'$ и EAE' , в которых реализуется однородное напряженное состояние, и двух вееров линий скольжения BAE и $B'AE'$. Границы выреза AC и AC' предполагаются прямолинейными и свободными от напряжений, поэтому в ABC и $AB'C'$ первое главное напряжение S_1 равно $2k$ и направлено вдоль свободных поверхностей.

Граничные условия на $CBEE'BC'$ определяются согласно [1]. Обозначим за q угол наклона касательной к a – линии скольжения, отсчитываемой в кратчайшем направлении от оси x . Гидростатическое давление $p = -\frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\phi\phi})$ и тензор напряжений

$$S_{ij} \text{ определяются в виде: } [S_{ij}] = \begin{bmatrix} p - k \sin(2q) & k \cos(2q) & 0 \\ k \cos(2q) & p + k \sin(2q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{На } CB: \theta = -\frac{7\pi}{36},$$

$$p = k \cdot \left(\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{36}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{36}\right)}{r} \cdot S_\alpha - 1 \right), \text{ в точке } C: p = -k. \quad (1)$$

$$\text{На } BE: -\frac{7\pi}{36} < \theta < \frac{\pi}{4}, \quad d\left(\frac{p}{k} - 2\theta\right) = \frac{R}{r} \cdot (\sin\theta + \cos\theta)d\theta.$$

$$\text{На } EO: \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$p = \frac{8\pi}{9} - 1 + \frac{R}{r_0} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{36}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{36}\right) \right), \text{ где } r_0 - \text{расстояние от оси } Oz \text{ до точки } C.$$

Пластическое течение предполагается симметричным относительно оси Or , поэтому напряжения на противоположной границе совпадают с (1).

Жесткопластический анализ позволяет рассчитать предельные поля тензоров деформаций в окрестности точки A .

$$\text{В качестве меры деформации выберем тензор Альманси } E_{ij}: E_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0).$$

Определение деформаций связано с интегрированием системы уравнений, связывающих тензор деформаций E_{ij} и тензор скоростей деформаций e_{ij} :

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik} V_{k,j} + E_{jk} V_{k,i} = e_{ij}, \quad (2)$$

где $e_{ij} = \frac{V_{i,j} + V_{j,i}}{2}$, V_i – скорость перемещений, x_i^0 , x_i – лагранжевы и эйлеровы координаты, а $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Данная система уравнений при предельном переходе в поле линий скольжения жесткопластического суперэлемента, при осесимметричной деформации в полярной системе координат сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \alpha} \bar{A} + 2\gamma g \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} \bar{A} + 2\gamma \left(e - \frac{1}{2} \right) \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ \frac{\partial (r^2 E_{\varphi\varphi})}{\partial \alpha} \cdot \bar{A}' &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$2g \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial a} A \right) - g \left(e - \frac{1}{2} \right) \sin 2(q - \gamma) = 0,$$

$$\text{где } \bar{A} = \frac{V_\alpha - [a' \cos \alpha + b' \sin \alpha]}{V_\alpha + \frac{\partial V_\beta}{\partial \alpha}}, \quad \bar{A}' = V_\alpha - [a' \cos \alpha + b' \sin \alpha].$$

q, γ – углы наклона первого (алгебраически наибольшего) главного направления тензоров E_{ij}, e_{ij} ; a – угол наклона a -линии к оси r ; u, v – проекции скоростей перемещений на a, b – направления; $m = a'i + b'j$ – вектор скорости возможных изменений положения вершины углового выреза. Поле скоростей внутри жесткопластической области определяется соотношениями Гейрингер [1]:

$$du - v dq = 0 \quad (a - \text{линия})$$

$$dv + u dq = 0 \quad (b - \text{линия}).$$

Рассматривается задача о растяжении кругового цилиндра с круговым надрезом.

Сначала решается внешняя упругопластическая задача численным методом, применяется численный комплекс MSC.Marc 2005.

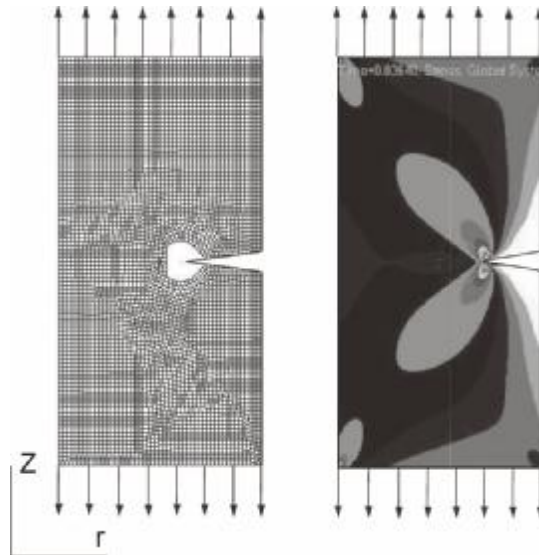


Рис. 2

На верхней и нижней поверхностях цилиндра заданы растягивающие перемещения U вдоль оси Z соответственно вверх и вниз (рис. 2). Материал полосы предполагается упрочняющимся упругопластическим. Пластическое состояние определяется по критерию Треска.

Длина образующей $l=1000$ мм, радиус основания $R_0=300$ мм, угол выреза $2\delta=20^\circ$, глубина выреза $h=78$ мм. Материал полосы – упрочняющийся упругопластический алюминий ($E=10000$ Н/мм², $\nu=0.33$, упругопластические свойства задавались дискретным заданием точек на кривой $s - e$, предел текучести $\sigma_T=182,25$ Н/мм², постоянная текучести $k = \frac{S_T}{\sqrt{3}}$). Прикладываемые нагрузки – перемещения по оси OY $U = 10$ мм.

При прямом применении пакета MSC.Marc 2005 к решению задачи при вышеуказанных условиях возникает проблема сходимости вычислительных процессов.

Для преодоления этой трудности в окрестности вершины выреза вводится рассмотренный суперэлемент.

Определяется размер жесткопластической области. За характеризующий размер жесткопластической области принимается радиус верха характеристик R . Размер области выбирается из соображений минимальности R при непревышении предела текучести. R зависит от величины растягивающей нагрузки, а также от материала, из которого сделана полоса.

Для решения внешней задачи жесткопластическая область исключается. Действие отброшенной области на полосу заменяется напряжениями, приложенными вдоль всей жесткопластической границы.

Граничные условия определяются соотношениями (1).

Определяется распределение нормальных скоростей, полученное на границе жесткопластической области.

Распределение скоростей на границе суперэлемента является исходным для внутренней жесткопластической задачи.

При определении поля скоростей в области AEE' предполагается линейное распределение скоростей u , v соответственно на линиях AE , AE' (рис. 3). В этом случае это распределение полностью определяется скоростями перемещений в точках E , E' . Из симметрии пластического течения относительно оси Ox при $q = \frac{P}{4}$ следует, что в точке E $u_r = u_z$. В этом случае предельные компоненты скорости движения частиц материала в точке A со стороны области AEE' определяется в виде $u = v = \frac{u_z}{\sqrt{2}}$. Распределение скоростей v на линии a определяет величину $\frac{\partial v}{\partial a}$. Найденные величины u и $\frac{\partial v}{\partial a}$ определяют коэффициенты \bar{A} и \bar{A}' . Системы уравнений (3) при заданном векторе $m = a'i + b'j$.

Определяются возможные поля распределений тензора деформаций в окрестности точки A путем интегрирования системы (3) при возможных скоростях m . Действительное движение точки A находится из условия $\inf_m \sup_{dA} E_1$, где $\sup_{dA} E_1$ – наибольшее значение первого алгебраически наибольшего главного значения тензора E_{ij} в окрестности точки A .

Возможна другая эквивалентная формулировка этого условия [4]: $\inf_m \sup_{dA} W$,

где W – удельная диссипация энергии.

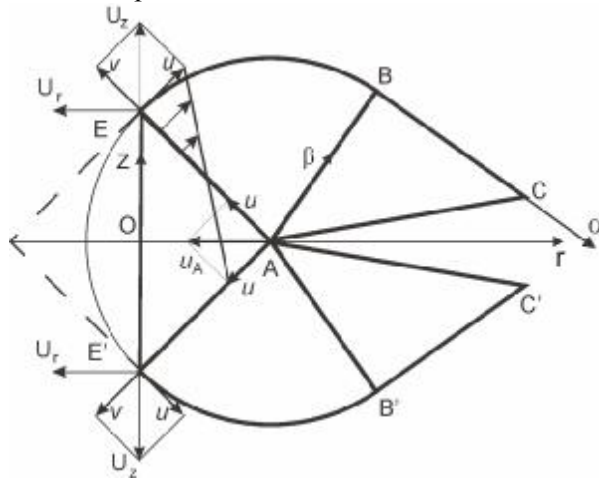


Рис. 3

По найденному значению m определяется новое положение точки A на заданном шаге времени.

На этом этапе возможны два варианта пластического течения [3]:

- 1) при максимально возможных деформациях материала;
- 2) при допустимых деформациях материала, определяемых характеристикой E_* .

Данный подход реализует алгоритм, предложенный в работе [3].

2. Этот подход можно обобщить на цилиндрический образец, отличный от кругового цилиндра, считая, что перемещения частиц материала происходят в плоскости ортогональной линии вершины трещины, а перемещения вдоль линии вершины выреза малы. Пусть направляющая цилиндрического образца произвольная гладкая линия, заданная в полярной системе координат φ, r уравнением $r = \rho(\varphi)$. Разобьем линию вершин трещины на малые части и каждой части поставим в соответствие сегмент, соответствующий углу $d\varphi$ (рис. 2). Можно предположить, что такой сегмент соответствует сегменту некоторой осесимметричной задачи с осью симметрии, расположенной на расстоянии $r(\varphi)$. Для определения $r(\varphi)$ используется соотношение $r = \frac{u}{\varepsilon_\varphi}$, где $u = u_r$ перемещения по оси r в

точке C , ε_φ – скорость деформаций по направлению φ ; $\varepsilon_\varphi = \frac{dv_\varphi}{ds_\varphi} \approx \frac{v_\varphi^2 - v_\varphi^1}{\Delta s_\varphi}$, здесь v_φ^2, v_φ^1

– скорости по направлению φ соответственно в точках B, A , Δs_φ – длина дуги AB .

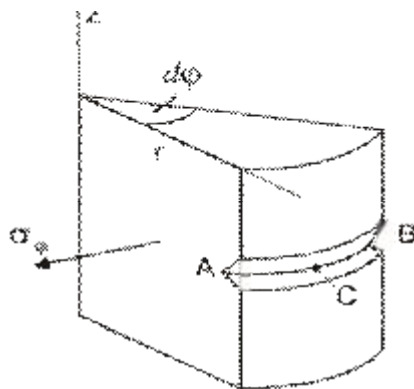


Рис. 4

Изложенный выше алгоритм позволяет рассчитать деформации в окрестности вершины выреза и определить направление движения трещины для данного угла j . Делая обход вдоль всей линии $r = r(\varphi)$, можно рассчитать новое положение линии вершин трещины. На следующих шагах или в случае, когда линию нельзя задать аналитически, целесообразно искать кривизну, определяющую расстояние $r(\varphi) = 1/K$, по трем точкам A, C, B . Для этого строится окружность по этим точкам и определяется r .

г. Комсомольск-на-Амуре
Поступила: 9 ноября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев, Г. И. Теория пластичности. / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. / Владивосток : Дальнаука. – 1998. – 529 с.
2. Каминская, Е. С. Соотношения, определяющие поля деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений при осесимметричной деформации / Е. С. Каминская // Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения: Сборник докладов третьей конференции. Владивосток – Комсомольск-на-Амуре, сентябрь 2004г. Комсомольск-на-Амуре : ИМиМ ДВО РАН. – 2004. – С. 192–203.
3. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // ДАН. – 2006. – № 6. – Т. 407. – С. 777–781.
4. Хромов, А. И. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения / А. И. Хромов, О. В. Козлова // Владивосток : Дальнаука. – 2005. – 159 с.

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ЭКСЦЕНТРИЧНОЙ ТРУБЫ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И
СДВИГАЮЩЕГО УСИЛИЯ $t_{rq}^{(0)} \neq 0$**

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

Рассмотрим напряженное состояние анизотропной эксцентричной трубы под действием внутреннего давления p и при действии на внутренней поверхности трубы касательного усилия $t_{rq}^{(0)} \neq 0$.

Во всей работе для безразмерных величин введем обозначения:

$$s_{ij} = s_{ij} / k, p = p / k, q = q / k, t_i = t_i / k, G = G / k,$$

$$e_{ij} = e_{ij} / r_s^0, u = u / r_s^0, v = v / r_s^0, w = w / r_s^0, a = a / r_s^0,$$

где s_{ij} – компоненты тензора напряжений, e_{ij} – компоненты скоростей деформации, u, v, w – компоненты скоростей перемещений вдоль осей r, q, z соответственно.

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине s_{ij} – пределу текучести на сдвиг, величины, имеющие размерность длины – к величине r_s^0 – радиусу пластической зоны при равномерном растяжении: $d = 0$.

Для решения задачи в цилиндрической системе координат r, q, z используем уравнения равновесия:

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial q} + \frac{\partial t_{qz}}{\partial z} + \frac{2t_{rq}}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{qz}}{\partial q} + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = 0.$$

Пусть радиусы стенок трубы a и b ($a < b$), эксцентриситет – c . В нулевом приближении будем иметь:

$$t_{rq}^{(0)} \neq 0, t_{rz}^{(0)} = t_{qz}^{(0)} = 0, \quad (2)$$

все остальные компоненты тензора напряжений зависят только от r , а на внутренней поверхности трубы к граничному условию

$$s_r^p = -p \quad \text{при} \quad r = a, \quad p = \text{const}, \quad (3)$$

добавляется условие

$$t_{rq}^{(0)} = t \quad \text{при} \quad r = a, \quad t_1 = \text{const}. \quad (4)$$

Условие пластичности Мизеса примем в виде:

$$A(s_r - s_q)^2 + B(s_q - s_z)^2 + C(s_z - s_r)^2 + 6Ft_{rq}^2 + 6Gt_{rz}^2 + 6Ht_{\varphi z}^2 = 6k^2, \quad (5)$$

где A, B, C, F, G, H – постоянные величины, имеющие вид:

$$\begin{aligned} A &= 1 + da, & F &= 1 + df, \\ B &= 1 + db, & G &= 1 + dg, \\ C &= 1 + dc, & H &= 1 + dh; \\ a, b, c, f, g, h &= \text{const}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть

$$s_z = \frac{s_r + s_q}{2}, \quad (7)$$

тогда условие пластичности (5) с учетом условий (2), (7) примет вид

$$\left(\frac{4A + B + C}{4} \right) (s_r - s_q)^2 + 6Ft_{rq}^2 = 6. \quad (8)$$

Уравнения равновесия и линеаризованное условие пластичности (8) с учетом выражений (6) в нулевом приближении примут вид:

$$\frac{ds_r^{(0)}}{dr} + \frac{s_r^{(0)} - s_q^{(0)}}{r} = 0, \quad \frac{dt_{rq}^{(0)}}{dr} + \frac{2t_{rq}^{(0)}}{r} = 0, \quad (9)$$

$$(s_r^{(0)} - s_q^{(0)})^2 + 4t_{rq}^{(0)2} = 4, \quad s_z^{(0)} = s^{(0)} + \frac{2}{3}. \quad (10)$$

Решение первого уравнения системы (9) согласно условию полной пластичности (10) и граничному условию (3) в пластической зоне имеет вид

$$\begin{aligned} s_r^{(0)p} &= -\frac{\sqrt{r^4 - a^4 t^2}}{r^2} + \ln \frac{r^2 + \sqrt{r^4 - a^4 t^2}}{a^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} + \sqrt{1 - t^2} - p, \\ s_q^{(0)p} &= \frac{\sqrt{r^4 - a^4 t^2}}{r^2} + \ln \frac{r^2 + \sqrt{r^4 - a^4 t^2}}{a^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} + \sqrt{1 - t^2} - p. \end{aligned} \quad (11)$$

В первом приближении линеаризованное условие пластичности (8) с учетом выражений (6) примет вид

$$m(s_r^{(0)} - s_q^{(0)})^2 + 12(s_r^{(0)} - s_q^{(0)})(s_r^{(1)} - s_q^{(1)}) + 24ft_{rq}^{(0)2} + 48t_{rq}^{(0)}t_{rq}^{(1)} = 0, \quad (12)$$

где $m = 4a + b + c$.

Из (12), (11) получим:

$$s_r^{(1)} - s_q^{(1)} = \frac{ft^2 a^4}{r^2 \sqrt{r^4 - a^4 t^2}} + \frac{m\sqrt{r^4 - a^4 t^2}}{6r^2} + \frac{2ta^2}{\sqrt{r^4 - a^4 t^2}} t_{rq}^{(1)}. \quad (13)$$

В первом приближении уравнения равновесия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{ds_r^{(1)}}{dr} + \frac{s_r^{(1)} - s_q^{(1)}}{r} &= 0 \\ \frac{dt_{rq}^{(1)}}{dr} + \frac{2t_{rq}^{(1)}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Решая второе уравнение системы (14), используя граничные условия

$$s_r^{(1)} + \frac{ds_r^{(0)}}{dr} r_1 = \frac{dP_n}{dr} r_1, \quad t_{rq}^{(1)} - (s_q^{(0)} - s_r^{(0)}) r_1 = \frac{dP_t}{dr} r_1 \quad \text{при} \quad r = b; \quad (15)$$

получим:

$$t_{rq}^{(1)} = \frac{s \sin q}{r^2}, \quad (16)$$

где $s = -2b\sqrt{1-t^2}$.

Из (13), (16) получим

$$s_r^{(1)} - s_q^{(1)} = \frac{6ft^2a^4 + mr^4 - ma^4t^2 + 12ta^2s \sin q}{6r^2\sqrt{r^4 - a^4t^2}}. \quad (17)$$

Подставляя выражение (17) в первое уравнение системы (14), получим

$$s_r^{(1)} = \int \frac{M(q)/6}{r^3\sqrt{r^4 - a^4t^2}} dr - \frac{m}{6} \int \frac{rdr}{\sqrt{r^4 - a^4t^2}}, \quad (18)$$

где $M(q) = ma^4t^2 - 12ta^2s \sin q - 6ft^2a^4$.

Из (18) получим решение задачи в первом приближении:

$$s_r^{(1)p} = \frac{M(q)}{12C_1^2} \frac{\sqrt{r^4 - C_1^2}}{r^2} + \frac{m}{24} \ln \left| \frac{\sqrt{r^4 - C_1^2} - r^2}{\sqrt{r^4 - C_1^2} + r^2} \right| + C_2, \quad (19)$$

$$s_q^{(1)p} = \frac{M(q)}{12r^2\sqrt{r^4 - C_1^2}} + \frac{r^2(M(q) - 2C_1^2m)}{12C_1^2\sqrt{r^4 - C_1^2}} + \frac{m}{24} \ln \left| \frac{\sqrt{r^4 - C_1^2} - r^2}{\sqrt{r^4 - C_1^2} + r^2} \right| + C_2, \quad \text{где}$$

$$C_1 = a^2t.$$

Постоянную C_2 определим из граничных условий:

$$\frac{M(q)}{12C_1^2} \frac{\sqrt{a^4 - C_1^2}}{a^2} + \frac{m}{24} \ln \left| \frac{\sqrt{a^4 - C_1^2} - a^2}{\sqrt{a^4 - C_1^2} + a^2} \right| + C_2 = \frac{2+t^2}{a\sqrt{1-t^2}} \cos q$$

при $r = a$,

$$C_2 = \frac{2+t^2}{a\sqrt{1-t^2}} \cos q - \frac{M(q)}{12C_1^2} \frac{\sqrt{a^4 - C_1^2}}{a^2} - \frac{m}{24} \ln \left| \frac{\sqrt{a^4 - C_1^2} - a^2}{\sqrt{a^4 - C_1^2} + a^2} \right|. \quad (20)$$

Из (19), (20) получим решение задачи в пластической области в первом приближении:

$$\begin{aligned}
s_r^{(1)p} &= \frac{M(q)}{12C_1^2} \frac{\sqrt{r^4 - C_1^2}}{r^2} + \frac{m}{24} \ln \left| \frac{\sqrt{r^4 - C_1^2} - r^2}{\sqrt{r^4 - C_1^2} + r^2} \right| + \\
&+ \frac{2+t^2}{a\sqrt{1-t^2}} \cos q - \frac{M(q)}{12C_1^2} \frac{\sqrt{a^4 - C_1^2}}{a^2} - \frac{m}{24} \ln \left| \frac{\sqrt{a^4 - C_1^2} - a^2}{\sqrt{a^4 - C_1^2} + a^2} \right| \\
s_q^{(1)p} &= \frac{M(q)}{12r^2\sqrt{r^4 - C_1^2}} + \frac{r^2(M(q) - 2C_1^2m)}{12C_1^2\sqrt{r^4 - C_1^2}} + \\
&+ \frac{m}{24} \ln \left| \frac{\sqrt{r^4 - C_1^2} - r^2}{\sqrt{r^4 - C_1^2} + r^2} \right| + \frac{2+t^2}{a\sqrt{1-t^2}} \cos q - \\
&- \frac{M(q)}{12C_1^2} \frac{\sqrt{a^4 - C_1^2}}{a^2} - \frac{m}{24} \ln \left| \frac{\sqrt{a^4 - C_1^2} - a^2}{\sqrt{a^4 - C_1^2} + a^2} \right|.
\end{aligned} \tag{21}$$

г. Чебоксары

Поступила: 11 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука. – 1978. – 208 с.
2. *Ивлев, Д. Д.* Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Воронеж. – 2005. – 205 с.
3. *Ишлинский, А. Ю.*, Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит. – 2001. – С. 33–185.
4. *Михайлова, М. В.* О влиянии сдвигов на упругоидеальнопластическое состояние пластины с круговым отверстием при двусном растяжении / М. В. Михайлова, Л. И. Афанасьева // Проблемы механики неупругих деформаций. – М. : Физматлит. – 2001. – С. 211–228.

ДИНАМИКА ТРЕХСЛОЙНОЙ НЕПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

(Самарский государственный университет)

Исследованию нестационарных колебаний трехслойных сферических оболочек посвящены многочисленные работы [1, 7, 11, 14, 15]. Динамические задачи для трехслойных оболочек с несимметричной структурой пакета слоев исследованы в меньшей степени [5, 8, 13]. Вместе с тем такие оболочки являются наиболее жесткими конструкциями [8], и их исследование имеет как теоретическое, так и прикладное значение.

В работе рассматриваются непологие сферические оболочки, образуемые двумя тонкими наружными слоями с различными толщинами h_2, h_3 и внутренним слоем толщиной $h_1 \gg h_2, h_3$. Предполагается, что способы соединения слоев в единый пакет обеспечивают отсутствие их смещения относительно друг друга (проскальзывания), а перемещения всего пакета остаются малыми по сравнению с толщиной оболочки. Внешние слои испытывают мембранное напряженно деформированное состояние, а средний слой рассматривается в постановке теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью (Мидлина–Тимошенко)[7].

В соответствии с кинематическими гипотезами теории Миндлина – Тимошенко, вектор перемещений произвольной точки k -го слоя $\mathbf{u}^{(k)} = (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)})$, $k = 1, 2, 3$ может быть выражен через перемещения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ на нейтральной поверхности Ω и вектор $\mathbf{y} = (\psi, \gamma, 0)$ углов поворота нормалей к ней, т. е.:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u} + z\mathbf{y}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u} - h_2\mathbf{y}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u} + h_3\mathbf{y}; \quad h_2 + h_3 = h_1, \quad (1.1)$$

где u, v, w – соответственно перемещения вдоль меридиана, параллели и нормали; ψ, γ – углы поворота нормали к Ω . Индекс 1 относится к среднему слою, индексы 2 и 3 – к внутреннему и наружному внешним слоям оболочки; h_2, h_3 – расстояния от Ω до внешней и внутренней лицевых поверхностей оболочки.

Физические компоненты тензора малых деформаций в сферических координатах с учетом кинематических соотношений (1.1) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} e_{zz}^{(1)} &= 0, & e_{qj}^{(1)} &= \frac{1}{2(R+z)}(e_{qj} + z c_{qj}), \\ e_{qq}^{(1)} &= \frac{1}{R+z}(e_{qq} + z c_{qq}), & e_{zq}^{(1)} &= \frac{1}{2(R+z)}e_{zq}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{jj}^{(1)} &= \frac{1}{R+z} (e_{jj} + z c_{jj}), & \mathbf{e}_{zj}^{(1)} &= \frac{1}{2(R+z)} e_{zj}, \\
\mathbf{e}_{qq}^{(2)} &= \frac{1}{R+z} (e_{qq} - h_- c_{qq}), & \mathbf{e}_{qq}^{(3)} &= \frac{1}{R+z} (e_{qq} + h_+ c_{qq}), \\
\mathbf{e}_{jj}^{(2)} &= \frac{1}{R+z} (e_{jj} - h_- c_{jj}), & \mathbf{e}_{jj}^{(3)} &= \frac{1}{R+z} (e_{jj} + h_+ c_{jj}), \\
\mathbf{e}_{qj}^{(2)} &= \frac{1}{2(R+z)} (e_{qj} - h_- c_{qj}), & \mathbf{e}_{qj}^{(3)} &= \frac{1}{2(R+z)} (e_{qj} + h_+ c_{qj}),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
e_{qq} &= \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}q} + w, & c_{qq} &= \frac{\mathcal{I}y}{\mathcal{I}q}, & e_{zq} &= \frac{\mathcal{I}w}{\mathcal{I}q} + R\gamma - u, \\
e_{jj} &= \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}v}{\mathcal{I}j} + ctgq u + w, & c_{jj} &= \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}g}{\mathcal{I}j} + ctgq \gamma, & e_{zj} &= \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}w}{\mathcal{I}j} + Rg - v, \\
e_{qj} &= \frac{\mathcal{I}v}{\mathcal{I}q} - ctgq v + \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}j}, & c_{qj} &= \frac{\mathcal{I}g}{\mathcal{I}q} - ctgq g + \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}y}{\mathcal{I}j},
\end{aligned}$$

Предполагая материалы слоев изотропными, определим в соответствии с законом Гука и статическими гипотезами теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью физические компоненты тензора напряжений $\mathbf{s}^{(k)}$ (k – номер слоя):

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{qq}^{(k)} &= \frac{E_k}{1-n_k^2} (e_{qq}^{(k)} + n_k e_{jj}^{(k)}), & \mathbf{s}_{jj}^{(k)} &= \frac{E_k}{1-n_k^2} (e_{jj}^{(k)} + n_k e_{qq}^{(k)}), & \mathbf{s}_{qj}^{(k)} &= \frac{E_k}{1+n_k} e_{qj}^{(k)}, \\
\mathbf{s}_{zz}^{(k)} &\approx 0, & \mathbf{s}_{qz}^{(1)} &= k \frac{E_1}{1+n_1} e_{qz}^{(1)}, & \mathbf{s}_{jz}^{(1)} &= k \frac{E_1}{1+n_1} e_{jz}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь E_k – модуль упругости, а n_k – коэффициент Пуассона материала k -го слоя, k – коэффициент поперечного сдвига.

Потенциальная энергия деформации k -го слоя W_k определяется объемным интегралом:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_k} s_{ij}^{(k)} e_{ij}^{(k)} dV. \tag{1.4}$$

Выражая компоненты тензора напряжений $\mathbf{s}_{ij}^{(k)}$ через деформации $\mathbf{e}_{ij}^{(k)}$ согласно соотношениям (1.3), из (1.4) получим квадратичные формы, определяющие потенциальную энергию деформирования слоев:

$$W_1 = \frac{E_1}{2(1-n_1^2)} \iiint_{V_1} \left\{ e_{qq}^{(1)2} + e_{jj}^{(1)2} + 2n_1 e_{qq}^{(1)} e_{jj}^{(1)} + 2(1-n_1) \left[e_{qj}^{(1)2} + k(e_{zj}^{(1)2} + e_{zq}^{(1)2}) \right] \right\} dV,$$

$$W_{2,3} = \frac{E_{2,3}}{2(1-n_{2,3}^2)} \iiint_{V_{2,3}} \left\{ e_{qq}^{(2,3)2} + e_{jj}^{(2,3)2} + 2n_{2,3} e_{qq}^{(2,3)} e_{jj}^{(2,3)} + 2(1-n_{2,3}) e_{qj}^{(2,3)2} \right\} dV,$$

которые могут быть представлены в форме разложений по степеням z и h_- , h_+ :

$$W_1 = \frac{E_1}{2(1-n_1^2)} \iiint_{V_1} \{e_1 + n_1 e_2 + 2z[e_3 + n_1 e_4] + z^2[e_5 + n_1 e_6] + \frac{1}{2}(1-n_1)ke_7\} \sin qdzdqdj,$$

$$W_2 = \frac{E_2}{2(1-n_2^2)} \iiint_{V_2} \{e_1 + n_2 e_2 - 2h_1^- [e_3 + n_2 e_4] + (h_1^-)^2 [e_5 + n_2 e_6]\} \sin qdzdqdj,$$

$$W_3 = \frac{E_3}{2(1-n_3^2)} \iiint_{V_3} \{e_1 + n_3 e_2 + 2h_1^+ [e_3 + n_3 e_4] + (h_1^+)^2 [e_5 + n_3 e_6]\} \sin qdzdqdj.$$

Здесь введены обобщенные меры деформаций:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{qq}^2 + e_{jj}^2 + \frac{1}{2}e_{qj}^2, & e_2 &= 2e_{qq}e_{jj} - \frac{1}{2}e_{qj}^2, & e_3 &= e_{qq}c_{qq} + e_{jj}c_{jj} + \frac{1}{2}e_{qj}c_{qj}, \\ e_4 &= e_{qq}c_{jj} + e_{jj}c_{qq} - \frac{1}{2}e_{qj}c_{qj}, & e_5 &= c_{qq}^2 + c_{jj}^2 + \frac{1}{2}c_{qj}^2, & e_6 &= 2e_{qq}e_{jj} - \frac{1}{2}e_{qj}^2, \\ e_7 &= e_{ij}^2 + e_{iq}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что все величины e_1, \dots, e_7 не зависят от переменной z , что позволяет привести объемные интегралы к интегралам на срединной поверхности путем интегрирования по этой переменной. Интегрируем W_1, W_2, W_3 в пределах $\{-h_-, h_+\}$, $\{-h_- - h_2, -h_-\}$, $\{h_+, h_+ + h_3\}$ соответственно. Имеем:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{E_1}{2(1-n_1^2)} \iint_{\Omega} \left\{ h_1 [e_1 + n_1 e_2] + (h_+^2 - h_-^2) [e_3 + n_1 e_4] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}(h_+^3 + h_-^3) [e_5 + n_1 e_6] + h_1 \frac{1-n_1}{2} ke_7 \right\} \sin qdqdj, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$W_2 = \frac{E_2}{2(1-n_2^2)} \iint_{\Omega} \{h_2 ([e_1 + n_2 e_2] - 2h_- [e_3 + n_2 e_4] + h_-^2 [e_5 + n_2 e_6])\} \sin qdqdj,$$

$$W_3 = \frac{E_3}{2(1-n_3^2)} \iint_{\Omega} \{h_3 ([e_1 + n_3 e_2] + 2h_+ [e_3 + n_3 e_4] + h_+^2 [e_5 + n_3 e_6])\} \sin qdqdj.$$

Полная потенциальная энергия оболочки W определяется суммой:

$$W = W_1 + W_2 + W_3.$$

Подстановка выражений (1.5) в эту сумму и последующая перегруппировка слагаемых дает:

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^7 a_i e_i \sin qdqdj. \quad (1.6)$$

Здесь a_i – константы, определяемые физическими характеристиками материалов оболочки:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{E_1 h_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3}{1-n_3^2}, & a_5 &= \frac{1}{3} \frac{(h_+^3 + h_-^3) E_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2 h_-^2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3 h_+^2}{1-n_3^2}, \\ a_2 &= \frac{E_1 h_1 n_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2 n_2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3 n_3}{1-n_3^2}, & a_6 &= \frac{1}{3} \frac{(h_+^3 + h_-^3) E_1 n_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2 n_2 h_-^2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3 n_3 h_+^2}{1-n_3^2}, \\ a_3 &= \frac{E_1}{1-n_1^2} [h_+^2 - h_-^2] - \frac{2E_2 h_2}{1-n_2^2} h_- + \frac{2E_3 h_3}{1-n_3^2} h_+, & a_7 &= \frac{E_1 h_1}{1+n_1} k. \end{aligned}$$

$$a_4 = \frac{E_1 n_1}{1-n_1^2} [h_+^2 - h_-^2] - \frac{2E_2 h_2 n_2}{1-n_2^2} h_- + \frac{2E_3 h_3 n_3}{1-n_3^2} h_+,$$

При выборе определенных положений нейтральной поверхности Ω один из коэффициентов a_3, a_4 обращается в ноль, что ведет к сокращению числа слагаемых в выражении (1.6) и упрощению структуры получаемых впоследствии дифференциальных уравнений движения. В дальнейшем будем полагать, что $a_3 = 0$. Для этого значения h_+, h_- следует определять из условий

$$\begin{cases} a_3 = \frac{E_1}{1-n_1^2} [h_+^2 - h_-^2] - \frac{2E_2 h_2}{1-n_2^2} h_- + \frac{2E_3 h_3}{1-n_3^2} h_+ = 0, \\ h_+ + h_- = h_1, \end{cases}$$

то есть

$$h_+ = \frac{h_1}{2} \left[\frac{E_1 h_1}{1-n_1^2} + 2 \frac{E_2 h_2}{1-n_2^2} \right] \left[\frac{E_1 h_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3}{1-n_3^2} \right]^{-1}, \quad h_- = h_1 - h_+. \quad (1.7)$$

Если срединная поверхность выбрана в соответствии с (1.7), то коэффициент a_4 может быть вычислен по формуле

$$a_4 = (n_1 - n_3) \frac{2E_3 h_3}{1-n_3^2} h_+ - (n_1 - n_2) \frac{2E_2 h_2}{1-n_2^2} h_+.$$

Для вывода уравнений движения и краевых условий воспользуемся классическим вариационным принципом Остроградского-Гамильтона [2]:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \{K - W - F + P\} dt, \quad dI = 0, \quad (1.8)$$

где K – кинетическая энергия движения оболочки; W – потенциальная энергия ее деформации; F – работа объемных сил; P – работа внешних сил, действующих на поверхности оболочки (поверхностных сил).

Обозначая через r_k объемную массу материала k -го слоя, запишем выражение для кинетической энергии K :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \iiint_{V_k} r_k \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{u}^{(k)} \right)^2 dV. \quad (1.9)$$

Подставив в (1.9) кинематические соотношения (1.1):

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{ & r_1 \int_{-h_-}^{h_+} \left[\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} (\mathbf{u} + z\mathbf{y}) \right]^2 (R+z)^2 dz + r_2 \int_{-h_-}^{-h_+} \left[\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} (\mathbf{u} - h_- \mathbf{y}) \right]^2 (R+z)^2 dz + \\ & + r_3 \int_{h_+}^{h_+ + h_3} \left[\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} (\mathbf{u} + h_+ \mathbf{y}) \right]^2 (R+z)^2 dz \} \sin q \, dq \, dj \end{aligned}$$

и интегрируя полученное выражение по z , преобразуем объемный интеграл в поверхностный:

$$K = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ b_1 \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{u} \right)^2 + 2b_2 \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{u} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{y} + b_3 \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{y} \right)^2 \right\} \sin q \, dq \, dj. \quad (1.10)$$

Здесь введены следующие постоянные:

$$\begin{aligned}
b_1 &= r_1 \left[R^2 h_1 + R(h_+^2 - h_-^2) + \frac{1}{3}(h_+^3 + h_-^3) \right] + b_- + b_+, \\
b_2 &= r_1 \left[\frac{1}{2} R^2 (h_+^2 - h_-^2) + \frac{2}{3} R(h_+^3 + h_-^3) + \frac{1}{4}(h_+^4 - h_-^4) \right] - h_- b_- + h_+ b_+, \\
b_3 &= r_1 \left[\frac{1}{3} R^2 (h_+^3 + h_-^3) + \frac{1}{2} R(h_+^4 - h_-^4) + \frac{1}{5}(h_+^5 + h_-^5) \right] + h_-^2 b_- + h_+^2 b_+; \\
b_- &= r_2 h_2 \left[R^2 - R(2h_- + h_2) + h_-^2 + h_- h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right], \\
b_+ &= r_3 h_3 \left[R^2 + R(2h_+ + h_3) + h_+^2 + h_+ h_3 + \frac{1}{3} h_3^2 \right].
\end{aligned}$$

Работа объемных сил F определяется выражением:

$$F = \sum_{k=1}^3 \iiint_{V_k} r_k \mathbf{g} \mathbf{u}^{(k)} dV. \quad (1.11)$$

Подстановка соотношений (1.1) в объемный интеграл (1.11) и последующее интегрирование по переменной z приводит к такому поверхностному интегралу:

$$F = \iint_{\Omega} \{b_1 \mathbf{g} \mathbf{u} + b_2 \mathbf{g} \mathbf{y}\} \sin q dq dj. \quad (1.12)$$

Работа внешних сил может быть вычислена как сумма работ, производимых распределенными силами \mathbf{f}_+ , \mathbf{f}_- на соответствующих лицевых (сферических, эквидистантных Ω) поверхностях W_+ , W_- и реактивными силами $\mathbf{f}^{(k)}$, приложенных к торцевым (линейчатым, ортогональным к Ω) поверхностям p_k (рис. 1):

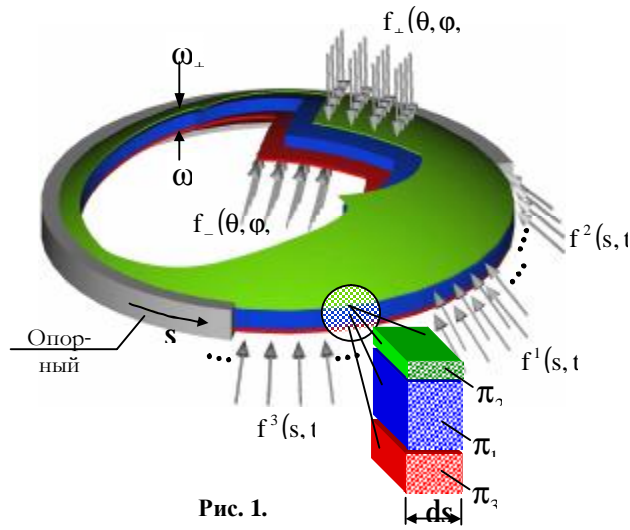


Рис. 1.

$$P = \iint_{w_+} \mathbf{f}_+ \mathbf{u}^{(3)} dw_+ + \iint_{w_-} \mathbf{f}_- \mathbf{u}^{(2)} dw_- + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \iint_{p_k} \mathbf{f}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} dp_k. \quad (1.13)$$

Подставляя в (1.13) кинематические соотношения (1.1) и приводя интегралы на поверхностях

w_+ , w_- к интегралам на Ω , получим:

$$P = \iint_{\Omega} \left\{ (\mathbf{u} + h_+ \mathbf{y}) \mathbf{f}_+ (R + h_+ + h_3)^2 + (\mathbf{u} - h_- \mathbf{y}) \mathbf{f}_- (R - h_- - h_2)^2 \right\} \sin q dq dj + \\ + \int_{\Gamma} \left[\int_{-h_-}^{h_+} (\mathbf{u} + z \mathbf{y}) \mathbf{f}^{(1)} \frac{R+z}{R} dz + \int_{-h_- - h_2}^{-h_-} (\mathbf{u} - h_- \mathbf{y}) \mathbf{f}^{(2)} \frac{R+z}{R} dz + \int_{h_+}^{h_+ + h_3} (\mathbf{u} + h_+ \mathbf{y})^T \mathbf{f}^{(3)} \frac{R+z}{R} dz \right] ds.$$

Здесь Γ – пространственная кривая, образуемая пересечением поверхностей Ω и \mathbf{p}_1 .

Интегрируем полученное выражение по z выражение и преобразуем его к виду:

$$P = \iint_{\Omega} \{ \mathbf{F}_{\Omega} \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\Omega} \mathbf{y} \} R^2 \sin q dq dj + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ \mathbf{F}_{\Gamma} \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\Gamma} \mathbf{y} \} ds, \quad (1.14)$$

где

$$\mathbf{F}_{\Omega} = \frac{(R + h_+ + h_3)^2}{R^2} \mathbf{f}_+ + \frac{(R - h_- - h_2)^2}{R^2} \mathbf{f}_-, \\ \mathbf{M}_{\Omega} = \frac{(R + h_+ + h_3)^2}{R^2} h_+ \mathbf{f}_+ - \frac{(R - h_- - h_2)^2}{R^2} h_- \mathbf{f}_-, \\ \mathbf{F}_{\Gamma} = \int_{-h_-}^{h_+} \mathbf{f}^{(1)} \frac{R+z}{R} dz + \int_{-h_- - h_2}^{-h_-} \mathbf{f}^{(2)} \frac{R+z}{R} dz + \int_{h_+}^{h_+ + h_3} \mathbf{f}^{(3)} \frac{R+z}{R} dz, \\ \mathbf{M}_{\Gamma} = \int_{-h_-}^{h_+} \mathbf{f}^{(1)} \frac{R+z}{R} z dz - \int_{-h_- - h_2}^{-h_-} \mathbf{f}^{(2)} \frac{R+z}{R} h_- dz + \int_{h_+}^{h_+ + h_3} \mathbf{f}^{(3)} \frac{R+z}{R} h_+ dz.$$

В настоящей работе рассматривается случай упругого закрепления слоев оболочки на контуре Γ . Возникающие при таком закреплении реактивные усилия $\mathbf{f}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ могут быть заданы в наиболее общей форме следующими линейными соотношениями

$$\mathbf{f}^{(1)}(z) = \frac{R}{R+z} \mathbf{Q}_1(z) [\mathbf{u} + z \mathbf{y}], \\ \mathbf{f}^{(2)} = \frac{R}{R-h_-} \mathbf{Q}_2(\mathbf{u} - h_- \mathbf{y}), \quad \mathbf{f}^{(3)} = \frac{R}{R+h_+} \mathbf{Q}_3(\mathbf{u} + h_+ \mathbf{y}), \quad (1.15)$$

где $\mathbf{Q}_{1,2,3}$ – диагональные матрицы жесткости упругой заделки слоев. Подставим в (1.15) кинематические соотношения (1.1) и вычислим соответствующие интегралы. Получим:

$$\mathbf{F}_{\Gamma} = \Theta \mathbf{u} + \Psi \mathbf{y}, \quad \mathbf{M}_{\Gamma} = \Psi \mathbf{y} + \Xi \mathbf{u}.$$

Здесь

$$\Theta = \int_{-h_-}^{h_+} \Theta_1(z) dz + \Theta_2 + \Theta_3, \quad \Psi = \int_{-h_-}^{h_+} z \Theta_1(z) dz - \Theta_2 h_- + \Theta_3 h_+, \\ \Xi = \int_{-h_-}^{h_+} z^2 \Theta_1(z) dz - \Theta_2 h_-^2 + \Theta_3 h_+^2.$$

Таким образом, работа внешних сил определяется следующим выражением:

$$P = \iint_{\Omega} \{ \mathbf{F}_{\Omega} \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\Omega} \mathbf{y} \} R^2 \sin q dq dj + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ \mathbf{u} \Theta \mathbf{u} + 2 \mathbf{u} \Psi \mathbf{y} + \mathbf{y} \Xi \mathbf{u} \} ds. \quad (1.16)$$

Располагая всеми компонентами функционала (1.8) и учитывая тождества типа

$$\left(d \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}q} \right)_v = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (duv) - du \frac{\mathcal{I}v}{\mathcal{I}q},$$

вычислим его вариацию dI :

$$dI = \int_{t_0}^{t_1} \left[\iint_{\Omega} \left\{ L_u du + L_v dv + L_w dw + L_y dy + L_g dg \right\} \sin q dq dj - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} \left\{ B_u du + B_v dv + B_w dw + B_y dy + B_g dg \right\} ds \right] dt, \quad (1.17)$$

где через B_u, \dots, B_g , L_u, \dots, L_g , обозначены дифференциальные выражения¹:

$$L_u = a_1 \left[\frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} q^2} + ctgq \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} q} - \frac{1}{\sin^2 q} u \right] + (a_1 - a_2) u + (a_1 + a_2) \frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} q} + \frac{a_7}{2} \left[\frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} q} + R y - u \right] + \\ + \frac{a_1 - a_2}{2} \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} j^2} - \frac{3a_1 - a_2}{2} \frac{ctgq}{\sin q} + \frac{a_1 + a_2}{2} \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} j \mathcal{I} q} - \\ - \frac{a_4}{2} \left[y - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}^2 g}{\mathcal{I} q \mathcal{I} j} + \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} j} - \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathcal{I}^2 y}{\mathcal{I} j^2} \right) \right] + b_1 \left[g_q - \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} t^2} \right] - b_2 \frac{\mathcal{I}^2 y}{\mathcal{I} t^2} + R^2 F_q, \\ L_v = \frac{a_1 - a_2}{2} \left[\frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} q^2} + ctgq \frac{\mathcal{I} v}{\mathcal{I} q} - \frac{1}{\sin^2 q} v \right] + a_1 \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} j^2} + \frac{3a_1 - a_2}{2} \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} j} + \\ + \frac{a_1 + a_2}{2} \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} q \mathcal{I} j} + (a_1 + a_2) \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} j} + \frac{a_7}{2} \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} j} + R g - v \right] - \\ - \frac{a_4}{4} \left[\frac{\mathcal{I}^2 g}{\mathcal{I} q^2} + ctgq \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} q} - \frac{1}{\sin^2 q} g - \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}^2 y}{\mathcal{I} q \mathcal{I} j} - 2g \right] + b_1 \left[g_j - \frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} t^2} \right] - b_2 \frac{\mathcal{I}^2 g}{\mathcal{I} t^2} + R^2 F_j, \\ L_w = \frac{a_7}{2} \left[\frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} q^2} + R \frac{\mathcal{I} y}{\mathcal{I} q} - \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} q} + ctgq \left(\frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} q} + R y - u \right) + \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} j^2} - \frac{1}{\sin q} \left(\frac{\mathcal{I} v}{\mathcal{I} j} - R \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} j} \right) \right] - \\ - (a_1 + a_2) \left[\frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} q} + 2w + \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I} v}{\mathcal{I} j} + ctgq u \right] - \frac{a_4}{2} \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} j} + ctgq y + \frac{\mathcal{I} y}{\mathcal{I} q} \right] +$$

¹ При известных параметрических уравнениях, определяющих контур $\Gamma (\chi_1(s), \chi_2(s))$, тригонометрические функции угла $\alpha(s)$ могут быть сформулированы в виде:

$$\sin \alpha = \left[\left(\frac{d\chi_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\chi_2}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\chi_1}{ds}, \quad \cos \alpha = \left[\left(\frac{d\chi_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\chi_2}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\chi_2}{ds}.$$

$$\begin{aligned}
& +b_1 \left[g_z - \frac{\mathfrak{f}^2 w}{\mathfrak{f} t^2} \right] + R^2 F_z, \\
L_y = & a_5 \left[\frac{\mathfrak{f}^2 y}{\mathfrak{f} q^2} + ctgq \frac{\mathfrak{f} y}{\mathfrak{f} q} - \frac{1}{\sin^2 q} y \right] + (a_5 - a_6) y - \frac{a_7}{2} R \left[\frac{\mathfrak{f} w}{\mathfrak{f} q} + Ry - u \right] + \\
& + \frac{a_5 - a_6}{2} \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathfrak{f}^2 y}{\mathfrak{f} j^2} - \frac{3a_5 - a_6}{2} \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} g}{\mathfrak{f} j} - \\
& - \frac{a_4}{2} \left[u - \frac{\mathfrak{f} w}{\mathfrak{f} q} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f}^2 v}{\mathfrak{f} q \mathfrak{f} j} + \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} v}{\mathfrak{f} j} - \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathfrak{f}^2 u}{\mathfrak{f} j^2} \right) \right] + \\
& + \frac{a_5 + a_6}{2} \frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f}^2 g}{\mathfrak{f} j \mathfrak{f} q} + b_2 \left[g_q - \frac{\mathfrak{f}^2 u}{\mathfrak{f} t^2} \right] - b_3 \frac{\mathfrak{f}^2 y}{\mathfrak{f} t^2} + R^2 M_q, \\
L_g = & \frac{a_5 - a_6}{2} \left[\frac{\mathfrak{f}^2 g}{\mathfrak{f} q^2} + ctgq \frac{\mathfrak{f} g}{\mathfrak{f} q} - \frac{1}{\sin^2 q} g \right] + a_5 \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathfrak{f}^2 g}{\mathfrak{f} j^2} + \frac{3a_5 - a_6}{2} \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} y}{\mathfrak{f} j} + \\
& + \frac{a_5 + a_6}{2} \frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f}^2 y}{\mathfrak{f} q \mathfrak{f} j} - \frac{a_7}{2} R \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} w}{\mathfrak{f} j} + Rg - v \right] - \\
& - \frac{a_4}{4} \left[\frac{\mathfrak{f}^2 v}{\mathfrak{f} q^2} + ctgq \frac{\mathfrak{f} v}{\mathfrak{f} q} + \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} u}{\mathfrak{f} j} - \frac{1}{\sin^2 q} v - \frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f}^2 u}{\mathfrak{f} q \mathfrak{f} j} - 2v - \frac{2}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} w}{\mathfrak{f} q} \right] + \\
& + b_2 \left[g_j - \frac{\mathfrak{f}^2 v}{\mathfrak{f} t^2} \right] - b_3 \frac{\mathfrak{f}^2 g}{\mathfrak{f} t^2} + R^2 M_j; \\
B_u = & \left\{ \left[\frac{a_1 - a_2}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} u}{\mathfrak{f} j} + \frac{\mathfrak{f} v}{\mathfrak{f} q} - ctgq v \right) - \frac{a_4}{4} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} y}{\mathfrak{f} j} + \frac{\mathfrak{f} g}{\mathfrak{f} q} - ctgq g \right) \right] \sin a - \right. \\
& \left. - \left[a_2 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} v}{\mathfrak{f} j} + ctgq u \right) + a_1 \frac{\mathfrak{f} u}{\mathfrak{f} q} + \mathfrak{R} \phi w + \frac{a_4}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} g}{\mathfrak{f} j} + ctgq y \right) \right] \cos a + \Theta_{11} u + \hat{\Theta}_{11} y \right\}_{\Gamma}, \\
B_v = & \left\{ \left[a_1 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} v}{\mathfrak{f} j} + ctgq u \right) + a_2 \frac{\mathfrak{f} u}{\mathfrak{f} q} + (a_1 + a_2) w + \frac{a_4}{2} \frac{\mathfrak{f} y}{\mathfrak{f} q} \right] \sin a - \right. \\
& \left. - \left[\frac{a_1 - a_2}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} u}{\mathfrak{f} j} + \frac{\mathfrak{f} v}{\mathfrak{f} q} - ctgq v \right) - \frac{a_4}{4} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} y}{\mathfrak{f} j} + \frac{\mathfrak{f} g}{\mathfrak{f} q} - ctgq g \right) \right] \cos a + \Theta_{22} v + \hat{\Theta}_{22} g \right\}_{\Gamma}, \\
B_w = & \left\{ \frac{a_7}{2} \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} w}{\mathfrak{f} j} + Rg - v \right] \sin a - \frac{a_7}{2} \left[\frac{\mathfrak{f} w}{\mathfrak{f} q} + Ry - u \right] \cos a + \Theta_{33} w \right\}_{\Gamma}, \\
B_y = & \left\{ \left[\frac{a_5 - a_6}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} y}{\mathfrak{f} j} + \frac{\mathfrak{f} g}{\mathfrak{f} q} - ctgq g \right) - \frac{a_4}{4} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{f} u}{\mathfrak{f} j} + \frac{\mathfrak{f} v}{\mathfrak{f} q} - ctgq v \right) \right] \sin a - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[a_6 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}g}{\mathcal{Y}j} + ctgq \mathcal{Y} \right) + a_5 \frac{\mathcal{Y}y}{\mathcal{Y}j} + \frac{a_4}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}v}{\mathcal{Y}j} + ctgq u + w \right) \right] \cos a + \Xi_{11} \mathcal{Y} + \hat{\Xi}_{11} u \Bigg|_{\Gamma}, \\
B_g & = \left\{ \left[a_5 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}g}{\mathcal{Y}j} + ctgq \mathcal{Y} \right) + a_6 \frac{\mathcal{Y}y}{\mathcal{Y}q} + \frac{a_4}{2} \left(\frac{\mathcal{Y}u}{\mathcal{Y}q} + w \right) \right] \sin a - \right. \\
& \left. - \left[a_3 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}y}{\mathcal{Y}j} + \frac{\mathcal{Y}g}{\mathcal{Y}q} - ctgq g \right) - \frac{a_4}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}u}{\mathcal{Y}j} + \frac{\mathcal{Y}v}{\mathcal{Y}q} - ctgq v \right) \right] \cos a + \Xi_{22} g + \hat{\Xi}_{22} v \right\} \Bigg|_{\Gamma}.
\end{aligned}$$

Таким образом, условие стационарности функционала (1.8) выполняется, если имеют место тождества:

$$L_u \equiv 0, \quad L_v \equiv 0, \quad L_w \equiv 0, \quad L_{\mathcal{Y}} \equiv 0, \quad L_g \equiv 0, \quad \forall \{q, j\} \in \Omega, \quad (1.18)$$

$$B_u \equiv 0, \quad B_v \equiv 0, \quad B_w \equiv 0, \quad B_{\mathcal{Y}} \equiv 0, \quad B_g \equiv 0, \quad \forall \{q, j\} \in \Gamma. \quad (1.19)$$

Тождества (1.18) являются дифференциальными уравнениями движения оболочки, а (1.19) – краевыми условиями, определяющими закрепление конструкции на опорном контуре; все эти соотношения, вместе с соответствующими начальными условиями, представляют математическую формулировку начально-краевой задачи о нестационарных колебаниях трехслойной сферической оболочки несимметричной структуры.

Для дальнейшего анализа удобно записать уравнения движения и краевые условия в безразмерной форме. С этой целью введем безразмерные параметры $E_*, E^*, h_*, h^*, r_*, r^*, R^*$:

$$E_* = \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1}, \quad E^* = \frac{E_3 h_3}{E_1 h_1}, \quad r_* = \frac{r_2 h_2}{r_1 h_1}, \quad r^* = \frac{r_3 h_3}{r_1 h_1}, \quad R^* = R/h_1,$$

безразмерные перемещения $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$:

$$\mathcal{U} = \frac{u}{R}, \quad \mathcal{V} = \frac{v}{R}, \quad \mathcal{W} = \frac{w}{R},$$

безразмерные усилия $\mathcal{F}_q, \mathcal{F}_j, \mathcal{F}_z, \mathcal{M}_q, \mathcal{M}_j$:

$$\mathcal{F}_q = \frac{F_q}{R} b, \quad \mathcal{F}_j = \frac{F_j}{R} b, \quad \mathcal{F}_z = \frac{F_z}{R} b, \quad \mathcal{M}_q = M_q b, \quad \mathcal{M}_j = M_j b, \quad b = \frac{1-n_1^2}{E_1 h_1}$$

и безразмерное время \mathcal{T} :

$$\mathcal{T} = t \left[R \sqrt{h_1 r_1 b} \right]^{-1}.$$

В новых переменных дифференциальные уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned}
& A \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathcal{U} \right] + B \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + C \mathcal{U} + K \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \psi - \mathcal{U} \right] + \frac{1}{2} C \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \\
& - (A + \frac{1}{2} C) \frac{ctg\theta}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi \partial \theta} - H \left[\psi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{ctg\theta}{\sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -I_1 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] - I_2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \\
& \frac{1}{2} C \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathcal{U} \right] + A \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} + (A + \frac{1}{2} C) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \varphi} \\
& + B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + K \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \gamma - \mathcal{U} \right] - \frac{1}{2} C \mathcal{U} - \\
& - \frac{1}{2} H \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \gamma - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varphi} - 2\gamma \right] - I_1 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] - I_2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varphi^2} + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \\
& K \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \psi - \mathcal{U} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right) \right] - \\
& - B \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + 2 \mathcal{U} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \mathcal{U} \right] - \\
& - H \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] - I_1 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \\
& D \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \psi \right] + F \psi - K \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \psi - \mathcal{U} \right] + \frac{1}{2} F \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \\
& - (D + \frac{1}{2} F) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} - H \left[\mathcal{U} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} G \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varphi \partial \theta} - I_2 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] - I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \\
& \frac{1}{2} F \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \gamma \right] + D \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varphi^2} + (D + \frac{1}{2} F) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{1}{2} G \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varphi} + K \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \gamma - \mathcal{U} \right] + \\
& + \frac{1}{2} H \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathcal{U} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \varphi} - 2 \mathcal{U} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \right] - \\
& - I_2 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] - I_3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varphi^2} + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \tag{1.20}
\end{aligned}$$

а краевые условия могут быть сформулированы следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\frac{1}{2} C \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \gamma \right) \right] \sin \alpha - \right. \\
& \left. - \left[(A-C) \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) + A \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} + 2B \vartheta_0 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \varphi \right) \right] \cos \alpha + \vartheta_{11}^* \vartheta_0 + \hat{\vartheta}_{11}^* \varphi \right\} \Big|_{\Gamma} = 0 \\
& \left\{ \left[A \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) + (A-C) \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} + B \vartheta_0 + H \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} \theta} \right] \sin \alpha - \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{1}{2} C \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \gamma \right) \right] \cos \alpha + \vartheta_{22}^* \vartheta_0 + \hat{\vartheta}_{22}^* \gamma \right\} \Big|_{\Gamma} = 0 \\
& K \left\{ \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \gamma - \vartheta_0 \right] \sin \alpha - \left[\frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} + \varphi - \vartheta_0 \right] \cos \alpha + \vartheta_{33}^* \vartheta_0 \right\} \Big|_{\Gamma} = 0 \\
& \left\{ \left[\frac{1}{2} F \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \gamma \right) - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) \right] \sin \alpha - \right. \\
& \quad \left. - \left[(D-F) \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \varphi \right) + D \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \vartheta_0 + \vartheta_0 \right) \right] \cos \alpha + \varXi_{11}^* \varphi + \hat{\varXi}_{11}^* \vartheta_0 \right\} \Big|_{\Gamma} = 0 \\
& \left\{ \left[D \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \varphi \right) + (D-F) \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} \theta} + H \left(\frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} + \vartheta_0 \right) \right] \sin \alpha - \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{1}{2} F \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \gamma \right) - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) \right] \cos \alpha + \varXi_{22}^* \gamma + \hat{\varXi}_{22}^* \vartheta_0 \right\} \Big|_{\Gamma} = 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Здесь A, B, C, D, F, G, H – постоянные, зависящие от относительных параметров E_*, E^*, R^* и коэффициентов Пуассона материалов слоев n_1, n_2, n_3 :

$$A = 1 + E_* h_* \frac{1-n_1^2}{1-n_2^2} + E^* h^* \frac{1-n_1^2}{1-n_3^2}, \quad B = (1+n_1) \left[1 + E_* \frac{1-n_1}{1-n_2} + E^* \frac{1-n_1}{1-n_3} \right],$$

$$C = (1-n_1) \left[1 + E_* \frac{1+n_1}{1+n_2} + E^* \frac{1+n_1}{1+n_3} \right],$$

$$D = \frac{1}{4R^{*2}} \left[\frac{1}{3} + (1-\hat{h})^2 + E_* h_* \frac{1-n_1^2}{1-n_2^2} (2-\hat{h}) + E^* h^* \frac{1-n_1^2}{1-n_3^2} \hat{h} \right],$$

$$F = \frac{(1-n_1)}{4R^{*2}} \left[\frac{1}{3} + (1-\hat{h})^2 + E_* \frac{1+n_1}{1+n_2} (2-\hat{h}) + E^* \frac{1+n_1}{1+n_3} \hat{h} \right],$$

$$G = \frac{(1+n_1)}{4R^{*2}} \left[\frac{1}{3} + (1-\hat{h})^2 + E_* \frac{1-n_1}{1-n_2} (2-\hat{h}) + E_* \frac{1-n_1}{1-n_3} \hat{h} \right],$$

$$H = \frac{\hat{h}}{R^*} \left[(n_1-n_3) E_* \frac{1-n_1^2}{1-n_3^2} - (n_1-n_2) E_* \frac{1-n_1^2}{1-n_2^2} \right], \quad K = \frac{k^2}{2} (1-n_1), \quad \hat{h} = \frac{1}{A} \left[1 + 2E_* \frac{1-n_1^2}{1-n_2^2} \right],$$

а I_1, I_2, I_3 величины, зависящие также от относительных плотностей материалов слоев r_*, r^* и определяющие инерционные свойства конструкции:

$$I_1 = 1 + \frac{\hat{h}-1}{R^*} + \frac{(\hat{h}-1)^2 + 1/3}{4R^{*2}} + r_* \left[1 - \frac{2-\hat{h}}{2R^*} \right]^2 + r^* \left[1 + \frac{\hat{h}}{2R^*} \right]^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2R^*} \left[(\hat{h}-1) + \frac{(\hat{h}-1)^2 + 1/3}{R^*} + \frac{(\hat{h}-1)^3 + \hat{h}-1}{4R^{*2}} - r_* \left[1 - \frac{2-\hat{h}}{2R^*} \right]^2 (2-\hat{h}) + r^* \left[1 + \frac{\hat{h}}{2R^*} \right]^2 \hat{h} \right],$$

$$I_3 = \frac{1}{4R^{*2}} \left[(\hat{h}-1)^2 + 1/3 + \frac{(\hat{h}-1)^3 + \hat{h}-1}{R^*} + \frac{(\hat{h}-1)^4 + (\hat{h}-1)^2 + 1/10}{2R^{*2}} + r_* \left[1 - \frac{2-\hat{h}}{2R^*} \right]^2 (2-\hat{h})^2 + r^* \left[1 + \frac{\hat{h}}{2R^*} \right]^2 \hat{h}^2 \right].$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (1.20), совместно с краевыми условиями (1.21) и соответствующими начальными условиями, представляет математическую модель колебаний трехслойной непологой сферической оболочки несимметричного строения.

Интересно отметить, что, несмотря на громоздкий внешний вид, коэффициенты уравнений (1.20) полностью определяются восьмью безразмерными параметрами $E_*, E^*, R^*, \rho_*, \rho^*, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, а краевые условия – девятью безразмерными упругими характеристиками опорного контура.

Если внешнее динамическое воздействие $\dot{\mathbf{F}}_\Omega, \dot{\mathbf{M}}_\Omega$, массовые силы и функции, определяющие краевые и начальные условия, симметричны относительно оси z , то в системе (1.20) два уравнения (второе и пятое) удовлетворяются тождественно, а оставшиеся три могут быть представлены такими соотношениями:

$$\begin{cases} A \left[\frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{W}}{\mathcal{U}^2} + ctgq \frac{\mathcal{U} \mathcal{W}}{\mathcal{U} q} - \frac{1}{\sin^2 q} \mathcal{W} \right] + B \frac{\mathcal{U} \mathcal{W}}{\mathcal{U} q} + C \mathcal{W} + K \left[\frac{\mathcal{U} \mathcal{W}}{\mathcal{U} q} - \mathcal{W} \right] + (K-H) \mathcal{U} - I_1 \left[\frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{W}}{\mathcal{U} \mathcal{W}} - \mathcal{W}_q \right] - I_2 \frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{U}}{\mathcal{U} \mathcal{W}} + \mathcal{W}_q = 0, \\ K \left[\frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{W}}{\mathcal{U}^2} + \frac{\mathcal{U} \mathcal{U}}{\mathcal{U} q} - \frac{\mathcal{U} \mathcal{W}}{\mathcal{U} q} + ctgq \left(\frac{\mathcal{U} \mathcal{W}}{\mathcal{U} q} + \mathcal{U} - \mathcal{W} \right) \right] - B \left[\frac{\mathcal{U} \mathcal{W}}{\mathcal{U} q} + 2 \mathcal{W} + ctgq \mathcal{W} \right] - H \left[ctgq \mathcal{U} + \frac{\mathcal{U} \mathcal{U}}{\mathcal{U} q} \right] - I_1 \left[\frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{W}}{\mathcal{U} \mathcal{W}} - \mathcal{W}_q \right] + \mathcal{W}_z = 0, \\ D \left[\frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{U}}{\mathcal{U}^2} + ctgq \frac{\mathcal{U} \mathcal{U}}{\mathcal{U} q} - \frac{1}{\sin^2 q} \mathcal{U} \right] + F \mathcal{U} - K \mathcal{U} - (K-H) \left[\mathcal{U} \frac{\mathcal{U} \mathcal{W}}{\mathcal{U} q} - \mathcal{W} \right] - I_2 \left[\frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{W}}{\mathcal{U} \mathcal{W}} - \mathcal{W}_q \right] - I_3 \frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{U}}{\mathcal{U} \mathcal{W}} + \mathcal{W}_q = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Рассмотрим следующие варианты формы границы оболочек:

- i) граница представляет собой две параллели Γ_1, Γ_2 ; соответствующая такой границе конструкция представляет собой кольцевую область;
- ii) граница совпадает с параллелью; в этом случае конструкция образует сферический сектор;
- iii) конструкция образует полную сферу.

В последнем случае оболочка, будучи незакрепленной, помимо деформирования, может совершать движение как твердое тело.

В случае кольцевой области контур Γ может быть образован параллелями Γ_1, Γ_2 , которым соответствуют угловые координаты $q = q_1, q = q_2$, и разрезом по меридиану Γ_3 ($j = 2pn, n = 0, 1, 2, \dots$), причем на Γ_3 должны выполняться условия периодичности, а на Γ_1, Γ_2 – условия упругого закрепления:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ (A - C)(ctgq \vartheta) + A \frac{\vartheta}{q} + 2B \vartheta + H(ctgq \gamma) \right\} \Big|_{q=q_1} = \Theta_{11}^* \vartheta + \hat{\Xi}_{11}^* \gamma, \\ & K \left\{ \frac{\vartheta}{q} + \gamma - \vartheta \right\} \Big|_{q=q_1} = \Theta_{33}^* \vartheta, \\ & \left\{ (D - F)(ctgq \gamma) + D \frac{\gamma}{j} + H(ctgq \vartheta + \vartheta) \right\} \Big|_{q=q_1} = \Xi_{11}^* \gamma + \hat{\Xi}_{11}^* \vartheta \\ & \left\{ (A - C)(ctgq \vartheta) + A \frac{\vartheta}{q} + 2B \vartheta + H(ctgq \gamma) \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Theta_{11}^{**} \vartheta - \hat{\Xi}_{11}^{**} \gamma, \\ & K \left\{ \frac{\vartheta}{q} + \gamma - \vartheta \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Theta_{33}^{**} \vartheta, \\ & \left\{ (D - F)(ctgq \gamma) + D \frac{\gamma}{j} + H(ctgq \vartheta + \vartheta) \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Xi_{11}^{**} \gamma - \hat{\Xi}_{11}^{**} \vartheta \end{aligned} \right. \quad (1.23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ (A - C)(ctgq \vartheta) + A \frac{\vartheta}{q} + 2B \vartheta + H(ctgq \gamma) \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Theta_{11}^{**} \vartheta - \hat{\Xi}_{11}^{**} \gamma, \\ & K \left\{ \frac{\vartheta}{q} + \gamma - \vartheta \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Theta_{33}^{**} \vartheta, \\ & \left\{ (D - F)(ctgq \gamma) + D \frac{\gamma}{j} + H(ctgq \vartheta + \vartheta) \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Xi_{11}^{**} \gamma - \hat{\Xi}_{11}^{**} \vartheta \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

Краевые условия для сферического сектора могут быть сформулированы, как (1.23) и условия ограниченности при $q = 0$, т. е.:

$$\vartheta|_{q=0} < \infty, \gamma|_{q=0} < \infty, \vartheta|_{q=0} < \infty. \quad (1.25)$$

Для полной сферы краевые условия имеют вид:

$$\vartheta|_{q=0} < \infty, \gamma|_{q=0} < \infty, \vartheta|_{q=0} < \infty, \quad (1.26)$$

$$\vartheta|_{q=p} < \infty, \gamma|_{q=p} < \infty, \vartheta|_{q=p} < \infty.$$

Начальные условия, соответствующие рассматриваемым задачам, могут быть заданы в форме:

$$\begin{aligned} \vartheta|_{t=0} &= Ru_0, \gamma|_{t=0} = \gamma_0, \vartheta|_{q=0} = R\omega_0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_{t=0} &= R\dot{\omega}_0, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\gamma}_0, \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_{t=0} = R\dot{\omega}_0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

2. В области $D = \{(\theta_1, \theta_2) \times [0, T]\}$, $T < \infty$ рассмотрим гиперболическую начально-краевую задачу, считая, что $\mathbf{f}(\theta, t)$ является заданной, а $\mathbf{y}(\theta, t)$ – искомой вектор-функцией:

$$A[\mathbf{y}(\theta, t)] - H \frac{\partial^2 \mathbf{y}(\theta, t)}{\partial t^2} = \mathbf{f}(\theta, t), \quad \mathbf{y}(\theta, t), \mathbf{f}(\theta, t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)] \Big|_{\theta_1} = 0, \quad \mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)] \Big|_{\theta_2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}(\theta, t) \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0(\theta), \quad \partial/\partial t \mathbf{y}(\theta, t) \Big|_{t=0} = \dot{\mathbf{y}}_0(\theta). \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{H} – положительно определенная симметрическая матрица размерностью $n \times n$; $\mathbf{A}[\mathbf{y}(\theta, t)]$ – самосопряженное дифференциальное выражение с переменными матричными коэффициентами:

$$\mathbf{A}[\mathbf{y}(\theta, t)] \equiv \sum_{r=0}^2 a_r(\theta) \frac{\partial^{2-r}}{\partial \theta^{2-r}} \mathbf{y}(\theta, t), \quad \theta \in I = (\theta_1, \theta_2), \quad \forall \theta \det[a_0(\theta)] \neq 0, \quad (2.4)$$

а $\mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)]|_{\theta_1, \theta_2}$ – краевые условия разделенного типа.

В дальнейшем будем полагать, что элементы матрицы $\mathbf{a}_0(\theta)$ – непрерывны в интервале $]\theta_1, \theta_2[$, а элементы $\mathbf{a}_1(\theta)$ и $\mathbf{a}_2(\theta)$ соответственно дифференцируемы и дважды дифференцируемы в том же интервале; все эти функции либо равномерно ограничены на $]\theta_1, \theta_2[$, либо имеют особенности на концах интервала $\theta = \theta_1$ или $\theta = \theta_2$. В первом случае дифференциальная операция (2.4) порождает регулярную начально-краевую задачу (2.1) – (2.3), во втором – сингулярную [9].

В регулярном случае краевые условия (2.2) могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)]|_{\theta_1} \equiv \left[\mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{y}(\theta, t) + (\mathbf{c} + \mathbf{Z}_1) \mathbf{y}(\theta, t) \right]_{\theta=\theta_1}, \quad \mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)]|_{\theta_2} \equiv \left[\mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{y}(\theta, t) + (\mathbf{c} - \mathbf{Z}_2) \mathbf{y}(\theta, t) \right]_{\theta=\theta_2}, \quad (2.5)$$

причем матрицы \mathbf{b} , \mathbf{c} и $\mathbf{Z}_{1,2}$ имеют размерность $n \times n$ и выбираются таким образом, чтобы $2n$ соотношений (2.5) были линейно независимы.

Для сингулярной задачи краевые условия (2.2) формулируются либо в терминах предельных равенств, либо в форме условий ограниченности:

$$\mathbf{y}(\theta)|_{\theta=\theta_1} < \infty, \quad \mathbf{y}(\theta)|_{\theta=\theta_2} < \infty. \quad (2.6)$$

Количество линейно-независимых соотношений в этом случае может быть меньше $2n$; оно определяется индексом дефекта минимального сингулярного оператора, порождаемого операцией (2.4).

Введем гильбертово пространство $\dot{L}_2^\mu(\theta_1, \theta_2)$ (для оболочки $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$), то есть пространство всех квадратично суммируемых вектор-функций в интервале (θ_1, θ_2) ; обозначим его через H и определим в нем скалярное произведение следующим образом

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_\mu = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{v}^T \mu \mathbf{w} d\theta, \quad (2.7)$$

где $\mu = \mu(\theta)$ – матрица весовых функций.

Аксиомы скалярного произведения накладывают ограничения на матрицу μ , которая должна быть симметрической, а $\forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ соответствующая квадратичная форма $\{\mathbf{v}^T \mu \mathbf{v}\}$ – положительно определенной.

Введем пространство L как совокупность всех последовательностей векторов $\{\mathbf{f}_i\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{f}_i|^2 < \infty, \quad (2.8)$$

В дальнейшем будем называть L пространством изображений. Интегральное преобразование задается двойственными линейными операторами:

$$F[\mathbf{f}(q)] = \{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{G}^T(q, l_i) \mathbf{f}(q) dq \right\}_{i=1}^{\infty}, \quad l_i \in \Lambda; \quad (2.9)$$

$$F^{-1}[\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{\infty}] = \mathbf{f}(q) = \mathbf{H} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{K}(q, l_i) \mathbf{f}_i; \quad \mathbf{f}(q) \in H, \quad \{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{\infty} \in L, \quad (2.10)$$

где Λ – счетное (спектральное) множество действительных чисел, $\mathbf{K}(q, l)$, $\mathbf{G}(q, l)$ – матричные ядра интегрального преобразования, такие, что:

а) преобразования (2.9), (2.10) осуществляют изометрическое отображение H на L и L на H ; при этом представление (2.10) сходится;

б) прямое преобразование (2.9) обладает операционным свойством:

$$F[A[\mathbf{f}(q)]] \equiv F[-l \mathbf{H} \mathbf{f}(q)]. \quad (2.11)$$

Принципиальное отличие построенного здесь матричного конечного интегрального преобразования (2.9), (2.10) от известных аналогов [10, 11, 12] заключается в том, что его ядра $\mathbf{K}(q, l_i)$ и $\mathbf{G}(q, l_i)$ представляют собой прямоугольные матрицы-функции, а элементы пространства изображений (трансформанты интегральных преобразований) являются векторами, а не скалярами, как в [10]. Подобное обобщение оказалось необходимым для исследования динамических задач с кратным спектром (внутренними резонансами [3, 6]), поскольку в этих случаях традиционная форма преобразования не обеспечивает разложения по полной системе собственных вектор-функций.

В частном случае простого спектра, т. е. при отсутствии внутренних резонансов, размерность $\mathbf{f}(l)$ равна единице, и преобразования (2.9), (2.10) совпадают с многокомпонентными конечными интегральными преобразованиями, сформулированными в [10].

Использование конечного интегрального преобразования с матричным ядром позволяет привести начально-краевую задачу к последовательности задач Коши для гармонического осциллятора. Для этого воспользуемся операторным тождеством:

$$F(A - \mathbf{H} \mathcal{J}^2 / \mathcal{J} t^2) \equiv -(I + \mathcal{J}^2 / \mathcal{J} t^2) F \mathbf{H}, \quad (2.12)$$

которое непосредственно следует из операционного свойства, и справедливо

$\forall \mathbf{u}(q, t) \in H \times C_1^2$ в силу изоморфизма отображения $H \rightarrow L$.

Действуя прямым преобразованием F на левую и правую части дифференциального выражения (2.1), а также на начальные условия (2.3), умноженные слева на матрицу \mathbf{H}^2 , получим в пространстве изображений $L \times C_1^2$ последовательность задач Коши:

$$(I_i - \mathcal{J}^2 / \mathcal{J} t^2) \mathbf{f}(l_i, t) = -\dot{\Phi}(l_i, t), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{f}(l_i, t)|_{t=0} = F[\mathbf{H} \mathbf{u}_0(q)] = \mathbf{f}_0(l_i), \quad \mathcal{J} / \mathcal{J} t \mathbf{f}(l_i, t)|_{t=0} = F[\mathbf{H} \mathbf{g}_0(q)] = \mathbf{y}_0(l_i), \quad (2.14)$$

где

$$\mathbf{f}(l_i, t) = F[\mathbf{H} \mathbf{u}(q, t)], \quad \dot{\Phi}(l_i, t) = F[\dot{\mathbf{f}}(q, t)].$$

Решения задач (2.13), (2.14) могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{f}(l_i, t) = \mathbf{f}_0(l_i) \cos(I_i^{1/2} t) + I_i^{-1/2} \mathbf{y}_0(l_i) \sin(I_i^{1/2} t) + I_i^{-1/2} \int_0^t \sin(I_i^{1/2} (t-t')) \dot{\Phi}(l_i, t') dt'. \quad (2.15)$$

² Поскольку $\dot{\Phi}(\lambda_i, t)$ является образом $\mathbf{H} \mathbf{u}(\theta, t)$.

Выполняя операцию обращения

$$\mathbf{H} \overset{\mathbf{r}}{\mathbf{u}}(q, t) = F^{-1} [\overset{\mathbf{r}}{J}(l), q] = \mathbf{H} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{G}(q, l_i) \overset{\mathbf{r}}{J}(l_i),$$

получим спектральное представление решения задачи:

$$\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{u}}(q, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{G}(q, l_i) \overset{\mathbf{r}}{J}(l_i). \quad (2.16)$$

При выполнении условия (2.8) разложение сходится в метрике \mathbf{H} , причем в силу изоморфизма отображения $L \rightarrow \mathbf{H}$ оно сходится именно к решению задачи (2.1)–(2.3).

В представлениях (2.9), (2.10) определяющую роль играют ядра преобразования $\mathbf{K}(q, l_i)$ и $\mathbf{G}(q, l_i)$, причем их построение оказывается различным для регулярного и сингулярных вариантов задачи.

В регулярном случае матрицы $\mathbf{K}(q, l_i)$, $\mathbf{G}(q, l_i)$ порождаются фундаментальной матрицей частных решений $\mathbf{Y}(q, l) = (\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{v}}_1(q, l) \dots \overset{\mathbf{r}}{\mathbf{v}}_{2n}(q, l))$ обобщенного уравнения Штурма–Лиувилля

$$A[\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{v}}(q, l)] = -l \mathbf{H} \overset{\mathbf{r}}{\mathbf{v}}(q, l) \quad (2.17)$$

при условиях следующей теоремы:

Теорема 1. Если оператор A – самосопряженный в метрике \mathbf{H} , т. е.

$$\forall \overset{\mathbf{r}}{\mathbf{u}}, \overset{\mathbf{r}}{\mathbf{v}} \in D \quad (\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{u}}, A[\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{v}}])_m = (A[\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{u}}], \overset{\mathbf{r}}{\mathbf{v}})_m, \text{Ker}[A] \equiv 0,$$

и матрица $m\mathbf{H}$ симметричная и положительно определенная, то спектральное множество Λ представляет счетную возрастающую последовательность действительных чисел с предельной точкой на ∞ , причем

$$\Lambda = \{l_i \mid l_i \in R, \det[B(l_i)] = 0\}, B(l) = \left(\frac{[\mathbf{b} \frac{f}{q} \mathbf{Y}(q, l) + (\mathbf{c} + \mathbf{Z}_1) \mathbf{Y}(q, l)]|_{q=q_1}}{[\mathbf{b} \frac{f}{q} \mathbf{Y}(q, l) + (\mathbf{c} - \mathbf{Z}_2) \mathbf{Y}(q, l)]|_{q=q_2}} \right),$$

а ядра преобразования определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{K}(q, l) = \mathbf{Y}(q, l) \mathbf{S}(l) \mathbf{N}(l), \mathbf{G}(q, l) = m(q) \mathbf{K}(q, l),$$

где $\mathbf{S}(l)$ – нулевые подпространства матрицы $B(l)$, $\mathbf{N}(l)$ – нормирующая матрица:

$$\mathbf{N}(l_i) = (\mathbf{S}(l_i)^T \mathbf{Q}(l_i) \mathbf{S}(l_i))^{-1/2}; \mathbf{Q}(l_i) = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{Y}(q, l_i)^T m(q) \mathbf{H} \mathbf{Y}(q, l_i) dq.$$

Доказательство теоремы осуществляется в рамках стандартных построений спектральной теории самосопряженных операторов [8].

В сингулярных случаях определяющую роль играет индекс дефекта оператора A , т. е. число решений уравнения (2.17) при $\text{Im}[l] \neq 0$, принадлежащих \mathbf{H} , причем эти решения могут быть как действительными, так и комплексными функциями.

В дальнейшем индекс дефекта A будем обозначать символом m . При этом суммарное количество линейно - независимых выражений, определяющих краевые условия на левом и правом концах интервала (q_1, q_2) , также равно m , причем в общем случае $m \leq 2n$.

Для удобства изложения введем сокращенные матрицы краевых условий $\hat{\mathbf{b}}_1(q), \hat{\mathbf{c}}_1(q), \hat{\mathbf{Z}}_1$ и $\hat{\mathbf{b}}_2(q), \hat{\mathbf{c}}_2(q), \hat{\mathbf{Z}}_2$ соответственно размерностью $n \times m_1$ и $n \times m_2$, причем $m_1 + m_2 = m$. Тогда краевые условия задачи принимают вид:

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(q, t)]|_{q_1} \equiv \lim_{q \rightarrow q_1+0} \left[\hat{\mathbf{b}}_1 \frac{q}{q} \mathbf{y}(q, t) + (\hat{\mathbf{c}}_1 + \hat{\mathbf{Z}}_1) g(q) \mathbf{y}(q, t) \right],$$

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(q, t)]|_{q_2} \equiv \lim_{q \rightarrow q_2-0} \left[\hat{\mathbf{b}}_2(q) \frac{q}{q} \mathbf{y}(q, t) + (\hat{\mathbf{c}}_2(q) - \hat{\mathbf{Z}}_2) \mathbf{y}(q, t) \right].$$

Здесь $g(q)$ – весовая функция. Условия ограниченности представляют собой частный случай соотношений $\hat{\mathbf{u}}(\theta, t)$:

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(q, t)]|_{q_i} \equiv \lim_{q \rightarrow q_i+0} [g(q) \mathbf{y}(q, t)].$$

В сингулярном случае матрицы $\mathbf{K}(q, I_i), \mathbf{G}(q, I_i)$ порождаются сокращенной фундаментальной матрицей частных решений уравнения (2.17), принадлежащих \mathbf{H} . При этом возможность представления формулы обращения в форме ряда (2.10) определяется условиями следующей теоремы:

Теорема 2. Если оператор A – самосопряженный в метрике \mathbf{H} , т. е.

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D \quad (\mathbf{u}, A[\mathbf{v}])_m = (A[\mathbf{u}], \mathbf{v})_m, \text{Ker}[A] \equiv 0,$$

матрица \mathbf{H} симметричная и положительно определенная, и в \mathbf{H} существует m действительных линейно – независимых решения уравнения (2.17) $\mathbf{v}_i(q, I), i = 0, 1, \dots, m$, то спектральное множество Λ представляет счетную возрастающую последовательность действительных чисел с предельной точкой на ∞ , причем

$$\Lambda = \left\{ I_i \mid I_i \in R, \det[\hat{B}(I_i)] = 0 \right\}, \quad \hat{B}(I) = \left(\frac{\lim_{q \rightarrow q_1} \left[\hat{\mathbf{b}}_1 \frac{q}{q} \hat{\mathbf{Y}}(q, I) + (\hat{\mathbf{c}}_1 + \hat{\mathbf{Z}}_1) g_1(q) \hat{\mathbf{Y}}(q, I) \right]}{\lim_{q \rightarrow q_2} \left[\hat{\mathbf{b}}_2 \frac{q}{q} \hat{\mathbf{Y}}(q, I) + (\hat{\mathbf{c}}_2 - \hat{\mathbf{Z}}_2) g_2(q) \hat{\mathbf{Y}}(q, I) \right]} \right),$$

где $\hat{\mathbf{Y}}(\theta, \lambda) = (\mathbf{v}_1(\theta, \lambda) \dots \mathbf{v}_m(\theta, \lambda))$ – сокращенная фундаментальная матрица, а ядра преобразования определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{K}(q, I) = \hat{\mathbf{Y}}(q, I) \hat{\mathbf{S}}(I) \hat{\mathbf{N}}(I), \quad \mathbf{G}(q, I) = m(q) \mathbf{K}(q, I).$$

Здесь $\hat{\mathbf{S}}(I)$ – нулевые подпространства матрицы $\hat{B}(I)$, $\hat{\mathbf{N}}(I)$ – нормирующая матрица:

$$\hat{\mathbf{N}}(I_i) = (\hat{\mathbf{S}}(I_i)^T \hat{\mathbf{Q}}(I_i) \hat{\mathbf{S}}(I_i))^{-1/2}; \quad \hat{\mathbf{Q}}(I_i) = \int_{q_1}^{q_2} \hat{\mathbf{Y}}(q, I_i)^T m(q) \mathbf{H} \hat{\mathbf{Y}}(q, I_i) dq.$$

Доказательство теоремы также осуществляется по стандартной методике [8].

Заметим, в условиях теоремы требуется построить m действительных линейно-независимых фундаментальных решений, в то время как при определении индекса дефекта система m линейно-независимых решений может быть комплексной.

В случаях, когда нулевое подпространство $\text{Ker } A \neq 0$, построения теорем 1, 2 сохраняют смысл только тех правых частей $\hat{\mathbf{f}}(q, t)$, которые ортогональны подпространству $\text{Ker } A$, размерностью $g \leq 2n$. Для произвольной вектор-функции $\hat{\mathbf{f}}(q, t)$ это условие может не выполняться, однако ее всегда можно представить в виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_m, \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{f} - \sum_{i=1}^g (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \quad (2.18)$$

где \mathbf{e}_i – ортонормированный базис пространства $Ker A$.

По построению $\mathbf{f}_0 \perp Ker A$ и для нее справедливо представление в форме спектрального разложения (2.16). Второе слагаемое (2.18) \mathbf{f}_m определяет «вырожденный случай» ($\lambda=0$) уравнения (2.13):

$$\frac{\partial}{\partial t^2} \mathbf{J}^{\mathbf{r}}(0, t) = -\mathbf{\Phi}^{\mathbf{r}}(0, t).$$

Здесь $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{r}}(0, t) = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{x}(0)^m \cdot m \mathbf{f}_m^{\mathbf{r}}(q) dq$, а $\mathbf{x}(q) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ – матрица, столбцы которой

представляют собой орты базиса пространства $Ker A$. Решение может быть записано в виде:

$$\mathbf{J}^{\mathbf{r}}(0, t) = -\int_0^t \int_0^{t_2} \mathbf{\Phi}^{\mathbf{r}}(0, t_1) dt_1 dt_2 + c_1 t + c_2, \quad c_1 = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{x}(q)^{\circ} m H u_0^{\mathbf{r}}(q) dq, \quad c_2 = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{x}(q)^{\circ} m H u_0 dq,$$

$$y_m = \mathbf{x}(q) \cdot \mathbf{J}^{\mathbf{r}}(0, t).$$

Общее решение задачи в этом случае может быть представлено в следующей форме:

$$y(q, t) = y_0(q, t) + y_m(q, t).$$

Здесь $y_0(q, t)$ – спектральное разложение (2.16) с правой частью $\mathbf{f}_0 \perp Ker A$.

Следует отметить, что применительно к динамическим задачам, теории оболочек $y_0(q, t)$ соответствует деформированию конструкции, тогда как $y_m(q, t)$ – ее движению как абсолютно твердого тела. Подобная ситуация возникает, в частности, при исследовании динамики полной (не закрепленной) сферы.

Формула обращения (2.10) содержит нормирующую матрицу $\mathbf{Q}(I_i)$, определяемую квадратурами от различных комбинаций специальных функций. Непосредственное вычисление подобных интегралов связано с известными трудностями и невыполнимо в общем виде. Однако в тех случаях, когда подынтегральные выражения порождены самосопряженными дифференциальными операциями, при известной матрице фундаментальных решений $\mathbf{Y}(q, I)$, точное вычисление $\mathbf{Q}(I_i)$ осуществляется достаточно просто:

$$\mathbf{Q}(I) = \left\{ \frac{\int \mathbf{Y}(q, I)^T \mathbf{P}(q)}{\int I} - \frac{\int \mathbf{Y}(q, I)}{\int q} - \frac{\int^2 \mathbf{Y}(q, I)^T \mathbf{P}(q) \mathbf{Y}(q, I)}{\int I \int q} - \frac{\int \mathbf{Y}(q, I)^T \mathbf{Z}(q) \mathbf{Y}(q, I)}{\int I} \right\}_{q=q_1}^{q=q_2}, \quad (2.19)$$

где

$$\mathbf{P}(q) = m(q) \mathbf{a}_0(q), \quad \mathbf{Z}(q) = \frac{1}{q} [m(q) \mathbf{a}_0(q)] - m(q) \mathbf{a}_1(q).$$

Обоснование этой формулы приведено в работе [13].

Все приведенные построения предполагают, что оператор A является самосопряженным в H . Ниже приведены соотношения, позволяющие проверить самосопряженность по

виду матричных коэффициентов оператора A и подобрать соответствующую метрику μ в пространстве H (матрицу весовых функций).

Теорема 3. Если матрица весовых функций μ является частным решением системы уравнений:

$$\mathbf{a}_1^T \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{a}_1 = 2(\mathbf{m} \mathbf{a}_0)' ,$$

и при этом коэффициенты $\mathbf{a}_r(\theta)$ ($r = 0, 1; 2$) оператора A удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{m} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0^T \mathbf{m} , 2(\mathbf{a}_2^T \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1^T \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{a}_1)' ,$$

а матрицы $\mathbf{b}_{1,2}$ и $\mathbf{c}_{1,2}$, входящие в краевые условия, тождеству

$$\left[\mathbf{R}^T \mathbf{m} \mathbf{a}_0 - \mathbf{m} \mathbf{a}_0 \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \left((\mathbf{m} \mathbf{a}_0)' - \mathbf{m} \mathbf{a}_1 \right) \mathbf{R} \right] \equiv 0 , \mathbf{R}|_{q=q_1} = -\mathbf{c}_1^{-1} \mathbf{b}_1 , \mathbf{R}|_{q=q_2} = -\mathbf{c}_2^{-1} \mathbf{b}_2 ,$$

то A – самосопряженный оператор в H .

Доказательство приведено в [13].

Для построения конкретных спектральных разложений удобными оказываются представления, несколько отличается от (2.9), (2.10), а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{\mathbf{r}}(l, t) &= \int_{q_1}^{q_2} Y(q, l)^T \mathbf{m}(q) \left\{ \mathbf{H} \left[\mathbf{y}_0^{\mathbf{r}}(q) \cos(l^{1/2} t) + l^{-1/2} \mathbf{y}_0^{\mathbf{r}}(q) \sin(l^{1/2} t) \right] - \right. \\ &\quad \left. - l^{-1/2} \int_0^t \mathbf{f}^{\mathbf{r}}(q, t) \sin(l^{1/2}(t-t)) dt \right\} dq , \\ \mathbf{y}^{\mathbf{r}}(q, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}(q, l_i) \mathbf{V}(l_i) \mathbf{j}^{\mathbf{y}}(l_i, t) , \quad l_i \in \Lambda , \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{V}(l_i) = \mathbf{S}(l_i) \left[\mathbf{S}(l_i)^T \mathbf{Q}(l_i) \mathbf{S}(l_i) \right]^{-1} \mathbf{S}(l_i)^T .$$

Подобная формулировка позволяет получить векторную трансформату фиксированной размерности $\mathbf{F}^{\mathbf{r}}(\lambda, t)$ как аналитическую векторную функцию $\mathbf{j}^{\mathbf{r}}(l, t)$.

3. Представим уравнения движения оболочки (1.22) и краевые условия (1.23), (1.24) в матричной форме. Соответствующие матричные коэффициенты могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a}_1(q) = \begin{pmatrix} A \operatorname{ctg} q & B+K & 0 \\ -(B+K) & K \operatorname{ctg} q & K-H \\ 0 & H-K & D \operatorname{ctg} q \end{pmatrix} , \\ \mathbf{a}_2(q) &= \begin{pmatrix} C - A/\sin^2 q - K & 0 & K-H \\ -(B+K) \operatorname{ctg} q & -2B & (K-J) \operatorname{ctg} q \\ K-H & 0 & F+K - D/\sin^2 q \end{pmatrix} , \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & I_2 \\ 0 & I_1 & 0 \\ I_2 & 0 & I_3 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(\theta) = \begin{pmatrix} (A-C)\operatorname{ctg}\theta & 2B & H\operatorname{ctg}\theta \\ -K & 0 & K \\ H\operatorname{ctg}\theta & H & (D-F)\operatorname{ctg}\theta \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Z}_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} & 0 & \chi_{1,2} \\ 0 & \beta_{1,2} & 0 \\ \chi_{1,2} & 0 & \gamma_{1,2} \end{pmatrix},$$

Согласно теореме 3 матрица весовых функций $\mu(\theta)$ определяется решением матричного дифференциального уравнения:

$$\begin{pmatrix} A \operatorname{ctg} q & -(B+K) & 0 \\ B+K & K \operatorname{ctg} q & H-K \\ 0 & K-H & D \operatorname{ctg} q \end{pmatrix} m(q) + m(q) \begin{pmatrix} A \operatorname{ctg} q & B+K & 0 \\ -(B+K) & K \operatorname{ctg} q & K-H \\ 0 & H-K & D \operatorname{ctg} q \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} m(q) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

которое с точностью до несущественных постоянных может быть записано в виде

$$m(q) = \mathbf{E} \sin q.$$

Из диагональности матриц μ и \mathbf{a}_0 следует, что

$$m \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0^T m.$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что матрицы коэффициентов \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 удовлетворяют остальным соотношениям теоремы 3, т. е.

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (\mathbf{a}_1^T m - m \mathbf{a}_1) = 2 (\mathbf{a}_2^T m - m \mathbf{a}_2),$$

Матрицы краевых условий $\mathbf{R}|_{q=q_1} = -\mathbf{c}_1^{-1} \mathbf{b}_1$, $\mathbf{R}|_{q=q_2} = -\mathbf{c}_2^{-1} \mathbf{b}_2$ – равенствам:

$$\left\{ \mathbf{R}^T m \mathbf{a}_0 - m \mathbf{a}_0 \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \left((m \mathbf{a}_0)' - m \mathbf{a}_1 \right) \mathbf{R} \right\} \Big|_{q=q_1, q_2} = 0.$$

Для построения матрицы $\mathbf{Y}(q, I)$ осуществим интегрирование системы дифференциальных уравнений (2.17):

$$\begin{cases} A(v_1'' + \operatorname{ctg} q v_1' - v_1/\sin^2 q) + B v_2' + C v_1 + K(v_2' - v_1) + (K-H)v_3 + I(I_1 v_1 + I_2 v_3) = 0, \\ K[v_2'' + (v_2' - v_1 + v_3) \operatorname{ctg} q - v_1' + v_3'] - B(v_1' + v_1 \operatorname{ctg} q + 2v_2) + I I_1 v_2 = 0, \\ D(v_3'' + \operatorname{ctg} q v_3' - v_3/\sin^2 q) + F v_3 - K v_3 - (K-H)(v_2' - v_1) + I(I_2 v_1 + I_3 v_3) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для нахождения частных решений (3.3) введем потенциальные функции:

$$\Pi' = v_1, \quad \Phi' = v_3. \quad (3.4)$$

Обозначив символом ∇^2 дифференциальный оператор Лежандра

$$\nabla^2 \equiv \frac{d^2}{dq^2} + \operatorname{ctg} q \frac{d}{dq}.$$

и принимая во внимание (3.4), запишем уравнения (3.3) в виде:

$$\begin{cases} A(\nabla^2\Pi' - \Pi'/\sin^2 q) + Bv_2' + C\Pi' + K(v_2' - \Pi') + (K - H)\Phi' + I(I_1\Pi' + I_2\Phi') = 0, \\ K\nabla^2v_2 - (K + B)\nabla^2\Pi + (K - H)\nabla^2\Phi + (I I_1 - 2B)v_2 = 0, \\ D(\nabla^2\Phi' - \Phi'/\sin^2 q) + F\Phi' - K\Phi' - (K - H)(v_2' - \Pi') + I(I_2\Pi' + I_3\Phi') = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Интегрируем первое и последние уравнения (3.5):

$$\begin{cases} A\nabla^2\Pi + Bv_2 + C\Pi + K(v_2 - \Pi) + (K - H)\Phi + \lambda(I_1\Pi + I_2\Phi) = C_1, \\ K\nabla^2v_2 - (K + B)\nabla^2\Pi + (K - H)\nabla^2\Phi + (\lambda I_1 - 2B)v_2 = 0, \\ D\nabla^2\Phi + F\Phi - K\Phi - (K - H)(v_2 - \Pi) + \lambda(I_2\Pi + I_3\Phi) = C_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Так как в дальнейшем нас будут интересовать только производные от Π и Φ , то можно принять $C_1 = C_2 = 0$. Представим (3.6) в матричной форме. Имеем:

$$\mathbf{b}_0\nabla^2\mathbf{z} + (\mathbf{b}_1 + I\mathbf{H})\mathbf{z} = 0, \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \Pi \\ v_2 \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -K - B & K & K - H \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} C - K & B + K & K - H \\ 0 & -2B & 0 \\ K - H & H - K & F - K \end{pmatrix}.$$

Поскольку соотношения (3.7) представляют собой линейную однородную систему с постоянными коэффициентами относительно дифференциального оператора ∇^2 , то ее частные решения могут быть представлены как линейные комбинации решений уравнения Лежандра:

$$\nabla^2 L(q) + n(n+1)L(q) = 0.$$

которыми для произвольных степеней n являются функций Лежандра первого и второго рода $P_n(\cos q)$, $Q_n(\cos q)$. Таким образом:

$$\mathbf{z} = (a \ b \ c)^T L_n(q), \quad L_n(q) = P_n(\cos q) \text{ где } Q_n(\cos q). \quad (3.8)$$

Постоянные a, b, c определяются в результате решения однородной алгебраической системы уравнений, получаемой при подстановке (3.8) в (3.7):

$$\begin{pmatrix} C - K - Ax + II_1 & B + K & K - H + II_2 \\ (K + B)x & -Kx - 2B + II_1 & (H - K)x \\ K - H + II_2 & H - K & F - K - Dx + II_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \quad (3.9)$$

где $x = n(n+1)$.

Условие обращения в нуль определителя системы (3.9) позволяет вычислить значения параметра ξ как корни кубического уравнения:

$$x^3 g + x^2(j_1 I + j_0) + x(y_2 I^2 + y_1 I + y_0) + J_3 I^3 + J_2 I^2 + J_1 I + J_0 = 0, \quad (3.10)$$

где:

$$\begin{aligned}
g &= -ADK; \quad J_3 = I_1 W_6; \quad J_2 = I_1 (I_1 (F - K) + 2I_2 W_5 - I_3 W_3) - 2B W_6; \\
J_1 &= I_1 (W_2 (2B - C) - W_1) - 2B (2I_2 W_5 - I_3 W_3); \quad J_0 = 2B (W_1 + C W_2); \\
y_0 &= 2B (W_2 (B/2 - A) - W_1 - D W_3) - C W_1; \quad y_1 = I_1 (A W_2 - W_1 + D (W_3 + 2B)) + 2B I_2 W_5 - I_3 W_4; \\
y_2 &= I_2^2 K - I_1^2 D - I_1 I_3 (A + K); \quad j_0 = A W_1 - D W_4; \quad j_1 = I_1 D (A + K) + A K I_3; \quad W_1 = H^2 - K (2H + F); \\
W_2 &= K - F; \quad W_3 = K - C; \quad W_4 = K C + B (B + 2(K - A)); \quad W_5 = H - K; \quad W_6 = I_1 I_3 - I_2^2.
\end{aligned}$$

При известных значениях x_k , $k=1,2,3$ величины a, b, c с точностью до произвольного множителя определяются из (3.9):

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mathbf{r} L_n(q) = \begin{pmatrix} ((I I_1 - K x - 2B)(I I_3 - D x - W_2) - x W_5^2) L_n(q) \\ x (W_5 (I I_2 - W_5) - (B + K)(I I_3 - D x - W_2)) L_n(q) \\ ((B + K) x W_5 - (I I_2 - W_5)(I I_1 - K x - 2B)) L_n(q) \end{pmatrix}.$$

Учитывая рекуррентную зависимость между обычными и присоединенными функциями Лежандра:

$$\frac{d}{dq} P_n(\cos q) = P_n'(\sin q), \quad \frac{d}{dq} Q_n(\cos q) = Q_n'(\sin q),$$

возвращаемся от введенных потенциалов к частным решениям системы (3.3).

Для этого продифференцируем первый и последний компоненты вектора \mathbf{z} . Имеем:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2 \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((I I_1 - K x - 2B)(I I_3 - D x - W_2) - x W_5^2) L_n^1(q) \\ x (W_5 (I I_2 - W_5) - (B + K)(I I_3 - D x - W_2)) L_n(q) \\ ((B + K) x W_5 - (I I_2 - W_5)(I I_1 - K x - 2B)) L_n^1(q) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

В случае, когда все три корня уравнения (3.10) различны, три соответствующих пары решений (3.3) являются линейно независимыми и формируют фундаментальную систему:

$$\mathbf{Y}(q, I) = (\mathbf{v}_1(q, I), \dots, \mathbf{v}_6(q, I)). \quad (3.12)$$

Особым является случай кратных корней. Сначала предположим, что совпадают только два корня (например, $x_1 = x_2$). Тогда в качестве решения используется предельное отношение:

$$\mathbf{v}(x_2, q) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{1}{x - x_1} [\mathbf{v}(x, q) - \mathbf{v}(x_2, q)].$$

Поскольку $\mathbf{v}(x, q)$ – аналитические функции, неопределенность может быть раскрыта по правилу Лопиталья:

$$\mathbf{v}(x_2, q) = \frac{\mathcal{D} \mathbf{v}(x, q)}{\mathcal{D} x} \Big|_{x=x_2},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v}(x_2, q) = \begin{pmatrix} (A_1 A_2 - x W_5^2) V_n^1(q) + (B_1 A_2 + A_1 B_2 - W_5^2) L_n^1(q) \\ x (W_5 A_3 - A_4 A_2) V_n(q) + (W_5 A_3 - A_4 A_2 + x W_5 B_3 - x A_4 B_2) L_n(q) \\ (A_4 x W_5 - A_3 A_1) V_n^1(q) + (A_4 W_5 - B_3 A_1 + A_3 B_1) L_n^1(q) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= I I_1 - K x - 2B, & B_1 &= I' I_1 - K, \\
A_2 &= I I_3 - D x - W_2, & B_2 &= I' I_3 - D, \\
A_3 &= I I_2 - W_5, & A_4 &= B + K, & B_3 &= I' I_2 \\
I' &= -\frac{3gx^2 + 2j_0x + 2j_1lx + y_2l^2 + y_1l + y_0}{j_1x^2 + y_1x + 2y_2lx + 3J_3l^2 + 2J_2l + J_1}.
\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения проводятся при совпадении трех корней. В этом случае для получения третьего линейно независимого решения вычисляется вторая производная по параметру ξ .

4. В соответствии в теоремой 1 собственные значения, образующие спектральное множество в регулярном случае ($q \in (q_1, q_2) \subset (0, p)$), определяются из трансцендентного уравнения, которое преобразуется к виду:

$$\det[\mathbf{B}(I)] = 0,$$

$$\mathbf{B}(I) = \frac{\left[\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \frac{1}{q} \mathbf{Y}(q, I) + \begin{pmatrix} (A-C)ctgq + a_1 & 2B & H ctgq + c_1 \\ -K & b_1 & K \\ H ctgq + c_1 & H & (D-F)ctgq + g_1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}(q, I) \right]_{q=q_1} \right]}{\left[\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \frac{1}{q} \mathbf{Y}(q, I) + \begin{pmatrix} (A-C)ctgq - a_2 & 2B & H ctgq - c_2 \\ -K & -b_2 & K \\ H ctgq - c_2 & H & (D-F)ctgq - g_2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}(q, I) \right]_{q=q_2} \right]}$$

В сингулярных случаях (сферический сектор, полная сфера) предельные соотношения для функций Лежандра позволяют построить в \mathbb{H} четыре фундаментальных решения для задачи с одним сингулярным концом (сферический сектор) и два решения при двух сингулярных концах интервала (полная сфера). Следовательно, в первом случае индекс дефекта $m = \{4, 4\}$, а во втором – $m = \{2, 2\}$. Для задачи с одним сингулярным концом сокращенная фундаментальная матрица имеет вид:

$$\hat{Y}(q, I) = \begin{pmatrix} a_1 P_{n_1}^1(\cos q) & a_2 P_{n_1}^1(\cos q) & a_3 P_{n_3}^1(\cos q) & a_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + a_2 \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} Q_{n_2}^1(\cos q) + a_3 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} Q_{n_3}^1(\cos q) \\ b_1 P_{n_1}^1(\cos q) & b_2 P_{n_1}^1(\cos q) & b_3 P_{n_3}^1(\cos q) & b_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + b_2 \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} Q_{n_2}^1(\cos q) + b_3 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} Q_{n_3}^1(\cos q) \\ c_1 P_{n_1}^1(\cos q) & c_2 P_{n_1}^1(\cos q) & c_3 P_{n_3}^1(\cos q) & c_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + c_2 \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} Q_{n_2}^1(\cos q) + c_3 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} Q_{n_3}^1(\cos q) \end{pmatrix}$$

Она состоит из действительных решений, принадлежащих \mathbb{H} , поскольку функции Лежандра первого рода $P_{n_1}^1(\cos q)$, $P_{n_3}^1(\cos q)$ ограничены на $(0, q_1)$. Комбинации присоединенных функций Лежандра второго рода с учетом

$$\begin{aligned}
& a_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} a_2 Q_{n_2}^1(\cos q) + \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} a_3 Q_{n_3}^1(\cos q) \\
& c_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} c_2 Q_{n_2}^1(\cos q) + \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} c_3 Q_{n_3}^1(\cos q)
\end{aligned}$$

обращаются в ноль в точке $\theta = 0$ и потому так же принадлежат H , а присоединенные функции Лежандра второго рода $Q_{n_i}^1(\cos q)$ имеют при $q = 0$ лишь логарифмическую особенность, и, следовательно, интегрируемы с квадратом в метрике H .

Для двух сингулярных концов интервала (полая сфера) два действительных линейно-независимых решения $\mathbf{v}_1(q, l), \mathbf{v}_2(q, l)$, формирующие сокращенную фундаментальную матрицу $\hat{\mathbf{Y}}(q, l) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, могут быть определены следующим образом:

$$\mathbf{v}_1(q, l) = \begin{pmatrix} a_1 P_{n_1}^1(\cos q) \\ b_1 P_{n_1}(\cos q) \\ c_1 P_{n_1}^1(\cos q) \end{pmatrix} + \frac{\sin[n_1 p]}{\sin[n_2 p]} \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} \begin{pmatrix} a_2 P_{n_2}^1(\cos q) \\ b_2 P_{n_2}(\cos q) \\ c_2 P_{n_2}^1(\cos q) \end{pmatrix} + \frac{\sin[n_1 p]}{\sin[n_3 p]} \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} \begin{pmatrix} a_3 P_{n_3}^1(\cos q) \\ b_3 P_{n_3}(\cos q) \\ c_3 P_{n_3}^1(\cos q) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2(q, l) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 P_{n_1}^1(\cos q) + C_1 a_2 P_{n_2}^1(\cos q) + C_2 a_3 P_{n_3}^1(\cos q) + C_3 a_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + C_4 a_2 Q_{n_2}^1(\cos q) + C_5 a_3 Q_{n_3}^1(\cos q) \\ b_1 P_{n_1}(\cos q) + C_1 b_2 P_{n_2}(\cos q) + C_2 b_3 P_{n_3}(\cos q) + C_3 b_1 Q_{n_1}(\cos q) + C_4 b_2 Q_{n_2}(\cos q) + C_5 b_3 Q_{n_3}(\cos q) \\ c_1 P_{n_1}^1(\cos q) + C_1 c_2 P_{n_2}^1(\cos q) + C_2 c_3 P_{n_3}^1(\cos q) + C_3 c_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + C_4 c_2 Q_{n_2}^1(\cos q) + C_5 c_3 Q_{n_3}^1(\cos q) \end{pmatrix},$$

где постоянные C_i определяются из условий:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1/p b_2 \sin n_2 p & 1/p b_3 \sin n_3 p & 1/2 b_1 \cos n_1 p & 1/2 b_2 \cos n_2 p & 1/2 b_3 \cos n_3 p \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 2/p a_2 \sin n_2 p & 2/p a_3 \sin n_3 p & a_1 \cos n_1 p & a_2 \cos n_2 p & a_3 \cos n_3 p \\ 2/p c_2 \sin n_2 p & 2/p c_3 \sin n_3 p & c_1 \cos n_1 p & c_2 \cos n_2 p & c_3 \cos n_3 p \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1/p b_1 \sin n_1 p \\ 0 \\ 2/p a_3 \sin n_3 p \\ 2/p c_3 \sin n_3 p \end{pmatrix}.$$

Построенные сокращенные фундаментальные матрицы действительные, и, следовательно, условие теоремы 2 оказывается выполненным. Спектральное множество Λ как для регулярного, так и для сингулярных вариантов задачи представляет собой счетную возрастающую последовательность.

В случае одного сингулярного конца интервала $q \in (0, q_1)$ (т. е. для сферического сектора) условия ограниченности определяют сокращенную фундаментальную систему $\mathbf{Y}(q, l) = (\mathbf{v}_1(q, l), \dots, \mathbf{v}_3(q, l))$, содержащую только ограниченные компоненты – функции Лежандра первого рода. В этом случае трансцендентное уравнение формулируется следующим образом:

$$\det[\mathbf{B}(l)] = 0,$$

$$\mathbf{B}(l) = \left(\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{I}q} \mathbf{Y}(q, l) + \begin{pmatrix} (A-C)ctgq + a_1 & 2B & H ctgq + c_1 \\ -K & b_1 & K \\ H ctgq + c_1 & H & (D-F)ctgq + g_1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}(q, l) \right)_{q=q_1}$$

В случае двух сингулярных концов интервала $q \in (0, q_1)$ (полная сфера) условия ограниченности в полюсах удовлетворяются, если

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left[[\ln q]^{-1} \mathbf{r}(q, l) \right] = 0,$$

$$\lim_{q \rightarrow p} \left[[\ln(p-q)]^{-1} \mathbf{r}(q, l) \right] = 0.$$

Эти предельные равенства эквивалентны уравнению

$$b_1 \frac{\sin[n_1 p]}{p} + b_2 \frac{\sin[n_2 p]}{\sin[n_2 p]} \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} \frac{\sin[n_2 p]}{p} + b_3 \frac{\sin[n_3 p]}{\sin[n_3 p]} \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} \frac{\sin[n_3 p]}{p} = 0,$$

которое после упрощения может быть преобразовано к виду

$$\sin n_1 p = 0.$$

Его решения

$$n_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

определяют последовательность собственных значений

$$l_i = \frac{1}{3J_3} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(A_i + \sqrt{A_i^2 + 4B_i^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2} B_i \left(A_i + \sqrt{A_i^2 + 4B_i^3} \right)^{\frac{1}{3}} - J_2 - x y_2 \right],$$

$$A_i = 9J_3 (j_1 x^2 + y_1 x + J_1) (J_2 + x y_2) - 27J_3^2 (g x^3 + j_0 x^2 + y_0 x + J_0) - 2(J_2 + x y_2)^3,$$

$$B_i = 3J_3 (j_1 x^2 + y_1 x + J_1) - (J_2 + x y_2)^2, \quad x = i(i+1), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

5. При определенных соотношениях жесткостных и инерционных характеристик оболочки в спектральном множестве Λ могут присутствовать кратные собственные значения l_i . Этим значениям l_i соответствуют несколько линейно-независимых собственных функций, которые определяют собственное подпространство размерностью больше единицы.

Рассмотрим частный случай идеализированного закрепления сферического сектора, которому соответствует следующая матрица упругих характеристик опорного контура:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix},$$

т. е. конструкция на опорном контуре жестко закреплена относительно касательных перемещений и углов поворота, но может свободно перемещаться по нормали. При таком закреплении проявляются особенности, связанные с кратным спектром: в спектральном уравнении остается единственное слагаемое, которое представляет собой произведение трех мероморфных функций:

$$P_{n_1(l)}^l(\cos q_1) P_{n_2(l)}^l(\cos q_1) P_{n_3(l)}^l(\cos q_1) = 0.$$

Множество корней уравнения является объединением множеств нулей этих функций, т. е. корнями трех уравнений:

$$P_{n_1(I)}^1(\cos q_1) = 0; \quad P_{n_2(I)}^1(\cos q_1) = 0; \quad P_{n_3(I)}^1(\cos q_1) = 0.$$

При определенных соотношениях параметров их корни совпадают; в этих случаях соответствующие корни частотного уравнения будут иметь кратности выше единицы.

Ранг матрицы $B(I)$ при значениях $I = I_i$, соответствующих кратным точкам спектра, меньше ее размерности на величину, равную кратности I_i (см. Теорему 2). Применяя к $B(I)|_{I=I_i}$ процедуру приведения матрицы к треугольной форме, преобразуем ее к виду

$$B(I)|_{I=I_i} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{1,1} & \mathbf{L} & b_{1,m} & b_{1,m+1} & \mathbf{L} & b_{1,n} \\ & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ 0 & & b_{m,m} & b_{m,m+1} & \mathbf{L} & b_{m,n} \\ \hline & & 0 & 0 & \mathbf{L} & b_{m+1,n} \\ & 0 & & & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ & & & 0 & & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline 0 & \mathbf{B}_0 \end{array} \right).$$

В этом случае матрица $\mathbf{S}(I_i)$, определяющая собственные подпространства матрицы $B(I)|_{I=I_i}$, вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{S}(I_i) = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}_1^{-1} & \mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

6. Построенные выше представления позволяют получить в замкнутой форме решения динамических задач для исследуемых типов сферических оболочек при действии произвольной осесимметричной нагрузки, задаваемой вектор-функцией:

$$\mathbf{f}(q, t) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{P}_q(q, t) \\ \overset{\circ}{P}_z(q, t) \\ \overset{\circ}{M}_q(q, t) \end{pmatrix}$$

при соответствующих начальных условиях:

$$\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{y}}_0(q, t) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{y}_0(q, t) \\ \overset{\circ}{v}_0(q, t) \\ \overset{\circ}{y}_0(q, t) \end{pmatrix}, \quad \overset{\mathbf{R}}{\mathbf{y}}_0(q, t) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{y}_0(q, t) \\ \overset{\circ}{v}_0(q, t) \\ \overset{\circ}{y}_0(q, t) \end{pmatrix}.$$

Трансформанта $\overset{\mathbf{F}}{J}(I, t)$ интегрального преобразования в случае кольцевой сферической области имеет вид:

$$\mathbf{f}(I, t) = \begin{pmatrix} \int_{q_1}^{q_2} [a_1 T_u(q, t) P_{n_1}^1(\cos q) + a_2 T_w(q, t) P_{n_1}(\cos q) + a_3 T_y(q, t) P_{n_1}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [b_1 T_u(q, t) P_{n_2}^1(\cos q) + b_2 T_w(q, t) P_{n_2}(\cos q) + b_3 T_y(q, t) P_{n_2}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [c_1 T_u(q, t) P_{n_3}^1(\cos q) + c_2 T_w(q, t) P_{n_3}(\cos q) + c_3 T_y(q, t) P_{n_3}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [a_1 T_u(q, t) Q_{n_1}^1(\cos q) + a_2 T_w(q, t) Q_{n_1}(\cos q) + a_3 T_y(q, t) Q_{n_1}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [b_1 T_u(q, t) Q_{n_2}^1(\cos q) + b_2 T_w(q, t) Q_{n_2}(\cos q) + b_3 T_y(q, t) Q_{n_2}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [c_1 T_u(q, t) Q_{n_3}^1(\cos q) + c_2 T_w(q, t) Q_{n_3}(\cos q) + c_3 T_y(q, t) Q_{n_3}^1(\cos q)] \sin q dq \end{pmatrix},$$

где

$$T_u(q, t) = (I_1 u_0 + I_3 y_0) \cos[I^{1/2} t] + I^{-1/2} (I_1 \mathbf{u}_0 + I_3 \mathbf{y}_0) \sin[I^{1/2} t] + \\ + I^{-1/2} \int_0^t \mathbf{P}_u^0(q, t) \sin[I^{1/2} (t-t)] dt,$$

$$T_w(q, t) = I_1 (w_0 \cos[I^{1/2} t] + I^{-1/2} \mathbf{w}_0 \sin[I^{1/2} t]) + \\ + I^{-1/2} \int_0^t \mathbf{P}_w^0(q, t) \sin[I^{1/2} (t-t)] dt,$$

$$T_y(q, t) = (I_3 u_0 + I_2 y_0) \cos[I^{1/2} t] + I^{-1/2} (I_3 \mathbf{u}_0 + I_2 \mathbf{y}_0) \sin[I^{1/2} t] + \\ + I^{-1/2} \int_0^t \mathbf{P}_y^0(q, t) \sin[I^{1/2} (t-t)] dt.$$

Для сферического сегмента и полной сферы $\mathbf{f}(\lambda, t)$ имеет меньшую размерность и определяется следующими интегралами:

$$\mathbf{f}(I, t) = \begin{pmatrix} \int_{q_1}^{q_2} [a_1 T_u(q, t) P_{n_1}^1(\cos q) + a_2 T_w(q, t) P_{n_1}(\cos q) + a_3 T_y(q, t) P_{n_1}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [b_1 T_u(q, t) P_{n_2}^1(\cos q) + b_2 T_w(q, t) P_{n_2}(\cos q) + b_3 T_y(q, t) P_{n_2}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [c_1 T_u(q, t) P_{n_3}^1(\cos q) + c_2 T_w(q, t) P_{n_3}(\cos q) + c_3 T_y(q, t) P_{n_3}^1(\cos q)] \sin q dq \end{pmatrix}.$$

Нормирующая матрица $\mathbf{V}(I_i)$ вычисляется по формулам (2.19) Входящие в них матрицы $\mathbf{P}(q)$, $\mathbf{Z}(q)$ определяются из равенств:

$$\mathbf{P}(q) = \begin{pmatrix} A \sin q & 0 & 0 \\ 0 & K \sin q & 0 \\ 0 & 0 & D \sin q \end{pmatrix}; \mathbf{Z}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -(B+K) \sin q & 0 \\ (B+K) \sin q & 0 & (H-K) \sin q \\ 0 & (K-H) \sin q & 0 \end{pmatrix}.$$

При известных $\mathbf{Y}(q, I)$, $\mathbf{V}(I_i)$, $\mathbf{f}(I, t)$ разрешающие функции, представляющие перемещения оболочки, могут быть представлены в форме разложения:

$$\mathbf{r} \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}(\mathbf{q}, I_i) \mathbf{V}(I_i) \dot{\mathbf{y}}(I_i, t).$$

Ниже приведены квадратуры, определяющие спектральные разложения для ряда внешних воздействий. Пусть внешние воздействия представляются в виде

$$\mathbf{r} \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{q}, t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{r} \dot{\mathbf{P}}_k(\mathbf{q}) T_k(t),$$

где $\mathbf{r} \dot{\mathbf{P}}_k(\mathbf{q})$ – вектор-функция, зависящая от пространственной координаты θ , $T_k(t)$ – скалярные функции времени t . Распределение нагрузки в пространстве задается тригонометрическими рядами

$$\mathbf{r} \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} P_u(\mathbf{q}) \\ P_w(\mathbf{q}) \\ P_y(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 \cos \mathbf{q} + a_2 \cos^2 \mathbf{q} + \mathbf{K}) \sin \mathbf{q} \\ b_0 + b_1 \cos \mathbf{q} + b_2 \cos^2 \mathbf{q} + \mathbf{K} \\ (c_0 + c_1 \cos \mathbf{q} + c_2 \cos^2 \mathbf{q} + \mathbf{K}) \sin \mathbf{q} \end{pmatrix}.$$

Изменение воздействия во времени задается степенными экспоненциальными и тригонометрическими рядами:

$$T(t) = \sum_{i=0}^N a_i t^i, \quad T(t) = \sum_{i=0}^N a_i e^{g_i t}, \quad T(t) = \sum_{i=0}^N [a_i \sin(w_i t) + b_i \cos(w_i t)].$$

Интегрирование этих выражений сводится к последовательному вычислению квадратур типа:

$$\begin{aligned} J_n^n(\cos \mathbf{q}) &= \int P_n(\cos \mathbf{q}) \cos^n \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q}, \\ I_n^n(\cos \mathbf{q}) &= \int P_n^1(\cos \mathbf{q}) \cos^n \mathbf{q} \sin^2 \mathbf{q} d\mathbf{q}, \\ &\int \sum_{i=0}^N a_i t^i \sin [I(t-t)] dt. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов, соответствующих младшим членам рядов, воспользуемся известными формулами:

$$J_n^0(\cos \mathbf{q}) = \int P_n(\cos \mathbf{q}) \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = \sin \mathbf{q} P_n^{-1}(\cos \mathbf{q}),$$

$$J_n^1(\cos \mathbf{q}) = \int P_n(\cos \mathbf{q}) \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} =$$

$$= -\frac{\sin \mathbf{q}}{(n-1)(n+2)} (\sin \mathbf{q} P_n(\cos \mathbf{q}) + \cos \mathbf{q} P_n^1(\cos \mathbf{q})).$$

Используя рекуррентные соотношения, преобразуем последнее выражение к виду

$$J_n^1(\cos \mathbf{q}) = \sin^2 \mathbf{q} P_n^{-2}(\cos \mathbf{q}) + \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} P_n^{-1}(\cos \mathbf{q}).$$

Квадратуры для старших членов могут быть получены путем рекурсивного применения известного соотношения

$$\int_0^j (\cos j - \cos \mathbf{q})^n P_n(\cos \mathbf{q}) \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = (-1)^n n! \sin^{n-1} j P_n^{-n-1}(\cos j).$$

Имеем

$$J_n^3(\cos q) = 2 \sin^3 q P_n^{-3}(\cos q) + 2 \sin^2 q \cos q P_n^{-2}(\cos q) + \sin q \cos^2 q P_n^{-1}(\cos q),$$

$$J_n^4(\cos q) = 6 \sin^4 q P_n^{-4}(\cos q) + 6 \sin^3 q \cos q P_n^{-3}(\cos q) +$$

$$+ 3 \sin^2 q \cos^2 q P_n^{-2}(\cos q) + \sin q \cos^3 q P_n^{-1}(\cos q),$$

К

Построим выражение для общего случая:

$$J_n^n(\cos q) = \int P_n(\cos q) \cos^n q \sin q dq = \sum_{i=0}^n (n+1-i)_i \sin^{i+1} q \cos^{n-i} q P_n^{-i-1}(\cos q).$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_n^n(\cos q) = \int P_n^1(\cos q) \cos^n q \sin^2 q dq = P_n(\cos q) \sin^2 q \cos^n q - (n+2) J_n^{n+1}(\cos q) + n J_n^{n-1}(\cos q)$$

Наконец, используя рекуррентные соотношения

$$P_n^{m-1}(\cos q) \sin q = \frac{1}{n-m+1} (P_{n-1}^m(\cos q) - \cos q P_n^m(\cos q)),$$

$$P_{n-1}^{m-1}(\cos q) \sin q = \frac{1}{n+m-1} (\cos q P_{n-1}^m(\cos q) - P_n^m(\cos q)),$$

может быть построен эффективный вычислительный алгоритм. Начало алгоритма определяется формулами:

$$S_0(\cos q) = \frac{\cos^n q}{n+1} (P_{n-1}(\cos q) - \cos q P_n(\cos q)) = -\frac{\cos^n q \sin q}{n(n+1)} P_n^1(\cos q),$$

$$T_0(\cos q) = \frac{\cos^n q}{n-1} (\cos q P_{n-1}(\cos q) - P_n(\cos q)) =$$

$$= -\frac{\cos^n q}{n(n-1)} \left(\frac{1}{2} \sin 2q P_n^1(\cos q) + n \sin^2 q P_n(\cos q) \right).$$

Затем последовательно вычисляются значения для $i=1 \dots n$

$$S_i(\cos q) = \frac{n-i+1}{n+i+1} \left(\frac{T_{i-1}(\cos q)}{\cos q} - S_{i-1}(\cos q) \right),$$

$$T_i(\cos q) = \frac{n-i+1}{n-i-1} \left(T_{i-1}(\cos q) - \frac{S_{i-1}(\cos q)}{\cos q} \right)$$

Окончательно искомая квадратура определяется суммами:

$$J_n^n(\cos q) = \sum_{i=0}^n S_i(\cos q), \quad J_{n-1}^n(\cos q) = \sum_{i=0}^n T_i(\cos q).$$

Интегрирование по времени осуществляется в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\int \sum_{i=0}^N a_i t^i \sin [I(t-t)] dt &= \left[\sum_{i=0,2,4,\dots}^N a_i \frac{(-1)^{\frac{i}{2}} i!}{I^{i+1}} \right] \cos [I(t-t)] + \\
&+ \left[\sum_{i=0,2,4,\dots}^N a_i \frac{(-1)^{\frac{i}{2}} i!}{I^{i+1}} \right] \sin [I(t-t)], \\
\int \sum_{i=0}^N a_i e^{g_i t} \sin [I(t-t)] dt &= \sum_{i=0}^N \frac{1}{g_i^2 + I^2} (a e^{g_i t} (I \cos [I(t-t)] + g_i \sin [I(t-t)])), \\
\int \sum_{i=0}^N [a_i \sin (w_i t) + b_i \cos (w_i t)] \sin [I(t-t)] dt &= \\
= \sum_{i=0}^N \frac{1}{2(I-w)(I+w)} \{ &a(I+w) \cos [tI - It + tw] + a(I+w) \cos [tI - t(I+w)] + \\
&+ b(I+w) \sin [tI + t(-I+w)] - b(I-w) \sin [tI - t(I+w)] \}, \\
\int \sum_{i=0}^N [a_i \sin (It) + b_i \cos (It)] \sin [I(t-t)] dt &= \\
= \frac{1}{4I} \sum_{i=0}^N [&4a \cos (It) \cos (I(t-t)) - b(2It \cos (tI) + \sin (I(t-2t)))].
\end{aligned}$$

Отметим, что для первой квадратуры может быть построен рекурсивный алгоритм:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{a_n}{I}, & R_{n-1} &= \frac{a_n n}{I^2}, \\
S_{n-1} &= \frac{a_{n-1}}{I}, & R_{n-2} &= \frac{a_n (n-1)}{I^2}, \\
S_{p-2} &= \frac{a_{p-2}}{I} - \frac{p(p-1)}{I^2} S_p, & R_{n-2} &= \frac{a_{p-2}(p-2)}{I^2} - \frac{(p-1)(p-2)}{I^2} R_{p-1}, \\
S_{p-3} &= \frac{a_{p-3}}{I} - \frac{(p-1)(p-2)}{I^2} S_{p-1}, & R_{n-3} &= \frac{a_{p-3}(p-3)}{I^2} - \frac{(p-2)(p-3)}{I^2} R_{p-2}.
\end{aligned}$$

7. Рассмотрим подробнее следующие типы воздействий.

а) Скачок давления, равномерно распределенный по всей поверхности оболочки соответствует внезапному изменению интенсивности внешнего давления на наружной или внутренней лицевой поверхности покоящейся оболочки. Динамическая нагрузка задается следующими выражениями для вектор-функции $\mathbf{f}(\theta)$ при нулевых начальных условиях:

$$\mathbf{f}(q, t) = \begin{pmatrix} f_q(q, t) \\ f_z(q, t) \\ M_q(q, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q H(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(q, t) = \mathbf{v}(q, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где q – интенсивность скачка давления; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Тангенциальные $u(q, t)$, нормальные $w(q, t)$ перемещения и углы поворота $y(q, t)$ нормали могут быть определены в форме разложений, которые для конкретных значений $\mathbf{f}(q, t)$, $\mathbf{u}(q, t)$, $\mathbf{y}(q, t)$ приобретают вид:

$$u(q, t) = q \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [1 - \cos(w_i t)] (A_i P_{a_i}^1(q) + B_i P_{b_i}^1(q) + C_i P_{g_i}^1(q)) \right\},$$

$$w(q, t) = q \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [1 - \cos(w_i t)] (D_i P_{a_i}^1(q) + E_i P_{b_i}^1(q) + F_i P_{g_i}^1(q)) \right\},$$

$$y(q, t) = q \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [1 - \cos(w_i t)] (G_i P_{a_i}^1(q) + H_i P_{b_i}^1(q) + J_i P_{g_i}^1(q)) \right\}.$$

Здесь w_i - частота i -ого тона колебаний; $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, J_i, a_i, b_i, g_i$ - постоянные коэффициенты, определяемые физико-геометрическими характеристиками оболочек. Осциллограммы перемещений характерных сечений оболочки (окрестности опорного контура $q = 0.98 \text{ rad}$, середины меридиана $q = 0.5 \text{ rad}$ и окрестности полюса $q = 0.02 \text{ rad}$) во временных интервалах, соответствующих ~ 4 и ~ 16 периодам колебаний первого тона оболочки ($\{0 \dots 0.1c\}; \{0 \dots 0.8c\}$), показаны на рис. 2. Рядом изображены эпюры перемещений меридиана в моменты времени 0.005 с, 0.05 с и 0.1 с. Пространственно-временные рельефы функций $u(q, t)$, $w(q, t)$, $y(q, t)$ объединяют осциллограммы перемещений всех точек меридиана для периода "раскачки", т. е. начала движения оболочки ($\{0 \dots 0.08c\}$).

Отметим ряд особенностей, характерных для рассматриваемого типа нагрузки. В начальный период воздействия ($\{0 \dots 0.01c\}$) происходит распространение фронта угловых деформаций от опорного контура к полюсу³. В течение этого периода точки меридиана получают синхронное перемещение, а затем происходит дифференциация движения: появляются пучности и узловые линии. Прогибы оказываются преимущественно одного знака, определяемого направлением воздействия, максимальные касательные и угловые перемещения - в окрестности середины меридиана ($q = 0.5 \text{ rad}$), максимальные нормальные перемещения - в окрестности полюса ($q = 0$).

б) Треугольный импульс, равномерно распределенный по всей поверхности оболочки. Динамическая нагрузка задается выражениями:

$$\mathbf{f}(q, t) = \begin{pmatrix} f_q(q, t) \\ f_z(q, t) \\ M_q(q, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \left[\frac{H(t) - H(t - t_1)}{t_1} t + \frac{H(t - t_1) - H(t - t_2)}{t_2 - t_1} (t_2 - t) \right] \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}(q, t) = \mathbf{y}(q, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

³ Это вполне естественно, поскольку опорный контур является наиболее жесткой частью конструкции. В то же время этот эффект проявляет себя только в моделях, основанных на уточненных теориях (оболочек с конечной сдвиговой жесткостью).

где q – максимальная интенсивность импульса; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, t_1 – длительность фронта, а t_2 – длительность всего импульса.

Графическое изображение осциллограмм, эпюр и рельефов приведено на рис. 3 В численном примере длительность импульса принималась равной 0.07 с, что соответствует примерно двум периодам собственных колебаний конструкции на первом тоне. Отметим, что в начале воздействия преобладают касательные и сдвиговые деформации, и лишь после полупериода колебаний оболочки в полюсе интенсивно развиваются прогибы, достигая максимума в момент времени, примерно соответствующий периоду колебаний конструкции на основном тоне. Явно выражена картина распространения волн деформаций от опорного контура к полюсу. После окончания воздействия интенсивность прогибов резко уменьшается и составляет примерно 20 % от максимальных значений, в то время как угловые перемещения не уменьшаются. Таким образом, из сопоставления динамических реакций на прямоугольный и треугольный импульсы следует, что форма импульса оказывает существенное воздействие на картину вынужденных колебаний конструкции.

8. Частотные кривые, построенные в зависимости от соотношения толщин слоев при фиксированной удельной массе пакета, имеют экстремум. Таким образом, может быть поставлена практическая задача – найти такое соотношение толщин слоев оболочки постоянного веса, при котором первые частоты собственных колебаний конструкции оказываются максимальными. Такая постановка является правомерной, поскольку НДС оболочки для большинства встречаемых на практике воздействий определяется первыми формами их колебаний, и конструкция постоянного веса с максимальной первой собственной частотой оказывается оболочкой наибольшей жесткости.

В качестве примера рассмотрим металлополимерную оболочку с характеристиками $E_2/E_1 = E_3/E_1 = 60$, $\rho_2/\rho_1 = \rho_3/\rho_1 = 25$. Фиксированная удельная масса пакета составляет , что соответствует следующему начальному симметричному распределению слоев $h_1 = 1.5$ м, $h_2 = 0.01$ м, $h_3 = 0.01$ м, . Первая частота оболочки с симметричным пакетом составила 105 с^{-1} . В результате поиска оптимального решения (градиентным методом) определено такое оптимальное соотношение толщин слоев $h_1 = 1.05$ м, $h_2 = 0.03$ м, $h_3 = 0.06$ м. При этом первая собственная частота конструкции составила $145 \text{ с}^{-1} > 105 \text{ с}^{-1}$.

Конструкцией наибольшей жесткости оказалась оболочка с несимметричным пакетом слоев. Таким образом, возникает вопрос: как связана асимметрия оптимального пакета слоев с кривизной срединной поверхности оболочки? Была выполнена серия подобных расчетов для металлополимерных оболочек различной кривизны. Результаты расчетов приведены на рис. 5. Там же показана зависимость соотношения толщин крайних слоев в зависимости от кривизны при постоянном пролете конструкции. Для непологих оболочек оптимальные толщины внешних слоев отличаются примерно в два раза, тогда как для пологих оболочек они почти равны. В предельном случае пластины оптимальной является симметричная структура.

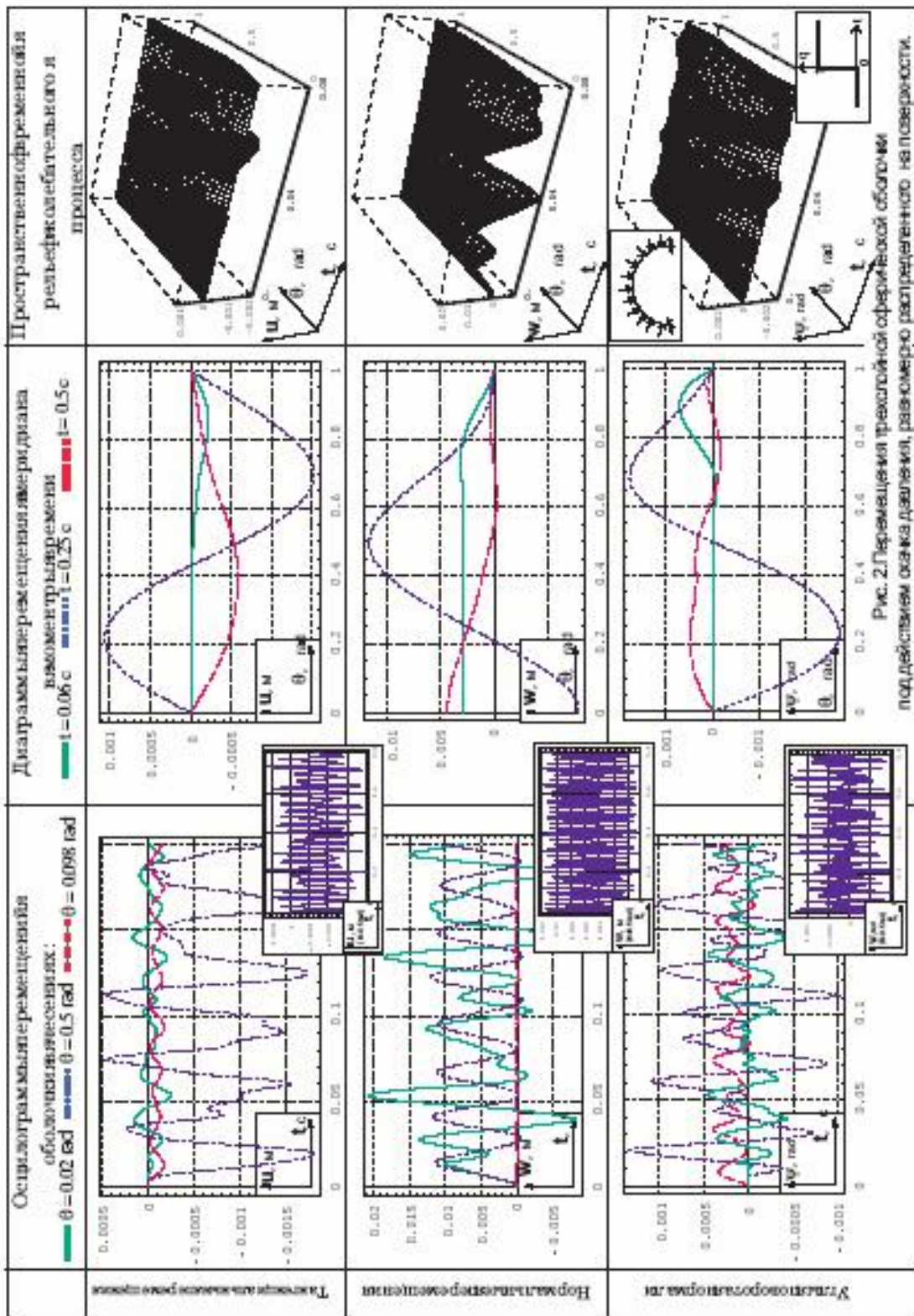


Рис. 2. Перемещение трехслойной сферической оболочки под действием осанки давления, равномерно распределенного на поверхности.

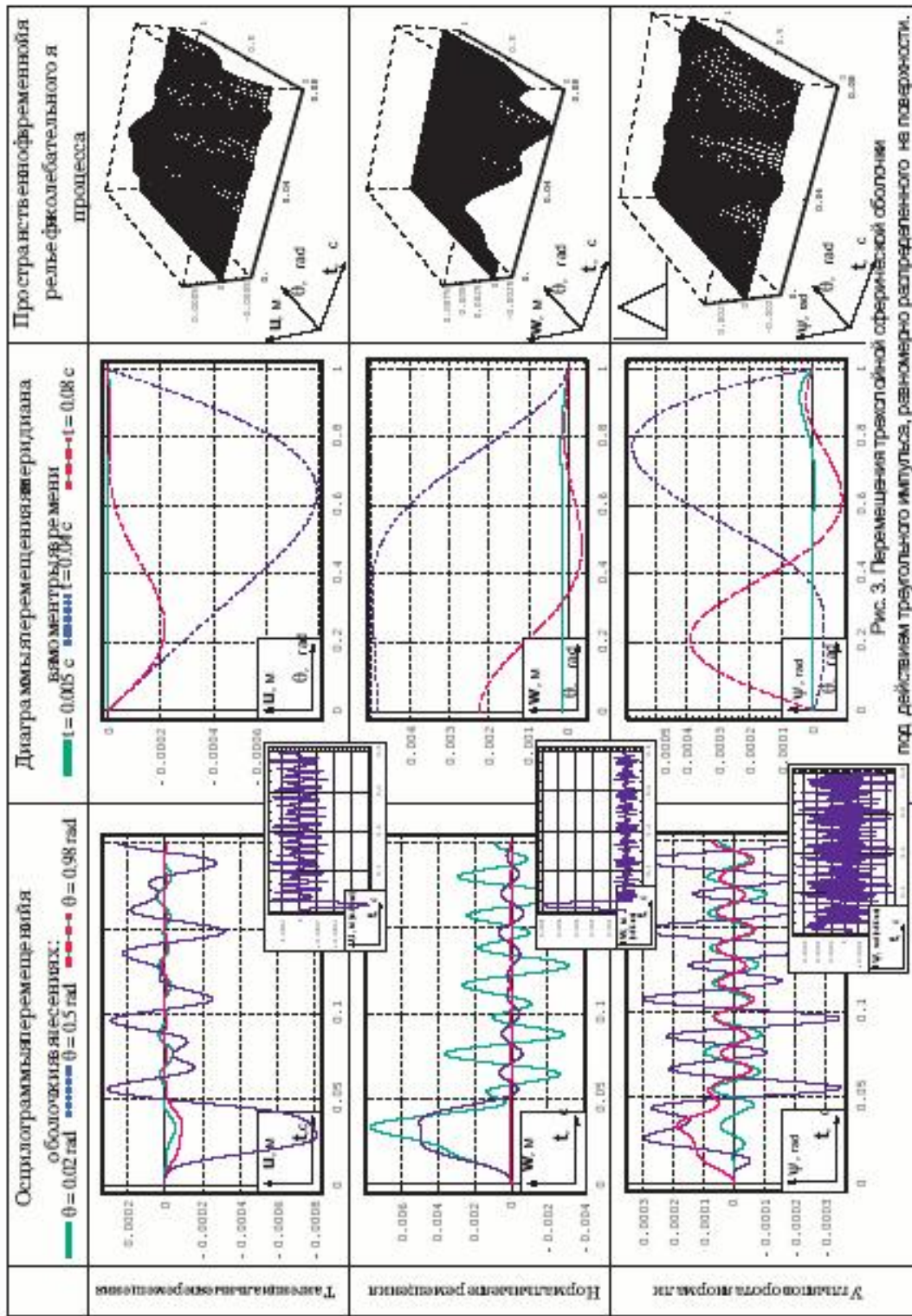


Рис. 3. Перемещения треугольной сферической оболочки под действием треугольного импульса, равномерно распределенного на поверхности.

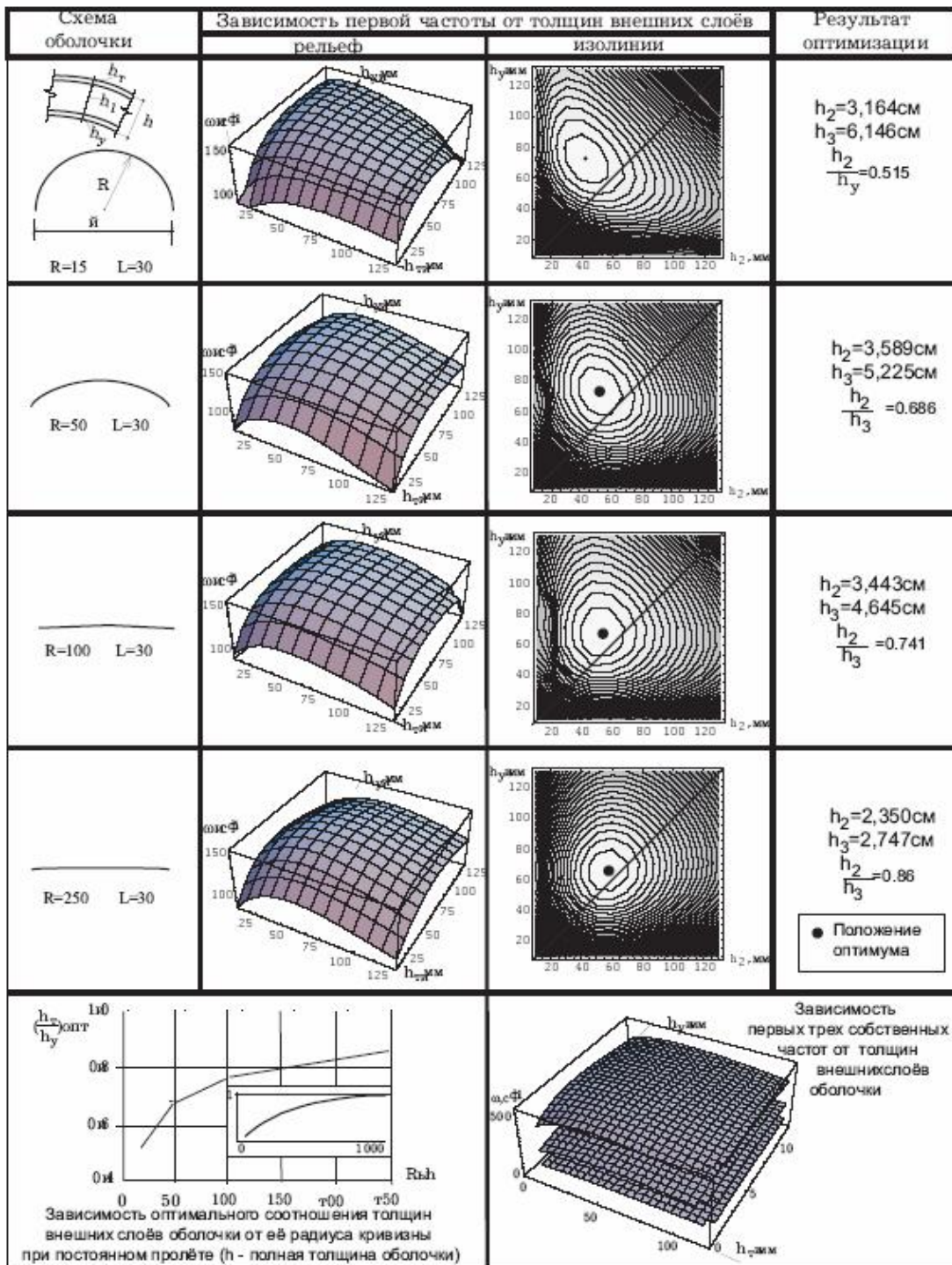


Рис. 4. Оптимальные соотношения толщин внешних слоёв трёхслойных сферических оболочек

В этой связи следует отметить актуальность применения трехслойных непологих оболочек с несимметричной структурой пакета слоев.

На рис. 5. приведены зависимости первых трех собственных частот от соотношения толщин внешних слоев. Отметим, что все три поверхности имеют экстремум приблизительно в одной области, выделенной на рисунке цветом. Таким образом, оптимизируя трехслойную конструкцию по первой частоте, получим оптимум и по следующим частотам.

Сравнительный анализ динамической реакции трехслойных оболочек с оптимизированной и симметричной структурой пакета слоев показал, что в оболочке наибольшей жесткости максимальные перемещения меньше на 10-20%.

г. Самара

Поступила: 25 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 *Алфутов, Н. А.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М. : Машиностроение. – 1984. – 263 с.
- 2 *Бердичевский, В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М. : Главная редакция физико-математической литературы. – 1983. – 447с.
- 3 *Болотин, В. В.* О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек / В. В. Болотин. // Прикладная матем. и механика. – 1963. – Т. 27. – Вып. 2. – С. 362–364.
- 4 *Грандиштейн, И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Грандиштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз. – 1963. – 1100 с.
- 5 *Григолюк, Э. И.* Обоснование уравнений трехслойных пластин несимметричной структуры с жестким наполнителем / Э. И. Григолюк, В. М. Корнев. // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1966. – № 6. – С. 89–97.
- 6 *Даин, Е. А.* К проблеме внутренних резонансов в теории колебаний тонких оболочек / Ин-т проблем механики АН СССР; Е. А. Даин, С. А. Луковенко, Н. В. Харьковская. – М., 1977. – 25 с. – Препринт № 97
- 7 *Лизарев, А. Д.* Уравнения свободных колебаний непологих трехслойных сферических оболочек / А. Д. Лизарев., Н. Б. Ростанина. // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 142–148.
- 8 *Лычев, С. А.* Нестационарные колебания трехслойных сферических оболочек с кратным спектром / С. А. Лычев, Ю. А. Сидоров // Изв. вузов. Строительство. – 2001. – № 4. – С. 31–39.
- 9 *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука. – 1969. – 526 с.
- 10 *Сеницкий, Ю. Э.* Биортогональные многокомпонентные конечные интегральные преобразования и его приложения к краевым задачам механики / Ю. Э. Сеницкий // Известия вузов. Математика. – 1991. – №4. – С. 57–63.
- 11 *Сеницкий, Ю. Э.* Нестационарная динамическая для неоднородных анизотропных толстостенных цилиндрических и сферических оболочек / Ю. Э. Сеницкий // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – Н. Новгород : ГГУ. – 1991. – Вып. 49 – С. 63–72.
- 12 *Сеницкий, Ю. Э.* Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного интегрального преобразования / Ю. Э. Сеницкий // Известия вузов. Математика. – 1991. – № 9. – С. 53–56.
- 13 *Сеницкий Ю. Э.* Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложение / Ю. Э. Сеницкий, С. А. Лычев // Изв. вузов. Математика. – 1999. (В печати)
- 14 *Culkovski, P. M.* The spherical sandwich shell under axisymmetric static and dynamic loading / P. M. Culkovski, H. Reismann // J. of Sound and Vibration. – 1971. – V. 14. – № 2. – P. 229–240.
- 15 *Yi-Yuan, Yu* Torsional vibration of homogenous and sandwich spherical caps and circular plates / Yu Yi-Yuan, B. Koplik // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1967. – Vol. E34. – № 3. – P. 787–789.

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева)

Теория пластичности неоднородных сред привлекла внимание широкого круга исследователей [4]. Среди других методов, для решения задач теории пластичности неоднородных сред рядом исследователей используется метод малого параметра. В теории пластичности неоднородность материала характеризуется зависимостью предела текучести от координат точек тела. Обычно используется разложение предела текучести в ряд по некоторому безразмерному параметру, за исходное принимается напряженное состояние при постоянном пределе текучести. В этом направлении выполнены работы [1, 3, 5-6] и др.

В работе рассматривается упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал трубы предполагается изотропным, неоднородным, сохраняющим значения предела текучести постоянным вдоль параллельных прямых, при этом предел текучести меняется линейно вдоль ортогональной прямой. Рассмотрено влияние неоднородности на напряженное состояние трубы.

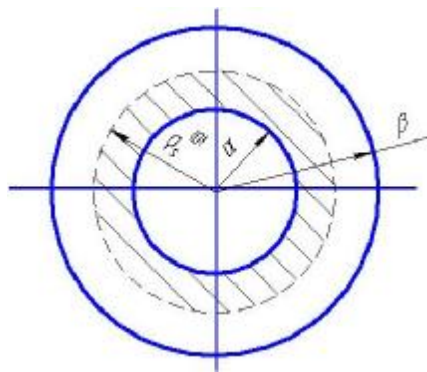


Рис. 1

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a, b , $a < b$ (рис. 1). Условие пластичности примем в виде

$$(s_r - s_q)^2 + 4t_{r\theta}^2 = 4k^2, \quad (1)$$

где s_r, s_q, t_{rq} – компоненты напряжений в полярной системе координат r, q ; k – предел текучести.

Положим

$$k = k_0 + d(\bar{a}x + \bar{b}y), \quad k_0, \bar{a}, \bar{b} - const, \quad (2)$$

где d – малый безразмерный параметр.

Впоследствии перейдем к безразмерным значениям радиусов трубы a, b и черту сверху у величин \bar{a}, \bar{b} опустим. Положим

$$\alpha = a/r_s^{(0)}, \quad b = b/r_s^{(0)},$$

где $r_s^{(0)}$ – радиус пластической зоны в нулевом приближении.

Согласно (2) предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль прямых

$$ax + by = c, \quad c - const \quad (3)$$

и изменяется в зависимости от изменения величины c .

Уравнение равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0, \\ \frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{2t_{rq}}{r} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Будем считать, что на внутренней поверхности трубы действует постоянное давление p , а внешняя поверхность свободна от усилий.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра d , будем искать решение в виде

$$s_{ij} = s_{ij}^{(0)} + s'_{ij}d + s''_{ij}d^2 + \dots, \quad r_s = r_s^{(0)} + r'_s d + r''_s d^2 + \dots, \quad (5)$$

где r_s – радиус пластической зоны.

В дальнейшем припишем всем компонентам в упругой области индекс « e », в пластической области индекс « p ». Все величины имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении k_0 , все линейные размеры тоже будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу пластической зоны в нулевом приближении $r_s^{(0)}$.

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы

$$t_{rq}^{(0)} = 0. \quad (6)$$

Из (1), (5), (6) имеет место

$$s_r^{(0)p} - s_q^{(0)p} = -2. \quad (7)$$

Решая совместно (4), (6), (7) получим

$$s_r^{(0)p} = 2 \ln r + C, \quad s_q^{(0)p} = 2 + 2 \ln r + C, \quad (8)$$

где $C - const$.

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p , внешняя граница трубы свободна от усилий:

$$s_r^{(0)p} \Big|_{r=a} = -p, \quad s_r^{(0)e} \Big|_{r=b} = 0. \quad (9)$$

Из (8), (9) имеет место

$$s_r^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{r}{a}, \quad s_q^{(0)p} = -p + 2k_0 + 2 \ln \frac{r}{a}. \quad (10)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$s_r^{(0)e} = A - B \frac{b^2}{r^2}, \quad s_q^{(0)e} = A + B \frac{b^2}{r^2}, \quad t_{rq}^{(0)e} = 0. \quad (11)$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе

$$s_r^{(0)p} \Big|_{r=1} = s_r^{(0)e} \Big|_{r=1}, \quad s_q^{(0)p} \Big|_{r=1} = s_q^{(0)e} \Big|_{r=1}.$$

Согласно (9), (10), (11), (12)

$$s_r^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln a}{b^2 - 1} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \quad s_q^{(0)e} = \frac{p + 2 \ln a}{b^2 - 1} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (12)$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношениями

$$b^2 = \frac{1}{1 - \ln a - p}.$$

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = r \cos q, \quad y = r \sin q,$$

из (1), (2), (5), (6), (7) получим в первом приближении

$$s_q'^p - s_r'^p = 2(ar \cos q + br \sin q). \quad (13)$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая, что

$$s_p'^p = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}, \quad s_q'^p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad t_{rq}'^p = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right). \quad (14)$$

Из (13), (14) имеет место

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} = 2r^3 (a \cos q + b \sin q). \quad (15)$$

Решение в пластической области имеет вид

$$s_r'^p = \cos q \left(\frac{C_{11}}{r} + ra \right) + \sin q \left(\frac{\bar{C}_{11}}{r} + rb \right), \quad (16)$$

$$t_{rq}'^p = \cos q \left(-rb - \frac{\bar{C}_{11}}{r} \right) + \sin q \left(ra + \frac{C_{11}}{r} \right).$$

Имеет место

$$s_r'^p \Big|_{r=a} = 0, \quad t_{rq}'^p \Big|_{r=a} = 0. \quad (17)$$

Из (16), (17) получим

$$C_{11} = -a^2 a, \quad \bar{C}_{11} = -a^2 b.$$

Соотношения (16) согласно (17) запишем в виде

$$\begin{aligned}
s'_r{}^p &= \cos q \left(-\frac{a^2 a}{r} + ar \right) + \sin q \left(-\frac{a^2 b}{r} + br \right), \\
s'_q{}^p &= \cos q \left(-\frac{a^2 a}{r} + 3ar \right) + \sin q \left(-\frac{a^2 b}{r} + 3br \right), \\
t'_{rq}{}^p &= \cos q \left(\frac{a^2 b}{r} - br \right) + \sin q \left(-\frac{a^2 a}{r} + ar \right).
\end{aligned} \tag{18}$$

На упругопластической границе $r = 1$ напряжения (18) имеют вид:

$$\begin{aligned}
s'_r{}^e &= \cos q (-a^2 a + a) + \sin q (-a^2 b + b) = a_1'' \cos q + b_1'' \sin q, \\
t'_{rq}{}^e &= \sin q (-a^2 a + a) + \cos q (a^2 b - b) = b_1''' \sin q + a_1''' \cos q.
\end{aligned} \tag{19}$$

На внешней границе трубы

$$s'_r{}^e = t'_{rq}{}^e = 0 \text{ при } r = b. \tag{20}$$

Из граничных условий (19), (20) определяются напряжения в упругой области [2]

$$\begin{aligned}
s'_r{}^e &= \left[\frac{1}{b^4 - 1} (a^2 - 1) \left(r - \frac{b^4}{r^3} \right) \right] (a \cos q + b \sin q), \\
s'_q{}^e &= \left[\frac{1}{b^4 - 1} (a^2 - 1) \left(r + \frac{b^4}{r^3} \right) \right] (a \cos q + b \sin q), \\
t'_{rq}{}^e &= \left[\frac{1}{b^4 - 1} (a^2 - 1) \left(r - \frac{b^4}{r^3} \right) \right] (a \cos q + b \sin q).
\end{aligned} \tag{21}$$

Радиус упругопластической области определяется из соотношений

$$r'_s = \frac{(a^2 - 2b^4 + a^2 b^4)}{(b^4 - 2b^4 \ln a - 2b^2 \ln a - 1 - p)} (a \cos q + b \sin q) = M \sin(q + z), \tag{22}$$

где

$$M = \frac{(a^2 - 2b^4 + a^2 b^4) \sqrt{a^2 + b^2}}{(b^4 - 2b^4 \ln a - 2b^2 \ln a - 1 - p)}, \quad \tan z = \frac{a}{b}. \tag{23}$$

Для внутреннего и внешнего радиуса при любом $a < 1, b > 1$ имеет место

$$(a^2 - 2b^4 + a^2 b^4) < 0, \quad (b^4 - 2b^4 \ln a - 2b^2 \ln a - 1 - p) > 0. \tag{24}$$

Согласно (24) $M < 0$.

Из (22), (23), (24) следует, что упругопластическая граница в первом приближении смещается вдоль прямой $-bx + ay = 0$ и смещается в сторону уменьшения предела текучести.

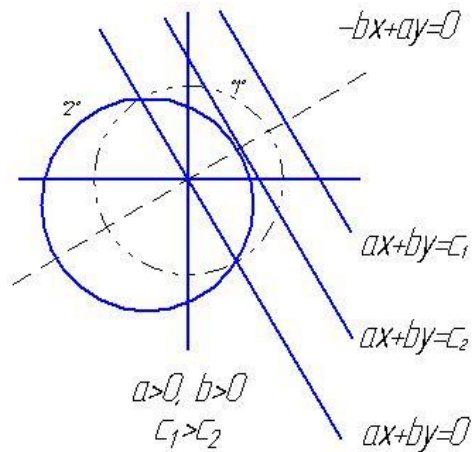


Рис. 2

На рис. 2 контур пластической зоны в нулевом приближении обозначен цифрой «1», контур пластической зоны в первом приближении – «2».

г. Чебоксары

Поступила: 28 марта 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Друянов, Б. А. Вдавливание жесткого штампа в толстую пластически неоднородную пластинку / Б. А. Друянов // Изв. АН СССР. Механика и машиноведение. – 1959. – № 3. – С. 161–166.
2. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М.: Наука, 1978.
3. Кузнецов, А. И. Плоская деформация неоднородных пластических тел / А. И. Кузнецов // Вестник Ленинградского университета. – 1958. – № 13. – С. 112–131.
4. Олышак, В. Теория пластичности неоднородных сред / В. Олышак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский. – М.: Мир, 1964. – 156 с.
5. Целистова, Е. А. Пространственное течение идеальнопластического слоя в случае неоднородных свойств материала / Е. А. Целистова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 1999. – № 7. – С. 45–47.
6. Spencer, A. J. M. Perturbation methods in plasticity, I. Plane strain of non-homogeneous plastic solids / A. J. M. Spencer // J. Mech. and Phys. Solids. – 1961. – № 4.

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТЯЖЕЛОГО СЖИМАЕМОГО
ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ПОЛОСТЬЮ**

(Чуваши́ский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

В работе рассматривается упругопластическое состояние плоскости, ослабленной круговым отверстием. Предполагается, что свойства среды в пластической области зависят от величины среднего давления, учтено влияние силы тяжести. Определено напряженное состояние и граница пластической зоны.

Рассмотрим идеальнопластическое тело, ослабленное круговым отверстием (случай плоской деформации) с учетом массовых сил.

Запишем уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} &= g,\end{aligned}\tag{1}$$

где g – массовая сила (сила тяжести).

Уравнение (1) имеет решение [2]

$$s_y = gy, \quad s_x = 0, \quad t_{xy} = 0.\tag{2}$$

Для перехода из декартовой системы координат воспользуемся формулами

$$\begin{aligned}s_r &= \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q, \\ s_r &= \frac{s_x + s_y}{2} - \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q, \\ t_{rq} &= \frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q.\end{aligned}\tag{3}$$

В полярной системе координат уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{s_r - s_q}{r} &= g \sin q, \\ \frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{2t_{rq}}{r} &= g \cos q.\end{aligned}\tag{4}$$

Согласно (3) решение (2) примет вид

$$\begin{aligned} s_r &= r \sin q \left(\frac{q+g}{2} + \frac{q-g}{2} \cos 2q \right) = \frac{q+3g}{4} r \sin q + \frac{q-g}{4} r \sin 3q, \\ s_q &= r \sin q \left(\frac{q+g}{2} - \frac{q-g}{2} \cos 2q \right) = \frac{3q+g}{4} r \sin q - \frac{q-g}{4} r \sin 3q, \\ t_{rq} &= \frac{g-q}{2} r \sin q \sin 2q = \frac{g-q}{4} r (\cos q - \cos 3q). \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогичный результат был получен в работе [2].

Условие пластичности имеет вид [3]

$$(s_r - s_q)^2 + 4t_{rq}^2 = (2k + s \operatorname{tg} m)^2, \quad s = \frac{1}{2}(s_r + s_q), \quad k, m - \text{const}, \quad (6)$$

где s_r, s_q, t_{rq} – компоненты напряжения в полярной системе координат.

Рассмотрим круговую трубу радиусов a, b , ($a < b$). Текущий радиус обозначим r , границу упругопластической зоны в исходном напряженном состоянии обозначим r_s^0 .

В дальнейшем все величины имеющие размерность длины отнесем к величине r_s^0 .

$$r = \frac{r}{r_s^0}, \quad a = \frac{a}{r_s^0}, \quad b = \frac{b}{r_s^0}. \quad (7)$$

Пластическая зона находится в пределах

$$a \leq r \leq 1.$$

Упругая зона – в пределах

$$1 \leq r \leq b.$$

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k .

Положим [1]

$$s_r = s_r^{(0)} + ds'_r, \quad s_q = s_q^{(0)} + ds'_q, \quad t_{rq} = t_{rq}^{(0)} + dt'_{rq}, \quad g = dc; \quad c - \text{const}, \quad (8)$$

где d – малый параметр.

В дальнейшем будем считать, что

$$s_q^{(0)} < s_r^{(0)}, \quad t_{rq}^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Припишем компонентам напряжений в пластической зоне индекс « p » наверху, компонентам в упругой зоне – индекс « e » наверху.

Из (6 – 9) найдем в исходном нулевом приближении

$$s_r^{(0)p} - s_q^{(0)p} = 2k + \frac{\operatorname{tg} m}{2} (s_r^{(0)p} + s_q^{(0)p}). \quad (10)$$

Из (10) получим

$$s_q^{(0)p} - \bar{A} s_r^{(0)p} = K, \quad (11)$$

где

$$\bar{A} = \frac{2 - \operatorname{tg} m}{2 + \operatorname{tg} m}, \quad K = -\frac{4}{2 + \operatorname{tg} m}.$$

Решение уравнения (11) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_r^{(0)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r}, \\ \mathbf{s}_q^{(0)} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно (11), (12) получим

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{\bar{A}}{r} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} = K. \quad (13)$$

Из (12), (13) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_r^{(0)p} &= \frac{K}{1-\bar{A}} + \bar{C} r^{(\bar{A}-1)}, \\ \mathbf{s}_q^{(0)p} &= \frac{K}{1-\bar{A}} + \bar{A} \bar{C} r^{(\bar{A}-1)}, \\ \bar{C} &- const. \end{aligned} \quad (14)$$

Константу \bar{C} определим согласно (14) при условии отсутствия давления на внутреннем контуре трубы $\mathbf{s}_r^{(0)p}|_{r=a} = 0$:

$$\bar{C} = -\frac{K}{1-\bar{A}} a^{(1-\bar{A})}. \quad (15)$$

Из (14), (15) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_r^{(0)p} &= \frac{K}{1-\bar{A}} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{(\bar{A}-1)} \right], \\ \mathbf{s}_q^{(0)p} &= \frac{K}{1-\bar{A}} \left[1 - \bar{A} \left(\frac{r}{a} \right)^{(\bar{A}-1)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Условия сопряжения напряжений на упруго-пластической границе имеет вид

$$\mathbf{s}_r^{(0)p}|_{r=1} = \mathbf{s}_r^{(0)e}|_{r=1}, \quad \mathbf{s}_q^{(0)p}|_{r=1} = \mathbf{s}_q^{(0)e}|_{r=1}. \quad (17)$$

Выражения для упругих напряжений запишем в виде

$$\mathbf{s}_r^{(0)e} = \left[A - \frac{B}{r^2} \right], \quad \mathbf{s}_q^{(0)e} = \left[A + \frac{B}{r^2} \right], \quad A, B - const. \quad (18)$$

На бесконечности влияние отверстия стремится к нулю, из (18) получим

$$\mathbf{s}_r^{(0)e}|_{r \rightarrow \infty} = A = -q. \quad (19)$$

Используя условие (17), а также (18), (19) получим

$$\begin{aligned} -q - B &= \frac{K}{1-\bar{A}} \left[1 - \left(\frac{1}{a} \right)^{(\bar{A}-1)} \right], \\ -q + B &= \frac{K}{1-\bar{A}} \left[1 - \bar{A} \left(\frac{1}{a} \right)^{(\bar{A}-1)} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) найдем

$$B = \frac{K}{2} \left(\frac{1}{a} \right)^{(\bar{A}-1)}. \quad (21)$$

Из (20), (21) найдем уравнение для определения радиуса пластической зоны

$$a = \left[\frac{2}{K} \left(-q - \frac{K}{1-\bar{A}} \right) \frac{1-\bar{A}}{\bar{A}+1} \right]^{1/(1-\bar{A})}.$$

В первом приближении имеет место

$$(s'_r{}^p - s'_q{}^p) = s' \operatorname{tg} m. \quad (22)$$

Уравнение (22) приведем к следующему виду:

$$s'_q{}^p - \bar{A} s'_r{}^p = 0. \quad (23)$$

Для определения первого приближения имеет место система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{s_r - s_q}{r} &= d c_2 \sin q, \\ \frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{2t_{rq}}{r} &= d c_2 \cos q, \\ s'_q{}^p - \bar{A} s'_r{}^p &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая, что:

$$\begin{aligned} s'_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial q^2} + r \sin q \left(\frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_1 - c_2}{2} \cos 2q \right), \\ s'_q &= \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} + r \sin q \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{c_1 - c_2}{2} (1 + \cos 2q), \\ t'_{rq} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi'}{\partial q} \right) + \frac{c_2 - c_1}{2} r \sin q \sin 2q. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (23), (25) найдем уравнение для определения функции напряжения Φ' :

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} - \frac{\bar{A}}{r} \frac{\partial \Phi'}{\partial r} - \frac{\bar{A}}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial q^2} = \frac{(\bar{A}-3)c_1 + (3\bar{A}-1)c_2}{4} r \sin q - \frac{(\bar{A}+1)(c_1 - c_2)}{4} r (1 + \bar{A}) \sin 3q. \quad (26)$$

Решение неоднородного уравнения (26) представим в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Частным решением неоднородного уравнения является

$$\begin{aligned} s'_{r_1} &= \frac{(\bar{A}-3)c_1 + (3\bar{A}-1)c_2}{8} r \sin q + \frac{(\bar{A}+1)(c_1 - c_2)}{8} r \sin 3q, \\ s'_{q_1} &= 3 \frac{(\bar{A}-3)c_1 + (3\bar{A}-1)c_2}{8} r \sin q - \frac{(\bar{A}+1)(c_1 - c_2)}{8} r \sin 3q, \\ t'_{rq_1} &= -\frac{(\bar{A}-3)c_1 + (3\bar{A}-1)c_2}{8} r \cos q + \frac{(\bar{A}+1)(c_1 - c_2)}{8} r \cos 3q. \end{aligned} \quad (27)$$

Отметим, что вес тела уравновешивается усилиями, определяемыми напряжениями

$$s_r = \frac{(\bar{A}-3)c_1 + (3\bar{A}-1)c_2}{8} r \sin q, \quad t_{rq} = -\frac{(\bar{A}+1)(c_1 - c_2)}{8} r \cos q. \quad (28)$$

Решение однородного уравнения будем искать в виде

$$\Phi = r^m \cos(3q + q_0). \quad (29)$$

Будет иметь место следующее выражение:

$$m^2 - (1 + \bar{A})m + 9\bar{A} = 0. \quad (30)$$

Откуда

$$m_{1,2} = \frac{1 + \bar{A} \pm \sqrt{D}}{2}, \quad (31)$$

где $D = (1 + \bar{A})^2 - 36\bar{A}$.

Согласно (31) возможны два решения уравнения (27), при $D > 0$ и при $D < 0$.

Рассмотрим случай, когда $D < 0$.

Решение уравнения (26) согласно (27) будет иметь вид

$$\begin{aligned} s_r'^p &= \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} r \sin q + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} r \sin 3q + \frac{C_{12}}{r} \sin q + \\ &+ r^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)} \left\{ \left[\left[\frac{1+\bar{A}}{2} - 9 \right] C_{31} + i\Delta C_{32} \right] \cos(\Delta \ln r) + \right. \\ &\left. + \left[-\Delta C_{31} + i \left[\frac{1+\bar{A}}{2} - 9 \right] C_{32} \right] \sin(\Delta \ln r) \right\} \cdot \sin 3q, \\ s_q'^p &= \frac{3(\bar{A}-1)c_1 + (9\bar{A}+5)c_2}{8} r \sin q - \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (1-\bar{A})c_2}{8} r \sin 3q + \frac{C_{12}}{r} \sin q + \\ &+ (1+\bar{A}) r^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)} \left\{ \left[\left[\frac{\bar{A}-1}{4} - (\bar{A}^2-1)\Delta^2 \right] C_{31} + i\Delta C_{32} \right] \cos(\Delta \ln r) + \right. \\ &\left. + \left[-\Delta C_{31} + i \left[\frac{\bar{A}-1}{4} - (\bar{A}^2-1)\Delta^2 \right] C_{32} \right] \sin(\Delta \ln r) \right\} \cdot \sin 3q, \\ t_{rq}'^p &= -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} r \cos q + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} r \cos 3q - \frac{C_{12}}{r} \cos q + \\ &+ 3r^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)} \left\{ \left[\left[\frac{\bar{A}-1}{2} \right] C_{31} + i\Delta C_{32} \right] \cos(\Delta \ln r) + \right. \\ &\left. + \left[-\Delta C_{31} + i \left[\frac{\bar{A}-1}{2} \right] C_{32} \right] \sin(\Delta \ln r) \right\} \cos 3q, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\Delta = \frac{\sqrt{(1+\bar{A})-36\bar{A}}}{2}$.

Коэффициенты C_{12}, C_{31}, C_{32} определим из (32) и граничных условий при $r = a$.

Граничные условия на контуре отверстия имеют вид

$$s_r^{(n)p} = t_{rq}^{(n)p} = 0 \text{ при } r = a. \quad (33)$$

Из (32), (33) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime p} &= \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} a \sin q + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} a \sin 3q + \\
&+ \frac{C_{12}}{a} \sin q + a^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)} \left\{ \left[\left[\frac{1+\bar{A}}{2} - 9 \right] C_{31} + i\Delta C_{32} \right] \cos(\Delta \ln a) + \right. \\
&\left. + \left[-\Delta C_{31} + i \left[\frac{1+\bar{A}}{2} - 9 \right] C_{32} \right] \sin(\Delta \ln a) \right\} \cdot \sin 3q = 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
t_{rq}^{\prime p} &= -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} a \cos q + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} a \cos 3q - \\
&- \frac{C_{12}}{a} \cos q + 3a^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)} \left\{ \left[\left[\frac{\bar{A}-1}{2} \right] C_{31} + i\Delta C_{32} \right] \cos(\Delta \ln r) + \right. \\
&\left. + \left[-\Delta C_{31} + i \left[\frac{\bar{A}-1}{2} \right] C_{32} \right] \sin(\Delta \ln r) \right\} \cos 3q = 0.
\end{aligned}$$

Составляющие напряжения при $\sin q, \cos q$ являются несомоуравновешивающимися и одновременно обращаться в ноль на контуре отверстия не могут.

Предположим, что

$$s_r' \Big|_{r=a} = 0, \tag{35}$$

из (34), (35) следует

$$C_{12} = -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} a^2, \quad t'_{rq} = c_2 a \cos q, \quad r = a. \tag{36}$$

При

$$t'_{rq} \Big|_{r=a} = 0 \tag{37}$$

из (34), (37) следует

$$C_{12} = -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} a^2, \quad s_r' = c_2 \sin q, \quad r = a. \tag{38}$$

Предположим, что на контуре отверстия $r = a$ все самоуравновешивающиеся составляющие напряжения обращаются в ноль, отсюда определим коэффициенты C_{00}, C_{31}, C_{32} :

$$C_{31} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad C_{32} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{i(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \frac{C'_{32}}{i},$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \left(\frac{1+\bar{A}}{2} - 9 \right) \cos(\Delta \ln a) - \Delta \sin(\Delta \ln a), \\
a_{12} &= i \left[\Delta \cos(\Delta \ln a) + \left(\frac{1+\bar{A}}{2} - 9 \right) \sin(\Delta \ln a) \right], \\
a_{21} &= \left(\frac{\bar{A}-1}{2} \right) \cos(\Delta \ln a) - \Delta \sin(\Delta \ln a), \\
a_{22} &= i \left[\Delta \cos(\Delta \ln a) + \left(\frac{\bar{A}-1}{2} \right) \sin(\Delta \ln a) \right], \\
b_1 &= -\frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} a \left(\frac{5-\bar{A}}{2} \right), \quad b_2 = -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{24} a \left(\frac{5-\bar{A}}{2} \right).
\end{aligned}$$

На границе пластической зоны при $r = 1$ из (32) имеет место

$$\begin{aligned}
s_r'^p &= \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} \sin q + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} \sin 3q + \\
&+ C_{12} \sin q + \left(\left[\frac{1+\bar{A}}{2} - 9 \right] C_{31} + \Delta C'_{32} \right) \cdot \sin 3q, \\
s_q'^p &= \frac{3(\bar{A}-1)c_1 + (9\bar{A}+5)c_2}{8} \sin q - \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (1-\bar{A})c_2}{8} \sin 3q + \\
&+ C_{12} \sin q + (1+\bar{A}) \left(\left[\frac{\bar{A}-1}{4} - (\bar{A}^2-1)\Delta^2 \right] C_{31} + \Delta C'_{32} \right) \cdot \sin 3q, \\
t_{rq}'^p &= -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} \cos q + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} \cos 3q - \\
&- C_{12} \cos q + 3 \left(\left[\frac{\bar{A}-1}{2} \right] C_{31} + \Delta C'_{32} \right) \cos 3q.
\end{aligned} \tag{39}$$

В дальнейшем запишем соотношения (39) в виде

$$\begin{aligned}
s_r'^p &= b_1'' \sin q + b_3'' \sin 3q, \\
t_{rq}'^p &= a_1''' \cos q - a_3''' \cos 3q, \quad r = 1,
\end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1''' &= -\left(C_{12} + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} \right) a_3''' = \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} + \frac{3}{2} [A-1] C_{31} + 3\Delta C'_{32}, \\
b_1'' &= \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} + C_{12}, \quad b_3'' = \frac{1+A}{2} C_{31} - 9 + \Delta C'_{32} + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Граничные условия на внешней стороне трубы запишем в виде

$$\begin{aligned}
s_r'^e &= b_1' \sin q, \\
t_{rq}'^e &= a_1' \cos q, \quad r = b,
\end{aligned} \tag{42}$$

где $b_1, a_1' - const$.

Из условий равновесия имеет место

$$(b_1 + a_1')b + (b_1'' + a_1''') = 0.$$

В рассматриваемом случае имеют место формулы раздела (IV) и (VIII), приведенных в монографии [1].

Получим

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime e} &= \left[\frac{r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)b}{4m(b^2+1)} (b_1 + a_1') \left(\frac{1+b^2}{r} - \frac{b^2}{r^3} - r \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b^4-1} (b_1 - b_1'' b) \left(\frac{r}{b} - \frac{b^3}{r^3} \right) \right] \sin q + \\
&\quad + \frac{1}{2N} \{ 3[2-3b^2+b^{-6}]r + 3[4-3b^2-b^6]r^{-5} + \\
&\quad + [4-3b^{-2}-b^{-6}]r^3 + 5[2-3b^{-2}+b^6]r^{-3} \} \cdot b_3'' \sin 3q + \\
&\quad + \frac{1}{2N} \{ [-10+9b^2+b^{-6}]r + [4+6b^6-9b^2]r^{-5} + \\
&\quad + [-4+5b^{-2}-b^{-6}]r^3 + [10-5b^{-2}-5b^6]r^{-3} \} \cdot (-a_3''' \sin 3q), \\
s_q^{\prime e} &= \left[\frac{3r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)b}{4m(b^2+1)} (b_1 + a_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot \frac{1+b^2}{r} + \frac{b^2}{r^3} - 3r \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b^4-1} (b_1 - b_1'' b) \left(\frac{3r}{b} + \frac{b^3}{r^3} \right) \right] \sin q + \\
&\quad + \frac{1}{2N} \{ 3[-2+3b^2-b^{-6}]r + 3[-4+3b^2+b^6]r^{-5} + \\
&\quad + 5[-4+3b^{-2}+b^{-6}]r^3 + [-2+3b^{-2}-b^6]r^{-3} \} \cdot b_3'' \sin 3q + \\
&\quad + \frac{1}{2N} \{ [10-9b^2-b^{-6}]r + [-4-6b^6+9b^2]r^{-5} + \\
&\quad + 5[4-5b^{-2}+b^{-6}]r^3 + [-2+b^{-2}+b^6]r^{-3} \} \cdot (-a_3''' \sin 3q), \\
t_{rq}^{\prime e} &= - \left[\frac{r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)b}{4m(b^2+1)} (b_1 + a_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot \frac{1+b^2}{r} - \frac{b^2}{r^3} - r \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b^4-1} (b_1 - b_1'' b) \left(\frac{r}{b} - \frac{b^3}{r^3} \right) \right] \cos q + \\
&\quad + \frac{1}{2N} \{ 3[-2+3b^2-b^{-6}]r + 3[4-3b^2-b^6]r^{-5} + \\
&\quad + 3[-4+3b^{-2}+b^{-6}]r^3 + 3[2-3b^{-2}+b^6]r^{-3} \} \cdot (-b_3'' \sin 3q) + \\
&\quad + \frac{1}{2N} \{ [10-9b^2-b^{-6}]r + [4-9b^2+6b^6]r^{-5} + \\
&\quad + [12-15b^{-2}+3b^{-6}]r^3 + [6-3b^{-2}-3b^6]r^{-3} \} \cdot a_3''' \sin 3q,
\end{aligned} \tag{43}$$

где $N = 16 - 9(b^{-2} + b^2) + (b^{-8} + b^8)$, $m = \frac{1}{m}$, m – коэффициент Пуассона.

Из условий сопряжения компонент s'_q согласно (32), (43) получим

$$r'_s = \bar{M}_1 \sin q + \bar{M}_2 \sin 3q, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 = & \frac{1}{4} \left[\frac{r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)b}{4m(b^2+1)} (b_1 + a'_1) \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot (1+b^2) + b^2 - 3 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{b^4-1} (b_1 - b_1'' b) \left(\frac{3}{b} + b^3 \right) - \frac{3(\bar{A}-3)c_1 + 3(3\bar{A}-1)c_2 - C_{12}}{8} - C_{12} \right], \\ \bar{M}_2 = & \frac{1}{8N} \left\{ \left[-40 + 18b^2 + 18b^{-2} + 2b^6 + 2b^{-6} \right] \cdot b_3'' - \right. \\ & \left. - \left[24 - 24b^{-2} - 5b^6 + 4b^{-6} \right] \cdot a_3''' - \frac{(\bar{A}+1)(c_1 - c_2)}{8} - \right. \\ & \left. - (1+\bar{A}) \left(\left[\frac{\bar{A}-1}{4} - (\bar{A}^2-1)\Delta^2 \right] C_{31} + \Delta C'_{32} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе решение уравнения (26) при $D > 0$.

Решение уравнения (26) согласно (27) будет иметь вид

$$\begin{aligned} s_{r1}^p = & \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} r \sin q + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} r \sin 3q + \\ & + \frac{\bar{C}_{12}}{r} \sin q + \left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2} \right] \bar{C}_{31} r^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2} \right] r^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right) \sin 3q, \\ s_{q1}^p = & \frac{3(\bar{A}-1)c_1 + (9\bar{A}+5)c_2}{8} r \sin q - \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (1-\bar{A})c_2}{8} r \sin 3q + \\ & + \frac{\bar{C}_{12}}{r} \sin q + \left(\left[\frac{(\bar{A}+2\Delta)^2-1}{4} \right] \bar{C}_{31} r^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{(\bar{A}-2\Delta)^2-1}{2} \right] r^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right) \sin 3q, \\ t_{rq1}^p = & -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} r \cos q + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} r \cos 3q + \\ & + 3 \left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2} \right] \bar{C}_{31} r^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2} \right] r^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right) \cos 3q, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{\sqrt{(1+\bar{A})-36\bar{A}}}{2}.$$

Из (45) и граничных условий (33) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} a \sin q + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} a \sin 3q + \\
& + \frac{\bar{C}_{12}}{a} \sin q + \left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2} \right] \bar{C}_{31} a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right) \sin 3q = 0, \\
& - \frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} a \cos q + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} a \cos 3q - \\
& - \frac{\bar{C}_{12}}{a} \cos q + 3 \left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2} \right] \bar{C}_{31} a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right) \cos 3q = 0.
\end{aligned} \tag{46}$$

Из (33), (45) получим

$$\bar{C}_{31} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad \bar{C}_{32} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}}, \quad a_{12} = \left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}, \\
a_{21} &= \left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}}, \quad a_{22} = \left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}, \\
b_1 &= -\frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} a, \quad b_2 = -\frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} a.
\end{aligned}$$

На границе пластической зоны при $r=1$ из (45), (46) имеет место

$$\begin{aligned}
s_r^p &= \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} \sin q + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} \sin 3q + \\
& + \bar{C}_{12} \sin q + \left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2} \right] \bar{C}_{31} a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right) \sin 3q, \\
s_q^p &= \frac{3(\bar{A}-1)c_1 + (9\bar{A}+5)c_2}{8} \sin q - \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (1-\bar{A})c_2}{8} \sin 3q + \\
& + \bar{C}_{12} \sin q + \left(\left[\frac{(\bar{A}+2\Delta)^2 - 1}{4} \right] \bar{C}_{31} a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{(\bar{A}-2\Delta)^2 - 1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right) \sin 3q, \\
t_{rq}^p &= -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} \cos q + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} \cos 3q - \\
& - \bar{C}_{12} \cos q + 3 \left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2} \right] \bar{C}_{31} a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2} \right] a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right) \cos 3q,
\end{aligned} \tag{47}$$

В дальнейшем запишем соотношения (47) в виде

$$\begin{aligned} s_r^p &= b_1'' \sin q + b_3'' \sin 3q, \\ t_{rq}^p &= a_1''' \cos q - a_3''' \cos 3q, \quad r = 1, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} a_1''' &= \left\{ C_{12} + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} \right\} & b_1'' &= \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} + C_{12}, \\ a_3''' &= \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} + 3 \left\{ \left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2} \right] \bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2} \right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right\} \\ b_3'' &= \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} + \left\{ \left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2} \right] \bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2} \right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Согласно (43) из выражения упругого напряженного состояния, определяемого согласно (48), получим выражение для границы пластической зоны:

$$r_{s1}' = \bar{M}_1 \sin q + \bar{M}_2 \sin 3q, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \frac{1}{4} \left[\frac{r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)b}{4m(b^2+1)} (b_1 + a_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot (1+b^2) + b^2 - 3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b^4-1} (b_1 - b_1'' b) \left(\frac{3}{b} + b^3 \right) - \frac{3(\bar{A}-3)c_1 + 3(3\bar{A}-1)c_2}{8} - C_{12} \right], \\ \bar{M}_2 &= \frac{1}{8N} \left\{ [-40 + 18b^2 + 18b^{-2} + 2b^6 + 2b^{-6}] \cdot b_3'' - \right. \\ &\quad \left. - [24 - 24b^{-2} - 5b^6 + 4b^{-6}] \cdot a_3''' - \frac{(\bar{A}+1)(c_1 - c_2)}{8} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{(\bar{A}+2\Delta)^2 - 1}{4} \right] \bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32} \left[\frac{(\bar{A}-2\Delta)^2 - 1}{2} \right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

г. Чебоксары

Поступила: 15 апреля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978.
2. *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – Т.2. / А. Надаи. – М. : Мир, 1969.
3. *Соколовский, В. В.* Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М.; Л., 1942 ; 3 изд., М. – 1960. – 241 с.

**К ВОПРОСУ О СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СОСТОЯНИЯХ
ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ**

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я Яковлева)

В работах [1] и [2] исследованы предельные соотношения статически определимых состояний при условии сопротивления отрыву в случае, когда величины двух главных напряжений равны.

В настоящей работе рассматриваются общие соотношения статически определимых состояний идеальнопластических тел при отрыве, не связанные с ограничениями на величины главных напряжений.

1. Рассмотрим соотношения связи между компонентами S_{ij} тензора напряжений в декартовой системе координат x, y, z и компонентами S_i главных напряжений

$$S_x = S_1 l_1^2 + S_2 m_1^2 + S_3 n_1^2, \\ t_{xy} = S_1 l_1 l_2 + S_2 m_1 m_2 + S_3 n_1 n_2, \quad (xyz, 123, lmn) \quad (1.1)$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы, определяющие ориентацию главных напряжений. Для направляющих косинусов l_i, m_i, n_i справедливы соотношения

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0, \quad (lmn)$$

а также

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (lmn) \quad (1.2)$$

Пусть $S_3 \leq S_2 \leq S_1$. Обозначим

$$S_1 = n, \Sigma = S_1 - S_2, T = S_1 - S_3. \quad (1.3)$$

Согласно (1.3) из (1.1) следует

$$S_x = n - \Sigma m_1^2 - T n_1^2, \quad t_{xy} = -\Sigma m_1 m_2 - T n_1 n_2. \quad (xyz, 123) \quad (1.4)$$

В случае статически определимых состояний условие пластичности запишется в виде трех соотношений

$$f_s(S_{ij}) = 0, \quad s=1,2,3. \quad (1.5)$$

Тогда из (1.4) и (1.5) имеем

$$f_s(n, \Sigma, T, \mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0, \quad s=1,2,3, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

Введем обозначения

$$\mathbf{N}_i = \sqrt{\Sigma} \mathbf{m}_i + \sqrt{T} \mathbf{n}_i, \quad N_i = |\mathbf{N}_i|. \quad (1.7)$$

Тогда для скалярных произведений векторов $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ имеем

$$(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = N_1 N_2 \cos a_3, \quad 0 \leq a_i \leq p. \quad (1.8)$$

Для трех векторов $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$, лежащих в одной плоскости, не нарушая общности, можно считать

$$\cos a_1 = \cos(a_2 + a_3). \quad (1.9)$$

Согласно (1.7) и (1.8)

$$\Sigma m_1^2 + T n_1^2 = N_1^2, \quad \Sigma m_1 m_2 + T n_1 n_2 = N_1 N_2 \cos a_3. \quad (1.10)$$

Из (1.7), (1.8) и (1.10) следует, что $\Sigma = 0$ или $T = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 = 1. \quad (1.11)$$

С учетом (1.10), из (1.4) получим

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{n} - N_1^2, \quad \mathbf{t}_{xy} = -N_1 N_2 \cos a_3. \quad (xyz, 1.12)$$

Следуя (1.12), из (1.5) имеем

$$f_s(\mathbf{n}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, N_1, N_2, N_3) = 0, \quad s=1,2,3. \quad (1.13)$$

Из (1.12) следует

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_x - \mathbf{n})(\mathbf{s}_y - \mathbf{n}) \cos^2 a_3 &= \mathbf{t}_{xy}^2, \\ (\mathbf{s}_y - \mathbf{n})(\mathbf{s}_z - \mathbf{n}) \cos^2 a_1 &= \mathbf{t}_{yz}^2, \\ (\mathbf{s}_x - \mathbf{n})(\mathbf{s}_z - \mathbf{n}) \cos^2 a_2 &= \mathbf{t}_{xz}^2, \end{aligned} \quad (1.14)$$

а также

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_x - \mathbf{n}) \mathbf{t}_{yz} \cos a_2 \cos a_3 &= \mathbf{t}_{xy} \mathbf{t}_{xz} \cos a_1, \\ (\mathbf{s}_y - \mathbf{n}) \mathbf{t}_{xz} \cos a_1 \cos a_3 &= \mathbf{t}_{xy} \mathbf{t}_{yz} \cos a_2, \\ (\mathbf{s}_z - \mathbf{n}) \mathbf{t}_{xy} \cos a_1 \cos a_2 &= \mathbf{t}_{yz} \mathbf{t}_{xz} \cos a_3. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Необходимо отметить, что согласно (1.14) и (1.15) условие полной пластичности [2] имеет место лишь в случае, когда $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ удовлетворяют (1.11).

Подставляя соотношения (1.12) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (xyz) \quad (1.16)$$

получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} - N_1 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \cos a_3 + \frac{\partial N_3}{\partial z} \cos a_2 \right) - \\ &- \left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} \cos a_3 + N_3 \frac{\partial N_1}{\partial z} \cos a_2 \right) + \\ &+ N_1 \left(N_2 \sin a_3 \frac{\partial a_3}{\partial y} + N_3 \sin a_2 \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) = 0. \quad (xyz, 1.17) \end{aligned}$$

Выражение мощности рассеяния механической энергии согласно (1.12) запишем в виде

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij} = 3\mathbf{n}\mathbf{e} - \\ &- N_1(\mathbf{e}_x N_1 + \mathbf{e}_{xy} N_2 \cos a_3 + \mathbf{e}_{xz} N_3 \cos a_2) - \\ &- N_2(\mathbf{e}_{xy} N_1 \cos a_3 + \mathbf{e}_y N_2 + \mathbf{e}_{yz} N_3 \cos a_1) - \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$-N_3(e_{xz}N_1 \cos a_2 + e_{yz}N_2 \cos a_1 + e_z N_3).$$

Соотношения ассоциированного закона течения определяются из условия экстремума функционала

$$A = N - I_1 f_1 - I_2 f_2 - I_3 f_3 \quad (1.19)$$

и имеют вид

$$\mathbf{e} = \frac{I_i}{3} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{n}},$$

$$N_2(e_{xy}N_2 \sin a_3 + e_{yz}N_3 \sin a_1) = \frac{I_i}{2} \frac{\partial f_i}{\partial a_3}, \quad (1.20)$$

$$N_3(e_{xz}N_1 \sin a_2 + e_{yz}N_2 \sin a_1) = \frac{I_i}{2} \frac{\partial f_i}{\partial a_2},$$

$$e_x N_1 + e_{xy} N_2 \cos a_3 + e_{xz} N_3 \cos a_2 = -\frac{I_i}{2} \frac{\partial f_i}{\partial N_1},$$

$$e_{xy} N_1 \cos a_3 + e_y N_2 + e_{yz} N_3 \cos a_1 = -\frac{I_i}{2} \frac{\partial f_i}{\partial N_2}, \quad (1.21)$$

$$e_{xz} N_1 \cos a_2 + e_{yz} N_2 \cos a_1 + e_z N_3 = -\frac{I_i}{2} \frac{\partial f_i}{\partial N_3}.$$

2. Предположим, что условия пластичности (1.13) не зависят от N_1, N_2, N_3 , т. е. имеют вид

$$f_s(\mathbf{n}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 0, \quad s=1,2,3. \quad (2.1)$$

Тогда согласно (1.9) и (2.1) имеем

$$\mathbf{n} = \text{const}, \mathbf{a}_1 = \text{const}, \mathbf{a}_2 = \text{const}, \mathbf{a}_3 = \text{const}. \quad (2.2)$$

Предельное условие сопротивления отрыву имеет вид

$$(\mathbf{s}_i)_{\max} \leq p, \quad p = \text{const}. \quad (2.3)$$

Предположим, что

$$\mathbf{n} = p, \mathbf{s}_2 < p, \mathbf{s}_3 < p. \quad (2.4)$$

Тогда согласно (2.3) и (2.4) условие (2.2) описывает предельное состояние при отрыве.

Уравнения равновесия (1.17) согласно (2.2) приводятся к виду

$$N_1 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \cos a_3 + \frac{\partial N_3}{\partial z} \cos a_2 \right) + \left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} \cos a_3 + N_3 \frac{\partial N_1}{\partial z} \cos a_2 \right) = 0. \quad (xyz, 123) \quad (2.5)$$

Соотношения ассоциированного закона пластического течения согласно (2.2) и (1.21) выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} e_x N_1 + e_{xy} N_2 \cos a_3 + e_{xz} N_3 \cos a_2 &= 0, \\ e_{xy} N_1 \cos a_3 + e_y N_2 + e_{yz} N_3 \cos a_1 &= 0, \\ e_{xz} N_1 \cos a_2 + e_{yz} N_2 \cos a_1 + e_z N_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Умножив первое уравнение из (2.6) на N_2 , второе уравнение – на N_1 , согласно (1.12) получим

$$\begin{aligned} \frac{e_x t_{xy}}{\cos a_3} + e_{xy} (s_y - n) \cos a_3 + \frac{e_{xz} t_{yz} \cos a_2}{\cos a_1} &= 0, \\ e_{xy} (s_x - n) \cos a_3 + \frac{e_y t_{xy}}{\cos a_3} + \frac{e_{yz} t_{xz} \cos a_1}{\cos a_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Аналогично из второго и третьего уравнений системы (2.6), а также первого и третьего уравнений системы (2.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{e_{xy} t_{xz} \cos a_3}{\cos a_2} + \frac{e_y t_{yz}}{\cos a_1} + e_{yz} (s_z - n) \cos a_1 &= 0, \\ \frac{e_{xz} t_{xy} \cos a_2}{\cos a_3} + e_{yz} (s_y - n) \cos a_1 + \frac{e_y t_{yz}}{\cos a_1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} e_{xz} (s_x - n) \cos a_2 + \frac{e_{yz} t_{xy} \cos a_1}{\cos a_3} + \frac{e_z t_{xz}}{\cos a_2} &= 0, \\ \frac{e_x t_{xz}}{\cos a_2} + \frac{e_{xy} t_{yz} \cos a_3}{\cos a_1} + e_{xz} (s_z - n) \cos a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.7), (2.8), (2.9) следует

$$\begin{aligned} \frac{e_x t_{xy}}{\cos a_3} + e_{xy} s_y \cos a_3 + \frac{e_{xz} t_{yz} \cos a_2}{\cos a_1} &= \\ = e_{xy} s_x \cos a_3 + \frac{e_y t_{xy}}{\cos a_3} + \frac{e_{yz} t_{xz} \cos a_1}{\cos a_2}, \\ \frac{e_{xy} t_{xz} \cos a_3}{\cos a_2} + \frac{e_y t_{yz}}{\cos a_1} + e_{yz} s_z \cos a_1 &= \\ = \frac{e_{xz} t_{xy} \cos a_2}{\cos a_3} + e_{yz} s_y \cos a_1 + \frac{e_y t_{yz}}{\cos a_1}, \\ e_{xz} s_x \cos a_2 + \frac{e_{yz} t_{xy} \cos a_1}{\cos a_3} + \frac{e_z t_{xz}}{\cos a_2} &= \\ = \frac{e_x t_{xz}}{\cos a_2} + \frac{e_{xy} t_{yz} \cos a_3}{\cos a_1} + e_{xz} s_z \cos a_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если имеет место (1.11), то соотношения ассоциированного закона течения (2.10) приобретают вид [2]

$$\begin{aligned} e_x t_{xy} + e_{xy} s_y + e_{xz} t_{yz} &= e_{xy} s_x + e_y t_{xy} + e_{yz} t_{xz}, \\ e_{xy} t_{xz} + e_y t_{yz} + e_{yz} s_z &= e_{xz} t_{xy} + e_{yz} s_y + e_y t_{yz}, \\ e_{xz} s_x + e_{yz} t_{xy} + e_z t_{xz} &= e_x t_{xz} + e_{xy} t_{yz} + e_{xz} s_z. \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Рассмотрим случай, когда $a_3 = 0$. Тогда согласно (1.7) и (1.8)

$$a_1 = a_2 = a. \quad (3.1)$$

Согласно (3.1) из (1.12) следует

$$\begin{aligned} s_x &= n - N_1^2, \quad s_y = n - N_2^2, \quad s_z = n - N_3^2, \\ t_{xy} &= -N_1 N_2, \quad t_{yz} = -N_2 N_3 \cos a, \quad t_{xz} = -N_1 N_3 \cos a. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнения равновесия (2.5) с учетом (3.2) примут вид

$$\begin{aligned}
& N_1 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \cos a \right) + \\
& + \left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} + N_3 \frac{\partial N_1}{\partial z} \cos a \right) = 0, \\
& N_2 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \cos a \right) + \\
& + \left(N_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + N_3 \frac{\partial N_2}{\partial z} \cos a \right) = 0, \\
& N_3 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \cos a + \frac{\partial N_2}{\partial y} \cos a + \frac{\partial N_3}{\partial z} \right) + \\
& + \left(N_1 \frac{\partial N_3}{\partial x} \cos a + N_2 \frac{\partial N_3}{\partial y} \cos a + N_3 \frac{\partial N_3}{\partial z} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Согласно (3.1) соотношения ассоциированного закона пластического течения (2.6) примут вид

$$\begin{aligned}
e_x N_1 + e_{xy} N_2 + e_{xz} N_3 \cos a &= 0, \\
e_{xy} N_1 + e_y N_2 + e_{yz} N_3 \cos a &= 0, \\
e_{xz} N_1 \cos a + e_{yz} N_2 \cos a + e_z N_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Характеристические поверхности $y(x, y, z) = 0$ систем (3.3) и (3.4) определяются из уравнения

$$q(q^2 \cos a + 2N_3 q y_z \sin^2 a - N_3^2 y_z \sin^2 a \cos a) = 0, \tag{3.5}$$

где $q = N_1 y_x + N_2 y_y + N_3 y_z \cos a$, $y_x = \frac{\partial y}{\partial x}$, $y_y = \frac{\partial y}{\partial y}$, $y_z = \frac{\partial y}{\partial z}$.

Согласно (3.5) характеристические поверхности систем (3.3) и (3.4) совпадают и имеют вид

$$\begin{aligned}
N_1 y_x + N_2 y_y + N_3 y_z \cos a &= 0, \\
N_1 y_x + N_2 y_y + N_3 y_z (\cos a - (\sin a - 1) \operatorname{tg} a) &= 0, \\
N_1 y_x + N_2 y_y + N_3 y_z (\cos a - (\sin a + 1) \operatorname{tg} a) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

С учетом (1.11) соотношения (3.6) примут вид [1]. Из (3.6) следует, что системы (3.3) и (3.4) принадлежат к гиперболическому типу.

4. Рассмотрим случай, когда $a_3 = p$. Тогда согласно (1.7) и (1.8)

$$a_1 = p - a, a_2 = a. \tag{4.1}$$

Согласно (4.1) из (1.12) следует

$$\begin{aligned}
s_x = n - N_1^2, \quad s_y = n - N_2^2, \quad s_z = n - N_3^2, \\
t_{xy} = N_1 N_2, \quad t_{yz} = N_2 N_3 \cos a, \quad t_{xz} = -N_1 N_3 \cos a.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Уравнения равновесия (2.5) с учетом (4.2) примут вид

$$N_1 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \cos a \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} - N_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} + N_3 \frac{\partial N_1}{\partial z} \cos a \right) = 0, \\
& N_2 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \cos a \right) + \\
& + \left(N_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} - N_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + N_3 \frac{\partial N_2}{\partial z} \cos a \right) = 0, \\
& N_3 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \cos a - \frac{\partial N_2}{\partial y} \cos a + \frac{\partial N_3}{\partial z} \right) + \\
& + \left(N_1 \frac{\partial N_3}{\partial x} \cos a - N_2 \frac{\partial N_3}{\partial y} \cos a + N_3 \frac{\partial N_3}{\partial z} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Согласно (4.1) соотношения ассоциированного закона пластического течения (2.6) примут вид

$$\begin{aligned}
e_x N_1 + e_{xy} N_2 + e_{xz} N_3 \cos a &= 0, \\
e_{xy} N_1 + e_y N_2 + e_{yz} N_3 \cos a &= 0, \\
e_{xz} N_1 \cos a + e_{yz} N_2 \cos a + e_z N_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Характеристические поверхности $y(x, y, z) = 0$ систем (4.3) и (4.4) определяются из уравнения

$$q(q^2 \cos a + 2N_3 q y_z \sin^2 a - N_3^2 y_z \sin^2 a \cos a) = 0, \tag{4.5}$$

где $q = N_1 y_x - N_2 y_y + N_3 y_z \cos a$.

Согласно (4.5) характеристические поверхности систем (4.3) и (4.4) совпадают и имеют вид

$$\begin{aligned}
N_1 y_x - N_2 y_y + N_3 y_z \cos a &= 0, \\
N_1 y_x - N_2 y_y + N_3 y_z (\cos a - (\sin a - 1) \operatorname{tg} a) &= 0, \\
N_1 y_x - N_2 y_y + N_3 y_z (\cos a + (\sin a + 1) \operatorname{tg} a) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что системы (4.3) и (4.4) принадлежат к гиперболическому типу.

г. Чебоксары

Поступила: 17 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
2. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 702 с.
3. *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ ВТУЛКИ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА КОНТАКТНОЙ ПАРЫ

(Азербайджанский технический университет)

Рассматривается задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары. Считается, что при многократном возвратно-поступательном движении плунжера происходит разрушение материалов при трении, вызванное контактным взаимодействием и сопровождаемое совместным действием силовой нагрузки и температуры. Принято, что вблизи поверхности контакта втулки, подкрепленной с натягом с внешним цилиндром, имеются N_0 произвольно размещенных прямолинейных трещин. Методами теории аналитических функций задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений и бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Проводится процедура определения коэффициентов интенсивности напряжений. В расчетах функция, описывающая шероховатость внутренней поверхности втулки принималась стационарной случайной функцией с нулевым средним значением и известной дисперсией.

Опыт показывает большую надежность и долговечность многокомпонентных конструкций перед однородными. В связи с этим в некоторых контактных парах нефтепромыслового оборудования нашли применение составные цилиндры (втулки и подкрепляющий цилиндр). При этом в расчетах используется схема собранного с натягом двухкомпонентного кольца под действием внутреннего давления. Фрикционная пара «втулка-плунжер» работает в условиях сложного напряженного состояния.

Практика работы контактных пар нефтепромыслового оборудования показывает, что разрушение втулки составного цилиндра контактной пары происходит на пятнах фактического касания в тонких приповерхностных слоях путем образования микротрещин.

Для обоснованного управления процессом трения и изнашивания в трущейся паре необходимо исследование разрушения материалов при трении, вызванного контактным взаимодействием и сопровождаемое совместным действием контактного давления, сил трения и температуры.

В связи с этим необходимо осуществлять предельный анализ деталей контактной пары, чтобы установить, что предполагаемые исходные трещины, расположенные самым неблагоприятным образом, не будут расти до катастрофических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы.

1. Постановка задачи. Считаем, что внутренний контур втулки, подкрепленной внешним цилиндром, близок к круговому. Как известно, реальная обработанная поверхность втулки никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет микро или макроско-

пические неровности технологического характера, образующие шероховатость. Несмотря на исключительно малые размеры неровностей, образующие шероховатость, они оказывают существенное влияние на разнообразные эксплуатационные свойства трибосопряжения. В процессе работы контактной пары «составной цилиндр-плунжер» происходит силовое взаимодействие между контактирующими поверхностями втулки и плунжера, возникают силы трения, приводящие к изнашиванию материалов сопряжения. Изнашивание во фрикционной паре в процессе трения существенно связано с величиной площадки контакта и контактным давлением. Для определения контактного давления необходимо рассмотреть износоконтактную задачу о вдавлении плунжера в поверхность втулки. Пусть к внутренней поверхности упругой втулки с механическими характеристиками G и m на некотором участке прижимается плунжер с механическими характеристиками G_1 и m_1 . Считается, что втулка подкреплена с натягом с помощью внешнего цилиндра с механическими характеристиками G_0 и m_0 . Принято, что выполняются условия плоской деформации.

Отнесем составной цилиндр контактной пары к полярной системе координат $r\varphi$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0, L и L_1 с радиусами R_0, R и R_1 соответственно (рис. 1). Считается, что выполняются условия плоской деформации. Рассмотрим некоторую реализацию шероховатой внутренней поверхности втулки.

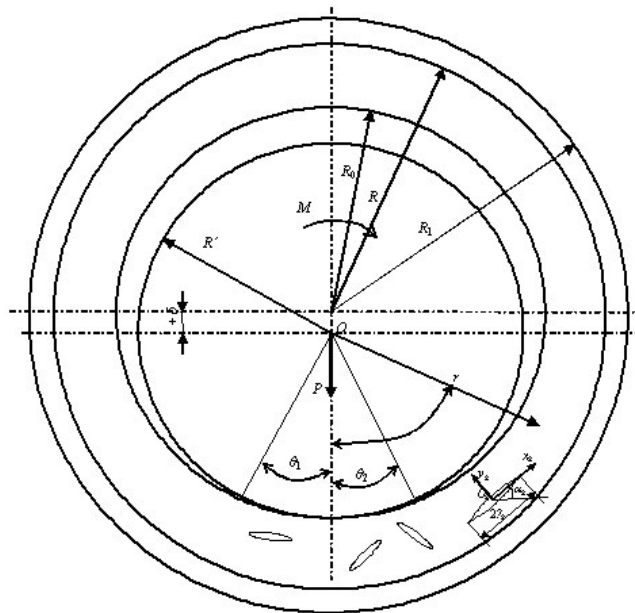


Рис. 1. Расчетная схема задачи механики контактного разрушения

Представим границу внутреннего контура L'_0 втулки в следующем виде:

$$r = R_0 + d(q); \quad d(q) = e H(q), \quad (1.1)$$

где $e = R_{\max} / R_0$ – малый параметр; R_{\max} – наибольшая высота выступа (впадины) неровности внутренней поверхности втулки.

С помощью обработки профилограмм обработанной поверхности втулки находятся коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$H(q) = \sum_{k=0}^n (a_k^0 \cos kq + b_k^0 \sin kq),$$

описывающие каждый внутренний профиль обработанной поверхности втулки.

Аналогично считается, что внешний контур плунжера близок к круговому и может быть представлен в виде

$$r_1(q) = R'_0 + eH_1(q); \quad H_1(q) = \sum_{k=0}^n (a_k^1 \cos kq + b_k^1 \sin kq). \quad (1.2)$$

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние втулки составного цилиндра в процессе работы контактной пары.

Пусть в упругой втулке, подкрепленной с натягом с внешним упругим цилиндром, вблизи поверхности трения имеется N_0 прямолинейных трещин длиной $2l_k$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$). Берега трещин свободны от нагрузок. Режимы работы контактной пары, в которой могут возникнуть остаточные деформации, считаются недопустимыми.

Условие, связывающее перемещения втулки и плунжера представлено [1, 3] в следующем виде:

$$u_1 + u_2 = d(q), \quad q_1 \leq q \leq q_2. \quad (1.3)$$

Здесь $d(q)$ – осадка точек поверхности втулки и плунжера, определяемая формой внутренней поверхности втулки и плунжера, а также величиной прижимающей силы P ; $q_2 - q_1$ – величина угла (площадки) контакта. В зоне контакта, кроме нормальных давлений, действует касательное напряжение t_{rq} , связанное с контактным давлением $p(q, t)$ по закону Амонтона – Кулона

$$t_{rq}(q, t) = fp(q, t),$$

где f – коэффициент трения пары «втулка - плунжер».

Касательные усилия (усилия трения) $t_{rq}(q, t)$ способствуют тепловыделению в зоне контакта. Общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности сил трения, а количество тепла, выделяемое в точке зоны контакта с координатой q , будет равно

$$Q(q, t) = Vfp(q, t), \quad (1.4)$$

где V – средняя за период скорость перемещения плунжера относительно втулки.

Общее количество тепла $Q(q, t)$ будет расходоваться следующим образом: поток тепла во втулку $Q_b(q, t)$ и аналогичный поток $Q_1(q, t)$ тепла на повышение температуры плунжера, т. е. $Q = Q_b + Q_1$.

Так как частота движения плунжера достаточно велика, рассматриваем задачу определения температуры как стационарную.

Для радиального перемещения втулки составного цилиндра будем иметь

$$u_1 = u_{1y} + u_{1m} + u_{1u}. \quad (1.5)$$

Здесь u_{1y} – радиальные термоупругие перемещения точек контактной поверхности втулки; u_{1m} – перемещения, вызванные смятием микровыступов поверхности втулки; u_{1u} – перемещения, вызванные износом поверхности втулки.

Аналогично для перемещений точек поверхности плунжера будем иметь

$$u_2 = u_{2y} + u_{2m} + u_{2u}. \quad (1.6)$$

Скорость изменения перемещений поверхности трения при абразивном износе будет [2]

$$\frac{d\mathbf{u}_{ku}}{dt} = K_{bk} p(\mathbf{q}, t) \quad (k=1,2), \quad (1.7)$$

где K_{b1} и K_{b2} – коэффициенты изнашивания материала втулки и плунжера соответственно.

Для определения перемещений \mathbf{u}_{1y} , \mathbf{u}_{1uu} необходимо решить следующую задачу термоупругости для составного цилиндра:

$$\Delta T = 0 \text{ во втулке;}$$

$$\Delta T_0 = 0 \text{ в подкрепляющем цилиндре;}$$

при $r = r(\mathbf{q})$

$$A_{T_1} I \frac{\partial T}{\partial n} - A_{T_2} a_1 (T - T_c) = -Q_*; \quad (1.8)$$

при $r = R$

$$T = T_0; I \frac{\partial T}{\partial r} = I_0 \frac{\partial T_0}{\partial r};$$

при $r = R_1$

$$I_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} + a_2 (T - T_c) = 0;$$

при $r = r(\mathbf{q})$

$$\mathbf{s}_n^b = -p(\mathbf{q}), \mathbf{t}_{nt}^b = -fp(\mathbf{q}) \quad \text{на площадке контакта;} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{s}_n^b = 0, \mathbf{t}_{nt}^b = 0 \quad \text{вне площадки контакта;}$$

при $r = R$

$$\mathbf{s}_r^b - i\mathbf{t}_{rq}^b = \mathbf{s}_r^0 - i\mathbf{t}_{rq}^0; \quad (1.10)$$

$$\mathbf{u}_r^b - i\mathbf{u}_q^b = \mathbf{u}_r^0 - i\mathbf{u}_q^0 + g(\mathbf{q});$$

при $r = R_1$

$$\mathbf{u}_r^0 = 0; \mathbf{u}_q^0 = 0; \quad (1.11)$$

$$\mathbf{s}_n^b = 0; \mathbf{t}_{nt}^b = 0 \quad \text{на берегах трещин.} \quad (1.12)$$

Здесь I , I_0 – коэффициенты теплопроводности втулки и подкрепляющего цилиндра соответственно; Δ – оператор Лапласа; a_1 – коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности втулки; a_2 – коэффициент теплоотдачи с наружной цилиндрической поверхности цилиндра с внешней средой; T_c – температура окружающей среды; n , t – нормаль и касательная к контуру трещины; A_{T_1} – теплопоглощающая поверхность; A_{T_2} – охлаждающая поверхность; Q_* – часть количества тепла, выделившегося при трении и приходящаяся на нагрев втулки; $Q_* = Q_b$ на площадке контакта, $Q_* = 0$ вне площадки контакта; \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_q – соответственно радиальная и касательная составляющие вектора перемещений точек контура L ; \mathbf{s}_r , \mathbf{s}_q , \mathbf{t}_{rq} – компоненты тензора напряжений; $g(\mathbf{q})$ – заданная функция натяга; $i^2 = -1$.

Аналогично ставится задача термоупругости для определения перемещений контактной поверхности плунжера

$$\Delta T_2 = 0$$

при $r = r_1(q)$

$$I_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = -Q_1(q); \quad \text{на контактной площадке}; \quad (1.13)$$

$$I_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} + a(T_2 - T_c) = 0 \quad \text{вне контактной площадки};$$

при $r = r_1(q)$

$$s_n = -p(q), \quad t_{nr} = -fp(q) \quad \text{на контактной площадке}; \quad (1.14)$$

$$s_n = 0, \quad t_{nr} = 0 \quad \text{вне контактной площадки};$$

Здесь для интенсивности поверхностного источника тепла в зоне трения имеем $Q_1(q) = a_{m,n,2} fVp(q)$; $a_{m,n,2}$ – коэффициент разделения теплового потока для плунжера.

Величины q_1 и q_2 , являющиеся концами участка соприкосновения плунжера с втулкой, неизвестны заранее. Для их определения используем условие [5], выражающее, что давление $p(q)$ непрерывно переходит в нуль, когда точка q выходит за участок соприкосновения:

$$p(q_1) = 0; \quad p(q_2) = 0. \quad (1.15)$$

Согласно теории [8] квазихрупкого разрушения Ирвина-Орована параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, ответственной за разрушение материала втулки составного цилиндра контактной пары можно считать величину коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины.

2. Случай одной трещины. Для решения поставленной задачи необходимо совместное решение износоконтактной задачи с задачей механики разрушения.

Температурные функции, напряжения и перемещения в составном цилиндре и плунжера ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем, для упрощения, членами, содержащими ϵ степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской термоупругости.

Значения компонент тензора напряжений при $r = r(q)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R_0$.

Используя метод возмущений с учетом сказанного, краевые условия задачи термоупругости для составного цилиндра примут вид:

для нулевого приближения

$$\Delta t_b^{(0)} = 0 \quad \text{во втулке};$$

$$\Delta t_0^{(0)} = 0 \quad \text{в подкрепляющем цилиндре};$$

$$\text{при } r = R_0 \quad A_{r_1} I \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} - A_{r_2} a_{1b}^{(0)} = -Q_*^{(0)}; \quad (2.1)$$

$$\text{при } r = R \quad t_b^{(0)} = t_0^{(0)}; \quad I \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} = I_0 \frac{\partial t_0^{(0)}}{\partial r};$$

$$\text{при } r = R_1 \quad I_0 \frac{\partial t_0^{(0)}}{\partial r} + a_2 t_0^{(0)} = 0;$$

$$\text{при } r = R_0 \quad s_r^{b(0)} = -p^{(0)}(q), \quad t_{rq}^{b(0)} = -fp^{(0)}(q) \quad \text{на площадке контакта}; \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}_r^{b(0)} = 0, \mathbf{t}_{rq}^{b(0)} = 0 \text{ вне площадки контакта;} \\ \text{при } r = R & \quad \mathbf{s}_r^{b(0)} - i\mathbf{t}_{rq}^{b(0)} = \mathbf{s}_r^{0(0)} - i\mathbf{t}_{rq}^{0(0)}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_r^{b(0)} - i\mathbf{u}_q^{b(0)} = \mathbf{u}_r^{0(0)} - i\mathbf{u}_q^{0(0)} + \mathbf{g}^{(0)}(\mathbf{q}); \\ \text{при } r = R_1 & \quad \mathbf{u}_r^{0(0)} = 0; \mathbf{u}_q^{0(0)} = 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{s}_n^{b(0)} = 0; \mathbf{t}_{nr}^{b(0)} = 0 \text{ на берегах трещин;} \quad (2.5)$$

для первого приближения

$$\Delta t_b^{(1)} = 0 \quad \text{во втулке;}$$

$$\Delta t_0^{(1)} = 0 \quad \text{в подкрепляющем цилиндре;}$$

$$\text{при } r = R_0 \quad A_{T_1} I \frac{\partial t_b^{(1)}}{\partial r} - A_{T_2} a_1 t_b^{(1)} = \left[A_{T_2} a_1 \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} - A_{T_1} I \frac{\partial^2 t_b^{(0)}}{\partial r^2} \right] H(\mathbf{q}) - Q_*^{(1)}(\mathbf{q}); \quad (2.6)$$

$$\text{при } r = R \quad t_b^{(1)} = t_0^{(1)}; \quad I \frac{\partial t_b^{(1)}}{\partial r} = I_0 \frac{\partial t_0^{(1)}}{\partial r};$$

$$\text{при } r = R_1 \quad I_0 \frac{\partial t_0^{(1)}}{\partial r} + a_2 t_0^{(1)} = 0;$$

$$\text{при } r = R_0 \quad \mathbf{s}_r^{b(1)} = N - p^{(1)}(\mathbf{q}), \mathbf{t}_{rq}^{b(1)} = T - fp^{(1)}(\mathbf{q}) \text{ на площадке контакта;} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{s}_r^{b(1)} = N, \mathbf{t}_{rq}^{b(1)} = T \quad \text{вне площадки контакта;}$$

$$\text{при } r = R \quad \mathbf{s}_r^{b(1)} - i\mathbf{t}_{rq}^{b(1)} = \mathbf{s}_r^{0(1)} - i\mathbf{t}_{rq}^{0(1)}; \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_r^{b(1)} - i\mathbf{u}_q^{b(1)} = \mathbf{u}_r^{0(1)} - i\mathbf{u}_q^{0(1)} + \mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{q});$$

$$\text{при } r = R_1 \quad \mathbf{u}_r^{0(1)} = 0; \mathbf{u}_q^{0(1)} = 0; \quad (2.9)$$

$$\text{на берегах трещин} \quad \mathbf{s}_n^{b(1)} = 0; \mathbf{t}_{nr}^{b(1)} = 0. \quad (2.10)$$

$$\text{Здесь } N = -H(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{s}_r^{b(0)}}{\partial r} + 2\mathbf{t}_{rq}^{b(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\mathbf{q})}{dq}; \text{ при } r = R_0 \quad (2.11)$$

$$T = (\mathbf{s}_q^{b(0)} - \mathbf{s}_r^{b(0)}) \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\mathbf{q})}{dq} - H(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{t}_{rq}^{b(0)}}{\partial r}.$$

Аналогично находим краевые условия задачи термоупругости для плунжера в каждом приближении.

Для коэффициентов интенсивности напряжений вблизи кончиков трещин будем иметь

$$K_I = K_I^{(0)} + eK_I^{(1)} + \dots; \quad K_{II} = K_{II}^{(0)} + eK_{II}^{(1)} + \dots$$

Здесь $K_I^{(0)}, K_{II}^{(0)}$ – коэффициенты интенсивности напряжений для концов трещины в нулевом приближении; а $K_I^{(1)}, K_{II}^{(1)}$ – соответственно для первого приближения.

Решение сопряженной краевой задачи теории теплопроводности ищется методом разделения переменных.

Распределение избыточных температур для втулки $t_b = T - T_C$ и подкрепляющего цилиндра $t_0 = T_0 - T_C$ находим формально в следующем виде:

$$\begin{aligned}
t_b^{(0)} &= C_{10} + C_{20} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{10}^{(k)} r^k + C_{20}^{(k)} r^{-k}) \cos kq + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{10}^{(k)} r^k + A_{20}^{(k)} r^{-k}) \sin kq, \\
t_b^{(1)} &= C_{11} + C_{21} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{11}^{(k)} r^k + C_{21}^{(k)} r^{-k}) \cos kq + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{11}^{(k)} r^k + A_{21}^{(k)} r^{-k}) \sin kq, \quad (2.12) \\
t_0^{(0)} &= C_{30} + C_{40} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{30}^{(k)} r^k + C_{40}^{(k)} r^{-k}) \cos kq + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{30}^{(k)} r^k + A_{40}^{(k)} r^{-k}) \sin kq, \\
t_0^{(1)} &= C_{31} + C_{41} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{31}^{(k)} r^k + C_{41}^{(k)} r^{-k}) \cos kq + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{31}^{(k)} r^k + A_{41}^{(k)} r^{-k}) \sin kq.
\end{aligned}$$

Постоянные $C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{40}, C_{10}^{(k)}, C_{20}^{(k)}, A_{10}^{(k)}, A_{20}^{(k)}, C_{30}^{(k)}, C_{40}^{(k)}, A_{30}^{(k)}, A_{40}^{(k)}$ определяются из граничных условий (2.1) задачи в нулевом приближении. Соответственно коэффициенты $C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{41}, C_{11}^{(k)}, C_{21}^{(k)}, A_{11}^{(k)}, A_{21}^{(k)}, C_{31}^{(k)}, C_{41}^{(k)}, A_{31}^{(k)}, A_{41}^{(k)}$ находятся из краевых условий (2.6) задачи в первом приближении.

Для решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [7]. В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений в нулевом и первом приближениях определяется решением следующих дифференциальных уравнений:

$$\Delta F^{(0)} = \frac{1+m}{1-m} a t_b^{(0)}; \quad \Delta F_0^{(0)} = \frac{1+m_0}{1-m_0} a_0 t_0^{(0)}, \quad (2.13)$$

$$\Delta F^{(1)} = \frac{1+m}{1-m} a t_b^{(1)}; \quad \Delta F_0^{(1)} = \frac{1+m_0}{1-m_0} a_0 t_0^{(1)}. \quad (2.14)$$

Ищем решение уравнений (2.13) в виде

$$\begin{aligned}
F^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^{(0)} \cos nq + f_n^{*(0)} \sin nq), \quad (2.15) \\
F_0^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n0}^{(0)} \cos nq + f_{n0}^{*(0)} \sin nq).
\end{aligned}$$

Для функций $f_n^{(0)}(r), f_n^{*(0)}(r), f_{n0}^{(0)}(r)$ и $f_{n0}^{*(0)}(r)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых находим методом вариации постоянных.

После определения термоупругого потенциала $F^{(0)}(r, q)$ для втулки и $F_0^{(0)}(r, q)$ для подкрепляющего цилиндра в нулевом приближении с помощью известных [7] формул вычисляем напряжения $\bar{S}_r^{b(0)}, \bar{S}_q^{b(0)}, \bar{t}_{rq}^{b(0)}$ и перемещения $\bar{u}_r^{b(0)}, \bar{u}_q^{b(0)}$ во втулке и напряжения $\bar{S}_r^{0(0)}, \bar{S}_q^{0(0)}, \bar{t}_{rq}^{0(0)}$ и перемещения $\bar{u}_r^{b(0)}, \bar{u}_q^{b(0)}$ в подкрепляющем цилиндре.

Найденные напряжения и перемещения для втулки и подкрепляющего цилиндра не будут удовлетворять краевым условиям (2.2) – (2.5). Таким образом, необходимо для составного цилиндра найти второе напряженно-деформированное состояние $\bar{S}_r^{b(0)}, \bar{S}_q^{b(0)}, \bar{t}_{rq}^{b(0)}, \bar{u}_r^{b(0)}, \bar{u}_q^{b(0)}$ для втулки и $\bar{S}_r^{0(0)}, \bar{S}_q^{0(0)}, \bar{t}_{rq}^{0(0)}, \bar{u}_r^{0(0)}, \bar{u}_q^{0(0)}$ для подкрепляющего цилиндра, такое состояние, чтобы выполнялись краевые условия (2.2) – (2.5).

Для определения второго напряженно-деформированного состояния в составном цилиндре имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } r = R_0 \quad \bar{S}_r^{b(0)} = -p^{(0)}(q) - \bar{S}_r^{b(0)}; \quad \bar{t}_{rq}^{b(0)} = -fp^{(0)}(q) - \bar{t}_{rq}^{b(0)} \text{ на площадке контакта; } \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_r^{b(0)} &= -\bar{S}_r^{b(0)}, & \bar{E}_{rq}^{b(0)} &= -\bar{E}_{rq}^{b(0)} & \text{вне площадки контакта;} \\ \text{при } r = R & \bar{S}_r^{b(0)} - i\bar{E}_{rq}^{b(0)} + (\bar{S}_r^{b(0)} - \bar{E}_{rq}^{b(0)}) = \bar{S}_r^{0(0)} - i\bar{E}_{rq}^{0(0)} + (\bar{S}_r^{0(0)} - i\bar{E}_{rq}^{0(0)}); \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_r^{b(0)} - i\bar{U}_q^{b(0)} + (\bar{U}_r^{b(0)} - i\bar{U}_q^{b(0)}) &= \bar{U}_r^{0(0)} - i\bar{U}_q^{0(0)} + (\bar{U}_r^{0(0)} - i\bar{U}_q^{0(0)}) + g^{(0)}(q); \\ \text{при } r = R_1 & \bar{U}_r^{0(0)} = -\bar{U}_r^{0(0)}, & \bar{U}_q^{0(0)} &= -\bar{U}_q^{0(0)}; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\text{на берегах трещины } \bar{S}_n^{b(0)} = -\bar{S}_n^{b(0)}, \quad \bar{E}_{nt}^{b(0)} = -\bar{E}_{nt}^{b(0)}. \quad (2.19)$$

Краевые условия задачи (2.16)–(2.19) с помощью формул Колосова-Мусхелишвили [5] можно записать в виде граничной задачи для отыскания двух пар комплексных потенциалов $\Phi_b^{(0)}(z)$, $\Psi_b^{(0)}(z)$ для втулки и $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ для подкрепляющего цилиндра

$$\Phi_b^{(0)}(t_0) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t_0)} - e^{2iq} [\bar{E}_0 \Phi_b^{(0)}(t_0) + \Psi_b^{(0)}(t_0)] = X^{(0)}(q) - (\bar{S}_r^{b(0)} - i\bar{E}_{rq}^{b(0)}), \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \Phi_b^{(0)}(t) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\bar{E} \Phi_b^{(0)}(t) + \Psi_b^{(0)}(t)] &= \Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} - \\ &- e^{2iq} [\bar{E} \Phi^{(0)}(t) + \Psi^{(0)}(t)] + f_1 - if_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_b \overline{\Phi_b^{(0)}(t)} - \Phi_b^{(0)}(t) + [\bar{E} \Phi_b^{(0)}(t) + \Psi_b^{(0)}(t)] e^{2iq} &= \\ = \frac{G}{G_0} \left\{ k_0 \overline{\Phi^{(0)}(t)} - \Phi^{(0)}(t) + [\bar{E} \Phi^{(0)}(t) + \Psi^{(0)}(t)] \right\} + 2Gg_*(t), \end{aligned}$$

$$k_0 \overline{\Phi^{(0)}(t_1)} - \Phi^{(0)}(t_1) + [\bar{E}_1 \Phi^{(0)}(t_1) + \Psi^{(0)}(t_1)] e^{2iq} = -2G_0 (\bar{U}_r^{0(0)} - i\bar{U}_q^{0(0)}), \quad (2.21)$$

$$\Phi_b^{(0)}(t) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t)} + i\bar{E} \Phi_b^{(0)}(t) + \Psi_b^{(0)}(t) = -(\bar{S}_n^b + i\bar{S}_{nt}^b). \quad (2.22)$$

Здесь $k_b = 3 - 4m$; $k_0 = 3 - 4m_0$; $t_0 = R_0 \exp(iq)$; $t = R \exp(iq)$; $t_1 = R_1 \exp(iq)$; t – аффикс точек берегов трещины.

$$f_1 - if_2 = (\bar{S}_r^{0(0)} - i\bar{E}_{rq}^{0(0)}) - (\bar{S}_r^{b(0)} - i\bar{E}_{rq}^{b(0)}); \quad g_*(t) = g'^{(0)}(t) + j'(t);$$

$$j(t) = (\bar{U}_r^{0(0)} - i\bar{U}_q^{0(0)}) - (\bar{U}_r^{b(0)} - i\bar{U}_q^{b(0)});$$

$$X^{(0)}(q) = \begin{cases} -(1-if)p^{(0)}(q) & \text{на площадке контакта,} \\ 0 & \text{вне контактной площадки.} \end{cases}$$

Комплексные потенциалы $\Phi_b^{(0)}(z)$, $\Psi_b^{(0)}(z)$ и $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_b^{(0)}(z) &= \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z) + \Phi_3^{(0)}(z), \\ \Psi_b^{(0)}(z) &= \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z) + \Psi_3^{(0)}(z), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k, \quad \Psi_1^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (2.24)$$

$$\Phi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2p} \int_{-1_1}^{1_1} \frac{g_1^{(0)}(t)}{t - z_1} dt, \quad \Psi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2p} e^{-2ia_1} \int_{-1_1}^{1_1} \left[\frac{g_1^{(0)}(t)}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1}{(t - z_1)^2} e^{ia_1} g_1^{(0)}(t) \right] dt,$$

$$\Phi_3^{(0)}(z) = \frac{1}{2p} \int_{-1_1}^{1_1} \left[\left(-\frac{1}{z} - \frac{\bar{T}_1}{1 - z\bar{T}_1} \right) e^{ia_1} g_1^{(0)}(t) + \overline{g_1^{(0)}(t)} e^{-ia_1} \frac{1 - T_1 \bar{T}_1}{\bar{T}_1 (1 - z\bar{T}_1)^2} \right] dt, \quad (2.25)$$

$$\Psi_3^{(0)}(z) = \frac{1}{2pz} \int_{-1_1}^{1_1} \left\{ g_1^{(0)}(t) e^{ia_1} \left[\frac{1}{z\bar{T}_1} - \frac{2}{z^2} - \frac{\bar{T}_1}{z(1 - z\bar{T}_1)} + \frac{\bar{T}_1^2}{(1 - z\bar{T}_1)^2} \right] + \right.$$

$$+ \overline{g_1^{(0)}(t)} e^{-ia_1} \left[\frac{1 - T_1 \overline{T_1}}{z \overline{T_1} (1 - z \overline{T_1})^2} - \frac{1}{1 - z T_1} - \frac{2(1 - T_1 \overline{T_1})}{(1 - z \overline{T_1})^3} \right] dt,$$

$$\Phi^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k. \quad (2.26)$$

Здесь $T_1 = te^{ia_1} + z_1^0$, $z_1 = e^{-ia_1}(z - z_1^0)$; $g_1(x_1)$ – искомая функция, характеризующая разрыв смещений при переходе через линию трещины

$$g_1(x) = \frac{2G}{i(1+k_b)} \frac{\partial}{\partial x} [u_1^+(x,0) - u_1^-(x,0) + i(u_1^+(x,0) - u_1^-(x,0))].$$

Используя (2.22)–(2.25), для отыскания комплексных потенциалов $\Phi_1^{(0)}(z)$, $\Psi_1^{(0)}(z)$ и $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ граничные условия (2.20) представим в следующем виде:

$$\Phi_1^{(0)}(t_0) + \overline{\Phi_1^{(0)}(t_0)} - e^{2iq} [\overline{\Phi_1^{(0)}(t_0)} + \Psi_1^{(0)}(t_0)] = X^{(0)}(q) - (\overline{S_r^{b(0)}} - i\overline{T_{rq}^{b(0)}}), \quad (2.27)$$

$$\Phi_1^{(0)}(t) + \overline{\Phi_1^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\overline{\Phi_1^{(0)}(t)} + \Psi_1^{(0)}(t)] = \Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\overline{\Phi^{(0)}(t)} + \Psi^{(0)}(t)] + f_1 - if_2 - (f_3 - if_4), \quad (2.28)$$

$$k_b \overline{\Phi_1^{(0)}(t)} - \Phi_1^{(0)}(t) + e^{2iq} [\overline{\Phi_1^{(0)}(t)} + \Psi_1^{(0)}(t)] = \frac{G}{G_0} \{ k_0 \overline{\Phi^{(0)}(t)} - \Phi^{(0)}(t) + e^{2iq} [\overline{\Phi^{(0)}(t)} + \Psi^{(0)}(t)] \} + 2Gg'_*(t) - (j_1 - ij_2). \quad (2.29)$$

Здесь

$$f_3 - if_4 = \Phi_*^{(0)}(t) + \overline{\Phi_*^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\overline{\Phi_*^{(0)}(t)} + \Psi_*^{(0)}(t)],$$

$$j_1 - ij_2 = k_b \overline{\Phi_*^{(0)}(t)} - \Phi_*^{(0)}(t) + [\overline{\Phi_*^{(0)}(t)} + \Psi_*^{(0)}(t)] e^{2iq},$$

$$\Phi_*^{(0)}(t) = \Phi_2^{(0)}(t) + \Phi_3^{(0)}(t); \quad \Psi_*^{(0)}(t) = \Psi_2^{(0)}(t) + \Psi_3^{(0)}(t).$$

Обозначим левую часть краевого условия (2.28) через функцию $s^0 - it^0$, тогда имеем

$$\Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\overline{\Phi^{(0)}(t)} + \Psi^{(0)}(t)] + f_1 - if_2 - (f_3 - if_4) = s^0 - it^0. \quad (2.30)$$

Считаем, что на круговом контуре L ($t = R \exp(iq)$) функция $s^0 - it^0$, представляющая собой самоуравновешенную систему сил, действующую на подкрепляющий цилиндр со стороны втулки, разлагается в комплексный ряд Фурье

$$s^0 - it^0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ikq}.$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ будем иметь на контуре L условие (2.30) и условие (2.21) на контуре L_1 ($t_1 = R_1 \exp(iq)$).

Функции $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ аналитичны внутри поперечного сечения подкрепляющего цилиндра $R \leq |z| \leq R_1$, могут быть представлены [5] рядами (2.26). Используя метод степенных рядов Н. И. Мусхелишвили [5], находим коэффициенты a_k , b_k потенциалов $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$.

Для определения неизвестных величин A_k рассмотрим решение задачи для втулки $R_0 \leq |z| \leq R$. Комплексные потенциалы $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ позволяют после некоторых

преобразований представить граничные условия для отыскания функций $\Phi_1^{(0)}(z)$ и $\Psi_1^{(0)}(z)$ в виде (2.27) и

$$\Phi_1^{(0)}(t) + \overline{\Phi_1^{(0)}(t)} - [\overline{t}\Phi_1^{(0)}(t) + \Psi_1^{(0)}(t)]e^{2iq} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{2iq}, \quad (2.32)$$

$$k_b \overline{\Phi_1^{(0)}(t)} - \Phi_1^{(0)}(t) + [\overline{t}\Phi_1^{(0)}(t) + \Psi_1^{(0)}(t)]e^{2iq} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^* e^{2iq} + 2Gg'_*(t) - (j_1 - ij_2). \quad (2.33)$$

Здесь
$$A_{-k}^* = \frac{G}{G_0} [k_0 \bar{a}_k R^k - a_{-k} R^{-k} (1+k) + b_{-k-2} R^{-k-2}];$$

$$A_k^* = \frac{G}{G_0} [k_0 \bar{a}_{-k} R^{-k} - (1-k) a_k R^k + b_{k-2} R^{k-2}].$$

Относительно функций $X^{(0)}(q)$, $g'^{(0)}(t)$, $j'(t)$, $(j_1 - ij_2)$, $(\bar{S}_r^{b(0)} - i\bar{T}_{rq}^{b(0)})$ будем считать, что они разлагаются в ряды Фурье

$$g'^{(0)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{no} e^{ikq} = a_k^{no} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{no} \cos kq + b_k^{no} \sin kq);$$

$$X^{(0)}(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(0)} e^{ikq}; \quad j'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k' e^{ikq}; \quad -(\bar{S}_r^{b(0)} - i\bar{T}_{rq}^{b(0)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{ikq};$$

$$-(j_1 - ij_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{k,0}^{(0)} e^{ikq}; \quad (f_3 - if_4) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^{(0)} e^{ikq}.$$

Здесь коэффициенты $D_{k,0}^{(0)}$ и $D_k^{(0)}$ зависят от искомой функции $g_1^{(0)}(t)$ и определяются с помощью теории вычетов.

Краевые условия (2.27), (2.32) служат для определения коэффициентов d_k , c_k , а граничное условие (2.33) – для нахождения величин A_k .

В результате находим

$$d_0 = \frac{A_0 R^2 - (A_0^{(0)} + F_0) R_0^2}{2(R^2 - R_0^2)}; \quad d_{-1} = \frac{(\bar{A}_1^{(0)} + \bar{F}_1) R_0}{1 + k_b};$$

$$c_{-1} = -k_b \frac{(\bar{A}_1^{(0)} + \bar{F}_1) R_0}{1 + k_b}; \quad d_1 = \frac{\bar{M}_{-1}}{R^4 - R_0^4} - \frac{2(A_1^{(0)} + F_1) R_0}{(1 + k_b)(R^2 - R_0^2)};$$

$$d_k = \frac{(1+k)(R^2 - R_0^2) M_k - (R^{-2k+2} - R_0^{-2k+2}) \bar{M}_{-k}}{(1-k^2)(R^2 - R_0^2) - (R^{2k+2} - R_0^{2k+2})(R^{-2k+2} - R_0^{-2k+2})}, \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots);$$

$$c_{-2} R_0^{-2} = 2a_0 - (A_0^{(0)} + F_0); \quad c_{k-2} R^{k-2} = (1-k) d_k R^k + \bar{d}_{-k} R^{-k} - A_k;$$

$$M_k = A_k R^{-k+2} - (A_k^{(0)} + F_k) R_0^{-k+2}; \quad (1+k_b) \bar{d}_0 = A_0 + A_0^* + 2G(A_0^{no} + F_0') + D_{0,0}^{(0)};$$

$$(1+k_b) \bar{d}_{-k} R^{-k} = A_k + A_k^* + 2G(A_k^{no} + F_k') + D_{k,0}^{(0)};$$

$$(1+k_b) \bar{d}_k R^k = A_{-k} + A_{-k}^* + 2G(A_{-k}^{no} + F_{-k}') + D_{-k,0}^{(0)}.$$

В правые части формул для определения коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k, c_k входят коэффициенты разложений функции натяга $g^{(0)}(q)$ и контактное давление $p^{(0)}(q)$ в нулевом приближении, а также интегралы от искомой функции $g_1^{(0)}(t)$.

Удовлетворяя функциями (2.23), (2.22) краевому условию (2.22) на берегах трещины, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1^{(0)}(x_1)$:

$$\int_{-1_1}^{1_1} [R_{11}(t, x_1)g_1^{(0)}(t) + S_{11}(t, x_1)\overline{g_1^{(0)}(t)}] dt = pf^0(x_1) \quad |x_1| \leq 1_1, \quad (2.35)$$

$$f^0(x_1) = -\left[\Phi_1^{(0)}(x_1) + \overline{\Phi_1^{(0)}(x_1)} + x_1 \overline{\Phi_1^{\prime(0)}(x_1)} + \overline{\Psi_1^{(0)}(x_1)} \right] - (\overline{s}_r^{b(0)} - i\overline{t}_{x_1 y_1}^{b(0)}).$$

Здесь переменные $x_1, t, 1_1, z_1^0$ – безразмерные величины, отнесенные к R_0 ; R_{nk} , S_{nk} ($n = k = 1$) определяются по формулам (VI. 61) книги [6]. К сингулярному интегральному уравнению для внутренней трещины следует добавить дополнительное равенство, выражающее условие однозначности смещений при обходе контура трещины

$$\int_{-1_1}^{1_1} g_1^{(0)}(t) dt = 0. \quad (2.36)$$

С помощью комплексных потенциалов (2.23)–(2.25), формул Колосова-Мухелишвили и интегрирования кинетического уравнения изнашивания (1.7) материала втулки в нулевом приближении находится радиальное перемещение $u_1^{(0)}$ контактной поверхности втулки. Аналогично рассматривается задача термоупругости для плунжера. Используя решение задачи термоупругости для плунжера и кинетическое уравнение изнашивания материала плунжера в нулевом приближении, находится радиальное перемещение $u_2^{(0)}$ контактной поверхности плунжера. Найденные величины $u_1^{(0)}$ и $u_2^{(0)}$ подставляются в основное контактное уравнение (1.3) в нулевом приближении. Для алгебраизации основного контактного уравнения в нулевом приближении искомые функции контактного давления ищутся в виде разложений

$$p^{(0)}(q, t) = p_0^0(q) + tp_1^0(q) + \dots,$$

$$p_0^0(q) = a_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^0 \cos kq + b_k^0 \sin kq); \quad (2.37)$$

$$p_1^0(q) = a_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1 \cos kq + b_k^1 \sin kq);$$

.....

Подставляя соотношение (2.37) в основное контактное уравнение в нулевом приближении, находим функциональные уравнения для последовательного определения $p_0^0(q)$, $p_1^0(q)$ и т. д.

Для построения алгебраической системы для нахождения искоемых коэффициентов a_k, b_k приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях.

В результате получаем бесконечную алгебраическую систему относительно a_k^0 ($k = 0, 1, 2, \dots$), b_k^0 ($k = 1, 2, \dots$) и a_k^1, b_k^1 и т. д.

Из-за неизвестных величин q_1^0 и q_2^0 система уравнений оказывается нелинейной.

Сингулярное интегральное уравнение (2.35) при условии (2.36) с помощью процедуры алгебраизации (см. прил. в [4]) сводится к системе M алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^{(0)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$)

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{1}_1 \left[g_1^{(0)}(t_m) R_{11}(\mathbf{1}_1 t_m, \mathbf{1}_1 x_r) + \overline{g_1^{(0)}(t_m)} S_{11}(\mathbf{1}_1 t_m, \mathbf{1}_1 x_r) \right] = f^0(x_r), \quad (2.38)$$

$$\sum_{m=1}^M g_1^{(0)}(t_m) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1),$$

где $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} p$ ($m = 1, 2, \dots, M$),

$$x_r = \cos \frac{pr}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Если в (2.38) перейти к комплексно сопряженным величинам, получим еще M алгебраических уравнений. Полученные системы уравнений относительно $a_k, b_k, d_k, c_k, a_k, b_k, g_1^{(0)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) позволяют при заданном натяге $g^{(0)}(q)$ найти контактное давление, напряженно-деформированное состояние составного цилиндра контактной пары при наличии трещины во втулке, распределение температуры и абразивный износ деталей контактной пары.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности концов трещины в нулевом приближении имеем

$$K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)} = \sqrt{p\mathbf{1}_1} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{(0)}(t_m) ctg \frac{2m-1}{4M} p$$

у правой вершины, (2.39)

$$K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)} = \sqrt{p\mathbf{1}_1} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{(0)}(t_m) tg \frac{2m-1}{4M} p$$

у левой вершины трещины.

Численный расчет выполнялся методом последовательных приближений [4].

После нахождения нулевого приближения переходим к отысканию решения в первом приближении.

На основе полученного решения с помощью функций (2.23) и формул

$$N = \overline{N}_1 + \overline{N}_2, \quad T = \overline{T}_1 + \overline{T}_2,$$

$$\overline{N}_1 = -H(q) \frac{\partial \overline{S}_r^{b(0)}}{\partial r} + 2\overline{T}_{rq}^{b(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(q)}{dq}; \quad \overline{T}_1 = (\overline{S}_r^{b(0)} - i\overline{T}_{rq}^{b(0)}) \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(q)}{dq} - H(q) \frac{\partial \overline{T}_{rq}^{b(0)}}{\partial r},$$

$$\overline{N}_2 - i\overline{T}_2 = -2ie^{iq} \left[\overline{T}_0 \Phi_b^{(0)}(t_0) + \Psi_b^{(0)}(t_0) \right] \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(q)}{dq} - H(q) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \Phi_b^{(0)}(t_0) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t_0)} - e^{2iq} \left[\overline{T}_0 \Phi_b^{(0)}(t_0) + \Psi_b^{(0)}(t_0) \right] \right\}$$

находим функции N и T при $r = R_0$.

Термоупругие потенциалы перемещений в первом приближении определяются решением дифференциального уравнения (2.14). Это решение имеет вид аналогичный (2.15) с очевидными изменениями. Соответствующие этим термоупругим потенциалам

напряжения и перемещения $\bar{S}_r^{b(1)}$, $\bar{S}_q^{b(1)}$, $\bar{t}_{rq}^{b(1)}$, $\bar{u}_r^{b(1)}$, $\bar{u}_q^{b(1)}$ для втулки и $\bar{S}_r^{0(1)}$, $\bar{S}_q^{0(1)}$, $\bar{t}_{rq}^{0(1)}$, $\bar{u}_r^{0(1)}$, $\bar{u}_q^{0(1)}$ для подкрепляющего цилиндра определяются по известным формулам [7].

Найденные компоненты напряжений и перемещений не удовлетворяют граничным условиям (2.7)–(2.10) задачи в первом приближении. Следовательно, необходимо отыскать второе напряженно-деформированное состояние для составного цилиндра.

Краевые условия для отыскания второго напряженно-деформированного состояния примут вид

$$\begin{aligned} \bar{S}_r^{b(0)} &= N - p^{(1)}(q) - \bar{S}_r^{b(1)}; \\ \bar{t}_{rq}^{b(1)} &= T - fp^{(1)}(q) - \bar{t}_{rq}^{b(1)} \quad \text{при } r = R_0 \text{ на площадке контакта}; \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_r^{b(1)} &= N - \bar{S}_r^{b(1)}; \quad \bar{t}_{rq}^{b(1)} = T - \bar{t}_{rq}^{b(1)} \quad \text{вне площадки контакта}; \\ \bar{S}_r^{b(1)} - i\bar{t}_{rq}^{b(1)} &= \bar{S}_r^{0(1)} - i\bar{t}_{rq}^{0(1)} + (\bar{S}_r^{0(0)} - i\bar{t}_{rq}^{0(0)}) - (\bar{S}_r^{b(1)} - i\bar{t}_{rq}^{b(1)}) \quad \text{при } r = R; \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^{b(1)} - i\bar{u}_q^{b(1)} &= \bar{u}_r^{0(1)} - i\bar{u}_q^{0(1)} + (\bar{u}_r^{0(1)} - i\bar{u}_q^{0(1)}) - (\bar{u}_r^{b(1)} - i\bar{u}_q^{b(1)}) + g^{(1)}(q); \\ \bar{u}_r^{0(1)} &= -\bar{u}_{rq}^{0(1)}; \quad \bar{u}_q^{0(1)} = -\bar{u}_{rq}^{0(1)} \quad \text{при } r = R_1; \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\bar{S}_{y_1}^{b(1)} = -\bar{S}_{y_1}^{b(1)}; \quad \bar{t}_{x_1y_1}^{b(1)} = -\bar{t}_{x_1y_1}^{b(1)} \quad \text{на берегах трещины.} \quad (2.44)$$

Граничные условия (2.41)–(2.44) можно записать в виде краевой задачи для отыскания двух пар комплексных потенциалов $\Phi_b^{(1)}(z)$, $\Psi_b^{(1)}(z)$ и $\Phi^{(1)}(z)$, $\Psi^{(1)}(z)$. Комплексные потенциалы ищем в виде аналогичном (2.23) – (2.26) с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения задачи для составного цилиндра такой же, как в нулевом приближении. Удовлетворяя краевым условиям на круговых границах получаем систему уравнений для определения коэффициентов a_k^1 , b_k^1 , d_k^1 , c_k^1 . В правые части формул для a_k^1 , b_k^1 , d_k^1 , c_k^1 входят коэффициенты разложений функции натяга $g^{(1)}(q)$ и контактного давления $p^{(1)}(q)$, а также интегралы от искомой функции $g_1^{(1)}(t)$.

Удовлетворяя комплексными потенциалами краевому условию (2.44) на берегах трещины, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение типа (2.35) относительно $g_1^{(1)}(t)$.

Как и в нулевом приближении, полученное комплексное интегральное уравнение относительно $g_1^{(1)}(t)$, $\overline{g_1^{(1)}(t)}$ при дополнительном условии типа (2.36) с помощью процедуры алгебраизации сводится к системе M алгебраических уравнений для определения неизвестных значений $g_1^{(1)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$).

С помощью комплексных потенциалов первого приближения, формул Колосова–Мухелишвили и интегрирования кинетического уравнения изнашивания (1.7) материала втулки в первом приближении находится радиальное перемещение $u_1^{(1)}$ контактной поверхности втулки. Аналогично рассматривается задача термоупругости в первом приближении для плунжера. Используя решение задачи термоупругости для плунжера и кинетическое уравнение изнашивания материала плунжера в первом приближении, находится радиальное перемещение $u_2^{(1)}$ контактной поверхности плунжера. Затем найденные величины $u_1^{(1)}$ и $u_2^{(1)}$ подставляются в основное контактное уравнение в первом приближении. Для алгебраизации основного уравнения в первом приближении искомые функции контактного давления ищутся в виде разложений

$$\begin{aligned}
p^{(1)}(q, t) &= p_0^1(q) + tp_1^1(q) + \dots, \\
p_0^1(q) &= a_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k,0}^1 \cos kq + b_{k,0}^1 \sin kq); \\
p_1^1(q) &= a_{0,1}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k,1}^1 \cos kq + b_{k,1}^1 \sin kq); \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Подставляя соотношение (2.45) в основное контактное уравнение в первом приближении, находим функциональные уравнения для последовательного определения $p_0^1(q)$, $p_1^1(q)$ и т. д. Повторяя процедуру построения алгебраической системы для определения искомых коэффициентов a_k^1 , b_k^1 получаем бесконечную алгебраическую систему относительно $a_{k,0}^1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $b_{k,0}^1$ ($k = 1, 2, \dots$) и $a_{k,1}^1$, $b_{k,1}^1$ и т. д.

Из-за неизвестных величин q_1^1 и q_2^1 система уравнений оказывается нелинейной.

Полученные системы уравнений относительно $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$, $c_k^{(1)}$, $a_{k,0}^1$, $b_{k,0}^1$, $a_{k,1}^1$, $b_{k,1}^1$, $g_1^{(1)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) позволяют при заданном натяге $g^{(1)}(q)$ и известных функциях $H(q)$, $H_1(q)$ найти контактное давление, напряженно-деформированное состояние составного цилиндра контактной пары при наличии трещины во втулке (коэффициенты интенсивности напряжений), распределение температуры и износ деталей контактной пары.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в первом приближении имеем

$$K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)} = \sqrt{pI_1} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{(1)}(t_m) ctg \frac{2m-1}{4M} p$$

у правой вершины, (2.46)

$$K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)} = \sqrt{pI_1} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{(1)}(t_m) tg \frac{2m-1}{4M} p$$

у левой вершины трещины.

Расчеты проводились применительно к втулке составного цилиндра глубинного скважинного штангового насоса исполнения НН2С-57-30-12 для различных скоростей движения плунжера.

При расчетах изменялись параметры шероховатости внутренней поверхности втулки, значения коэффициентов трения фрикционной пары, скорость движения плунжера, а также длины трещин. Функция $H(q)$, описывающая шероховатость внутренней поверхности втулки рассматривалась как детерминированная совокупность неровностей профиля контура, а также как стационарная случайная функция. В этом случае случайная функция $H(q)$ задавалась каноническим разложением (1.1), где a_k^0 , b_k^0 – некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $D(a_k^0) = D(b_k^0) = D_k$.

Для рассматриваемого внутреннего профиля втулки нефтяного насоса была построена стандартными методами нормированная корреляционная функция, а по ее аналитической аппроксимации определены дисперсии D_k коэффициентов a_k^0 , b_k^0 .

Аналогично канонические разложения и нормированная корреляционная функция строилась для поверхности плунжера.

Введя следующие числа

$$q_0 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1), q_+ = \frac{1}{2}(q_2 + q_1)$$

и сделав замену переменной $q = q' + q_+$, перейдем к симметричному отрезку $(-q_0, q_0)$ для контактной площадки.

Результаты расчетов контактного давления в зависимости от значения полярного угла q' представлены в виде графиков при различных скоростях движения плунжера и характера распределения шероховатости контактной поверхности (рис. 2).

Расчеты показывают, что при действии одних и тех же прижимающих сил и значений свободных параметров деталей контактной пары контактное давление зависит от класса шероховатости поверхности втулки и плунжера. Так, например, более высокому классу шероховатости соответствует меньшее сближение плунжера и втулки за счет местного сжатия.

Увеличение шероховатости приводит к сглаживанию графика распределения контактного давления. Наибольшие значения контактного давления, как правило, находятся в средней части контактной поверхности в зависимости от угла охвата, коэффициента трения и параметров шероховатости поверхности. Трение сопровождается смещением графика распределения контактного давления в сторону, противоположную действию момента.

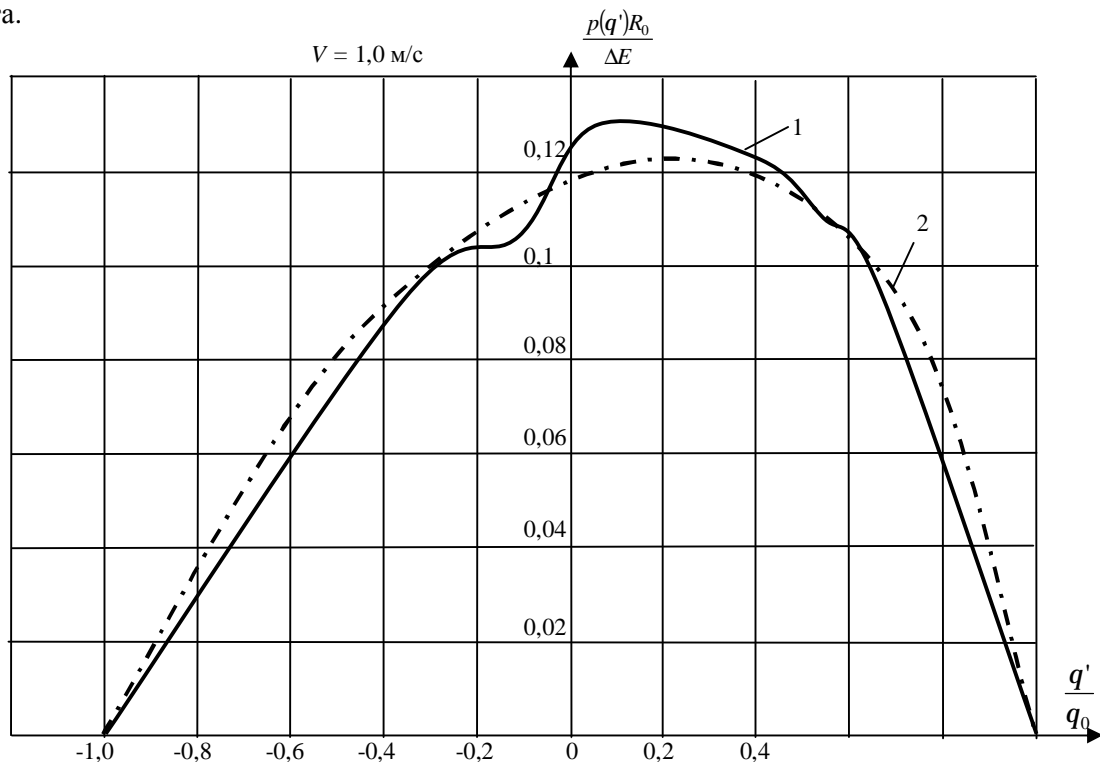


Рис. 2. Зависимости контактного давления от полярного угла:
1 — для шероховатого контура поверхности трения; 2 — для гладкого контура

Зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от относительной длины трещины $I = \mathbf{1}/(R - R_0)$ представлены на рис. 3–6 для различных скоростей движения

плунжера и характера шероховатости внутренней поверхности втулки составного цилиндра контактной пары. Здесь p_0 – силовой фактор.

Расчеты показывают, что подкрепляющий цилиндр существенно снижает коэффициент интенсивности напряжений, или другими словами, позволяет втулке выдержать гораздо большие давления по сравнению со случаем отсутствия подкрепления втулки с натягом. Увеличение коэффициента трения приводит к повышению в основном K_{II} . Класс шероховатости существенно влияет на контактное давление, а следовательно – на коэффициент интенсивности напряжений.

Если же трещина одним концом выходит на внутреннюю поверхность втулки, то равенство (2.36) заменяется дополнительным условием, выражающим конечность напряжений у края трещины.

3. Случай произвольного числа трещин. Пусть теперь во втулке составного цилиндра вблизи поверхности трения имеется N_0 прямолинейных трещин длиной $2\mathbf{l}_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) (рис. 1).

Решается задача (износоконтактная задача и задача механики разрушения для составного цилиндра) для этого случая аналогично одной трещине. Комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ и $\Phi_3(z)$, $\Psi_3(z)$ обобщаются на случай произвольного числа трещин. Удовлетворяя краевым условиям на берегах трещин, получим в каждом приближении систему N_0 сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$).

К этой системе сингулярных интегральных уравнений для внутренних трещин следует добавить дополнительные условия

$$\int_{-1_k}^{1_k} g_k(t) dt = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N_0) \quad g_k(t) = g_k^{(0)}(t) + e g_k^{(1)}(t). \quad (3.1)$$

Система сингулярных интегральных уравнений при отмеченных выше условиях (3.1) в каждом приближении с помощью процедуры алгебраизации сводится к системе $N_0 \times M$ алгебраических уравнений для определения $N_0 \times M$ неизвестных $g_n(t_m)$ ($k = 1, 2, \dots, N_0; m = 1, 2, \dots, M$):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \mathbf{l}_k \left[g_k(t_m) R_{nk}(\mathbf{l}_k t_m, \mathbf{l}_n x_r) + \overline{g_k(t_m)} S_{nk}(\mathbf{l}_k t_m, \mathbf{l}_n x_r) \right] = f_n(x_r), \quad (3.2)$$

$$\sum_{m=1}^M g_n(t_m) = 0; \quad (n = 1, 2, \dots, N_0; \quad r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Построение разрешающих уравнений контактной задачи осуществляется в каждом приближении аналогично случаю одной трещины.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности концов трещин в каждом приближении имеем

$$K_{In}^{(i)} - iK_{IIIn}^{(i)} = \sqrt{p\mathbf{l}_n} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_n^{(i)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} p \quad (3.3)$$

у правой вершины, $(n = 1, 2, \dots, N_0; \quad i = 0, 1)$

$$K_{In}^{(i)} - iK_{IIIn}^{(i)} = \sqrt{p\mathbf{l}_n} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_n^{(i)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} p \quad (3.4)$$

у левой вершины трещины.

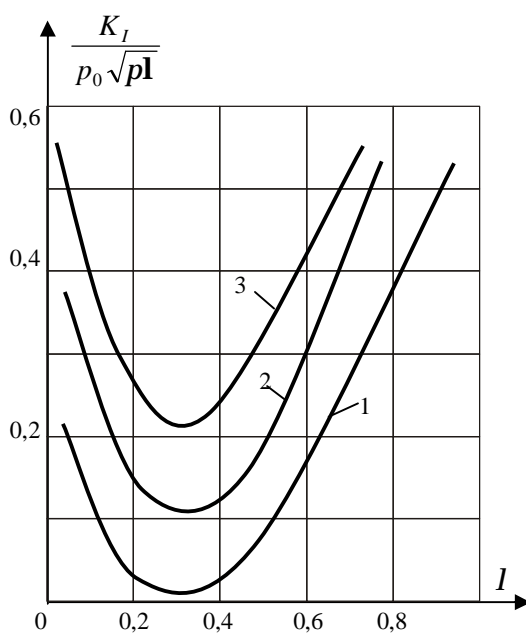


Рис. 3. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений K_I от длины трещины для гладкого контура:
1- $V_1=0,2$ м/с; 2- $V_1=0,4$ м/с; 3- $V_1=1,0$ м/с

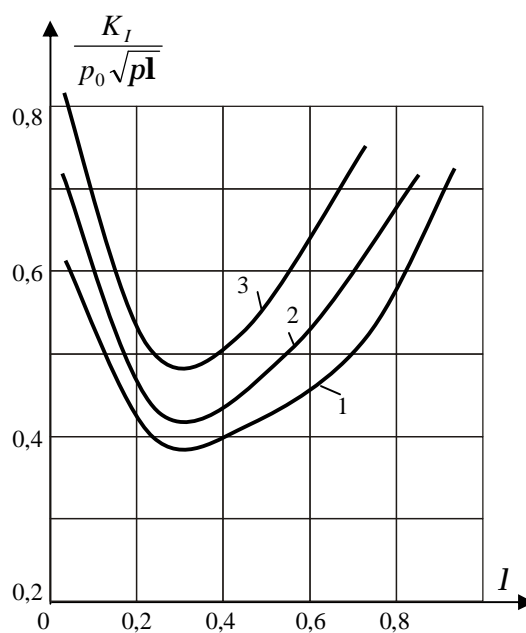


Рис. 4. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений K_I от длины трещины для шероховатого контура:
1- $V_1=0,2$ м/с; 2- $V_1=0,4$ м/с; 3- $V_1=1,0$ м/с

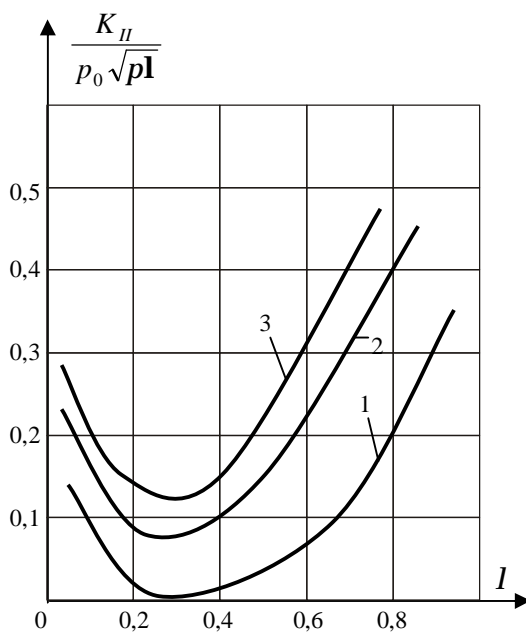


Рис. 5. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений K_{II} от длины трещины для гладкого контура:
1- $V_1=0,2$ м/с; 2- $V_1=0,4$ м/с; 3- $V_1=1,0$ м/с

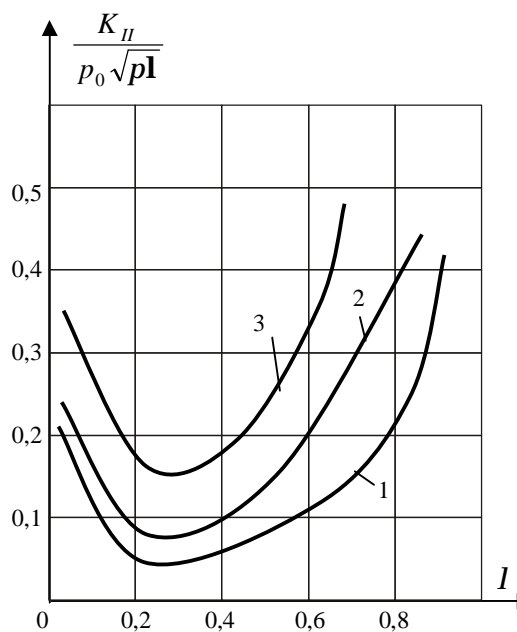


Рис. 6. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений K_{II} от длины трещины для шероховатого контура:
1- $V_1=0,2$ м/с; 2- $V_1=0,4$ м/с; 3- $V_1=1,0$ м/с

Таким образом, полученные в работе основные разрешающие уравнения позволяют при заданном натяге и профиле поверхности трения численными расчетами, путем определения коэффициентов интенсивности напряжений, прогнозировать рост имеющихся трещин во втулке составного цилиндра фрикционной пары; установить допустимый уровень дефектности и максимальные значения рабочих нагрузок, обеспечивающие достаточный запас надежности.

г. Баку

Поступила: 25 сентября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин, Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / *Л. А. Галин.* – М. : Наука, 1980. – 303 с.
2. *Горячева, И. Г.* Контактные задачи в трибологии / *И. Г. Горячева, М. Н. Добычин.* – М. : Машиностроение, 1988. – 256 с.
3. *Горячева, И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия / *И. Г. Горячева.* – М. : Наука, 2001. – 478 с.
4. *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / *В. М. Мирсалимов.* – М. : Наука, 1987. – 256 с.
5. *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / *Н. И. Мухелишвили.* – М. : Наука, 1974. – 640 с.
6. *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / *В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьши.* – Киев : Наук. Думка, 1976. – 443 с.
7. *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / *Г. Паркус.* – М. : Физматлит, 1963. – 252 с.
8. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / *Г. П. Черепанов.* – М. : Наука, 1974. – 640 с.

ОБ ОБЩИХ ПРЕДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ ОТРЫВЕ
ДЛЯ СЖИМАЕМЫХ, АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева)

В работе рассматриваются общие предельные условия при отрыве для сжимаемых, анизотропных сред. Рассмотрены два случая отрыва. Установлен тип уравнений, определены характеристические многообразия.

1. Условие отрыва для изотропного материала запишем в виде [1]

$$s_1 = s_2 = p, \quad s_3 \leq p, \quad p = \text{const.} \quad (1.1)$$

Рассмотрим соотношения связи главных компонент напряжений s_i и компонент напряжений s_{ij} в декартовой системе координат xuz

$$s_x = s_1 l_1^2 + s_2 m_1^2 + s_3 n_1^2, \quad t_{xy} = s_1 l_1 l_2 + s_2 m_1 m_2 + s_3 n_1 n_2, \quad (1.2)$$

($xuz, 123, lmn$),

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы, определяющие ориентацию компонент главных напряжений в декартовой системе координат xuz , скобки означают, что недостающие выражения получаются круговой перестановкой индексов и косинусов.

Для направляющих косинусов имеют место соотношения ортогональности

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \quad (123, lmn). \quad (1.3)$$

Из (1.1), (1.2), (1.3) получим

$$\begin{aligned} s_x &= p + 3(s - p)n_1^2, & t_{xy} &= 3(s - p)n_1 n_2, \\ s_y &= p + 3(s - p)n_2^2, & t_{yz} &= 3(s - p)n_2 n_3, \\ s_z &= p + 3(s - p)n_3^2, & t_{xz} &= 3(s - p)n_1 n_3, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$s = \frac{1}{3}(s_x + s_y + s_z).$$

В случае анизотропного материала положим

$$p = p(\sigma, n_1, n_2, n_3). \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Из (1.4), (1.5), (1.6) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 3 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma}\right) n_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 3 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma}\right) n_1 n_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 3 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma}\right) n_1 n_3 \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \\
&+ (1 - 3n_1^2) \frac{\partial p}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial x} - 3n_1 n_2 \frac{\partial p}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial y} - 3n_1 n_3 \frac{\partial p}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial z} + \\
&+ 3(\sigma - p) \left(2n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial y} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial z}\right) + (1 - 3n_1^2) \frac{\partial p}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial x} - \\
&- 3n_1 n_2 \frac{\partial p}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial y} - 3n_1 n_3 \frac{\partial p}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial z} + 3(\sigma - p) n_1 \frac{\partial n_2}{\partial y} + \\
&+ (1 - 3n_1^2) \frac{\partial p}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial x} - 3n_1 n_2 \frac{\partial p}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial y} - 3n_1 n_3 \frac{\partial p}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial z} + \\
&+ 3(\sigma - p) n_1 \frac{\partial n_3}{\partial z} = 0, \quad (xyz, 123) \\
&n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Обозначим уравнение характеристической поверхности

$$\Psi(x, y, z) = 0, \quad \Psi_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Psi_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \Psi_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{1.8}$$

Характеристический определитель системы уравнений (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\Theta \left[(\sigma - p) \left[3 \left(1 - \frac{\partial p}{\partial \sigma}\right) \Theta^2 - \frac{\partial p}{\partial \sigma} (\Psi_x^2 + \Psi_y^2 + \Psi_z^2) \right] + \right. \\
&\left. + \Theta \left[\frac{\partial p}{\partial n_1} \Psi_x + \frac{\partial p}{\partial n_2} \Psi_y + \frac{\partial p}{\partial n_3} \Psi_z - \Theta \left(\frac{\partial p}{\partial n_1} n_1 + \frac{\partial p}{\partial n_2} n_2 + \frac{\partial p}{\partial n_3} n_3 \right) \right] \right] = 0,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\Theta = \Psi_x n_1 + \Psi_y n_2 + \Psi_z n_3$.

Введем вектора

$$\Psi = \Psi_x \mathbf{i} + \Psi_y \mathbf{j} + \Psi_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial p}{\partial n_1} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial n_2} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial n_3} \mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные орты вдоль осей x, y, z .

Тогда

$$\begin{aligned}
\Theta &= |\Psi| \cdot |\mathbf{n}| \cos q, \quad \frac{\partial p}{\partial n_1} \Psi_x + \frac{\partial p}{\partial n_2} \Psi_y + \frac{\partial p}{\partial n_3} \Psi_z = |\mathbf{P}| \cdot |\Psi| \cos q_1, \\
\frac{\partial p}{\partial n_1} n_1 + \frac{\partial p}{\partial n_2} n_2 + \frac{\partial p}{\partial n_3} n_3 &= |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{n}| \cos a, \quad |\mathbf{n}| = 1.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Уравнение (1.9) с учетом (1.11) примет вид

$$\begin{aligned} & \cos q \left[(p-s) \left(3 \cos^2 q \left(1 - \frac{\partial p}{\partial s} \right) - \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \right. \\ & \left. + |\mathbf{P}| \cos q (\cos q_1 - \cos q \cos a) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

На рис. 1 показаны вектора $\Psi, \mathbf{P}, \mathbf{n}$ и углы между ними.

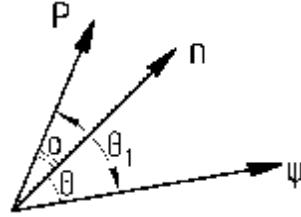


Рис. 1.

В частных случаях из (1.12) следует:

1) $p = const, |\mathbf{P}| = 0, \cos q = 0;$

2) $p = p(\sigma), |\mathbf{P}| = 0, \cos q = 0, \cos q = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial s}}{1 - \frac{\partial p}{\partial s}}};$

3) $p = p(n_1, n_2, n_3), \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \cos q = 0, \cos q = \frac{|\mathbf{P}| \cos q_1}{|\mathbf{P}| \cos a - 3(s-p)}.$

2. Условие отрыва для изотропного материала в виде

$$s_1 = s_2, s_3 = p, p = const, \quad (2.1)$$

рассмотрено в [2].

Ниже рассматривается условие отрыва

$$s_1 = s_2, s_3 = p, p = p(s, n_1, n_2, n_3). \quad (2.2)$$

Из (1.2), (1.3), (2.2) получим

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{3s-p}{2} + \frac{3(p-s)}{2} n_1^2, & t_{xy} &= \frac{3(p-s)}{2} n_1 n_2, \\ s_y &= \frac{3s-p}{2} + \frac{3(p-s)}{2} n_2^2, & t_{yz} &= \frac{3(p-s)}{2} n_2 n_3, \\ s_z &= \frac{3s-p}{2} + \frac{3(p-s)}{2} n_3^2, & t_{xz} &= \frac{3(p-s)}{2} n_1 n_3, \\ s &= \frac{1}{3} (s_x + s_y + s_z). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (1.6), (2.3) следует

$$\begin{aligned}
& \left(3 - \frac{\partial p}{\partial s}\right) \frac{\partial s}{\partial x} + 3 \left(\frac{\partial p}{\partial s} - 1\right) n_1^2 \frac{\partial s}{\partial x} + 3 \left(\frac{\partial p}{\partial s} - 1\right) n_1 n_2 \frac{\partial s}{\partial y} + 3 \left(\frac{\partial p}{\partial s} - 1\right) n_1 n_3 \frac{\partial s}{\partial z} + \\
& + (3n_1^2 - 1) \frac{\partial p}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial x} + 3n_1 n_2 \frac{\partial p}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial y} + 3n_1 n_3 \frac{\partial p}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial z} + 3(p-s) \left(2n_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} + \right. \\
& + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial y} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial z} \left. \right) + (3n_1^2 - 1) \frac{\partial p}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial x} + 3n_1 n_2 \frac{\partial p}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial y} + 3n_1 n_3 \frac{\partial p}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial z} + \\
& + 3(p-s) n_1 \frac{\partial n_2}{\partial y} + (3n_1^2 - 1) \frac{\partial p}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial x} + 3n_1 n_2 \frac{\partial p}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial y} + 3n_1 n_3 \frac{\partial p}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial z} + \\
& + 3(p-s) n_1 \frac{\partial n_3}{\partial z} = 0, \quad (xyz, 123), \\
& n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Характеристический определитель системы уравнений (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned}
& \Theta \left[(s-p) \left[3 \left(\frac{\partial p}{\partial s} - 1\right) \Theta^2 + \left(3 - \frac{\partial p}{\partial s}\right) (\Psi_x^2 + \Psi_y^2 + \Psi_z^2) \right] + \right. \\
& \left. + 2\Theta \left[\Theta \left(\frac{\partial p}{\partial n_1} n_1 + \frac{\partial p}{\partial n_2} n_2 + \frac{\partial p}{\partial n_3} n_3 \right) - \frac{\partial p}{\partial n_1} \Psi_x + \frac{\partial p}{\partial n_2} \Psi_y + \frac{\partial p}{\partial n_3} \Psi_z \right] \right] = 0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\Theta = \Psi_x n_1 + \Psi_y n_2 + \Psi_z n_3$.

Уравнение (2.5) с учетом (2.11) примет вид

$$\begin{aligned}
& \cos q \left[(p-s) \left(3 \cos^2 q \left(\frac{\partial p}{\partial s} - 1\right) + \left(3 - \frac{\partial p}{\partial s}\right) \right) + \right. \\
& \left. + 2|\mathbf{P}| \cos q (\cos q \cos a - \cos q_1) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Отметим, что при $p = \text{const}$ из (2.6) следует, что $\cos q = 0$, $\cos q = \pm 1$.

г. Чебоксары

Поступила: 15 апреля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232с.
2. Ивлев, Д. Д. О предельном состоянии при отрыве / Д. Д. Ивлев, Н. М. Матченко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. М. : ФИЗМАТЛИТ. – 2006. – С. 288–290.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТИПА ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Сибирский государственный аэрокосмический университет)

Рассматриваются системы уравнения пластичности, которые содержат конечные соотношения – законы пластичности. Показано, как можно определить тип этих систем уравнений без преобразования их к квазилинейному виду.

Двумерные уравнения пластичности в стационарном случае кроме дифференциальных уравнений равновесия содержат конечные соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений (условия пластичности). Поэтому для определения типа уравнений приходится делать замены переменных, которые превращают условие пластичности в тождество. Но такой подход не всегда удобен, а иногда и просто невозможен без дополнительных предположений.

В работе показано, как можно определить тип уравнения без каких – либо преобразований исходных уравнений.

1. Система уравнений, описывающая напряженное состояние, может быть записана в виде [1]:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$f(s_x, s_y, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь s_x, s_y, t – компоненты симметричного тензора напряжений, (2) – закон пластичности общего вида, а f – достаточно гладкая функция.

Для уравнений (1) – (2) поставим задачу Коши.

Задача Коши. Задача Коши (задача о начальных значениях) является важнейшей в теории пластичности. Пусть L – некоторая кривая в плоскости xOy . На этой кривой заданы значения компонент тензора напряжений s_x, s_y, t , которые являются непрерывными функциями вместе со своими первыми и вторыми производными. Требуется восстановить решение уравнений (1) – (2), принимающие на кривой L заданные значения.

2. Определим необходимые условия на кривую L , которым она должна удовлетворять, чтобы задача Коши для уравнений (1) – (2) была разрешима однозначно.

Для этого продифференцируем по x и по y уравнение (2). В результате получим

$$f_1 \frac{\partial s_x}{\partial x} + f_2 \frac{\partial s_y}{\partial x} + f_3 \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$f_1 \frac{\partial s_x}{\partial y} + f_2 \frac{\partial s_y}{\partial y} + f_3 \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где $f_1 = \frac{\partial f}{\partial s_x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial s_y}$, $f_3 = \frac{\partial f}{\partial t}$.

Вычислим дифференциальные формы Картана от компонент тензора напряжений. Получим

$$ds_x - \frac{\partial s_x}{\partial x} dx - \frac{\partial s_x}{\partial y} dy = 0 \quad (5)$$

$$ds_y - \frac{\partial s_y}{\partial x} dx - \frac{\partial s_y}{\partial y} dy = 0 \quad (6)$$

$$dt - \frac{\partial t}{\partial x} dx - \frac{\partial t}{\partial y} dy = 0. \quad (7)$$

Формы (5) – (7) являются линейно зависимыми в силу соотношения

$$f_1 ds_x + f_2 ds_y + f_3 dt = 0,$$

которое следует из (2).

Поэтому для разрешимости задачи Коши, поставленной вдоль кривой L, необходимо, чтобы определитель при переменных $\frac{\partial s_x}{\partial x}, \frac{\partial s_y}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial s_x}{\partial y}, \frac{\partial s_y}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial y}$ в шести уравнениях (1), (3),(4), (5),(6) был отличен от нуля. Если же определитель вдоль кривой равен нулю, то эта кривая является характеристической. Найдем характеристики системы (1) – (2). Для этого выпишем искомый определитель и приравняем его к нулю. Имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 \\ dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Из формулы (9) без труда получаем уравнения характеристических кривых. Они определяются из следующих выражений

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = \frac{-f_3 \pm \sqrt{f_3^2 - 4f_1 f_2}}{2f_2}. \quad (10)$$

Вычислим характеристики для условий Мизеса –Треска

$$(s_x - s_y)^2 + 4t^2 = 4k_s^2, \quad (11)$$

где k_s – постоянная пластичности, условия Мизеса для плоского напряженного состояния

$$s_x^2 + s_y^2 - s_x s_y + 3t^2 = 3k_s^2. \quad (12)$$

Условия Д. Д. Ивлева для анизотропной плоской среды [1]

$$A(s_x - s_y)^2 + 4Bt^2 + 2C(s_x - s_y)t = 2, \quad (13)$$

где A, B, C – некоторые постоянные.

Для условия (11) получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{2t \pm 2k_s}{s_x - s_y}. \quad (14)$$

Если в (11) сделать стандартную замену М. Леви, то получим общепринятые характеристики

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = tgq, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -ctgq.$$

Для условия (12) получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-3t \pm \sqrt{6k_s^2 + 3t^2 - 3s_x s_y}}{2s_y - s_x}. \quad (15)$$

Выражение (15) после замены, приведенной, например, в [1], сводится к известным характеристикам.

В заключение этого пункта приведем вид характеристик для условия (13), которое имеет вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-8Bt - 2C(s_x - s_y) \pm \pm \sqrt{(4Bt + 2C(s_x - s_y))^2 + 16(A(s_x - s_y + 2Ct))^2}}{2s_y - s_x}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что система уравнений с таким условием пластичности является гиперболической.

Уравнения характеристик в виде (14) – (16) выписаны, насколько известно автору, впервые и позволяют взглянуть на условие гиперболичности несколько под другим углом зрения.

3. В заключение статьи найдем соотношения на характеристиках. Для системы (1)-(2) они определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 \\ ds_x & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ds_y & 0 & dx & dy & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Раскрывая определитель (17), получаем:

$$ds_x(f_1 f_3 \pm f_1 \sqrt{f_3^2 - 4f_1 f_2}) + ds_y(f_2 f_3 \pm f_2 \sqrt{f_3^2 - 4f_1 f_2}) = 0. \quad (18)$$

В частности, для условия пластичности Мизеса–Треска условие (18) принимает вид

$$ds_x(t \pm k_s) - ds_y(-t \pm k_s) = 0, \quad (19)$$

которое заменой М. Леви превращается в условие

$$ds \mathbf{m} 2k_s dq = 0.$$

Аналогичным образом выписываются соотношения на характеристиках и для условий пластичности (12) – (13).

г. Красноярск

Поступила: 28 декабря 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 702 с.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГОРНЫХ
ВЫРАБОТОК С НЕКРУГОВЫМИ МНОГОСЛОЙНЫМИ КРЕПЯМИ В
МАССИВАХ СО СЛОЖНЫМИ РЕОЛОГИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

(Воронежский государственный университет)

Известно [2], что исследование задач горной механики с позиций устойчивости состояния равновесия горного массива возле подкрепленных выработок связано [7] с определением напряженно-деформированных состояний в приконтурной зоне массива горных пород и крепи. В монографии [7] получены решения для полей напряжений и перемещений в упруговязкопластическом массиве горных пород около неподкрепленных выработок некруговой формы поперечного сечения (эллиптической и правильной многоугольной). В настоящей работе в рамках метода малого параметра определяется напряженно-деформированное состояние горного массива возле вертикальной выработки, подкрепленной многослойной крепью в случаях, когда поперечное сечение слоя крепи имеет форму эллиптического кольца или правильного многоугольного кольца. При этом в зонах пластического деформирования горного массива и крепи принята модель упруговязкопластической среды [5].

При определении напряженно-деформированного состояния (далее НДС) все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра d , характеризующего отклонение от исходного невозмущенного состояния, то есть отклонение окружности радиуса R_i от эллипса [3]

$$r_{\varepsilon i} = R_i(1 + d \cdot d \cos 2q - \frac{3}{4} d^2 d^2 (1 - \cos 4q) + o(d^3)), \quad (1.1)$$

или правильного многоугольника радиуса

$$r_{mi} = R_i(1 + d \cdot d \cos mq - \frac{2m-1}{4} d^2 d^2 \cdot [1 - \cos 2mq] + o(d^3)). \quad (1.2)$$

Здесь $d d$ – параметр, определяющийся полуосями эллипса: $a=R_i(1+\delta d)$, $b=R_i(1-\delta d)$ для (1.1), или параметрами гипоциклоиды в случае (1.2), $i=0,1,2,\dots,N$, $0 \leq q \leq 2\pi$. В качестве нулевого приближения будем выбирать решение осесимметричной задачи о распределении полей напряжений и перемещений в массиве около подкрепленной круговой вертикальной выработки и в многослойной круговой крепи.

1. Рассмотрим горный массив с круговой вертикальной выработкой радиуса R_N , подкрепленной круговой N -слойной крепью. К внутреннему контуру первого слоя кре-

пи радиуса R_0 приложена равномерно распределенная нагрузка q_0 . На линиях сопряжения слоев крепи и массива возникают сжимающие усилия q_1, q_2, \dots, q_N . На бесконечности напряжения в массиве стремятся к величине gh (g – объемный вес породы, h – глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим. Величины q_i ($i=0,1,2,\dots, N$) и gh таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры слоев крепи и контур выработки. Решение проведем в рамках плоской задачи теории течения, используя цилиндрическую систему координат r, q, z . Материал массива и слоев крепи предполагается различным и моделируется упруго-вязко-пластической средой [5] с трансляционным упрочнением [1, 4].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = \left(S_s^j - c_i e_s^{jP} - h_i e_s^{jP} \right) \left(S_j^s - c_i e_j^{sP} - h_i e_j^{sP} \right) - k_i^2, \quad (1.3)$$

а соотношения ассоциированного закона течения –

$$d e_i^{jP} = d l \frac{\partial F}{\partial S_i^j}. \quad (1.4)$$

Здесь c_i – коэффициент упрочнения; k_i – предел текучести, h_i – коэффициент вязкости; $S_s^j = S_s^j - s d_s^j$ – девиатор тензора напряжений; $S = S_k^k / 3$; d_s^j – символ Кронекера; e_s^j – компоненты тензора деформаций; e_s^j – компоненты тензора скоростей деформаций; $d l$ – скалярный положительный множитель. Индексы s, j принимают значения от 1 до 3.

Индекс i принимает значения 1, 2, ..., N. Его отсутствие у величин s, k, h в (1.3), (1.4) и далее подчеркивает принадлежность этих величин к массиву. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Здесь и далее верхние индексы «р» или «е» обозначают величины, относящиеся к пластической или упругой областям соответственно.

Определение НДС составной горной конструкции в осесимметричном случае сводится к решению двух взаимосвязанных задач о концентрации напряжений. Первая задача сводится к определению НДС в i -ом слое крепи, вторая – к определению НДС в массиве. Граничные условия и условия сопряжения для i -го слоя крепи (R_{i-1} – внутренний радиус i -ого слоя, R_i – внешний радиус, g_i – граница раздела зон упругого и пластического деформирования в i -ом слое) и массива горных пород имеют соответственно вид

$$S_r \Big|_{r=R_{i-1}} = -q_{i-1}, S_r \Big|_{r=R_i} = -q_i$$

$$[S_{ri}] \Big|_{r=g_i} = 0, [S_{qi}] \Big|_{r=g_i} = 0, \quad (i \in [1, N]) \quad (1.5)$$

$$S_r \Big|_{r=R_N} = -q_N, S_r \Big|_{r \rightarrow \infty} = S_q \Big|_{r \rightarrow \infty} = -gh$$

$$[S_r] \Big|_{r=g} = 0, [S_q] \Big|_{r=g} = 0, \quad (1.6)$$

где квадратные скобки обозначают разрыв значений выражения, в данном случае – на границе раздела сред упругого и пластического деформирования.

НДС, соответствующее i -ому слою круговой крепи, определено в виде:

– в пластической области ($R_{i-1} < r < g_i$) распределение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} s_{r_i} &= -q_{i-1} + 4m_i(T_{1i} \ln \frac{r}{R_{i-1}} - \frac{D_i + T_{2i}}{2} (\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_{i-1}^2})), \\ s_{q_i} &= -q_{i-1} + 4m_i(T_{1i} (\ln \frac{r}{R_{i-1}} + 1) + \frac{D_i + T_{2i}}{2} (\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2})), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $T_{1i} = \frac{c_i k_i}{c_i + 2m_i} (1 - e^{-b_i t}) + \frac{2m_i D_{0i}}{(c_i + 2m_i) R_{i-1}^2} e^{-b_i t}$, $T_{2i} = -\frac{2m_i D_i}{c_i + 2m_i}$,

$$b_i = \frac{c_i + 2m_i}{h_i}, \quad c_i = \text{sign}(q_{i-1} - q_i), \quad D_{0i} = \frac{R_i^2 R_{i-1}^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} \frac{q_{i-1} - q_i}{2m_i},$$

$$D_i = \frac{g_i^2}{2m_i} (c_i k_i (1 - e^{-b_i t}) + \frac{R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} (q_{i-1} - q_i) e^{-b_i t}), \quad m_i - \text{модуль}$$

сдвига для i -ого слоя крепи.

– в упругой области ($g_i < r < R_i$) поле напряжений имеет вид

$$s_{r_i} = 2m_i D_i (\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r^2}) - q_i, \quad s_{\theta_i} = 2m_i D_i (\frac{1}{R_i^2} + \frac{1}{r^2}) - q_i. \quad (1.8)$$

Перемещения (u – вдоль радиального направления) и полные деформации в упругой и пластической областях определяются по одним и тем же формулам

$$u_i = \frac{D_i}{r}, \quad e_{r_i} = -e_{\theta_i} = -\frac{D_i}{r^2}. \quad (1.9)$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$e_{r_i}^p = -e_{\theta_i}^p = T_{1i} + \frac{T_{2i}}{r^2}. \quad (1.10)$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы g_i имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{g_i^2}{2m_i} (c_i k_i (1 - e^{-b_i t}) + \frac{R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} (q_{i-1} - q_i) e^{-b_i t}) = \\ &= \frac{2R_{i-1}^2 R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} (\frac{q_{i-1} - q_i}{4m_i} - T_{1i} (\ln \frac{g_i}{R_{i-1}} + \frac{1}{2} (1 - \frac{g_i^2}{R_{i-1}^2}))). \end{aligned} \quad (1.11)$$

НДС горного массива возле круговой выработки определено в виде

– в пластической области ($1 < r < g$) распределение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} s_r^p &= -q_N + 4m(T_1 \ln r - \frac{D + T_2}{2} (\frac{1}{r^2} - 1)), \\ s_\theta^p &= -q_N + 4m(T_1 (\ln r + 1) + \frac{D + T_2}{2} (\frac{1}{r^2} + 1)), \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\text{где } T_1 = \frac{c}{c+2m}(1-e^{-bt}) + \frac{2mD_0}{(c+2m)}e^{-bt}, T_2 = -\frac{2mD}{c+2m}, b = \frac{c+2m}{h},$$

$$c = \text{sign}(q_N - gh), D_0 = \frac{q_N - gh}{2m}, D = \frac{g^2}{2m}(c(1-e^{-bt}) + (q_N - gh)e^{-bt}).$$

– в упругой области ($g < r < \infty$) поле напряжений согласно [6] имеет вид

$$s_r = -\frac{2mD}{r^2} - gh, \quad s_r = \frac{2mD}{r^2} - gh \quad (1.13)$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях определяются по формулам [6]

$$u = \frac{D}{r}, \quad e_r = -e_q = -\frac{D}{r^2} \quad (1.14)$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$e_r^p = -e_\theta^p = T_1 + \frac{T_2}{r^2} \quad (1.15)$$

На упругопластической границе g выполняется следующее соотношение для усилий q_N и gh :

$$\frac{g^2}{2m}(c(1-e^{-bt}) + (q_N - gh)e^{-bt}) = 2\left(\frac{q_N - gh}{4m} - T_1(\ln g + \frac{1}{2}(1-g^2))\right). \quad (1.16)$$

В (1.5) – (1.16) все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу текучести для материала горного массива – k , а имеющие размерность длины – к радиусу выработки R_N .

Полученные решения для массива и крепи принимаем в качестве нулевого приближения для исследуемых далее задач. Ниже всем величинам, относящимся к этому приближению, будем приписывать индекс ⁽⁰⁾ вверху.

2. Рассмотрим задачу об определении напряженно-деформированных состояний горного массива в окрестности подкрепленной выработки эллиптического поперечного сечения и многослойной крепи, состоящей из N слоев, поперечные сечения которых имеют форму эллиптических колец. Решение будем искать для i -ого слоя крепи ($i=1,2,\dots,N$) и приконтурной области массива. Ограничимся случаем первого приближения первой итерации.

Граничные условия на нормальные S_{ni} и касательные s_{ni} напряжения для i -го слоя крепи ($r_{\vartheta(i-1)}$ – внутренний радиус i -ого слоя, $r_{\vartheta i}$ – внешний радиус), следуя работе [3] имеют соответственно вид

$$s_{ni} = \left\{ s_{ri}^{(0)} + d\left(s_{ri}^{(1)} + \frac{ds_{ri}^{(0)}}{dr} r_{\vartheta(i-1)}^{(1)}\right) \right\} \Big|_{r=R_{i-1}} = -q_{i-1}, \quad (2.1)$$

$$s_{ni} = \left\{ t_{rqi}^{(0)} + d\left(t_{rqi}^{(1)} - (s_{qi}^{(0)} - s_{ri}^{(0)}) \frac{dr_{\vartheta(i-1)}^{(1)}}{dq}\right) \right\} \Big|_{r=R_{i-1}} = 0. \quad (2.2)$$

Из (2.1), (2.2) с учетом (1.1), (1.7) находим граничные условия для величин первого порядка

$$s_{r_i}^{(1)} \Big|_{r=R_{i-1}} = -2dA_i \cos 2q, \quad t_{r_{q_i}}^{(1)} \Big|_{r=R_{i-1}} = -4dA_i \sin 2q, \quad (2.3)$$

где
$$A_i = 2m_i \left(T_{1i} + \frac{D_i + T_{2i}}{R_{i-1}^2} \right).$$

Тогда напряжения в пластической зоне с учетом (2.3) будут иметь вид

$$\begin{aligned} s_{r_i}^{(1)} &= \frac{4R_{i-1}A_id}{r} \sin\left(b_i - \frac{p}{6}\right) \cos 2q - \frac{B_i}{2} \left(g_i^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_{i-1}^2} \right) + 2 \ln \frac{r}{R_{i-1}} \right), \\ s_{q_i}^{(1)} &= \frac{4R_{i-1}A_id}{r} \sin\left(b_i - \frac{p}{6}\right) \cos 2q - \frac{B_i}{2} \left(-g_i^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2} \right) + 2 \ln \frac{r}{R_{i-1}} + 2 \right), \\ t_{r_{q_i}}^{(1)} &= -\frac{4R_{i-1}A_id}{r} \cos b_i \sin 2q, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $B_i = 2(c_i T_{1i} + h_i \dot{T}_{1i})$, $b_i = \sqrt{3} \ln \frac{r}{R_{i-1}}$, $\dot{T}_{1i} = \frac{d}{dt}(T_{1i})$.

В (2.1) – (2.4) индекс $i=1,2,\dots,N$, стоящий внизу у величин напряжений, обозначает как и ранее принадлежность их к i -му слою крепи. Эти соотношения будут справедливы и для пластической области массива, если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$.

Используя условие сопряжения напряжений на упругопластической границе g_i , следуя [7], получим граничные условия для напряжений в упругой зоне i -ого слоя крепи на ее внутренней границе:

$$\begin{aligned} s_r^{(1)} \Big|_{r=g_i} &= a_{oi} B_i - a_{1i} \cos 2q \\ t_{r_{\theta_i}}^{e(1)} \Big|_{r=g_i} &= -a_{2i} \sin 2q, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где
$$\begin{aligned} a_{oi} &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{g_i^2}{R_{i-1}^2} + 2 \ln \frac{g_i}{R_{i-1}} \right), \quad a_{1i} = -\frac{4R_{i-1}A_id}{g_i} \sin\left(b_{0i} - \frac{p}{6}\right) \cos 2q, \\ a_{2i} &= \frac{4R_{i-1}A_id}{g_i} \cos b_{0i}, \quad b_{0i} = \sqrt{3} \ln \frac{g_i}{R_{i-1}}. \end{aligned}$$

На внешней границе области упругого деформирования i -ого слоя будут иметь место следующие граничные условия:

$$s_{r_i}^{(1)} \Big|_{r=R_i} = -2A_i^e d \cos 2q, \quad t_{r_{q_i}}^{(1)} \Big|_{r=R_i} = -4A_i^e d \sin 2q, \quad (2.6)$$

где
$$A_i^e = 2m_i \frac{D_i}{R_i^2}.$$

Используя (2.5) и (2.6), согласно [3] определим первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области, разделив их на 2 части – найден-

ные по условиям на внутренней границе (верхний индекс (s)) и на внешней границе (верхний индекс (a))

$$s_{ri}^{(1)} = s_{ri}^{(s)} + s_{ri}^{(a)}, s_{qi}^{(1)} = s_{qi}^{(s)} + s_{qi}^{(a)}, t_{rqi}^{(1)} = t_{rqi}^{(s)} + t_{rqi}^{(a)},$$

$$u_{ri}^{(1)} = u_{ri}^{(s)} + u_{ri}^{(a)}, u_{qi}^{(1)} = u_{qi}^{(s)} + u_{qi}^{(a)}, \quad (2.7)$$

здесь

– внутренние составляющие напряжений

$$\begin{aligned} s_{ri}^{(s)} &= \frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2} (-a_{oi} B_i + a_{oi} B_i \frac{R_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N_i} \{ \{ 2[1 - 2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^{-4}] + \\ &+ 2[3 - 2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{g_i})^{-4} + 4[1 - 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{g_i})^{-2} \} a_{1i} + \\ &+ \{ -4 + 4(\frac{R_i}{g_i})^2 + [-4(\frac{R_i}{g_i})^2 + 4(\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{g_i})^{-4} + [4 - 4(\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{g_i})^{-2} \} a_{2i} \} d \cos 2q, \\ s_{qi}^{(s)} &= \frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2} (-a_{oi} B_i - a_{oi} B_i \frac{R_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N_i} \{ \{ 2[-1 + 2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}] + \\ &+ 2[-3 + 2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{g_i})^{-4} + 4[-3 + 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{g_i})^{-2} \} a_{1i} + \{ [4 - 4(\frac{R_i}{g_i})^2] + \\ &+ [4(\frac{R_i}{g_i})^2 - 4(\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{g_i})^{-4} + [12 - 16(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + 4(\frac{R_i}{g_i})^{-4}] (\frac{r}{g_i})^2 \} a_{2i} \} d \cos 2q, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} t_{rqi}^{(s)} &= -\frac{1}{2N_i} \{ [2(-1 + 2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}) + 2(3 - 2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^4) (\frac{r}{g_i})^{-4} + 2(-3 + 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + \\ &+ (\frac{R_i}{g_i})^{-4}) (\frac{r}{g_i})^2 + 2(1 - 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^4) (\frac{r}{g_i})^{-2} \} a_{1i} + \{ (4 - 4(\frac{R_i}{g_i})^2) + (-4(\frac{R_i}{g_i})^2 + 4(\frac{R_i}{g_i})^4) (\frac{r}{g_i})^{-4} + \\ &+ (6 - 8(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + 2(\frac{R_i}{g_i})^{-4}) (\frac{r}{g_i})^2 + (2 - 2(\frac{R_i}{g_i})^4) (\frac{r}{g_i})^{-2} \} a_{2i} \} d \sin 2q, \end{aligned}$$

– внешние составляющие напряжений

$$\begin{aligned} s_{ri}^{(a)} &= -\frac{1}{N_i} \{ 2[-3 + 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^4] + 2[3 - 6(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + 3(\frac{R_i}{g_i})^{-4}] (\frac{r}{R_i})^{-4} + \\ &+ 4[3 - 2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{R_i})^{-2} \} A^e_i d \cos 2q, \\ s_{qi}^{(a)} &= -\frac{1}{N_i} \{ 2[3 - 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^4] + 6[-1 + 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}] (\frac{r}{R_i})^{-4} + \\ &+ 12[1 - 2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{R_i})^2 \} A^e_i d \cos 2q, \\ t_{rqi}^{(a)} &= -\frac{2}{N_i} \{ [3 - 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^4] + 3[1 - 2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-4}] (\frac{r}{R_i})^{-4} + \\ &+ 3[1 - 2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{R_i})^2 + [3 - 2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^4] (\frac{r}{R_i})^{-2} \} A^e_i d \sin 2q, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$t_{rqi}^{(a)} = -\frac{2}{N_i} \left\{ \left[3 - 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4 \right] + 3 \left[1 - 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4 \right] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-4} + \right. \\ \left. + 3 \left[1 - 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4 \right] \left(\frac{r}{R_i}\right)^2 + \left[3 - 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4 \right] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-2} \right\} A^e_i d \sin 2q,$$

– внутренние составляющие перемещений

$$u_{ri}^{(s)} = \frac{-g_i^2}{6m_i(R_i^2 - g_i^2)} [a_{0i}B_i + 3a_{0i}B_i \frac{R_i^2}{r^2}] r - \frac{1}{m_i} [-C_{1i}^{(s)} \frac{r}{R_i} + C_{2i}^{(s)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-3} - \frac{2}{3} C_{3i}^{(s)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^3 + \\ + \frac{4}{3} C_{4i}^{(s)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-1}] R_i d \cos 2\theta,$$

$$u_{qi}^{(s)} = -\frac{1}{m} [C_{1i}^{(s)} \frac{r}{R_i} + C_{2i}^{(s)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-3} + \frac{7}{3} C_{3i}^{(s)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^3 - \frac{1}{3} C_{4i}^{(s)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-1}] R_i d \sin 2q, \quad (2.10)$$

– внешние составляющие перемещений

$$u_{ri}^{(a)} = -\frac{1}{m_i} [-C_{1i}^{(a)} \frac{r}{R_i} + C_{2i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-3} - \frac{2}{3} C_{3i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^3 + \frac{4}{3} C_{4i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-1}] R_i d \cos 2q$$

$$u_{qi}^{(a)} = -\frac{1}{m} [C_{1i}^{(a)} \frac{r}{R_i} + C_{2i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-3} + \frac{7}{3} C_{3i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^3 - \frac{1}{3} C_{4i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-1}] R_i d \sin 2q. \quad (2.11)$$

В (2.10), (2.11) константы определяются по формулам

$$C_{1i}^{(s)} = \frac{-1 + 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{2N_i} a_{1i} + \frac{4 - 4\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2}{4N_i} a_{2i} \\ C_{2i}^{(s)} = \frac{-3 + 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{6N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-4} a_{1i} + \frac{4\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - 4\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{12N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-4} a_{2i} \\ C_{3i}^{(s)} = \frac{-3 + 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{6N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 a_{1i} + \frac{3 - 4\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{12N} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 a_{2i} \quad (2.12) \\ C_{4i}^{(s)} = \frac{-1 + 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{2N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} a_{1i} + \frac{-1 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{2N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} a_{2i} \\ C_{1i}^{(a)} = \frac{-1 + 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{2N} 2A^e_i + \frac{4 - 4\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2}}{4N_i} 4A^e_i$$

$$C_{2i}^{(a)} = \frac{-3 + 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-4}}{6N_i} 2A_i^e + \frac{4\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - 4\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2}}{12N_i} 4A_i^e$$

$$C_{3i}^{(a)} = \frac{-3 + 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{6N} 2A_i^e + \frac{3 - 4\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{6N} 4A_i^e$$

$$C_{4i}^{(a)} = \frac{-1 + 2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{2N_i} 2A_i^e + \frac{-1 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^4}{2N_i} 4A_i^e, \quad N_i = 6 - 4\frac{R_i^4 + g_i^4}{R_i^2 g_i^2} + \frac{R_i^8 + g_i^8}{R_i^4 g_i^4}.$$

Найденные перемещения (2.10), (2.11) в упругой зоне при $r = g_i$ представим в виде

$$u_{ri}^{(1)} \Big|_{r=g_i} = U_{ri}^g \cos 2q + V_{ri}^g,$$

$$u_{qi}^{(1)} \Big|_{r=g_i} = U_{qi}^g \sin 2q + V_{qi}^g \quad (2.13)$$

Следуя алгоритму, изложенному в [7], получим соотношения для перемещений в пластической области i -ого слоя крепи

$$u_{ri}^{(1)} = [-2C_{1i} \cos b_i + 2C_{2i} \sin b_i] \cos 2q + F_{ri} \cos 2q - \frac{c_{3i}}{r}, \quad (2.14)$$

$$u_{qi}^{(1)} = [(C_{1i} + \sqrt{3}C_{2i}) \cos b_i + (C_{1i}\sqrt{3} - C_{2i}) \sin b_i] \sin 2q + F_{qi} \sin 2q + 2c_{4i}r,$$

где

$$F_{ri}(r) = \left[-\frac{f_{2i}}{8r^2} \cos b_i(r) + \left(\frac{f_{1i}}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{R_{i-1}} - \sqrt{3} \frac{f_{2i}}{8r^2} \right) \sin b_i(r) \right],$$

$$F_{qi}(r) = \left[\left(\ln \frac{r}{R_{i-1}} \frac{f_{1i}}{2} - \frac{f_{2i}}{4r^2} \right) \cos b_i(r) - \left(\ln \frac{r}{R_{i-1}} \frac{f_{1i}}{2\sqrt{3}} + \frac{f_{2i}}{2\sqrt{3}} \right) \sin b_i(r) \right],$$

$$b_i(r) = \sqrt{3} \ln \frac{r}{R_{i-1}}, \quad f_{1i} = 8R_{i-1}A_i d \left(-\frac{1}{2m_i} + c_i T_{1i} \right), \quad f_{2i} = 8R_{i-1}A_i d c_i T_{2i}.$$

Учитывая условия сопряжения перемещений на границе g_i раздела сред упругого и пластического деформирования, получим

$$C_{1i} = \frac{1}{2} [-(U_{ri}^g - F_{ri}^g) \cos b_i + \frac{1}{\sqrt{3}} (2U_{qi}^g + U_{ri}^g - 2F_{qi}^g - F_{ri}^g) \sin b_i]$$

$$C_{2i} = \frac{1}{2} [(U_{ri}^g - F_{ri}^g) \sin b_i + \frac{1}{\sqrt{3}} (2U_{qi}^g + U_{ri}^g - 2F_{qi}^g - F_{ri}^g) \cos b_i]$$

$$c_{3i} = -g_i V_{ri}^g, \quad c_{4i} = \frac{1}{2g_i} V_{qi}^g,$$

где $F_{ri}^g = F_{ri}(g_i)$, $F_{qi}^g = F_{qi}(g_i)$, $U_{ri}^g = U_{ri}(g_i)$, $U_{qi}^g = U_{qi}(g_i)$.

Из условия сопряжения компонент тензора напряжений следует, что на невозмущенной упругопластической границе согласно [3] выполняется условие

$$\left[\mathbf{S}_{qi}^{(0)} + d(\mathbf{S}_{qi}^{(1)} + \frac{d\mathbf{S}_{qi}^{(0)}}{dr} r_{3(i-1)}^{(1)}) \right] \Big|_{r=g_i} = 0. \quad (2.15)$$

Из линейности функции разрыва следует, что

$$[\mathbf{S}_{qi}^{(0)}] \Big|_{r=g_i} + d([\mathbf{S}_{qi}^{(1)}] \Big|_{r=g_i} + [\frac{d\mathbf{S}_{qi}^{(0)}}{dr}] \Big|_{r=g_i} \mathbf{g}_i^{(1)}) = 0.$$

Так как $[\mathbf{S}_q^{(0)}] = 0$, то формула для определения первой итерации первого приближения радиуса упругопластической границы имеет вид

$$\mathbf{g}_i^{(1)} = - \frac{[\mathbf{S}_{qi}^{(1)}] \Big|_{r=g_i}}{[\frac{d\mathbf{S}_{qi}^{(0)}}{dr}] \Big|_{r=g_i}}. \quad (2.16)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i^{(1)} = & - \left\{ - \frac{4R_{i-1}A_i d}{\mathbf{g}_i} \sin(b_{i0} + \frac{p}{6}) \cos 2q - \frac{B_i}{2} \left(-1 + \frac{\mathbf{g}_i^2}{R_{i-1}^2} \right) + \right. \\ & + 2 \ln \frac{\mathbf{g}_i}{R_{i-1}} + 2 \left. - \left(\frac{\mathbf{g}_i^2}{R_i^2 - \mathbf{g}_i^2} \left(-a_{oi} B_i - a_{oi} B_i \frac{R_i^2}{\mathbf{g}_i^2} \right) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{2N_i} \left(\left(2(-1 + 2(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^2 - (\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^{-4}) + 2(-3 + 2(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^2 + (\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^4) + \right. \right. \\ & + 4(-3 + 2(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^{-2} + (\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^{-4}) \right) a_{1i} + \left((4 - 4(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^2) + (4(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^2 - \right. \\ & - 4(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^4) + (12 - 16(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^{-2} + 4(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^{-4}) \left. \right) a_{2i} \left. \right\} d \cos 2q - \\ & - \frac{1}{N_i} \left(2(3 - 2(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^{-2} - (\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^4) + 6(-1 + 2(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^{-2} - (\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^{-4}) + \right. \\ & \left. + 12(1 - 2(\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^2 + (\frac{R_i}{\mathbf{g}_i})^4) \right) A^e d \cos 2q \left. \right\} / \left\{ \frac{4m_i}{\mathbf{g}_i} (T_{1i} - \frac{T_{2i}}{2}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Таким образом, соотношения (2.4), (2.7 – 2.12), (2.14), (2.17) в первом приближении определяют НДС и положение границы раздела зон упругого и пластического деформирования в *i*-ом слое крепи эллиптического поперечного сечения.

Теперь перейдем к определению НДС массива в окрестности вертикальной выработки эллиптического поперечного сечения.

Граничные условия для напряжений в упругой зоне массива на ее внутренней границе будут иметь вид (2.5), если в них опустить индекс *i* и сделать замену $q_{i-1} = gh$, $R_{i-1} = R_N = 1$. На внешней границе области упругого деформирования массива при $r \rightarrow \infty$ будут иметь место следующие граничные условия:

$$\mathbf{s}_r^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \mathbf{t}_{rq}^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.18)$$

Тогда согласно [3] первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области массива представимы в виде (2.7) (индекс *i* надо опустить) и определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
s_r^{(s)} &= a_o B \frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2} \left\{ \left[-2 \left(\frac{g}{r} \right)^4 + 4 \left(\frac{g}{r} \right)^2 \right] a_1 + \left[4 \left(\frac{g}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{g}{r} \right)^2 \right] a_2 \right\} d \cos 2q \\
s_q^{(s)} &= -a_o B \frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{g}{r} \right)^4 a_1 - 4 \left(\frac{g}{r} \right)^4 a_2 \right\} d \cos 2q
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
t_{rq}^{(s)} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[-2 \left(\frac{g}{r} \right)^4 + 2 \left(\frac{g}{r} \right)^2 \right] a_1 + \left[4 \left(\frac{g}{r} \right)^4 - 2 \left(\frac{g}{r} \right)^2 \right] a_2 \right\} d \sin 2q \\
s_r^{(a)} &= 0, s_q^{(a)} = 0, t_{rq}^{(a)} = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
u_r^{(s)} &= -\frac{a_o B g^2}{2m r} - \frac{1}{3m} \left[\left(\frac{g}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{2} a_1 - a_2 \right) - 2 \frac{g}{r} (a_1 - a_2) \right] g d \cos 2q \\
u_q^{(s)} &= -\frac{1}{3m} \left[\left(\frac{g}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{2} a_1 - a_2 \right) + \frac{1}{2} \frac{g}{r} (a_1 - a_2) \right] g d \sin 2q
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$u_r^{(a)} = 0, u_q^{(a)} = 0. \tag{2.22}$$

Здесь $a_o = -\frac{1}{2}((1-g^2) + 2 \ln g)$, $a_1 = -\frac{4A}{r} \sin(b_0 - \frac{p}{6})$, $b_0 = \sqrt{3} \ln g$, $a_2 = \frac{4A}{g} \cos b_0$.

Перемещения в пластической зоне массива для первой итерации будут определяться соотношениями (2.14), если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$.

Радиус упруго-пластической границы определяется в виде

$$\begin{aligned}
g^{(1)} &= -\left\{ -\frac{4Ad}{g} \sin(b_0 + \frac{p}{6}) \cos 2q - \frac{B}{2} (-(1+g^2) + 2 \ln g + 2) - \right. \\
&\quad \left. -(-a_o B - \frac{1}{2} \{2a_1 - 4a_2\} d \cos 2q) \right\} / \left\{ \frac{4m}{g} (T_1 - \frac{T_2}{g^2}) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Таким образом, соотношения (2.5), (2.7) (в них следует опустить индекс i и заменить $q_{i-1} = gh$, $R_{i-1} = R_N = 1$), (2.19) – (2.23) определяют НДС и положение границы раздела зон упругого и пластического деформирования в массиве горных пород около вертикальной выработки эллиптического поперечного сечения.

3. Далее рассмотрим задачу об определении полей напряжений и перемещений для области: а) массива около вертикальной подкрепленной выработки с поперечным сечением, близким к правильному многоугольнику, и б) многослойной крепи, состоящей из N слоев, поперечные сечения которых имеют форму колец (внешний и внутренний контур близки по форме к правильному m -угольнику). Так же, как и в рассмотренной выше задаче, решение будем искать для i -ого слоя крепи ($i=1,2,\dots,N$) и приконтурной области массива. Ограничимся случаем первого приближения первой итерации.

НДС, соответствующее i -ому слою крепи будем определять в рамках схемы, что и в предыдущей задаче.

Граничные условия на нормальные S_{ni} и касательные S_{qi} напряжения для i -го слоя крепи ($r_{m(i-1)}$ – внутренний радиус i -ого слоя, r_{mi} – внешний радиус), с учетом (1.2) и (1.7) имеют соответственно вид

$$s_{ri}^{(1)} \Big|_{r=R_{i-1}} = -2A_i \cos mq, t_{rqi}^{(1)} \Big|_{r=R_{i-1}} = -2mA_i \sin mq, \tag{3.1}$$

где
$$A_i = 2m_i(T_{1i} + \frac{D_i + T_{2i}}{R_{i-1}^2}).$$

Тогда напряжения в пластической зоне с учетом (3.1) будут иметь вид

$$\begin{aligned} s_{r_i}^{(1)} &= \frac{2}{r} R_{i-1} A_i d (\sqrt{m^2 - 1} \sin b_i - \cos b_i) \cos m\varphi - \frac{B_i}{2} (g_i^2 (\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_{i-1}^2}) + 2 \ln \frac{r}{R_{i-1}}), \\ s_{q_i}^{(1)} &= s_{r_i}^{p(1)} + B_i (\frac{g_i^2}{r^2} - 1) = \frac{2}{r} R_{i-1} A_i d (\sqrt{m^2 - 1} \sin b_i + \cos b_i) \cos m\varphi - \\ &- \frac{B_i}{2} (-g_i^2 (\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2}) + 2 \ln \frac{r}{R_{i-1}} + 2), \\ t_{r\varphi_i}^{(1)} &= -\frac{2mR_{i-1}A_i d}{r} \cos b_i \sin m\varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь
$$B_i = 2(c_i T_{1i} + h_i \frac{R_i}{R_{i-1}}), \quad b_i = \sqrt{m^2 - 1} \ln \frac{r}{R_{i-1}}.$$

Эти соотношения будут справедливы и для пластической области массива, если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$.

По условию сопряжения напряжений на упругопластической границе g_i , следуя [7] получим граничные условия для напряжений в упругой зоне i -ого слоя крепи на ее внутренней границе:

$$s_{r_i}^{e(1)} \Big|_{r=g_i} = a_{0i} B_i - a_{1i} \cos m\varphi, \quad t_{r\theta_i}^{e(1)} \Big|_{r=g_i} = -a_{2i} \sin m\varphi, \quad (3.3)$$

где $b_{0i} = \sqrt{m^2 - 1} \ln \frac{g_i}{R_{i-1}}$, $a_{1i} = -\frac{2}{g_i} R_{i-1} A_i (\sqrt{m^2 - 1} \sin b_{0i} - \cos b_{0i})$, $a_{2i} = \frac{2mR_{i-1}A_i}{g_i} \cos b_{0i}$.

На внешней границе области упругого деформирования i -ого слоя будут иметь место следующие граничные условия:

$$s_{r_i}^{e(1)} \Big|_{r=R_i} = -2A_i^e d \cos m\varphi, \quad t_{r\varphi_i}^{p(1)} \Big|_{r=R_i} = -2mA_i^e d \sin m\varphi. \quad (3.4)$$

Используя (3.3), (3.4) первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области, аналогично предыдущей задаче получим в виде – внутренние составляющие напряжений

$$\begin{aligned}
S_{ri}^{(S)} &= \frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2} (-a_{oi} B_i + a_{oi} B_i \frac{R_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N} \{ m[(m-1) - m(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^{m-2} + \\
&+ m[(m+1) - m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{2m}] (\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + (m-2)[(m+1) - m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^m + \\
&+ (m+2)[(m-1) - m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{2m}] (\frac{r}{g_i})^{-m} \} a_{1i} + \\
&+ \{ [-(m-1)(m+2) + m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^{m-2} + \\
&+ [(m-2)(m+1) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}] (\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + [-(m-2)(m+1) + \\
&+ (m^2 - 4)(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^m + [(m-1)(m+2) - (m^2 - 4)(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - \\
&- (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}] (\frac{r}{g_i})^{-m} \} a_{2i} \} d \cos m\varphi, \\
S_{qi}^{(S)} &= \frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2} (-a_{oi} B_i - a_{oi} B_i \frac{R_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N_i} \{ m[-(m-1) + m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^{m-2} + \\
&+ m[-(m+1) + m(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^{2m}] (\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + (m+2)[-(m+1) + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^m + \\
&+ (m-2)[-(m-1) + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{2m}] (\frac{r}{g_i})^{-m} \} a_{1i} + \{ [(m-1)(m+2) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^{m-2} + \\
&+ [-(m-2)(m+1) + m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}] (\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + [(m+1)(m+2) - (m+2)^2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + \\
&+ (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^m + [-(m-1)(m-2) + (m-2)^2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}] (\frac{r}{g_i})^{-m} \} a_{2i} \} \cos m\varphi \quad (3.5) \\
t_{rq\ i}^{(S)} &= -\frac{1}{2N_i} \{ [m(-(m-1) + m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}) (\frac{r}{g_i})^{m-2} + m((m+1) - \\
&- m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{2m}) (\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + m(-(m+1) + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}) (\frac{r}{g_i})^m + m((m-1) - \\
&- m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{2m}) (\frac{r}{g_i})^{-m}] a_{1i} + [(m-1)(m+2) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] (\frac{r}{g_i})^{m-2} + \\
&+ ((m-2)(m+1) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}) (\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + (m(m+1) - m(m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + \\
&+ m(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}) (\frac{r}{g_i})^m + (m(m-1) - m(m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - m(\frac{R_i}{g_i})^{2m}) (\frac{r}{g_i})^{-m} \} a_{2i} \} \sin m\varphi,
\end{aligned}$$

– внешние составляющие напряжений

$$\begin{aligned}
S_{ri}^{(a)} = & -\frac{1}{N_i} \{ m[-(m-1)(m+1) + m(m-1)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + (m-1)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m-2} + \\
& + m[(m+1)(m-1) - m(m+1)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + (m+1)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m+2)} + \\
& + (m-2)[-(m-1)(m+1) + m(m+1)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - (m+1)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^m + \\
& + (m+2)[(m-1)(m+1) - m(m-1)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - (m-1)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-m} \} A^e_i d \cos mq
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
S_{qi}^{(a)} = & -\frac{1}{N_i} \{ m(m-1)[(m+1) - m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m-2} + m(m+1)[-(m-1) + \\
& + m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m+2)} + (m+1)(m+2)[(m-1) - m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^m + \\
& + (m-2)(m-1)[-(m+1) + m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-m} \} A^e_i d \cos mq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{rq\ i}^{(a)} = & -\frac{m}{N_i} \{ (m-1)[(m+1) - m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m-2} + (m+1)[(m-1) - m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \\
& + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m+2)} + (m+1)[(m-1) - m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^m + (m-1)[(m+1) - m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - \\
& - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}] \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-m} \} A^e_i \sin mq,
\end{aligned}$$

– внутренние составляющие перемещений

$$\begin{aligned}
u_{ri}^{(S)} = & \frac{-g_i^2}{6m_i(R_i^2 - g_i^2)} [a_{0i}B_i + 3a_{0i}B_i \frac{R_i^2}{r^2}] r - \frac{1}{3m_i} [-\frac{3}{2}mC_{1i}^{(S)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m-1} + \\
& + \frac{3}{2}mC_{2i}^{(S)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m+1)} - (\frac{3}{2}m-1)C_{3i}^{(S)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m+1} + (\frac{3}{2}m+1)C_{4i}^{(S)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m-1)}] R_i d \cos mq \\
u_{qi}^{(S)} = & -\frac{1}{3m} [\frac{3}{2}mC_{1i}^{(S)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m-1} + \frac{3}{2}mC_{2i}^{(S)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m+1)} + (\frac{3}{2}m+4)C_{3i}^{(S)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m+1} + \\
& + (\frac{3}{2}m-4)C_{4i}^{(S)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m-1)}] R_i d \sin mq,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

– внешние составляющие перемещений

$$\begin{aligned}
u_{ri}^{(a)} = & -\frac{1}{3m_i} [-\frac{3}{2}mC_{1i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m-1} + \frac{3}{2}mC_{2i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m+1)} - (\frac{3}{2}m-1)C_{3i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m+1} + \\
& + (\frac{3}{2}m+1)C_{4i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m-1)}] R_i d \cos mq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{qi}^{(a)} = & -\frac{1}{3m} \left[\frac{3}{2} m C_{1i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m-1} + \frac{3}{2} m C_{2i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m+1)} + \left(\frac{3}{2} m + 4\right) C_{3i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{m+1} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{3}{2} m - 4\right) C_{4i}^{(a)} \left(\frac{r}{R_i}\right)^{-(m-1)} \right] R_i d \sin mq.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

В соотношениях (3.7), (3.8) константы определяются по формулам

$$\begin{aligned}
C_{1i}^{(S)} = & \frac{-(m-1) + m \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}}{2(m-1)N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-(m-2)} a_{1i} + \\
& + \frac{(m-1)(m+2) - m^2 \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - (m-2) \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}}{2m(m-1)N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{m-2} a_{2i} \\
C_{2i}^{(Si)} = & \frac{-(m+1) + m \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}}{2(m+1)N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-(m+2)} a_{1i} + \\
& + \frac{-(m-2)(m+1) + m^2 \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - (m+2) \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}}{2m(m+1)N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-(m+2)} a_{2i} \\
C_{3i}^{(S)} = & \frac{-(m+1) + m \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}}{2(m+1)N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^m a_{1i} + \\
& + \frac{(m+1) - (m+2) \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}}{2m(m+1)N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^m a_{2i} \\
C_{4i}^{(S)} = & \frac{-(m-1) + m \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}}{2(m-1)N_i} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-m} a_{1i} + \\
& + \frac{-(m-1) + (m-2) \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}}{2(m-1)N} \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-m} a_{2i}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
C_{1i}^{(a)} &= \frac{-(m-1) + m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}}{2(m-1)N_i} 2A_i^e + \\
&+ \frac{(m-1)(m+2) - m^2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - (m-2)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}}{2m(m-1)N_i} 2mA_i^e \\
C_{2i}^{(a)} &= \frac{-(m+1) + m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}}{2(m+1)N_i} 2A_i^e + \\
&+ \frac{-(m-2)(m+1) + m^2\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2} - (m+2)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}}{2m(m-1)N_i} 2mA_i^e \\
C_{3i}^{(a)} &= \frac{-(m+1) + m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}}{2(m+1)N_i} 2A_i^e + \\
&+ \frac{(m+1) - (m+2)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{2m}}{2(m-1)N_i} 2mA_i^e \\
C_{4i}^{(a)} &= \frac{-(m-1) + m\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 - \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}}{2(m-1)N} 2A_i^e + \\
&+ \frac{-(m-1) + (m-2)\left(\frac{R_i}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i}\right)^{-2m}}{2(m-1)N} 2mA_i^e \\
N_i &= 2(m^2 - 1) - m^2 \frac{R_i^4 + g_i^4}{R_i^2 g_i^2} + \frac{R_i^{4m} + g_i^{4m}}{R_i^{2m} g_i^{2m}}.
\end{aligned}$$

Найденные перемещения (3.7), (3.8) в упругой зоне при $r = g_i$ представим в виде

$$\begin{aligned}
u_{ri}^{e(1)} \Big|_{r=g_i} &= U_{ri}^g \cos m\mathbf{q} + V_{ri}^g \\
u_{qi}^{e(1)} \Big|_{r=g_i} &= U_{qi}^g \sin m\mathbf{q} + U_{qi}^g.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Перемещения в пластической зоне определяются соотношениями

$$u_{ri}^{(1)} = [-mC_{1i} \cos \mathbf{b}_i + mC_{2i} \sin \mathbf{b}_i] \cos m\mathbf{q} + F_{ri} \cos m\mathbf{q} - \frac{C_{3i}}{r}, \tag{3.11}$$

$$u_{qi}^{(1)} = [(C_{1i} + \sqrt{m^2 - 1} \cdot C_{2i}) \cos \mathbf{b}_i + (\sqrt{m^2 - 1} \cdot C_{1i} - C_{2i}) \sin \mathbf{b}_i] \sin m\mathbf{q} + F_{qi} \sin m\mathbf{q} + 2c_{4i} r$$

$$\text{где } F_{ri}(r) = \left[-\frac{f_{2i}}{4mr^2} \cos \mathbf{b}_i(r) + \left(\frac{mf_{1i}}{2\sqrt{m^2 - 1}} \ln \frac{r}{R_{i-1}} - \sqrt{m^2 - 1} \frac{f_{2i}}{4mr^2} \right) \sin \mathbf{b}_i(r) \right]$$

$$F_{qi}(r) = \left[\left(\frac{f_{1i}}{2} \ln \frac{r}{R_{i-1}} - \frac{f_{2i}}{4r^2} \right) \cos b_i(r) - \left(\frac{f_{1i}}{2\sqrt{m^2-1}} \ln \frac{r}{R_{i-1}} + \frac{f_{1i}}{2\sqrt{m^2-1}} \right) \sin b_i(r) \right].$$

Из условия сопряжения перемещений на границе g_i раздела сред упругого и пластического деформирования получим

$$C_{1i} = \frac{1}{m} [-(U_{ri}^g - F_{ri}^g) \cos b_i + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} (mU_{qi}^g + U_{ri}^g - mF_{qi}^g - F_{ri}^g) \sin b_i],$$

$$C_{2i} = \frac{1}{m} [(U_{ri}^g - F_{ri}^g) \sin b_i + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} (mU_{qi}^g + U_{ri}^g - mF_{qi}^g - F_{ri}^g) \cos b_i],$$

$$c_{3i} = -g_i V_{ri}^g, \quad c_{4i} = \frac{1}{2g_i} V_{qi}^g, \quad \text{где } F_{ri}^g = F_{ri}(g_i) \text{ и } F_{qi}^g = F_{qi}(g_i).$$

Граница раздела упругой и пластической областей определяется в виде

$$\begin{aligned} g_i^{(1)} = & -\left\{ -\frac{2}{g_i} R_{i-1} A_i d (\sqrt{m^2-1} \sin b_{i0} + \cos b_{i0}) \cos mq - \right. \\ & - \frac{B_i}{2} \left(-1 + \frac{g_i^2}{R_{i-1}^2} \right) + 2 \ln \frac{g_i}{R_{i-1}} + 2 \left. - \left(\frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2} (-a_{oi} B_i - a_{oi} B_i \frac{R_i^2}{g_i^2}) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{2N_i} \left\{ m[-(m-1) + m \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^2 - \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2m}] + m[-(m+1) + \right. \\ & + m \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^2 + \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{2m}] + (m+2)[-(m+1) + m \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2} + \\ & + \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2m}] + (m-2)[-(m-1) + m \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{2m}] \left. \right\} a_{1i} + \\ & + \left\{ [(m-1)(m+2) - m^2 \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^2 - (m-2) \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2m}] + \right. \\ & + [-(m-2)(m+1) + m^2 \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^2 - (m+2) \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{2m}] + \\ & + [(m+1)(m+2) - (m+2)^2 \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2} + (m+2) \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2m}] + \\ & + [-(m-1)(m-2) + (m-2)^2 \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2} + (m-2) \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{2m}] \left. \right\} a_{2i} \left. \right\} d \cos mq - \\ & - \frac{1}{N_i} \left\{ m(m-1)[(m+1) - m \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{2m}] + m(m+1)[-(m-1) + \right. \\ & + m \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2} - \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2m}] + (m+1)(m+2)[(m-1) - m \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{2m}] + (m-2)(m-1)[-(m+1) + m \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{R_i}{g_i} \right)^{-2m}] \left. \right\} A_i^e d \cos mq \left. \right\} / \left\{ \frac{4m_i}{g_i} (T_i - \frac{T_{2i}}{g_i^2}) \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, соотношения (3.2), (3.5) – (3.9), (3.11), (3.12) определяют НДС и положение границы раздела упругой и пластической областей в i -ом слое крепи, правильной многоугольной формы поперечного сечения.

НДС массива в окрестности вертикальной выработки многоугольного поперечного сечения будем определять так же в рамках [3].

Первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области массива представимы в виде (2.7) (индекс i надо опустить) и согласно [3] определяются соотношениями

$$\begin{aligned} s_r^{(S)} &= a_o B \frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2} \{ [-m(\frac{g}{r})^{m+2} + (m+2)(\frac{g}{r})^m] a_1 + [(m+2)(\frac{g}{r})^{m+2} - (m+2)(\frac{g}{r})^m] a_2 \} d \cos mq, \\ s_q^{(S)} &= -a_o B \frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2} \{ [m(\frac{g}{r})^{m+2} - (m-2)(\frac{g}{r})^m] a_1 + [-(m+2)(\frac{g}{r})^{m+2} + (m-2)(\frac{g}{r})^m] a_2 \} d \cos mq, \\ t_{rq}^{(S)} &= -\frac{1}{2} \{ [-m(\frac{g}{r})^{m+2} + m(\frac{g}{r})^m] a_1 + [(m+2)(\frac{g}{r})^{m+2} - m(\frac{g}{r})^m] a_2 \} d \sin mq, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$s_r^{(a)} = 0, s_q^{(a)} = 0, t_{rq}^{(a)} = 0, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} u_r^{(S)} &= -\frac{a_o B g^2}{2m r} - \frac{1}{3m} \left[\left(\frac{g}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{2} a_1 - a_2 \right) - 2 \frac{g}{r} (a_1 - a_2) \right] g d \cos mq, \\ u_q^{(S)} &= -\frac{1}{3m} \left[\left(\frac{g}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{2} a_1 - a_2 \right) + \frac{1}{2} \frac{g}{r} (a_1 - a_2) \right] g d \sin mq, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$u_r^{(a)} = 0, u_q^{(a)} = 0. \quad (3.16)$$

Перемещения в пластической зоне массива для первой итерации будут определяться соотношениями (3.11), если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$.

Радиус упругопластической границы находится по формуле

$$\begin{aligned} g_i^{(1)} &= -\left\{ -\frac{2}{g} A d (\sqrt{m^2 - 1} \sin b_0 + \cos b_0) \cos mq - \frac{B}{2} (-1 + g^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \ln g + 2 \right\} - (-a_o B - \{ a_1 - 2a_2 \} d \cos mq) / \left\{ \frac{4m}{g} \left(T_1 - \frac{T_2}{g^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Таким образом, соотношения (2.7), (3.2), (3.11) (в них надо опустить индекс i и заменить $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$), (3.13) – (3.17) определяют НДС и положение границы раздела упругой и пластической зон в массиве горных пород около вертикальной выработки с поперечным сечением, близким по форме к правильному m – угольнику.

На основе полученных аналитических решений проведены численные расчеты, результаты которых представлены на рис.1–7.

На рис.1 представлена зависимость радиуса упругопластической границы g_i в i -ом слое круговой крепи (нулевое приближение) от времени t . При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими: давление на внешнем ($R_i = 0.8$) и внутреннем ($R_{i-1} = 0.5$) контурах $q_i = 1.9$, $q_{i-1} = 1$ соответственно; модуль сдвига и предел

текучести $m_i = 1$, $k_i = 1$. Кривая 1 соответствует $c_i = 0.2$, $h_i = 0.001$; кривая 2 – $c_i = 0$, $h_i = 0.001$; кривая 3 – $c_i = 0.2$; $h_i = 0$, кривая 4 – $c_i = 0$; $h_i = 0$.

На рис.2 – 7 показана зависимость границы g_i раздела зон упругого и пластического деформирования в i -ом слое крепи от угла q для случаев: 1) эллиптической (рис.2– 4) и 2) близкой к правильной восьмиугольной (рис.5– 7) формы поперечного сечения. При этом на рис.2– 7 внутренняя и внешняя замкнутые кривые соответствуют внутреннему и внешнему контуру i -ого слоя крепи, модуль сдвига и предел текучести $m_i = 1$, $k_i = 1$.

На рис.2 – 4 для случая 1) показано изменение пластической области в зависимости от временного параметра t , параметра упрочнения c , коэффициента вязкости h соответственно. Здесь величина малого параметра $dd = 0.005$, параметры нагружения $q_{i-1} = 1$, $q_i = 1.9$. На рис.2 кривая 1 соответствует моменту времени $t = 0.0005$, кривая 2 – $t = 0.001$, кривая 3 – $t = 10$, при этом $c_i = 0.2$, $h_i = 0.001$. На рис.3 кривая 1 соответствует $c_i = 0.2$, кривая 2 – $c_i = 0.1$, кривая 3 – $c_i = 0$, при этом $t = 1$, $h_i = 0.001$. На рис.4 кривая 1 соответствует $h_i = 0.005$, кривая 2 – $h_i = 0.001$, кривая 3 – $h_i = 0$, при этом $t = 1$, $c = 0.2$. Аналогичные зависимости представлены на рис.5 – 7. для случая 2), при этом $dd = 0.013$.

Из анализа численного эксперимента следует, что:

- пластическая область начинает зарождаться с внутреннего контура i -ого слоя крепи, т.е. при $t = 0$ граница раздела зон упругого и пластического деформирования совпадает с внутренним контуром (рис. 1);
- с ростом времени t пластическая область расширяется до определенного значения, соответствующего моменту времени $t^* \approx 1$, при этом дальнейший рост времени приводит к тому, что полученные кривые практически совпадают с кривой соответствующей случаю упругопластической среды (рис.1, рис.2, рис.5), то есть имеет место ограниченная ползучесть;
- при увеличении коэффициента упрочнения c пластическая область сужается (рис.3–6), при этом $t > t^*$. Тот же эффект наблюдается и с ростом вязкости h_i (рис.4–7), при этом $t < t^*$.

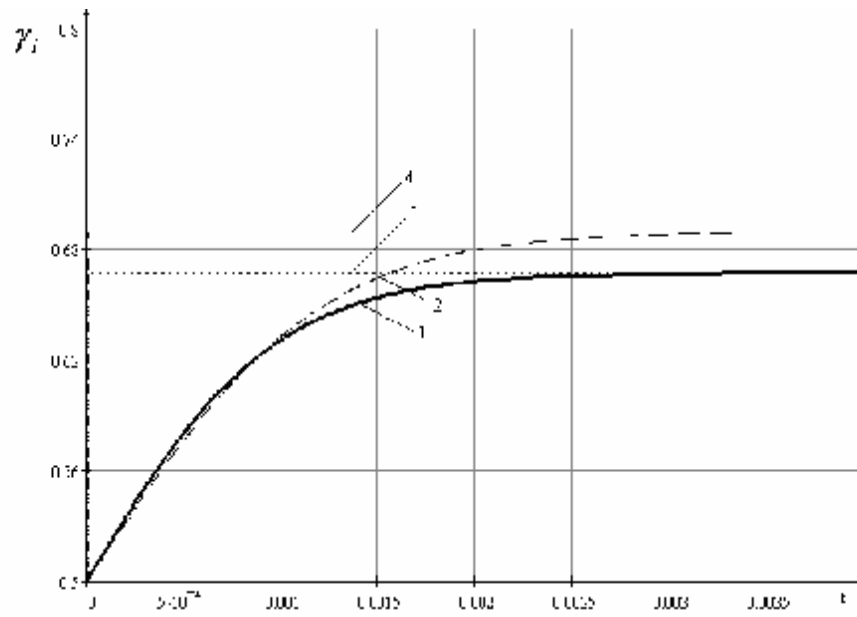


Рис.1

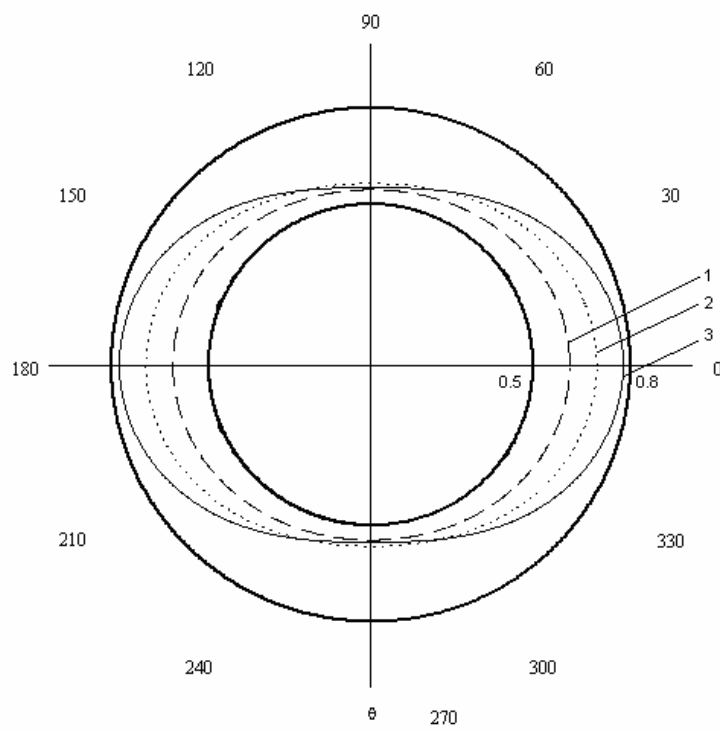


Рис.2

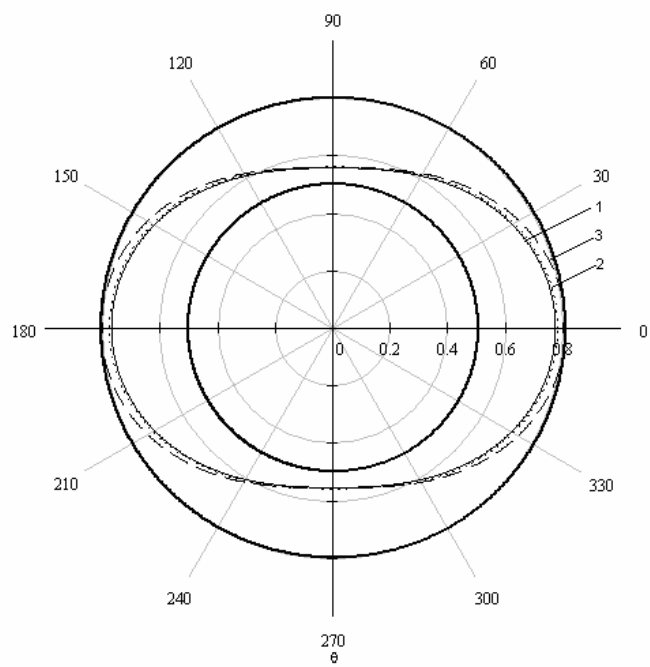


Рис. 3

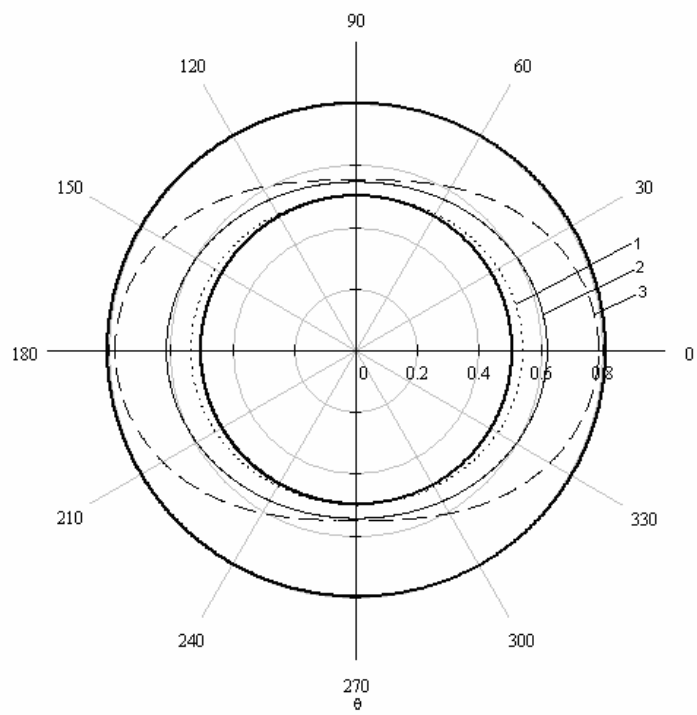


Рис. 4

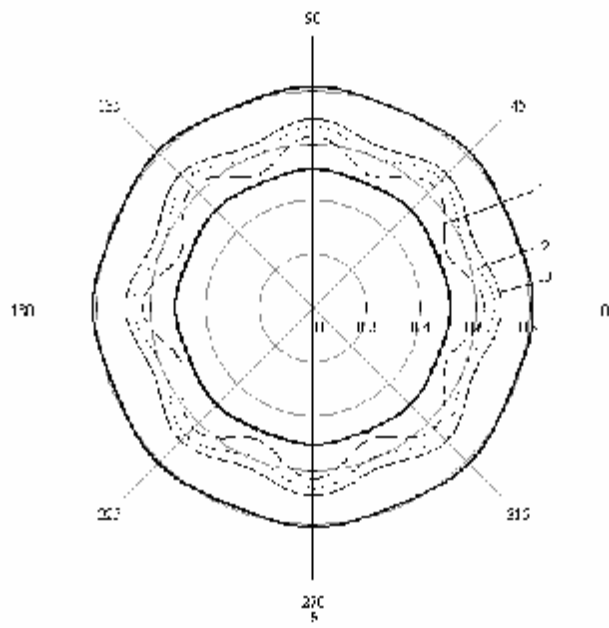


Рис.5

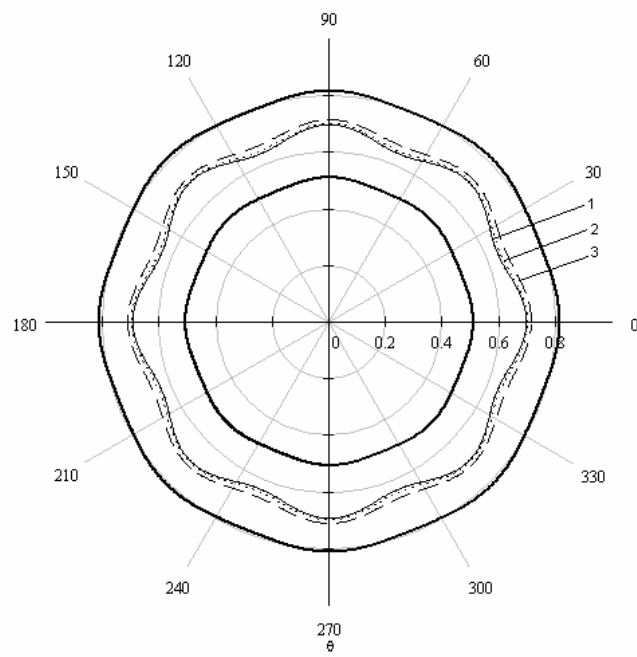


Рис.6

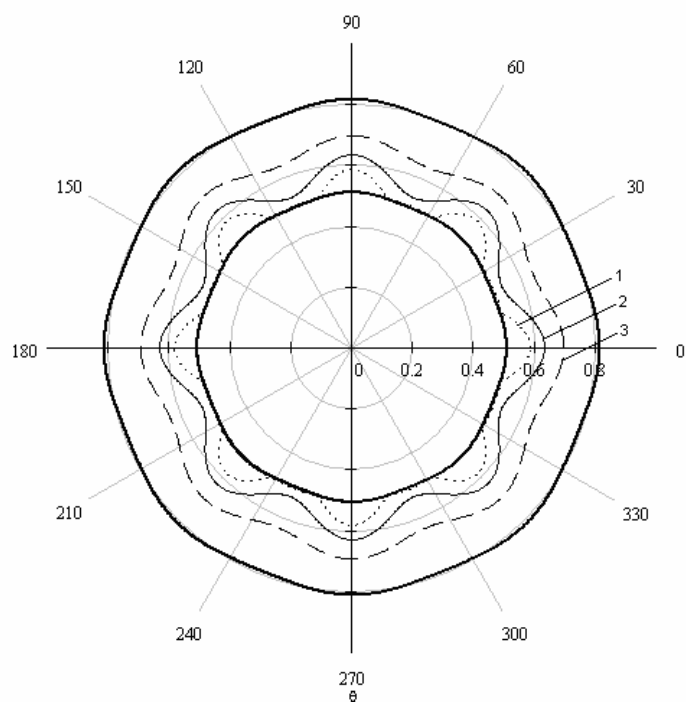


Рис. 7

г. Воронеж
 Поступила: 01 ноября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев, Г. И., Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток. : Дальнаука. – 1998. – 320 с.
2. Ершов, Л. В. О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л.В. Ершов // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145. – № 2. – С. 298 – 300.
3. Ивлев, Д. Д., Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев Л. В. Ершов. – М. : Наука. – 1978. – 208 с.
4. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит. – 2001. – 701 с.
5. Спорыхин, А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та. – 1997. – 359 с.
6. Спорыхин, А. Н. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова. – Воронеж : ВГУ. – 2004.
7. Спорыхин, А. Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : ФИЗМАТЛИТ. – 2004.

О ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛОСКОСТИ ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА

(Чуваши́йский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

Л. А. Галин [2] дал замечательное решение упругопластической задачи о двуосном растяжении плоскости с круговым отверстием (случай плоской деформации). Г. П. Черепанов [4] получил решение аналогичной задачи в случае плоского напряженного состояния. В дальнейшем были получены различные результаты для упругопластических задач, обобщающих решение Л. А. Галина и Г. П. Черепанова, ряд решений приведен в монографии [1].

В настоящей работе задача Л. А. Галина обобщается на случай неоднородной пластической среды. Предполагается, что неоднородность сохраняет постоянное значение вдоль эллиптических кривых. В первом приближении определяется напряженное состояние и радиус упругопластической зоны. Отметим, что случай, когда предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль параллельных прямых рассмотрен в [3].

Рассмотрим бесконечную плоскость с круговым отверстием радиуса a (рис. 1). Условие пластичности примем в виде:

$$(s_r - s_q)^2 + 4t_{rq}^2 = 4k^2, \quad (1)$$

где s_r, s_q, t_{rq} – компоненты напряжений в полярной системе координат r, q ; k – предел текучести.

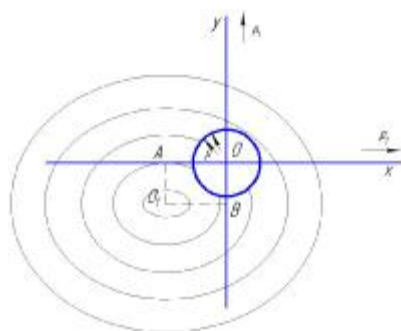


Рис.1

Положим:

$$k = k_0 + d \left(\frac{(x+A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y+B)^2}{\bar{b}^2} \right), \quad k_0, \bar{a}, \bar{b}, A, B - const, \quad (2)$$

где d – малый безразмерный параметр.

Впоследствии перейдем к безразмерным значениям радиусов трубы a и черту сверху у величин \bar{a}, \bar{b} опустим. Положим:

$$a = a / r_s^{(0)},$$

где $r_s^{(0)}$ – радиус пластической зоны в нулевом приближении.

Согласно (2) предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль эллипсов

$$\frac{(x+A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y+B)^2}{\bar{b}^2} = c, \quad A, B - const \quad (3)$$

и изменяется в зависимости от изменения величины c .

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0, \\ \frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{2t_{rq}}{r} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Будем считать, что на контуре отверстия действует нормальное давление p , а на бесконечности плоскость растягивается взаимно перпендикулярными усилиями p_1, p_2 .

Из уравнений перехода из декартовой системы координат в полярную систему координат

$$s_r = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q, \quad s_q = \frac{s_x + s_y}{2} - \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2q, \\ t_{rq} = \frac{s_x - s_y}{2} \sin 2q,$$

граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде:

$$s_r^e \Big|_{r=\infty} = q - d \cos 2q, \quad s_q^e \Big|_{r=\infty} = q + d \cos 2q, \quad t_{rq}^e \Big|_{r=\infty} = d \sin 2q,$$

где

$$d = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра d , будем искать решение в виде:

$$s_{ij} = s_{ij}^{(0)} + s'_{ij} d + s''_{ij} d^2 + \dots, \quad r_s = r_s^{(0)} + r'_s d + r''_s d^2 + \dots, \quad (5)$$

где r_s – радиус пластической зоны.

В дальнейшем припишем всем компонентам в упругой области индекс « e », а в пластической области индекс « p ». Все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении k_0 , все линейные размеры будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу пластической зоны в нулевом приближении $r_s^{(0)}$.

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние

$$t_{rq}^{(0)p} = 0. \quad (6)$$

Из (1), (5), (6) имеет место:

$$s_r^{(0)p} - s_q^{(0)p} = -2. \quad (7)$$

Решая совместно (4), (6), (7) получим:

$$s_r^{(0)p} = 2 \ln r + C, \quad s_q^{(0)p} = 2 + 2 \ln r + C, \quad (8)$$

где $C - const$.

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p :

$$s_r^{(0)p} \Big|_{r=a} = -p. \quad (9)$$

Из (8), (9) имеет место:

$$s_r^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{r}{a}, \quad s_q^{(0)p} = -p + 2 + 2 \ln \frac{r}{a}. \quad (10)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$s_r^{(0)e} = A - B \frac{1}{r^2}, \quad s_q^{(0)e} = A + B \frac{1}{r^2}, \quad t_{rq}^{(0)e} = 0. \quad (11)$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе определим постоянные A, B :

$$s_r^{(0)p} \Big|_{r=1} = s_r^{(0)e} \Big|_{r=1}, \quad s_q^{(0)p} \Big|_{r=1} = s_q^{(0)e} \Big|_{r=1}.$$

Откуда получим:

$$s_r^{(0)e} = q - \frac{q + p + 2 \ln a}{r^2}, \quad s_q^{(0)e} = q + \frac{q + p + 2 \ln a}{r^2}. \quad (12)$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношениями

$$2 \ln a = -p - q + 1.$$

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = r \cos q, \quad y = r \sin q,$$

из (1), (5), (6), (7) получим в первом приближении:

$$k = k_0 + \frac{d}{2a^2b^2} \left[(b^2 - a^2)r^2 \cos 2q + 4Ba^2r \sin q + 4Ab^2r \cos q + (a^2 + b^2)r^2 + 2b^2A^2 + 2a^2B^2 \right], \quad (13)$$

из (1), (5), (6), (7) получим:

$$s_q'^p - s_r'^p = \frac{1}{a^2b^2} \left[(b^2 - a^2)r^2 \cos 2q + 4Ba^2r \sin q + 4Ab^2r \cos q + (a^2 + b^2)r^2 + 2b^2A^2 + 2a^2B^2 \right]. \quad (14)$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая:

$$s_p'^p = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}, \quad s_q'^p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad t_{rq}'p = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right). \quad (15)$$

Из (14), (15) имеет место:

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} = \frac{r^2}{a^2 b^2} \left[(b^2 - a^2) r^2 \cos 2q + 4Ba^2 r \sin q + \right. \\ \left. + 4Ab^2 r \cos q + (a^2 + b^2) r^2 + 2b^2 A^2 + 2a^2 B^2 \right]. \quad (16)$$

Решение уравнения представим в виде суммы однородного и неоднородного решений:

$$\Phi = \Phi_{одн} + \Phi_{неодн}.$$

Тогда имеет место

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi_{одн}}{\partial r^2} - r \frac{\partial \Phi_{одн}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi_{одн}}{\partial q^2} = 0. \quad (17)$$

Решение будем искать в виде

$$\Phi_{одн} = R(r) \cos(nq + q_0). \quad (18)$$

Из (17), (18) получим уравнение Эйлера:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} - r \frac{dR}{dr} + n^2 R = 0. \quad (19)$$

Из (15), (18), (19) получим решения для однородного уравнения:

$$s_r' p_{одн} = C_{00} + \frac{C_{11}}{r} \cos(q) + \frac{\bar{C}_{11}}{r} \sin(q) + \\ + \frac{1}{r} \left([-3C_{21} + \sqrt{3}C_{22}] \cos(\sqrt{3} \ln r) + [-\sqrt{3}C_{21} - 3C_{22}] \sin(\sqrt{3} \ln r) \right) \cos(2q) + \\ + \frac{1}{r} \left([-3\bar{C}_{21} + \sqrt{3}\bar{C}_{22}] \cos(\sqrt{3} \ln r) + [-\sqrt{3}\bar{C}_{21} - 3\bar{C}_{22}] \sin(\sqrt{3} \ln r) \right) \sin(2q), \\ t_{rq}' p_{одн} = \frac{C_{11}}{r} \sin(q) - \frac{\bar{C}_{11}}{r} \cos(q) + \\ + \frac{1}{r} \left(2\sqrt{3}C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln r) - 2\sqrt{3}C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln r) \right) \sin(2q) + \\ + \frac{1}{r} \left(-2\sqrt{3}\bar{C}_{22} \cos(\sqrt{3} \ln r) + 2\sqrt{3}\bar{C}_{21} \sin(\sqrt{3} \ln r) \right) \cos(2q), \quad (20)$$

где $C_{00}, C_{11}, \bar{C}_{11}, C_{21}, \bar{C}_{21}, C_{22}, \bar{C}_{22}$ – некоторые постоянные.

Из (16) определим неоднородные решения для функции напряжений:

$$\Phi_{неодн} = \frac{b^2 - a^2}{12a^2 b^2} r^4 \cos 2q + \frac{B}{b^2} r^3 \sin q + \frac{A}{a^2} r^3 \cos q + \frac{a^2 + b^2}{8a^2 b^2} r^4 - \frac{1}{a^2 b^2} [B^2 a^2 + A^2 b^2] \ln r. \quad (21)$$

Из (15), (21) получим напряжения:

$$s_r' p_{неодн} = \frac{1}{2a^2 b^2} \left(4Ab^2 r \cos q + 4Ba^2 r \sin q + (a^2 + b^2) r^2 - 2b^2 A^2 \frac{1}{r^2} - 2a^2 B^2 \frac{1}{r^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
s'_q{}^{неодн} &= \frac{1}{2a^2b^2} \left(2(b^2 - a^2)r^2 \cos 2q + 12Ab^2r \cos q + 12Ba^2r \sin q + \right. \\
&\quad \left. + (3a^2 + 3b^2)r^2 + 2b^2A^2 \frac{1}{r^2} + 2a^2B^2 \frac{1}{r^2} \right) \\
t'_{rq}{}^{неодн} &= \frac{1}{2a^2b^2} \left((b^2 - a^2)r^2 \sin 2q - 4Ba^2r \cos q + 4Ab^2r \sin q \right).
\end{aligned} \tag{22}$$

Общее решение определяется суммой решений (20), (22):

$$s'_r{}^p = s'_r{}^{п одн} + s'_r{}^{неодн}, \quad t'_{rq}{}^p = t'_{rq}{}^{п одн} + t'_{rq}{}^{неодн}, \quad s'_q{}^p = s'_q{}^{п одн} + s'_q{}^{неодн}.$$

Учитывая, что внутренняя граница в первом приближении свободна от усилий

$$s'_r{}^p \Big|_{r=a} = 0, \quad t'_{rq}{}^p \Big|_{r=a} = 0, \tag{23}$$

решение в пластической зоне будет определяться из (14), (22), (23):

$$\begin{aligned}
s'_r{}^p &= \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2} (r^2 - a^2) + \\
&\quad + \left(-\frac{2Aa^2}{a^2} \frac{1}{r} + \frac{2A}{a^2} r \right) \cos q + \left(-\frac{2Ba^2}{b^2} \frac{1}{r} + \frac{2B}{b^2} r \right) \sin q - \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2r} \left(a^3 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{r}{a}) - r^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{r}{a}) \right) \cos 2q, \\
t'_{rq}{}^p &= \left(-\frac{2Aa^2}{a^2} \frac{1}{r} + \frac{2A}{a^2} r \right) \sin q + \left(\frac{2Ba^2}{b^2} \frac{1}{r} - \frac{2B}{b^2} r \right) \cos q + \\
&\quad + \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2r} \frac{\sqrt{3}a^3}{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{r}{a}) \sin 2q, \\
s'_q{}^p &= \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} + 2 \right) + \frac{(a^2 + b^2)}{2a^2b^2} (3r^2 - a^2) + \\
&\quad + \left(-\frac{2Aa^2}{a^2} \frac{1}{r} + \frac{6A}{a^2} r \right) \cos q + \left(-\frac{2Ba^2}{b^2} \frac{1}{r} + \frac{6B}{b^2} r \right) \sin q - \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2r} \left(a^3 \cos(\sqrt{3} \ln \frac{r}{a}) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln \frac{r}{a}) - 3r^3 \right) \cos 2q.
\end{aligned} \tag{24}$$

На упругопластической границе из (24) справедливо:

$$\begin{aligned}
s'_r{}^p &= a''_0 + a''_1 \cos q + b''_1 \sin q + a''_2 \cos 2q, \\
t'_{rq}{}^p &= b'''_1 \sin q + a'''_1 \cos q + b'''_2 \sin 2q,
\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
a_0'' &= \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2}(1 - a^2) + \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right), & a_1'' &= \frac{2A}{a^2}(1 - a^2), \\
b_1'' &= \frac{2B}{b^2}(1 - a^2), & a_2'' &= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \left[-a^3 \cos(\sqrt{3} \ln a) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln a) \right], \\
b_1''' &= \frac{2A}{a^2}(1 - a^2), & a_1''' &= \frac{2B}{b^2}(a^2 - 1), & b_2''' &= -\frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \sin(\sqrt{3} \ln a).
\end{aligned} \tag{27}$$

1) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$a_0'' = \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2}(1 - a^2) + \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right), \quad a_1'' = b_1'' = a_1''' = b_1''' = a_2'' = b_2'' = 0.$$

Тогда напряжения в упругой области равны:

$$\begin{aligned}
s_r'^e &= \left[\frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2}(1 - a^2) + \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) \right] \frac{1}{r^2}, \\
s_q'^e &= \left[\frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2}(a^2 - 1) + \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right] \frac{1}{r^2}, \quad t_{rq}'^e = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

2) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$a_1'' = \frac{2A}{a^2}(1 - a^2), \quad b_1''' = \frac{2A}{a^2}(1 - a^2), \quad a_0'' = a_1'' = b_1'' = a_1''' = a_2'' = b_2'' = 0.$$

Тогда напряжения будут определяться:

$$\begin{aligned}
s_r'^e &= \frac{2A}{a^2}(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \cos q, & s_q'^e &= -\frac{2A}{a^2}(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \cos q, \\
t_{rq}'^e &= \frac{2A}{a^2}(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \sin q.
\end{aligned} \tag{29}$$

3) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$b_1'' = \frac{2B}{b^2}(1 - a^2), \quad a_1''' = \frac{2B}{b^2}(a^2 - 1), \quad a_0'' = a_1'' = a_1''' = b_1'' = a_2'' = b_2'' = 0.$$

Тогда напряжения в упругой области будут определяться:

$$\begin{aligned}
s_r'^e &= \frac{2B}{b^2}(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \sin q, & s_q'^e &= -\frac{2B}{b^2}(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \sin q, \\
t_{rq}'^e &= \frac{2B}{b^2}(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \cos q.
\end{aligned} \tag{30}$$

4) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$\begin{aligned}
a_2'' &= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \left[-a^3 \cos(\sqrt{3} \ln a) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln a) \right], \\
a_0'' &= a_1'' = b_1'' = a_1''' = b_1''' = a_2'' = b_2'' = 0.
\end{aligned}$$

Тогда напряжения в упругой области будут определяться:

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime e} &= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \left[-a^3 \cos(\sqrt{3} \ln a) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln a) \right] \left(-\frac{1}{r^4} + \frac{2}{r^2} \right) \cos 2q, \\
s_q^{\prime e} &= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \left[-a^3 \cos(\sqrt{3} \ln a) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln a) \right] \frac{1}{r^4} \cos 2q, \\
t_{rq}^{\prime e} &= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \left[-a^3 \cos(\sqrt{3} \ln a) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3} \ln a) \right] \left(-\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) \sin 2q.
\end{aligned} \tag{31}$$

5) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$b_2^{\prime\prime\prime} = -\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \sin(\sqrt{3} \ln a), \quad a_0^{\prime\prime} = a_1^{\prime\prime} = b_1^{\prime\prime} = a_1^{\prime\prime\prime} = b_1^{\prime\prime\prime} = a_1^{\prime\prime\prime\prime} = a_2^{\prime\prime} = 0.$$

Тогда напряжения в упругой области будут определяться:

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime e} &= -\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3 \sin(\sqrt{3} \ln a) \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \cos 2q, \\
s_q^{\prime e} &= \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3 \sin(\sqrt{3} \ln a) \frac{1}{r^4} \cos 2q, \\
t_{rq}^{\prime e} &= -\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \sin(\sqrt{3} \ln a) \left(\frac{2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \sin 2q.
\end{aligned} \tag{32}$$

6) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$a_0^{\prime\prime} = a_1^{\prime\prime} = b_1^{\prime\prime} = a_1^{\prime\prime\prime} = b_1^{\prime\prime\prime} = a_1^{\prime\prime\prime\prime} = b_2^{\prime\prime\prime} = 0,$$

на бесконечности заданы усилия:

$$s_r^{\prime e} \Big|_{r=\infty} = a_2 \cos 2q + b_2 \sin 2q.$$

где $a_2 = -1$, $b_2^{\prime} = b_2 = a_2^{\prime} = 0$.

Тогда напряжения в упругой области имеют вид:

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime e} &= -\left[1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right] \cos 2q, \quad s_q^{\prime e} = \left[1 + \frac{3}{r^4} \right] \cos 2q, \\
t_{rq}^{\prime e} &= \left[1 + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right] \sin 2q.
\end{aligned} \tag{33}$$

Результирующее напряжение в упругой области определяется как сумма напряжений (28)–(33):

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime e} &= \left[\frac{a^2 + b^2}{2a^2 b^2} (1 - a^2) + \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) \right] \frac{1}{r^2} + 2(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \left(\frac{A}{a^2} \cos q + \frac{B}{b^2} \sin q \right) + \\
&\quad + \left(\frac{L-3}{r^4} + \frac{\bar{L}+4}{r^2} - 1 \right) \cos 2q,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s'_q{}^e &= \left[\frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2} (a^2 - 1) + \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right] \frac{1}{r^2} - 2(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \left(\frac{A}{a^2} \cos q + \frac{B}{b^2} \sin q \right) + \\
&\quad + \left(-\frac{L-3}{r^4} + 1 \right) \cos 2q, \\
t'_{rq}{}^e &= 2(1 - a^2) \frac{1}{r^3} \left(\frac{A}{a^2} \sin q + \frac{B}{b^2} \cos q \right) + \left(\frac{L-3}{r^4} + \frac{\bar{L}+2}{r^2} + 1 \right) \sin 2q, \quad (34)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L &= \frac{b^2 - a^2}{2a^2b^2} \left[a^3 \cos(\sqrt{3} \ln a) + \frac{\sqrt{3}}{3} (-4a^3 + 1) \sin(\sqrt{3} \ln a) - 1 \right], \\
\bar{L} &= \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} \left[-a^3 \cos(\sqrt{3} \ln a) + \frac{\sqrt{3}}{3} (2a^3 - 1) \sin(\sqrt{3} \ln a) + 1 \right].
\end{aligned}$$

Из (12) получим:

$$\left. \frac{ds_q^{(0)p}}{dr} \right|_{r=1} = 2, \quad \left. \frac{ds_q^{(0)e}}{dr} \right|_{r=1} = -2,$$

тогда для радиуса упругопластической области в первом приближении получим:

$$r'_s = \frac{s'_q{}^p - s'_q{}^e}{\frac{ds_q^{(0)e}}{dr} - \frac{ds_q^{(0)p}}{dr}} = \frac{1}{4} (s'_q{}^e - s'_q{}^p).$$

Из (24), (34) получим радиус упругопластической области в первом приближении:

$$\begin{aligned}
r'_s &= -2 \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} \right) + \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} (a^2 - 2) + 4(a^2 - 2) \frac{A}{a^2} \cos q + \\
&\quad + 4(a^2 - 2) \frac{B}{b^2} \sin q + \frac{2(b^2 - a^2)}{a^2b^2} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} a^3 \sin(\sqrt{3} \ln a) - 1 \right] \cos 2q. \quad (35)
\end{aligned}$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической (24) и упругой (34) полностью определено, изменение границы пластической зоны определяется из соотношений (35).

г. Чебоксары

Поступила: 15 апреля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин, Б. Д. Упруго-пластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
2. Галин, Л. А. Плоская упругопластическая задача / Л.А. Галин // Прикладная математика и механика. – 1946. – Т. 10. – №3.
3. Максимова, Л. А. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Максимова Л. А., Тихонов С. В. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – №2.
4. Черепанов, Г. П. Об одном методе решения упругопластической задачи / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27. – №3.

1. **«Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния».** Статья должна быть подписана автором и представлена вместе с дискетой или выслана на электронные адреса редакции: ivlev21@mail.ru, strangcheb@mail.ru.

2. Авторы представляют статьи, набранные на компьютере в текстовом редакторе Microsoft Word (7.0, 6.0 версии). Формат бумаги – А4, поля: справа, слева и сверху 3 см, снизу 6 см.

3. Размер шрифта – 11. Абзацный отступ – 1 см. Интервал – одинарный. Текст статьи набирается шрифтом Times New Roman с выравниванием по ширине и автоматическим переносом слов. Страницы не нумеруются. Заголовок пишется жирным шрифтом заглавными буквами. Фамилия и инициалы автора даются курсивом в правом верхнем углу над заголовком.

4. **Иллюстрации:**

должны быть пронумерованы и упомянуты в тексте;
подрисовочные подписи выполняются шрифтом размера 9.

5. **Формулы** и буквенные обозначения по тексту должны быть набраны в среде редактора формул Microsoft Equation 3.0. Шрифт для греческих букв – Symbol, для всех остальных – Times New Roman, основной размер – 11, крупный индекс – 7, мелкий – 5.

В формулах следует избегать громоздких обозначений. Формулы располагаются по центру страницы. В случае необходимости формулы нумеруются.

6. **Таблицы** выполняются шрифтом 9. Они могут быть с заголовками и без них. Заголовок набирается полужирным шрифтом 9. Таблицы необходимо пронумеровать и упомянуть в тексте.

7. **Список литературы** набирается по алфавиту шрифтом Times New Roman размера 9. Фамилия и инициалы автора или первое слово в названии издания (если нет автора) выделяются курсивом.

Ссылки на используемую литературу даются внутри текста в квадратных скобках. Например: [1, 23], где 1 – порядковый номер в списке использованной литературы, 23 – номер страницы.

8. **Сведения об авторах «Вестника ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния»** включают фамилию, имя и отчество автора, данные об ученой степени и занимаемой должности. Например, *Ивлев Дюис Данилович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева.

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

Ивлев Д. Д., Матченко Н. М.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

*Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева,
Тульский государственный университет*

В работе [1] определены три состояния идеально пластического материала. Пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде одной гладкой функции текучести

$$f(\mathbf{s}_{ij})=0. \quad (1)$$

Развитое пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде пересечения двух гладких функций текучести

$$f_1(\mathbf{s}_{ij})=0, f_2(\mathbf{s}_{ij})=0, \quad (2)$$

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СПИСКА ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быковцев, Г. И.* О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек / Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 68–76.
2. *Киряков, П. П.*, Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.
3. *Кроха, В. А.* Упрочнение металлов при холодной пластической деформации : справочник / В. А. Кроха. – М. : Машиностроение, 1980. – 157 с.
4. *Одинокоев, В. И.* Разрушение льда под действием гидростатического давления на подведенном плавающем контейнере с учетом его заполнения водой / В. И. Одинокоев, А. М. Сергеева // Механика микронеоднородных материалов и разрушение : тезисы докладов IV Всероссийского семинара (Екатеринбург, 23–24 марта 2006 г.). – Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. – С. 43.
5. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 396 с.
6. *Maugin, G. A.* The Thermomechanics of Plasticity and Fracture / G. A. Maugin. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 350 p.
7. *Radayev, Y. N.* On directional average of the local anisotropic damage / Y. N. Radayev // Int. J. Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 293–307.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ
НАГРУЖЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД
С ПЕРЕМЕННЫМ МОДУЛЕМ СДВИГА

(Московский государственный университет приборостроения и информатики)

По существующим теориям пластичности упругие свойства материала не зависят от пластической деформации. Однако это не согласуется с данными многочисленных экспериментов. В фундаментальной работе Жукова А. М. [1] выявлена зависимость упругих свойств металла от пластической деформации. Уменьшение модуля сдвига, как было установлено для стали 45, достигло 20%. Bieniawski Z. T. [3], проводя эксперименты с бетоном и скальным грунтом, обнаружил сильное (в 6–7 раз) уменьшение упругих модулей. Несмотря на это, до настоящего времени отсутствуют адекватные модели и эффективные методики расчета для оценки и предсказания поведения модулей упругости при динамических нагрузках.

С опорой на определяющие соотношения [2] получена замкнутая система разрешающих уравнений, описывающая динамические процессы в случае обобщенной модели Мизеса-Шлейхера с учетом разупрочнения и переменных упругих свойств.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о продольно-сдвиговом динамическом воздействии на пластину в условиях одноосно-деформированного состояния.

Пусть ось x ортогональна поверхности пластины, оси y и z направлены вдоль нее. В этом случае отличными от нуля являются две компоненты вектора скорости – продольная u и поперечная v , зависящие от координаты x и от времени t . Отличными от нуля будут также две компоненты тензора полных деформаций e_x и e_{xy} , причём $\dot{e}_x = \frac{\partial u}{\partial x}$,

$\dot{e}_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}$, компоненты тензора напряжений $s_x, s_y = s_z, s_{xy}$. Тензор пластических деформаций имеет ненулевые компоненты $e_x^p, e_y^p = e_z^p, e_{xy}^p$.

В качестве условия пластичности принимается обобщенное условие Мизеса-Шлейхера, которое в случае рассматриваемого одноосно-деформированного состояния в пространстве деформаций имеет следующий вид:

$$y = 2G \sqrt{\frac{2}{3} (e_x - e_x^p + e_y^p)^2 + 2(e_{xy} - e_{xy}^p)^2} - F, \quad (1)$$

где F – функция, зависящая от полных и необратимых деформаций;

$F' \equiv \frac{\partial F}{\partial p}$, p – первый инвариант тензора напряжений (давление), выраженный через

полные и пластические объёмные деформации $p = K(\mathbf{q} - \mathbf{q}^p)$;

$\mathbf{q} = \mathbf{e}_x$ – полная объёмная деформация;

$\mathbf{q}^p = \mathbf{e}_x^p + 2\mathbf{e}_y^p$ – объёмная пластическая деформация;

G – переменный модуль сдвига, зависящий от объёмной пластической деформации

$G = G(\mathbf{q}^p)$.

Динамический процесс продольно-сдвигового нагружения описывается следующей системой 8 уравнений относительно 8 неизвестных функций

$u, v, \mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_{xy}, \mathbf{e}_x^p, \mathbf{e}_y^p, \mathbf{e}_{xy}^p$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{s}_{xy}}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial t} - \left[\left(K + \frac{4}{3}G \right) \frac{H}{H_e} \left[\left(KF' - \frac{8G^2A}{3F} \right)^2 - \frac{4A}{3} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \left(\frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) \right] \right] \frac{\partial u}{\partial x} - \\
 & \quad - \frac{4G^2BH}{FH_e} \left[\left(KF' - \frac{8G^2A}{3F} \right) - \frac{4A}{3} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{4A}{3} \frac{dG}{dq^p} = 0, \\
 & \frac{\partial \mathbf{s}_y}{\partial t} - \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) + \frac{H}{H_e} \left[\left(KF' + \frac{4G^2A}{3F} \right) \left(\frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \left(\frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) \right] \right] \frac{\partial u}{\partial x} - \\
 & \quad - \frac{4G^2BH}{FH_e} \left[\left(KF' + \frac{4G^2A}{3F} \right) + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} = 0, \\
 & \frac{\partial \mathbf{s}_{xy}}{\partial t} + \frac{2GH}{H_e} \left[\left(\frac{2GB}{F} + \frac{B}{G} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \left(\frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x} - \\
 & \quad - \left[G - \frac{8G^3BH}{FH_e} \left(\frac{2GB}{F} + \frac{B}{G} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} - 2B \frac{dG}{dq^p} = 0, \\
 & \frac{\partial \mathbf{e}_x^p}{\partial t} - \frac{H}{3H_e} \left(\frac{4GA}{F} - F' \right) \left(\frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) \left(1 + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \\
 & \quad - \frac{4G^2BH}{FH_e} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \left(1 + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e_y^p}{\partial t} + \frac{H}{H_e} \left(\left(\frac{2GA}{3F} + \frac{F'}{3} \right) + \frac{1A}{3G} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \left(\frac{8G^2 A}{3F} - KF' \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ & + \frac{4G^2 BH}{FH_e} \left(\left(\frac{2GA}{3F} + \frac{F'}{3} \right) + \frac{1A}{3G} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ & \frac{\partial e_{xy}^p}{\partial t} - \frac{H}{H_e} \left(\frac{2GB}{F} + \frac{B}{G} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \left(\frac{8G^2 A}{3F} - KF' \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \\ & - \frac{4G^2 BH}{FH_e} \left(\frac{2GB}{F} + \frac{B}{G} \frac{dG}{dq^p} \left(\frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

где r – плотность среды, K – коэффициент объемного расширения-сжатия,

$$\begin{aligned} A &= e_x - e_x^p + e_y^p, & B &= e_{xy} - e_{xy}^p, \\ H &= H_1 H_2, & H_1 &= H_1(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases} & H_2 &= H_2(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3) \\ \mathbf{y} &= \left(\frac{8G^2 A}{3F} - KF' \right) \mathbf{e}_x + \frac{8G^2 B}{F} \mathbf{e}_{xy}. \end{aligned}$$

Функция упрочнения:

$$\begin{aligned} H_e &= 2G + K(F')^2 - \frac{F'}{3} \left(\frac{\partial F}{\partial e_x^p} + 2 \frac{\partial F}{\partial e_y^p} \right) + \frac{4G}{3F} \left[A \left(\frac{\partial F}{\partial e_x^p} - \frac{\partial F}{\partial e_y^p} \right) + 3B \frac{\partial F}{\partial e_{xy}^p} \right] - \\ & - \frac{2F'}{3G} \frac{dG}{dq^p} \left[A \left(\frac{\partial F}{\partial e_x^p} - \frac{\partial F}{\partial e_y^p} \right) + 3B \frac{\partial F}{\partial e_{xy}^p} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Зависимость модуля сдвига от объемной деформации q^p принималась в виде:

$$G = G_0 e^{-L(q^p)^2}, \quad (5)$$

где $G_0 = 7,7 \text{ ГПа}$ – начальный модуль сдвига;

L – некоторая константа ($L = 1 \cdot 10^4$).

Изменение функции F задавалось в следующем виде:

$$F = kp + C_0 - a \sqrt{I_2^p}. \quad (6)$$

Положительным значениям a соответствует разупрочнение, отрицательным a – упрочнение, а при $a = 0$ имеет место идеальная пластичность. Коэффициент k для модельного материала равен 0.3.

При расчётах использовалось традиционное обезразмеривание переменных:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{tc_l}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{c_l}, \quad \bar{v} = \frac{v}{c_l}, \quad \bar{s}_x = \frac{s_x}{rc_l^2}, \quad \bar{s}_y = \frac{s_y}{rc_l^2}, \quad (7)$$

$$\bar{s}_{xy} = \frac{s_{xy}}{rc_l^2}, \quad c_l = \sqrt{\frac{1}{r}K}; \quad L - \text{толщина пластины.}$$

Модельные эксперименты проводились для 2-х случаев нагружения.

На левой поверхности пластины заданы «ступеньки» продольной и сдвиговой составляющих скорости:

$$\bar{u} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,002, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \bar{v} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,008, & t \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

- 1) с постоянным модулем сдвига;
- 2) при расчетах учитывается уменьшение модуля сдвига.

Для всех трех случаев значения остальных функций в начальный момент времени равны нулю. Рассматривалась среда с разупрочнением $\bar{\alpha} = 0,01$.

2. Результаты численного моделирования. Решение сформулированной задачи проводилось с помощью явной однородной конечно-разностной схемы Лакса-Вендроффа.

Расчёты выполнялись для модельного материала, со следующими деформационными и прочностными характеристиками: плотность – 2500 кг/м^3 , $G = 7,7 \text{ ГПа}$, $K = 8,4 \text{ ГПа}$, $C_0 = 40 \text{ МПа}$.

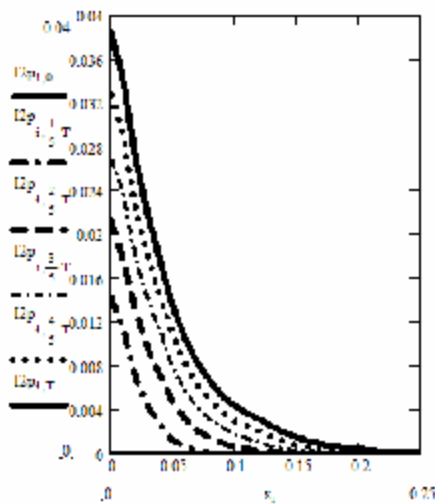


Рис. 1. Интенсивность пластических деформаций сдвига I_2^p в различные моменты времени. Модуль сдвига постоянен

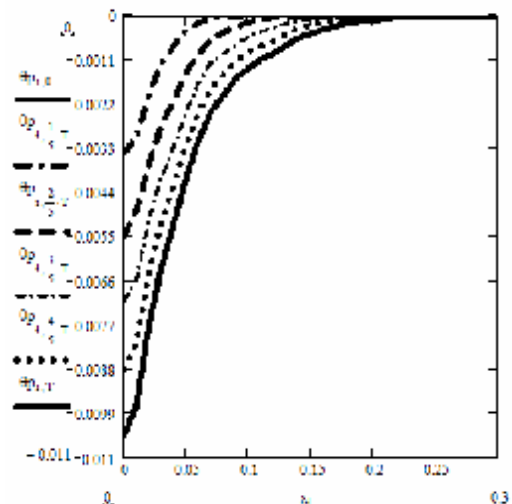


Рис. 2. Объемная пластическая деформация Q_2^p в различные моменты времени. Модуль сдвига постоянен

На рис. 1 – 2 приведены графики для второго инварианта тензора пластических деформаций (интенсивности пластических деформаций) и пластической объёмной деформации для первого случая. На рис. 3 – 5 приведены результаты для второго случая:

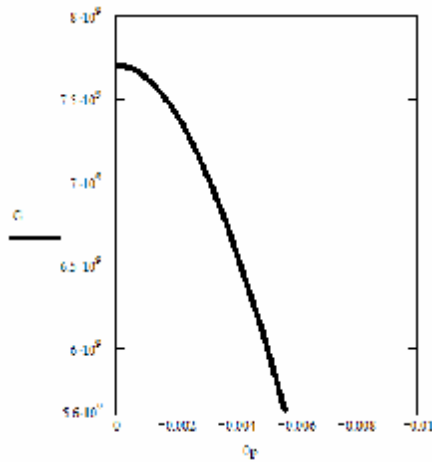


Рис. 3. $G = G_0 e^{-L(q^P)^2}$

рис. 3 – график зависимости модуля сдвига от пластической объёмной деформации; рис. 4 – график интенсивности пластических деформаций; рис. 5 – пластическая объёмная деформация.

Как показывает анализ результатов численного моделирования, изменение упругого модуля сильно влияет на изменение интенсивности пластических деформаций сдвига и объёмной пластической деформации. Из рис. 3 видно, что модуль сдвига уменьшается на 25%. Необходимо отметить, что увеличение скорости или рост коэффициента интенсивности разупрочнения приводит к более сильному падению модуля сдвига.

Графики рис. 1 и рис. 4 показывают

существенное изменение интенсивности пластических деформаций сдвига, оно составило 45% , при учете уменьшения упругого модуля. Объёмная пластическая деформация рис. 2 и рис. 5 уменьшается на 40%.

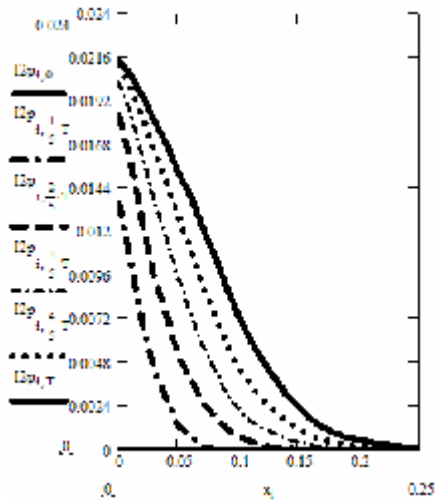


Рис. 4. Интенсивность пластических деформаций сдвига I_2^P в различные моменты времени

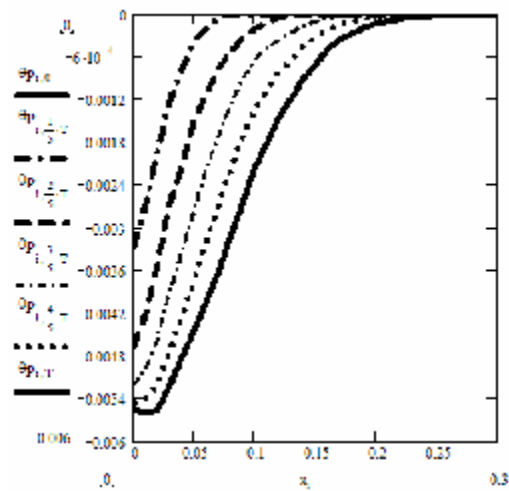


Рис. 5. Объёмная пластическая деформация Q_2^P в различные моменты времени

г. Москва

Поступила: 15 ноября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков, А. М. Упругие свойства пластически деформированного металла и сложное нагружение / А. М. Жуков. – Ин. механики АН СССР. – Инж. сб. – 1960 – Т. XXX. – С. 3–16.
2. Зуев, В.В. Определяющие соотношения и динамические задачи для упруго-пластических сред с усложненными свойствами / В. В. Зуев. – М. : ФМ. – 2006. – 174 с.
3. Bieniawski, Z. T. Deformational behavior of fractured rock under multiaxial compression / Z. T. Bieniawski // Proc. Struct. Solid Mech. Engng. Design. Southampton. – Part 1. – 1969. – P. 589–598.

ON THE DESIGN OF FLAW-TOLERANT SPACE ELEVATOR CABLES

(Department of Structural Engineering and Geotechnics, Politecnico di Torino)

ABSTRACT

In this paper we discuss the recent news@nature “The space elevator: going down? Study shows that proposed carbon nanotube cables won’t hold up” related to our recent findings on the role of defects in the carbon nanotube-based space elevator megacable.

Keywords: space elevator, megacable, nanotube, defect, strength

1. INTRODUCTION

A *space elevator* [1] basically consists of a cable attached to a planet surface for carrying payloads into space. If the cable is long enough the centrifugal forces exceed the gravity of the cable, that will work under tension; for the Earth this critical length is of the order of a hundred of megameters [2]. The most critical component in the space elevator design is undoubtedly the megacable, which requires a material with very high strength-density ratio [2]. Carbon nanotubes are thus ideal candidates to build such a megacable, as suggested by their low density and huge strength, recently measured by nano-tensile tests [3,4].

An optimized megacable must have a uniform tensile stress profile rather than a constant cross-sectional area [2], with a taper-ratio, defined as the ratio between the maximum (at the geosynchronous orbit) and minimum (at the planet surface) cross-sectional area, which is an exponential function of the strength-density ratio. Accordingly, the megacable could in principle be built by any material with a sufficiently large taper-ratio. For example, for steel this value is $\sim 10^{33}$, whereas for carbon nanotubes it must theoretically be only 1.9. Thus, the feasibility of the space elevator seems to become only currently plausible [5,6] thanks to the discovery of carbon nanotubes. But basing the design of the megacable on the theoretical strength of a single carbon nanotube, as in the current proposal, is naïve [7], as recently emphasized in the following related news@nature, written by J. Palmer:

“The space elevator: going down? Study shows that proposed carbon nanotube cables won’t hold up. Is it possible to make a cable for a space elevator out of carbon nanotubes? Not anytime soon, if ever, says Nicola Pugno of the Polytechnic of Turin, Italy. Pugno's calculations show that inevitable defects in the nanotubes mean that such a cable simply wouldn't be strong enough. The idea of a space elevator was popularized in science fiction, where writers envisioned a 100,000-kilometre-long cable stretching straight up from the Earth's surface and

fixed in a geosynchronous orbit. Payloads, or tourists, would simply ascend the cable into low-Earth orbit, eliminating the need for rocket launches. When carbon nanotubes were discovered to have an incredibly high strength-to-weight ratio, researchers hoped they would take the idea out of fiction and bring it into reality. But Pugno argues that atomic-scale defects in the nanotubes would reduce the strength of such a giant cable by at least 70%. **Space ribbon.** Researchers think that the best shape for a space-elevator cable would be a ribbon, about a metre wide and as thin as paper. It would need to withstand at least 62 gigapascals (GPa) of tension. That's about as much as in the rope of a tug-of-war with more than 100,000 people on each side. Laboratory tests have shown that individual nanotubes can withstand an average of about 100 GPa, an unusual strength that comes courtesy of their crystalline structure. But if a nanotube is missing just one carbon atom, this can reduce its strength by as much as 30%. And a bulk material made from such tubes is even weaker. Most fibres made from nanotubes have so far had a strength much lower than 1 GPa. Recent measurements of high-quality nanotubes have found them to be missing one carbon atom out of every 10^{12} bonds; that's about one defect over 4 micrometres of nanotube length. Defects of two or more missing atoms are much more rare, but Pugno points out that on the scale of the space elevator they become statistically probable. Using a mathematical model that he has devised himself, and which has been tested by predicting the strength of materials such as nano-crystalline diamond, Pugno calculates that large defects will unavoidably bring a cable's strength below about 30 GPa. His paper has been posted to arXiv, and will appear in the July edition of the *Journal of Physics: Condensed Matter*. Pugno adds that even if flawless nanotubes could be made for the space elevator, damage from micro-meteorites and even erosion by oxygen atoms would render them weak. So can a space elevator be made? "With the technology available today? Never," he says. **Never say never.** This comes in sharp contrast to claims made by Bradley Edwards, whose space elevator feasibility study for NASA and a subsequent book have made him the most frequent spokesman for the project. Edwards, who is president and founder of the Dallas-based company Carbon Designs, shrugs off the controversy, and says that with adequate funding he could make cables at or above the 62-GPa benchmark in just three years. He suggests that the key step is carefully spinning long nanotubes together in a close-packed way, which encourages cooperative frictional forces that make the strengths of individual nanotubes less crucial. Pugno counters that the larger defects critically weaken the cable, no matter what its construction. And lab efforts thus far don't seem to inspire much optimism. Ray Baughman, director of the NanoTech Institute in Dallas, published a paper in *Science* last year demonstrating metre-long cables spun in a similar way to Edwards' preferred design. But these too had a strength well below 1 GPa. Baughman says Pugno's results aren't surprising. It has been known for decades that crystalline materials are sensitive to defects, and that they show a clear drop in strength with increasing size. But he adds that a solution may one day be found. The space elevator, he says, "won't happen in my lifetime, but I don't like to say never".

Table 1: Defect sizes and shapes identification (a,b) and related flaw tolerant taper-ratios $I(a,b)$ according to the present analysis applied to nano-tensile tests [3,4]. In bold type are treated the 15 different tensile tests of single walled carbon nanotubes in bundle [3], whereas in underlined type the 19 tests on multi walled carbon nanotubes [4]. All the data are reported with the exception of the three smallest values of 0.11, 0.12 [4] and 0.13 [3], for which we would need for example adjacent vacancies ($2b/q \sim 1$) in number $2a/q=75-89$, 64-74 and 55-63 and related flaw tolerant taper-ratios of 267-437, 175-267 and 121-168 respectively.

$I(a,b)$ $2a/q$	$2b/q$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
0	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90	1.90
1	2.48	2.37	2.25	2.18	2.13	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02	2.01	1.90
2	3.04	2.91	2.73	2.59	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.21	2.19	1.90
3	3.61	3.48	3.25	3.04	2.87	2.74	2.64	2.56	2.49	2.44	2.39	1.90
4	4.20	4.06	3.79	3.53	3.30	3.12	2.97	2.86	<u>2.76</u>	2.68	2.61	1.90
5	4.82	4.67	4.36	4.04	3.76	3.53	3.34	3.18	3.05	2.94	2.85	1.90
6	5.46	5.31	4.97	4.60	4.26	3.97	3.73	3.53	3.36	3.23	3.11	1.90
7	<u>6.14</u>	5.98	5.60	<u>5.18</u>	4.78	4.44	4.15	3.90	3.70	3.53	3.39	1.90
8	6.86	<u>6.68</u>	<u>6.28</u>	5.80	5.34	4.94	4.59	4.30	4.06	3.85	3.68	1.90
9	7.61	7.43	6.99	<u>6.46</u>	5.94	5.47	5.07	4.73	4.44	4.20	3.99	1.90
10	8.40	8.21	7.74	7.16	<u>6.57</u>	6.04	5.58	<u>5.19</u>	4.85	4.57	4.33	1.90
11	9.24	9.03	8.53	7.89	7.25	<u>6.65</u>	<u>6.12</u>	5.67	<u>5.29</u>	4.96	4.68	1.90
12	<u>10.12</u>	<u>9.90</u>	9.36	8.67	7.96	7.29	<u>6.70</u>	<u>6.19</u>	5.75	5.38	5.06	1.90
13	11.04	10.81	<u>10.23</u>	9.49	8.71	7.97	7.31	6.74	<u>6.24</u>	5.82	5.46	1.90
14	<u>12.01</u>	<u>11.77</u>	11.16	10.35	9.50	8.69	7.96	7.32	<u>6.76</u>	<u>6.29</u>	5.88	1.90
15	13.03	12.78	12.13	11.26	10.34	9.45	8.65	7.93	7.31	<u>6.78</u>	<u>6.32</u>	1.90
16	14.10	<u>13.84</u>	13.15	<u>12.22</u>	11.23	10.26	9.37	8.58	7.90	7.31	6.80	1.90
17	<u>15.23</u>	<u>14.95</u>	<u>14.22</u>	13.23	12.16	11.11	10.14	9.27	8.51	7.86	7.29	1.90
18	16.41	16.11	<u>15.34</u>	<u>14.29</u>	13.14	12.00	10.94	<u>9.99</u>	9.16	8.44	7.82	1.90
19	17.65	17.33	16.52	15.41	<u>14.17</u>	12.94	<u>11.79</u>	10.76	<u>9.85</u>	9.06	8.37	1.90
20	18.94	18.62	17.76	16.57	15.25	13.93	12.69	11.57	<u>10.57</u>	9.71	8.96	1.90
21	<u>20.30</u>	<u>19.96</u>	<u>19.05</u>	17.80	16.39	14.97	<u>13.63</u>	12.41	<u>11.33</u>	10.39	<u>9.57</u>	1.90
22	<u>21.72</u>	<u>21.36</u>	<u>20.41</u>	<u>19.08</u>	17.58	16.06	14.62	<u>13.31</u>	12.14	<u>11.11</u>	10.22	1.90
23	<u>23.21</u>	<u>22.83</u>	<u>21.83</u>	<u>20.43</u>	<u>18.84</u>	17.21	15.66	<u>14.24</u>	<u>12.98</u>	11.87	<u>10.90</u>	1.90
24	<u>24.76</u>	<u>24.37</u>	<u>23.32</u>	<u>21.84</u>	<u>20.15</u>	18.42	16.76	15.23	<u>13.86</u>	12.66	<u>11.61</u>	1.90
25	26.39	25.98	24.88	23.32	21.52	19.68	17.90	16.26	14.79	13.49	12.36	1.90
26	28.08	27.66	<u>26.50</u>	<u>24.86</u>	22.96	21.00	19.10	17.35	15.77	<u>14.37</u>	<u>13.14</u>	1.90
27	29.86	29.41	28.20	<u>26.47</u>	24.47	22.38	20.36	18.49	16.79	15.29	13.97	1.90
28	<u>31.71</u>	<u>31.24</u>	<u>29.97</u>	<u>28.16</u>	26.04	<u>23.83</u>	<u>21.68</u>	<u>19.68</u>	17.87	16.25	14.83	1.90
29	<u>33.64</u>	<u>33.15</u>	<u>31.83</u>	<u>29.92</u>	27.68	<u>25.35</u>	<u>23.06</u>	<u>20.93</u>	<u>18.99</u>	17.26	15.74	1.90
30	35.65	35.14	33.76	31.75	29.40	26.93	24.51	22.24	20.17	18.32	16.68	1.90
31	<u>37.75</u>	<u>37.22</u>	<u>35.77</u>	<u>33.67</u>	31.20	28.59	<u>26.02</u>	<u>23.60</u>	<u>21.40</u>	<u>19.42</u>	<u>17.68</u>	1.90
32	39.93	39.38	<u>37.87</u>	<u>35.67</u>	<u>33.07</u>	<u>30.32</u>	<u>27.60</u>	<u>25.03</u>	<u>22.69</u>	<u>20.58</u>	<u>18.71</u>	1.90
33	42.21	41.63	40.06	<u>37.75</u>	<u>35.02</u>	<u>32.12</u>	<u>29.25</u>	<u>26.53</u>	<u>24.03</u>	<u>21.79</u>	<u>19.80</u>	1.90
34	44.58	43.98	42.34	39.92	<u>37.06</u>	<u>34.00</u>	<u>30.97</u>	<u>28.09</u>	<u>25.44</u>	<u>23.05</u>	<u>20.93</u>	1.90
35	47.05	46.42	44.71	42.19	39.18	<u>35.97</u>	<u>32.76</u>	<u>29.72</u>	<u>26.91</u>	<u>24.37</u>	<u>22.12</u>	1.90
36	49.61	48.97	47.18	44.54	41.39	38.01	34.64	31.42	28.44	25.75	23.36	1.90
37	52.28	51.61	49.75	46.99	43.69	40.14	36.59	33.19	30.04	27.19	24.65	1.90
38	55.06	54.36	52.42	49.54	46.09	42.36	38.62	35.04	31.71	28.69	25.99	1.90
39	57.94	57.21	55.19	52.20	48.58	44.68	40.74	36.97	33.45	30.26	27.40	1.90
40	60.94	60.18	58.08	54.96	51.18	47.08	42.95	38.97	35.27	31.89	28.86	1.90
41	64.05	63.27	61.08	57.82	53.87	49.59	45.25	41.06	<u>37.16</u>	<u>33.59</u>	<u>30.39</u>	1.90
42	67.28	66.47	64.19	60.80	56.68	52.19	47.64	43.24	<u>39.12</u>	<u>35.36</u>	<u>31.98</u>	1.90
43	70.64	69.79	67.43	63.89	59.59	54.90	50.13	45.51	<u>41.17</u>	<u>37.21</u>	<u>33.64</u>	1.90
44	74.12	73.24	70.79	67.11	62.62	57.71	52.72	47.86	43.31	<u>39.13</u>	<u>35.36</u>	1.90
45	77.73	76.82	74.27	70.44	65.76	60.64	55.41	50.31	45.52	41.13	<u>37.16</u>	1.90
46	81.48	80.53	77.88	73.90	69.03	63.68	58.20	52.86	47.83	43.21	<u>39.03</u>	1.90

47	85.36	84.38	81.63	77.49	72.41	66.83	61.10	55.51	50.23	45.37	40.97	1.90
48	89.39	88.37	85.52	81.22	75.93	70.10	64.12	58.26	52.72	47.61	42.99	1.90
49	93.56	92.51	89.55	85.08	79.57	73.50	67.25	61.12	55.31	49.95	45.09	1.90
50	97.88	96.79	93.72	89.08	83.35	77.02	70.50	64.08	58.00	52.38	47.27	1.90
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$1.9^{(1+2a/b)}$

Thus, is the elevator out of order?

2. ELEVATOR OUT OF ORDER?: FROM A NANO- TO A MEGA-TUBE

By considering (Dynamic) Quantized Fracture Mechanics [8-10], the ratio between the failure stress σ_N and its theoretical (defect-free) value $\sigma_N^{(theo)}$ for a nanotube having atomic size q (the “fracture quantum”) and containing an elliptical hole of half-axes a , perpendicular to the applied load (or nanotube axis), and b can be determined including in the asymptotic solution [9] the contribution of the far field stress. Imposing the force equilibrium for a cable composed by a numerical fraction f of defective nanotubes containing identical holes allows one to derive the cable strength reduction as a function of that of the nanotubes. Thus, a taper-ratio I larger than its theoretical value (for carbon nanotubes $I^{(theo)} \approx 1.9$) would consequently be required for the megacable to be flaw tolerant against the propagation of an elliptical hole of half-axes a and b . We find the results reported in Table 1. Designing the megacable with the theoretical taper-ratio, as in the current proposal [5,6], would surely lead to its failure [7]. In contrast, Table 1 can help in designing flaw-tolerant megacable.

In fact, defects are statistically expected in such huge a bundle [11]. At the thermal equilibrium the vacancy fraction $n/N \ll 1$ is estimated as $n/N \approx e^{-E_1/k_B T}$, where $E_1 \approx 7\text{eV}$ is the energy required to remove one carbon atom and T is the absolute temperature at which the carbon is assembled, typically in the range between 2000 and 4000K. Thus, $n/N \approx 2.4 \times 10^{-18} - 1.6 \times 10^{-9}$. For the megacable, having a carbon weigh of $\sim 5000\text{Kg}$, the total number of atoms is $N \approx 2.5 \cdot 10^{29}$ thus a huge number of equilibrium defects, in the range $0.6 \cdot 10^{12} - 3.9 \cdot 10^{20}$ is expected, in agreement with a recent discussion [11] and observations [12]. Note that $n \propto N$, thus larger is weaker [13], i.e., further strength reductions are expected by increasing the size-scale from a nano- to a mega-tube, as recently discussed [7] and observed on meter-long carbon nanotube bundles [14].

By applying our treatment [8-10] to the results of each nano-tensile test on carbon nanotubes [3,4], we can identify plausible sizes and shapes for the most critical defect that has caused the nanotube fracture. Multiple nonlinear solutions clearly emerge; the results of our defect identification are reported in Table 1. Thus, assuming such plausible defects in the nanotubes composing the megacable, we deduce the corresponding flaw tolerant taper-ratios, see Table 1. Such huge taper-ratios, found to be two orders of magnitude larger than its theoretical value, are sufficient to place in doubt the effective realization of the Earth’s space elevator with the current technology and knowledge. Thus, assuming for the megacable the ideal strength of the nanotube, or the ideal taper-ratio, as in the current design [5,6], is naïve [7]: further studies on the role of defects are required [15], in parallel to the development of new technologies [16] capable of minimizing the thermodynamically unavoidable defects and align them along the megacable axis, as suggested by our results (see Table 1).

3. CONCLUSIONS

If the megacable will be designed assuming a strength of a defect-free nanotube, as in the current proposal [5,6], it will break [7]. Larger taper ratios, perhaps technologically unfeasible, are needed for a flaw tolerant design [15], as suggested by our calculations.

ACKNOWLEDGEMENT

Supports by the Italian Ministry of University and Research (MIUR) is gratefully acknowledged.

REFERENCES

1. *Artsutanov, Y. V.* Kosmos na Elektrovoze Komsomolskaya Pravda, July 31 (1960); contents described in Lvov / Y. V. Artsutanov // *V. Science.* –1967. –V. 158. – P. 946–947.
2. *Pearson, J.* The orbital tower: a spacecraft launcher using the Earth's rotational energy / J. Pearson // *Acta Astronautica.* – 1975. –V. 2. – P. 785–799.
3. *Yu, M. F.* Tensile loading of ropes of single wall carbon nanotubes and their mechanical properties / M. F. Yu, B. S. Files, S. Arepalli, R. Ruoff // *Physical Review Letters.* – 2000. – V. 84. – P. 5552–5555.
4. *Yu, M. F.* Strength and breaking mechanism of multiwalled carbon nanotubes under tensile load / M. F. Yu, O. Lourie, M. J. Dyer, K. Moloni, T. F. Kelly, R. Ruoff // *Science.* –2000. – V. 287. – P. 637–640.
5. *Edwards, B. C.* Design and deployment of a space elevator / B. C. Edwards // *Acta Astronautica.* – 2000. – V. 10. – P. 735–744.
6. *Edwards, B. C., Westling, E. A.* The Space Elevator: A Revolutionary Earth-to-Space Transportation System. Spageo Inc / B. C. Edwards, E. A. Westling. – 2003.
7. *Pugno, N.* On the strength of the nanotube-based space elevator cable: from nanomechanics to megamechanics /N. Pugno // *Journal of Physics – Condensed Matter.* – 2006. – V. 18. – P. 1971–1990.
8. *Pugno, N.* A quantized Griffith's criterion / N. Pugno // *Fracture Nanomechanics: Meeting of the Italian Group of Fracture* (September, Vigevano, Italy). – 2002. – P. 25–26.
9. *Pugno, N.* Quantized Fracture Mechanics /N. Pugno, R. Ruoff // *Philosophical Magazine.* –2004. – V. 84. – P. 2829–2845.
10. *Pugno, N.,* Dynamic Quantized Fracture Mechanics / N. Pugno // *Int. J. of Fracture.* – 2006. – V. 140. – P. 159–168.
11. *Bhadeshia, H. K.* 52nd Hatfield Memorial Lecture - Large chunks of very strong steel / H. K. Bhadeshia, D. H. Bhadeshia // *Materials Science and Technology.* – 2005. – V. 21. – P. 1293–1302.
12. *Fan, Y.* Identifying and counting point defects in carbon nanotubes / Y. Fan, B. R. Goldsmith, P. G. Collins // *Nature materials.* – 2005. – V. 4. – P. 906–911.
13. *Carpinteri, A.* Are the scaling laws on strength of solids related to mechanics or to geometry? / A. Carpinteri, N. Pugno // *Nature Materials.* – 2005. – V. 4. – P. 421–423.
14. *Zhang, M.* Strong, transparent, multifunctional, carbon nanotube sheets /M. Zhang, S. Fang, A. A. Zakhdov, S. B. Lee, A. E. Aliev, C. D. Williams, K. R. Atkinson, R. H. Baughman // *Science.* – 2005. – V. 309. – P. 1215–1219.
15. *Pugno, N.,* Submitted for publication / N. Pugno. – 2006.
16. *Pugno, N.,* Mechanics & fracture of nano-systems / N. Pugno // *Rivista Italiana di Compositi e Nanotecnologie.* – 2006. –V. 1. – P. 57–60.



НЕМИРОВСКИЙ ЮРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

Выдающемуся ученому-механику Юрию Владимировичу Немировскому исполнилось 70 лет.

Молодым человеком, сразу после окончания Московского университета в 1959 году Юрий Владимирович переезжает в Новосибирск и приступает к работе в Сибирском отделении РАН, с тех пор его жизнь непрерывно связана с СО РАН.

В настоящее время Юрий Владимирович – заведующий лабораторией «Механика композитных материалов» и главный научный сотрудник лаборатории «Механика быстропротекающих процессов» Института теоретической и прикладной механики СО РАН имени С. А. Христиановича, доктор физико-математических наук, профессор факультета «Прочности летательных конструкций» НГТУ и профессор факультета «Строительной механики» НАСГУ.

Юрию Владимировичу принадлежат более 450 научных работ, опубликованных в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 11 монографий.

Среди его учеников свыше 40 кандидатов и 14 докторов наук.

Если во времена С. П. Тимошенко, В. З. Власова, А. Л. Гольденвейзера теория оболочек рассматривала однородные материалы, то исследования Ю. В. Немировского отвечают современным запросам: это армированные, многослойные анизотропные, структурно-неоднородные, композитные и другие конструкции, работающие в условиях статического и динамического нагружения, температурных режимах.

Ю. В. Немировскому принадлежат оригинальные результаты по локально-вихревым турбулентным течениям обыкновенных и намагниченных жидкостей и др.

Для работ Ю. В. Немировского характерно широкое использование современной компьютерной и вычислительной техники.

Юрий Владимирович председатель двух докторских диссертационных советов при ИТПМ СО РАН им. С. А. Христиановича по специальностям «Механика деформируемого твердого тела» и «Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры», член редколлегии отечественных и международных журналов и т. д.

Юрий Владимирович – пример беззаветного труженика, продвинувшего своими трудами целую отрасль науки.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Юрия Владимировича Немировского с семидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



ПОБЕДРЯ БОРИС ЕФИМОВИЧ

Одному из ведущих ученых в области механики, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки РФ, лауреату Госпремии СССР, заведующему кафедрой композитов Московского государственного университета Борису Ефимовичу Победре исполнилось 70 лет.

Б. Е. Победре принадлежит более 150 научных трудов, ряд известных монографий. Его научные интересы лежат в области: механики деформируемого твёрдого тела, вычислительной механики, механике композитов, термодинамике, физике связанных полей, численного анализа, дифференциальной геометрии, уравнений математической физики, нелинейного функционального анализа и др. Под его руководством подготовлено около 50 кандидатов и 6 докторов наук.

Б. Е. Победра – председатель диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук при механико-математическом факультете МГУ. Он член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, член бюро Совета по проблемам прочности и пластичности РАН, член ряда отечественных и зарубежных математических обществ.

Борис Ефимович является членом редакционных коллегий ряда научных журналов и изданий, в том числе журналов «Известия РАН», «МТТ», «Механика композиционных материалов», «Вычислительная механика деформируемого твердого тела» и др.

Большое внимание Б. Е. Победра уделяет воплощению творческих разработок в практические приложения.

Яркие научные результаты, эрудиция, активная жизненная позиция, внимание и доброжелательное отношение к окружающим снискали Борису Ефимовичу большое уважение среди широких научных кругов научной общественности.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Бориса Ефимовича Победрю с семидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



МАНЖИРОВ АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ

Исполнилось 50 лет со дня рождения крупного ученого-механика, заведующего лабораторией моделирования деформируемого твердого тела Института проблем механики РАН, доктора физико-математических наук, профессора Александра Владимировича Манжирова.

Александр Владимировичу принадлежит более 80 научных работ, опубликованных в центральных изданиях, 10 монографий, изданных на русском, английском, немецком языках.

Область научных интересов А. В. Манжирова весьма обширна: механика деформируемого твердого тела, механика растущих тел, контактная механика и трибология, механика технологических процессов, прикладная математика, математическая физика, интегральные уравнения и их приложения, математическое моделирование, инженерная математика, уравнения в частных производных, краевые задачи. По всем этим направлениям Александру Владимировичу принадлежат важные, оригинальные результаты.

А. В. Манжиров ведет большую педагогическую работу, он активно сотрудничает с МГТУ им. Баумана и Московским государственным университетом приборостроения и информатики, являясь профессором этих вузов. Под руководством А. В. Манжирова защищены кандидатские и докторские диссертации.

А. В. Манжиров является заместителем председателя Экспертного совета по математике и механике ВАК РФ, членом Экспертного совета по математике, механике и информатике РФФИ, заместителем председателя Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, членом редколлегии «Известия РАН», «МТТ» и т.д.

А. В. Манжиров – член Российского Национального комитета по прикладной и теоретической механике.

Из вышеизложенного можно представить объем той ответственной научной и научно-организационной нагрузки, которая лежит на А. В. Манжирове. Следует добавить, что Александр Владимирович является неперменным организатором Всероссийских конференций, симпозиумов и научных школ в качестве председателя, либо сопредседателя этих мероприятий.

Александра Владимировича отличает высокая научная эрудиция, глубокая компетентность, неизменная доброжелательность, – все это в сочетании с высокой научной принципиальностью. Александр Владимирович широко известен и уважаем в научной среде.

Редколлегия и редакция журнала от души поздравляют Александра Владимировича Манжирова с пятидесятилетием, желают ему крепкого здоровья, многих новых творческих успехов.



ЮРИЮ НИКОЛАЕВИЧУ РАДАЕВУ – 45 ЛЕТ

Мои основные научные интересы лежат в области математической теории пластичности. На наших глазах эта теория получила мощное развитие. Я не собираюсь здесь писать очерк по развитию теории пластичности, об этом немало написано, хотя есть еще что сказать. Не буду касаться деформационных теорий, мне ближе представления, связанные с неголономными связями между напряжениями и приращениями деформаций. Естественно, что в основе подобных теорий лежит теория идеальной пластичности. Наша наука имела выдающиеся достижения в этой области в трудах С. А. Христиановича, А. Ю. Ишлинского, В. В. Соколовского. Мощный импульс развитию теории был дан в трудах Прагера, Койтера, Хилла и многих других ученых, перечислять которых здесь не буду.

У нас развитие современных представлений в теории пластичности в значительной степени связано с деятельностью Г. С. Шапиро и Л. М. Качанова.

Естественно, когда я работал в Воронеже, все, что делалось по теории пластичности, мы стремились понять и изучить. Безусловно, среди всех выделялся Геннадий Иванович Быковцев, который уже в ту пору получил выдающиеся результаты. Получилось так, что Геннадий Иванович переехал в Самару. В Самаре вокруг Геннадия Ивановича образовалась группа учеников, среди которых оказались Ю. Н. Радаев и А. И. Хромов.

Надо сказать, что где бы ни работал Г. И. Быковцев – в Воронеже, Самаре, Владивостоке – везде у него были ученики и последователи. О Г. И. Быковцеве, надеюсь, еще будет повод сказать, но сегодня речь о Ю. Н. Радаеве.

После Самары Юрий Николаевич оказался в Москве в Институте проблем механики РАН. Безусловно, ИПМ РАН очень благотворно сказался на деятельности Ю. Н., но в Москву из Самары он прибыл уже сложившимся исследователем, чему свидетельство направление и результаты его работ.

Тематика работ Ю. Н. Радаева обширна, здесь и математическое моделирование процессов накопления повреждений, механика разрушений и др., но мне, естественно, ближе его результаты по пространственной задаче теории идеальной пластичности. Мы с Р. И. Непершиным всегда привязывались к характеристикам и характеристическим поверхностям, Ю. Н. Радаев связал свои исследования с изостатической системой координат, другими словами, линиями вдоль главных направлений тензора напряжений. Полученные им интегральные инвариантные соотношения являются весьма важными, и, возможно, на этом пути могут быть развиты наиболее эффективные методы решения пространственных задач. Во всяком случае, результаты Ю. Н. Радаева по пространственной задаче теории идеальной пластичности представляются исключительно важными и интересными.

Ю. Н. Радаев ведет исключительно большую научно-методическую и организационную издательскую работу. Я думаю, что выпускаемый им Вестник СамГУ, серия естественнонаучная – лучшее издание среди подобных. Под редакцией Г. П. Ярового и Ю. Н. Радаева в СамГУ издан перевод фундаментального трехтомника А. Уайтхеда и Б. Рассела «Principia Mathematica». (Чтобы представить объем проделанной работы приведу цифры: общее число страниц в трехтомнике – 1920, около двух тысяч; вес трехтомника свыше 4 кг, признаюсь, не представляю чтобы в каком-либо университете кто-либо отважился на подобный труд.)

Когда-то я пробовал силы в математической логике и начал с книги Гильберта, но далеко не продвинулся. Я спросил Юрия Николаевича, понимает ли он труд Уайтхеда и Рассела, он ответил, что – да, вполне. Поразительно.

Не буду здесь перечислять научные заслуги Юрия Николаевича, они весомы и желанные могут зайти на сайт Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике, членом которого он является, и убедиться в этом. Скажу лишь то, что в лице Юрия Николаевича Радаева наша наука имеет выдающегося исследователя, полного творческих планов и энергии. Остается пожелать Юрию Николаевичу крепкого здоровья и многих новых замечательных успехов.

Д. Д. Ивлев



**Никифоровский
Виктор Арсентьевич
7.01.1917 – 5.01.2007**

ПАМЯТИ ДРУГА

С Виктором Арсентьевичем Никифоровским мы познакомились на первом курсе мехмата МГУ в сентябре 1948 года. В то время на факультете было достаточно много людей, вернувшихся из армии, Виктор Арсентьевич был из их числа. Учились мы в разных группах, жили в одном общежитии – на Стромынке, 32.

Виктор человеком был сдержанным, но открытым и доступным, он был, разумеется, членом партии, но партийной работой не увлекался, никогда от него каких-либо речей и призывов мы не слышали. Но чувство собственного достоинства, внутренняя сила ощущались отчетливо, и с течением времени он стал для нас высоким моральным авторитетом, надежным старшим товарищем и другом.

В России государствообразующей нацией является русский народ. Собственно, об этом сказал Сталин в своей знаменитой речи о русском народе в 45 году. Не буду касаться любых сторон деятельности этого человека, но когда он говорил свои слова, он

знал, о чем говорил.

Виктор Арсентьевич Никифоровский был русским человеком. Он прислал мне записки, которые здесь публикуются. Я не знаю, публиковались ли они где-либо, думаю, что они публикуются впервые, и мне кажется, что из этих записок можно представить себе, каким был Виктор Арсентьевич.

Виктор Арсентьевич долгие годы проработал в Московском заочном энергетическом институте. Защитил кандидатскую диссертацию, был заведующим кафедрой, ему было присвоено звание профессора. Он был не из тех, кто меняет место работы.

Виктор с увлечением занимался историей математики, ему принадлежат книги [1-4]. Когда я начал интересоваться историей математики и написал несколько научно-популярных статей, естественно, я обратился к соответствующей литературе. Мне кажется, что историю математики начинаешь воспринимать, как следует, когда сам что-то получил и можешь оценить, чего это стоит. И, конечно, нужно обладать определенным жизненным опытом, чтобы иметь представление об особенностях людских характеров и человеческих взаимоотношений. Из книг Виктора Арсентьевича я почерпнул много полезных для меня сведений и с большим удовлетворением прояснил для себя значение и роль братьев и семейства Бернулли в развитии математики и механики, этих гениальных людей.

Вообще говоря, по мере времени, знакомства с историей, размышлений меняются представления. Сейчас для меня Гук – один из великих гигантов механики и науки.

Норберт Винер написал: *Мы вовсе не боремся за какую-то определенную победу в неопределенном будущем. Величайшая из всех побед – это возможность продолжать свое существование, зная, что ты существовал. Никакое поражение не может лишить нас успеха, заключающегося в том, что в течение определенного времени мы пребывали в этом мире, которому, кажется, нет до нас никакого дела.*

Это не пораженчество; скорее, это ощущение трагичности мира, в котором необходимость представлена как неизбежность исчезновения дифференциации. Требования нашей собственной природы, попытка построить островок организованности перед лицом преобладающей тенденции природы к беспорядочности – это вызов богам и вместе с тем ими же созданная железная необходимость. В этом источник трагедии, но и славы тоже.

Добавлю только, что существование должно быть достойным.

Последний раз мы были у Виктора в Текстильщиках года три назад в мае, приехали поздравить с Днем Победы.

По нынешним меркам Виктор прожил достаточно долгую жизнь. Но с его уходом появилось ощущение, что лишился одной из опор.

Счастье общения с Виктором Никифоровским сохранится навсегда в памяти тех, кому довелось пройти с ним по жизни.

Сочинения

1. *Никифоровский, В.А.* Из истории алгебры XVI-XVII вв. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
2. *Никифоровский, В.А.* Великие математики Бернулли. – М.: Наука, 1984. – 177 с.
3. *Никифоровский, В.А.* В мире уравнений. – М. : Наука, 1987. – 174 с.
4. *Никифоровский, В.А.* Вероятностный мир. – М. :Наука, 1992. – 174 с.

Д. Д. Ивлев

УЧЕБА, РАБОТА, ВОЙНА

Мне сейчас 87 лет. Много, конечно, много. Из них я 70 лет учился, работал, воевал, 7 лет воспитывался до поступления в начальную школу, 10 лет нахожусь на пенсии. Раньше жизнь была не такая, как сейчас. Немного расскажу о себе.

У нас в семье было 7 братьев. Кормить их трудно. Установился такой порядок: закончил среднюю школу и уезжай куда-то работать или учиться дальше.

Сначала я жил в уездном городе Варнавине Нижегородской губернии. Когда немного окреп, стал ухаживать за отцом. До семи лет вставал рано, готовил еду на весь день. Помогал отцу вставать, одеваться, умываться, водил в уборную, потом кормил завтраком. Выходили из дома, садились на скамейку возле него.

В теплое время отец сидел в комнате на стуле за большим столом у открытого окна, курил махорку. Кто-то приходил к нему, садился на толстые доски, выходящие выше кирпичного фундамента дома наружу. Беседовали.

Один раз пришел бывший дворянин Комлев, сказал:

– Арсений, брось курить, давай выпьем.

Достал из сумки бутылку с водкой, налил стопку. Отец отказался. Комлев выпил.

В теплые дни каждую неделю приходил к открытому окну нищий дядя Кузя из села Михаленино, снимал со спины пестер, доставал из него куски хлеба и передавал у окна отцу. Отец укладывал их на газету на столе. Расплачивался махоркой.

До революции отец работал секретарем Городской Думы. Работа интересная. Однажды к нам приехал из Костромы старший брат Владимир, сторонник большевиков. Стал собирать молодых людей за рекой Ветлугой, рассказывал им о революционном движении. Власти узнали, разогнали всех. Владимиру удалось убежать. После этого отца с работы выгнали, назначили ему пенсию около 10 рублей, никуда на работу не брали. На эту десятку мы и мотались.

Когда я поступил в школу, подыскали с выплатой небольшой суммы мужчине ухаживать за отцом в мое отсутствие.

Моя мать ездила по деревням со швейной машиной «Зингер», шила, немного зарабатывала, помогала нам.

После окончания средней школы меня позвал к себе брат Валерьян, заведующий школой-семилеткой в селе Обломихино около Костромы. Отец нашел помощника.

Я приехал к Валерьяну. Он вскоре меня устроил работать секретарем Обломихинского сельсовета. Мне шел тогда четырнадцатый год.

Контора сельсовета располагалась в двух километрах от школы, где мы с Валерьяном жили на нижнем этаже. Зимой утром идти в сельсовет и вечером возвращаться приходилось в темноте. Местами лес. Пробегали волки. Я брал из дома облитый керосином факел, спички и острый нож. Волков видел, но они не нападали.

Как-то раз из Костромы в сельсовет позвонили по телефону, сказали, что надо собрать жителей, придет уполномоченный проводить коллективизацию. Председатель сельсовета распорядился собрать в избу-читальню. Стали ждать уполномоченного. Он приехал, зашел в сельсовет, взял с собой меня писать протокол. Мы пошли. Зашли в избу-читальню. Там стояли массивные скамейки. Мужчины сидели на полу, руки держали на скамейках, курили махорку, разговаривали. Мы зашли, поздоровались, отправились вперед, где около массивного кирпичного столба стояли небольшой стол и несколько

табуреток. Сели, затем уполномоченный встал, вынул из кобуры наган, положил его на стол, достал из портфеля газету, стал читать в ней статью о коллективизации и делать пояснения. Возникли вопросы. Один я запомнил на всю жизнь: «Будут ли баб обобществлять?»

После окончания беседы я записывал присутствующих в колхоз, указывая по деревням бригады. Старались назначать бригадиров.

Все закончилось, мы пошли в школу, поужинали и легли спать. Ночью школу подожгли. Притащили соломы к обратной стороне той, где мы спали, и запалили. Мы через окна повыскакивали наружу. Хорошо, что прибежали мужики, привезли пожарную машину с водой, пожар погасили. В дальнейшем занятия в классах, пострадавших от пожара, проводились в других местах.

К лету я из сельсовета уволился и уехал в Варнавин. Там организовали техникум со специальностью по обработке древесины. Я поступил в него, стал учиться. Техникум через некоторое время перевели в Пищалье и объединили с Пищальским лесохимическим техникумом. Меня за драку с комсоргом после второго курса директор техникума отстранил от учебы на год и отправил работать на лесохимические заводы на север. Началась кочевая жизнь. Работал лаборантом на заводах по сухой перегонке древесины. Поступил на большой завод в г. Вельске Архангельской губернии. Был лаборантом, техником, сменным мастером. В Вельске находился техникум. Я поступил на заочное отделение. Получил документ об его окончании.

Во время этой моей работы Валерьян перевез отца в Обломихино. Затем Валерьяна перевели заведовать средней школой в Мисково, километрах в 35 от Костромы. В свой отпуск я к ним ездил. В 1939 г. отец в Мискове умер. Я был на похоронах. Мать умерла намного позднее в деревне.

В 1939 г. во время поездки с севера в Варнавин я увидел в городе Кирове объявление об учебе в Кировском учительском институте. Зашел в администрацию вокзала, продлил срок билета, на второй день пошел в приемную комиссию института. Через некоторое время поступил в него. В 1940 г. закончил институт с отличием. Стал преподавать математику в школах и техникумах.

Пришла пора служить в армии. Меня призвали по специальному подбору. Я попал в 202-ю воздушно-десантную бригаду в Хабаровске. Кормили хорошо, занятия тяжелые. Прыжки с самолета, такие напряжения – суточный марш без приема пищи, стокилометровый марш без приема пищи.

Наступила война. Я попал в тот состав, который отправился на фронт сначала на северо-запад, под Старую Руссу, в 10-ю гвардейскую воздушно-десантную дивизию. Условия ужасные: лесисто-болотистая местность. Мы понесли большие потери, но Старую Руссу не заняли.

Нас сменили другие войска, перевели под Москву, дали пополнение, организовали учения, затем отправили воевать на Украину. Все время бои. В селе Веселые Терны, на юге Украины, дивизия находилась значительное время. Я там женился на Любе Самойленко. Она впоследствии родила двух дочерей и сына. У всех теперь небольшие семьи. Жена умерла в 2003 году в Москве, где мы живем.

Я участвовал в боях в Молдавии, Румынии, Югославии, Венгрии, закончил войну в Австрии. Должность - начальник штаба воздушно-десантного полка. Звание - майор. Награжден пятью орденами, среди которых два - Красного Знамени.

Демобилизовался в сентябре 1946 г. Стал преподавать математику в школах и техникумах. Тяжелые жизненные условия сложились у меня после демобилизации. Ко мне приехали из Мариуполя Люба, ее сестра и мать. Любе и сестре надо было обеспечить

возможность закончить школу, а потом получить высшее образование, матери найти удобную работу. Сам я вкалывал на полную мощность.

Люба школу закончила в Москве, уехала учиться в пединституте. Ее сестра вышла замуж за моего приятеля, у которого на квартире я когда-то жил. Но мне все время приходилось много работать.

Дальнейшее совершенствование знаний для меня было связано с преодолением более существенных трудностей, чем при учебе в Кировском учительском институте.

Недалеко от станции метро «Охотный ряд», в Москве, располагалось здание, принадлежавшее Московскому университету. Когда я ездил преподавать в один из техникумов, проезжал мимо. Однажды зашел в него. Встретил женщину. Она сказала, что там обучаются студенты механико-математического факультета Московского университета.

Я решил поступить в университет. В 1948 г. стал студентом механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Нагрузка сильно увеличилась, подработку для семьи не бросал.

Занятия на факультете очень трудные. Преподаватели высочайшей квалификации: академики, члены-корреспонденты, профессора. Мне довелось слушать лекции С. Л. Соболева, А. Г. Куроша, Л. И. Седова, А. Я. Хинчина, В. В. Голубева, С. П. Финикова, А. П. Минакова и других.

Запомнилось проведение практических занятий З.М.Кишкиной по математическому анализу. Она тщательно готовила решения сложнейших примеров и задач, демонстрировала решение, затем давала решать самостоятельно, кого-то вызывала к доске. Я пользовался всю жизнь этим методом в своей преподавательской практике.

Все занятия в университете я посещал в пиджаке с орденами Красного Знамени.

Я успешно закончил университет в 1953 г. В 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию в Морском гидрофизическом институте АН УССР.

Моя старшая дочь Татьяна родилась в 1951 г. Ее сын Дима закончил Московский Университет, работал программистом. Выдержал испытания приехавших к нам американских специалистов по программированию. Уехал в США. Живет там с женой и двумя детьми, успешно работает программистом. У него собственная трехэтажная квартира в большом доме, две легковые машины.

КАСЬЯНОВ ДЕНЬ

В различных больших книжных изданиях можно найти немного про святого Касьяна. Родился он в Риме около 360 года, умер после 430 года. Получил хорошее образование. Увлёкся Священным Писанием, ездил по святым местам, был посвящен в монахи, основал мужской и женский монастыри, написал несколько книг, предназначенных для изучения Священного Писания.

Одна легенда такова. Святой Касьян решил вместе с Николаем Чудотворцем посетить Бога в раю. В пути им встретился мужичок с возом; в одном месте воз увяз в грязи. Мужичок попросил их помочь его вытащить. Касьян отказался, чтобы не предстать перед Богом грязным, а святой Николай помог. И загрязнил одежду. Прибыли к Богу, он спросил, что случилось. Святой Николай рассказал. Бог возмутился поведением Касьяна и назначил ему отмечать день рождения раз в четыре года, 29 февраля. А Николаю

Чудотворцу - два раза в год.

Так появился День Касьяна. Люди отнеслись к нему различно. На него навешали тяжелые заболевания, несчастные случаи, жизненные неполадки, капризы природы, поражения в войнах и многое другое.

Мне довелось в Великую Отечественную войну пережить влияние Дня Касьяна.

Дивизия, в которой я воевал, участвовала 23 февраля 1944 года во взятии Кривого Рога и получила за это название Криворожской. Я тогда был начальником штаба полка. К концу февраля она форсировала реку Ингулец и пыталась овладеть одной деревней. Под напором противника она отступила на прежние позиции. Такое происходило неоднократно, в частности, – 29 февраля, в День Касьяна. Тогда наш полк под моей командой получил приказ форсировать реку и овладеть деревней. Мы успешно форсировали, но при сильном сопротивлении противника отступили на прежние позиции с большими потерями.

Я оказался недалеко от полка в стороне. Меня преследовали два немца. В удобном месте мне удалось их уничтожить из автомата. Я переправился на другой берег и появился в полку. Воины удивились. Сказали, что доложили командиру дивизии о моей гибели. Я ему позвонил по телефону. Он похвалил меня и пожелал дальнейших успехов в войне.

Нас сменил другой полк. Мы отошли в лес километров на 15. Там оказалась деревня без жителей. Воины в подвале домов обнаружили много вина и закуски. Я решил устроить выпивку. Позвонил командиру дивизии. Он дал согласие.

Стали готовиться. Во время этой подготовки у меня сложилось четверостишие.

Когда собрались командиры батальонов, спец. подразделений и некоторые штабники, я рассказал им про Касьянов день, высказал свое четверостишие. Кто-то из присутствующих вспомнил знакомый ему мотив.

Все стали петь:

Двадцать девять дней бывает в феврале,
День последний -День Касьяна на земле,
Февраля двадцать девятого
Выпьем дружно за проклятого.

Весь вечер мы пели и пили.

На следующий день мы получили пополнение живой силы и боеприпасов. Сменившему нас полку с нашей помощью овладеть деревней удалось.

Переправившись через реку, наша дивизия объединилась с нами. Вскоре ее сменила другая дивизия.

В.А. Никифоровский

Из воспоминаний В. А. Никифоровского

Все выдержали десантники и, сокрушив врага, 14 октября 1943 г. перешли в успешное наступление в направлении на Кривой Рог.

За проявленные на плацдарме мужество и героизм 39 офицеров, сержантов и

рядовых дивизии получили звание Героев Советского Союза (многие – посмертно). Тысячи воинов награждены орденами и медалями.

Сослуживцы 10-й дивизии впоследствии удивлялись, почему не стал Героем ее командир, генерал-майор В. П. Иванов. Этому существовало кажущееся странным объяснение. После удачного форсирования Днепра в штаб армии поступило сообщение. Командующий армией в это время спал, его не стали беспокоить. Как обычно, известие пришло и в штаб фронта. На следующий день командующий фронтом по телефону спросил командующего армией – удалось ли 10-й дивизии овладеть Мишуриным Рогом и Днепровокаменкой. Командующий армией ответил, что дивизия только готовится форсировать Днепр. Командующий фронтом сказал: «Тебе не армией командовать, а стадом коров». Командарм сохранил обиду на комдива. На то и война.

Новый путь. 16.04.1998.
№37 (6578)



Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.



Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.



Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru, burenin@iacp.dvo.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.



Варданын Седрак Ваникович (vardanyan_s@yahoo.com) – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.



Демьянов Юрий Андреевич – доктор технических наук, профессор, Московский Лесотехнический институт, г. Королев Московской области



Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru, kafsm@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.



Ивлев Дюис Данилович (Ivlev21@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.



Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – Академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.



Максимова Людмила Анатольевна (strangcheb@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.



Маркин Алексей Александрович (markin@uic.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



Матченко Николай Михайлович (ekc@tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.



Миронов Борис Гурьевич (prorektor@chdpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.



Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@proc.ru, gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.



Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.



Непершин Ростислав Иванович (Nepershin_r@pop.mtu.ru, nepershin_r@mtu-net.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет «СТАНКИН», г. Москва.



Победря Борис Ефимович (pob@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.



Радаев Сергей Юрьевич (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.



Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.



Редкозубов Сергей Алексеевич (nike109@yandex.ru, marusbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.



Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru, senashov@mail.kgtei.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.



Спорыхин Анатолий Николаевич (pmmdeans@main.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.



Трещев Александр Анатольевич (taa@uic.tula.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет; г. Тула.



Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.



Черепанов Геннадий Петрович (genadyc@netscape.net, genacherepanov@hotmail.com) – доктор физико-математических наук, профессор, пожизненный член Нью-йоркской академии наук, Флорида, США.



Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.



Шашкин Александр Иванович (pmmdeans@main.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.



Шемякин Евгений Иванович (esh@msu.ru, eshem@mech.math.msu.su) – Академик РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Багдоев Александр Георгиевич – член-корреспондент Национальной академии наук Армении, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА

Божанов Павел Валерьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции» ТулГУ

Варданян Анна Ваниковна – аспирант Института механики НАН РА

Варданян Седрак Ваникович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики НАН РА

Гаджиев Газанфар Худуш оглы – кандидат технических наук, доцент кафедры «Соппротивление материалов» Азербайджанского технического университета

Гоцев Дмитрий Викторович – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математики Воронежского ВВАИУ

Григорьев Ян Юрьевич – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета

Кульпина Татьяна Александровна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева

Лычев Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики сплошных сред Самарского государственного университета

Максимова Людмила Анатольевна – доктор физико-математических наук, зав. кафедрой управлений операций в экономике филиала Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического института в г. Чебоксары

Матвеев Сергей Владимирович – аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева

Мионов Борис Гурьевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Соппротивление материалов» Азербайджанского технического университета

Немировский Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича

Полтавец Павел Алексеевич – аспирант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции» ТулГУ

Романова Татьяна Павловна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича

Роштова Алена Николаевна – аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева

Сайфутдинов Юсуф Назипович – аспирант кафедры механики сплошных сред Самарского государственного университета

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Сибирского государственного аэрокосмического университета

Спорыхин Анатолий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета

Стасюк Александр – магистрант кафедры ТиПМ факультета ПММ Воронежского государственного университета

Тихонов Сергей Владимирович – аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева

Трещев Александр Анатольевич – доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции» ТулГУ

Шмелева Анна Геннадьевна – аспирант, старший преподаватель Московского государственного университета приборостроения и информатики

Nicola M. Pugno – Department of Structural Engineering and Geotechnics, Politecnico di Torino Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129, Torino, Italy Tel. +39.011.564.4902, Fax. +39.011.564.4899

<i>Немировский Ю. В., Романова Т. П.</i>	Динамика жесткопластических двусвязных криволинейных пластин переменной толщины.....	3
<i>Багдоев А. Г., Варданян А. В.</i>	О концентрации напряжений в смешанной граничной динамической задаче.....	16
<i>Божанов П. В., Полтавец П. А., Трещев А. А.</i>	Исследование упругопластического изгиба пластин, выполненных из материалов, чувствительных к наводороживанию.....	29
<i>Варданян С. В.</i>	Упругопластическая задача быстровращающейся конической трубы.....	37
<i>Григорьев Я. Ю.</i>	Задачи о растяжении цилиндрических образцов с окружными угловыми вырезами.....	45
<i>Кульпина Т. А.</i>	Напряженное состояние анизотропной эксцентричной трубы, находящейся под действием внутреннего давления и сдвигающего усилия $t_{rq}^{(0)} \neq 0$	51
<i>Лычев С. А., Сайфутдинов Ю. Н.</i>	Динамика трехслойной непологой сферической оболочки.....	55
<i>Максимова Л. А., Тихонов С. В.</i>	Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления.....	91
<i>Матвеев С. В.</i>	Упругопластическое состояние тяжелого сжимаемого пространства, ослабленного горизонтальной цилиндрической полостью.....	96
<i>Миронов Б. Г.</i>	К вопросу о статически определимых состояниях при условии сопротивления отрыву.....	107
<i>Мирсалимов В. М., Гаджиев Г. Х.</i>	Расчет параметров разрушения втулки составного цилиндра контактной пары.....	113
<i>Роштова А. Н.</i>	Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых, анизотропных сред.....	131

<i>Сенашов С. И.</i>	Об определении типа двумерных систем дифференциальных уравнений пластичности.....	135
<i>Спорыхин А. Н., Гоцев Д. В., Стасюк А.</i>	Моделирование процесса деформирования горных выработок с некруговыми многослойными крепями в массивах со сложными реологическими свойствами.....	139
<i>Тихонов С. В.</i>	О двуосном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала.....	161
<i>Шмелева А. Г.</i>	Математическое моделирование одномерных динамических нагружений упруго-пластических сред с переменным модулем сдвига.....	169
<i>Nicola M. Pugno</i>	On the design of flaw-tolerant space elevator cables.....	175

Юбилей

Немировский Юрий Владимирович (к 70-летию со дня рождения).....	180
Победря Борис Ефимович (к 70-летию со дня рождения).....	182
Манжиров Александр Владимирович (к 50-летию со дня рождения).....	184
Радаев Юрий Николаевич (к 45-летию со дня рождения).....	186

Память

Памяти друга (В. А. Никифоровский).....	188
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	195
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	199
АВТОРЫ ЖУРНАЛА.....	201

Вестник
Чувашского государственного педагогического университета
им. И. Я. Яковлева

Серия: Механика предельного состояния

№ 2 • 2007

Отв. за выпуск А. Н. Роштова
 С. В. Матвеев
 С. В. Тихонов

Технические редакторы А. В. Митрасова
 Н. А. Немилова
 Л. А. Судленкова

Компьютерная верстка: макет А. В. Митрасова

Подписано в печать 22.06.07. Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 26. Тираж 300 экз. Цена свободная. Заказ №

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»

428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38