

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал**  
**№ 1(23)**  
**Январь – март 2015 г.**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"  
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в  
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на  
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко

**Ответственные секретари:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,  
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко,  
А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,  
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** Р. Ю. Амензаде (Азербайджан), В. М. Мирсалимов  
(Азербайджан), В. П. Тамуж (Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-16-19.

**Email:** predel21@mail.ru.

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева», 2015



В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев

## КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И ЭКСТРАДЕФОРМАЦИИ ТЕРМОУПРУГОГО КОНТИНУУМА ВТОРОГО ТИПА С МИКРОСТРУКТУРОЙ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва*

*Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва*

**Аннотация.** Рассматривается новая теоретико-полевая модель нелинейного термоупругого континуума с „тонкой“ (в частности, микрополярной) микроструктурой. Построение модели осуществляется в терминах 4-ковариантного полевого лагранжева формализма. „Тонкая“ микроструктура континуума задается микроструктурными  $d$ -векторами и  $d$ -тензорами произвольно высоких рангов.  $d$ -тензоры вводятся в теоретико-полевую схему как экстра-полевые переменные ( $d$ -переменные). Микроструктурные векторные и тензорные экстра-полевые переменные могут быть подчинены уравнениям связей (кинематическим ограничениям). Указывается плотность вариационного интегрального функционала термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. При этом выполнен учет инерционности микроструктурной „составляющей“ поля. Ковариантные уравнения термоупругого поля в континууме с микроструктурой получаются в канонической форме Эйлера–Лагранжа. Кинематические ограничения учтены с помощью правила множителей Лагранжа. Вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия применяются для построения ковариантных канонических тензоров термомеханики и 4-токов. Даны канонические формы дивергентных законов сохранения термоупругого поля в плоском 4-пространстве–времени. Рассматриваются вопросы, касающиеся инвариантности интегрального функционала действия относительно сдвигов эйлеровых полевых переменных, времени и температурного смещения, а также трехмерных вращений эйлеровой координатной системы. Исследуется проблема ротационной инвариантности „естественной“ плотности микрополярного термоупругого действия. Сформулированы дифференциальные и функциональные условия ротационной инвариантности лагранжиана. Последние затем используются с целью поиска ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Найдена система независимых ротационно-инвариантных функциональных аргументов лагранжиана. Дается формальное доказательство ее полноты. Получена удовлетворяющая принципу объективности форма свободной энергии Гельмгольца. Указанная форма содержит явные вхождения ротационно-инвариантных векторов и тензоров экстра-деформации. Построены

---

Поступила 28.02.2015

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00139 „Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой“) и Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания Самарского государственного технического университета (проект № 16.2518.2014/К).

удовлетворяющие принципу объективности формы определяющих уравнений гиперболического микрополярного термоупругого континуума, соответствующие ротационно-инвариантному лагранжиану. Рассматривается альтернативная возможность построения полной системы независимых ротационно-инвариантных аргументов.

**Ключевые слова:** термоупругость, микроструктура, поле, экстра-поле, действие, ковариантность, закон сохранения,  $d$ -тензор, 4-ток, тензор энергии—импульса, кинематическое ограничение, множитель Лагранжа, ротационная инвариантность, принцип объективности, тензор экстра-деформации.

УДК: 539.374

**Вводные замечания.** Последние годы отмечены весьма интенсивным развитием механики метаматериалов, обладающих весьма необычной микроструктурой и аномальным механическим поведением. Под микроструктурой континуума обычно понимается существование нескольких различных физических масштабов (структурных уровней), определяющих состояние континуума, их самосогласованное взаимодействие и возможность передачи энергии с одного структурного уровня на другой. Теория таких континуумов основывается на необходимости допустить существование дополнительных (экстра) степеней свободы и возможности исследовать физически бесконечно малый объем не как материальную точку, а как существенно более сложный объект, с присущими ему дополнительными степенями свободы (ротационными, осцилляционными), как своего рода микроконтинуум, обладающий возможностью дополнительной (экстра) микродеформации. Поиск нелинейных представлений для лагранжианов, гамильтонианов, экстра-напряжений и экстра-деформаций, справедливых в самом общем случае конечных деформаций и поворотов, для континуумов с микроструктурой выступает в настоящее время как одна из важнейших задач теории и механики сплошных сред.

Вопросы, связанные с изучением континуума с микроструктурой, находятся в русле тех течений в механике деформируемого твердого тела, которые отдают приоритет структурному моделированию. При этом необходимо учитывать, что существенной особенностью современного состояния естественных наук является явно просматриваемая тенденция решения нелинейных проблем (в том числе и проблем механики деформируемого твердого тела) вне рамок имеющегося физически надежно обоснованного набора математических моделей. Конечной целью математического моделирования обычно ставится формулировка замкнутых систем уравнений, без чего в принципе невозможны постановка и решение прикладных задач. Корректное построение новых математических моделей континуума, в свою очередь, должно опираться на проверенные временем принципы и методы. Не последняя роль здесь принадлежит методам теории поля. Часто эти методы выступают как единственный инструмент вывода физически приемлемых уравнений.

Для решения проблем анализа и синтеза материалов с заданными свойствами существенно развита иерархия математических моделей. Именно в связи с этим обстоятельством по-прежнему актуальны методы построения и исследования математических моделей сред с микроструктурой. Один из них состоит в обобщении континуальной модели, выражающемся в расширении понятия представительного объема среды

(RVE) и учета дополнительных (экстра) внутренних степеней свободы — микроповоротов и аффинных деформаций мезообъема — (континуум Коссера, микроморфная среда).<sup>1</sup>

Нелинейные термомеханические модели сложных континуумов с микроструктурой, в частности, микрополярные среды и метаматериалы, в решающей степени определяются термодинамическими параметрами состояния, которые формируются из независимых объективных (т.е. выдерживающих повороты эйлеровой пространственной координатной системы в трехмерном пространстве) скалярных, векторных и тензорных переменных, определяющих термодинамическое состояние микроэлемента. Подобные системы термодинамических параметров состояния мы будем называть также термодинамическими базисами. Термодинамический базис должен обладать необходимыми свойствами полноты относительно тензорных мер состояния континуума.

Целью настоящей работы является построение нелинейной теоретико-полевой модели термоупругого континуума с „тонкой“ микроструктурой, представляемой конечным набором тензоров, ранг которых может быть сколь угодно высоким. Значительный прогресс в этой области связан прежде всего с тем, что в качестве базисных переменных допускаются не только термодинамические переменные состояния (так называемые „медленные переменные“), ассоциированные с термическими и микроструктурными свойствами континуума, но и их референциальные градиенты („быстрые переменные“). При этом переменные состояния и их градиенты считаются функционально-независимыми. Именно следуя по этому пути, удастся создать новую термомеханику континуума с гиперболическими уравнениями транспорта тепла. Последнее обстоятельство вполне соответствует новой гиперболической парадигме развития теории и механики континуума [1], [2].

Современная механика и физика сплошных деформируемых сред в целом ряде важных прикладных направлений должна развиваться только на основе теоретико-полевого подхода; только в этом случае обеспечиваются физически приемлемые уравнения. Это обстоятельство характерно для сложных континуумов с экстрастепенями свободы, приписываемыми микроэлементам; в частности, — для микрополярных сред, когда допустимы дополнительные повороты и аффинные деформации микроэлементов. Теории поля обладают одним весьма важным аналитическим качеством — возможностью их систематического вывода из одного вариационного функционала. Преимущества теоретико-полевой точки зрения в механике микрополярных континуумов убедительно продемонстрированы в статье [3]. Важными элементами теоретико-полевого подхода являются также ковариантность дифференциальных уравнений поля и наличие вариационных симметрий поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли „первых интегралов“ дифференциальных уравнений поля.

Последовательное применение теоретико-полевого подхода в механике континуума приводит к естественным формулировкам определяющих уравнений. Задание плотности действия позволяет однозначно сформулировать определяющие уравнения континуума, причем сразу же в ковариантной форме, без всякого дополнительного конструирования. То же самое касается соотношений совместности сильных разрывов

<sup>1</sup>Необходимо заметить, что континуум Коссера с „нежестким“ репером микрополярных директоров, по существу, предполагает возможной произвольную аффинную деформацию микроэлемента и поэтому может трактоваться и как микроморфный континуум. Такие среды мы будем также называть микрополярными.

на волновых поверхностях. Однако дополнительные рассмотрения все же необходимы, если вести речь об объективизации независимых функциональных аргументов плотности действия. Переход к ротационно-инвариантным функциональным аргументам лагранжиана, наряду с требованием галилеевой трансляционной инвариантности, окончательно определяет его „общую“ форму и соответствующие общие формы объективных определяющих уравнений.

Теоретико-полевые формулировки всегда подразумевают существенное и интенсивное использование понятий и формализма вариационного исчисления [4]. Наличие конечных геометрических ограничений (связей), накладываемых на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как *связанной* задачи вариационного исчисления (calculus of variations with constraints). Такая постановка впервые была предложена Лагранжем. Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств. Решение подобного рода задач обычно выполняется с помощью правила множителей Лагранжа (см., например, [5, С. 114–129]). Рассмотрение вариационных задач для интегрального функционала с ограничениями типа равенств и неравенств на уровне необходимых условий сводится к проблеме безусловного экстремума с помощью правила Лагранжа. Оказывается, что этот принцип распространяется на задачи весьма сложной природы.

Структуру настоящей работы можно охарактеризовать следующим образом. После данных выше вводных замечаний, во втором разделе, излагаются основы теоретико-полевого подхода, пригодного, как хорошо известно, для описания механических и физических полей различной природы. Здесь же формулируется принцип наименьшего действия и следующие из него дифференциальные уравнения поля, дается понятие об инвариантности интегрального функционала действия, основы теории вариационных симметрий действия и дивергентных законов сохранения, выполняющихся в силу уравнений поля. В третьем разделе обсуждается одна теоретико-полевая модель термоупругого континуума второго типа с „тонкой“ микроструктурой, которая представляется конечным набором тензоров, выступающих как экстра-полевые переменные. Указанным экстра-полевым переменным соответствуют экстра-деформации и экстра-напряжения. В самом простом, но в то же время весьма интересном случае, микроструктура континуума задается системой трех „нежестких“ векторных директоров. В этом же разделе получены дифференциальные уравнения поля и определяющие уравнения. Четвертый раздел посвящен построению тензора энергии—импульса термоупругого континуума второго типа с „тонкой“ микроструктурой, с помощью которого получены канонические полевые величины (энергия, канонический импульс, вектор Умова—Пойнтинга и тензор напряжений Эшелби) и канонические законы сохранения. В пятом разделе правило множителей Лагранжа применяется для вывода уравнений поля при наличии кинематических ограничений. Шестой раздел включает вопросы, связанные с построением ротационно-инвариантных лагранжианов связанного микрополярного термоупругого поля. Здесь получены функциональные условия ротационной инвариантности действия и плотности действия, независимые ротационно-инвариантные аргументы образующие полную систему (при этом особое внимание уделяется формальному доказательству ее полноты), и удовлетворяющая принципу объективности наиболее общая функциональная форма свободной энергии Гельмгольца. Кроме того, рассматривается альтернативная возможность построения полной системы независимых ротационно-инвариантных аргументов, основанная на полярном разложении градиента деформации. Наконец, заключительный

седьмой раздел работы посвящен выводу объективных форм определяющих уравнений микрополярного термоупругого континуума.

**Теоретико-полевой подход в механике континуума, вариационные симметрии действия и дивергентные законы сохранения.** Ключевое положение классической теории поля (см., например, монографии [6], [7]) заключается в том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом  $\mathfrak{S}$ , который по историческим причинам называется действием (action):

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X. \quad (1)$$

Здесь характерная для теории поля символика, развитая в [6], [7], имеет следующий смысл:  $\mathcal{L}$  — „естественная“ плотность лагранжиана (плотность действия);  $\varphi^k$  — упорядоченный массив физических полевых переменных;  $X^\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3, 4$ ) — четыре пространственно-временные координаты;  $d^4 X$  — „естественный“ элемент объема четырехмерного пространства—времени. Заметим, что в традиционных текстах, посвященных классической теории поля, действие и функционал действия обычно обозначаются через  $S$ .

Символ  $d^4 X$  в (1) указывает на „естественный“ пространственно-временной элемент объема и представляет собой обычное произведение дифференциалов пространственно-временных координат:

$$d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \quad (2)$$

Через  $\partial_\beta$  в математическом оформлении действия, данном (1) и далее, обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате  $X^\beta$ ; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\text{expl}} + \sum_{s \geq 0} \left( \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l \right) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \quad (3)$$

где символом  $\partial_\beta^{\text{expl}}$  указывается оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной  $X^\beta$ .

Четвертую по счету координату в дальнейшем будем ассоциировать со временем, которое, возможно, будет трансформироваться с помощью размерной постоянной так, чтобы уравнивать физические размерности всех четырех пространственно-временных координат. Полное дифференцирование по времени будет обозначаться как символом  $\partial_4$ , так и традиционной точкой.

В теориях поля лагранжиан  $\mathcal{L}$  всегда приходится рассматривать как функцию следующего набора переменных:

$$\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, X^\gamma. \quad (4)$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или конструируют, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение принципиально новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы, является, в известном смысле, достаточно сложным видом искусства.

Вариационное описание поля не может быть осуществлено без предварительного указания пространственно-временного многообразия с возможностью измерения в нем

элементарных длин и объемов. Пространство—время обладает рядом фундаментальных особенностей: пространство и время однородны (отсутствуют привилегированные места в пространстве и избранные точки отсчета времени); пространство изотропно (нет избранных преимущественных направлений); четырехмерное пространство—время изотропно; пространство, возможно, обладает некоторыми скрытыми симметриями; направление хода времени не регламентировано. Перечисленные свойства пространства—времени могут быть сформулированы на языке групп преобразований пространственно-временных координат.

Преобразование пространственно-временных координат и физических полевых переменных

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) \quad (5)$$

порождает, очевидно, преобразование всего комплекса переменных (4)

$$\begin{array}{c} X^\gamma, \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots \\ \downarrow \\ \tilde{X}^\gamma, \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \tilde{\varphi}^s, \dots \end{array} \quad (6)$$

Чаще всего предполагается, что преобразования (5) образуют однопараметрическую группу преобразований (группу Ли преобразований).

Полные вариации полевых переменных и пространственно-временных координат, отвечающие их преобразованию в соответствии с (5), вычисляются согласно

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left( \frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta \varphi^k = \varepsilon \left( \frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

Для теории поля числовая величина действия не столь важна, как его форма, задаваемая лагранжианом  $\mathcal{L}$ , который определяется (помимо всего прочего) выбором тех или иных координатных систем в пространственно-временном многообразии и математического представления полевых переменных. В новых переменных, вообще говоря, изменяется форма лагранжиана  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}},$$

где  $\tilde{\mathcal{L}}$  — «естественная» плотность лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат  $\tilde{X}^\beta$  и физических полей  $\tilde{\varphi}^k$ . Однако величина действия должна оставаться неизменной (так называемая эквивалентность действия относительно группы преобразований (5)). Таким образом, функционалы

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (7)$$

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X} \quad (8)$$

называются эквивалентными при их преобразовании группой (5) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}.$$



Математическое описание поля представляет собой вариационный принцип, который по соображениям исторического характера, называется вариационным принципом Гамильтона—Остроградского (или принципом наименьшего действия). Действительное поле реализуется в пространстве—времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей  $\varphi^k$  при неварьируемых пространственно-временных координатах и четырехмерной области, выступающей в качестве носителя поля:

$$\delta\mathfrak{S} = 0. \quad (9)$$

В аналитической механике такому способу варьирования отвечают так называемые изохронные вариации.

Из принципа наименьшего действия получаются ковариантные дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots \quad (11)$$

есть один из важнейших дифференциальных операторов математической физики — оператор Эйлера.

Действительные физические поля (при условии их гладкости) обязаны удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа (10).

Структура дифференцирований в операторе Эйлера становится более понятной и обозримой, если ввести обозначения [8]

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^l} = \partial_l, \quad \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)} = \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \quad (12)$$

и записать его символически в форме

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}. \quad (13)$$

Здесь в сумме при  $s = 0$  подразумевается слагаемое  $\partial_l$ , обозначающее частное дифференцирование по полевой переменной  $\varphi^l$ .

Заметим, что принцип наименьшего действия ограничивает физически допустимые лагранжианы. Так, недопустимы лагранжианы, для которых соответствующие интегральные функционалы не имеют экстремалей ни при каких вещественных полевых переменных или для которых дифференциальные уравнения поля (10) противоречивы.

В современной научной литературе часто говорится об инвариантности уравнений Эйлера—Лагранжа. Однако это противоречит действительному положению дел. Математически строгое определение инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно группы преобразований известно из группового анализа и означает сохранение формы уравнений при их преобразовании к новым переменным согласно (5). Относительно произвольной однопараметрической геометрической группы преобразований (5) уравнения Эйлера—Лагранжа, вообще говоря, не инвариантны, но они ковариантны (при условии, что действие удовлетворяет

принципу эквивалентности, гарантирующему при, возможно, изменяющейся „естественной“ плотности лагранжиана постоянство величины действия относительно произвольных геометрических преобразований пространственно-временных координат и полевых переменных), поскольку в новых переменных правило их составления остается прежним.

Исключительный интерес в теории вариационных симметрий представляют однопараметрические геометрические группы преобразований, которые при неизменности формы функционала действия сохраняют его величину при преобразовании координат и полей согласно (5) и соответствию пространственно-временных 4-областей интегрирования в переменных  $X^\beta$  и  $\tilde{X}^\beta$ . Указанные группы обычно называют геометрическими группами абсолютной инвариантности функционала действия, а также абсолютными геометрическими симметриями действия по Гамильтону (или просто вариационными симметриями действия). Таким образом, в том случае, когда преобразование (5) является вариационной симметрией действия, выполняется равенство

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X}. \quad (14)$$

Инвариантность интегрального функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической геометрической группы преобразований (5) порождает, как известно, некоторый дивергентный закон сохранения. Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые получаются как уравнения Эйлера–Лагранжа некоторой вариационной задачи, следующих из существования геометрических вариационных симметрий действия, излагается, например, в [8, С. 377–386]. Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального уравнения

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \quad (15)$$

где

$$J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\mu)$$

— 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля. Вектор  $J^\beta$  — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньше порядка уравнений поля; этот вектор называется вектором тока (или 4-током).

Классический метод поиска законов сохранения с помощью вариационных симметрий действия кратко может быть описан следующим образом.

Критерий инвариантности интегрального функционала действия (1) относительно геометрической группы преобразований (5) имеет вид

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (16)$$

где вариация лагранжиана  $\delta \mathcal{L}$  — линейная по  $\varepsilon$  часть приращения

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta). \quad (17)$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, вариация лагранжиана, очевидно, равна

$$\delta\mathcal{L} = \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \delta X^\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} \delta\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \delta(\partial_\beta\varphi^k).$$

Учитывая затем формулу для полной вариации первых градиентов поля

$$\delta(\partial_\beta\varphi^k) = \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + (\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)\delta X^\gamma,$$

где вариации  $\delta\varphi^k$  (полная) и  $\bar{\delta}\varphi^k$  (частичная) связаны уравнением

$$\delta\varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\varphi^k)\delta X^\gamma,$$

получаем

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) \quad (18)$$

или

$$\delta\mathcal{L} = \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right) \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k \right). \quad (19)$$

В результате, когда вариационная симметрия действия известна и лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, уравнение (16) преобразуется к

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L})\bar{\delta}\varphi^j + \partial_\beta \left( \mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k \right) = 0. \quad (20)$$

Разделив затем левые и правые части (20) на параметр  $\varepsilon$  и обозначая

$$\mathcal{Q}^j = \frac{\bar{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}, \quad J^\beta = \mathcal{L} \frac{\delta X^\beta}{\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \frac{\bar{\delta}\varphi^k}{\varepsilon},$$

приходим к равенству

$$\mathcal{Q}^j \mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \partial_\beta(-J^\beta). \quad (21)$$

Таким образом, при выполнении уравнений поля (10) будет справедлив дивергентный закон сохранения (15).

**Физическая полевая теория термоупругого континуума с „тонкой“ микроструктурой.** Одним из самых распространенных подходов к изучению деформации континуума является концепция сравнения пространственных положений составляющих его точек. В этом плане необходимы инструменты, позволяющие однозначно идентифицировать все точки, совокупность которых образует континуум. В качестве одного из способов индивидуализации, широко используемых в механике деформируемого твердого тела, обычно выступают метки, частным вариантом которых являются лагранжевы координаты-метки. Однако в некоторых случаях механизм идентификации заранее может быть не вполне ясным, как это видно на примере перемещения тени, отбрасываемой некоторым движущимся от системы источников света телом.

В теориях континуума с микроструктурой (см., например, [3]) произвольная „конечная“ деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (22)$$

положения  $\mathbf{X}$  отсчетной (референциальной) конфигурации в соответствующее актуальное место  $\mathbf{x}$  пространства, сопровождается экстра-деформацией, проявляющейся в

форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некопланарных  $d$ -векторов  $\mathbf{d}_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a(\mathbf{X}, t). \quad (23)$$

Деформация и экстра-деформация в координатах  $X^\alpha$ ,  $x^j$  имеют следующий вид:

$$x^j = x^j(X^\alpha, t), \quad (24)$$

$$d_a^j = d_a^j(X^\alpha, t). \quad (25)$$

Сделаем одно важное замечание. Индивидуальные точки континуума в механике континуума представляются специальной переменной  $\xi$ , которая, в свою очередь, идентифицируется с помощью координат  $\xi^\alpha$  (так называемые материальные координаты). Референциальная координата  $\mathbf{X}$  всегда взаимно-однозначно связана с материальной переменной  $\xi$ , поэтому референциальную переменную  $\mathbf{X}$  можно рассматривать как материальную и попросту отождествить переменные  $\mathbf{X}$  и  $\xi$ . То же самое относится к координатам  $X^\alpha$  и  $\xi^\alpha$ .

Система трех пространственных полярных  $d$ -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, задает микрополярную структуру континуума. Эта система в самом общем случае предполагается „мягкой“.

Переменные  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{x}$  (и позиционные координаты  $X^\alpha$ ,  $x^j$ ) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума [9], [10]. С этими переменными связаны метрики: отсчетная метрика  $g_{\alpha\beta}$  и пространственная метрика  $g_{ij}$ . Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором  $g_{\alpha\beta}$  и, в отличие от  $g_{\alpha\beta}$  и  $g_{ij}$ , определяется деформацией (22).

Как ясно из предложенных обозначений эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы. Обратным штрихом (backprime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием. Так, например, в силу принятого выше соглашения о референциальном и актуальном положениях точек континуума должно выполняться равенство

$$\backslash \mathbf{x} = \mathbf{X}.$$

В такого рода равенствах латинский индекс у координаты  $x^j$  может трансформироваться в греческий. Кроме того, референциальное положение  $d$ -векторов часто удобнее вместо  $\backslash d_a^j$  указывать компонентами с греческим индексом

$$\backslash d_a^\alpha, \quad \backslash d_a^j = \frac{\partial \backslash x^j}{\partial X^\alpha} \backslash d_a^\alpha \quad (a = 1, 2, 3; j, \alpha = 1, 2, 3).$$

Следуя известным схемам построения математических теорий континуумов, введем градиент „конечной“ деформации (градиент места, position gradient) или „дисторсию“ [5], [11]

$$\partial_\alpha x^j \quad (j, \alpha = 1, 2, 3) \quad (26)$$

и соответствующий якобиан

$$J = \det(\partial_\alpha x^j). \quad (27)$$

Дисторсия, как хорошо известно, характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Она никогда не вырождается, поэтому якобиан деформации  $J$  сохраняет свой знак.

Конвективная метрика вычисляется с помощью градиента деформации согласно формуле

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j) \quad (28)$$

и в силу своего определения ротационно-инвариантна при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы. Последнее справедливо и для отсчетной метрики  $\backslash g_{\alpha\beta}$ , поскольку

$$\backslash g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha \backslash x^i)(\partial_\beta \backslash x^j). \quad (29)$$

Заметим, что лагранжевы переменные  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), дополненные четвертой временной координатой, выступают в развиваемой ниже теории как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) представляют собой физические поля. То же самое относится к „мягкой“ системе  $d$ -векторов  $\mathbf{d}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Но они классифицируются нами как экстра-полевые (сверх переменных  $x^j$ ) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент  $d_\alpha^j$  ( $\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ).

Система трех  $d$ -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, собственно и задает микроструктуру континуума. С теоретико-полевой точки зрения наличие микроструктуры приводит лишь к увеличению числа полевых переменных и, возможно, повышению максимального порядка дифференцирований в „естественной“ плотности лагранжиана. „Тонкая“ (fine) микроструктура континуума представляется экстра-полями контравариантных тензоров ( $d$ -тензоров) сколь угодно высоких рангов

$$d_c^{j_1 j_2 \dots} \quad (c = 1, 2, 3, \dots). \quad (30)$$

Выбранная здесь схема описания микроструктуры и возможность ее математического представления  $d$ -тензорами произвольно высоких четных рангов (симметричными по всем индексам) подробно описана в работе: Радаев Ю. Н. Континуальные модели поврежденности твердых тел/ Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Институт проблем механики РАН. М., 1999. – 380 с.

Экстра-деформация, обусловленная наличием „тонкой“ микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (23).

Поведение репера  $\mathbf{d}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) характеризуется как его возможной „чистой“ деформацией (сдвигами трехгранника и удлинением его ребер), так и поворотом. Ясно, что каждый элемент континуума с микроструктурой обладает большим число степеней свободы, чем классический континуум. С дополнительными степенями свободы, которыми обладает микроэлемент, связаны естественно и дополнительные инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие (кинетическая энергия и свободная энергия). Трансформация репера  $\mathbf{d}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) может сводиться только к его „жестким“ поворотам в пространстве; в этом случае [12] помимо трех трансляционных степеней свободы микроэлемент будет обладать лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы. Возможность исключительно „жесткой“ трансформации указанного репера можно выразить уравнениями

$$g_{ij} d_\alpha^i d_\beta^j = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad (31)$$

где  $g_{ij}$  — компоненты эйлеровой пространственной метрики,  $\delta_{ab}$  — символ Кронекера, которые, очевидно, имеют смысл дополнительных кинематических ограничений, накладываемых на экстра-полевые переменные  $\mathbf{d}$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3$ ).

В более широком смысле дополнительное кинематическое ограничение может накладываться на экстра-деформацию континуума с микроструктурой в форме конечного уравнения

$$\mathcal{F}(d_1^{j_1 j_2 \dots}, d_2^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0, \quad (32)$$

связывающего экстра-полевые переменные  $d_c^{j_1 j_2 \dots}$  ( $\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots$ ).

В качестве основной термической полевой переменной примем температурное смещение  $\vartheta$ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры  $\theta$ . Именно такой подход характерен для теоретико-полевых формулировок термомеханики [13]–[19].

Перечислим далее все определяющие переменные термоупругого континуума с „тонкой“ микроструктурой. Помимо переменных  $x^j$  и  $\vartheta$ , к ним относятся

градиент деформации  $\partial_\alpha x^j$  ( $j, \alpha = 1, 2, 3$ );

$d$ -векторы  $d_a^j$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ) вместе с их референциальными градиентами  $\partial_\alpha d_a^j$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 1, 2, 3$ );

$d$ -тензоры  $d_c^{j_1 j_2 \dots}$  ( $\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots$ ;  $j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$ ) и их референциальные градиенты  $\partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}$  ( $\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$ );

референциальный градиент температурного смещения  $\partial_\alpha \vartheta$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ );

скорость температурного смещения  $\partial_4 \vartheta$ .

В терминах отсчетных переменных  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), эйлеровых переменных  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), экстра-полевых  $d$ -переменных и температурного смещения  $\vartheta$  „естественная“ плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии должна иметь форму

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \quad (33)$$

Более специальная форма получается, если рассматривать плотность действия как разность плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \rho_R g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{ij} \overset{ab}{\mathfrak{J}} d_a^i d_b^j + \frac{1}{2} \rho_R \sum_{\kappa} g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \dots \overset{cd}{\mathfrak{J}} d_c^{j_1 j_2 \dots} d_d^{k_1 k_2 \dots} \dots \\ & - \psi(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь точкой обозначается частное дифференцирование по времени  $\partial_4$  при постоянных лагранжевых координатах  $X^\alpha$ ;  $\rho_R$  — референциальная плотность;  $\overset{ab}{\mathfrak{J}}$ ,  $\overset{cd}{\mathfrak{J}}$  — тензоры инерции микроэлемента.

Вариационный интеграл термоупругого действия в силу указанной формулой (33) плотности действия будет иметь следующий вид:

Соответствующие вариационному интегралу (35) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля получаются в ковариантной форме и распадаются на следующие четыре группы:

$$\partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3),$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^{\alpha \cdot} + \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{Q}}_j &= 0 \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{M}}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots} + \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots} - \partial_4 \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots} &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$(\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; \alpha = 1, 2, 3; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3) \partial_\alpha j_{\mathbf{R}}^\alpha + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Лагранжев полевой формализм исключительно удобен тем, что *определяющие* уравнения континуума выступают просто как обозначения для полевых частных производных, которые вводятся для записи дифференциальных уравнений поля (35):

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{Q}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\mathbf{a}}{d}^j}, \quad \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\mathbf{c}}{d}^{j_1 j_2 \dots}}, \\ S_{\cdot j}^{\alpha \cdot} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^{\alpha \cdot} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \overset{\mathbf{a}}{d}^j)}, \quad \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{M}}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \overset{\mathbf{c}}{d}^{j_1 j_2 \dots})}, \\ \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{A}}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\mathbf{a}}{d}^j}, \quad \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\mathbf{c}}{d}^{j_1 j_2 \dots}}, \\ s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad j_{\mathbf{R}}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}. \end{aligned} \quad (36)$$

В приведенных выше определяющих уравнениях (36) приняты следующие обозначения:

$P_j$  — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы;

$\overset{\mathbf{a}}{\mathcal{Q}}_j, \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots}$  — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным (в том числе ротационным) степеням свободы;

$S_{\cdot j}^{\alpha \cdot}$  — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа;

$\overset{\mathbf{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^{\alpha \cdot}, \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{M}}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots}$  — „первые“ тензоры экстранапряжений;

$\overset{\mathbf{a}}{\mathcal{A}}_j, \overset{\mathbf{c}}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots}$  — обобщенные силы—моменты, сопряженные экстра-полевым переменным  $\overset{\mathbf{a}}{d}^j$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ),  $\overset{\mathbf{c}}{d}^{j_1 j_2 \dots}$  ( $\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$ );

$s$  — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии);

$j_{\mathbf{R}}^\alpha$  — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Полевое уравнение в последней строке (35) выражает баланс энтропии. Если плотность действия не содержит явных вхождений температурного смещения, то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в гиперболической термоупругости [7].

Рассмотрим важный и сравнительно простой случай, когда параметрами микро-структуры являются только  $d$ -векторы  $\overset{\mathbf{a}}{d}^j$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ), не подчиняющиеся никаким дополнительным ограничениям. В этом случае система дифференциальных уравнений поля (35) будет иметь следующий вид:

$$\partial_\alpha S_{\cdot j}^{\alpha \cdot} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3),$$

$$\partial_\alpha \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^{\alpha \cdot} + \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathbf{a}}{\mathcal{Q}}_j = 0 \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3),$$

$$\partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (37)$$

**Плоское пространство—время. Трансляции пространственно-временных координат. Законы сохранения.** В дальнейшем будем считать пространство—время плоским. В этом случае выполняется условие трансляционной инвариантности действия. Поэтому можно ввести 4-ковариантный тензор энергии—импульса и сформулировать с его помощью законы сохранения, соответствующие независимым сдвигами всех четырех пространственно-временных координат [7]. Следуя [7], определим компоненты канонического тензора энергии—импульса термоупругого поля  $T_{\lambda}^{\mu}$  ( $\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$ ) в континууме с микроструктурой. Всего имеется следующие четыре группы соотношений:

$$T_{\lambda}^{\mu} = \mathcal{L} \delta_{\lambda}^{\mu} + S_{\cdot l}^{\mu} (\partial_{\lambda} x^l) + \overset{a}{M}_{\cdot l}^{\mu} (\partial_{\lambda} d^l) + \overset{c}{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} (\partial_{\lambda} d^{j_1 j_2 \dots}) - j_R^{\mu} (\partial_{\lambda} \vartheta); \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \quad (38)$$

$$T_{\cdot 4}^{\mu} = S_{\cdot l}^{\mu} \dot{x}^l + \overset{a}{M}_{\cdot l}^{\mu} \dot{d}^l + \overset{c}{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} - j_R^{\mu} \dot{\vartheta}; \quad (\lambda = 4; \mu = 1, 2, 3) \quad (39)$$

$$T_{\cdot \lambda}^4 = -(\partial_{\lambda} x^l) P_l - (\partial_{\lambda} d^l) \overset{a}{Q}_l - (\partial_{\lambda} d^{j_1 j_2 \dots}) \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s (\partial_{\lambda} \vartheta); \quad (\lambda = 1, 2, 3; \mu = 4) \quad (40)$$

$$T_{\cdot 4}^4 = \mathcal{L} - \dot{x}^l P_l - \dot{d}^l \overset{a}{Q}_l - \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s \dot{\vartheta}. \quad (\lambda = 4; \mu = 4) \quad (41)$$

Приведенные выше компоненты тензора энергии—импульса термоупругого поля позволяют быстро найти полный гамильтониан поля  $\mathcal{H}$ , вектор псевдоимпульса поля  $\mathcal{P}_{\lambda}$ , вектор Умова—Пойнтинга  $\Gamma^{\mu}$  и тензор напряжений Эшелби  $P_{\lambda}^{\mu}$ .

Так, компонента (41) тензора энергии—импульса представляет собой взятую с отрицательным знаком плотность гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \dot{x}^l P_l + \dot{d}^l \overset{a}{Q}_l + \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots} + \dot{\vartheta} s - \mathcal{L}. \quad (42)$$

Компоненты (40) определяют ковариантный вектор псевдоимпульса поля согласно формуле:

$$\mathcal{P}_{\lambda} = -(\partial_{\lambda} x^l) P_l - (\partial_{\lambda} d^l) \overset{a}{Q}_l - (\partial_{\lambda} d^{j_1 j_2 \dots}) \overset{c}{Q}_{j_1 j_2 \dots} - s (\partial_{\lambda} \vartheta). \quad (\lambda = 1, 2, 3) \quad (43)$$

Из компонент (39) формируется контравариантный вектор Умова—Пойнтинга:

$$\Gamma^{\mu} = S_{\cdot l}^{\mu} \dot{x}^l + \overset{a}{M}_{\cdot l}^{\mu} \dot{d}^l + \overset{c}{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} - j_R^{\mu} \dot{\vartheta}. \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (44)$$

Компоненты (38) тензора энергии—импульса, взятые с противоположным знаком, дают возможность вычислить тензор напряжений Эшелби:

$$-P_{\lambda}^{\mu} = \mathcal{L} \delta_{\lambda}^{\mu} + S_{\cdot l}^{\mu} (\partial_{\lambda} x^l) + \overset{a}{M}_{\cdot l}^{\mu} (\partial_{\lambda} d^l) + \overset{c}{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\mu \dots} (\partial_{\lambda} d^{j_1 j_2 \dots}) - j_R^{\mu} (\partial_{\lambda} \vartheta). \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \quad (45)$$

4-ковариантный закон сохранения, соответствующий вариационным симметриям действия в форме трансляций пространственно-временных координат

$$\partial_{\mu} T_{\lambda}^{\mu} = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4), \quad (46)$$



естественным образом распадается на два симметричных канонических уравнения баланса энергии и псевдоимпульса термоупругого поля:

$$-\dot{\mathcal{H}} + \partial_\mu \Gamma^\mu = 0, \quad (47)$$

$$-\dot{\mathcal{P}}_\lambda + \partial_\mu P^\mu_\lambda = 0. \quad (48)$$

Теоретико-полевой подход (и лагранжев формализм) применим только к тем полям, в которых сохраняется постоянной полная энергия. Он не отражает того обстоятельства, что в реальном эволюционирующем поле полная энергия убывает, трансформируясь в другие виды энергии, например, в тепловую энергию, т.е. происходит рассеяние энергии, сопровождающееся возрастанием энтропии. Однако не стоит и сужать возможности такого подхода. Возможность освобождения (стока) энергии может быть учтена не столько в уравнениях поля, сколько сингулярностями поля.

**Уравнения поля при наличии кинематических ограничений.** Дополнительные связи между экстра-полевыми  $d$ -переменными могут учитываться с помощью правила множителей Лагранжа [4], [5].

В том важном и сравнительно простом случае, когда параметрами микроструктуры являются только  $d$ -векторы  $d^j_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ), а кинематические связи задаются уравнениями (31), система дифференциальных уравнений поля (37) подлежит некоторой модификации, поскольку согласно правилу множителей лагранжиан  $\mathcal{L}$  подлежит замене на новый лагранжиан  $\mathcal{L}'$ :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} \left( g_{kl} d^k_c d^l_b - \delta_{cb} \right) \quad (c, b = 1, 2, 3).$$

Здесь  $\lambda^{cb}$  — множители Лагранжа, которые представляют собой функции пространственно-временных координат. Их можно считать симметричными при перестановке индексов:

$$\lambda^{bc} = \lambda^{cb} \quad (c, b = 1, 2, 3).$$

Вычислим прежде всего требуемые для модификации уравнений поля полевые производные.

Нас интересует производная лагранжиана  $\mathcal{L}'$  полевой переменной  $x^j$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} d^k_c d^l_b.$$

Полученное выражение преобразуем, принимая во внимание ( $\Gamma^s_{kj}$  — символы Кристоффеля второго рода пространственной метрики)

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \Gamma^s_{kj} g_{sl} + \Gamma^s_{lj} g_{ks},$$

а также симметрию множителей  $\lambda^{cb}$ . В итоге приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \lambda^{cb} \Gamma^s_{kj} d^k_c d^l_b.$$

Интерес представляет также производная лагранжиана  $\mathcal{L}'$  по экстраполевой переменной  $d^j_{\mathbf{a}}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial d^j_{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_{\mathbf{a}}} - \frac{1}{2} \lambda (g_{kl} \delta^k_{\mathbf{b}} d^l_{\mathbf{a}c} \delta + g_{kl} \delta^l_{\mathbf{c}} d^k_{\mathbf{a}b} \delta).$$

Привлекая затем соглашение о симметрии множителей  $\lambda$ , получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial d^j_{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_{\mathbf{a}}} - \frac{1}{2} \lambda (g_{jl} d^l_{\mathbf{b}} \delta + g_{jk} d^k_{\mathbf{c}} \delta)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial d^j_{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_{\mathbf{a}}} - \lambda d^j_{\mathbf{b}}.$$

В результате вместо (37) дифференциальные уравнения поля получаются в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha} S^{\alpha}_{\cdot j} - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^{s \quad bc} \lambda d_s d^k_{\mathbf{c}} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j, s, k = 1, 2, 3), \\ \partial_{\alpha} \mathcal{M}^{\mathbf{a}}_{\cdot j} + \mathcal{A}'_j - \partial_4 \mathcal{Q}_j &= 0 \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_{\alpha} j^{\alpha}_{\mathbb{R}} + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$\mathcal{A}'_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_{\mathbf{a}}} - \lambda d^j_{\mathbf{b}}.$$

Сворачивая обе левую и правую части последнего равенства с вектором  $d^j_{\mathbf{a}}$ , на основании уравнений связей

$$g_{kl} d^k_{\mathbf{c}} d^l_{\mathbf{b}} - \delta_{\mathbf{cb}} = 0,$$

откуда находим

$$(\mathcal{A}'_j - \mathcal{A}_j) d^j_{\mathbf{a}} = -\lambda \delta_{\mathbf{ab}}.$$

**Ротационная инвариантность действия и плотности действия относительно поворотов эйлеровой координатной системы. Объективные ротационно-инвариантные формы лагранжиана.** „Естественная“ плотность действия в форме (33) пока еще не позволяет вести речь о ее объективности в том смысле, что в разных эйлеровых координатных системах эта форма будет сохраняться. Ясно, что вывод объективных форм лагранжиана представляет собой первый и весьма важный шаг на пути построения объективных форм определяющих уравнений, первоначально задаваемых уравнениями (36). Ограничимся случаем, когда параметрами микроструктуры являются только  $d$ -векторы  $d^j_{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ). При этом „естественная“ плотность действия микрополярного термоупругого континуума второго типа может быть представлена в виде следующей функции с явно перечисленными вхождениями определяющих переменных:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^{\beta}, x^j, d^j_{\mathbf{a}}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}^j_{\mathbf{a}}, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha} x^j, \partial_{\alpha} d^j_{\mathbf{a}}, \partial_{\alpha} \vartheta). \quad (50)$$

В теориях континуумов лагранжиан имеет несколько более специальную форму, чем (50), разности плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \rho_{\mathbb{R}} g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_{\mathbb{R}} g_{ij} \mathfrak{I}^{\text{ab}} \dot{d}_{\text{a}}^i \dot{d}_{\text{b}}^j - \\ & - \psi(X^\beta, x^j, d_{\text{a}}^j, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_{\text{a}}^j, \partial_\alpha \vartheta). \end{aligned} \quad (51)$$

Для изображения состояний и процессов в механике континуума используется трехмерное плоское пространство—время и независимое время. Поскольку выбор эйлеровых координат произволен и не должен никак сказываться на физических следствиях дифференциальных уравнений поля, то действие и лагранжиан обязаны обладать определенными свойствами инвариантности по отношению к выбору эйлеровой координатной системы и начала отсчета времени, т.е. по отношению к так называемым „движениям“ эйлера пространства. Существуют два принципиально различных вида „движений“: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в эйлеровом пространстве. Спинорные „движения“ определяются заданием тензорных функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три (тензоры поворота).

Вводя в пространстве прямоугольные декартовы координаты  $x^j$ , заметим, что одно из таких свойств инвариантности проявляется в форме трансляционной инвариантности интегрального функционала действия относительно произвольных сдвигов переменных  $x^j$  и времени  $t$ . Другое, как хорошо известно, — ротационной инвариантности относительно произвольных поворотов эйлеровой координатной системы  $x^j$ .

Инвариантность действия относительно поворотов эйлера координатного репера является проявлением изотропии эйлера координатного пространства, т.е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Инвариантность действия относительно преобразований лагранжевых переменных связана с симметрией физических свойств континуума. Так, трансляционная инвариантность действия относительно произвольных сдвигов координат  $X^\alpha$  означает, что континуум однороден. Ротационная инвариантность относительно произвольных поворотов лагранжевой координатной системы указывает на изотропность континуума.

Таким образом, действие, в частности, должно быть инвариантно относительно преобразований сдвигов и поворотов координатной системы наблюдателя (принцип объективности) и сдвигов времени:

$$\tilde{x}^i = R_j^i x^j + C^i, \tilde{d}_{\text{a}}^i = R_j^i d_{\text{a}}^j, \tilde{t} = t + C. \quad (52)$$

В приведенных выше формулах преобразования  $C^i$ ,  $C$  есть произвольные постоянные;  $R_j^i$  — произвольная постоянная собственно ортогональная матрица.

Действие и плотность действия  $\mathcal{L}$  инвариантны относительно преобразований (52) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = 0, \partial_4^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0, \mathcal{K}_{[ij]} = 0, \quad (53)$$

где тензор  $\mathcal{K}_{ij}$  определяется согласно

$$\mathcal{K}_{ij} = x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + d_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_i^j} + \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} + \dot{d}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_i^j} + (\partial_\alpha x_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)} + (\partial_\alpha d_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d^j)} \quad (54)$$

и в (53) по индексам, заключенным в квадратные скобки, выполняется антисимметризация.

Заметим, что в силу (53) и в обозначениях (36) тензор  $\mathcal{K}_{ij}$  сводится к

$$\mathcal{K}_{ij} = d_i \overset{\text{a}}{\mathcal{A}}_j + \dot{x}_i P_j + \dot{d}_i \overset{\text{a}}{\mathcal{Q}}_j - (\partial_\alpha x_i) S_j^\alpha - (\partial_\alpha d_i) \overset{\text{a}}{\mathcal{M}}_j^\alpha. \quad (55)$$

Ясно, что в том случае, когда плотность действия не зависит явно от директоров  $d_i^j$ , их производных по времени  $\dot{d}_i^j$  и референциальных градиентов  $\partial_\alpha d_i^j$ , последнее в группе условий (53) позволяет сразу же установить *симметрию* тензора напряжений Коши

$$T_{.k}^l = -J^{-1}(\partial_\beta x^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta x^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3). \quad (56)$$

Инвариантность действия относительно трансляций эйлеровых координат, известная как принцип галилеевой инвариантности действия (принцип относительности Галилея), мы *дополним* требованием инвариантности действия относительно сдвигов температурного смещения ( $C'$  — произвольная постоянная):

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta + C', \quad (57)$$

что обеспечивается выполнением следующего условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0. \quad (58)$$

Поскольку кинетическая составляющая плотности действия инвариантна относительно преобразований (52), (57), то плотность свободной энергии Гельмгольца ( $\alpha, \beta=1,2,3$ )

$$\psi = \psi(X^\beta, d_i^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_i^j, \partial_\alpha \vartheta),$$

в свою очередь, обязана выдерживать преобразования вида (52), (57), т.е.

$$\psi(X^\beta, R_j^i d_i^j, \dot{\vartheta}, R_j^i \partial_\alpha x^j, R_j^i \partial_\alpha d_i^j, \partial_\alpha \vartheta) = \psi(X^\beta, d_i^j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_i^j, \partial_\alpha \vartheta). \quad (59)$$

Последнее обстоятельство означает, что свободная энергия Гельмгольца является некоторой функцией от переменных

$$X^\beta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha \vartheta, \quad (60)$$

в запись которых не входят эйлеровы индексы, а также следующих независимых инвариантных относительно вращений эйлеровой координатной системы аргументов:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), \mathcal{R}_\alpha = g_{ij}(\partial_\alpha x^i) d_i^j, \mathcal{T}_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta d_i^j). \quad (61)$$

Каждая из величин, перечисленных в (61), действительно инвариантна относительно произвольных вращений эйлеровой координатной системы, поскольку по всем эйлеровым индексам производится сворачивание с помощью эйлеровых метрических коэффициентов  $g_{ij}$ .

Заметим, что в списке инвариантных аргументов (61) отсутствуют тензоры

$$\mathcal{R}_{\mathbf{ab}} = g_{ij} d_{\mathbf{a}}^i d_{\mathbf{b}}^j, \mathcal{R}_{\alpha} = g_{ij} (\partial_{\alpha} d_{\mathbf{a}}^i) d_{\mathbf{b}}^j, \mathcal{T}_{\alpha\beta} = g_{ij} (\partial_{\alpha} d_{\mathbf{a}}^i) (\partial_{\beta} d_{\mathbf{b}}^j). \quad (62)$$

Рациональной основой для этого выступает требование того, чтобы экстрадеформация континуума была невозможна, если отсутствует деформация  $(g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta})$ .

Полноту системы ротационно-инвариантных аргументов (61) с учетом данного выше замечания (т.е. с исключенными внутренними произведениями (62)) можно доказать, опираясь на известные результаты теории алгебраических инвариантов<sup>2</sup> системы (эйлеровых векторов)

$$\partial_{\alpha} x^i, d_{\mathbf{a}}^j, \partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^j. \quad (63)$$

Во-первых, полная система инвариантов векторов (63) включает их попарные внутренние произведения, что приводит к эйлеровым инвариантам (61), (62).

Во-вторых, указанная система инвариантов содержит также всевозможные  $3 \times 3$ -определители, в столбцах которых расположены эйлеровы компоненты всевозможных троек векторов системы (63). А priori ясно, что интересующие нас определители должны содержать по меньшей мере один столбец из эйлеровых компонент градиента деформации  $\partial_{\alpha} x^i$ . Такие определители, размещая эйлеровы компоненты градиента деформации  $\partial_{\alpha} x^j$  в первом столбце, можно разбить на следующие шесть групп:

$$[(\partial_{\alpha} x^j) d_{\mathbf{a}}^j d_{\mathbf{b}}^j] = \begin{vmatrix} \partial_{\alpha} x^1 & d_{\mathbf{a}}^1 & d_{\mathbf{b}}^1 \\ \partial_{\alpha} x^2 & d_{\mathbf{a}}^2 & d_{\mathbf{b}}^2 \\ \partial_{\alpha} x^3 & d_{\mathbf{a}}^3 & d_{\mathbf{b}}^3 \end{vmatrix} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{b}), \quad (I)$$

$$[(\partial_{\alpha} x^j) (\partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^j) d_{\mathbf{b}}^j] = \begin{vmatrix} \partial_{\alpha} x^1 & \partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^1 & d_{\mathbf{b}}^1 \\ \partial_{\alpha} x^2 & \partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^2 & d_{\mathbf{b}}^2 \\ \partial_{\alpha} x^3 & \partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^3 & d_{\mathbf{b}}^3 \end{vmatrix}, \quad (II)$$

$$[(\partial_{\alpha} x^j) (\partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^j) (\partial_{\gamma} d_{\mathbf{b}}^j)] = \begin{vmatrix} \partial_{\alpha} x^1 & \partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^1 & \partial_{\gamma} d_{\mathbf{b}}^1 \\ \partial_{\alpha} x^2 & \partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^2 & \partial_{\gamma} d_{\mathbf{b}}^2 \\ \partial_{\alpha} x^3 & \partial_{\beta} d_{\mathbf{a}}^3 & \partial_{\gamma} d_{\mathbf{b}}^3 \end{vmatrix} \quad (\beta \neq \gamma \text{ и } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \text{ одновременно}), \quad (III)$$

$$[(\partial_{\alpha} x^j) (\partial_{\beta} x^j) d_{\mathbf{a}}^j] = \begin{vmatrix} \partial_{\alpha} x^1 & \partial_{\beta} x^1 & d_{\mathbf{a}}^1 \\ \partial_{\alpha} x^2 & \partial_{\beta} x^2 & d_{\mathbf{a}}^2 \\ \partial_{\alpha} x^3 & \partial_{\beta} x^3 & d_{\mathbf{a}}^3 \end{vmatrix} \quad (\beta \neq \alpha), \quad (IV)$$

<sup>2</sup>См., например: Гуревич, Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. – 408 с.

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta x^j) (\partial_\gamma d_\alpha^j)] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \partial_\gamma d_\alpha^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \partial_\gamma d_\alpha^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \partial_\gamma d_\alpha^3 \end{vmatrix} \quad (\beta \neq \alpha), \quad (\text{V})$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta x^j) (\partial_\gamma x^j)] = \begin{vmatrix} \partial_\alpha x^1 & \partial_\beta x^1 & \partial_\gamma x^1 \\ \partial_\alpha x^2 & \partial_\beta x^2 & \partial_\gamma x^2 \\ \partial_\alpha x^3 & \partial_\beta x^3 & \partial_\gamma x^3 \end{vmatrix}. \quad (\text{VI})$$

Вычисление всех шести определителей можно осуществить с помощью правила Грама–Шмидта, т.е. через определители, элементы которых представляют собой всевозможные внутренние произведения эйлеровых векторов, расположенных в столбцах исходных определителей, и метрические коэффициенты  $\backslash g_{\alpha\beta}$ . Таким образом, каждый из приведенных выше определителей вычисляется через внутренние произведения в соответствии с данной ниже схемой:

$$(I) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i) d_\alpha^j, g_{ij} d_\alpha^i d_\alpha^j;$$

$$(II) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta d_\alpha^j), g_{ij}(\partial_\alpha x^i) d_\beta^j, g_{ij}(\partial_\beta d_\alpha^i) d_\alpha^j;$$

$$(III) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\omega d_\alpha^j), g_{ij}(\partial_\beta d_\alpha^i)(\partial_\gamma d_\alpha^j);$$

$$(IV) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), g_{ij}(\partial_\alpha x^i) d_\alpha^j;$$

$$(V) \quad g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\gamma d_\alpha^j);$$

$$(VI) \quad g_{\alpha\beta}.$$

Хорошо видно, что определители (I)-(VI) вычисляются только через тензорные и векторные величины, перечисленные в (61) и (62), что и доказывает полноту ротационно-инвариантных аргументов (61) с учетом исключения аргументов (62).

Заметим также, что кинематическое ограничение

$$\mathcal{R}_{ab} = \delta_{ab}$$

устанавливает, что  $d$ -векторы составляют „жесткий“ репер, поэтому экстрадеформация континуума сводится лишь к вращениям составляющих его элементов.

В итоге, считая, что континуум однороден, т.е.

$$\partial_\beta^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3), \quad (64)$$

и, следовательно, все лагранжевы переменные  $X^\beta$  являются циклическими (игнорируемыми), получаем следующую, удовлетворяющую принципу объективности, ротационно-инвариантную форму свободной энергии Гельмгольца: ( $\mathbf{a}=1,2,3$ ;  $\alpha, \beta=1,2,3$ )

$$\psi = \psi(g_{\alpha\beta}, \mathcal{R}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, \vartheta, \partial_\alpha \vartheta). \quad (65)$$

Мы неявно подразумеваем, что приведенная форма (65) должна зависеть также от отсчетной метрики  $\backslash g_{\alpha\beta}$  и референциального положения  $d$ -векторов  $\backslash d_\alpha^j$  ( $\mathbf{a}=1,2,3$ ).

В форме (65) ротационно-инвариантный аргумент  $g_{\alpha\beta}$  без ограничения общности может быть заменен на

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - \backslash g_{\alpha\beta}). \quad (66)$$

Компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}$  преобразуются по тензорному закону при заменах лагранжевых координат. Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  называется тензором деформации Грина. Использование тензора деформации Грина в качестве ротационно-инвариантного аргумента лагранжиана исключительно удобно, т.к. он в силу своего определения учитывает только ту часть деформации континуума (22), которая наблюдается относительно некоторой фиксированной референциальной конфигурации.

По аналогичным соображениям вместо векторной меры экстра-деформации  $\mathcal{R}_\alpha$  следует использовать относительный вектор экстра-деформации

$$-\gamma_\alpha = \mathcal{R}_\alpha - g_{\alpha\beta} \mathop{d}^\beta. \quad (67)$$

Здесь векторы  $\mathop{d}^\beta$  указывают референциальное состояние системы  $d$ -векторов. Отметим следующее равенство:

$$\mathop{d}^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha} \mathop{d}^\alpha.$$

Вектор  $\gamma_\alpha$  оказывается нулевым, только если каждый из  $d$ -векторов поворачивается и удлиняется так, как это в точности предписывается деформацией континуума (22). Если последнее обстоятельство действительно имеет место, то  $\mathop{d}$ -векторы и  $d$ -векторы будут связаны зависимостями

$$\mathop{d}^i - (\partial_\alpha x^i) \mathop{d}^\alpha = 0;$$

умножая обе части полученного равенства на компоненты дисторсии  $\partial_\beta x^j$  и сворачивая с  $g_{ij}$ , находим

$$\mathcal{R}_\beta - g_{\beta\alpha} \mathop{d}^\alpha = 0,$$

т.е. относительный вектор экстра-деформации становится равным нулю:

$$\gamma_\beta = 0.$$

Таким образом, окончательно ротационно-инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде

$$\psi = \psi(\epsilon_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha, \mathcal{T}_{\alpha\beta}, \vartheta, \partial_\alpha \vartheta) \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (68)$$

Полученная форма указывает на явную зависимость свободной энергии Гельмгольца от одного скалярного аргумента  $\vartheta$ ; четырех отсчетных векторных аргументов  $\partial_\alpha \vartheta$ ,  $\gamma_\alpha$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3$ ); и четырех отсчетных тензорных аргументов  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3$ ), три из которых являются несимметричными тензорами второго ранга.

В принципе, существует еще только один способ построения системы независимых ротационно-инвариантных аргументов, отличный от изложенного выше. Он связан с полярным разложением градиента деформации  $(\partial_\alpha x^i)$  ( $i, \alpha = 1, 2, 3$ ) и градиентов микрополярных директоров  $(\partial_\alpha \mathop{d}^i)$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; i, \alpha = 1, 2, 3$ ).

Известно, что градиент деформации всегда может быть представлен как произведение симметричного положительно определенного тензора  $|x|_{\alpha\beta}$  ( $|x|_{\alpha\beta} > 0$ ) и ортогонального тензора  $\lambda^{i\beta}$ :

$$\partial_\alpha x^i = |x|_{\alpha\beta} \lambda^{i\beta}. \quad (69)$$

Тензор  $|x|_{\alpha\beta}$  называется модулем градиента деформации, тензор  $\lambda^{i\beta}$  — тензором поворота. Симметрия модуля градиента деформации и ортогональность тензора  $\lambda^{i\beta}$  выражаются следующими соотношениями:

$$|x|_{\alpha\beta} = |x|_{\beta\alpha}; \quad (70)$$

$$g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = \backslash g^{\beta\gamma}, \quad \backslash g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = g^{ij}. \quad (71)$$

То же самое относится и к градиентам микрополярных директоров  $(\partial_\alpha d_\alpha^i)$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3; i, \alpha = 1, 2, 3$ ). Полярные разложения градиентов директоров  $d_\alpha^i$  ( $\mathbf{a} = 1, 2, 3$ ) имеют вид

$$\partial_\alpha d_\alpha^i = |d_\alpha|_{\alpha\beta}\lambda_\alpha^{i\beta}, \quad (72)$$

где тензоры  $|d_\alpha|_{\alpha\beta}$  симметричны и положительны, а тензоры  $\lambda_\alpha^{i\beta}$  ортогональны.

Тензоры  $|x|_{\alpha\beta}$  и  $|d_\alpha|_{\alpha\beta}$ , очевидно, ротационно-инвариантны. С тем, чтобы получить полную систему независимых ротационно-инвариантных аргументов, к ним следует добавить следующие ротационно-инвариантные внутренние произведения (обязательно содержащие множитель  $\lambda^{i\beta}$ ):

$$g_{ij}d_\alpha^i\lambda^{j\beta}, \quad g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = \backslash g^{\beta\gamma}, \quad g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda_\alpha^{j\gamma}.$$

Таким образом, еще одна ротационно-инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде

$$\psi = \psi(|x|_{\alpha\beta}, |d_\alpha|_{\alpha\beta}, \backslash g_{\alpha\beta}, g_{ij}d_\alpha^i\lambda^{j\alpha}, g_{ij}\lambda^{i\alpha}\lambda_\alpha^{j\beta}) \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (73)$$

Наконец, установим связь между двумя системами ротационно-инвариантных аргументов. Она становится понятной, если принять во внимание следующие соотношения:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{ij}|x|_{\alpha\sigma}|x|_{\beta\kappa}\lambda^{i\sigma}\lambda^{j\kappa} = \backslash g^{\sigma\kappa}|x|_{\alpha\sigma}|x|_{\beta\kappa}, \\ \mathcal{R}_\alpha &= g_{ij}|x|_{\alpha\beta}\lambda^{i\beta}d_\alpha^j = |x|_{\alpha\beta}d_\alpha^j\lambda^{j\beta}, \\ \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= g_{ij}|x|_{\alpha\sigma}\lambda^{i\sigma}|d_\alpha|_{\beta\gamma}\lambda^{j\gamma} = |x|_{\alpha\sigma}|d_\alpha|_{\beta\gamma}g_{ij}\lambda^{i\sigma}\lambda_\alpha^{j\gamma}. \end{aligned} \quad (74)$$

Отметим еще одно интересное соотношение. Вычисляя длины векторов  $d_\alpha^j\lambda^{j\beta}$  в отсчетной метрике  $\backslash g_{\beta\gamma}$ , имеем:

$$\backslash g_{\beta\gamma}d_\alpha^i\lambda^{i\beta}d_\alpha^j\lambda^{j\gamma} = g^{ij}d_\alpha^i d_\alpha^j,$$

где величина справа есть длина  $d$ -директора с указателем  $\mathbf{a}$ .

**Определяющие уравнения в терминах объективного термодинамического базиса.** Как показано в предыдущем разделе работы, объективный термодинамический базис для микрополярного термоупругого континуума, распространение тепла в котором не сопровождается производством энтропии, состоит из следующего набора функционально-независимых переменных

$$\epsilon_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha, \mathcal{T}_{\alpha\beta}, \vartheta, \partial_\alpha\vartheta \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (75)$$



Определяющие уравнения микрополярного термоупругого континуума (36) были получены в термодинамическом базисе, который не удовлетворяет принципу ротационной инвариантности. Поэтому естественно поставить задачу о преобразовании определяющих уравнений (36) к объективным формам, диктуемым ротационно-инвариантными аргументами лагранжиана. Далее рассмотрим вывод объективных форм определяющих уравнений, исходя из ротационно-инвариантной формы свободной энергии (68). На основании

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} &= g_{jk}(\partial_\beta x^k \delta_\sigma^\alpha + \partial_\sigma x^k \delta_\beta^\alpha), \\
 \frac{\partial \epsilon_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} &= \frac{1}{2} g_{jk}(\partial_\mu x^k \delta_\nu^\alpha + \partial_\nu x^k \delta_\mu^\alpha), \\
 \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\mathfrak{a}}}{\partial(\partial_\alpha d^j)} &= g_{jk} \partial_\mu x^k \delta_\nu^\alpha \delta_\alpha^\epsilon, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{a}}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} &= g_{jk} \delta_\beta^\alpha d_\alpha^k, \\
 \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\mathfrak{a}}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} &= g_{jk} \delta_\mu^\alpha \partial_\nu d_\alpha^k, \\
 \frac{\partial \mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{a}}}{\partial d^j} &= g_{ij} \partial_\beta x^i \delta_\alpha^\epsilon
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_{\mu\nu}} \frac{\partial \epsilon_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta} \frac{\partial \mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{a}}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta} \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} d_\alpha^\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\mathfrak{a}}} \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\mathfrak{a}}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha d^j)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\mathfrak{a}}} \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\mathfrak{a}}}{\partial(\partial_\alpha d^j)}, \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j} &= - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta} \frac{\partial \mathcal{R}_\beta^{\mathfrak{a}}}{\partial d^j}
 \end{aligned}$$

можно получить следующие объективные формы определяющих уравнений (36):

$$\begin{aligned}
 -S_j^{\alpha\cdot} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_{\mu\alpha}} g_{jk} \partial_\mu x^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta} g_{jk} d_\alpha^k \delta_\beta^\alpha + \\
 &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta} g_{jk} (\partial_\beta x^k d_\alpha^\alpha + \partial_\sigma x^k \delta_\beta^\alpha d_\alpha^\sigma) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\mathfrak{a}}} g_{jk} \partial_\nu d_\alpha^k, \tag{76}
 \end{aligned}$$

$$-\mathcal{M}_j^{\alpha\cdot\epsilon} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha d^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\mathfrak{a}}} g_{jk} \partial_\mu x^k \delta_\nu^\alpha, \tag{77}$$

$$\mathcal{A}_j^{\epsilon\cdot} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\beta} g_{jk} \partial_\beta x^k. \tag{78}$$

Определяющее уравнение (76) после очевидных преобразований представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 -S_{\cdot j}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} x^j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_{\mu\alpha}} g_{jk} \partial_{\mu} x^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{\alpha}^{\nu}} g_{jk} (\partial_{\sigma} x^{k\nu} d_{\alpha}^{\sigma} - d_{\alpha}^k) + \\
 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{\beta}^{\nu}} g_{jk} \partial_{\beta} x^{k\nu} d_{\alpha}^{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{\mu\nu}} g_{jk} \partial_{\nu} d_{\alpha}^k.
 \end{aligned} \tag{79}$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Радаев, Ю. Н. Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела / Международная конференция „Современные проблемы механики“, посв. 100-летию Л. А. Галина, 20-21 сентября 2012 г., г. Москва. Тезисы докл. М., 2012. – С. 75–76.
- [2] Радаев, Ю. Н. Гиперболические теории и задачи механики континуума / Четвертая международная конференция „Математическая физика и ее приложения“, 25 августа - 1 сентября, 2014 г., г. Самара: Материалы между. конференции (под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко) / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев. – Самара : СамГТУ, 2014. – С. 289–290.
- [3] Toupin, R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress / R. A. Toupin // Arch. Rational Mech. Anal. – 1964. – Vol. 17. – №5. P. 85–112.
- [4] Гюнтер, Н. М. Курс вариационного исчисления / Н. М. Гюнтер. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1941. – 308 с.
- [5] Бердичевский, В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М. : Наука, 1983. – 448 с.
- [6] Ковалев, В. А. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 156 с.
- [7] Ковалев, В. А. Волновые задачи теории поля и термомеханика / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. – 328 с.
- [8] Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
- [9] Седов, Л. И. Введение в механику сплошных сред / Л. И. Седов. – М. : Физматгиз, 1962. – 284 с.
- [10] Ильюшин, А. А. Механика сплошных сред / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во Московского университета, 1978. – 287 с.
- [11] Грин, А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М. : Мир, 1965. – 456 с.
- [12] Cosserat, E. et F. Théorie des corps déformables / E. et F. Cosserat. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 pp.
- [13] Ковалев, В. А. Вывод тензоров энергии–импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2011. – №5. – С. 58–77.
- [14] Ковалев, В. А. Теоретико-полевые формулировки и модели нелинейной гиперболической микрополярной термоупругости / XXXVI Дальневосточная математическая школа-семинар им. акад. Е. В. Золотова (4-10 сентября 2012 г., Владивосток). Сб. докладов. [Электронный ресурс] / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2012. – С. 137–142.

[15] Ковалев, В. А. Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. – Вып. 4. – С. 71–79.

[16] Ковалев, В. А. Ковариантная форма уравнений совместности на поверхностях сильного разрыва в микрополярном термоупругом континууме: гиперболическая теория // Труды XVI Межд. конф. Современные проблемы механики сплошной среды, 16-19 октября 2012 г., г. Ростов-на-Дону. Т. II / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев. – Ростов-на-Дону : Изд-во Южного федерального университета, 2012. – С. 99–103.

[17] Ковалев, В. А. Полевые уравнения и  $d$ -тензоры термоупругого континуума с „тонкой“ микроструктурой / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 2. – Ч. 1. – С. 60–68.

[18] Радаев, Ю. Н. Теоретико-полевые уравнения термоупругого континуума со связанными микроструктурными параметрами / Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по материалам межд. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 12-15 августа, 2013 г.) : в 2 ч. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела (отв. ред. Б. Г. Миронов) / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев. – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 241–247.

[19] Ковалев, В. А. Теоретико-полевая модель гиперболического термоупругого континуума с „тонкой“ микроструктурой / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев // Изв. Тульского гос. университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 2. – Ч. 2. – С. 117–127.

[20] Радаев, Ю. Н. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного континуума второго типа / Ю. Н. Радаев, В. А. Ковалев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 4. – Ч. 1. – С. 96–102.

*Ковалев Владимир Александрович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва*

*e-mail: vlad\_koval@mail.ru*

*Радаев Юрий Николаевич,*

*доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

*e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com*

Y. N. Radayev, V. A. Kovalev

## FINITE STRAINS AND EXTRA STRAINS OF TYPE-II THERMOELASTIC CONTINUUM WITH FINE MICROSTRUCTURE

*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

*Moscow City Government University of Management, Moscow*

**Abstract.** A new non-linear mathematical model of type-II thermoelastic continuum with fine microstructure is developed. The model is described in terms of 4-covariant field theoretical formalism. Fine microstructure is represented by  $d$ -vectors and  $d$ -tensors, playing role of extra field variables. A Lagrangian density for type-II thermoelastic continuum with fine microstructure is given and the least action principle is formulated. Virtual microstructural inertia is added to the considered action density. Corresponding 4-covariant field equations of type-II thermoelasticity are derived. Constitutive equations of type-II microstructural thermoelasticity are discussed. Variational symmetries of the thermoelastic action are used to formulate covariant conservation laws in a plane spacetime. Following the usual procedure for type-II micropolar thermoelastic Lagrangians functionally independent rotationally invariant arguments are obtained. A formal proof of the completeness of the system of rotationally invariant arguments is given. An alternative approach of constructing a complete system of independent rotationally invariant arguments is discussed. Objective forms of the Lagrangians satisfying the frame indifference principle are given. Those are derived by using extra strain vectors and tensors.

**Keywords:** thermoelasticity, microstructure, field, extra field, action, covariance, conservation law,  $d$ -tensor, 4-current, energy–momentum tensor, kinematic constraint, Lagrange multiplier, rotation, frame indifference principle, extrastrain tensor.

### REFERENCES

- [1] *Radayev, Yu. N.* Hyperbolic theories and problems of mechanics of a deformable solid body / International conference „Modern problems of mechanics“, L. A. Galina devoted to the 100 anniversary (Moscow, 20–21 September 2012) : theses of reports / Yu. N. Radayev. – 2012. – P. 75–76. (in Russian)
- [2] *Radayev, Yu. N.* Hyperbolic theories and problems of mechanics of a continuum / Fourth international conference „Mathematical physics and its appendices“ (Samara, 25 August–1 September 2014) : materials of the international conference (under edition corresponding member RAS I. V. Volovich and doctor of physical and mathematical sciences, professor V. P. Radchenko) / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev. – Samara : SamSTU, 2014. – P. 289–290. (in Russian)
- [3] *Toupin, R. A.* Theories of Elasticity with Couple-stress / R. A. Toupin // Arch. Rational Mech. Anal. – 1964. – Vol. 17. – №5. P. 85–112.
- [4] *Gunter, N. M.* Course of calculus of variations / N. M. Gunter. – M. ; L. : Gostekhizdat, 1941. – 308 p. (in Russian)
- [5] *Berdichevsky, V. L.* Variation principles of mechanics of the continuous environment / V. L. Berdichevsky. – M. : Nauka, 1983. – 448 p. (in Russian)
- [6] *Kovalev, V. A.* Elements of the theory of a field: variation symmetry and geometrical invariants / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev. – M. : Fizmatlit, 2009. – 156 p. (in Russian)
- [7] *Kovalev, V. A.* Wave tasks of the theory of a field and thermomechanic / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev. – Saratov : SSU, 2010. – 328 p. (in Russian)
- [8] *Ovsyannikov, L. V.* Group analysis of the differential equations / L. V. Ovsyannikov. – M. : Nauka, 1978. – 400 p. (in Russian)
- [9] *Sedov, L. I.* Introduction to mechanics of continuous environments / V. I. Sedov. – M. : Fizmatgiz, 1962. – 284 p. (in Russian)

- [10] *Ilyushin, A. A.* Mechanics of continua / A. A. Ilyushin. – M. : MSU, 1978. – 287 p. (in Russian)
- [11] *Green, A.* Big elastic deformations and nonlinear mechanics of the continuous environment / A. Green, J. Adkins. – M. : Mir, 1965. – 456 p. (in Russian)
- [12] *Cosserat, E. et F.* Théorie des corps déformables / E. et F. Cosserat. – Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
- [13] *Kovalev, V. A.* Conclusion of tensors of energy—an impulse in theories of micropolar hyperbolic thermoelasticity / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – №5. – P. 58–77. (in Russian)
- [14] *Kovalev, V. A.* The theorist - field formulations and models of nonlinear hyperbolic micropolar thermoelasticity / XXXVI Far East mathematical school seminar of Akad. E. V. Zolotova (Vladivostok, 4–10 September 2012) : collection of reports [digital resource] / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev. – Vladivostok : IAPU of DVO of the RAS, 2012. – P. 137–142. (in Russian)
- [15] *Kovalev, V. A.* Precisely remaining invariants of the connected micropolar thermoelastic field / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev // News of the Saratov university. Mathematics series. Mechanics. Informatics. – 2012. – Vol. 12. – Issue 4. – P. 71–79. (in Russian)
- [16] *Kovalev, V. A.* Covariant form of the equations of compatibility on surfaces of a strong gap in a micropolar thermoelastic continuum: hyperbolic theory // Works XVI of the International conference. Modern problems of mechanics of the continuous environment (Rostov-on-Don, 16–19 October 2012). Vol. II / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev. – Rostov-on-Don : Publishing house of the Southern federal university, 2012. – P. 99–103. (in Russian)
- [17] *Kovalev, V. A.* The field equations and  $d$ -tensors of a thermoelastic continuum with „thin“ a microstructure / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev // News of the Saratov university. Mathematics series. Mechanics. Informatics. – 2013. – Vol. 13. – Issue 2. – Part 1. – P. 60–68. (in Russian)
- [18] *Radayev, Yu. N.* The theorist - the field equations of a thermoelastic continuum with the connected microstructural parameters / Fundamental and applied problems of mechanics of a deformable solid body, mathematical modeling and information technologies : the collection of articles on materials of the international scientific and practical conference (Cheboksary, 12–15 August, 2013) : in 2 part. Part. 1. Mechanics of a deformable solid body (editor-in-chief B. G. Mironov) / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev. – Cheboksary : ChSPU, 2013. – P. 241–247. (in Russian)
- [19] *Kovalev, V. A.* The theorist - field model of a hyperbolic thermoelastic continuum with „thin“ a microstructure / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev // News of the Tula state university. Natural sciences. – 2013. – Issue 2. – Part 2. – P. 117–127. (in Russian)
- [20] *Radayev, Yu. N.* Rotational invariancy and objective forms of lagranzhian of a nonlinear micropolar continuum of the second type / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev // News of the Saratov university. Mathematics series. Mechanics. Informatics. – 2013. – Vol. 13. – Issue 4. – Part 1. – P. 96–102. (in Russian)

*Kovalev, Vladimir Aleksandrovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City Government University of Management, Moscow*

*Radayev, Yuri Nickolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow*

А. А. Трещев, В. М. Леонов

## МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНАЯ ОБРАБОТКА МЕТАЛЛОВ. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК

*Тульский государственный университет, г. Тула*

**Аннотация.** В статье рассмотрено исследование характеристик неосесимметричного металлического образца на операциях магнитно-импульсной обработки. Построено распределение характеристик для элементов в зоне активного нагружения в координатах времени и пространства.

**Ключевые слова:** контактная пара, втулка, прямолинейная трещина, коэффициенты интенсивности напряжений, предельно-равновесное состояние втулки.

УДК: 539.375

Анализ процессов формоизменения материалов на операциях магнитно-импульсной обработки материалов в данной статье производится на основе разработанной модели (реализующая программа Tetra Compound v.1.1, свидетельство № 2013610558). В основу модели положены соотношения Трещева А. А. [1], [2]. Построенная конечно-элементная модель позволяет производить детальный анализ всех параметров напряженно-деформированного состояния для любой выбранной области исходной заготовки (при расчете рассматривался сплав АМг2М). За единичный элемент принят тетраэдр. Рассмотрено формоизменение образца при длительности процесса более 25 мкс. для осевого и продольного сечения, а также сечения под углом  $45^\circ$  от оси заготовки в окрестности точек 1, 2, 3 (рис. 1а) на операции отбортовки бокового отверстия. Для более детального рассмотрения взяты 27 точек вдоль края отверстия, начиная от верхней точки отверстия до нижней (по оси заготовки). Расстояние выбранных точек от края отверстия составляет 5 мм (рис. 1б). Для расчета выбрана однослойная сетка конечных элементов в форме тетраэдра (24 тетраэдра образуют единичный прямоугольный параллелепипед) с четырьмя узлами регулярной равномерной решетки, каждый узел обладает шестью степенями свободы в 3-D постановке для решаемой задачи, число слоев для рассматриваемой принципиальной схемы ограничено лишь вычислительными ресурсами компьютера. Рассмотрение протекающих процессов формоизменения материала на операции отбортовки бокового отверстия предполагает с учетом возможного масштабирования в дальнейшем широкий спектр возможных решений, направленных на оптимизацию существующих и разработку новых технологий с учетом фактора замещения импортной продукции.

Распространение упругопластических деформаций в объеме материала зависит от формы внешнего импульса и конфигурации деформируемого материала (рис. 2). Для предварительного рассмотрения были выбраны точки на краю отверстия, в зоне наиболее интенсивного формоизменения – в осевом сечении, в поперечном сечении и на краю отверстия, под углом 45 градусов к вертикальной оси, как показано на рис. 1а. Соответствующие диаграммы напряжений показаны на рис. 2. Серьезные различия в пластической зоне для каждой из точек на

диаграмме нагружения позволяют сделать вывод о различном вкладе сдвиговых компонент тензоров в общую работу по формоизменению [3].

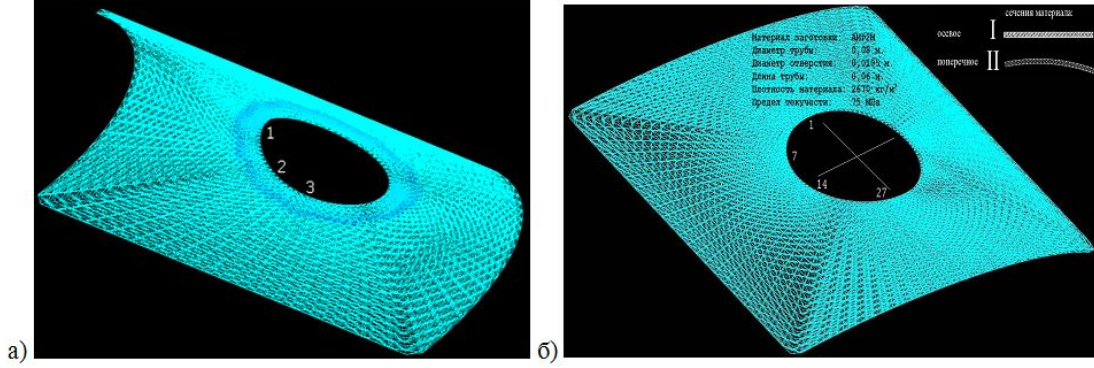


Рис. 1 а, б. Расчетная модель трубчатой заготовки с боковым отверстием

Взаимосвязь между компонентами тензоров напряжений и деформаций описывается на основе формул Кастильяно зависимостью (1):

$$e_{ij} = \frac{\partial W_k}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1)$$

Потенциал  $W$  в этом случае представляется в виде суммы (2)

$$W = \hat{W} + \tilde{W}, \quad (2)$$

где  $\hat{W}$  содержит слагаемые, приводящие к линейным соотношениям,  $\tilde{W}$  — составляющая потенциала, приводящая к нелинейным соотношениям между напряжениями и деформациями.

Выражение для потенциала деформаций имеет вид [1], [2]:

$$W = (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta \cos 3\varphi) \tau^2 + [(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2]^n,$$

где  $A_e, B_e, C_e, D_e, E_e, A_p, B_p, C_p, D_p, E_p$  — выражения, зависящие от констант квазилинейной и нелинейной частей потенциала соответственно.

Применение формул Кастильяно к потенциалу позволяет получить следующие соотношения (3):

$$[W_{ii}] = \frac{\partial [W_1]}{\partial \sigma_{ii}}, \quad 2[W_{ij}] = \frac{\partial [W_1]}{\partial \tau_{ij}}, \quad (i \neq j). \quad (3)$$

Дальнейшие преобразования приведут к следующему результату (4):

$$\frac{\partial [W_1]}{\partial \sigma_{ii}} = \begin{bmatrix} 2\sigma/3 \\ 2(\sigma_{ii} - \sigma)/3 \\ \sigma\xi - \xi^3 \sigma_{ii}/3 \\ 2\xi(\sigma_{ii} - \sigma)/3 + \eta(\tau - \eta\xi \sigma_{ii})/3 \\ \eta \cos 3\varphi [(\sigma_{ii} - \sigma)(2 + \xi^2) - \tau\eta\xi]/3 + \tau^2 \partial \cos 3\varphi / \partial \sigma_{ii} \end{bmatrix}; \quad (4)$$

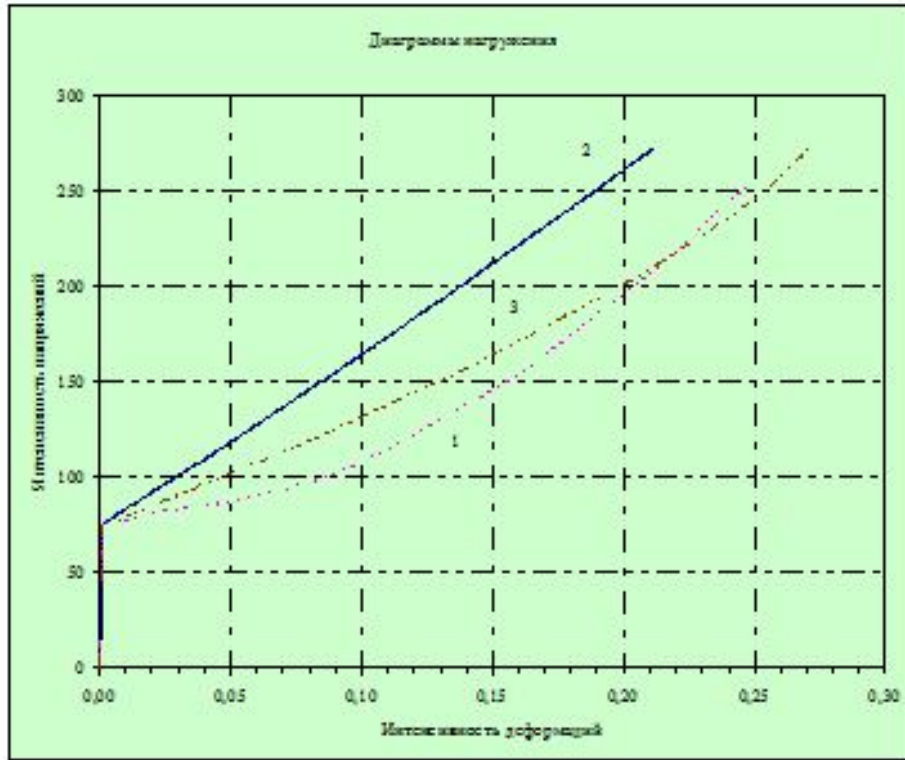


Рис. 2. Диаграммы зависимости интенсивности напряжений (МПа) от деформаций

$$\frac{\partial[W_1]}{\partial\tau_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\tau_{ij}/3 \\ -2\xi^3\tau_{ij}/3 \\ 2\xi\tau_{ij}(2-\eta^2)/3 \\ 2\eta\tau_{ij}\cos 3\varphi(2+\xi^2)/3 + \tau^2\eta \cdot (\partial\cos 3\varphi/\partial\tau_{ij}) \end{bmatrix},$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\cos 3\varphi$  — нормированные напряжения и фазовый инвариант соответственно;  $\sigma$ ,  $\tau$  — октаэдрическое нормальное и касательное напряжения.

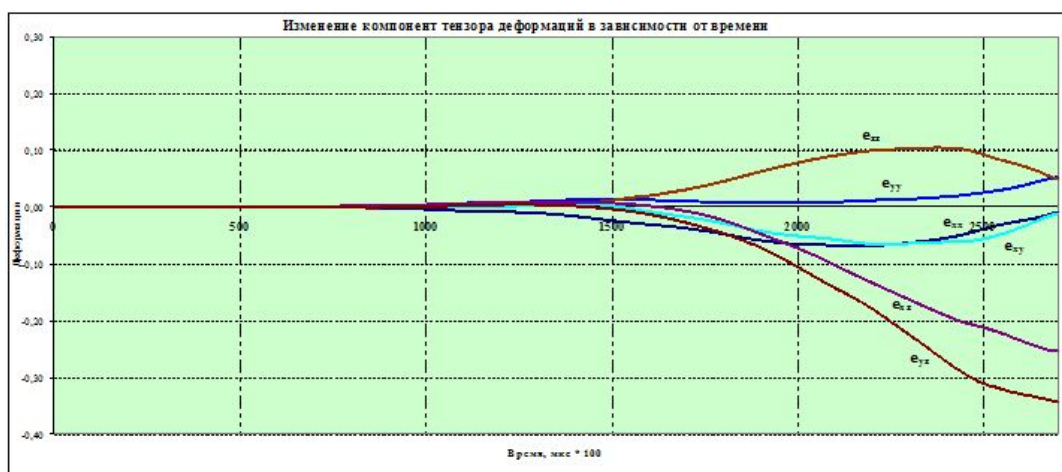
Различие в диаграмме напряжений для выбранных точек позволяет сделать вывод о различном соотношении нормальных и касательных напряжений и необходимости более детального анализа компонент тензоров напряжений и деформаций, а также взаимосвязанных значений накопленной работы по формоизменению материала. Для верхней точки в осевом сечении сдвиговые деформации преобладают над нормальными, последние являются преобладающими в крайней точке поперечного сечения (рис. 3в) заготовки.

По приведенным данным можно отметить, что элементы окрестности точки 3 испытывают значимые сдвиговые деформации помимо деформации в радиальном направлении. Для более

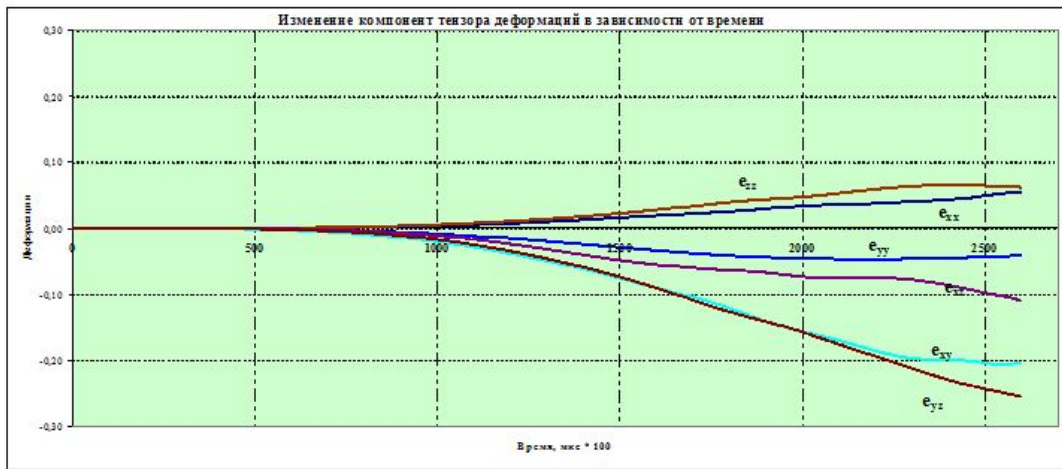


детального анализа упругопластических переходов в материале на крае отверстия произведено построение пространственно-временных диаграмм для компонент тензора деформаций и результирующих характеристик на основе расчетных данных (рис. 4а – ж).

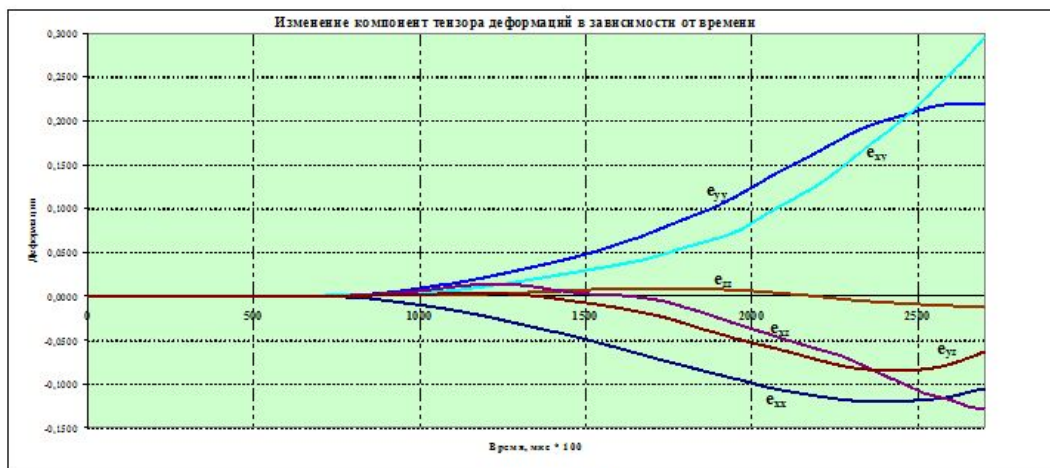
Построение поля пространственно-временного распределения для каждой из характеристик и последующий анализ диаграмм на рис. 4 позволяют оценить характер пространственно-временного распределения параметров, их вклад в общем объеме при формоизменении. Компонента тензора деформаций  $e_{11}$  носит знакопеременный характер, что обусловлено сложной геометрией изделия, при этом отрицательная величина свидетельствует о локальном сжатии для большей части элементов близлежащими для большей части образующей отверстия. Осевая компонента тензора минимальна в поперечном сечении отверстия, увеличение происходит с приближением к осевому сечению заготовки. Изменение радиуса кривизны деформируемого материала от значения внутреннего радиуса оболочки для поперечного сечения (точка 3 – рис. 1а и точка 14 – рис. 1б) до  $+\infty$  в осевом сечении образца (точка 1) обуславливает приведенные на рис. 4 изменения компонент тензора деформаций. Стоит отметить снижение практически до нулевого значения осевой компоненты тензора для элементов в зоне поперечного сечения, где интенсивность деформаций будет обусловлена величиной компоненты  $e_{12}$ .



а) точка № 1



б) точка № 2



в) точка № 3

Рис. 3. Компоненты тензора деформаций: а – точка 1; б – точка 2; в – точка 3

В значительной степени сдвиговые компоненты являются знакопеременными по длине образующей, что свидетельствует о повороте материальных волокон по отношению к близлежащим элементам. Для деформаций  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$  наблюдается изменение знака при переходе от точки 1 к точке 27 с переходом через нулевое значение в окрестности точки 14 (рис. 16), что свидетельствует о разнонаправленном исходном расположении материальных волокон.

В ходе ранее проведенных исследований было установлено, что при значении относительного диаметра отверстия  $d/D = 0.14$  с ростом частоты от 8 до 20 кГц уменьшение напряжений составляет 15 %, а для  $d/D = 0.4$  – 22 %. Минимальное значение напряжений в точке 1 имеем при значении  $d/D = 0.31$ . Минимум напряжений в данном случае обусловлен соотношением диаметров заготовки и отверстия. Значения интенсивности напряжений в точке 1 (на крае отверстия в осевом сечении) превышают аналогичный показатель в точке 3 (вблизи матрицы) в среднем в 1.6 раза, в данной окрестности происходит растяжение и утончение материала, что подтверждается экспериментальными данными [3].

На крае отверстия напряжения снижаются при переходе от начального к конечному сечению. Величины напряжений на крае отверстия в осевом сечении превышают аналогичный показатель на крае отверстия в поперечном сечении в 1.8 раза. Напряжения в окрестности точки 1 в 1.6 раза больше напряжений в основании отверстия, в окрестности точки 3. Напряжения в основании отверстия в поперечном сечении заготовки больше напряжений на крае в 1.15 раза.

Окружные деформации в сечении 1 снижаются с 0.31 на крае до 0 в основании отверстия. Наблюдаем постепенное снижение окружных деформаций с 0.31 до 0.08, а также с 0.14 до 0.05 при смене сечения с 1 по 14. В основании отверстия окружные деформации достигают наибольшего значения -0.13 в 7 сечении, для остальных сечений в основании окружные деформации приближаются к нулю.

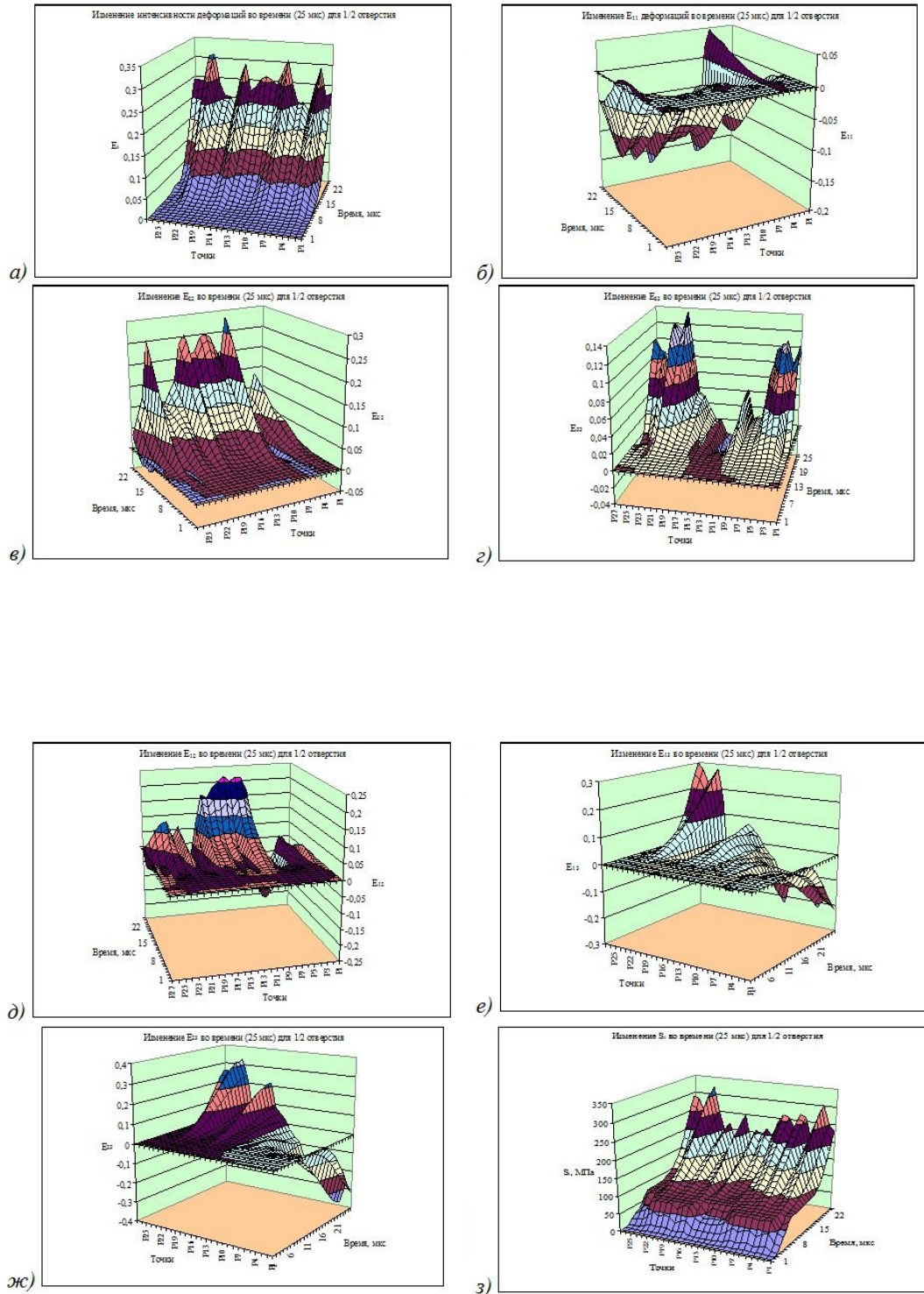


Рис. 4. Распределение характеристик для 1/2 отверстия по высоте (5 мм от края)

Проведенные расчеты позволили установить характер изменения описанных характеристик во взаимосвязи с параметрами внешнего воздействия, дальнейшее исследование позволит формализовать выявленные зависимости.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Трещев, А. А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения: монография. – Тула : РААСН, 2008. – 264 с.

[2] *Трещев, А. А.* Исследование устойчивости тонких цилиндрических оболочек, выполненных из дилатирующих материалов // Изв. вузов. Строительство. – 1999. – № 1. – С. 14–19.

[3] *Чибисов, В. П.* Исследование процесса деформации концевой части осесимметричных трубчатых заготовок из анизотропного материала импульсным магнитным полем - дисс. на соиск. : канд. техн. наук. – Тула : ТулПИ. – 1981.

*Трещев Александр Анатольевич,*

*доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула*

*e-mail: taa58@yandex.ru*

*Леонов Василий Михайлович,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула*

A. A. Treshchev, V. M. Leonov

## MAGNETIC PULSE TREATMENT OF METALS - FEATURES INVESTGATION

*Tula State University, Tula*

**Abstract.** The Article contains features review of non-axial metal specimen on magnetic-pulse treatment operations. 3-Dimension curves has been obtained for the elements under pressure.

**Keywords:** isotropic strip, non-uniformly heating, crack, end zones, plastic deformations, contact stresses.

### REFERENCES

[1] *Treshchev, A. A.* Theory of deformation and durability of the materials sensitive to a type of a tension. The defining ratios: monograph / A. A. Treshchev. – Tula : RAASN, 2008. – 264 p. (in Russian)

[2] *Treshchev, A. A.* Research of stability of thin cylindrical covers, the materials executed from the dilatiruyushchikh / A. A. Treshchev // News of higher education institutions. Construction. – 1999. – № 1. – P. 14–19. (in Russian)

[3] *Chibisov, V. P.* Research of process of deformation of trailer part axisymmetric tubular preparations from anisotropic material the pulse magnetic field - the thesis on competition : phd. – Tula : TPI. – 1981. (in Russian)

*Treshchev, Alexander Anatolyevich*

*Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula*

*Leonov, Vasilii Mihailovich*

*PhD, Assoc. Professor, Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula*

Е. В. Спиридонова

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В СМЕШАННОЙ ПОСТАНОВКЕ

*Оренбургский государственный университет, г. Оренбург*

**Аннотация.** В работе приведено численно-аналитическое решение плоских задач о раскрытии берегов плоской трещины со смешанными краевыми условиями. Решение осуществлялось одним из методов граничных элементов – методом разрывных смещений. Нормальные и сдвиговые раскрытия берегов зияющей части трещины аппроксимировались функциональными зависимостями с помощью метода наименьших квадратов. Построены аналитические выражения коэффициентов интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода в виде предельных соотношений, основанных на разрывных смещениях. Определены положения зон развития и стагнации трещины на основе силового критерия хрупкого разрушения сплошных сред с трещиной.

**Ключевые слова:** зияющая трещина, смешанные краевые условия, коэффициенты интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода, оценка состояния развития трещины.

УДК: 517

**Введение.** Известно, что горные породы имеют структурно-неоднородное блочно-слоистое строение. Блочная структура проявляется на разных масштабных уровнях, от размеров кристаллических зерен до блоков горного массива [1]. Зачастую блоки связаны между собой пустыми или заполненными грунтом зияющими трещинами. Разрушение геоматериалов происходит в результате скольжения, сдвига, поворота, смещения друг относительно друга блоков породы как жесткого целого вдоль нарушений сплошности массива. Поэтому, при моделировании процесса разрушения нужно знать, как раскрывается зияющая трещина под действием смещений и напряжений.

Трещина в деформируемом твердом теле состоит из фронта трещины, на котором смыкают поверхности полости, и берегов трещины [2]. В окрестности фронта наблюдается наибольшая концентрация напряжений и происходит локальное разрушение материала. С точки зрения постановки и решения задач теории упругости, берега трещины играют роль дополнительной границы тела и из-за малого расстояния между берегами реальную трещину можно рассматривать как математический разрез, т.е. полость нулевого объема, ограниченную двумя геометрически совпадающими поверхностями и – берегами разреза. В нашем случае трещина – это граница двух блочных структур.

Задача о расклинивании плоскости полубесконечным разрезом, к берегам которого приложены постоянные разрывные смещения, с зияющей трещиной (первая задача) рассмотрена в работе Г. П. Черепанова [3] (основная часть содержит устье, а зияющая – вершину трещины). Расклинивание характеризуется перемещением берегов трещины и при достаточных усилиях приводит к разрушению. В связи с этим, в работе [4] различаются типы поверхностей разрыва смещений. Если реализуется разрыв нормального к поверхности смещения, то трещина

характеризует отрыв и является трещиной нормального отрыва, а если реализуется разрыв касательного к трещине смещения, то трещина является трещиной сдвига. Также в работе [3] рассмотрена задача о расклинивании с зияющей трещиной отрыва, в которой на полубесконечном разрезе задавались постоянные нормальные смещения, а зияющая трещина находилась под действием сжимающих напряжений (вторая задача). В обеих задачах представлено аналитическое выражение нормального раскрытия зияющей трещины в верхней полуплоскости. С помощью асимптотического критерия можно записать коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины отрыва на оси ординат и найти длину трещины. Следует отметить, что данные задачи были решены в аналитическом виде и не учитывали структуру разрушаемого материала и влияние смешанного нагружения. Поэтому для таких задач поиск аналитических представлений коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в задачах со смешанными краевыми условиями (СКУ), приложенными к берегам трещины, приобретает особую актуальность.

Целью настоящего исследования является численное решение краевых задач о раскрытии берегов плоской трещины смешанного типа в песчанике при различных краевых условиях, построение алгоритма вычисления раскрытий берегов трещины, коэффициентов интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода, оценка состояния развития трещины на основе силового критерия хрупкого разрушения.

**Постановка и метод решения задач.** В рамках работы решение задач производится в условиях, когда трещина моделируется прямолинейным математическим разрезом конечной длины. В постановке со смешанными краевыми условиями в общем случае часть берегов трещины находится под действием сдвиговых и нормальных смещений, а часть – под действием сдвиговых и нормальных напряжений. Поэтому для  $i$ -го граничного элемента ( $i = \overline{1, J}$ )

$$u_s^i = u_s^0, \quad u_n^i = u_n^0, \quad \sigma_s^i = \sigma_s^0, \quad \sigma_n^i = \sigma_n^0.$$

Для упрощения дальнейших рассуждений запишем вектора правой части граничных условий

$$u_0 = (u_n^0 \quad u_s^0)^T, \quad \sigma_0 = (\sigma_n^0 \quad \sigma_s^0)^T; \quad (1)$$

вектора левой части на берегах основной ( $b = OA$ ) и зияющей ( $L = OB$ ) частей трещины [5]

$$u_i = (u_n^i \quad u_s^i)^T, \quad \sigma_i = (\sigma_n^i \quad \sigma_s^i)^T. \quad (2)$$

Общее представление геометрической модели трещины и постановки граничных условий задает рис. 1.

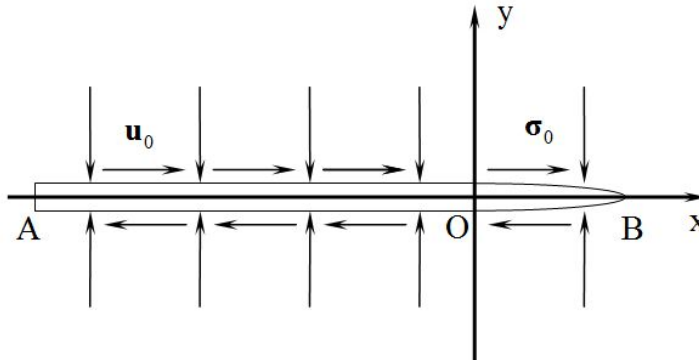


Рис. 1. Геометрическая модель трещины смешанного типа



В качестве метода численного решения задач теории трещин со смешанными краевыми условиями выбран один из типов метода граничных элементов – метод разрывных смещений. Граничные интегральные уравнения метода разрывных смещений детально рассмотрены в работе А. М. Линькова [6], где показано, как при переходе от интегральной формы записи к конечным суммам образуется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$u_s^i = \sum_{j=1}^J B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^J B_{sn}^{ij} D_n^j, \quad (3)$$

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^J A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^J A_{sn}^{ij} D_n^j, \quad (4)$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^J B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^J B_{nn}^{ij} D_n^j, \quad (5)$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^J A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^J A_{nn}^{ij} D_n^j, \quad (6)$$

где  $B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}, A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$  – граничные коэффициенты влияния,  $D_n = u_n(x, 0_-) - u_n(x, 0_+)$  – нормальные раскрытия (разрывы) берегов трещины;  $D_s = u_s(x, 0_-) - u_s(x, 0_+)$  – сдвиговые раскрытия (разрывы) берегов трещины;  $u_n(x, 0_-), u_n(x, 0_+)$  – нормальные смещения соответственно нижнего и верхнего берегов трещины;  $u_s(x, 0_-), u_s(x, 0_+)$  – касательные смещения нижнего и верхнего берегов трещины.

При этом считается, что:

- внутренняя нормаль к берегам трещины направлена внутрь трещины;
- при  $D_n > 0$  берега трещины сближаются;
- при  $D_s > 0$  наружный (верхний) берег смещается относительно внутреннего (нижнего) берега против часовой стрелки (влево).

**Алгоритм решения.** Ниже представлен алгоритм решения краевых задач теории трещин, который можно записать следующим образом.

1. Формирование таблицы физических свойств горной породы и геометрической модели трещины в виде математического разреза плоскости.
2. Формирование системы граничных условий.
3. Формирование замкнутой СЛАУ.
4. Решение СЛАУ.
5. Представление решения СЛАУ в виде таблицы нормальных и сдвиговых раскрытий по номерам граничных элементов.
6. Аппроксимация раскрытий в зияющей части трещины

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x) p_n \sum_{i=0}^M \alpha_{in} (u_s^0/u_n^0)^i + D_n^{(\sigma)}(x) \sum_{i=0}^M \beta_{in} (\sigma_s^0/\sigma_n^0)^i, \quad (7)$$

$$D_s(x) = D_n^{(1)}(x) p_s \sum_{i=0}^M \alpha_{is} (u_n^0/u_s^0)^{i-1} + D_n^{(\sigma)}(x) \sum_{i=0}^M \beta_{is} (\sigma_n^0/\sigma_s^0)^{i-1}, \quad (8)$$

где

$$p_n = [\gamma_{0n} + \gamma_{1n} \exp(\gamma_{2n} bL^{-1})] [\eta_{0n} + \eta_{1n} \exp(\eta_{2n} bL^{-1})], \quad (9)$$

$$p_s = [\gamma_{0s} + \gamma_{1s} \exp(\gamma_{2s} bL^{-1})] [\eta_{0s} + \eta_{1s} \exp(\eta_{2s} bL^{-1})], \quad (10)$$

а смещение  $D_n^{(\sigma)}$  учитывает поправку на действие напряжений  $\sigma_n^0$ .

7. Вычисление КИН 1-го и 2-го рода в виде пределов по формулам, приведенным в работе А. М. Линькова [6]

$$K_I = -\frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_n(x)}{\sqrt{L-x}}, \quad (11)$$

$$K_{II} = -\frac{G}{2(1-\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_s(x)}{\sqrt{L-x}}, \quad (12)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\text{Н/м}^2$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Для трещин отрыва  $p_n, p_s = 1$ ,  $D_n^{(\sigma)} = 0$ , а постоянные коэффициенты  $\alpha_{in}$  и  $\alpha_{is}$  находятся методом наименьших квадратов.

Для трещин сдвига  $D_n^{(\sigma)} = 0$ , и с помощью метода наименьших квадратов находятся коэффициенты, а затем постоянные  $\gamma_{in}$ ,  $\gamma_{is}$ ,  $\eta_{in}$  и  $\eta_{is}$  для зияющей части трещины.

Для смешанного типа трещин и трещин в трещиноватом массиве проводятся последовательно действия для трещин отрыва и сдвига, а затем находятся для зияющей части трещины коэффициенты  $\beta_{in}$  и  $\beta_{is}$ .

На основе вычислительного алгоритма, была создана прикладная программа, получившая название “Численное моделирование раскрытий берегов трещины смешанного типа”, предназначенная для проведения численных расчетов по определению нормальных и сдвиговых разрывов смещений берегов трещины [7].

**Численное решение задач.** Решение задач осуществлялось, при следующих исходных данных:  $L_0 = 10$  мм — длина ОВ,  $x \in [0, L_0]$ ,  $b = 10L_0$  — длина ОА,  $x \in [-b, 0]$ ,  $u_0 = -1.2$  мкм — смещение берегов,  $\sigma_0 = -98$  кН/м<sup>2</sup> — напряжение на берегах,  $E = 3 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu = 0.3$  — механические свойства песчаника,  $J' = 30$  — количество граничных элементов на ОА,  $J - J' = 750$  — количество граничных элементов на ОВ.

Обратимся к вопросу об устойчивости решения СЛАУ. Граничные условия для каждого граничного элемента могут быть заданы с различной точностью. Известно, что для проверки устойчивости [8] правой части СЛАУ достаточно для объединенной матрицы проверить выполнимость условия

$$\det \{C\} \neq 0. \quad (13)$$

Связь между относительными погрешностями правой и левой частей устанавливается на основе числа обусловленности

$$m_C = \|C^{-1}\| \cdot \|C\|, \quad (14)$$

позволяющего вычислить относительную погрешность решения системы методом Гаусса как

$$\Delta_C = O [2^{-t} m_C \dim(C)], \quad (15)$$

где  $t$  — число разрядов мантиссы в двоичном представлении чисел на ЭВМ с плавающей запятой. С целью проверки устойчивости решения СЛАУ пункт 4 алгоритма реализовывался двумя методами — методом Гаусса и методом QR-разложения, поскольку последний не зависит от (16). В ходе анализа подобия получены результаты, свидетельствующие о том, что для всех решений СЛАУ характерна полная идентичность результатов каждым из методов. В связи с этим предпочтительным является метод Гаусса, эффективный из-за меньшего объема вычислений. Следует отметить, что в рамках метода Гаусса использовались преобразования, позволяющие получить детерминант, равный 1, что автоматически исключает необходимость проверки условия (16). Они включали в себя построчную нормировку строк матрицы на

наибольшее значение элемента матрицы  $\{C\}$  в строке, после чего матрица приводилась к треугольному виду. В связи с этим точность ВЭ при  $t = 53$  составила  $10^{-13}$ .

Поскольку для трещины отрыва из [3] известно аналитическое решение задачи в виде

$$D_n^{(1)}(x) = \frac{-4u_n^0}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left( \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \right], \quad (16)$$

то в дальнейшем будем именовать его аналитическим решением Черепанова.

Используя формулу (11), нетрудно получить аналитическое выражение для КИН 1-го рода в виде

$$K_I^{(1)} = \frac{\sqrt{2}Gu_n^0}{\sqrt{\pi L(1-\nu)}}, \quad (17)$$

В таблице 1 представлены численные значения (17).

Таблица 1

**Численные значения нормальных раскрытий**

$x, \text{ мм}$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
$D_n, \text{ мкм}$	-1.978	-1.725	-1.54	-1.379	-1.226	-1.081	-0.931	-0.769	-0.585	-0.332

На рис. 2 представлены графики функции  $|D_n(x)|$  (решение Черепанова и численное решение МРС).

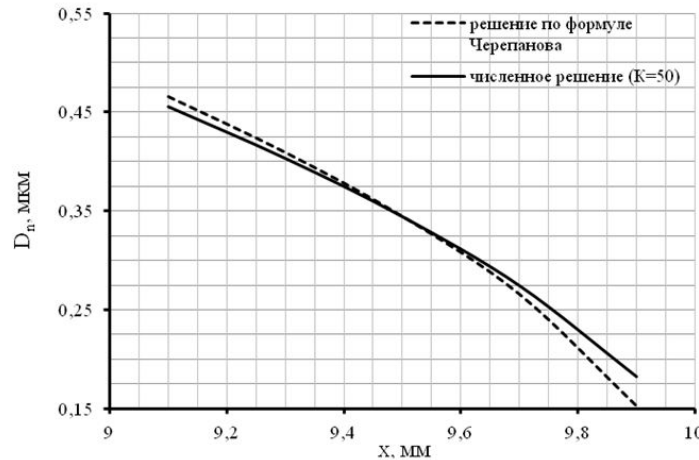


Рис. 2. Нормальное раскрытие зияющей части трещины

В рамках вычислительного эксперимента (ВЭ) варьировалась длина основной трещины. Исходя из анализа полученных данных при разных значениях длины установлено, что влияние длины основной трещины  $b$  на распределение нормальных раскрытий ничтожно мало при  $b \geq 10L_0$  [9]. Таким образом, в следующих ВЭ можно ограничиться условием

$$b \leq 10L_0. \quad (18)$$

В работе [10] установлено, что существует подобие между нормальными смещениями для “первой задачи” Черепанова и сдвиговыми для задачи у которой на берегах основной части трещины заданы касательные смещения с тем же знаком. Результаты расчетов показывают,

что касательные смещения совпадают по величине и знаку с нормальными во всех точках на берегах трещины с погрешностью. Из установленного подобия в модели трещины смешанного типа функцию сдвигового раскрытия берегов можно записать, подобно (17), в виде

$$D_s^{(1)}(x) = \frac{u_s^0}{u_n^0} D_n^{(1)}(x). \quad (19)$$

Тогда по формуле (12) КИН 2-го рода, подобно (17), запишется как

$$K_{II}^{(1)} = \frac{u_s^0}{u_n^0} K_I^{(1)}. \quad (20)$$

Постановка задачи в условиях сжатия берегов трещины

$$u_n^0 = -U_0, \quad \sigma_n^0 = \sigma_0 \quad (21)$$

и ее решение рассмотрено в работах [11], [12]. Решение подобной задачи имеется в [3] и представлено в виде суммы

$$D_n^{(2)}(x) = D_n^{(1)}(x) + D_n^{(\sigma)}(x), \quad (22)$$

$$D_n^{(\sigma)}(x) = \frac{2(1-\nu)\sigma_n^0}{G} \sqrt{x(L-x)}. \quad (23)$$

Численные значения (24) представлены в таблице 2.

Таблица 2

**Численные значения нормальных раскрытий ( $\sigma_n^0 > 0$ )**

$x$ , мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
$D_n$ , мкм	-2.029	-1.749	-1.547	-1.375	-1.216	-1.063	-0.909	-0.747	-0.564	-0.318

На рис. 3 представлены графики функции в условиях (23).

По формуле (11) при вычислении предела получим выражение КИН 1-го рода в виде

$$K_I^{(2)} = K_I^{(1)} - q_n, \quad q_n = \sqrt{\frac{\pi L}{2}} \sigma_n^0. \quad (24)$$

В результате численного решения установлено подобие между нормальными смещениями для задачи с краевыми условиями

$$u_n^0 = U_0, \quad \sigma_n^0 = \sigma_0 \quad (25)$$

и сдвиговыми для задачи с краевыми условиями

$$u_s^0 = U_0, \quad \sigma_s^0 = \sigma_0. \quad (26)$$

Согласно полученным данным, нормальные раскрытия совпадают по величине и знаку с касательными во всех точках на берегах трещины с погрешностью.

Из установленного подобия в модели трещины смешанного типа функцию сдвигового раскрытия берегов можно записать подобно, (24), т. е.

$$D_s^{(2)}(x) = D_s^{(1)}(x) + D_s^{(\sigma)}(x) \quad (27)$$

$$D_s^{(\sigma)}(x) = \frac{\sigma_s^0}{\sigma_n^0} D_n^{(\sigma)}(x). \quad (28)$$

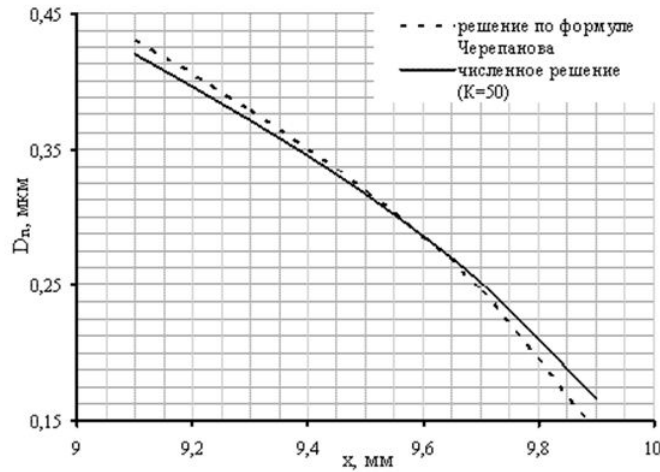


Рис. 3. Нормальное раскрытие зияющей части трещины

Результаты ВЭ для (25) представлены в работе [12]. Обращаясь к формуле (12), КИН 2-го рода, подобно (27), запишется как

$$K_{II}^{(2)} = K_{II}^{(1)} - q_s, \quad q_s = \frac{\sigma_s^0}{\sigma_n^0} q_n. \tag{29}$$

Постановка задачи с граничными условиями растяжения берегов трещины

$$u_n^0 = U_0, \quad \sigma_n^0 = \sigma_0 \tag{30}$$

и ее решение рассмотрено в работе [13]. В работе [3] приведено решение подобной задачи, где нормальное раскрытие зияющей трещины в аналитическом виде определено формулой (24). В таблице 3 представлены численные значения аналитического решения Черепанова [13].

Таблица 3

**Численные значения нормальных раскрытий ( $\sigma_n^0 < 0$ )**

$x, \text{ мм}$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
$D_n, \text{ мкм}$	-2.081	-1.835	-1.652	-1.491	-1.337	-1.184	-1.025	-0.852	-0.651	-0.371

На рис. 4 представлены графики функции для задачи в условиях (29). Поведение кривых аналогично показанным на рис. 2–3.

Характер поведения нормальных разрывов, полученных по аналитической формуле Черепанова и с помощью метода разрывных сечений (рис. 2–4), характеризует полное совпадение решений на расстоянии  $0.02L-0.04L$  от вершины трещины и образование перекрещивающихся гладких кривых.

По аналогии с (27) смена знака напряжения приводит к выражению

$$K_I^{(3)} = K_I^{(1)} + q_n. \tag{31}$$

На рис. 5 представлены графики КИН как функции нормальных смещений и нормальных напряжений, полученных из (17) (линия “а”), (27) (линия “б”) и (28) (линия “в”) для трещины в песчанике, имеющие критические КИН

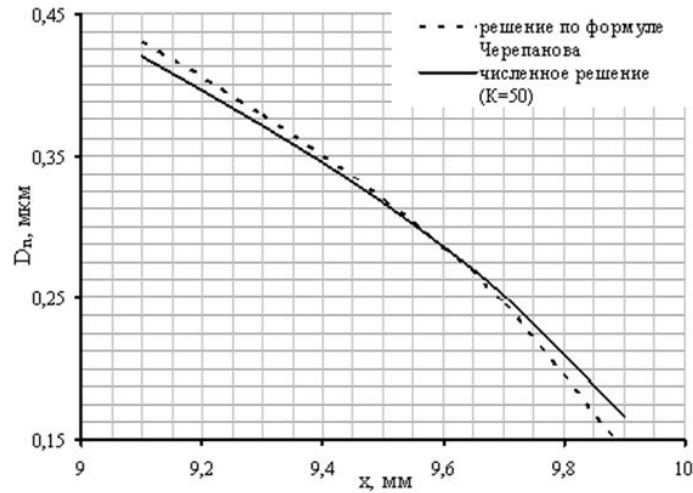
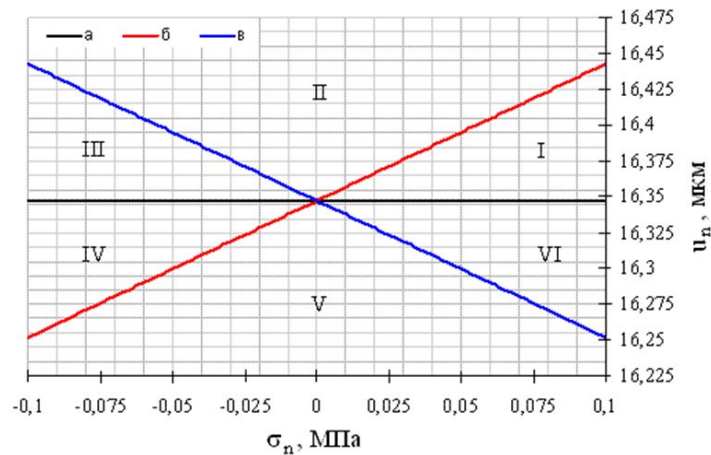


Рис. 4. Нормальное раскрытие зияющей части трещины

$$K_{Ic} = 2.15 \cdot 10^6 \text{ Н} / \text{м}^{3/2}, \quad K_{IIc} = 4.3 \cdot 10^6 \text{ Н} / \text{м}^{3/2}. \quad (32)$$

Критическим при  $K_I^{(1)} = K_{Ic}$  является смещение величиной 16.345 мкм (точка пересечения всех линий на рис. 5), которое не зависит от величины напряжения. Зоны развития трещины находятся в секторах I–III, зоны стагнации – в остальных. Областью критических смещений на линии уровня  $K_I^{(2)} = K_{Ic}$  является наклонная прямая “б”, разделяющая зоны развития (II–IV) и зоны стагнации (I, V, VI) на две полуплоскости. Областью критических смещений при  $K_I^{(2)} = K_{Ic}$  является наклонная прямая “в”, разделяющая зоны развития (I, II, VI) и зоны стагнации (III–V) также на две полуплоскости. Общей зоной развития для всех является зона II, а зоной стагнации – зона V.

Рис. 5. График функций  $u_n = f(\sigma_n, K_{Ic})$

**Выводы.**

Получен ряд численных решений плоских задач теории трещин при различных комбинациях смешанных граничных условий, заданных в смещениях и напряжениях.

Создан алгоритм численно-аналитического решения краевых задач теории трещин в смешанной постановке.

Образованы аналитические выражения раскрытий берегов трещины с помощью аппроксимирующих полиномов, зависящих от определяющих констант краевых условий задачи.

Построены аналитические выражения КИН 1-го и 2-го рода, соответствующие различным комбинациям смешанных граничных условий.

Определены положения зон развития и стагнация трещины для рассмотренных задач.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] *Садовский, М. А.* Естественная кусковатость горной породы / М. А. Садовский // Докл. АН СССР. 1979. – Т. 247. – № 4. – С. 829–831.

[2] *Партон, В. З.* Механика разрушения : От теории к практике / В. З. Партон. – М. : Наука, 1990. – 240 с.

[3] *Черепанов, Г. П.* Механика разрушения горных пород в процессе бурения. – М. : Недра, 1987. – 308 с.

[4] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М. : Наука, 1974. – 640 с.

[5] *Полкунов, Ю. Г.* Математическое моделирование разрушения упругой плоскости полубесконечными разрезами с зияющими трещинами / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2008. – № 5. – С. 111–114.

[6] *Линьков, А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. – СПб. : Наука, 1999. – 382 с.

[7] *Спиридонова, Е. В.* Численное моделирование раскрытий берегов трещины смешанного типа : прикладная программа / Е. В. Спиридонова, С. В. Белобородова. Свидетельство о регистрации программного средства № 706 от 29.12.2011.

[8] *Самарский, А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.

[9] *Полкунов, Ю. Г.* Математическая модель расклинивания материала с различной длиной основной и зияющей трещины / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2010. – № 9. – С. 55–58.

[10] *Полкунов, Ю. Г.* Математическое моделирование разрушения упругой плоскости полубесконечными разрезами с зияющими трещинами / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2008. – № 5. – С. 111–114.

[11] *Полкунов, Ю. Г.* Численное определение коэффициентов интенсивности напряжений в задачах со смешанными краевыми условиями / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2009. – № 6 (72). – С. 118–129.

[12] *Полкунов, Ю. Г.* Численные методы вычисления критериев роста трещин в смешанных задачах теории упругости / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2008. – № 11. – С. 127–131.

[13] *Спиридонова, Е. В.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений при смешанном типе нагружения трещины / Е. В. Спиридонова // Сборник трудов международной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики” (часть 2). – Воронеж : ПЦ ВГУ, 2009. – С. 182–189.

*Спиридонова Екатерина Владимировна,*

*старший преподаватель кафедры математического анализа, Оренбургский государственный университет, г. Оренбург*

*e-mail: nailyak1975@gmail.com*

E. V. Spiridonova

## THE NUMERICAL AND ANALYTICAL SOLUTION OF FLAT TASKS OF THE THEORY OF CRACKS IN THE MIXED STATEMENT

Orenburg State University, Orenburg

**Abstract.** In this paper we present a numerical-analytical solution of plane problems of disclosure shores planar crack with mixed boundary conditions. The decision by one of the boundary element method - the method of discontinuous displacements. Normal and shear disclosure shores of the gaping cracks approximated functional dependencies by using the method of least squares. The analytical expression of the stress intensity factors of the 1st and 2nd kind in the form of limiting relations based on discontinuous displacements. The positions of development zones and stagnation cracks on the basis of power criterion of brittle fracture of continuous media with a crack.

**Keywords:** gaping crack, mixed boundary conditions, the stress intensity factors of the 1st and 2nd kind, assessment of the development of the crack.

### REFERENCES

- [1] *Sadovsky, M. A.* Natural rock lumpiness / M. A. Sadovsky // Dokl. USSR Academy of Sciences. – 1979. – Vol. 247. – № 4. – P. 829–831. (in Russian)
- [2] *Parton, V. Z.* Fracture Mechanics: From theory to practice / V. Z. Parton. – M. : Nauka, 1990. – 240 p. (in Russian)
- [3] *Cherepanov, G. P.* Fracture Mechanics of rocks during drilling / G. P. Cherepanov. – M. : Nedra, 1987. – 308 p. (in Russian)
- [4] *Cherepanov, G. P.* Mechanics of brittle fracture / G. P. Cherepanov. – M. : Nauka, 1974. – 640 p. (in Russian)
- [5] *Polkunov, Y. G.* Mathematical modeling of the destruction of the elastic semi-infinite plane cuts with gaping cracks / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik OSU. – 2008. – № 5. – P. 111–114. (in Russian)
- [6] *Linkov, A. M.* Complex method of boundary integral equations of the theory of elasticity / A. M. Linkov. – SPb. : Science, 1999. – 382 p. (in Russian)
- [7] *Spiridonova, E. V.* The application program "Numerical simulation of crack disclosures of mixed type" / E. V. Spiridonov, S. Beloborodova. The certificate of registration software tool №706 from 29.12.2011. (in Russian)
- [8] *SamarSKI, A. A.* Numerical methods / A. A. SamarSKI, A. V. Gulin. – M. : Nauka, 1989. – 432 p. (in Russian)
- [9] *Polkunov, Y. G.* Mathematical model of wedging material with different length of the basic and gaping cracks / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik OSU. – 2010. – № 9. – P. 55–58. (in Russian)
- [10] *Polkunov, Y. G.* Mathematical modeling of the destruction of the elastic semi-infinite plane cuts with gaping cracks / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik OSU. – 2008. – № 5. – P. 111–114. (in Russian)
- [11] *Polkunov, Y. G.* Numerical determination of the stress intensity factors in problems with mixed boundary conditions / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik of SSU (Natural Science Series). – 2009. – № 6 (72). – P. 118–129. (in Russian)
- [12] *Polkunov, Y. G.* Numerical methods for calculating the criteria of crack growth in mixed problems of elasticity / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik OSU. – 2008. – № 11. – P. 127–131. (in Russian)
- [13] *Spiridonova, E. V.* Determination of stress intensity factors at the crack mixed type of loading / E. V. Spiridonova // Proceedings of the international conference "Actual problems of



---

applied mathematics, computer science and mechanics"(part 2). – Voronezh : VSU HRC, 2009. – P. 182–189. (in Russian)

*Spiridonova, Ekaterina Vladimirovna*

*Senior Teacher, Departament of Mathematical Analysis, Orenburg State University, Orenburg*

В. Е. Рагозина<sup>1</sup>, Ю. Е. Иванова<sup>1,2</sup>

## О РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДАХ АДАПТАЦИИ СХЕМЫ ЛУЧЕВЫХ ПРИФРОНТОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕД

<sup>1</sup>Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток

<sup>2</sup>Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

**Аннотация.** На примере нескольких одномерных осесимметричных задач ударной деформации упругих сред показаны возможности применения двух вариантов модификации лучевого метода, который, как известно, в своем стандарте не может использоваться для нелинейных процессов, включающих поверхности разрывов первых производных. Представленные в статье варианты метода позволяют снять это ограничение. Показаны особенности применения лучевых рядов для движения в среде одиночной ударной волны, а также для процесса, приводящего к образованию нескольких ударных волн, различных по типу, включая образование отраженных ударных волн и их последующее взаимодействие с передними фронтами первоначально созданных процессов. Отдельно рассмотрен вопрос построения лучевых рядов для времен после взаимодействия падающих и отраженных ударных волн, происходящего внутри слоя упругой среды.

**Ключевые слова:** нелинейно-упругая среда, ударная деформация, лучевые ряды, осесимметричные задачи, квазипродольные и квазипоперечные ударные волны

УДК: 539.3

**Введение.** Ударной динамике нелинейно-упругих сред посвящено значительное число исследований [1], [2]. Известно, что применение прифронтных лучевых решений в различных версиях метода является одним из наиболее эффективных методов в динамике деформаций [3]. В частности, лучевой метод применялся в задачах идеальной пластичности для гиперболической системы ее уравнений [4], в динамике вязкоупругих сред [5], к задачам динамики в теории упругости [6], [7]. В случае динамических процессов, вызванных кратковременными интенсивными нагрузками, по среде движутся волны деформации, передние фронты которых — поверхности разрыва первых производных перемещений. Для этих задач теряется возможность применения классической схемы лучевого метода за счет нарушения рекуррентности бесконечной цепочки дифференциальных уравнений затухания. Для того, чтобы скорректировать эту ситуацию, в настоящее время есть несколько вариантов модификации лучевой схемы: в одном из них применяются дополнительные встроенные ряды для скачков производных перемещений, через которые задаются коэффициенты лучевого ряда. В другом варианте

---

Поступила 10.03.2015

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14–01–31030 мол\_а).

применяются дополнительные сведения о неизвестных скачках, следующие из слабой нелинейности задачи. В предлагаемой статье на примере осесимметричных одномерных задач ударной деформации рассмотрены оба названных метода.

**1. Модельные соотношения нелинейно-упругой изотропной среды и краевые условия на ударных волнах.** Поведение нелинейно-упругого материала в пространственной криволинейной системе координат Эйлера  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \det(\delta_j^i - u_j^i), \quad v^i = \dot{u}^i + u_{,j}^i v^j, \quad \sigma_{,j}^{ij} = \rho(\dot{v}^i + v_{,j}^i v^j), \\ 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{,j}^k, \quad \sigma_j^i = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_k^j} (\delta_k^i - 2\alpha_k^i), \\ W &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \xi I_2^2 + \eta I_1^2 I_2 + \varkappa I_1 I_3 + \chi I_1^4 + \dots \quad (1.1) \\ I_1 &= \alpha_i^i, \quad I_2 = \alpha_j^i \alpha_i^j, \quad I_3 = \alpha_k^i \alpha_k^j \alpha_i^k, \\ \dot{u}^i &= \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \Gamma_{ij}^k u_k, \quad u^{i,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \Gamma_{jk}^i u^k, \quad \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  — плотность среды в текущем и свободном состоянии,  $u^i$  и  $v^i$  — контравариантные компоненты векторов перемещений и скорости среды,  $\alpha_{ij}$  — ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси,  $\sigma^{ij}$  — контравариантные компоненты тензора напряжений Эйлера–Коши,  $W$  — функция упругого потенциала среды,  $\lambda, \mu, l, m, n, \xi, \eta, \varkappa, \chi$  — упругие модули среды.

Для задач ударного деформирования система уравнений (1.1) имеет место всюду, за исключением поверхностей разрывов, где большие изменения градиента перемещений заменяются его разрывным представлением. На ударных волнах (поверхностях сильных разрывов) искомые поля подчиняются геометрическому, кинематическому и динамическому условиям совместности [8, 9]:

$$\begin{aligned} [f_{,i}] &= \left[ \frac{df}{dn} \right] n_i + g_{ij} a^{\alpha\beta} [f]_{,\beta} x_{,\alpha}^j, \quad [f] = -G \left[ \frac{df}{dn} \right] + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \\ [\rho(v^i n_i - G)] &= 0, \quad [\sigma^{ij}] n_j = \rho^+(v^{j+} n_j - G)[v^i], \\ \sigma^{ij+} [v_i] n_j &= \rho^+(v^{j+} n_j - G) \left( \frac{[v^i][v^i]}{2} - [e] \right) - [q^j] n_j \quad (1.2) \\ \frac{df}{dn} &= f_{,i} n^i, \quad x_{,\alpha}^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = g_{ij} x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^j, \\ a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} &= \delta_\gamma^\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2. \end{aligned}$$

Квадратными скобками обозначен разрыв заключенной в них величины, так что  $[a] = a^+ - a^-$ , где  $a^+$  и  $a^-$  — предельные значения  $a$  при подходе к поверхности разрывов  $\Sigma$  с двух разных сторон,  $n_i$  — компоненты вектора единичной внешней нормали, направленной в сторону движения  $\Sigma$ ,  $G$  — скорость поверхности  $\Sigma$  в направлении нормали,  $q_j$  — компоненты вектора теплового потока,  $e$  — плотность внутренней энергии,  $y^\alpha$  — координаты на подвижной поверхности,  $g_{ij}$  — ковариантная метрика пространства,  $a_{\alpha\beta}$  — ковариантный поверхностный тензор,  $\delta/\delta t$  — дельта-производная по Томасу [9],  $f$  — обозначение компоненты любого тензорного поля, задаваемого в пространстве.

На основании соотношений (1.2) могут быть получены возможные скорости ударных волн и указан характер изменения деформационных полей на них [2]. Отметим, что для нелинейных процессов в общем случае воздействие на среду передается тремя волнами: квазипродольной и двумя квазипоперечными [2]. Скорости этих волн оказываются функциями вектора интенсивности разрыва и предварительных деформаций. Поэтому в общем случае решение краевых задач включает в себя не только определение полей перемещений, деформаций и

напряжений за волновыми фронтами, но и определение геометрических характеристик этих фронтов.

**2. Различные варианты представления лучевого решения одномерной задачи о расходящейся цилиндрической ударной волне.** В качестве примера, который позволит показать основные особенности предлагаемой далее методики решения, рассмотрим одномерную задачу о продольной цилиндрической ударной волне. В результате нормального воздействия на поверхность  $L_0$  (границу цилиндрической полости в неограниченном пространстве или границу цилиндра исходного радиуса  $r_0$ ) с начального момента времени в предварительно недеформированной среде возникает расходящаяся продольная ударная волна. Поле перемещений таково, что  $u_r = u_r(r; t)$ ,  $u_\varphi = u_z = 0$ , где  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты. В этом случае следствием системы (1.1) будет уравнение

$$\begin{aligned} u_{r,rr} \left( 1 + A_1 u_{r,r} + A_2 \frac{u_r}{r} \right) + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + A_3 \frac{u_{r,r}^2}{r} + A_4 \frac{u_r^2}{r^3} + \frac{u_{r,r} u_r}{r^2} = \\ = \frac{1}{C_1^2} \left\{ \ddot{u}_r \left( 1 - 2u_{r,r} - \frac{u_r}{r} \right) + 2\dot{u}_r \dot{u}_{r,r} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$A_1 = -9 + 6 \frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}, \quad A_2 = \frac{-4\lambda - 2\mu + 2l + 6m}{\lambda + 2\mu},$$

$$A_3 = \frac{-8\lambda - 13\mu + 6l + 12m + 3n}{\lambda + 2\mu}, \quad A_4 = \frac{5\lambda + 7\mu - 2l - 3n}{\lambda + 2\mu}, \quad C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}.$$

Считаем, что на границе  $L(t)$  поле перемещений известно и может быть задано рядом Тейлора

$$\begin{aligned} u_r|_{r_L} = g(t), \quad r_L = r_0 + g(t), \\ g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k g(0)}{dt^k} t^k = v_0 t + \frac{at^2}{2} + \dots, \quad v_0 \neq 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для сокращения приводимых вычислений в дальнейшем ограничимся квадратичным представлением.

Скорость переднего фронта продольной ударной волны  $\Sigma(t)$  при отсутствии в среде предварительных деформаций в соответствии с (1.2) задается формулой

$$\begin{aligned} G = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \tau^k \approx C_1 (1 + \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2), \quad \tau = [u_{r,r}] = u_{r,r}^+ - u_{r,r}^-, \\ \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = \frac{9}{4} - \frac{3(l+m+n)}{2(\lambda+2\mu)} = -\frac{A_1}{4}, \\ \beta_2 = \frac{9}{4} - 6 \frac{l+m+n}{\lambda+2\mu} + 2 \frac{\chi + \xi + \eta + \varkappa}{\lambda+2\mu} - \frac{(1-\beta_1)^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

На поверхности  $\Sigma(t)$  выполняются краевые условия

$$u_r|_{r_\Sigma} = 0, \quad \tau|_{r_\Sigma} = -u_{r,r}^-, \quad r_\Sigma = r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi. \quad (2.4)$$

Условия (2.4) заданы на подвижной поверхности  $r_\Sigma(t)$ , положение которой заранее неизвестно и входит в число определяемых в ходе решения величин. В общем случае неизвестной оказывается и геометрия волновой поверхности, но в рассматриваемом простом случае неизвестным оказывается только положение цилиндрической поверхности разрывов.

Ввиду нелинейности уравнения движения и граничных условий краевая задача (2.1)–(2.4) не может быть решена точно. Поэтому появляется необходимость обращения к приближенным аналитическим методам. Для определения решения поставленной задачи воспользуемся одним из вариантов метода лучевых разложений.

Полагаем, что в области, прилегающей к поверхности  $\Sigma(t)$ , поле перемещений достаточно гладкое и допускает частное дифференцирование по времени до произвольного  $k$ -го порядка. Искомое решение для  $u_r(r, t)$  представим лучевым рядом

$$u_r(r, t) = \begin{cases} u_r^0(r, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{k!} \Big|_{t_{\Sigma}(r)} (t - t_{\Sigma}(r))^k, & t \geq t_{\Sigma} \\ u_r^0(r, t), & t \leq t_{\Sigma} \end{cases}, \quad (2.5)$$

$$t_{\Sigma} = \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{G(\xi)}, \quad \eta_i = \left[ \frac{\partial^i u_r}{\partial t^i} \right],$$

где  $u_r^0(r, t)$  — заданное известное поле перемещений перед волной  $\Sigma(t)$ ,  $t_{\Sigma}(r)$  — уравнение эйконала. Для рассматриваемого случая  $u_r^0(r, t) = 0$ . Ряд (2.5) подобен ряду Тейлора, но его коэффициенты  $\eta_i$  вычисляются на подвижной поверхности  $\Sigma(t)$ . Если считать, что в малой окрестности поверхности  $\Sigma(t)$  справедливы уравнения движения и следствия их дифференцирования по времени до  $k$ -го порядка, то, записывая полученные уравнения в разрывах на поверхности  $\Sigma(t)$ , получаем рекуррентные соотношения

$$\frac{\delta \eta_{i+1}}{\delta t} = f_{i+1}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{i+2}, r_{\Sigma}(t)), \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (2.6)$$

где  $i = 0$  соответствует исходным уравнениям движения в разрывах. Наличие в системе (2.6) величины  $\eta_{i+2}$  в качестве аргумента — отличительная особенность ударной волны. Это считается ограничением применимости лучевого метода. Если бы рассматривались волны ускорений, то в число аргументов в соотношениях (2.6) не входила бы величина  $\eta_{i+2}$ . Тогда равенства (2.6) можно было бы рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений, а значения  $\eta_i$  определились бы последовательным ее интегрированием.

Для ударных волн был предложен [10] вариант лучевого метода, в котором для искомых величин  $\eta_i$  строятся дополнительные разложения по  $\delta$ -производным для малых послеударных времен

$$\eta_i \approx \eta_{i0} + \frac{\delta \eta_{i0}}{\delta t} t + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \eta_{i0}}{\delta t^2} t^2 + \dots, \quad \frac{\delta^k \eta_i}{\delta t^k} \Big|_{t=0} = \frac{\delta^k \eta_{i0}}{\delta t^k}. \quad (2.7)$$

Разложения (2.7) позволяют свести равенства (2.6) к системе алгебраических соотношений, связывающих основные новые неизвестные — коэффициенты внутренних рядов (2.7). Такое предположение ограничивает область применимости представления (2.5) очень малыми временами. Действительно, ненулевая кривизна ударной волны сама является быстро изменяющейся со временем функцией и входит в уравнение (2.6), оказывая наибольшее влияние на изменение  $\delta \eta_{i+1} / \delta t$ . Применение рядов (2.7) приводит к тому, что кривизна считается постоянной величиной, определяемой геометрией нагружаемой поверхности. Это связано с тем, что при ненулевой кривизне волнового фронта даже при малых послеударных временах степенные зависимости (2.7) не всегда хорошо отражают динамику изменения  $\eta_i$ .

Далее рассмотрим другой вариант лучевого метода, связанный с предположением о слабой нелинейности задачи. В этом случае следует ожидать, что ее решение будет незначительно отличаться от решения аналогичной линейризованной задачи. Поэтому в системе (2.6) заменим неизвестную функцию  $\eta_{k+2}$  на решение линейризованной задачи для соответствующего шага. При учете сделанного предположения система (2.6) станет замкнутой системой для определения величин  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{i+1}$ .

Рассмотрим реализацию описанной выше схемы на примере расходящейся от поверхности  $r = r_0$  продольной волны. Для соответствующей линейной задачи получим

$$\eta_1^L = \frac{\eta_{10}}{s}, \quad \eta_2^L = \frac{\eta_{20}}{s} - \frac{3C_1 \eta_{10} (s^2 - 1)}{8r_0 s^3}, \quad s = \sqrt{1 + \frac{C_1 t}{r_0}} \quad (2.8)$$

$$\eta_1^L(0) = \eta_{10} = -v_0, \quad \eta_2^L(0) = \eta_{20} = -a.$$

При выборе квадратичного закона движения  $L(t)$  в лучевом ряде (2.5) достаточно ограничиться первыми двумя слагаемыми, что позволяет свести лучевой метод к записи исходного уравнения движения (2.1) в разрывах на поверхности  $\Sigma(t)$

$$\frac{\delta\eta_1}{\delta t} = \frac{-2\beta_1\eta_2\eta_1 C_1^{-1} - G(t)\eta_1 r_\Sigma^{-1}(t) - \alpha_4\eta_1^2 r_\Sigma^{-1}(t)}{2(1 - \gamma\eta_1 C_1^{-1})} + \dots, \quad \gamma = 1 + \frac{7\beta_1}{2}, \quad (2.9)$$

где многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высокой степенью нелинейности. В уравнение (2.9) входят неизвестная функция  $r_\Sigma(t)$  и величины, меняющиеся в широком диапазоне от  $G(t) \gg 1$  до  $\eta_1 C_1^{-1} \ll 1$ . Примем  $\eta_2 \approx \eta_2^L$  и дополним уравнения (2.9) уравнением

$$\frac{\delta r_\Sigma}{\delta t} = G(t), \quad (2.10)$$

в котором  $G$  зависит от  $\eta_1$  в соответствии с соотношениями (1.2),(2.3).

Решение системы (2.9),(2.10) будем искать с помощью метода малого параметра. Введем безразмерную неизвестную функцию  $\omega(s) = \eta_1 \eta_{10}^{-1}$ , которую представим асимптотическим рядом по степеням малого параметра  $\varepsilon = \eta_{10} C_1^{-1}$ :

$$\omega(s) = \omega_0(s) + \varepsilon\omega_1(s) + \varepsilon^2\omega_2(s) + \dots$$

Подстановка этого ряда в уравнения (2.9), (2.10) позволяет получить

$$\omega \approx \omega_0 + \varepsilon\omega_1 = \frac{1}{s} + \varepsilon \left\{ \frac{-\beta_1 A (s^2 - 1)}{s} - \frac{\varphi}{s^2} - \frac{\beta_1}{s^3} - \frac{\gamma + A_3}{s} \right\}, \quad (2.11)$$

$$r_\Sigma \approx r_0 + C_1 t + 2\varepsilon r_0 \beta_1 (1 - s), \quad \varphi = -\gamma - \beta_1 - A_3, \quad A = \frac{\eta_{20} r_0}{\eta_{10} C_1} \sim 1.$$

Функция  $\omega_0(s)$  соответствует решению линейной задачи, а  $\omega_1$  — поправка к нему. Решение (2.11) справедливо вплоть до области, где  $s \sim \varepsilon^{-1/4}$ . При  $s \sim \varepsilon^{-1/4}$  ряд (2.11) теряет равномерность и необходимо дополнительное разложение. В рассматриваемой задаче ограничимся масштабом  $s \sim 1$ .

Обращая ряд  $r_\Sigma(t)$ , получим приближенную зависимость для  $t_\Sigma(r)$ :

$$t_\Sigma = \frac{1}{C_1} \left\{ r - r_0 + 2r_0 \frac{\eta_{10}}{C_1} \beta_1 \left( \sqrt{\frac{r}{r_0}} - 1 \right) \right\} + \dots \quad (2.12)$$

Для определения перемещений  $u_r(r, t)$  подставим (2.11), (2.12) в ряд (2.5):

$$u_r = -\eta_{10} \left\{ \frac{1}{\sqrt{H(r)}} + \frac{\eta_{10}}{C_1} \left[ \frac{\beta_1 \eta_{20} I(r)}{\eta_{10} \sqrt{H(r)}} - \frac{\varphi}{H(r)} - \frac{\beta_1}{H^{3/2}(r)} - \frac{\gamma + A_3}{\sqrt{H(r)}} \right] \right\} (t + I(r)) - \frac{\eta_{20}}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{H(r)}} + \frac{3C_1^2 \eta_{10} I(r)}{8r_0^2 \eta_{20} H^{3/2}(r)} \right\} (t + I(r))^2 - \dots, \quad (2.13)$$

$$H(r) = \frac{r}{r_0} + 2\varepsilon\beta_1 \left( \sqrt{\frac{r}{r_0}} - 1 \right), \quad I(r) = \frac{r_0}{C_1} (1 - H(r)).$$

Постоянные  $\eta_{10}$ ,  $\eta_{20}$  получим, подставив решение (2.13) в краевое условие (2.2). Структура решения (2.13) и приближенная методика его получения не позволяют точно выполнить краевое условие. Подставляя выражение  $r_L(t)$  в решение (2.13) и раскладывая результат в ряд Тейлора для малых времен, находим

$$\eta_{10} = -\frac{v_0}{1 - v_0 C_1^{-1}}$$

$$\eta_{20} = \left\{ -a - \frac{v_0^2}{r_0} - \frac{v_0 C_1^{-1}}{2} \left( a - \frac{v_0^2}{r_0} (-1 + \gamma + A_3) \right) \right\} \frac{1}{1 + 2v_0 C_1^{-1}} + \dots$$

Отметим, что нет необходимости ограничиваться в решении (2.13) первыми двумя слагаемыми. Решение соответствующей линейной задачи лучевым методом легко строится до произвольного  $k$ -го порядка. Замена  $\eta_k$  линейным аналогом позволяет снизить погрешность, вносимую в решение линейным приближением для  $\eta_2$ . Для  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k-1}$  получаемая система нелинейных дифференциальных уравнений также может быть решена на основе метода малого параметра.

**3. Лучевое решение задачи об ударных волнах в цилиндрическом слое.** В качестве модельного примера применения модифицированного лучевого метода к динамическим задачам с несколькими ударными волнами рассмотрим одномерную задачу с осевой симметрией о действии ударной нагрузки на внешней границе цилиндрического слоя нелинейно-упругого материала. Первоначально недеформированный слой занимает область  $r_0 \leq r \leq R$ . С момента  $t = 0$  в результате ударного нагружения на внешней границе становятся известными граничные перемещения:

$$\begin{aligned} u_r|_{r=R+g(t), t \geq 0} &= g(t) = g_0 t + \frac{g_1 t^2}{2} + \dots, \\ u_z|_{r=R+g(t), t \geq 0} &= h(t) = h_0 t + \frac{h_1 t^2}{2} + \dots, \\ u_r|_{t \leq 0} &= u_\varphi|_{t \leq 0} = u_z|_{t \leq 0} = 0, \quad g_0 < 0, \quad h_0 > 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

На внутренней границе  $r = r_0$  задано условие жесткого закрепления:

$$u_r|_{r=r_0} = u_\varphi|_{r=r_0} = u_z|_{r=r_0} = 0.$$

Предполагаем, что следствием таких условий будут перемещения  $u_r = u_r(r, t)$ ,  $u_z = u_z(r, t)$ ,  $u_\varphi = 0$ . Из условий совместности (1.2) с учетом модельных соотношений (1.1) следует, что для поставленной задачи возможны два варианта ударных волн. Первая из этих волн, квазипродольная, имеет скорость, вычисляемую как

$$\begin{aligned} G &= C_1 \left( 1 + \alpha_1 T + \alpha_2 u_{r,r}^+ + \alpha_3 \frac{u_r^+}{r} + \frac{\dot{u}_r^+}{C_1} + \dots \right), \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \\ T &= [u_{,j}^i] n_i n^j, \quad [u_{,j}^i] n^j = T n^i + \Gamma m^i, \quad m^i m_i = 1, \quad n^i n_i = 1, \quad m^i n_i = 0, \\ \Gamma &= [u_{,j}^i] m_i n^j = \gamma_1 u_{z,r}^+ T + \dots, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = -\frac{7}{2} + 3 \frac{l + m + n}{\lambda + 2\mu}, \\ \alpha_3 &= \frac{-3\lambda/2 + l + 3m}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma_1 = \frac{-2\lambda - 5\mu + l + 3n/2}{\lambda + \mu}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $T$  и  $\Gamma$  — продольная и поперечная компоненты волнового вектора разрывов. В (3.2) формула для скорости  $G$  имеет вид асимптотического ряда, записанного до первого порядка малости включительно по предварительным деформациям и интенсивности  $T$ . Поперечная компонента  $\Gamma$  волнового вектора имеет второй порядок малости относительно продольной  $T$ . Наличие поперечной компоненты разрыва связано с предварительной сдвиговой деформацией ( $u_{z,r}^+$ ). Если предварительного сдвига нет, то  $\Gamma = 0$  и волна становится чисто продольной. Отметим, что для слабо нелинейной среды скорость  $G$  близка к  $C_1$ .

Вторая волна, квазипоперечная, движется со скоростью

$$\begin{aligned} G &= C_2 \left( 1 + \phi_1 u_{r,r}^+ + \phi_2 \frac{u_r^+}{r} + \frac{\dot{u}_r^+}{C_2} + \dots \right), \quad T = \gamma_2 (\Gamma^2 - 2\Gamma u_{z,r}^+) + \dots, \\ \phi_1 &= \frac{-\lambda + 2\mu + l + 3n/2}{2\mu}, \quad \phi_2 = \frac{-\lambda + l}{2\mu}, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_1 + 1}{2}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что в первом порядке малости скорость квазипоперечной волны определяется только предварительными деформациями и не зависит от интенсивности  $\Gamma$  (симметрия

задачи относительно замены  $z$  на  $-z$ ). Эта волна всегда имеет продольную компоненту  $T$  и не становится чисто поперечной.

На каждой из возникающих ударных волн  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  в слое выполняются условия

$$[u_r]|\Sigma_i = [u_\varphi]|\Sigma_i = 0, \quad r|\Sigma_i = r_{i0} + \int_{t_{i0}}^t G_i(\xi) d\xi, \quad (3.4)$$

где  $r_{i0}$  и  $t_{i0}$  — координата и момент образования фронта  $\Sigma_i$ .

Следствием системы (1.1) и сделанных предположений о кинематике среды будут такие уравнения движения:

$$\begin{aligned} & u_{r,rr} \left(1 + A_1 u_{r,r} + A_2 \frac{u_r}{r}\right) + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} + A_3 \frac{u_{r,r}^2}{r} + A_4 \frac{u_r^2}{r^3} + \frac{u_{r,r} u_r}{r^2} + \\ & + A_5 u_{z,r} u_{z,rr} + A_6 \frac{u_{z,r}^2}{r} = \frac{1}{C_1^2} \left\{ \ddot{u}_r \left(1 - 2u_{r,r} - \frac{u_r}{r}\right) + 2\dot{u}_r \dot{u}_{r,r} + \dots \right\}, \\ & \left(u_{z,rr} + \frac{u_{z,r}}{r}\right) \left(1 + B_1 u_{r,r} + B_2 \frac{u_r}{r}\right) + u_{z,r} \left\{ (B_1 + 2) u_{r,rr} + B_2 \frac{u_{r,r}}{r} - \right. \\ & \left. - B_2 \frac{u_r}{r^2} \right\} = \frac{1}{C_2^2} \left\{ \ddot{u}_z \left(1 - 3u_{r,r} - \frac{u_r}{r}\right) + \ddot{u}_r u_{z,r} + 2\dot{u}_r \dot{u}_{z,r} + \dots \right\}, \\ & A_5 = \frac{-\lambda - 4\mu + l + 3n/2}{\lambda + 2\mu}, \quad A_6 = \frac{-2\mu + 3n/4}{\lambda + 2\mu}, \\ & B_1 = \frac{-\lambda - 5\mu + l + 3n/2}{\mu}, \quad B_2 = \frac{-\lambda - \mu + l}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение краевой задачи (3.4), (3.5), (3.3) (или (3.2)) рассмотрим на основе модификации лучевого метода [11], адаптированной к описанию ударных волн.

Приближенное решение за передними фронтами волновых процессов для любой искомой функции, в т.ч. компонент поля перемещений, имеет вид, аналогичный (2.5) в задаче с единственной ударной волной

$$\begin{aligned} f^{(k)}(r, t) &= f^{(k-1)}(r, t) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[ \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \right] \Big|_{t=T_k(r)} (t - T_k)^i, \\ T_k(r) &= \int_{r_{k0}}^r \frac{d\xi}{G_k(\xi)} + t_{k0}, \quad \left[ \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \right] = \left( \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \right)^+ - \left( \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \right)^-. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В (3.6)  $f^{(k)}(r, t)$  — поле функции  $f$  за ударной волной  $\Sigma_k$ , имеющей скорость  $G_k$ , вычисляемую согласно (3.2) или же (3.3),  $f^{(k-1)}(r, t)$  — поле функции  $f$  в области перед ударной волной  $\Sigma_k$ . Отметим, что  $f^{(k-1)}(r, t)$  могут тоже определяться рядом типа (3.6) или же вычисляются иными методами. Возможность представления  $f^{(k-1)}(r, t)$  лучевым рядом связана с предположением о том, что  $\Sigma_k$  и  $\Sigma_{k-1}$  недалеко расположены друг от друга. В решении, представленном дальше, все перемещения и деформации за каждой из ударных волн вычисляются с помощью лучевых асимптотик, поэтому решение имеет место при  $t \ll 1$  и для тонкого цилиндрического слоя.

Дополнительно, как и ранее в (2.7), представим величины скачков  $\left[ \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \right]$  рядами по дельта-производным, вычисляемым в момент возникновения соответствующей поверхности разрывов, т.е.

$$\left[ \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \right] \Big|_{\Sigma_k} = F_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[ \frac{\delta^j F_{ik}}{\delta t^j} \right] \Big|_{t=t_{k0}} (t - t_{k0})^j. \quad (3.7)$$



Очевидно, что величины  $\left[ \frac{\delta^j F_{ik}}{\delta t^j} \right] \Big|_{t=t_{k0}}$  являются постоянными для одномерной задачи.

Деформация цилиндрического слоя начинается с движения двух ударных волн: чисто продольной и квазипоперечной от границы  $r = R + g(t)$  внутрь области до момента  $t = t_1$ , когда продольная волна приходит к  $r = r_0$ . В  $r_0 \leq r \leq R + g(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ , проводя описанную выше схему вычисления лучевых рядов, получим для чисто продольной волны  $\Sigma_1$ :

$$\begin{aligned}
u_r^{(1)}(r, t) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k u_r}{\partial t^k} \right] \Big|_{t=T_1(r)} (t - T_1(r))^k = \\
&= - [\dot{u}_r] \Big|_{t=T_1(r)} - \frac{[\ddot{u}_r]}{2} \Big|_{t=T_1(r)} (t - T_1(r))^2 - \dots = \\
&= - \left( \kappa_{10} + \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} t + \dots \right) \Big|_{t=T_1(r)} - (\kappa_{20} + \dots) \Big|_{t=T_1(r)} (t - T_1(r))^2 - \dots, \\
\kappa_1 &= [\dot{u}_r] \Big|_{\Sigma_1}, \quad \kappa_2 = [\ddot{u}_r] \Big|_{\Sigma_1}, \quad \kappa_{10} = [\dot{u}_r] \Big|_{t=t_{10}=0}, \quad \kappa_{20} = [\ddot{u}_r] \Big|_{t=t_{10}=0}, \\
\frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} &= \frac{\delta [\dot{u}_r]}{\delta t} \Big|_{t=t_{10}=0}, \quad \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} = \frac{2D_1 \frac{\kappa_1}{C_1} \kappa_2 + \frac{\kappa_1}{r_1} C_1 \left( 1 + D_2 \frac{\kappa_1}{C_1} + \dots \right)}{2 + \left( 17 \frac{3}{4} - 10 \frac{1}{2} \frac{l+m+n}{\lambda+2\mu} \right) \frac{\kappa_1}{C_1} + \dots}, \\
r_1 &= R - \int_0^t G_1(\xi) d\xi = R - \int_0^t C_1 \left( 1 + D_1 \left( \kappa_{10} + \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} \xi \right) \frac{1}{C_1} \right) d\xi + \dots = \\
&= R - C_1 \left\{ t \left( 1 + D_1 \frac{\kappa_{10}}{C_1} \right) + \frac{D_1}{2C_1} \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} t^2 \right\} + \dots, \\
D_1 &= \alpha_1, \quad D_2 = 4 \frac{1}{2} + \frac{12\lambda + 18\mu - 15l - 27m - 9n}{2(\lambda + 2\mu)}, \\
u_z^{(1)}(r, t) &\equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Верхний индекс, заключенный в круглые скобки, в формулах (3.8) и далее означает, что отмеченная им функция задана в области за ударной волной с соответствующим индексу номером. В (3.8) входит уравнение затухания, в котором происходит нарушение рекуррентности, т.к. величина  $\frac{\delta \kappa_1}{\delta t}$  зависит от  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Данное уравнение связывает между собой три неизвестных константы представления

$$\kappa_1 = \kappa_{10} + \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} t + \dots, \quad \kappa_2 = \kappa_{20} + \dots \tag{3.9}$$

и будет учитываться при выполнении краевых условий (3.1) на нагружаемой поверхности. Отметим, что приближение (3.9) для функций скачков  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  может уточняться включением последующих членов рядов по дельта-производным, но для их коэффициентов будет необходимо вычисление уравнений затухания более высокого порядка. Входящая в формулы (3.8) функция  $t = T_1(r)$  приближенно вычисляется как

$$T_1(r) = \frac{R-r}{G_{10}} \left\{ 1 - \frac{D_1}{2C_1} \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} \frac{R-r}{G_{10}} \right\} + \dots, \quad G_{10} = G_1 \Big|_{t=0} = C_1 (1 + D_1 \kappa_{10}) + \dots$$

За передним фронтом  $\Sigma_2$  квазипоперечной ударной волны для времен  $0 \leq t < t_1$  решение лучевого метода находим в виде:

$$\begin{aligned}
u_r^{(2)}(r, t) &= - \left( \kappa_{10} + \frac{\delta \kappa_{10}}{\delta t} T_1(r) \right) (t - T_1(r)) - \frac{\kappa_{20}}{2} (t - T_1(r))^2 - \\
&\quad - \left( w_{10} + \frac{\delta w_{10}}{\delta t} T_2(r) \right) (t - T_2(r)) - \frac{w_{20}}{2} (t - T_2(r))^2 - \dots, \\
u_z^{(2)}(r, t) &= - \left( \psi_{10} + \frac{\delta \psi_{10}}{\delta t} T_2(r) \right) (t - T_2(r)) - \frac{\psi_{20}}{2} (t - T_2(r))^2 - \dots, \\
&\quad - 2 \frac{\delta \psi_1}{\delta t} \left\{ 1 + B_1 u_{r,r} + B_2 \frac{u_r}{r_2} - \frac{\dot{u}_r}{C_2} \right\} - 4 \psi_2 \left\{ u_{r,r} + \frac{\dot{u}_r}{C_2} \right\} + \\
&\quad + \psi_1 G_2 \left\{ \frac{1}{r_2} + (B_1 + B_2) \frac{u_{r,r}}{r_2} + (B_1 + 2) u_{r,rr} - \frac{B_1 + 2}{G_2^2} w_2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\dot{u}_r - w_2}{C_2} + \frac{1}{G_2^2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \left( 1 + B_1 u_{r,r} + B_2 \frac{u_r}{r_2} \right) \right\} + \dots = 0, \\
w_2 &= \tilde{A}_6 \frac{\psi_1}{G_2} \left( \psi_2 - 2 \frac{\delta \psi_1}{\delta t} + \frac{\psi_1}{G_2} \frac{\delta G_2}{\delta t} \right) + 2 \tilde{A}_7 \frac{\psi_1^2}{r_2} + \dots, \\
\tilde{A}_6 &= A_6 \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \tilde{A}_7 = A_7 \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad r_2 = R - \int_0^t G_2(\xi) d\xi, \\
[\dot{u}_r]_{\Sigma_2} &= w_1, \quad [\ddot{u}_r]_{\Sigma_2} = w_2, \quad [\dot{u}_z]_{\Sigma_2} = \psi_1, \quad [\ddot{u}_z]_{\Sigma_2} = \psi_2, \\
T_2(r) &= \frac{R - r}{G_{20}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta G_{20}}{\delta t} \frac{R - r}{G_{20}^2} \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь для сокращения выкладок и далее в записи уравнений затухания на каждой ударной волне у величин предварительных деформаций ( $u_{r,r}$ ,  $\frac{u_r}{r}$ ,  $\frac{\dot{u}_r}{C_2}$  и т.д.) пропускаем индекс "+". Для каждого из скачков  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  принимаем представление вида (3.9). Скорость квазипоперечной волны  $\Sigma_2$  вычисляется согласно (3.3), и т.к. в (3.3) содержатся функции предварительных деформаций перед  $\Sigma_2$ , то их значения определяются при помощи дополнительных рядов по дельта-производным вида (3.7). Поскольку предварительные деформации на волне  $\Sigma_2$  здесь вычисляются в момент  $t = 0$ , то для них справедливо утверждение:

$$f^+|_{\Sigma_2, t=0} = - [f]|_{\Sigma_1, t=0} = f^-|_{\Sigma_1, t=0}, \tag{3.11}$$

где  $f$  — общее обозначение, принятое для всех возможных деформаций или их частных производных. Далее, предварительные деформации представляем в виде

$$\begin{aligned}
f^+|_{\Sigma_2} &= f_0^+ + \frac{\delta f_0^+}{\delta t} + \dots, \quad f^+|_{\Sigma_2, t=0} = f_0^+, \\
\frac{\delta f^+}{\delta t} \Big|_{\Sigma_2, t=0} &= \frac{\delta f_0^+}{\delta t} = \dot{f}^+ - f_{,r}^+ G_2|_{t=0},
\end{aligned}$$

причем дельта-производные предварительных деформаций также вычисляются с учетом решения (3.8) и формул (3.11). Отметим, что в приближенной формуле

$$G_2 = G_{20} + \frac{\delta G_{20}}{\delta t} t + \dots,$$

используемой в (3.11), вся зависимость от дельта-производных предварительных деформаций включена в коэффициент  $\frac{\delta G_{20}}{\delta t}$ . После проведения необходимых вычислений за ударной волной  $\Sigma_2$  получаем приближенное решение (3.10) для  $u_r^{(2)}$ ,  $u_z^{(2)}$ , содержащее неизвестные

константы  $\kappa_{10}$ ,  $\frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}$ ,  $\kappa_{20}$ ,  $w_{10}$ ,  $\frac{\delta w_{10}}{\delta t}$ ,  $w_{20}$ ,  $\psi_{10}$ ,  $\frac{\delta\psi_{10}}{\delta t}$ ,  $\psi_{20}$ . Краевые условия (3.1) на деформирующейся внешней границе позволяют определить часть этих констант:

$$\begin{aligned}\kappa_{10} &= -\frac{g_0}{1 + \frac{g_0}{G_{10}}} + \dots, & \psi_{10} &= -\frac{h_0}{1 + \frac{g_0}{G_{20}}} + \dots, & w_{10} &= \gamma_2 \frac{\psi_{10}^2}{G_{20}} + \dots, \\ G_{10} &= C_1 \left( 1 + \alpha_1 \frac{\kappa_{10}}{C_1} + \dots \right), & G_{20} &= C_2 \left( 1 - \beta_1 \frac{\kappa_{10}}{C_1} - \frac{\kappa_{10}}{C_2} \right) + \dots, \\ \kappa_{20} &= -\frac{g_1}{\left( 1 + \frac{g_0}{G_{10}} \right)^2} + \dots, & \psi_{20} &= -\frac{h_1}{\left( 1 + \frac{g_0}{G_{20}} \right)^2} + \dots\end{aligned}$$

Остальные константы  $w_{20}$ ,  $\frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta\psi_{10}}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta w_{10}}{\delta t}$  определяются из полученных ранее уравнений затухания и соотношений, характеризующих свойства ударных волн. Для компоненты разрывов  $w_1$  имеем уравнение — следствие (3.3), зависимости между интенсивностью  $\Gamma$  и  $T$ , где  $u_{z,r}^+ = 0$ . Вычисляя дельта-производную этого соотношения, определяем  $\frac{\delta w_{10}}{\delta t}$  через другие константы. Дополнительно, как обычно в лучевом методе, вместе с дифференциальным уравнением для  $\frac{\delta\psi_1}{\delta t}$  на волне  $\Sigma_2$  получаем еще одно соотношение (для нашей задачи — алгебраическое), позволяющее вычислить  $w_2$ . В общем случае многомерных задач это соотношение показывает, как изменяются вдоль эйконала функции скачков второго порядка.

Полученное выше решение справедливо до момента  $t = t_1$ , когда продольная волна  $\Sigma_1$  падает на границу  $r = r_0$ . В этот момент образуется отраженный ударный фронт  $\Sigma_3$ , который является чисто продольным. В отличие от волны  $\Sigma_1$ , этот фронт перемещается по полю предварительных ненулевых деформаций. Волна  $\Sigma_3$  имеет место до момента  $t = t^*$ , когда внутри слоя она столкнется с квазипоперечной волной  $\Sigma_2$ . Рассмотрим, как меняется решение для времен  $t_0 \leq t \leq t^*$  за передним фронтом  $\Sigma_3$ .

Во-первых, само время  $t_0$  может быть вычислено как

$$t_0 = \frac{R - r_0}{G_{10}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta G_{10}}{\delta t} \frac{R - r_0}{G_{10}^2} \right).$$

Введем обозначения для основных скачков на ударной волне  $\Sigma_3$ :

$$[\dot{u}_r]_{\Sigma_3} = \theta_1, \quad [\ddot{u}_r]_{\Sigma_3} = \theta_2.$$

За волной  $\Sigma_3$  компонента  $u_z$  отсутствует. В соответствии с формулой (3.2) и подробно описанным ранее лучевым методом на  $\Sigma_3$  получим такую связь координат:

$$\begin{aligned}r_3 &= r_0 + G_{30}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\delta G_{30}}{\delta t} (t - t_0)^2 + \dots, \\ T_3(r) &= t_0 + \frac{r - r_0}{G_{30}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta G_{30}}{\delta t} \frac{r - r_0}{G_{30}^2} \right) + \dots,\end{aligned}$$

причем  $G_{30}$ ,  $\frac{\delta G_{30}}{\delta t}$  — функции  $\theta_1$ ,  $\frac{\delta\theta_1}{\delta t}$ ,  $\theta_2$  и найденных ранее констант за  $\Sigma_1$ . Решение за  $\Sigma_3$  зададим формулой

$$\begin{aligned}u_r^{(3)}(r, t) &= - \left( \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} T_1(r) \right) (t - T_1(r)) - \frac{\kappa_{20}}{2} (t - T_1(r))^2 - \\ &- \left( \theta_{10} + \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} (t - t_0) \right) \Big|_{t=T_3(r)} (t - T_3(r)) - \frac{\theta_{20}}{2} (t - T_3(r))^2 - \dots\end{aligned}\tag{3.12}$$

Условие жесткого закрепления на  $r = r_0$  с подстановкой в него (3.12) позволяет вычислить:

$$\kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 = -\theta_{10}, \quad \theta_{20} = -\kappa_{20}. \quad (3.13)$$

Связь между  $\theta_{10}$  и  $\frac{\delta\theta_{10}}{\delta t}$ ,  $\theta_{20}$  получаем как уравнение лучевого метода

$$\begin{aligned} \theta_{20} & \left\{ (2 + A_1 - 2\alpha_2)t_0 \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) - \frac{(A_1 + 2\alpha_1)}{C_1} \left( \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 \right) \right\} - \\ & - 2 \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} \left\{ 1 + A_1 t_0 \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) - \frac{A_1}{C_1} \left( \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 \right) \right\} - \\ & - \left( \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 \right) \frac{C_1}{G_{30} \left( 1 - \alpha_1 \frac{\theta_1}{C_1} + \dots \right)} \left\{ -\frac{\alpha_1}{G_{30}} \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} + \right. \\ & + \left[ \alpha_2 \left( \kappa_{20} - \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} \right) T_1'(r_0) - \frac{\alpha_3}{r_0} \left( \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 \right) - \frac{\kappa_{20}}{C_1} \right] + \\ & + G_{30} \left[ \alpha_2 \left( T_1''(r_0) \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 + (T_1'(r_0))^2 \left( 2 \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} - \kappa_{20} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_3}{r_0} t_0 \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) + \frac{1}{C_1} \left( \kappa_{20} - \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} \right) T_1'(r_0) \right] \left. \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ 1 + A_1 t_0 \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) - \frac{A_1}{C_1} \left( \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 \right) \right\} - \\ & - \left( \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 \right) G_{30} \left\{ -\frac{1}{r_0} - A_1 T_1''(r_0) \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 - \right. \\ & - A_1 (T_1'(r_0))^2 \left( 2 \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} - \kappa_{20} \right) - 2 \frac{A_3}{r_0} t_0 \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} T_1'(r_0) + \\ & \left. + \frac{A_3}{r_0 C_1} \left( \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t_0 \right) + \frac{2\kappa_{20}}{C_1^2} - 2 \left( \kappa_{20} - \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} \right) T_1'(r_0) \frac{G_{30}}{C_1^2} \right\} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из уравнения (3.14) следует, что величина  $\frac{\delta\theta_{10}}{\delta t}$ , показывающая изменение скачка импульса на отраженной волне в момент  $t_0$ , полностью определяется константами, задающими перемещения за  $\Sigma_1$ . Решая (3.14) с учетом (3.13), полностью определяем лучевое разложение за отраженной продольной волной.

Построенное лучевое решение, включающее область за  $\Sigma_2$  ( $r_2(t) \leq r \leq R + g(t)$ ), область за  $\Sigma_3$  ( $r_0 \leq r \leq r_3(t)$ ) и область  $r_3(t) \leq r \leq r_2(t)$  с решением  $u_r = u_r^{(1)}(r, t)$ , имеет место до момента  $t = t^*$ , когда при  $r = r^*$  встречаются отраженная продольная и квазипоперечная волна. Приравнявая  $T_2(r) = T_3(r)$ , получим квадратное уравнение относительно  $r$ . Решая его приближенно, вычислим

$$\begin{aligned} r^* & = r_L + \frac{\delta G_{20}}{\delta t} \frac{1}{G_{20}^2} \left( \frac{r_L R - \frac{r_L^2 + R^2}{2}}{G_{20} + G_{30}} \right) G_{30} + \frac{\delta G_{30}}{\delta t} \frac{1}{G_{30}^2} \left( \frac{-r_L r_0 + \frac{r_L^2 + r_0^2}{2}}{G_{20} + G_{30}} \right) G_{20} + \dots, \\ r_L & = \frac{R(C_1 - C_2) + 2r_0 C_2}{C_1 + C_2}, \end{aligned}$$

где  $r_L$  — линейное приближение к значению  $r^*$ . Отвечающее  $r^*$  значение  $t^*$  находим из уравнения  $t^* = T_2(r^*)$  или же из  $t^* = T_3(r^*)$ .

Слабая нелинейность задачи позволяет предположить, что взаимодействие волн не приводит к их принципиальному изменению, т.е. считаем, что с момента  $t = t^*$  от  $r = r^*$

в сторону  $R$  движется квазипродольная волна  $\Sigma_4$ , а решение перед ней задается функциями  $u_r^{(2)}(r, t)$ ,  $u_z^{(2)}(r, t)$ . Одновременно к границе  $r_0$  идет новая квазипоперечная волна  $\Sigma_5$ , поле перед которой задается функцией  $u_r^{(3)}(r, t)$ . Этот процесс происходит до момента  $T^* = \min(T_4(R), T_5(r_0))$ , где  $T_4(r)$ ,  $T_5(r)$  — уравнения эйконала  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_5$  соответственно. За каждой из ударных волн представим решение лучевым рядом:

$$\begin{aligned} u_r^{(4)}(r, t) &= u_r^{(2)}(r, t) - \left( \varphi_{10} + \frac{\delta\varphi_{10}}{\delta t} (t - t^*) \right) \Big|_{t=T_4(r)} (t - T_4(r)) - \frac{\varphi_{20}}{2} (t - T_4(r))^2 - \dots, \\ u_z^{(4)}(r, t) &= u_z^{(2)}(r, t) - \left( \nu_{10} + \frac{\delta\nu_{10}}{\delta t} (t - t^*) \right) \Big|_{t=T_4(r)} (t - T_4(r)) - \frac{\nu_{20}}{2} (t - T_4(r))^2 - \dots, \\ u_r^{(5)}(r, t) &= u_r^{(3)}(r, t) - \left( \xi_{10} + \frac{\delta\xi_{10}}{\delta t} (t - t^*) \right) \Big|_{t=T_5(r)} (t - T_5(r)) - \frac{\xi_{20}}{2} (t - T_5(r))^2 - \dots, \\ u_z^{(5)}(r, t) &= - \left( \tau_{10} + \frac{\delta\tau_{10}}{\delta t} (t - t^*) \right) \Big|_{t=T_5(r)} (t - T_5(r)) - \frac{\tau_{20}}{2} (t - T_5(r))^2 - \dots \end{aligned}$$

$$T_4(r) = t^* + \int_{r^*}^r \frac{d\xi}{G_4(\xi)}, \quad T_5(r) = t^* - \int_{r^*}^r \frac{d\xi}{G_5(\xi)}, \quad (3.15)$$

где  $\varphi_{10}$ ,  $\nu_{10}$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\nu_{20}$ ,  $\frac{\delta\varphi_{10}}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta\nu_{10}}{\delta t}$ ,  $\xi_{10}$ ,  $\tau_{10}$ ,  $\xi_{20}$ ,  $\tau_{20}$ ,  $\frac{\delta\xi_{10}}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta\tau_{10}}{\delta t}$  — неизвестные константы метода,  $G_4$  задается формулой (3.2), а  $G_5$  — формулой (3.3). Для каждой из волн  $\Sigma_4$ ,  $\Sigma_5$  получаем по 4 уравнения лучевого метода: одно основное уравнение затухания, одно дополнительное уравнение алгебраического типа и уравнение, связывающее компоненты волнового вектора, в двух видах: само по себе и для дельта-производных этих компонент. Оставшиеся четыре неизвестных определяем из условия непрерывности перемещений при  $r = r^*$  в малой окрестности  $t > t^*$

$$u_r^{(4)} \Big|_{r=r^*} = u_r^{(5)} \Big|_{r=r^*}, \quad u_z^{(4)} \Big|_{r=r^*} = u_z^{(5)} \Big|_{r=r^*}. \quad (3.16)$$

Поскольку каждое из перемещений в (3.16) имеет вид степенной функции второго порядка по времени, то (3.16) выполняется за счет приравнивания коэффициентов у каждой из степеней  $t$ . При этом получаем недостающие четыре уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} - \xi_{10} &= - \left( w_{10} + \frac{\delta w_{10}}{\delta t} t^* \right) + \left( \theta_{10} + \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} (t^* - t_0) \right), \\ \varphi_{20} - \xi_{20} &= -w_{20} + \theta_{20}, \\ -\tau_{10} &= - \left( \psi_{10} + \frac{\delta\psi_{10}}{\delta t} t^* \right) - \nu_{10}, \\ -\tau_{20} &= -\psi_{20} - \nu_{20}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Такие же выражения для констант рядов, как и в (3.17), можно получить, сравнивая между собой не перемещения в точке  $r = r^*$ , а значения частных производных перемещений за  $\Sigma_4$  и за  $\Sigma_5$  в пределе при  $t \rightarrow t^*$ , предполагая, что эти предельные значения совпадают.

Гладкое решение в области между волнами  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_5$  можно вычислить, задавая набор функций — весовых коэффициентов  $\Phi_r^{(4)}$ ,  $\Phi_r^{(5)}$ ,  $\Phi_z^{(4)}$ ,  $\Phi_z^{(5)}$ , с которыми лучевые решения войдут в общее, так что

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r &= \Phi_r^{(4)} u_r^{(4)} + \Phi_r^{(5)} u_r^{(5)}, \quad \tilde{u}_z = \Phi_z^{(4)} u_z^{(4)} + \Phi_z^{(5)} u_z^{(5)}, \\ \Phi_r^{(4)} \Big|_{\Sigma_4} &= 1, \quad \Phi_r^{(4)} \Big|_{\Sigma_5} = 0, \quad \Phi_r^{(5)} \Big|_{\Sigma_4} = 0, \quad \Phi_r^{(5)} \Big|_{\Sigma_5} = 1. \end{aligned}$$

С помощью всех перечисленных действий достаточно легко, хотя и громоздко по форме, записываются лучевые ряды для области внутри слоя, связанной с эффектом взаимодействия ударных волн.

**4. Заключение.** В статье представлено применение модифицированного лучевого метода к одномерным осесимметричным задачам ударной деформации цилиндрической полости в среде или цилиндрического слоя. Рассмотрены различные варианты изменения лучевого метода. Один из них связан с введением в схему метода дополнительных рядов по дельта-производным, другой — с вычислением разрывов высоких порядков с помощью решения линейаризованной задачи. Необходимо отметить, что для ударных волн ненулевой кривизны применение дополнительных рядов по дельта-производным ограничено малым расстоянием, проходимым ударной волной. Именно этот вариант метода применяется для описания движения ударных волн в слое малой толщины. Представлены различные типы задач: о распространении одиночной волны, о падающих волнах, об отраженных от одной из границ волнах и о взаимодействии волн внутри слоя. Для каждой из них решение получено в виде своего лучевого ряда.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бленд, Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Р. Бленд. — М. : Мир, 1972. — 183 с.
- [2] *Куликовский, А. Г.* Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. — М. : Московский Лицей, 1998. — 412 с.
- [3] *Rossikhin, Y. A.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. — 1995. — V. 48. — № 1. — P. 1–39.
- [4] *Быковцев, Г. И.* Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеальных жестко-пластических сред / Г. И. Быковцев, И. А. Власова // Механика деформируемого твердого тела (динамика сплошной среды). — 1979. — Вып. 41. — С. 31–36.
- [5] *Буренин, А. А.* О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной ударной волны / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // ПМТФ. — 1990. — № 6. — С. 13–17.
- [6] *Россихин, Ю. А.* Удар жесткого шара по упругому полупространству / Ю. А. Россихин // Прикл. механика. — 1986. — Т. 22. — № 5. — С. 15–21.
- [7] *Подильчук, Ю. Н.* Применение метода лучевых рядов для исследования осесимметричных нестационарных задач динамической теории упругости / Ю. Н. Подильчук, Ю. К. Рубцов // Прикл. механика. — 1986. — Т. 22. — № 3. — С. 3–9.
- [8] *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1,2. Изд-ие 2-ое испр. и дополн. / Л. И. Седов. — М. : Наука, — 1973. — Т. 1. — 536 с. — Т. 2. — 584 с.
- [9] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. — М. : Мир, 1964. — 308 с.
- [10] *Герасименко, Е. А.* Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / Е. А. Герасименко, В. Е. Рагозина // Вестник Самарского государственного университета — Естественнонаучная серия. — 2006. — № 6/1(46). — С. 94–113.
- [11] *Буренин, А. А.* Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. — Владивосток : ДВО АН СССР, 1991. — С. 129–137.

*Рагозина Виктория Евгеньевна,*

*кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизи-  
ки и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивос-  
ток*

*e-mail: ragoza@vlc.ru*

*Иванова Юлия Евгеньевна,*

*кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток*

*e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru*

V. E. Ragozina, Y. E. Ivanova

**ON THE VARIOUS METHODS OF ADAPTATION OF FRONTLINE RAY  
EXPANSIONS SCHEME IN THE PROBLEMS OF THE AXISYMMETRIC  
DYNAMICS OF NONLINEAR ELASTIC MEDIUM**

*Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far  
Eastern Branch of Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** The possibility of using of two variants of the ray method modification is shown on the example of several one-dimensional axisymmetric problems of shock deformation of elastic medium. The ray method in its standard can not be applied to nonlinear processes, including discontinuities surfaces of the first derivatives. Presented in the paper variants of the method allow to remove this restriction. Features of the application of the ray series for distribution in the medium of a single shock wave, for the process leading to the formation of several shock waves of various types, for the problem of formation of reflected waves and their subsequent interaction with the leading edges of initially created processes are shown. The question of construction of ray series for times after the interaction of the incident and reflected shock waves in the interior layer of the elastic medium is considered.

**Keywords:** nonlinear elastic medium, impact deformation, ray series, axisymmetric problems, quasi-longitudinal and quasi-transverse shock waves.

**REFERENCES**

- [1] *Bland, D. R.* Nonlinear dynamic theory of elasticity / D. R. Bland. – M. : Mir, 1972. – 183 p. (in Russian)
- [2] *Kulikovskii, A. G.* / A. G. Kulikovskii, E. I. Sveshnikova. – FL : CRC Press, Boca Raton, 1995. – 256 p. (in Russian)
- [3] *Rossikhin, Y. A.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Appl. Mech. Rev.* – 1995. – Vol. 48. – № 1. – P. 1–39.
- [4] *Bykovtsev, G. I.* Special lines and surfaces in spatial flows of an ideal rigid-plastic mediums / G. I. Bykovtsev, I. A. Vlasova // *Mechanics of deformable solids(dynamics continuous medium)*. – 1979. – Is. 41. – P. 31–36. (in Russian)
- [5] *Burenin, A. A.* Influence of viscosity on the nature of the propagation of a plane extensional shock wave / A. A. Burenin, Y. A. Rossikhin // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 1990. – V. 31. – Is. 6. – P. 807–810. (in Russian)
- [6] *Rossikhin, Y. A.* Impact of a rigid sphere onto an elastic half space / Y. A. Rossikhin // *Soviet Applied Mechanics.* – 1986. – Vol. 22. – № 5. – P. 403–409. (in Russian)
- [7] *Podil'chuk, Yu. N.* Application of the method of ray series to the investigation of axisymmetric nonstationary problems of the dynamical theory of elasticity / Yu. N. Podil'chuk, Yu. K. Rubtsov // *Soviet Applied Mechanics.* – 1986. – Vol. 22.– Is. 3. – P. 201–207. (in Russian)
- [8] *Sedov, L. I.* *Continuum Mechanics.* / L. I. Sedov. – M. : Nauka, – 1973. – Vol. 1. – 536 p. – Vol. 2. – 584 p. (in Russian)
- [9] *Tomas, T.* *Plastic Flow and Fracture in Solids* / T. Y. Thomas. – Academic Press, 1961. – 267 p. (in Russian)
- [10] *Gerasimenko, E. A.* The ray expansion in the study of the laws of propagation of non-planar shock waves / E. A. Gerasimenko, V. E. Ragozina // *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series.* – 2006. – № 6/1(46). – P. 94–113. (in Russian)
- [11] *Burenin, A. A.* Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces of strong discontinuities / A. A. Burenin, Y. A. Rossikhin



// Applied problems of deformable media mechanics. – Vladivostok : FEB AS USSR, 1991. – P. 129–137. (in Russian)

*Ragozina, Victoria Evgenevna*

*Senior Researcher, Ph.D., Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

*Ivanova, Yulia Evgenevna*

*Researcher, Ph.D., Institution of Russian Academy of Sciences Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

М. В. Спасская, А. А. Трещев

## ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

*Тульский государственный университет, г. Тула*

**Аннотация.** В представленной статье рассматривается термоупругая задача для круговой цилиндрической оболочки, выполненной из разносопротивляющегося материала, обладающего свойством структурной анизотропии. Для конкретизации структурной анизотропии материала оболочки принято ортотропное тело. Задача рассматривается в несвязанной постановке, т. е. она распадается на две независимые задачи: механики сплошной среды и термодинамики. В работе проводится исследование оболочки в рамках теории пологих оболочек. Решение задачи строится на основании технических гипотез Кирхгофа–Лява. В качестве физических зависимостей применяются соотношения, предложенные в работах А. А. Трещева. Основные соотношения записаны по типу уравнений, используемых в форме метода упругих решений А. А. Ильюшина. Процесс теплопередачи описывается классическим уравнением теплопроводности. В статье приведена система разрешающих уравнений поставленной задачи в смешанном виде, дополненная начальными и граничными условиями.

В задаче оболочка воспринимает равномерно распределенную нагрузку, приложенную перпендикулярно к ее внутренней поверхности, также оболочка подвержена температурному воздействию в виде разности температур на внутренней и внешней поверхности. Оболочка исследуется в момент времени, когда распределение температуры установилось. В статье приведено решение конкретной задачи термоупругого изгиба тонкостенной круговой цилиндрической оболочки, выполненной из трехармированного тканого полимера. Показаны некоторые наиболее характерные результаты исследования напряженно-деформированного состояния оболочки: прогибы срединной поверхности, осевые и окружные напряжения. Проведено сравнение результатов расчета с учетом и без учета температурного воздействия. Выполнен анализ учета влияния температурной нагрузки на напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки.

**Ключевые слова:** разносопротивляемость, анизотропия, термоупругость, несвязанная задача, цилиндрическая оболочка, разрешающие уравнения.

УДК: 539.38:539.377

В современном строительстве и промышленности все больше используются новые конструкционные материалы. Зачастую материалы по разным направлениям имеют физико-механические свойства, отличные друг от друга. Материалы, обладающие такой особенностью, принято называть анизотропными. Часто данные материалы не соответствуют классическим представлениям об упругом деформировании. Характерной чертой этих материалов является зависимость деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния. Подобная зависимость обнаружена не только у новых материалов, используемых в технике, каковыми являются различные композитные составы, полимеры, графиты,

стеклопластики, но и у традиционных конструкционных материалов типа чугуна, бетонов и керамики. Такие материалы принято называть разносопротивляющимися. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов – относительно молодая ветвь механики деформируемого твердого тела. Классические теории не могут правильно оценить напряженно-деформированное состояние конструкций из материалов, обладающих указанными особенностями. При этом в настоящее время в химической промышленности, строительстве, машино- и авиастроительных отраслях все больше применяются особо ответственные конструкции. Именно поэтому необходимы надежные теории расчета, согласованные с экспериментальными данными.

Рассматриваемые материалы имеют достаточно большие модули упругости и прочностные характеристики, поэтому их часто используют в тонкостенных конструкциях, таких как пластины и оболочки. Направленность на применение конструкционных материалов, обладающих свойствами анизотропии и разносопротивляемости, а также требование минимальности собственного веса конструкций приводит к необходимости использования нелинейных теорий расчета конструкций. Благодаря этому появляется необходимость применения численных методов с последующей реализацией их на компьютерной технике.

Также совершенно недостаточно внимания уделено учету влияния температурного воздействия на напряженно-деформированное состояние конструкций из материалов с усложненными свойствами. Рассмотрение задач термоупругости для анизотропных разносопротивляющихся материалов в настоящее время носит хаотичный характер, а так как новые конструкции работают при все более высоких температурах, то систематическое исследование задачи термоупругости анизотропных разносопротивляющихся материалов очень важно в рамках современной механики деформируемого твердого тела и ее практических приложений.

Таким образом, можно сделать вывод, что учет свойств анизотропии и разносопротивляемости материалов, а также изучение влияния температурного воздействия на напряженно-деформированное состояние оболочек является актуальной задачей как в научном, так и в прикладном плане.

Для большого класса разносопротивляющихся анизотропных материалов эффект связанности полей деформаций и температур мал. Таким образом, при обычной теплопередаче, происходящей в неравномерно нагретом теле за счет теплового воздействия окружающей среды, влиянием деформаций тела на распределение в нем температуры можно пренебречь. Это позволяет исследовать температурное поле в твердом теле, соответствующее определенным условиям теплопередачи, независимо от деформированного состояния тела. Поэтому для многих конструкционных материалов рационально рассматривать несвязанную задачу термоупругости.

Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка из ортотропного разносопротивляющегося материала [1]. Главные оси ортотропии совпадают с осями главных напряжений. Положение любой точки оболочки определяется в гауссовой системе координат  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Местоположение любой точки на срединной поверхности оболочки определяется координатами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Примем, что изменение температуры в оболочке происходит только по ее толщине, чтобы разность температур на внутренней и наружной поверхностях  $\Delta T$  являлась функцией от координаты  $\beta_3$ . Геометрические характеристики оболочки: высота  $L$ , толщина  $h$ , радиус срединной поверхности оболочки  $R$ . Один торец цилиндрической оболочки при  $\beta_1 = 0$  полностью закреплен, а другой торец при  $\beta_1 = L$  свободен от закреплений и механической нагрузки. На оболочку действует разность температур: температура внутренней  $T_1$  и наружной –  $T_2$ , а также равномерно распределенная нагрузка  $q_3$ , приложенная ко внутренней поверхности оболочки.

Будем рассматривать конструкцию в рамках теории пологих оболочек, в которой используются следующие зависимости:

а) компоненты деформации в срединной поверхности (относительные удлинения и сдвиги) при конечных прогибах:

$$\varepsilon_1 = u_{,1} + 0.5\theta_1^2; \quad \varepsilon_2 = v_{,1} + kw + 0.5\theta_2^2; \quad \gamma = v_{,1} + u_{,2} + \theta_1\theta_2, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — относительные удлинения;  $\gamma$  — относительный сдвиг;  $u, v, w$  — осевые, касательные и радиальные перемещения;  $k = 1/R$  — главная кривизна;  $\theta_1, \theta_2$  — повороты нормали к срединной поверхности:

$$\theta_1 = -w_{,1}; \quad \theta_2 = -w_{,2} + kv; \quad (2)$$

б) компоненты изгибной деформации (изменения кривизн и кручение):

$$\chi_1 = -w_{,11}; \quad \chi_2 = -w_{,22}; \quad \tau = -w_{,12}, \quad (3)$$

где  $\chi_1, \chi_2$  — кривизны;  $\tau$  — кручение;

в) компоненты деформации точки оболочки, отстоящей на расстоянии  $\beta_3$  от срединной поверхности, выраженные через компоненты тангенциальных и изгибных деформаций:

$$e_{11} = \varepsilon_1 + \beta_3\chi_1; \quad e_{22} = \varepsilon_2 + \beta_3\chi_2; \quad \gamma_{12} = \gamma + 2\beta_3\tau. \quad (4)$$

Выражения (1)–(4) являются кинематическими соотношениями. Они справедливы для теории пологих оболочек в квадратичном приближении при малых упругих деформациях.

Примем оболочку достаточно тонкой, чтобы использование традиционных технических гипотез Кирхгофа-Лява не вызывало сомнений:

1) нормаль к срединной поверхности после деформации остается перпендикулярной к деформированной срединной поверхности;

2) при определении параметров напряженного состояния влиянием нормальных напряжений  $\sigma_3$  можно пренебречь.

Чтобы получить уравнения, учитывающие температурное воздействие, к ним необходимо добавить соответствующие компоненты температурных деформаций.

В качестве физических зависимостей будем использовать соотношения, предложенные в работе А. А. Трещева [2]. Для конкретизации структурной анизотропии материала оболочки принято ортотропное тело.

С учетом принятых гипотез и при совпадении осей цилиндрической системы координат с главными осями анизотропии физические зависимости запишем в виде:

$$\begin{aligned} e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + \alpha_{1T}\Delta T; \\ e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22} + \alpha_{2T}\Delta T; \\ e_{12} &= (A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12})\tau_{12}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_{kkkk}, B_{kkkk}, A_{ijij}, B_{ijij}, A_{ijij}, B_{ijij}$  — константы, зависящие от модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации материала;  $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$  — нормированные напряжения;  $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$  — модуль вектора полных напряжений;  $\alpha_{1T}, \alpha_{2T}$  — коэффициенты линейного теплового расширения.

Вычисление констант определяющих соотношений для ортотропных материалов рекомендовано выполнять по результатам простейших экспериментов на одноосное растяжение и одноосное сжатие вдоль главных осей анизотропии, из экспериментов на сдвиг в главных плоскостях или из экспериментов по одноосному растяжению и одноосному сжатию в направлениях, ориентированных под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии [2]. При этом константы для ортотропного тела вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; & B_{kkkk} &= (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2; \\ A_{ijij} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ + \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; & B_{ijij} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ - \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \\ A_{ijij} &= (1/E_{ij}^+ + 1/E_{ij}^-) - 0.25 \left[ \begin{array}{l} (1/E_i^+ + 1/E_j^+ + 1/E_i^- + 1/E_j^-) - \\ -2(\nu_{ji}^+/E_i^+ + \nu_{ji}^-/E_i^-) \end{array} \right]; \\ B_{ijij} &= \sqrt{2}(1/E_{ij}^+ - 1/E_{ij}^-) - 0.125 \cdot \sqrt{2} \cdot \left[ \begin{array}{l} (1/E_i^+ + 1/E_j^+ - 1/E_i^- - 1/E_j^-) - \\ -4(\nu_{ji}^+/E_i^+ - \nu_{ji}^-/E_i^-) \end{array} \right], \end{aligned}$$

где  $\nu_{ij}^{\pm}/E_j^{\pm} = \nu_{ji}^{\pm}/E_i^{\pm}$ ;  $\nu_{ij}^{-}/E_j^{-} = \nu_{ji}^{-}/E_i^{-}$ ;  $E_k^{\pm}$ ,  $E_i^{\pm}$ ,  $E_j^{\pm}$  — модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях, соответствующих главным осям анизотропии;  $\nu_{ij}^{\pm}$ ,  $\nu_{ji}^{\pm}$  — коэффициенты поперечной деформации при растяжении и сжатии в направлениях, соответствующих главным осям анизотропии;  $E_{ij}^{\pm}$  — модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях под углом  $45^{\circ}$  к соответствующим главным осям анизотропии.

Преобразовав физические зависимости по типу уравнений, используемых в форме метода упругих решений А. А. Ильюшина [3], и выразив напряжения через деформации, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11}e_{11} + C_{12}e_{12} - R_{11} - \varphi_{1T}; \\ \sigma_{22} &= C_{12}e_{11} + C_{22}e_{12} - R_{22} - \varphi_{2T}; \\ \tau_{12} &= C_{66}e_{12} - R_{12},\end{aligned}\quad (6)$$

где  $C_{11} = A_{2222}/\Delta$ ;  $C_{12} = -A_{1122}/\Delta$ ;  $C_{22} = A_{1111}/\Delta$ ;  $C_{66} = 1/A_{1122}$ ;  $R_{12} = T_{12}/A_{1122}$ ;  $T_{11} = B_{1111}\alpha_{11}\sigma_{11} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})\sigma_{22}$ ;  $T_{12} = B_{1122}\sqrt{2}\alpha_{12}\tau_{12}$ ;  $T_{22} = B_{2222}\alpha_{22}\sigma_{22} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})\sigma_{11}$ ;  $\varphi_{1T} = C_{11}\alpha_{1T}\Delta T + C_{12}\alpha_{2T}\Delta T$ ;  $\varphi_{2T} = C_{12}\alpha_{1T}\Delta T + C_{22}\alpha_{2T}\Delta T$ ;  $\Delta = A_{1111}A_{2222} - A_{1122}^2$ .

Принимая за основу те или иные определяющие соотношения, мы не вносим изменений в соотношения статико-геометрической природы. Таким образом, остаются справедливыми основные положения и зависимости геометрически нелинейной теории анизотропных оболочек. Внутренние усилия и моменты приводятся к срединной поверхности  $\beta_3 = 0$ , и с учетом условия  $\beta_3 k \ll 1$  уравнения равновесия для пологих оболочек определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}N_{1,1} + S_{,2} + q_1 &= 0; \quad N_{2,2} + S_{,1} + k(Q_2 + H_{,1}) + q_2 = 0; \\ M_{1,1} + H_{,2} - Q_1 - N_1\theta_1 - S\theta_2 &= 0; \quad M_{2,2} + H_{,1} - Q_2 - N_2\theta_2 - S\theta_1 = 0; \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} + kN_2 + q_3 &= 0,\end{aligned}\quad (7)$$

где  $N_k$ ,  $S$  — усилия в срединной поверхности оболочки;  $Q_k$  — поперечные силы;  $M_k$ ,  $H$  — изгибающие и крутящий моменты;  $q_m$  — интенсивности внешней нагрузки по соответствующим направлениям.

Поскольку переход от напряжений к их интегральным характеристикам — усилиям и моментам — не зависит от физической природы материала, эти характеристики определим обычным способом:

$$N_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk} d\beta_3; \quad M_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk} \beta_3 d\beta_3.\quad (8)$$

Уравнения совместности деформаций приводятся к виду:

$$k\chi_1 + \chi_1\chi_2 - \tau^2 - \gamma_{,12} + \varepsilon_{1,22} + \varepsilon_{2,11} = 0.\quad (9)$$

В задаче оболочка воспринимает нагрузку в виде внутреннего давления  $q_3$ . С учетом симметрии рассматриваемой задачи все параметры напряженно-деформированного состояния будут зависеть только от координат  $\beta_1$  и  $\beta_3$ . Поэтому кинематические (1)–(4), статические (7) зависимости, а также уравнение неразрывности (9) принимают вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= u_{,1} + 0,5\theta_1^2; \quad \varepsilon_2 = kw; \quad \chi_1 = -w_{,11}; \\ e_{11} &= \varepsilon_1 + \beta_3\chi_1; \quad e_{22} = \varepsilon_2; \\ N_{1,1} &= 0; \quad M_{1,1} - Q_1 - N_1\theta_1 = 0; \quad Q_{1,1} - kN_2 + q_3 = 0; \\ k\chi_1 &+ \varepsilon_{2,11} = 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Проинтегрируем соотношения для напряжений (6) по толщине оболочки в соответствии с правилами (8) и подставим получившиеся зависимости в уравнения равновесия (10). Кроме того, используя уравнение неразрывности деформаций, окончательно получаем систему двух дифференциальных уравнений в смешанном виде относительно неизвестных угла поворота и продольной силы в тангенциальном направлении:

$$\begin{cases} \theta_{1,1} + RL_{22}N_{2,11} = -RH_{2,11} - RH_{2T,11}; \\ \theta_{1,11} - \frac{1}{RP_{11}}N_2 = -\frac{1}{P_{11}}q_3 + \frac{1}{P_{11}}J_{11,1} + \frac{1}{P_{11}}\chi_{1T,1} \end{cases}\quad (11)$$

где  $L_{22} = \frac{C_{11}}{(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)h}$ ;  $P_{11} = C_{11}h^3/12$ ;  $H_2 = -\frac{C_{12}}{(C_{11}C_{22} - C_{12}^2) \cdot h}I_{11} + L_{22}I_{22}$ ;  $H_{2T} = -\frac{C_{12}}{(C_{11}C_{22} - C_{12}^2) \cdot h}\varepsilon_{1T} + L_{22}\varepsilon_{2T}$ ;  $I_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} R_{ij}d\beta_3$ ;  $J_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} R_{ij}\beta_3d\beta_3$ ;  $\varepsilon_{iT} = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_{iT}d\beta_3$ ;  $\chi_{iT} = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_{iT}\beta_3d\beta_3$ .

Граничные условия жесткого закрепления:  $\theta_1 = 0$ ;  $\varepsilon_1 = 0$ ;  $\varepsilon_2 = 0$ .

Для определения температурных компонент в уравнении (11) следует отдельно рассмотреть задачу о передаче тепла через поверхность оболочки. Процесс теплопередачи описывается классическим уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \omega_1 \cdot T_{,11} + \omega_2 \cdot T_{,22} + \omega_3 \cdot T_{,33},$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – коэффициенты теплопроводности, характеризующие теплоинерционные свойства тела по направлениям.

Наиболее часто встречающиеся на практике задачи связаны со стационарным одномерным температурным полем. В этом случае температура зависит только от одной координаты (например  $\beta_3$ ) – нормали к изотермическим поверхностям. В компактной форме для одномерного случая уравнение теплопроводности запишется в виде:  $T_{,t} = \omega_3 T_{,33}$ , где  $t$  – текущее время;  $\omega_3 = \lambda/c$  – коэффициент теплопроводности, характеризующий теплоинерционные свойства тела;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – удельная объемная теплоемкость тела.

Так как рассматривается достаточно тонкая оболочка и коэффициент теплопроводности материалов относительно велик, то установление линейного распределения температуры по толщине оболочки наступает достаточно быстро в течение короткого промежутка времени. В связи с этим, для данной задачи целесообразно рассматривать момент времени, когда распределение температуры установилось.

В определенный момент времени, когда будет наблюдаться установившееся температурное распределение по толщине оболочки, для вычисления перепада температур  $\Delta T$  в любой точке по толщине можно воспользоваться линейным законом распределения температуры:

$$T(\beta_3) = (T_2 - T_1)\beta_3/h + (T_1 + T_2)/2 - T_0,$$

где  $T_1$  – температура на внутренней поверхности оболочки;  $T_2$  – температура на внешней поверхности оболочки;  $T_0$  – начальная температура оболочки.

Так как задача является нелинейной, была проведена линеаризация полученных разрешающих дифференциальных уравнений, следуя методике последовательных нагружений В. В. Петрова [4]. Полученные линеаризованные разрешающие дифференциальные уравнения достаточно сложны, поэтому для их решения следует прибегать к численным методам, из которых в данном случае наиболее просто реализуется метод конечных разностей [5] с привлечением двухшагового метода последовательного возмущения параметров [4].

Исследуем напряженно-деформированное состояние оболочки, исходная схема которой показана на рис. 1. Для решения задачи воспользуемся следующими исходными данными: толщина оболочки  $h = 0.05$  м; радиус срединной поверхности оболочки  $R = 0.5$  м; длина  $L = 3.0$  м; нагрузка на оболочку равномерно распределенная  $q = 8$  МПа. Температурный режим: перенос тепла осуществляется благодаря теплопроводности оболочки; на внутренней поверхности оболочки температура поддерживается постоянной  $T_1 = 0$  °С; на внешней поверхности оболочки температура также поддерживается постоянной  $T_2 = +30$  °С; в начальный момент времени оболочка имеет температуру  $T_0 = 0$  °С. Материал оболочки – трехармированный тканый полимер П32-57 [6] со следующими механическими характеристиками: модули упругости –  $E_1^+ = 12,75$  ГПа,  $E_1^- = 14,03$  ГПа,  $E_2^+ = 16,425$  ГПа,  $E_2^- = 20,6$  ГПа; коэффициенты поперечной деформации –  $\nu_{12}^+ = 0,176$ ,  $\nu_{12}^- = 0,194$ . Температурные характеристики материала: коэффициенты линейного теплового расширения  $\alpha_{1T} = 33 \cdot 10^{-5}$  °С<sup>-1</sup>,  $\alpha_{2T} = 40 \cdot 10^{-5}$  °С<sup>-1</sup> [7].

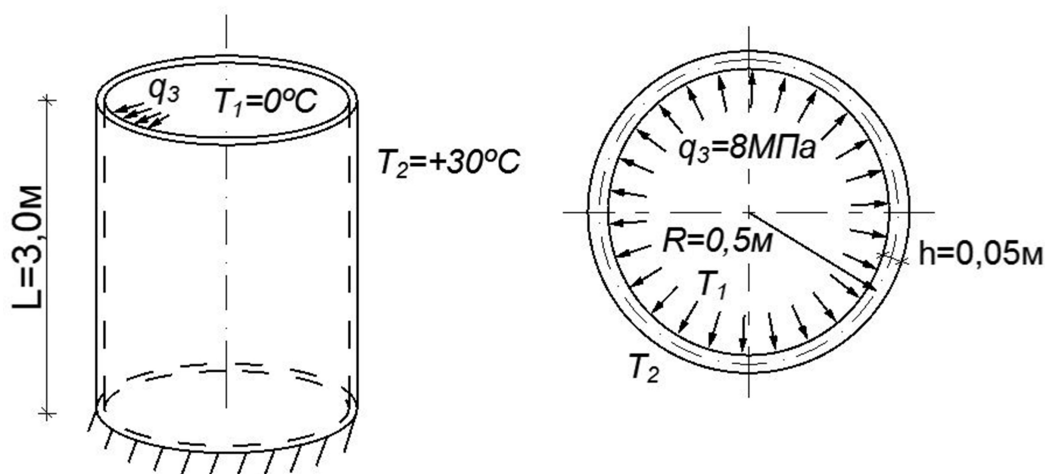


Рис. 1. Схема рассматриваемой задачи

На рис. 2–4 приведены некоторые наиболее характерные результаты расчета напряженно-деформированного состояния оболочки, описанной выше. Показаны решения, полученные по модели Трещева А. А. [2], с учетом температурного воздействия на цилиндрическую оболочку. Сплошной линией построены графики, полученные без учета температурного воздействия, пунктирной – с учетом.

Как видно из рис. 2, расхождение в значениях максимальных прогибов с учетом и без учета температурного воздействия составляет 21,4 %.

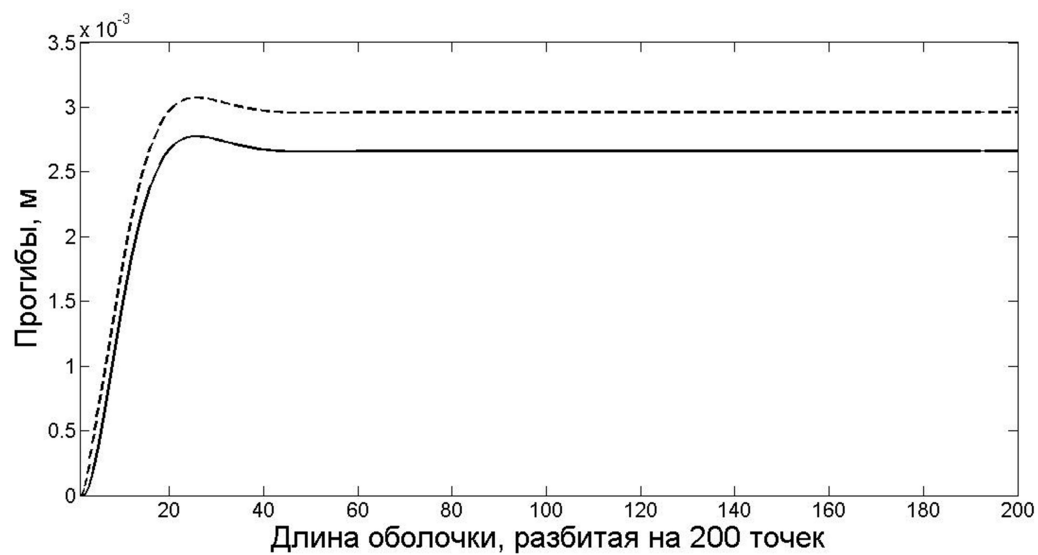


Рис. 2. Прогибы оболочки, м

Для напряжений на внутренней поверхности оболочки значения, полученные без учета температуры, и данные, полученные с учетом температурного воздействия, равны. Это обусловлено тем, что температура на внутренней поверхности оболочки не менялась. В связи с этим стоит рассмотреть подробнее напряжения на внешней поверхности оболочки (рис. 3).

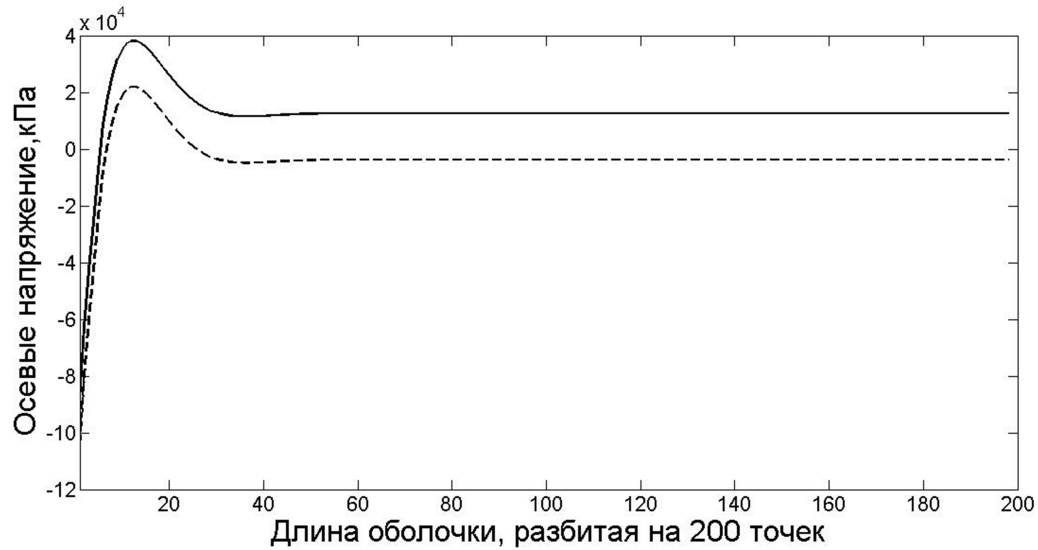


Рис. 3. Напряжения  $\sigma_{11}$  на внешней поверхности оболочки, кПа

Для осевых напряжений на внешней поверхности оболочки значения, полученные без учета температуры, в заделке меньше результатов, полученных с учетом температурного воздействия, на 19,5 %. Однако, для максимальных растягивающих напряжений значение без учета температуры превосходит результат, полученный с учетом температурного воздействия, на 42,1 %. Кроме того, на расстоянии 0,125L–L температурное воздействие вообще меняет знак напряжений.

Как показано на рис. 4, для окружных напряжений на внешней поверхности оболочки значения, полученные без учета температуры, в заделке в 2 раза меньше результатов, рассчитанных с учетом температурного воздействия. Для максимальных окружных напряжений на внешней поверхности оболочки значения с учетом температуры меньше на 23,8 %, чем без ее учета.

Проанализировав полученные результаты, можно сделать вывод о том, что учет температурного воздействия необходим для получения достоверных результатов расчета цилиндрических оболочек, т.к. вносит значительные поправки в картину напряженно-деформированного состояния конструкции.



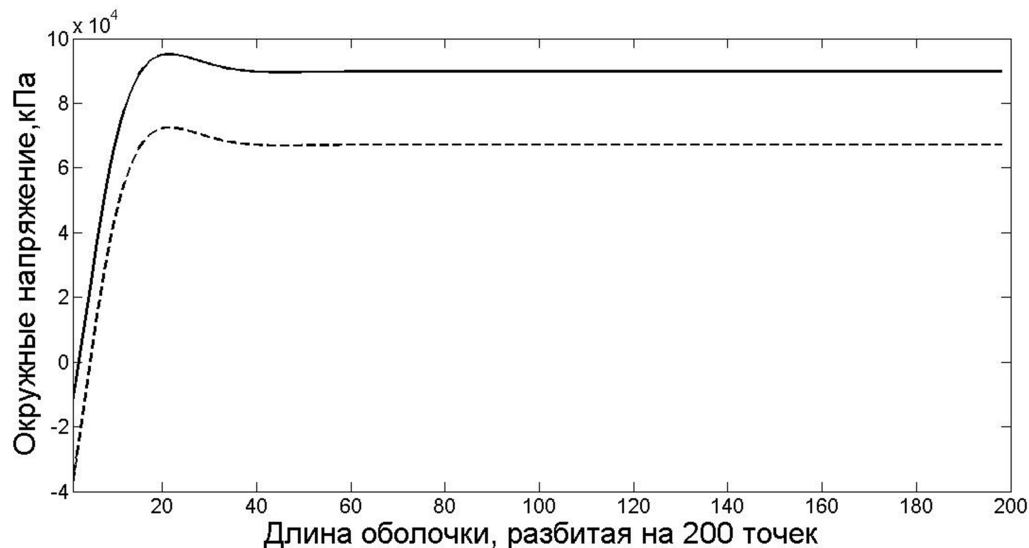


Рис. 4. Напряжения  $\sigma_{22}$  на внешней поверхности оболочки, кПа

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Спасская, М. В. Подход к решению термоупругой задачи для круговой цилиндрической оболочки из анизотропных разносопротивляющихся материалов / М. В. Спасская // Вестник магистратуры. – 2013. – № 7. – С. 63–65.
- [2] Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения: монография. – М. ; Тула : РААСН ; ТулГУ, 2008. – 264 с.
- [3] Ильюшин, А. А. Пластичность. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
- [4] Петров, В. В. Методы расчета конструкций из нелинейно деформируемого материала : учеб. пособие / В. В. Петров, И. В. Кривошеин – М. : Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
- [5] Варвак, П. М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П. М. Варвак, Л. П. Варвак – М. : Стройиздат, 1977. – 160 с.
- [6] Розе, А. В. Трехармированные тканые материалы / А. В. Розе, И. Г. Жигулин, М. Н. Душин // Механика полимеров. – 1970. – № 3. – С. 471–476.
- [7] Каргин, В. А. Энциклопедия полимеров. – М. : Советская энциклопедия, 1972. – Т. 1. – 1224 с.

Спасская Мария Владимировна,  
аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула  
e-mail: ma71ruska@mail.ru

Трещев Александр Анатольевич,  
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительства, строительных материалов и конструкций, Тульский государственный университет, г. Тула  
e-mail: taa58@yandex.ru

M. V. Spasskaya, A. A. Treshev

## THERMOELASTIC DEFORMATION OF THE CYLINDRICAL SHELL MADE OF ANISOTROPIC DIFFERENT RESISTANT MATERIAL

*Tula State University, Tula*

**Abstract.** The article is devoted the thermoelastic problem for a circular cylindrical shell made of different resistance anisotropic material. To concretize the structural anisotropy of the shell material taken orthotropic body. The problem is considered in the unrelated setting; it splits into two independent problems: continuum mechanics and thermodynamics. In this article we study the shell in the theory of shallow shells. Solution of the problem is constructed on the basis of technical Kirchhoff-Love hypotheses. As a physical dependency are used ratios of A. A. Treshev. Basic relations recorded by type equations used in the form of the method of elastic solutions of A. A. Ilyushin. The process of heat transfer is described by the classical heat equation. The article describes the system of resolving equations of the problem in a mixed form, supplemented by initial and boundary conditions.

In the task the shell receives a uniformly distributed load applied perpendicular to the inner surface of the shell and the shell receives thermal effect, as the temperature difference on the inner and outer surface of the shell. Shell investigated at the time point when the temperature distribution is established. The article gives the solution to a specific task of thermoelastic bending of thin-walled circular cylindrical shell made of reinforced woven polymer. Shows some of the most typical results of a study of stress-strain state of the shell: shell deflection, axial and hoop stresses. A comparison of the calculated results with and without the effects of temperature. The analysis of the accounting impact of the thermal load on the stress-strain state of the cylindrical shell.

**Keywords:** different resistance, anisotropy, thermoelasticity, unrelated tasks, cylindrical shell, resolving equations.

### REFERENCES

- [1] *Spasskaya, M. V.* Approach to the solution of thermoelastic problem for a circular cylindrical shell of anisotropic different resistance materials / M. V. Spasskaya // Bulletin of the Judiciary. – 2013. № 7. – P. 63–65. (in Russian)
- [2] *Treshev, A. A.* The Theory of Deformation and durabilities for the Materials, sensitive to a kind of an stress condition. Determining Correlations / A. A. Treshev. – M. ; Tula : RAACS ; TulSU, 2008. – 264 p. (in Russian)
- [3] *Ilyushin, A. A.* Plasticity / A. A. Ilyushin. – M. : Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1963. – 271 p. (in Russian)
- [4] *Petrov, V. V.* Methods of structural analysis of nonlinear deformable material : Proc. allowance / V. V. Petrov, I. V. Krivoshein. – M. : Publishing Association building universities, 2009. - 208 p. (in Russian)
- [5] *Varvak, P. M.* The grid method in problems of calculation of building structures / P. M. Varvak, L. P. Varvak. – M. : Stroyizdat, 1977. – 160 p. (in Russian)
- [6] *Rose, A. V.* Threereinforced woven materials / A. V. Rose, I. G. Zhigulin, M. N. Dushyn // Mechanics of polymers. – 1970. – № 3. – P. 471–476. (in Russian)
- [7] *Kargin, V. A.* Encyclopedia polymers / V. A. Kargin. – M. : Soviet Encyclopedia, 1972. – Vol. 1. – 1224 p. (in Russian)

*Spasskaya, Maria Vladimirovna*

*Post-graduate student, Tula State University, Tula*

*Treshchev, Alexander Anatolyevich*

*Dr. Tech. Sci., Professor, Head of the Department of Construction, construction materials and designs, Tula State University, Tula*

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова

## ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ, МЕНЯЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

*Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика  
М. Ф. Решетнева, г. Красноярск*

**Аннотация.** Решена задача о кручении прямого цилиндрического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей; поперечное сечение стержня ограничено выпуклым контуром. Предполагается, что пластическая область охватывает всю внешнюю границу. Для решения задачи используются законы сохранения. Для кусочно-гладких границ решение найдено квадратурой.

**Ключевые слова:** законы сохранения, точные решения, неизвестная граница, задача кручения прямого стержня, давление.

УДК: 539.374

**Введение.** В настоящей работе рассматривается задача о кручении прямого цилиндрического стержня, находящегося под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей.

На сегодняшний день существует много исследований, посвященных кручению стержней с боковой поверхностью, свободной от напряжений. И лишь в некоторых работах учитывается действие давления вдоль образующей стержня при кручении [1], [2]. Но и в них рассмотрена только пластическая задача.

Решению задачи о напряженном состоянии упругопластического стержня также посвящено много работ, но большинство из них основываются на некоторых предположениях о форме границы  $L$ , которая, вообще говоря, заранее не известна. Оригинальный метод по определению неизвестной границы предложен Б. Д. Анниным [3]. Этот метод основан на контактных преобразованиях и позволяет определить границу раздела между упругой и пластической областью в стержнях овального поперечного сечения. Постановку задачи и подробный обзор результатов можно найти в [3] и цитируемой там литературе.

В данной работе впервые рассмотрена упругопластическая задача о кручении стержня, находящегося под действием давления, меняющегося вдоль образующей, и предложено её решение с помощью законов сохранения.

---

Поступила 10.03.2015

Работа выполнена в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы», проект № 14.574.21.0082.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ, код проекта Б-180-14.

Рассмотрим упругопластическое кручение прямого стержня (рис. 1), поперечное сечение которого ограничено выпуклым контуром  $\Gamma$ . Предположим, что давление меняется линейно вдоль образующей [1].

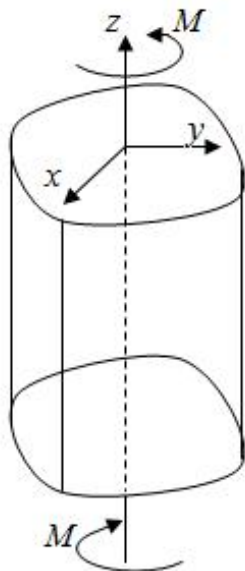


Рис. 1. Прямой цилиндрический стержень

При достаточно большом значении крутящего момента в стержне появляется пластическая область  $P$ , которая начинает образовываться на внешнем контуре  $\Gamma$ . Предположим, что пластическая область полностью охватила контур. Тогда в поперечном сечении возникают две области – пластическая  $P$  и упругая  $F$ ;  $L$  – граница раздела областей (рис. 2).

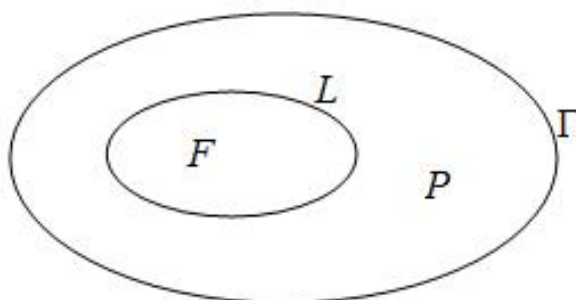


Рис. 2. Пластическая и упругая области в поперечном сечении стержня

В предлагаемой работе с помощью законов сохранения определяется упругопластическая граница и предлагаются формулы для ее вычисления в случае кусочно гладкой ориентированной границы поперечного сечения. Законы сохранения уже давно и плодотворно используются для решения многих задач математики и механики. Краткий обзор результатов и решенных задач из разных областей механики можно найти в [4], [5], [6].

**Постановка задачи.** Предположим, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + c, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y),$$

где  $\lambda = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$ .

Пусть  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  — единственные ненулевые компоненты тензора напряжений. В упругой зоне они удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \quad (1)$$

и уравнениям

$$\tau_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \quad (2)$$

Здесь функция  $\theta\psi(x, y)$  определяет депланацию поперечного сечения,  $\theta$  — постоянная,  $G$  — модуль упругости при сдвиге.

Введем функцию напряжения  $\varphi$  по формуле

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}x\lambda, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}y\lambda, \quad (3)$$

тогда для определения  $\varphi$  в упругой области получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta. \quad (4)$$

В пластической области компоненты  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ , помимо уравнения равновесия, удовлетворяют условию пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = 1. \quad (5)$$

Здесь, для простоты дальнейших вычислений, постоянную пластичности считаем равной единице.

Вводя в это уравнение функцию напряжения, получаем

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}x\lambda \right)^2 + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}y\lambda \right)^2 = 1. \quad (6)$$

**Граничные условия.** Предположим, что боковая поверхность стержня свободна от касательных усилий. Следовательно, вектор напряжения во всех точках контура  $\Gamma$  направлен по нормали к его боковой поверхности. Это означает, что  $\tau_{xz}n_1 + \tau_{yz}n_2 = 0$  на контуре  $\Gamma$ . Здесь  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  — нормальный вектор к контуру  $\Gamma$ .

Окончательно получаем следующую задачу.

В области, ограниченной кривой  $L$ , необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = a, \quad (7)$$

где  $a = -2G\theta$ .

В области, ограниченной кривыми  $L$  и  $\Gamma$  (т. е. в области пластичности  $P$ ), функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (6).

На  $\Gamma$  для функции  $\varphi$  выполняются условия

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}x\lambda\right)n_1 + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}y\lambda\right)n_2 = 0. \quad (8)$$

На границе раздела  $L$  функция  $\varphi$  непрерывна.

Требуется найти  $\varphi$  в упругой и пластической областях, а также найти границу раздела  $L$ .

Введем обозначения  $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v$ . Тогда уравнения (6)–(7) примут вид

$$F_1 = u_x + v_y - a = 0. \quad (9)$$

$$\left(u + \frac{1}{2}x\lambda\right)^2 + \left(-v + \frac{1}{2}y\lambda\right)^2 = 1. \quad (10)$$

Здесь индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной.

В силу введенных обозначений будет выполняться равенство

$$F_2 = u_y + v_x = 0. \quad (11)$$

Назовем вектор  $(A, B)$  сохраняющимся током для системы уравнений (9), (11), если выполнено соотношение

$$\partial_x A + \partial_y B = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\Delta_1, \Delta_2$  — некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не являющиеся тривиальными.

Это означает, что для функций  $A$  и  $B$  справедлив закон сохранения на всех решениях системы (9), (11):

$$\partial_x A + \partial_y B = 0. \quad (13)$$

Закон сохранения (13) для уравнений (9), (11) имеет вид

$$A_x + A_u u_x + A_v v_x + B_y + B_u u_y + B_v v_y = 0,$$

или, учитывая, что  $u_x = a - v_y$  и  $u_y = v_x$ ,

$$A_x + A_u a - A_u v_y + A_v v_x + B_y + B_u v_x + B_v v_y = 0.$$

Из последнего равенства следует, что функции  $A$  и  $B$  удовлетворяют уравнениям Коши–Римана:

$$A_x + A_u a + B_y = 0, \quad (14)$$

$$B_v - A_u = 0, \quad A_v + B_u = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим область  $D$  с границей  $\Gamma$  при условии, что область пластичности  $P$  полностью охватывает упругую зону  $F$ . Пусть  $\Gamma$  — гладкая ориентированная кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек. Из закона сохранения (13) следует, что

$$\iint_D (\partial_x A + \partial_y B) dx dy = 0. \quad (16)$$

Из (16), используя формулу Грина, получаем

$$\oint_{\Gamma} A dy - B dx = 0. \quad (17)$$

Наша задача – найти такую область  $F$ , принадлежащую вместе с ее границей  $L$  области  $D$ , в которой выполняется неравенство  $(u + \frac{1}{2}x\lambda)^2 + (-v + \frac{1}{2}y\lambda)^2 < 1$ .

Пусть  $A = \alpha u + \beta v$ ,  $B = \alpha v - \beta u + \gamma$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – некоторые функции от  $x$ ,  $y$ . Тогда

$$A_x = \alpha_x u + \alpha u_x + \beta_x v + \beta v_x, \quad (18)$$

$$B_y = \alpha_y v + \alpha v_y - \beta_y u - \beta u_y + \gamma_y. \quad (19)$$

Согласно закону сохранения (13) получаем равенство

$$A_x + B_y = \alpha_x u + \alpha u_x + \beta_x v + \beta v_x + \alpha_y v + \alpha v_y - \beta_y u - \beta u_y + \gamma_y = 0,$$

из которого следуют условия на функции  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$

$$\begin{cases} \alpha_x - \beta_y = 0, \\ \beta_x + \alpha_y = 0, \\ a\alpha + \gamma_y = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Рассмотрим два решения системы уравнений (20). Первое имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, & \beta_1 &= -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_{1y} &= -a \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

тогда

$$\gamma_1 = -a \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad (22)$$

где точка  $(x_0, y_0)$  – произвольная точка сечения, ограниченного контуром  $\Gamma$ .

Соответственно, второе решение запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, & \beta_2 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_{2y} &= -a \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

тогда

$$\gamma_2 = -\frac{a}{2} \ln ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2).$$

Найдем значения  $u$  и  $v$  на контуре  $\Gamma$ .

Из условия (10) и соотношения  $(u + \frac{1}{2}x\lambda) n_1 + (-v + \frac{1}{2}y\lambda) n_2 = 0$  получаем



$$u = -\frac{1}{2}x\lambda - n_2, \quad v = \frac{1}{2}y\lambda - n_1.$$

Здесь  $n_1 > 0$  в связи с выбором крутящего момента.

Перепишем уравнение (17) для функций  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} A dy - B dx &= \oint_{\Gamma} \left( \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) + \beta \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) \right) dy - \\ &- \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) - \beta \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) + \gamma \right) dx = \\ &= \oint_{\Gamma} \left( -\alpha \frac{n_2}{n_1} + \beta \right) \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) dy - \left( \alpha \frac{n_1}{n_2} - \beta \right) \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx = \\ &= \oint_{\Gamma} \left( -\alpha \frac{n_2}{n_1} + \beta \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - \left( \alpha \frac{n_1}{n_2} - \beta \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx = \\ &= \oint_{\Gamma} -\alpha \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) dy - \alpha \frac{n_1}{n_2} dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx + \oint_{\Gamma} \beta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) = \\ &= \oint_{\Gamma} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Разобьем границу  $\Gamma$  на части:  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , где  $\Gamma_3$  – окружность  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  (рис.3).

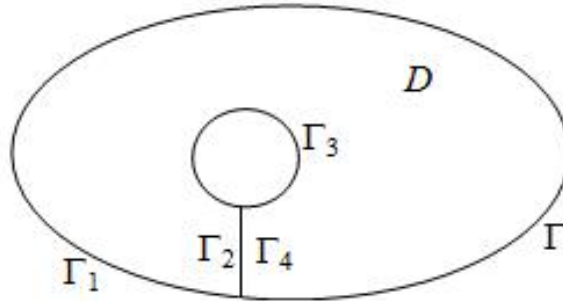


Рис. 3. Область  $D$  с границей  $\Gamma$

Тогда

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} A dy - B dx &= \oint_{\Gamma} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx + \\
&+ \oint_{\Gamma_1} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx + \\
&+ \oint_{\Gamma_2} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx + \\
&+ \oint_{\Gamma_3} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx + \\
&+ \oint_{\Gamma_4} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma_2} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx + \\
&+ \oint_{\Gamma_4} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy + \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

С учетом этого условия уравнение (25) примет вид

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma_3} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx = \\
&= - \oint_{\Gamma_1} \alpha \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy + \left( \alpha \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma \right) dx.
\end{aligned} \tag{26}$$

Вычислим интеграл  $\oint_{\Gamma_3}$ , где  $\Gamma_3$  — окружность радиуса  $R$ .

Пусть

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha_1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \beta_1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
\gamma = \gamma_1 &= -a \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Введем полярную систему координат

$$\begin{cases} x - x_0 = R \cos \varphi, \\ y - y_0 = R \sin \varphi. \end{cases} \tag{28}$$

Тогда

$$\begin{cases} dx = -R \sin \varphi d\varphi, \\ dy = R \cos \varphi d\varphi, \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\cos \varphi}{R}, \quad \beta = \frac{\sin \varphi}{R}. \quad (29)$$

В результате вычислений при  $R \rightarrow 0$  получим

$$\oint_{\Gamma_3} \alpha_1 \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha_1 \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma_1 \right) dx = \pi u(x_0, y_0). \quad (30)$$

Аналогично при  $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_2, \gamma = \gamma_2$ :

$$\oint_{\Gamma_3} \alpha_2 \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha_2 \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma_2 \right) dx = \pi v(x_0, y_0). \quad (31)$$

В результате из (26) и (30)–(31) имеем

$$\oint_{\Gamma_1} \alpha_1 \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha_1 \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma_1 \right) dx = -\pi u(x_0, y_0), \quad (32)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \alpha_2 \left( -\frac{1}{2}x\lambda - n_2 \right) dy - \left( \alpha_2 \left( \frac{1}{2}y\lambda - n_1 \right) + \gamma_2 \right) dx = -\pi v(x_0, y_0). \quad (33)$$

Зададим кривую  $\Gamma_1$  в параметрическом виде:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

Тогда функции  $u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)$  из (32), (33) будут вычисляться по следующим формулам

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^T \left( \frac{(f(t) - x_0) \sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2}} + a f'(t) \operatorname{arctg} \frac{\varphi(t) - y_0}{f(t) - x_0} \right) dt, \\ v(x_0, y_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{(\varphi(t) - y_0) \sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2}} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{a}{2} f'(t) \ln \left( (f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2 \right) dt, \end{aligned}$$

$f'(t), \varphi'(t)$  — соответственно, производные функций  $f(t)$  и  $\varphi(t)$ .

Теперь вычисляем значение выражения

$$\left( u + \frac{1}{2}x\lambda \right)^2 + \left( -v + \frac{1}{2}y\lambda \right)^2$$

в точке  $(x_0, y_0)$ . Те точки, в которых выражение (36) больше или равно нулю, принадлежат пластической области, а те, в которых выражение (36) меньше нуля, — упругой.

**Заключение.** В статье построена упругопластическая граница для скручиваемого стержня в случае, когда давление линейно изменяется вдоль боковой поверхности. При решении

данной задачи использованы законы сохранения. Отметим, что ни упругая, ни пластическая задача о кручении таким способом решена быть не может. В этом специфика упругопластических задач, они гораздо сложнее задач упругости и пластичности. Однако структура краевой задачи для уравнений упругопластичности такова, что её удобнее решать с использованием методики законов сохранения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Предельное состояние* деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин и др. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с.
- [2] *Козлова, Л. С.* К вопросу о кручении стержней, находящихся под действием давления, меняющегося вдоль образующей / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов, М. В. Михайлова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 1 (19). – С. 121–131.
- [3] *Аннин, Б. Д.* Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. – Новосибирск : Наука. – 1983. – 239 с.
- [4] *Кирыков, П. П.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Кирыков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Издательство СО РАН, 2001. – 192 с.
- [5] *Senashov, S. I.* Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity / S. I. Senashov, A. N. Yachno // SIGMA 8 (2012), 071 – 16 p.
- [6] *Сенашов, С. И.* Законы сохранения в задаче о продольной плоской волне нагрузки в упругопластическом стержне / С. И. Сенашов // Вестник СибГАУ. – 2011. – Вып. 3(36). – С. 82–85.
- [7] *Сенашов, С. И.* Нахождение упруго-пластической границы для областей конечных размеров / С. И. Сенашов, О. В. Гомонова // Материалы XVIII Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. – Красноярск, 2014. – Ч. 2. – С. 155–156.
- [8] *Сенашов, С. И.* Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов, О. В. Гомонова, А. Н. Яхно. – Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – 2012. – 139 с.

*Сенашов Сергей Иванович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск*

*e-mail: sen@sibsau.ru*

*Гомонова Ольга Валерьевна,*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск*

*e-mail: gomonova@sibsau.ru*

S. I. Senashov, O. V. Gomonova

## ON ELASTOPLASTIC TORSION OF ROD UNDER THE ACTION OF A PRESSURE CHANGING ALONG THE GENERATRIX

*Siberian State Aerospace University named after Academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk*

**Abstract.** The classical problem of torsion of a straight rod which cross-section is limited by a convex contour is solved. It is assumed that the plastic domain covers entirely the external boundary. The conservation laws are used to solve the problem. For a piecewise smooth boundary a solution in quadrature is found. Programs which permit construction of plastic and elastic regions in a twisted rod to any precision are written. Their testing for the known solutions indicates the coincidence of results.

**Keywords:** conservation law, exact solution, unknown boundary, the problem of torsion of a straight rod.

### REFERENCES

- [1] *Limiting State of Deformable Solids and Rocks* / D. D. Ivlev, L. A. Maksimova, R. I. Nepershin et al. – M. : PHYSMATHLIT, 2008. – 832 p. (in Russian)
- [2] *Kozlova, L. S.* On the Torsion Bars under the Pressure, Changing Along the Generatrix / L. S. Kozlova, B. G. Mironov, M. V. Mihailova // *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State.* – 2014. – № 1 (19). – P. 121–131. (in Russian)
- [3] *Annin, B. D.* Elastoplastic Problem / B. D. Annin, G. P. Cherepanov. – Novosibirsk : Nauka. – 1983. – 239 p. (in Russian)
- [4] *Kiryakov, P. P.* Application of Symmetries and Conservation Laws to Solving the Differential Equations / P. P. Kiryakov, S. I. Senashov, A. N. Yakhno. – Novosibirsk: Edition of SB of RAS, 2001. – 192 p. (in Russian)
- [5] *Senashov, S. I.* Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity / S. I. Senashov, A. N. Yachno // *SIGMA* 8 (2012), 071 – 16 p.
- [6] *Senashov, S. I.* Conservation Laws of a Problem of a Longitudinal Plane Wave of Loading in a Elastoplastic Rod / S. I. Senashov // *Vestnik SibSAU.* – 2011. – Vol. 3(36). – P. 82–85. (in Russian)
- [7] *Senashov, S. I.* Determination of a Elastoplastic Boundary for Limited Domains / S. I. Senashov, O. V. Gomonova // *Proc. of the XVIII International conference “Reshetnev’s Readings”.* – Krasnoyarsk, 2014. – Part 2. – P. 155-156. (in Russian)
- [8] *Senashov, S. I.* Mathematical Problems of 2-dimesional Ideal Plasticity Equations / S. I. Senashov, O. V. Gomonova, A. N. Yakhno. – Krasnoyarsk : SibSAU. – 2012. – 139 p. (in Russian)

*Senashov Sergey Ivanovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Siberian State Aerospace University named after Academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk*

*Gomonova Olga Valeryevna*

*PhD, Assoc. Professor, Siberian State Aerospace University named after Academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk*

И. А. Семенова

## ПРИМЕРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНО СИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПОЛОСЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары

**Аннотация.** Проблеме решения бигармонического уравнения в конечных канонических областях с угловыми точками границы (бигармоническая проблема) почти 200 лет (см. обзор [3]). В теории упругости она обычно формулируется в простейшей постановке следующим образом: найти решение бигармонического уравнения в прямоугольной полуполосе, продольные стороны которой не нагружены, а на торце заданы нормальное и касательное напряжения. Если решение для полуполосы построено, то решение для прямоугольника уже не представляет труда получить. В серии публикаций, подытоженных статьей [13], была развита общая теория, дана схема решения задачи в полуполосе и рассмотрены различные примеры. Но только для симметричной деформации полуполосы. В этой работе даются примеры решения обратно-симметричной задачи для полуполосы. Продольные стороны полуполосы свободны, а на торце заданы нормальные и касательные напряжения. Решение представляется в виде явных разложений по функциям Фадля – Папковича, коэффициенты которых определяются как интегралы Фурье от заданных на торце полуполосы граничных функций. Работа базируется на статье [13] и на статье [18], в которых даны соотношения биортогональности и разложения Лагранжа для обратно симметричной задачи.

**Ключевые слова:** полуполоса, краевая задача, функции Фадля – Папковича, точные аналитические решения, обратно симметричная задача.

УДК: 539.3

**Материал и методика исследований.** Рассмотрим обратно симметричную задачу для прямоугольника  $\{P : |x| \leq a, |y| \leq 1\}$ , у которого на горизонтальных сторонах напряжения

$$\sigma_x(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1), \quad (1)$$

а на торцах  $x = \pm a$  заданы нормальные (нечетная функция) и касательные  $\tau(y)$  (четная функция) напряжения, т. е.  $\sigma_x(\pm a, y) = \sigma(y)$ ,  $\tau_{xy}(\pm a, y) = \tau(y)$  (рис. 1).

Полагаем, что задача симметрична относительно оси  $y$ . При построении решения будем пользоваться методом начальных функций [8].

---

Поступила 10.11.2014

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-31-50033 мол\_нр).

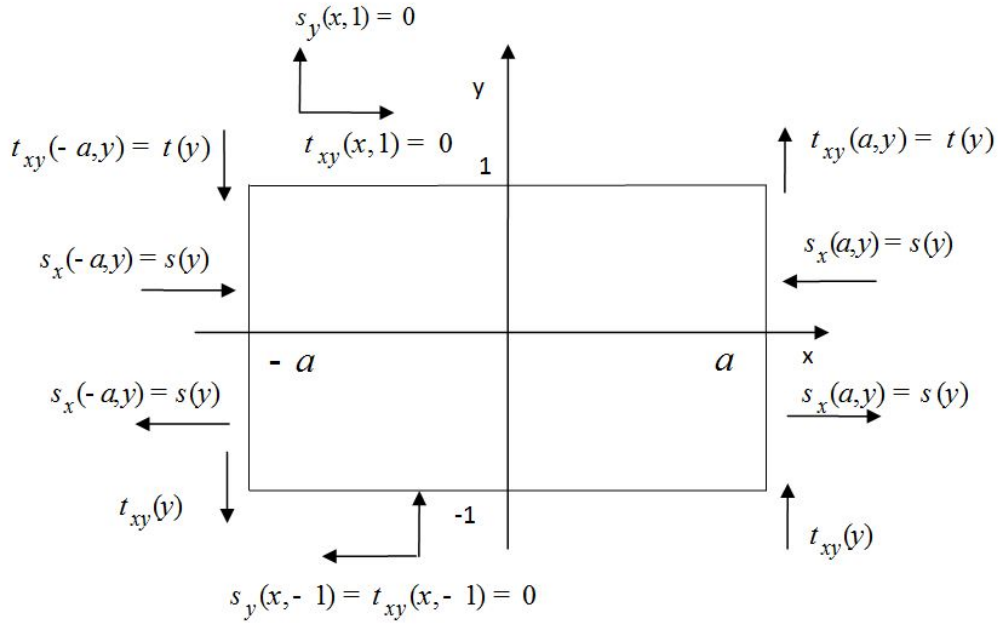


Рис. 1

Решения для прямоугольника, записанные в виде разложений по функциям Фадля – Папковича (без учета элементарного решения), имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) sh \lambda_k x + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) sh \bar{\lambda}_k x, \\
 V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) ch \lambda_k x + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) ch \bar{\lambda}_k x, \\
 \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) ch \lambda_k x + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) ch \bar{\lambda}_k x, \\
 \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) ch \lambda_k x + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) ch \bar{\lambda}_k x, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) sh \lambda_k x + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) sh \bar{\lambda}_k x.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Функции Фадля – Папковича в случае обратно симметричной деформации полуполосы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \xi(\lambda_k, y) &= \left( \sin \lambda_k - \frac{1+\mu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\mu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
 \chi(\lambda_k, y) &= - \left( \frac{1-\mu}{2} \sin \lambda_k + \frac{1+\mu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\mu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
 s_x(\lambda_k, y) &= (1+\mu) \lambda_k \{ (2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \},
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$s_y(\lambda_k, y) = (1 + \mu)\lambda_k^2 \{\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y\},$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = (1 + \mu)\lambda_k \{(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\}.$$

Здесь  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $a_k$  — подлежащие определению коэффициенты разложений. Граничные условия на продольных сторонах выполняются точно, т. к.  $t_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = s_y(\lambda_k, \pm 1) = 0$ , а числа  $\lambda_k$  — множество  $\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$  всех комплексных нулей целой функции

$$L(\lambda) = \lambda - \sin \lambda \cos \lambda. \quad (4)$$

Удовлетворяя граничным условиям на торцах прямоугольника, получим такие разложения:

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k a + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k a, \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k a + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k a. \end{cases} \quad (5)$$

Коэффициенты  $a_k$  находятся отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций  $X_k(y)$ ,  $T_k(y)$ , которые разыскиваются как решения уравнений  $\lambda_k \in \Lambda$  ( $k \geq 1$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)}. \quad (6)$$

Причем,  $s_x(\lambda, y)$ ,  $t_{xy}(\lambda, y)$  — функции, порождающие соответствующие функции Фадля-Папковича при  $\lambda = \lambda_k$ . Биортогональные функции устроены следующим образом: каждая из них представляет собой сумму финитной функции — обратного преобразования Бореля (Фурье) целой функции экспоненциального типа и квазифинитной функции — обратного преобразования Бореля квазицелой функции экспоненциального типа [9], [10]. При определении искомым коэффициентов разложений, как правило, нужны только финитные части биортогональных функций. Техника их построения описана в статье [3]. Финитные части функций  $X_k(y)$ ,  $T_k(y)$ , соответственно, равны ( $|y| \leq 1$ )

$$x_k(y) = \frac{1}{2(1 + \mu)\lambda_k^2} \left( \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \right), \quad t_k(y) = \frac{1}{2(1 + \mu)\lambda_k} \frac{\cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k}. \quad (7)$$

Продолжим равенства (5) на всю вещественную ось следующим образом: функции, стоящие справа — аналитически, а функции, стоящие слева — периодически с периодом, равным 2. После этого спроектируем их на вещественные направления: первое на направление  $X_\nu(y) + \overline{X_\nu(y)}$ , второе — на  $T_\nu(y) + \overline{T_\nu(y)}$  и рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda_k, y) [X_\nu(y) + \overline{X_\nu(y)}] dy, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\lambda_k, y) [T_\nu(y) + \overline{T_\nu(y)}] dy, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y) [X_\nu(y) + \overline{X_\nu(y)}] dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau(y) [T_\nu(y) + \overline{T_\nu(y)}] dy. \quad (9)$$

Интегралы (9), в силу выбранного способа продолжения функций  $\sigma(y)$  и  $\tau(y)$ , будут равны [2], [3], [4]



$$\begin{cases} \sigma_k^* = \int_{-1}^1 \sigma(t) [x_k(t) + \overline{x_k(t)}] dt = \sigma_k + \overline{\sigma_k}, \\ \tau_k^* = \int_{-1}^1 \tau(t) [t_k(t) + \overline{t_k(t)}] dt = \tau_k + \overline{\tau_k}, \end{cases} \quad (10)$$

а интегралы (8) равны

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda_k, y) [X_\nu(y) + \overline{X_\nu(y)}] dy &= \begin{cases} M_\nu & (\lambda_k = \lambda_\nu), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_\nu), \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\overline{\lambda_k}, y) [X_\nu(y) + \overline{X_\nu(y)}] dy &= \begin{cases} \overline{M_\nu} & (\lambda_k = \lambda_\nu), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_\nu), \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\lambda_k, y) [T_\nu(y) + \overline{T_\nu(y)}] dy &= \begin{cases} \lambda_\nu M_\nu & (\lambda_k = \lambda_\nu) \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_\nu), \end{cases}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) [T_\nu(y) + \overline{T_\nu(y)}] dy &= \begin{cases} \overline{\lambda_\nu} \overline{M_\nu} & (\lambda_k = \lambda_\nu), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_\nu). \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда для каждого номера  $k \geq 1$  получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sigma_k = a_k M_k ch \lambda_k a + \overline{a_k} \overline{M_k} ch \overline{\lambda_k} a, \\ \tau_k = a_k \lambda_k M_k sh \lambda_k a + \overline{a_k} \overline{\lambda_k} \overline{M_k} sh \overline{\lambda_k} a, \end{cases} \quad (12)$$

где  $M_k = \sin^2 \lambda_k / \lambda_k$ . Решая систему (12), найдем

$$a_k = \frac{2(\tau_k^* sh \overline{\lambda_k} a - \sigma_k^* \lambda_k sh \overline{\lambda_k} a)}{M_k \delta_k}, \quad (13)$$

где  $\delta_k = sh \lambda_k a \cdot ch \overline{\lambda_k} a - ch \lambda_k a \cdot sh \overline{\lambda_k} a$ .

Подставляя теперь (13) в формулы (2), и избавляясь в них от нуль-рядов (разложений чисто мнимых функций), получим искомые выражения для напряжений и перемещений в прямоугольнике [2], [3], [4]. Ниже они представлены двумя группами формул.

На торцах прямоугольника  $x = \pm a$  заданы нормальные самоуравновешенные напряжения  $\sigma_x(\pm a, y) = \sigma(y)$ , а касательные  $\tau_{xy}(\pm a, y) = 0$ :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k \overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a sh \lambda_k x)}{Im(\lambda_k sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(\overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k x)}{Im(\lambda_k sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{M_k \lambda_k^2} \frac{Im(\lambda_k^2 \overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k x)}{Im(\lambda_k sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k \overline{\lambda_k} sh \overline{\lambda_k} a sh \lambda_k x)}{Im(\lambda_k sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\}, \end{aligned}$$

на торцах прямоугольника  $x = \pm a$  заданы касательные напряжения  $\tau_{xy}(\pm a, y) = \tau(y)$ , а нормальные равны нулю:

$$U(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k ch \overline{\lambda_k} a sh \lambda_k x)}{Im(\lambda_k sh \overline{\lambda_k} a ch \lambda_k a)} \right\},$$

$$V(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{Im(ch\bar{\lambda}_k ach\lambda_k x)}{Im(\bar{\lambda}_k sh\bar{\lambda}_k ach\lambda_k a)} \right\},$$

$$\sigma_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{Im(\lambda_k^2 ch\bar{\lambda}_k ach\lambda_k x)}{Im(\bar{\lambda}_k sh\bar{\lambda}_k ach\lambda_k a)} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{Im(\lambda_k ch\bar{\lambda}_k ash\lambda_k x)}{Im(\bar{\lambda}_k sh\bar{\lambda}_k ach\lambda_k a)} \right\}.$$

Пример 1. Пусть на торце квадрата  $\{P : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  задан изгибающий момент интенсивности 1, т. е.

$$\sigma(y) = \delta'(y). \quad (14)$$

Нормальные напряжения должны быть самоуравновешены по моменту. Если это не так, то их нужно сделать таковыми, воспользовавшись элементарным решением сопротивления материалов. В рассматриваемом примере нормальное напряжение примет вид:

$$\delta'(y) - 3y/2. \quad (15)$$

На рис. 2–6 представлены кривые распределения перемещений и напряжений в сечении  $x = 0.8$ .

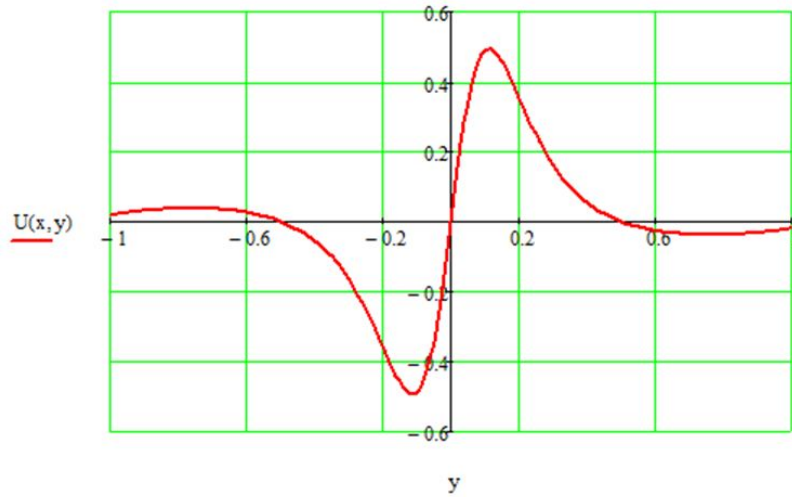


Рис. 2

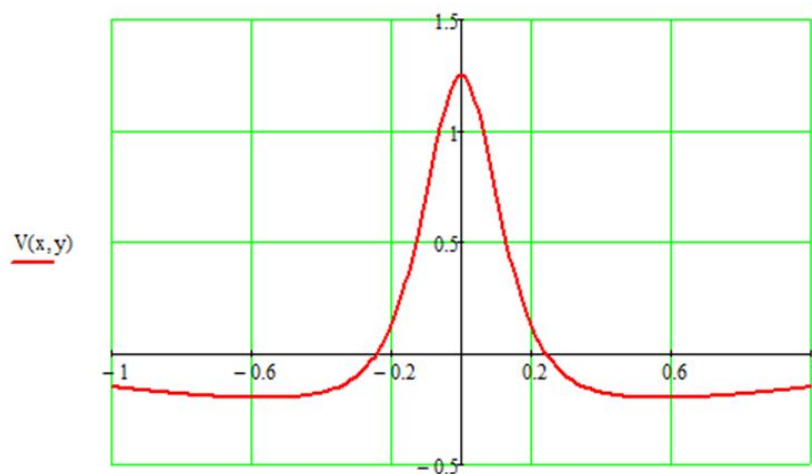


Рис. 3

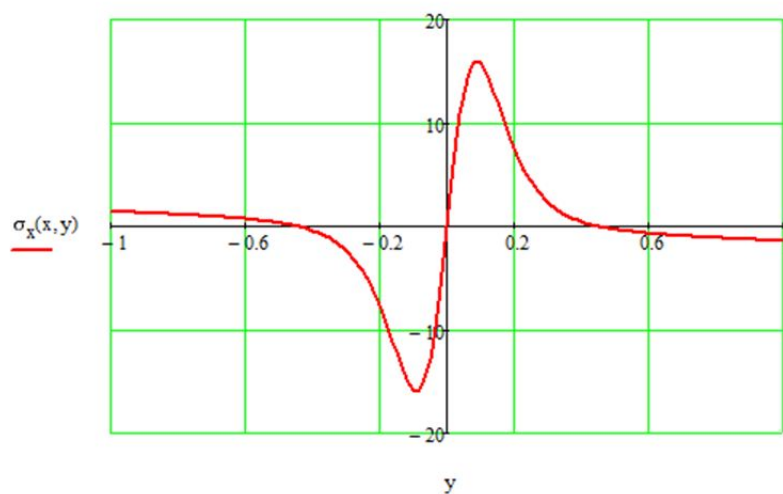


Рис. 4

Пример 2. На торце прямоугольника заданы самоуравновешенные касательные напряжения. Расчетное сечение  $x = 1$ .

$$\tau(y) = -5y^4 + 6y^2 - 1 \tag{16}$$

Найдем числа  $\tau_k$  по формуле (10) и подставим их в выражения (15). Тем самым получим нужное решение. На рис. 7 показаны кривые распределения напряжений (15) на торце полуполосы. Из рис. 7 видно, что касательные напряжения  $\tau_{xy}(0, y)$  совпадают с раскладываемой функцией (8).

**Результаты исследований и их обсуждение.** Даны примеры решения обратно симметричной задачи теории упругости в прямоугольнике, когда две противоположные стороны прямоугольника не нагружены, а на двух других заданы нормальные или касательные напряжения.

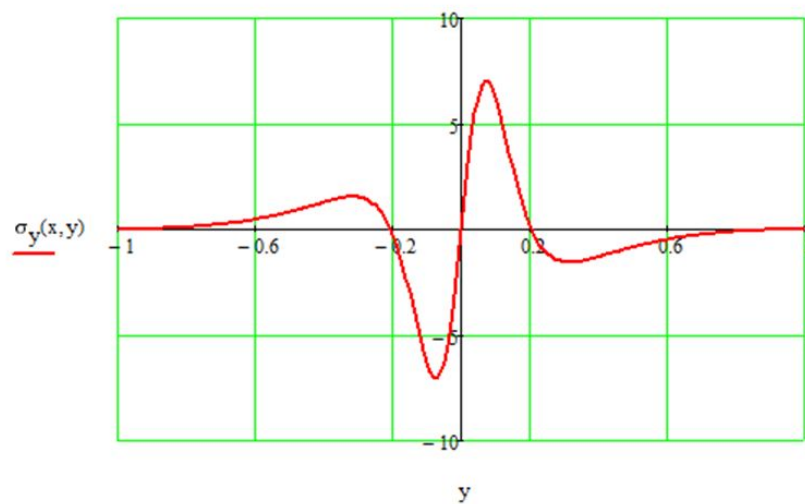


Рис. 5

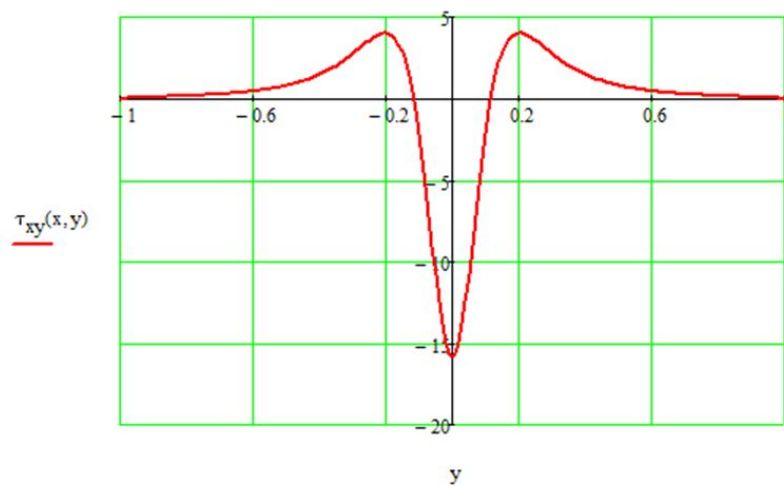


Рис. 6

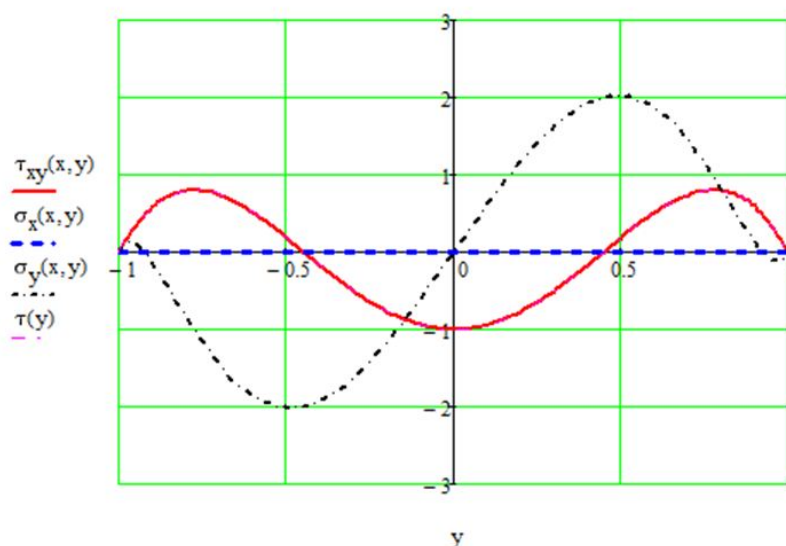


Рис. 7

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Meleshko, V. V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – No. 1. – P. 33–85.
- [2] *Коваленко, М. Д.* Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 78–98.
- [3] *Коваленко, М. Д.* Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [4] *Коваленко, М. Д., Меньшова И. В.* Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы: монография. – Чебоксары : изд-во Чуваш. гос. пед. ун-та, 2014. – 123 с.
- [5] *Меньшова, И. В.* Разложения по функциям Фадля – Папковича в полуполосе. Обратносимметричная задача / И. В. Меньшова, И. А. Семенова, Н. В. Храмова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2 (22). – С. 119–130.
- [6] *Коваленко, М. Д.* Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратносимметричной задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 5(17). – С. 81–89.
- [7] *Семенова, И. А.* Примеры аналитических решений обратно симметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 215–224.
- [8] *Власов, В. В.* Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
- [9] *Коваленко, М. Д., Меньшова И. В.* Интегральное преобразование Бореля в классе квазицелых функций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 3(21). – С. 22–36.

[10] Коваленко, М. Д. О преобразовании Бореля в классе  $W$  квазицелых функций / М. Д. Коваленко // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2001. – № 3. – С. 761–774.

Семенова Ирина Александровна,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: irishka\_g\_05@mail.ru

I. A. Semenova

## EXAMPLES OF ANALYTICAL SOLUTIONS IS INVERSELY SYMMETRIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY IN RECTANGLE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

**Abstract.** The problem of solving the biharmonic equation in a finite canonical domains with corner points of the boundary (biharmonic problem) exists almost 200 years (see the review [1]). Interest in the decisions in the box did not cease ever, reaching a peak in 1940-1980 years. First of all, thanks to the Soviet school of mathematics and mechanics. At this time it was published not less than two thousand works, in one way or another connected with the construction of analytical solutions for the rectangle. But the exact solution was obtained. The task is usually reduced to the infinite system does not decay algebraic solutions. In this paper, based on the methods developed in [2-7], built analytical solution and gives two examples.

**Keywords:** semistrip, rectangle, boundary-value problem, Fadley-Papkovich functions, analytical solutions, antisymmetric boundary-value problem.

### REFERENCES

- [1] *Meleshko, V. V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – P. 33–85.
- [2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadley – Papkovich’s functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98. (in Russian)
- [3] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadley – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158. (in Russian)
- [4] *Kovalenko, M. D.* Analytical solutions of two-dimensional boundary value problems of elasticity theory in finite domains with corner points of the boundary: a monograph. – Cheboksary : Izd Chuvash State Pedagogical University. – 2014. – 123 p. (in Russian)
- [5] *Menshova, I. V.* Decompose in funktsiyamFadlan – Papkovicha in polupolos. Baksimmetrichnoy problems / I. V. Menshova, I. A. Semenova, N. V. Khramova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2014. – № 2 (20). – P. 119–130. (in Russian)
- [6] *Kovalenko, M. D.* Decompose in Lagrange funktsiyamFadlan – Papkovicha in baksimmetrichnoy theories of elasticity for a rectangular semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 5 (15). – P. 81–89. (in Russian)
- [7] *Semenova, I. A.* Examples of analytical solutions is inversely symmetric boundary-value problem of elasticity theory in polopolo / I. A. Semenova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2014. – № 4 (22). – P. 215–224. (in Russian)
- [8] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p. (in Russian)
- [9] *Kovalenko, M. D.* Borel integral transformation in the class of quasi-integral functions / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. – 2014. – № 3 (21). – P. 22–36. (in Russian)
- [10] *Kovalenko, M. D.* Borel transformations in the class W quasi-functions / M. D. Kovalenko // Fundamental and Applied mathematics. – 2001. – № 3. – P. 761–774. (in Russian)

*Semenova, Irina Alexandrovna*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*



Т. К. Абиев

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ЧАСТИЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БЕРЕГОВ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПОЛОСЕ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ

*Азербайджанская государственная академия физической культуры и спорта, г. Баку*

**Аннотация.** Исследовано напряженно-деформированное состояние полосы постоянной толщины, ослабленной сквозной прямолинейной трещиной с частично контактирующими берегами, при неравномерном нагреве. Считается, что однородная изотропная полоса с нецентрально расположенной трещиной подвергается неравномерному нагреву по ширине поперечного сечения. Полагается, что взаимодействие поверхностей трещины под действием тепловой нагрузки может привести к возникновению зоны их налегания. Исследуется случай возникновения участка контакта берегов трещины. Задача о равновесии трещины с частично контактирующими берегами в неравномерно нагретой полосе сводится к задаче линейного сопряжения аналитических функций. Для определения контактных напряжений получено сингулярное интегральное уравнение. Решение сингулярного интегрального уравнения получено в квадратурах. Определены контактные напряжения, размеры участка контакта и концевых зон.

**Ключевые слова:** изотропная полоса, неравномерный нагрев, трещина, концевые зоны, пластические деформации, контактные напряжения.

УДК: 539.375

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругую однородную изотропную полосу постоянной толщины со сквозной нецентрально расположенной прямолинейной трещиной, направленной перпендикулярно к боковым граням полосы. Пусть ослабленная полоса подвергается неравномерному нагреву по ширине поперечного сечения. Принято, что температура является только функцией координаты  $x$  и не зависит от других координат.

Будем использовать систему декартовых координат  $xOy$ . Считается, что декартовы координаты  $(x, y)$  в срединной плоскости полосы являются плоскостью симметрии, а трещина расположена вдоль оси  $x$  при  $a \leq x \leq b$ , где  $a, b$  – абсциссы концов трещины с концевыми зонами (длина трещины  $2l = b - a$ ) (рис. 1). Обозначим через  $2c$  и  $2h$  соответственно ширину и толщину полосы.

Рассматривается модель Леонова – Панасюка – Дагдейла, согласно которой пластическая область сосредоточена в некоторой узкой зоне трещины на продолжении трещины. При этом силы сцепления (связи) сосредоточены в некоторой узкой концевой зоне, размер которой заранее неизвестен и должен быть определен из решения задачи. Принято, что процесс разрушения локализован в концевой зоне, которая рассматривается как часть трещины и сравнима с размером трещины.

Неравномерно нагретая полоса постоянной толщины с трещиной в концевой зоне находится в обобщенном плоско-напряженном состоянии. Между берегами трещины имеют место

пластические деформации в концевых областях  $d_1 = a_1 - a$  и  $d_2 = b - b_1$ . Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется путем введения между берегами трещины зоны пластических деформаций. Размеры концевых зон пластического течения материала при постоянном напряжении (усилии сцепления материала) зависят от вида материала.

Под действием неравномерного нагрева в связях, соединяющих берега трещин в концевых зонах, будут возникать нормальные усилия  $\sigma_y = \sigma_S$ , где  $\sigma_S$  — предел текучести на растяжении. Концевые зоны трещины малы, по сравнению с остальной частью упругой полосы, и их можно мысленно удалить, заменив разрезами со взаимодействующими между собой по некоторому, соответствующему действию удаленного материала, закону поверхностями. Таким образом, в концевых зонах к берегам трещины будут приложены нормальные  $\sigma_y = \sigma_S$  и нулевые касательные усилия. Берега трещины вне концевых зон считаются свободными от внешних нагрузок.

Под действием тепловой нагрузки в зоне сжимающих напряжений на некотором участке  $\lambda_1 \leq x \leq \lambda_2$  ( $a \leq \lambda_1$ ;  $\lambda_2 \leq b$ ) берега трещины войдут в контакт, что приведет к появлению на данном участке берегов трещины контактного напряжения, вне этого участка берега трещины будут свободны от внешних напряжений. Величина контактных напряжений  $p(x)$  и размеры зоны контакта берегов трещины заранее неизвестны и подлежат определению.

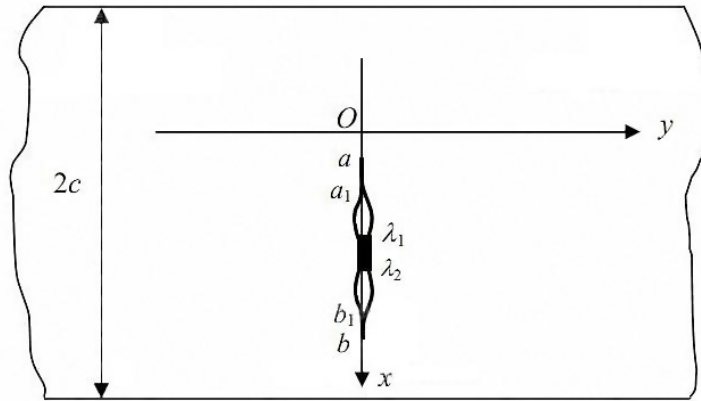


Рис. 1

Краевые условия задачи механики разрушения о частичном закрытии берегов трещины с пластическими деформациями в концевых зонах имеют вид

$$\text{на свободных берегах трещины : } \sigma_y - i\tau_{xy} = 0,$$

$$\text{на берегах концевых зон трещины : } \sigma_y - i\tau_{xy} = \sigma_S, \quad (1)$$

$$\text{на участке контакта берегов трещины : } \sigma_y - i\tau_{xy} = p(x).$$

Необходимо основные уравнения рассматриваемой задачи дополнить условием отсутствия раскрытия трещины в контактной зоне:

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = 0 \text{ при } y = 0, \quad \lambda_1 \leq x \leq \lambda_2. \quad (2)$$

Здесь  $(v^+ - v^-)$  и  $(u^+ - u^-)$  — соответственно, нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов трещины.

**Решение краевой задачи.** Напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины с концевыми зонами будем определять приближенно в том смысле [1], что удовлетворяя краевым условиям задачи на контуре трещины (условиям (1), (2)), требуем, чтобы напряженное состояние в полосе на значительном расстоянии от трещины совпадало с термоупругим состоянием, вызванным неравномерным нагревом, для сплошной бездефектной полосы.

Представим напряженное состояние в виде:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1, \quad (3)$$

где  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  — компоненты тензора напряжений в стержне (полосе) при отсутствии трещины, вызванные неравномерным нагревом;  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  — компоненты напряжений, вызванные наличием трещины с концевыми зонами в полосе.

Для температурных напряжений  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  имеем

$$\sigma_x^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_y^0 = -\alpha ET(x) + \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \alpha ET(x) dx + \frac{3x}{2c^3} \int_{-c}^c \alpha ET(x) x dx.$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения материала полосы;  $E$  — модуль упругости материала;  $T(x)$  — температурная функция.

С учетом (3) и (4) краевое условие (1) примет вид:

$$\text{на свободных берегах трещины } \sigma_y^1 + i\tau_{xy}^1 = f_0(x),$$

$$\text{на берегах концевых зон трещины } \sigma_y^1 + i\tau_{xy}^1 = f_0(x) + \sigma_S, \quad (5)$$

$$\text{на участке контакта берегов трещины } \sigma_y^1 + i\tau_{xy}^1 = f_0(x) + p(x).$$

$$\text{Здесь } f_0(x) = \alpha ET(x) - \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \alpha ET(x) dx - \frac{3x}{2c^3} \int_{-c}^c \alpha ET(x) x dx.$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в условиях плоской теории упругости выражаются [1] через две аналитические функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ . Для определения комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  получаем следующую граничную задачу:

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\Phi'(x) + \Psi(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6)$$

$$\text{где } f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{на свободных берегах трещины} \\ \sigma_S + f_0(x) & \text{на берегах концевых зон трещины} \\ p(x) + f_0(x) & \text{на берегах контактной зоны} \end{cases}.$$

Введем следующую аналитическую функцию

$$\Omega(z) = z\Phi'(z) + \Psi(z).$$

Для определения аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  на основании граничных условий получаем следующую краевую задачу:

$$\text{при } y = 0, \quad a_1 < x < \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \leq x \leq b_1 \quad \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + \Omega(x) = f_0(x),$$

$$\text{при } y = 0, \quad a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b \quad \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + \Omega(x) = \sigma_S + f_0(x), \quad (7)$$

$$\text{при } y = 0, \quad \lambda_1 \leq x \leq \lambda_2 \quad \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + \Omega(x) = p(x) + f_0(x).$$

Учитывая, что напряжения в полосе ограничены, решение граничной задачи (7) ищем в классе всюду ограниченных функций. Поскольку, в силу условий симметрии, относительно оси  $x$  функция  $f_0(x)$  действительна, на основании (7) на всей действительной оси будет

$$\operatorname{Im}\Omega(z) = 0.$$

Учитывая условия на значительном расстоянии от трещины с концевыми зонами, находим

$$\Omega(z) = 0. \quad (8)$$

Следовательно, на основании (8) получаем для функции  $\Phi(z)$  задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0, \quad a_1 < x < \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 < x < b_1 \quad \operatorname{Re}\Phi(z) &= \frac{1}{2}f_0(x), \\ \text{при } y = 0, \quad a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b \quad \operatorname{Re}\Phi(z) &= \frac{1}{2}(\sigma_S + f_0(x)), \\ \text{при } y = 0, \quad \lambda_1 \leq x \leq \lambda_2 \quad \operatorname{Re}\Phi(z) &= \frac{1}{2}(p(x) + f_0(x)), \\ \text{при } z \rightarrow \infty \quad \Phi(z) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничной задаче (9) соответствует следующая задача линейного сопряжения граничных значений:

$$\begin{aligned} \text{на } a_1 < x < \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 < x < b_1 \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) &= f_0(x), \\ \text{на } a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) &= \sigma_S + f_0(x), \\ \text{на } \lambda_1 \leq x \leq \lambda_2 \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) &= p(x) + f_0(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Необходимо найти решение задачи (10), удовлетворяющее условию  $\bar{\Phi}(z) = \Phi(z)$ . Соответствующая однородная задача имеет вид:

$$\text{на } a \leq x \leq b \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) = 0. \quad (11)$$

За частное решение однородной задачи (11) берем функцию

$$X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} \quad (12)$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad X(z) \rightarrow z + O(1/z).$$

Искомое решение неоднородной граничной задачи (10) запишется в виде:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(t)}{X^+(t)(t-z)} dt, \quad \Psi(z) = -z\Phi'(z). \quad (13)$$

Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции (12), выделяемой приведенным условием на верхнем берегу разреза.

Согласно поведению функции  $\Phi(z)$  условие разрешимости граничной задачи имеет вид:

$$\int_a^b \frac{f(t)}{X^+(t)} dt = 0, \quad \int_a^b \frac{tf(t)}{X^+(t)} dt = 0. \quad (14)$$

Уравнения (14) служат для определения неизвестных параметров  $a$  и  $b$ , определяющих размеры концевых зон трещины.

В соотношении для комплексного потенциала под интегралом входят контактные напряжения в контактной зоне. Для полного нахождения комплексных потенциалов требуется найти контактные напряжения  $p(x)$  в контактной зоне. Для определения функций  $p(x)$  рассмотрим формулу [1]

$$2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \kappa \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} + \beta f_*(z), \quad (15)$$

где  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\beta = \alpha E/(1 + \nu)$ ;  $Re f_*(z) = T$ . Выражение  $2\mu (u_* + iv_*) = \beta \int f_*(z) dz$  представляет собой перемещения точек полосы, вызванные неравномерным нагревом в случае сплошной бездефектной полосы.

Используя соотношение (15) и краевые значения функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , получим на отрезке  $a \leq x \leq b$  следующее равенство

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu i}{1 + \kappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) \right]. \quad (16)$$

С помощью формул Сохоцкого – Племеля [2], а также учитывая соотношение (13), находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = X^+(x) \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{f(t)}{X^+(t)(t-x)} dt. \quad (17)$$

Подставляя соотношение (17) в левую часть уравнения (16) и учитывая выражения (2), получаем для определения неизвестной функции  $p(x)$  сингулярное интегральное уравнение

$$\text{при } \lambda_1 \leq x \leq \lambda_2 \quad \int_a^b \frac{f(t)}{X^+(t)(t-x)} dt = 0. \quad (18)$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (18) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [2]. Интегральное уравнение (18) можно представить в виде:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{g(t)}{t-x} dt = f_1(x), \quad (19)$$

где

$$g(t) = \frac{p(t)}{X^+(t)}, \quad f_1(x) = \int_a^b \frac{f_0(t)}{X^+(t)(t-x)} dt + \int_a^{a_1} \frac{\sigma_S}{X^+(t)(t-x)} dt + \int_{b_1}^b \frac{\sigma_S}{X^+(t)(t-x)} dt.$$

Решая сингулярное интегральное уравнение (19) (см. [3] приложение) и удовлетворяя условиям ограниченности контактных напряжений при  $x = \lambda_1$  и  $x = \lambda_2$ , получаем формулы для вычисления контактных напряжений  $p(x)$

$$p(x) = X^+(x) \frac{X_1^+(x)}{\pi i} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{f_1^*(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt, \quad (20)$$

где  $f_1^*(t) = f_1(t)/\pi i$ ;  $X_1(t) = \sqrt{(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)}$ .

При этом требуется, чтобы выполнялись условия разрешимости сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} d\tau = 0, \quad \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\tau f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} d\tau = 0. \quad (21)$$

Уравнения (21) служат для определения неизвестных величин  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Системы уравнений (14) и (21) решались численно методом итераций. Необходимые интегралы, содержащие функции  $X^+(t)$  и  $X_1^+(t)$ , вычислялись приемом, предложенным Н. И. Мухелишвили [1, §110].

На рис. 2 представлены графики распределения контактного напряжения  $p(x)$  вдоль контактной зоны для различных длин трещины. При расчетах были использованы безразмерные координаты  $x'$

$$x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} x'.$$

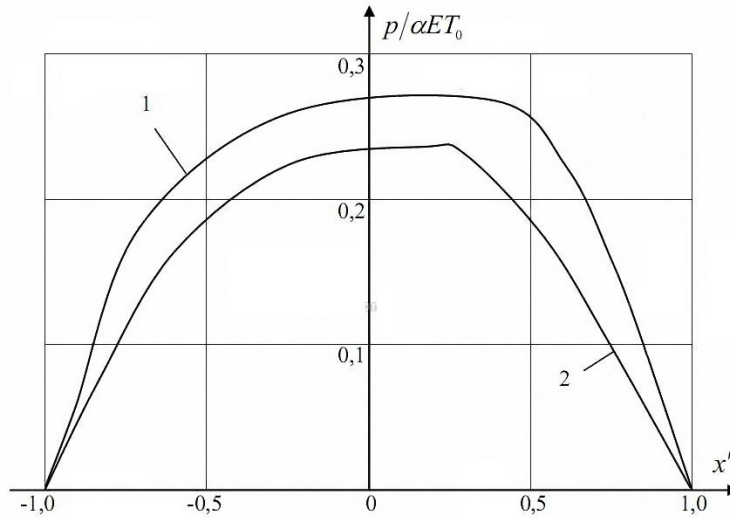


Рис. 2

Наибольшие значения контактных напряжений имеют место в средней части контактной зоны, где берега трещины смыкаются. При увеличении размера концевой зоны пластических деформаций контактные напряжения уменьшаются.

Размеры концевых зон пластических деформаций находятся по формулам  $a_* = a_1 - a$ ,  $b_* = b - b_1$ .

**Предельное состояние полосы.** Для нахождения предельного состояния полосы (стержня) при неравномерном нагреве в качестве критерия разрушения используем критерий критического раскрытия трещины [4]. Используя решение упругопластической задачи, вычисляем перемещения в концевой зоне пластических деформаций

$$\frac{2\mu}{1+\kappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) \right] = -\frac{iX(x)}{\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{X^+(t)(t-x)} dt,$$

$$(a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b).$$

Для перемещений берегов зоны пластических деформаций находим:

$$(u^+(x, 0) - u^-(x, 0)) + i \frac{\partial}{\partial x} (v^+(x, 0) - v^-(x, 0)) = \quad (22)$$

$$= -\frac{1 + \kappa}{2\mu} \int_a^x \left[ X^+(x) \int_a^b \frac{f(t)}{X^+(t)(t-x)} dt \right] dx,$$

$$X^+(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}.$$

Трещина будет расти при выполнении условия

$$V(a_1) = v^+(a_1, 0) - v^-(a_1, 0) = \delta_c,$$

при  $x = a_1$  (у основания пластической зоны) или

$$V(b_1) = \delta_c \text{ при } x = b_1,$$

где  $\delta_c$  — трещиностойкость материала полосы.

Для вычисления интеграла в правой части (22) вначале проводим замену переменных для перехода к отрезку интегрирования  $[-1,1]$ , затем используем квадратурную формулу Чебышева. Полученные уравнения дают возможность при заданных характеристиках материала найти критическое напряженное состояние, при котором происходит рост трещины.

На рис. 3 приведены графики зависимости размеров зоны пластических деформаций  $(b - b_1)/(b_1 - a_1)$  от безразмерной тепловой нагрузки  $\beta_* = \alpha E T_0 / \sigma_s$  ( $T_0$  — характерная температура полосы) при различных значениях длины трещины  $l_* = (b - a)/2c = 0,02; 0,05; 0,10$  (кривые 1-3). В расчетах принималось  $\nu = 0,3$ ; число чебышевских узлов разбиения  $M = 30$ .

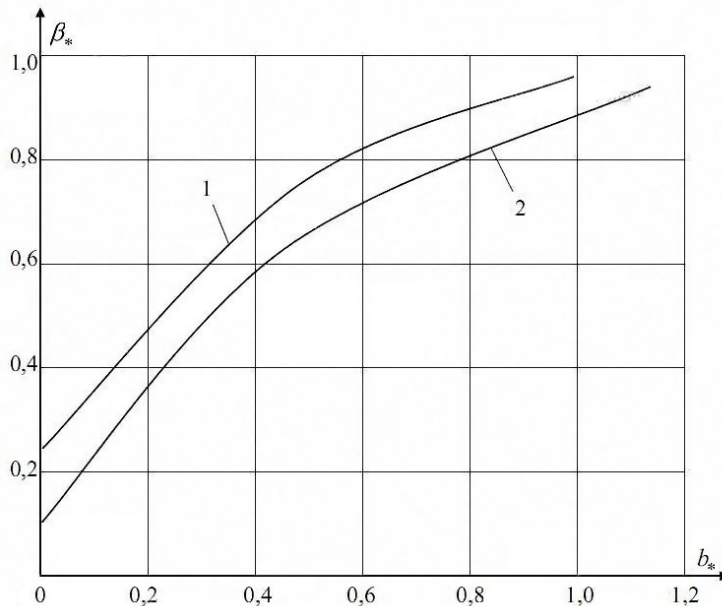


Рис. 3

**Заключение.** Предложена эффективная схема расчета частично закрытой тепловой нагрузкой трещины в полосе. Анализ модели частичного закрытия трещины с концевыми пластическими зонами в изотропной полосе при наличии неравномерного нагрева сводится к

параметрическому исследованию сингулярного интегрального уравнения при различных геометрических и физических характеристиках полосы. Непосредственно из решения полученных уравнений определяются контактные напряжения, размеры контактных и концевых зон пластических деформаций.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [2] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
- [3] *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [4] *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. Киев : Наукова думка, 1991. – 416 с.

*Абиев Тельман Кулам оглы,*

кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой “Высшая математика и вычислительная техника”, Азербайджанская государственная академия физической культуры и спорта, г. Баку

e-mail: nailyak1975@gmail.com



T. K. Abiyev

**CONTACT PROBLEM FOR PARTIAL INTERACTION OF RECTILINEAR  
CRACKS FACES IN THE STRIP AT NON-UNIFORMLY HEATING**

*Azerbaijan State Academy of Physical Culture and Sport, Baku*

**Abstract.** The stress-strain state of a constant thickness strip weakened by rectilinear crack with partially contacting faces, at non-uniformly heating is investigated. It is assumed that the homogeneous isotropic strip with a non-centrally located crack undergoes the non-uniformly heating across the cross section width. It is assumed that the interaction of cracks faces at the action of heat stress can cause the area of its overlap. The case of occurrence of the crack contact zone is investigated. The equilibrium problem for the crack with partially contacting faces in non-uniformly heated strip is reduced to a problem of linear conjugation of analytic functions. Solution of the singular integral equation is obtained in quadratures. The contact stresses, size contact zone and end zones are determined.

**Keywords:** isotropic strip, non-uniformly heating, crack, end zones, plastic deformations, contact stresses.

**REFERENCES**

- [1] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1977. – 707 p. (in Russian)
- [2] *Gakhov, F. D.* Boundary value problems / F. D. Gakhov. – M. : Nauka, 1977. – 640 p. (in Russian)
- [3] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p. (in Russian)
- [4] *Panasyuk, V. V.* Mechanics of quasibrittle fracture of material / V. V. Panasyuk. – Kiev : Naukova Dumka, 1991. – 416 p. (in Russian)

*Abiyev, Telman Kulam ogly*

*PhD, Assoc. Professor, Head of Department "Higher Mathematics and Computer Engineering",  
Azerbaijan State Academy of Physical Culture and Sport, Azerbaijan, Baku*

И. В. Меньшова

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ФАЙЛОНА – РИБЬЕРА В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской  
академии наук, г. Москва*

**Аннотация.** Приводятся периодические решения (в тригонометрических рядах) краевых задач теории упругости для полуполосы в случае симметричной и обратно-симметричной деформаций. Решения даются для двух возможных типов продолжений в полуплоскость: 1) на продольных сторонах полуполосы заданы нулевые поперечные перемещения и касательные напряжения; 2) на продольных сторонах полуполосы равны нулю продольные перемещения и нормальные напряжения. Используются два подхода: традиционный способ решения задачи в перемещениях и решение на основе метода начальных функций (в частности, обратный метод). В том случае, когда на торце полуполосы заданы сосредоточенные нагрузки, представимые дельта-функцией (нормальная сосредоточенная сила, сосредоточенная касательная нагрузка) или ее первой производной (сосредоточенный изгибающий момент, сосредоточенный диполь), ряды можно свернуть в замкнутые выражения. Подробно рассмотрены некоторые особенности построения решений.

**Ключевые слова:** краевая задача, периодические решения Файлона – Рибьера, полуполоса, метод начальных функций, обратный метод.

УДК: 539.3

**Актуальность исследуемой проблемы.** Решения в тригонометрических рядах (Файлона – Рибьера), в силу своей простоты, доступности и наглядности, приобрели необыкновенную популярность. Вместе с тем, трудно указать источник, в котором бы эти решения были рассмотрены с необходимой полнотой. Кроме того, несмотря на кажущуюся простоту, построение решений иногда связано с определенными трудностями, некоторые из которых отражены в работе. В статье наряду с классическим подходом к построению решений показывается, как те же проблемы могут быть достаточно просто и эффективно решены с помощью метода начальных функций.

**Введение.** Решения даются в полуполосе  $\{P^+ : x \geq 0; |y| \leq 1\}$  для двух типов граничных условий на продольных сторонах полуполосы  $y = \pm 1$ :

$$v(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0 \quad (1)$$

и

$$u(x, \pm 1) = \sigma_y(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $u, v$  — соответственно продольное (в направлении оси  $x$ ) и поперечное (в направлении оси  $y$ ) перемещения. Для каждого из граничных условий (1), (2) рассмотрены симметричная

---

Поступила 10.03.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00118, 15-41-02644).

и обратно симметричная задачи: итого четыре задачи для полуполосы с заданными на ее торце нормальными и касательными напряжениями.

В действительности, правильнее говорить о периодическом решении краевой задачи в полуплоскости, когда граничные условия (1) или (2) являются условиями периодичности решения. В этом случае в угловых точках полуполосы  $\{x = 0, y = \pm 1\}$  известны значения не только определенных там функций, но и всех их производных по  $y$ , т. е. угловые точки входят в решение вместе с  $y$ -окрестностью. При решении краевой задачи в полуполосе, как таковой, (например, первой основной задачи теории упругости) для обеспечения единственности решения в угловых точках полуполосы должны быть заданы некоторые дополнительные условия [1]. Эти условия определяются, в частности, тем, как решение из правой полуполосы  $\Pi^+$  продолжается в левую полуполосу  $\{\Pi^- : x \leq 0; |y| \leq 1\}$ : с какими граничными условиями на продольных сторонах полуполосы  $\Pi^-$  [2]. Можно показать, что в классических решениях Файлона – Рибьера неявно предполагается, что тип граничных условий при продолжении решения из полуполосы  $\Pi^+$  в полуполосу  $\Pi^-$  не меняется.

Решения Файлона – Рибьера могут служить удобным средством проверки новых решений в полуполосе со свободными, защемленными, подкрепленными ребрами жесткости продольными сторонами, т. е. в тех случаях, когда решение краевой задачи представляется в виде разложений по функциям Фадля – Папковича [3].

Обычная схема решения периодической краевой задачи в полуполосе состоит в следующем. С помощью известных зависимостей закона Гука между напряжениями и перемещениями для плоского напряженного состояния

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2}{1-\nu} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial V}{\partial y} \right); \\ \sigma_y = \frac{2}{1-\nu} \left( \frac{\partial V}{\partial y} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right); \\ \tau_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

запишем уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

в таком виде

$$\begin{cases} \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0; \\ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $U = Gu$ ,  $V = Gv$ ,  $G$  – модуль упругости при сдвиге,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Вводя функцию перемещений  $F(x, y)$  по формулам:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ V &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (6)$$

и подставляя (6) в (5), тождественно удовлетворим первому уравнению системы (5), а из второго получим бигармоническое уравнение для функции  $F(x, y)$ :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0. \quad (7)$$

Зависимости для напряжений через функцию перемещений найдем согласно (6) и (3):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( (2 + \nu) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Если же разрешающую функцию  $F(x, y)$  ввести по формулам:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ V(x, y) &= -\frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (9)$$

то тождественно удовлетворится второе уравнение системы (5), а из первого получим бигармоническое уравнение (7). В этом случае формулы для напряжений будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (2 + \nu) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Разыскивая решение уравнения (7) в виде

$$F(x, y) = \phi(y)e^{\lambda x}, \quad (11)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\phi^{IV}(y) + 2\lambda^2 \phi''(y) + \lambda^4 \phi(y) = 0. \quad (12)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет два двукратных корня  $\pm i\lambda$ , которым отвечает функция

$$\phi(y) = (C_1 + C_2 y) \sin \lambda y + (C_3 + C_4 y) \cos \lambda y, \quad (13)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные.

Для удобства разделим задачу на симметричную и обратно симметричную.

**Симметричная задача (симметричное продолжение в правую полуплоскость).** Будем считать, что деформация полуполосы симметрична относительно оси  $x$ . Схема приложения нормальной и касательной нагрузок на торце полуполосы, а также способ продолжения решения во всю правую полуплоскость показаны на рис. 1.

Рассмотрим два варианта построения решения: 1) когда функция перемещений вводится по формулам (6) и 2) когда функция перемещений вводится формулами (9). В силу симметрии задачи,  $V(x, y), \tau_{xy}(x, y)$  — нечетные, а  $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), U(x, y)$  — четные функции по

переменной  $y$ . Поэтому в первом случае  $\phi(y)$  в формуле (11) должна быть нечетной функцией, а во втором – четной. Следовательно, в первом случае

$$F(x, y) = (C_1 \sin \lambda y + C_4 y \cos \lambda y)e^{\lambda x}, \quad (14)$$

а во втором

$$F(x, y) = (C_3 \cos \lambda y + C_2 y \sin \lambda y)e^{\lambda x}. \quad (15)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1) с помощью формул (6), (8), получим систему из двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $C_1, C_4$ :

$$\begin{cases} C_1(1 + \nu)\lambda^2 \sin \lambda + C_4\lambda((1 + \nu)\lambda \cos \lambda - 2(1 - \nu) \sin \lambda) = 0; \\ C_1(1 + \nu)\lambda^3 \sin \lambda + C_4\lambda^3((1 + \nu)\lambda \cos \lambda + 2\nu \sin \lambda) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

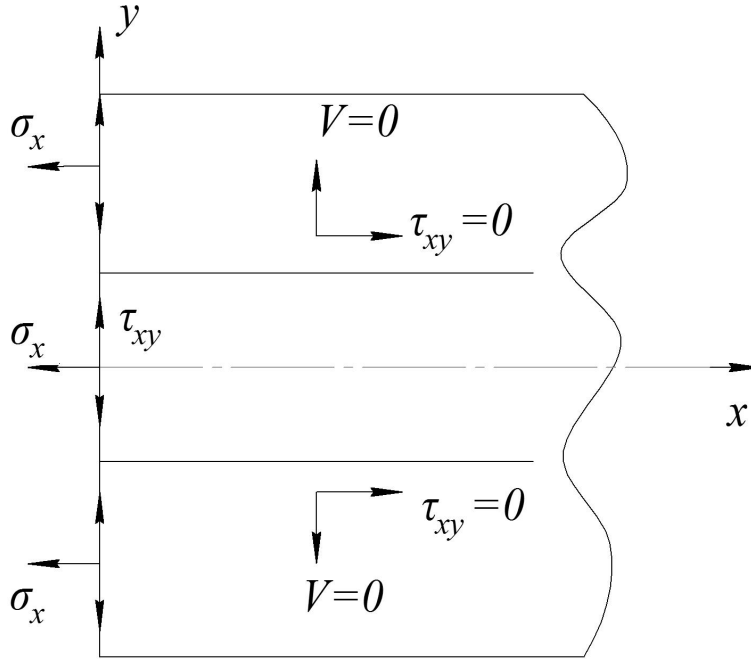


Рис. 1. Симметричная деформация полуполосы: схема приложения внешней нагрузки и способ продолжения решения в правую полуплоскость

Приравнявая к нулю определитель системы (18), приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^4 \sin^2 \lambda = 0, \quad (17)$$

которое имеет шесть нулевых корней и бесконечное множество корней  $\pm k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) кратности 2.

Выразим из первого уравнения системы (18)  $C_4$  через  $C_1$  и подставим в выражение (13), полагая  $C_2 = C_3 = 0$ ,

$$\phi(y) = C_1 \left\{ \sin \lambda y - \frac{(1 + \nu)\lambda^2 \sin \lambda}{\lambda((1 + \nu)\lambda \cos \lambda - 2(1 - \nu) \sin \lambda)} y \cos \lambda y \right\}. \quad (18)$$

Полагая  $\lambda = q_k = -k\pi$ , получим соответствующее числам  $q_k$  выражение для собственных функций краевой задачи, которое можно записать так:  $\phi_k(y) = C_k \sin q_k y$ . А принимая в (18)  $\lambda \rightarrow 0$ , получим значение собственной функции, отвечающей корню  $\lambda = 0$ :  $\phi_0(y) = 0$ . Тогда, в силу двукратности чисел  $q_k$ , функция  $F(x, y)$  принимает вид:

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k x) \sin q_k y e^{q_k x}. \quad (19)$$

Подставляя ее в формулы (6) и (8), найдем выражения для перемещений и напряжений. Заметим, что функция (21) не содержит той части решения, которая отвечает нулевым корням характеристического уравнения (17). Следовательно, его не будет и в формулах для перемещений и напряжений в полуполосе:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k(1 + q_k x)) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \frac{1+\nu}{2} q_k + B_k \left( 2 + \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) \right) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2 + (1+\nu)q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2(2+\nu) + (1+\nu)q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(3+\nu + (1+\nu)q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользуемся теперь представлением (17) для функции  $F(x, y)$ . Выразив перемещения и напряжения через  $F(x, y)$  по формулам (9), (10) и удовлетворяя граничным условиям (1), получим следующую систему из двух однородных уравнений относительно  $C_2, C_3$ :

$$\begin{cases} C_2(\sin \lambda + \lambda \cos \lambda) \lambda - C_3 \lambda^2 \sin \lambda = 0; \\ C_2((\nu - 3)\lambda^2 \sin \lambda + (\nu - 1)\lambda^3 \cos \lambda) + C_3(1 - \nu)\lambda^3 \sin \lambda = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Характеристическое уравнение системы (23) совпадает с характеристическим уравнением системы (17).

Выразив из первого уравнения (23)  $C_2$  через  $C_3$  и подставив в формулу (13), полагая  $C_1 = C_4 = 0$ , получим

$$\phi(y) = C_3 \left\{ \frac{\lambda \sin \lambda}{\sin \lambda + \lambda \cos \lambda} y \sin \lambda y + \cos \lambda y \right\}. \quad (22)$$

При  $\lambda = q_k$  собственные функции, соответствующие этим числам, можно представить как  $\phi_k(y) = C_k \cos q_k y$ . А при  $\lambda = 0$   $\phi_0(y) = C_3$ . Учитывая двукратность чисел  $q_k$  и шестикратность нулевого корня, функцию  $F(x, y)$  запишем так:

$$F(x, y) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* + B_k^* x) \cos q_k y e^{q_k x}. \quad (23)$$

Полиномиальная часть функции (25) будет удовлетворять бигармоническому уравнению (7), если только  $e = f = 0$ . Подставляя (25) в формулы (9), (10), найдем формулы для перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= (1 - \nu)(c + 3dx) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k^* \frac{1 + \nu}{2} q_k + B_k^* (\nu - 1 + \frac{1 + \nu}{2} q_k x) \right) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\
V(x, y) &= \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* q_k + B_k^* (1 + q_k x)) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= 6d - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* (1 + \nu) q_k + B_k^* (\nu - 1 + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \nu 6d + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* (1 + \nu) q_k + B_k^* (1 + 3\nu + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* (1 + \nu) q_k + B_k^* (2\nu + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Если в формулах (27) принять  $B_k^* = B_k$ ,  $A_k^* = A_k + \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \frac{B_k}{q_k}$ , то они совпадут с соответствующими формулами (22), за исключением элементарного (полиномиального) решения, которое в (20) не содержится. Вводя новые обозначения  $(1 - \nu)c = B_0$  (жесткое смещение),  $6d = A_0$ , придем к следующим формулам для напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= B_0 + \frac{1 - \nu}{2} A_0 x - \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k (1 + q_k x)) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \frac{1 + \nu}{2} q_k + B_k (2 + \frac{1 + \nu}{2} q_k x) \right) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (2 + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \nu A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (2(2 + \nu) + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (3 + \nu + (1 + \nu) q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Пусть на торце полуполосы заданы касательное  $\tau(y)$  и нормальное  $\sigma(y)$  напряжения:

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \tag{26}$$

Удовлетворяя с помощью (25) граничным условиям (26), приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов  $A_0$ ,  $A_k$  и  $B_k$  из разложений:

$$\begin{cases} A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + 2B_k) q_k^2 \cos q_k y = \sigma(y); \\ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1 + \nu) q_k + B_k (3 + \nu)) q_k^2 \sin q_k y = \tau(y). \end{cases} \tag{27}$$

Пользуясь свойством ортогональности тригонометрических систем функций  $\{\cos \lambda_k y\}_{k=0}^{\infty}$  и  $\{\sin \lambda_k y\}_{k=1}^{\infty}$  [4], найдем

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(y) dy, \tag{28}$$

а для определения коэффициентов  $A_k$  и  $B_k$  получим систему из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \sigma_k = -(1 + \nu)A_k q_k^3 - 2B_k q_k^2; \\ \tau_k = (1 + \nu)A_k q_k^3 + (3 + \nu)B_k q_k^2. \end{cases} \quad (29)$$

Откуда

$$A_k = -\frac{(\nu + 3)\sigma_k + 2\tau_k}{(1 + \nu)^2 q_k^3}, \quad B_k = \frac{\sigma_k + \tau_k}{(1 + \nu)q_k^2}. \quad (30)$$

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) \cos q_k y dy, \quad \tau_k = \int_{-1}^1 \tau(y) \sin q_k y dy. \quad (31)$$

Рассмотрим два примера.

*Пример 1.* На торце полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные представлены сосредоточенной силой, действующей вдоль оси симметрии полуполосы. Будем считать, что интенсивность сосредоточенной силы равна  $P$ . Тогда граничные условия на торце полуполосы имеют вид:

$$\sigma_x(0, y) = P\delta(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad (32)$$

где  $\delta(y)$  — это дельта-функция.

Числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 P\delta(y) \cos q_k y dy = P, \quad \tau_k = 0. \quad (33)$$

В силу (28) и (30):

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P\delta(y) dy = \frac{1}{2}P, \quad A_k = -\frac{(3 + \nu)P}{(1 + \nu)^2 q_k^3}, \quad B_k = \frac{P}{(1 + \nu)q_k^2}. \quad (34)$$

Окончательные формулы для перемещений и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= B_0 + \frac{(1 - \nu)P}{4}x + \frac{P}{1 + \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{q_k} - \frac{1 + \nu}{2}x \right) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= \frac{P}{2(1 + \nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \nu}{q_k} + (1 + \nu)x \right) \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2}P + P \sum_{k=1}^{\infty} (1 - q_k x) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{\nu}{2}P + P \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= Px \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (35)$$

Ряды (35) можно свернуть, воспользовавшись [5]. В результате получим:

$$U(x, y) = B_0 + \frac{2 - \nu}{4}Px - \frac{P}{2(1 + \nu)} \left( x + \frac{1}{\pi} \ln(2(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y)) \right) + \frac{Px}{4} \frac{\operatorname{sh}\pi x}{\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y},$$



$$\begin{aligned}
V(x, y) &= -\frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \frac{P}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - e^{-\pi x}} - Px \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - ch\pi x}, \\
\sigma_x(x, y) &= \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P \left( \frac{-1 + ch\pi x \cos \pi y}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \pi x + \frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y} + 1 \right), \\
\sigma_y(x, y) &= \frac{1}{2}\nu P - \frac{1}{2}P \left( \frac{1 - ch\pi x \cos \pi y}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \pi x + \frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y} + 1 \right), \\
\tau_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{2}P \frac{\sin \pi y sh\pi x}{(\cos \pi y - ch\pi x)^2} \pi x.
\end{aligned} \tag{36}$$

На рис. 2 для иллюстрации приведены графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_x(x, y)$  в сечении полуполосы  $x = 0.1$  (кривые практически не различимы), вычисленные по формулам (35) (сплошная кривая) и (36) (пунктир).

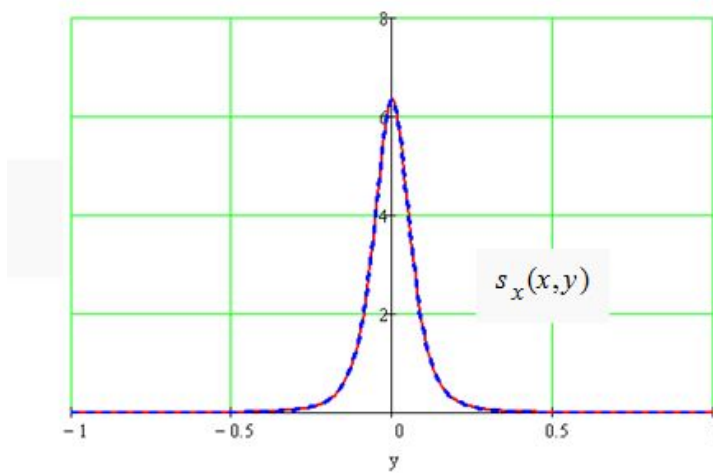


Рис. 2

*Пример 2.* На торце полуполосы нормальные напряжения равны нулю, а касательные представлены сосредоточенным диполем интенсивности  $Q$ , приложенным в начале координат:

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = Q\delta'(y). \tag{37}$$

В этом случае

$$\sigma_k = 0, \quad \tau_k = \int_{-1}^1 Q\delta'(y) \sin q_k y dy = -Qq_k. \tag{38}$$

Тогда

$$A_0 = 0, \quad A_k = \frac{2Q}{(1+\nu)^2 q_k^2}, \quad B_k = -\frac{Q}{(1+\nu)q_k}. \tag{39}$$

Формулы для перемещений и напряжений будут следующими:

$$U(x, y) = B_0 - \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} - q_k x \right) \cos q_k y e^{q_k x}, \quad V(x, y) = -Q \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2} q_k x \right) \sin q_k y e^{q_k x},$$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= Q \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 x \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (2 + q_k x) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) q_k \sin q_k y e^{q_k x}.\end{aligned}\tag{40}$$

Пользуясь [5] и просуммировав полученные ряды, получим:

$$\begin{aligned}U(x, y) &= B_0 + \frac{Q}{4} \left[ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left( \frac{sh \pi x}{ch \pi x - \cos \pi y} + 1 \right) - \pi x \frac{1 - ch \pi x \cos \pi y}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right], \\ V(x, y) &= \frac{Q}{2} \left[ \frac{1}{1 + \nu} \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - ch \pi x} + \frac{\pi x}{2} \frac{sh \pi x \sin \pi y}{(\cos \pi y - ch \pi x)^2} \right], \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{Q}{2} x \frac{\pi^2 sh \pi x (\cos^2 \pi y + ch \pi x \cos \pi y - 2)}{(ch \pi x - \cos \pi y)^3}, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{Q}{2} \left( 2\pi \frac{1 - ch \pi x \cos \pi y}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} - \pi^2 x \frac{sh \pi x (\cos^2 \pi y + ch \pi x \cos \pi y - 2)}{(\cos \pi y - ch \pi x)^3} \right), \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{Q}{2} \pi \sin \pi y \left[ \frac{sh \pi x}{(\cos \pi y - ch \pi x)^2} + \pi x \frac{ch^2 \pi x + \cos \pi y ch \pi x - 2}{(\cos \pi y - ch \pi x)^3} \right].\end{aligned}\tag{41}$$

На рис. 3 показаны практически не различимые графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_x(x, y)$  в сечении полуполосы  $x = 0.1$ , вычисленные по формулам (40) (сплошная кривая) и (41) (пунктир).

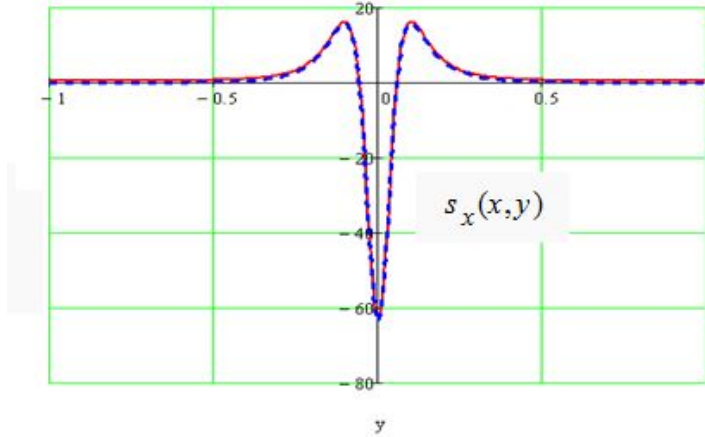


Рис. 3

**Обратно симметричная задача (обратно симметричное продолжение в полуплоскость).** Рассмотрим обратно симметричную деформацию полуполосы при тех же граничных условиях (1) на ее продольных сторонах. Схема приложения нормальной и касательной нагрузок на торце полуполосы, а также способ продолжения решения во всю правую полуплоскость показаны на рис. 4

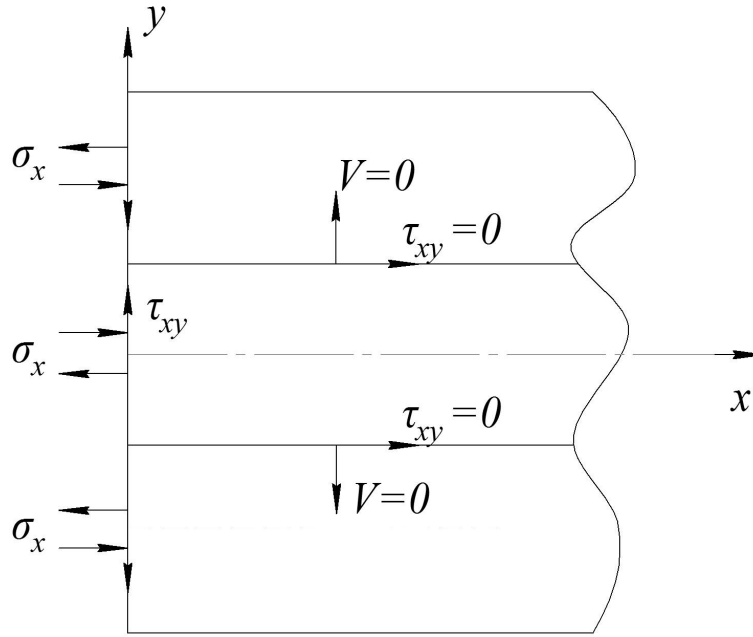


Рис. 4. Обратносимметричная деформация полуполосы: схема приложения внешней нагрузки и способ продолжения решения в правую полуплоскость

Как и в случае симметричной задачи для полуполосы, рассмотрим два варианта построения решения: 1) когда функция перемещений вводится по формулам (6) и 2) когда функция перемещений вводится формулами (9). По симметрии задачи,  $V(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$  — четные, а  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$ ,  $U(x, y)$  — нечетные функции относительно  $y$ . Поэтому в первом случае  $\phi(y)$  в формуле (11) должна быть четной функцией, а во втором — нечетной. Следовательно, в первом случае

$$F(x, y) = (C_2 y \sin \lambda y + C_3 \cos \lambda y) e^{\lambda x}, \quad (42)$$

а во втором

$$F(x, y) = (C_3 \cos \lambda y + C_2 y \sin \lambda y) e^{\lambda x}. \quad (43)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1) с помощью формул (6), (8), получим систему из двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $C_2, C_3$ :

$$\begin{cases} C_2 \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda^2 \sin \lambda + (1-\nu) \lambda \cos \lambda \right) + C_3 \frac{1+\nu}{2} \lambda^2 \cos \lambda = 0; \\ C_2 \left( (1+\nu) \lambda^3 \sin \lambda - 2\nu \lambda^2 \cos \lambda \right) + C_3 (1+\nu) \lambda^3 \cos \lambda = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Приравняв к нулю ее определитель, приходим к характеристическому уравнению краевой задачи

$$\lambda^4 \cos^2 \lambda = 0, \quad (45)$$

которое имеет четыре нулевых корня и бесконечное множество корней вида  $\pm(2k-1)\pi/2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , кратности 2.

Выразим из первого уравнения системы (44)  $C_2$  через  $C_3$  и подставим в выражение (42) для функции  $\phi(y)$ :

$$\phi(y) = \frac{-(1+\nu)\lambda y \cos \lambda \sin \lambda y + ((1+\nu)\lambda \sin \lambda + 2(1-\nu) \cos \lambda) \cos \lambda y}{(1+\nu)\lambda \sin \lambda + 2(1-\nu) \cos \lambda} C_3. \quad (46)$$

Полагая здесь вначале  $\lambda = 0$  и затем  $\lambda = \pm(2k-1)\pi/2$ , найдем вид собственных функций, отвечающих корням уравнения (45). Их можно представить так:  $\phi_0(y) = C_0$ ,  $\phi_k(y) = C_k \cos \lambda_k y$ ,  $\lambda_k = -(2k-1)\pi/2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда функция  $F(x, y)$  принимает вид

$$F(x, y) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \quad (47)$$

Подставляя (47) в формулы (6), (8) и проверяя выполнение граничных условий (1), получим:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \lambda_k + B_k (1 + \lambda_k x)) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \frac{1+\nu}{2} \lambda_k + B_k \left( 2 + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k x \right) \right) \lambda_k \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (2 + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (2(2+\nu) + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (3+\nu + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \end{aligned} \quad (48)$$

Воспользуемся теперь представлением (43) для функции перемещений и формулами (9), (10) для перемещений и напряжений. Из граничных условий (1) получим систему алгебраических однородных уравнений относительно  $C_1, C_4$

$$\begin{cases} C_1 \lambda^2 \cos \lambda + C_4 \lambda (\cos \lambda - \lambda \sin \lambda) = 0; \\ C_1 (1+\nu) \lambda^3 \cos \lambda + C_4 \lambda^2 ((3+\nu) \cos \lambda - (1+\nu) \lambda \sin \lambda) = 0 \end{cases} \quad (49)$$

с тем же характеристическим уравнением (45). Выразим из первого уравнения системы (49)  $C_4$  через  $C_1$  и подставим в (43). Тогда получим следующее выражение для функции  $\phi(y)$ :

$$\phi(y) = \left\{ \sin \lambda y + \frac{\lambda^2 \cos \lambda}{\lambda^2 \sin \lambda - \lambda \cos \lambda} y \cos \lambda y \right\} C_1. \quad (50)$$

Принимая здесь  $\lambda = 0$ , найдем собственную функцию, отвечающую нулевым корням характеристического уравнения,  $\phi_0(y) = 0$ , а при  $\lambda = \lambda_k$  — собственные функции, соответствующие корням  $\lambda_k$ ,  $\phi_k(y) = C_k \sin \lambda_k y$ . Тогда функция  $F(x, y)$  принимает вид

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* + B_k^* x) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \quad (51)$$

Тогда можно сделать вывод, что в окончательных решениях краевой задачи элементарное решение будет отсутствовать. Используя свойство ортогональности тригонометрических систем функций, имеем:

$$A_k = \frac{(n+3)s_k - 2t_k}{(1+n)2l_k^3}, \quad B_k = \frac{-s_k + t_k}{(1+n)2l_k^2}.$$

Подставляя эти формулы в (48), найдем окончательные выражения для напряжений и перемещений, являющиеся решением краевой задачи.

Рассмотрим два примера.

*Пример 3.* Пусть на торце полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные представлены сосредоточенным моментом интенсивности  $M$ . Тогда граничные условия на торце полуполосы имеют вид:

$$\sigma_x(0, y) = M\delta'(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (52)$$

Удовлетворяя граничным условиям (52) и пользуясь свойством ортогональности тригонометрических рядов, для каждого номера  $k \geq 1$  получим систему из двух алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений  $A_k, B_k$

$$\begin{cases} \sigma_k = (1 + \nu)A_k\lambda_k^3 + 2B_k\lambda_k^2; \\ \tau_k = (1 + \nu)A_k\lambda_k^3 + (3 + \nu)B_k\lambda_k^2, \end{cases} \quad (53)$$

где числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 M\delta'(y) \sin \lambda_k y dy = -M\lambda_k, \quad \tau_k = 0. \quad (54)$$

Вставляя найденные значения для  $A_k, B_k$  в формулы (48), получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{M}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{1 + \nu} - \lambda_k x \right) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ V(x, y) &= \frac{M}{2(1 + \nu)} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \nu + (1 + \nu)\lambda_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= -M \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k x) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= -M \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k x) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= Mx \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}. \end{aligned} \quad (55)$$

Эти ряды можно свернуть:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= M \left[ -\frac{1}{1 + \nu} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y} + \frac{1}{4} \pi x \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x (\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y) - 2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x \operatorname{sh} \pi x}{(\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y)^2} \right] \sin \frac{\pi}{2} y, \\ V(x, y) &= -\frac{M}{2} \left[ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y} + \frac{1}{2} \pi x \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x (\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y) - 2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x \operatorname{sh} \pi x}{(\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y)^2} \right] \cos \frac{\pi}{2} y, \\ \sigma_x(x, y) &= -\frac{3}{2} M y - M \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} y \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x (\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y) - 2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x \operatorname{sh} \pi x}{(\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi y)^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - x \frac{\pi}{2} \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y)^2 - 4ch \frac{3\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) + 8sh^2 \pi x ch \frac{\pi}{2} x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^3} \right\}. \quad (56)$$

$$\sigma_y(x, y) = -\frac{3}{2} \nu M y - M \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} y \left\{ \frac{sh \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} + \right. \\ \left. + x \frac{\pi}{2} \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y)^2 - 4ch \frac{3\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) + 8sh^2 \pi x ch \frac{\pi}{2} x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^3} \right\}.$$

$$\tau_{xy}(x, y) = M \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x \frac{(3ch \pi x + \cos \pi y)(ch \pi x - \cos \pi y) + 8ch^2 \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y - 4sh^2 \frac{\pi}{2} x)}{(ch \pi x - \cos \pi y)^3} x.$$

*Пример 4.* На торце полуполосы нормальные напряжения равны нулю, а касательные представлены сосредоточенной перерезывающей силой интенсивности  $Q$ , т. е.

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = Q \delta(y). \quad (57)$$

На этот раз

$$\sigma_k = 0, \quad \tau_k = \int_{-1}^1 Q \delta(y) \cos \lambda_k y dy = Q, \quad (58)$$

а формулы для перемещений и напряжений имеют вид:

$$U(x, y) = \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\nu - 1}{(1 + \nu) \lambda_k} + x \right) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ V(x, y) = \frac{Q}{1 + \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} + \frac{1 + \nu}{2} x \right) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_x(x, y) = Q \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \quad (59) \\ \sigma_y(x, y) = -Q \sum_{k=1}^{\infty} (2 + \lambda_k x) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) = Q \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}.$$

Или, в свернутом виде:

$$U(x, y) = \frac{Q}{2} \left[ \frac{1 - \nu}{\pi(1 + \nu)} \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi}{2} y}{sh \frac{\pi}{2} x} + x \frac{\sin \frac{\pi}{2} y ch \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right], \\ V(x, y) = \frac{Q}{1 + \nu} \left[ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{ch \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} y}{ch \frac{\pi}{2} x - \cos \frac{\pi}{2} y} - x \frac{1 + \nu}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right],$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= Q \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} y \frac{sh \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2}, \\ \sigma_y(x, y) &= -Q \left( 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2} y ch \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} + \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} y \frac{sh \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right), \\ \tau_{xy}(x, y) &= -Q \left[ \frac{\cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} + \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{2} y \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2sh \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

**Симметричная задача (обратно симметричное продолжение в правую полу-плоскость).** Пусть теперь на длинных сторонах полулопосы  $y = \pm 1$  равны нулю нормальные напряжения  $\sigma_y$  и продольные перемещения  $u$ , т. е. выполняются условия (2).

Будем считать, что на торце полулопосы приложены нормальные и касательные напряжения, соответственно, четная и нечетная функции. Тогда деформация полулопосы симметрична относительно оси  $x$ , и поэтому  $V(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$  — нечетные, а  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$ ,  $U(x, y)$  — четные функции по  $y$ . Схема приложения внешней нагрузки на торце полулопосы и схема продолжения решения в правую полулопоску так, что выполняются условия периодичности (2), показаны на рис. 5.

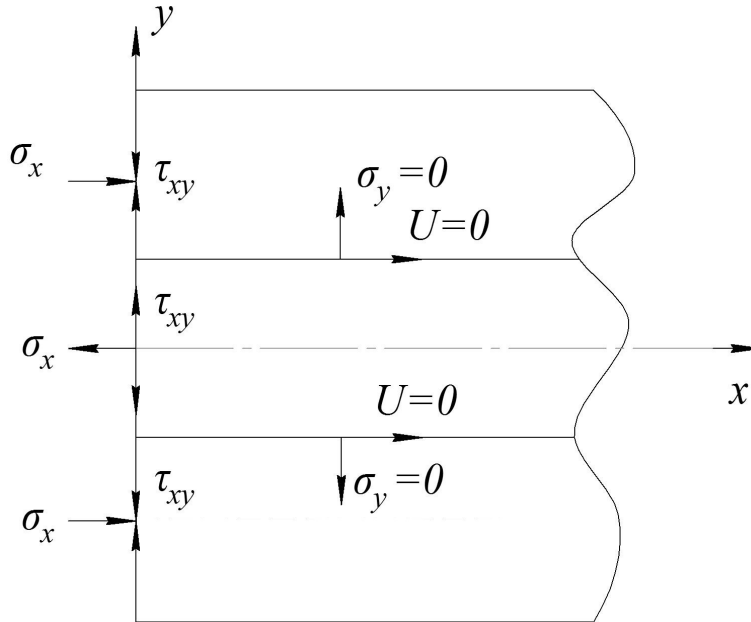


Рис. 5. Симметричная деформация полулопосы: схема приложения внешней нагрузки и способ продолжения решения в правую полулопоску

Следовательно, в том случае, когда функция  $F(x, y)$  (11) связана с перемещениями и напряжениями формул (6), (8),  $\phi(y)$  должна быть нечетной функцией, т. е.  $F(x, y)$  нужно взять в виде (16), а если функция напряжений вводится по формулам (9), (10), то ее следует взять в виде (17).

Удовлетворив граничным условиям на продольных сторонах полуполосы (2), получим систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_1$  и  $C_4$ . Приравнявая к нулю ее определитель, получим характеристическое уравнение (45).

Окончательные выражения для перемещений и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= -\frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \lambda_k + B_k (1 + \lambda_k x)) \lambda_k \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \frac{1+\nu}{2} \lambda_k + B_k \left( 1 + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k x \right) \right) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (2 + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (2(2+\nu) + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (1+\nu) \lambda_k + B_k (3+\nu + (1+\nu) \lambda_k x)) \lambda_k^2 \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Такие же формулы получим и в том случае, когда функция перемещений берется в виде (17), а перемещения и напряжения находятся по формулам (9), (10).

*Пример 5.* Пусть на торце полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения представлены сосредоточенной силой, действующей вдоль оси симметрии полуполосы. Интенсивность силы равна  $P$ . Тогда граничные условия на торце полуполосы имеют вид:

$$\sigma_x(0, y) = P\delta(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0. \tag{62}$$

Удовлетворяя с помощью формул (61) граничным условиям (62) и пользуясь свойством ортогональности тригонометрических рядов, найдем

$$A_k = -\frac{(3+\nu)P}{(1+\nu)^2 \lambda_k^3}, \quad B_k = \frac{P}{(1+\nu) \lambda_k^2}. \tag{63}$$

Формулы (61) принимают такой вид:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \frac{P}{1+\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1+\nu}{2} x \right) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
V(x, y) &= \frac{P}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1-\nu}{\lambda_k} + (1+\nu)x \right) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= P \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= P \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k x) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= Px \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}.
\end{aligned} \tag{64}$$

Сворачивая ряды, получим:



$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \frac{P}{1 + \nu} \left[ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{ch \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} y}{ch \frac{\pi}{2} x - \cos \frac{\pi}{2} y} + x \frac{1 + \nu}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right], \\
V(x, y) &= \frac{P}{2} \left[ -\frac{1 - \nu}{\pi(1 + \nu)} \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi}{2} y}{sh \frac{\pi}{2} x} + x \frac{\sin \frac{\pi}{2} y ch \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right], \\
\sigma_x(x, y) &= -P \left( \frac{\cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} - \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{2} y \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2 sh \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right), \\
\sigma_y(x, y) &= -P \left( \frac{\cos \frac{\pi}{2} y sh \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} + \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{2} y \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2 sh \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right), \\
\tau_{xy}(x, y) &= -P \frac{\pi}{2} x sh \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} y \frac{2 ch^2 \frac{\pi}{2} x + 1 + \cos \pi y}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2}.
\end{aligned} \tag{65}$$

*Пример 6.* Нормальные напряжения на торце полуполосы равны нулю, а касательные представлены сосредоточенным диполем интенсивности  $Q$ , приложенным в начале координат:

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = Q \delta'(y). \tag{66}$$

В этом случае

$$A_k = \frac{2Q}{(1 + \nu)^2 \lambda_k^2}, \quad B_k = -\frac{Q}{(1 + \nu) \lambda_k}. \tag{67}$$

А формулы для напряжений и перемещений принимают вид:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= -\frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \nu}{1 + \nu} - \lambda_k x \right) \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
V(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \nu} + \frac{1}{2} \lambda_k x \right) \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= Q \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 x \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (2 + \lambda_k x) \lambda_k \cos \lambda_k y e^{\lambda_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k x) \lambda_k \sin \lambda_k y e^{\lambda_k x},
\end{aligned} \tag{68}$$

или в свернутом виде:

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \frac{Q}{2} \left[ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{sh \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} - \frac{\pi}{2} x \frac{ch \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2 sh \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right] \cos \frac{\pi}{2} y, \\
V(x, y) &= -Q \left[ \frac{1}{1 + \nu} \frac{ch \frac{\pi}{2} x}{ch \pi x - \cos \pi y} + \frac{\pi}{4} x \frac{sh \frac{\pi}{2} x (ch \pi x - \cos \pi y) - 2 ch \frac{\pi}{2} x sh \pi x}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right] \sin \frac{\pi}{2} y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x, y) &= Qx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2} y \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x \frac{(3\operatorname{ch}\pi x + \cos \pi y)(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y) + 8\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2} x (\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y - 4\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} x)}{(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y)^3}, \\
\sigma_y(x, y) &= Q \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} y \left\{ 2 \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x (\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y) - 2\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x \operatorname{sh} \pi x}{(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y)^2} - \right. \\
&\quad \left. - x \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x \frac{(3\operatorname{ch}\pi x + \cos \pi y)(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y) + 8\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2} x (\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y - 4\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} x)}{(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y)^3} \right\}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= -Q \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} y \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x (\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y) - 2\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x \operatorname{sh} \pi x}{(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y)^2} + \right. \\
&\quad \left. + x \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x \frac{(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y)^2 - 4\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} x (\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y) + 8\operatorname{sh}^2 \pi x \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x}{(\operatorname{ch}\pi x - \cos \pi y)^3} \right\}.
\end{aligned} \tag{69}$$

**Обратно симметричная задача (обратно симметричное продолжение в правую полуплоскость).** Граничные условия для полуплоскости и способ продолжения решения в правую полуплоскость показаны ниже на рис. 6.

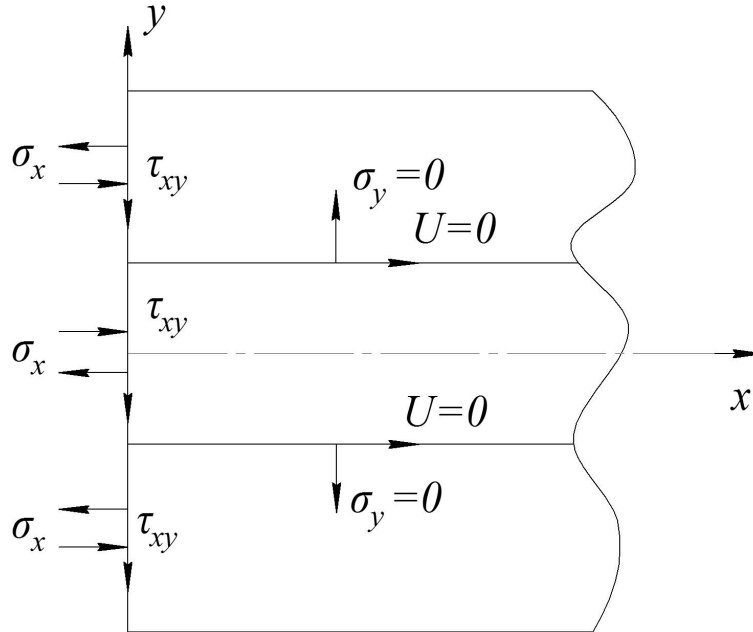


Рис. 6. Обратно симметричная деформация полуплоскости: схема приложения внешней нагрузки и способ продолжения решения в правую полуплоскость

Приведем окончательное решение задачи. Заметим, что если функцию перемещений (11) вводить по формулам (9), то полиномиальная часть решения в приводимых ниже формулах теряется:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \frac{1+\nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_k + B_k(1+q_k x)) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 V(x, y) &= A_0 x + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \frac{1+\nu}{2} q_k + B_k \left( 2 + \frac{1+\nu}{2} q_k x \right) \right) q_k \cos q_k y e^{q_k x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2+(1+\nu)q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(2(2+\nu) + (1+\nu)q_k x)) q_k^2 \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(1+\nu)q_k + B_k(3+\nu + (1+\nu)q_k x)) q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}.
 \end{aligned} \tag{70}$$

*Пример 7.* Пусть на торце полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения представлены сосредоточенным моментом интенсивности  $M$ . Тогда граничные условия на торце полуполосы имеют вид:

$$\sigma_x(0, y) = M\delta'(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0. \tag{71}$$

Удовлетворяя граничным условиям на торце полуполосы и пользуясь свойством ортогональности на отрезке  $[-1, 1]$  тригонометрических систем функций, найдем

$$A_0 = 0, \quad A_k = -\frac{(3+\nu)M}{(1+\nu)^2 q_k^2}, \quad B_k = \frac{M}{(1+\nu)q_k}. \tag{72}$$

Окончательные формулы имеют вид ( $B_0$  - жесткое смещение):

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= -\frac{M}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{1+\nu} - q_k x \right) \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 V(x, y) &= B_0 + \frac{M}{2(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\nu + (1+\nu)q_k x) \cos q_k y e^{q_k x}, \\
 \sigma_x(x, y) &= -M \sum_{k=1}^{\infty} (1-q_k x) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 \sigma_y(x, y) &= -M \sum_{k=1}^{\infty} (1+q_k x) q_k \sin q_k y e^{q_k x}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= Mx \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 \cos q_k y e^{q_k x}.
 \end{aligned} \tag{73}$$

Сворачивая ряды, получим:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= -\frac{M}{4} \left[ \frac{2}{1+\nu} \frac{1}{ch\pi x - \cos \pi y} + \pi x \frac{sh\pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \right] \sin \pi y, \\
 V(x, y) &= B_0 - \frac{M}{4} \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} \left( \frac{sh\pi x}{ch\pi x - \cos \pi y} + 1 \right) + \pi x \frac{ch\pi x(ch\pi x - \cos \pi y) - sh^2 \pi x}{(ch\pi x - \cos \pi y)^2} \right],
 \end{aligned}$$

$$\sigma_x(x, y) = M \frac{\pi}{2} \sin \pi y \left( \frac{sh \pi x}{(\cos \pi y - ch \pi x)^2} - x \pi \frac{ch \pi x (\cos \pi y - ch \pi x) + 2sh^2 \pi x}{(\cos \pi y - ch \pi x)^3} \right). \quad (74)$$

$$\sigma_y(x, y) = M \frac{\pi}{2} \sin \pi y \left( \frac{sh \pi x}{(\cos \pi y - ch \pi x)^2} + x \pi \frac{ch \pi x (\cos \pi y - ch \pi x) + 2sh^2 \pi x}{(\cos \pi y - ch \pi x)^3} \right).$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} M \pi^2 x sh \pi x \frac{2 - \cos \pi y ch \pi x - \cos^2 \pi y}{(ch \pi x - \cos \pi y)^3}.$$

*Пример 8.* Пусть на торце полуполосы нормальные напряжения равны нулю, а касательные представлены сосредоточенной перерезывающей силой интенсивности  $Q$ , т.е. при  $x = 0$

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = Q \delta(y). \quad (75)$$

В этом случае

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Q \delta(y) dy = \frac{1}{2} Q, \quad A_k = -\frac{2Q}{(1 + \nu)^2 q_k^3}, \quad B_k = \frac{Q}{(1 + \nu) q_k^2}. \quad (76)$$

А формулы для перемещений и напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{Q}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\nu - 1}{(1 + \nu) q_k} + x \right) \sin q_k y e^{q_k x}, \\ V(x, y) &= \frac{1}{2} Q x + B_0 + \frac{Q}{1 + \nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{q_k} + \frac{1 + \nu}{2} x \right) \cos q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= Q \sum_{k=1}^{\infty} q_k x \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= -Q \sum_{k=1}^{\infty} (2 + q_k x) \sin q_k y e^{q_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2} Q + Q \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q_k x) \cos q_k y e^{q_k x}. \end{aligned} \quad (77)$$

В свернутом виде эти формулы выглядят так:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{Q}{2} \left[ \frac{1 - \nu}{\pi(1 + \nu)} \operatorname{arctg} \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - e^{-\pi x}} - \frac{x}{2} \frac{\sin \pi y}{\cos \pi y - ch \pi x} \right], \\ V(x, y) &= B_0 - \frac{Q}{4} \left[ \frac{1 - \nu}{\nu + 1} x + \frac{2}{\pi(\nu + 1)} \ln(2(ch \pi x - \cos \pi y)) + x \frac{sh \pi x}{ch \pi x - \cos \pi y} \right], \\ \sigma_x(x, y) &= -Q \frac{\pi}{2} x \sin \pi y \frac{sh \pi x}{(\cos \pi y - ch \pi x)^2}, \\ \sigma_y(x, y) &= -Q \left( \frac{1}{\cos \pi y - ch \pi x} + \frac{\pi}{2} x \frac{sh \pi x}{(\cos \pi y - ch \pi x)^2} \right) \sin \pi y, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{Q}{2} \left( \frac{sh \pi x}{ch \pi x - \cos \pi y} + 1 + \pi x \frac{1 - ch \pi x \cos \pi y}{(ch \pi x - \cos \pi y)^2} \right). \end{aligned} \quad (78)$$

**Использование метода начальных функций при определении элементарных решений.** Как можно было заметить, смотря по тому, каким образом вводится функция перемещений: с помощью формул (6) или же на основании (9), полиномиальная часть решения может быть потеряна. Метод начальных функций (МНФ) [6] позволяет упростить построение

элементарного решения, однако и в этом случае его можно потерять. Построим элементарное решение для всех четырех рассмотренных выше задач, пользуясь МНФ.

*Симметричная задача (симметричное продолжение в правую полуплоскость).* Обозначим, как это принято в МНФ,  $U(x, y) = Gu(x, y)$ ,  $V(x, y) = Gv(x, y)$ ,  $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$ ,  $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$ ,  $\alpha = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $G$  — модуль сдвига. Граничные условия (1), записанные по МНФ, имеют вид

$$\begin{cases} L_{VU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{VY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0, \\ L_{XU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{XY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0. \end{cases} \quad (79)$$

Здесь  $L_{VU}(1)$  и т. д. — дифференциальные операторы МНФ, определенные при  $y = 1$ ,  $U_0(x)$ ,  $V_0(x)$  — начальные функции [6].

В выражениях для дифференциальных операторов бесконечного порядка (79) ограничимся только первыми членами разложений в ряд Тейлора по степеням  $\alpha$ :

$$L_{VU}(\alpha, 1) = -\nu\alpha + \dots, \quad L_{XU}(\alpha, 1) = -2(1 + \nu)\alpha^2 + \dots, \quad (80)$$

$$L_{VY}(\alpha, 1) = \frac{1 - \nu}{2} + \dots, \quad L_{XY}(\alpha, 1) = -\nu\alpha + \dots$$

Введем разрешающую функцию  $\Phi(x)$  по формулам:

$$U_0(x) = -L_{VY}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad Y_0(x) = L_{VU}(\alpha, 1)\Phi(x). \quad (81)$$

Тогда первое уравнение системы (79) удовлетворится тождественно, а из второго получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\nu^2\alpha^2\Phi(x) = 0, \quad (82)$$

решение которого

$$\Phi(x) = a + bx. \quad (83)$$

А начальные функции (81)

$$U_0(x) = -\frac{1 - \nu}{2}(a + bx), \quad Y_0(x) = -\nu b. \quad (84)$$

Полиномиальную часть решения найдем по общим зависимостям МНФ:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= L_{UU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{UY}(\alpha, y)Y_0(x), \\ V(x, y) &= L_{VU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{VY}(\alpha, y)Y_0(x), \\ \sigma_x(x, y) &= A_U(\alpha, y)U_0(x) + A_Y(\alpha, y)Y_0(x), \\ Y(x, y) &= L_{YU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, y)Y_0(x), \end{aligned} \quad (85)$$

$$X(x, y) = L_{XU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{XY}(\alpha, y)Y_0(x),$$

оставляя в выражениях для операторов только первые члены разложений по степеням  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} L_{UU}(\alpha, y) &= 1 - \dots, \quad L_{VU}(\alpha, y) = -\nu\alpha y + \dots, \quad L_{YU}(\alpha, y) = (1 + \nu)\alpha^3 y^2 + \dots, \\ L_{UY}(\alpha, y) &= -\frac{1 + \nu}{4}\alpha y^2 + \dots, \quad L_{VY}(\alpha, y) = \frac{1 - \nu}{2}y + \dots, \quad L_{YY}(\alpha, y) = 1 + \dots, \end{aligned} \quad (86)$$

$$L_{XU}(\alpha, y) = -2(1 + \nu)\alpha^2 y + \dots, \quad L_{XY}(\alpha, y) = -\nu\alpha y + \dots,$$

$$A_U(\alpha, y) = 2(1 + \nu)\alpha \dots, \quad A_Y(\alpha, y) = \nu + \dots$$

Тогда получим

$$U(x, y) = -\frac{1 - \nu}{2}(a + bx), \quad V(x, y) = 0,$$

$$\sigma_x(x, y) = -b, \quad Y(x, y) = -\nu b, \quad X(x, y) = 0. \quad (87)$$

Если же разрешающую функцию  $\Phi(x)$  ввести по формулам

$$U_0 = -L_{XY}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad Y_0 = L_{XU}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad (88)$$

то второе уравнение (79) удовлетворится тождественно, а из первого уравнения получим уравнение (82). В этом случае начальные функции равны

$$U_0 = \nu b, \quad Y_0 = 0, \quad (89)$$

и полиномиальная часть решения теряется.

*Обратно симметричная задача (обратно симметричное продолжение в правую полуплоскость).* В случае обратно симметричной деформации полуполосы граничные условия (1), записанные по МНФ, принимают вид:

$$\begin{cases} L_{VV}(\alpha, 1)V_0(x) + L_{VX}(\alpha, 1)X_0(x) = 0; \\ L_{XV}(\alpha, 1)V_0(x) + L_{XX}(\alpha, 1)X_0(x) = 0, \end{cases} \quad (90)$$

где

$$L_{VV}(\alpha, 1) = 1 + \dots, \quad L_{VX}(\alpha, 1) = -\alpha + \dots, \quad (91)$$

$$L_{XV}(\alpha, 1) = (1 + \nu)\alpha^3 + \dots, \quad L_{XX}(\alpha, 1) = 1 - \dots$$

Подставляя (91) в (90), можно заметить, что определитель этой системы не имеет нулевых корней. Поэтому элементарного решения не будет.

*Симметричная задача (обратно симметричное продолжение в правую полуплоскость).* Записанные по МНФ граничные условия (2) имеют вид

$$\begin{cases} L_{UU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{UY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0; \\ L_{YU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0, \end{cases} \quad (92)$$

где

$$L_{UU}(\alpha, 1) = 1 - \dots, \quad L_{UY}(\alpha, 1) = -\frac{1}{4}(1 + \nu)\alpha^2 y + \dots, \quad (93)$$

$$L_{YU}(\alpha, 1) = (1 + \nu)\alpha^3 y^2 - \dots, \quad L_{YY}(\alpha, 1) = 1 + \dots$$

Тогда можно заметить, что определитель системы (92) не будет иметь нулевых корней, поэтому элементарного решения не будет.

*Обратно симметричная задача (симметричное продолжение в правую полуплоскость).* Граничные условия (2) в форме МНФ будут такими

$$\begin{cases} L_{UV}(\alpha, 1)V_0(x) + L_{UX}(\alpha, 1)X_0(x) = 0; \\ L_{YV}(\alpha, 1)V_0(x) + L_{YX}(\alpha, 1)X_0(x) = 0, \end{cases} \quad (94)$$

причем

$$\begin{aligned} L_{UV}(\alpha, 1) &= -\alpha + \dots, \quad L_{UX}(\alpha, 1) = 1 - \dots, \\ L_{YV}(\alpha, 1) &= -\frac{1+\nu}{3}\alpha^4 + \dots, \quad L_{YX}(\alpha, 1) = -\alpha + \dots \end{aligned} \quad (95)$$

Введем разрешающую функцию  $\Phi(x)$  по формулам:

$$V_0(x) = -L_{UX}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad X_0(x) = L_{UV}(\alpha, 1)\Phi(x). \quad (96)$$

Тогда второе уравнение системы (94) удовлетворится тождественно, а из первого получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\alpha^2\Phi(x) = 0, \quad (97)$$

решение которого представляется функцией (83). Найдем начальные функции

$$V_0(x) = -(a + bx), \quad X_0(x) = -b, \quad (98)$$

а затем элементарное решение по формулам:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= L_{UV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{UX}(\alpha, y)X_0(x), \\ V(x, y) &= L_{VV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{VX}(\alpha, y)X_0(x), \\ \sigma_x(x, y) &= A_V(\alpha, y)V_0(x) + A_X(\alpha, y)X_0(x), \\ Y(x, y) &= L_{YV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{YX}(\alpha, y)X_0(x), \\ X(x, y) &= L_{XV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{XX}(\alpha, y)X_0(x). \end{aligned} \quad (99)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= 0, \quad V(x, y) = -(a + bx), \quad \sigma_x(x, y) = 0, \\ Y(x, y) &= 0, \quad X(x, y) = -b. \end{aligned} \quad (100)$$

Если же разрешающую функцию  $\Phi(x)$  вводить по формулам

$$V_0(x) = -L_{YX}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad X_0(1) = L_{YV}(\alpha, 1)\Phi(x), \quad (101)$$

то первое уравнение системы (94) удовлетворится тождественно, а из второго вновь получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (97), но начальные функции теперь будут равны

$$V_0(x) = -b, \quad X_0(x) = 0. \quad (102)$$

Подставляя их в общие зависимости МНФ (99), получим нулевое элементарное решение.

**Обратный метод в периодической задаче для прямоугольника.** Решения в тригонометрических рядах удобно строить с помощью МНФ обратным методом [6]. Покажем, как это делается на одном примере. Рассмотрим задачу равновесия для прямоугольной пластины  $\{|x| \leq l, |y| \leq h\}$  шириной  $2h$ , длиной  $2l$ . Предположим, что на ее краях выполняются следующие граничные условия:

– на торцах:

$$u(\pm l, y) = \tau_{xy}(\pm l, y) = 0, \quad (103)$$

– на продольных сторонах:

$$\sigma_y(x, \pm h) = \sigma_y(x), \quad \tau_{xy}(x, \pm h) = 0. \quad (104)$$

Рассматривая симметричную относительно осей  $x, y$  деформацию прямоугольника, следует считать, что начальные функции

$$V_0(x) = X_0(x) = 0. \quad (105)$$

Решение задачи будем искать в виде тригонометрических рядов, задаваясь начальными функциями в форме следующих рядов:

$$Y_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^0 \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad U_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^0 \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (106)$$

$Y_n^0, U_n^0, n = 0, 1, 2, \dots$ , — неизвестные коэффициенты разложений. Подставляя зависимости (106) в формулы (85), получим:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{\infty} (K_{UU}^n(y)U_n^0 + K_{UY}^n(y)Y_n^0) \sin \frac{n\pi}{l} x; \\ V &= V_0 + \frac{1-\nu}{2} Y_0^0 y + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{VU}^n(y)U_n^0 + K_{VY}^n(y)Y_n^0) \cos \frac{n\pi}{l} x; \\ Y &= Y_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{YU}^n(y)U_n^0 + K_{YY}^n(y)Y_n^0) \cos \frac{n\pi}{l} x; \\ X &= \sum_{n=1}^{\infty} (K_{XU}^n(y)U_n^0 + K_{XY}^n(y)Y_n^0) \sin \frac{n\pi}{l} x; \\ \sigma_x &= \nu Y_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_U^n(y)U_n^0 + A_Y^n(y)Y_n^0) \cos \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (107)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{UU}^n &= K_{XX}^n = ch \frac{n\pi}{l} y + \frac{1+\nu}{2} \frac{n\pi}{l} y sh \frac{n\pi}{l} y; \\ K_{UV}^n &= -K_{YX}^n = \frac{1}{2} \left[ (1-\nu) sh \frac{n\pi}{l} y + (1+\nu) \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right]; \\ K_{UY}^n &= -K_{VX}^n = \frac{1+\nu}{4} y sh \frac{n\pi}{l} y; \\ K_{UX}^n &= \frac{1}{4} \left[ \frac{(3-\nu)l}{n\pi} sh \frac{n\pi}{l} y + (1+\nu) y ch \frac{n\pi}{l} y \right]; \\ K_{VU}^n &= -K_{XY}^n = \frac{1}{2} \left[ (1-\nu) sh \frac{n\pi}{l} y - (1+\nu) \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right]; \\ K_{VV}^n &= K_{YY}^n = ch \frac{n\pi}{l} y - \frac{1+\nu}{2} \frac{n\pi}{l} y sh \frac{n\pi}{l} y; \\ K_{VY}^n &= \frac{1}{4} \left[ \frac{(3-\nu)l}{n\pi} sh \frac{n\pi}{l} y - (1+\nu) y ch \frac{n\pi}{l} y \right]; \\ K_{YU}^n &= -K_{XV}^n = -(1+\nu) \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 y sh \frac{n\pi}{l} y; \\ K_{YV}^n &= (1+\nu) \frac{n\pi}{l} \left( sh \frac{n\pi}{l} y - \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right); \\ K_{XU}^n &= (1+\nu) \frac{n\pi}{l} \left( sh \frac{n\pi}{l} y + \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right); \\ A_U^n &= (1+\nu) \frac{n\pi}{l} \left( 2ch \frac{n\pi}{l} y + \frac{n\pi}{l} y sh \frac{n\pi}{l} y \right); \\ A_V^n &= (1+\nu) \frac{n\pi}{l} \left( sh \frac{n\pi}{l} y + \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right); \end{aligned} \quad (108)$$



$$A_Y^n = \nu ch \frac{n\pi}{l} y + \frac{1 + \nu}{2} \frac{n\pi}{l} y sh \frac{n\pi}{l} y;$$

$$A_X^n = \frac{1}{2} \left[ (3 + \nu) sh \frac{n\pi}{l} y + (1 + \nu) \frac{n\pi}{l} y ch \frac{n\pi}{l} y \right].$$

Решение (107) можно интерпретировать, как решение для бесконечной в направлении оси  $x$  полосы, периодически нагруженной по продольным краям  $y = \pm h$  нормальными или касательными нагрузками, которые симметрично приложены с периодом  $l$ . В этом случае полоса разбивается на отдельные пролеты длиной  $l$ , причем в каждом из них по симметрии реализуется одно и то же распределение перемещений и напряжений, а на их границах обращаются в нуль нечетные функции перемещений и напряжений, т. е. выполняются условия (103).

Коэффициенты  $Y_n^0$  и  $U_n^0$  определим, удовлетворяя граничным условиям на продольных сторонах (104):

$$\begin{cases} L_{YU}(\alpha, h) U_0(x) + L_{YY}(\alpha, h) Y_0(x) = \sigma_y(x); \\ L_{XU}(\alpha, h) U_0 + L_{XY}(\alpha, h) Y_0 = 0 \end{cases} \quad (109)$$

или

$$\begin{cases} Y_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{YU}^n(h) U_n^0 + K_{YY}^n(h) Y_n^0) \cos \frac{n\pi}{l} x = \sigma_y(x); \\ \sum_{n=1}^{\infty} (K_{XU}^n(h) U_n^0 + K_{XY}^n(h) Y_n^0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0. \end{cases} \quad (110)$$

Пользуясь свойством ортогональности тригонометрических рядов, найдем их. Определим, например,  $Y_0^0$ . Для этого проинтегрируем первое равенство (110) от  $-l$  до  $l$ . Учитывая, что все косинусы ортогональны к 1, получим

$$Y_0^0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \sigma_y(x) dx. \quad (111)$$

Прочие коэффициенты  $U_n^0$  и  $Y_n^0$  определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sigma_n = K_{YU}^n(h) U_n^0 + K_{YY}^n(h) Y_n^0; \\ 0 = K_{XU}^n(h) U_n^0 + K_{XY}^n(h) Y_n^0, \end{cases} \quad (112)$$

где

$$\int_{-l}^l \sigma_y(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \sigma_n. \quad (113)$$

Откуда получаем, что

$$U_n^0 = \frac{\sigma_n K_{XY}^n(h)}{\Delta}, \quad Y_n^0 = -\frac{\sigma_n K_{XU}^n(h)}{\Delta},$$

$$\Delta = -\frac{\nu + 1}{2} \frac{n\pi}{l} \left( sh \left( \frac{2n\pi}{l} h \right) + \frac{2n\pi}{l} h \right). \quad (114)$$

Пусть, для примера, на продольных сторонах полуполосы касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения представлены сосредоточенными силами одинаковой интенсивности  $P$ , приложенными в точках  $x = 0, \pm l, \pm 3l, \dots$ ,  $y = \pm h$ . Тогда

$$\sigma_n = \int_{-1}^1 P \delta(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = P. \quad (115)$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{2}P, \quad U_n^0 = \frac{PK_{XY}^n(h)}{\Delta}, \quad Y_n^0 = -\frac{PK_{XU}^n(h)}{\Delta}. \quad (116)$$

А формулы для напряжений и перемещений принимают вид  $\left(q_n = \frac{n\pi}{l}\right)$ :

$$U(x, y) = -P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\nu - 1)sh(q_n h) + (\nu + 1)q_n h ch(q_n h)] ch(q_n y) - (\nu + 1)q_n y sh(q_n y) sh(q_n h)}{(\nu + 1)q_n (sh(2q_n h) + 2q_n h)} \sin q_n x;$$

$$V(x, y) = V_0 + \frac{1 - \nu}{4} P y -$$

$$P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu + 1)q_n y sh(q_n h) ch(q_n y) - (2sh(q_n h) + (\nu + 1)q_n h ch(q_n h)) sh(q_n y)}{(\nu + 1)q_n (sh(2q_n h) + 2q_n h)} \cos q_n x;$$

$$Y = \frac{P}{2} + P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[sh(q_n h) + q_n h ch(q_n h)] ch(q_n y) - q_n y sh(q_n h) sh(q_n y)}{ch(q_n h) sh(q_n h) + q_n h} \cos q_n x; \quad (117)$$

$$X = P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y sh(q_n h) ch(q_n y) - h ch(q_n h) sh(q_n y)}{ch(q_n h) sh(q_n h) + q_n h} q_n \sin q_n x;$$

$$\sigma_x = \nu \frac{P}{2} + P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(sh(q_n h) - q_n h ch(q_n h)) ch(q_n y) + q_n y sh(q_n h) sh(q_n y)}{ch(q_n h) sh(q_n h) + q_n h} \cos q_n x.$$

**Заключение.** Приводятся аналитические решения краевых задач теории упругости для полуполосы и прямоугольника в виде разложений в тригонометрические ряды в случае симметричной и обратно-симметричной деформаций. Рассмотрены классический способ решения в перемещениях и решение с помощью метода начальных функций. В частности, метод начальных функций очень удобен при решении обратным методом. Решения даются для двух типов периодических продолжений в полуплоскость. Все полученные формулы тщательно проверены. Для сосредоточенных нагрузок численно показано совпадение свернутых формул с их представлениями в виде бесконечных рядов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шемякин, Е. И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) / Е. И. Шемякин // Доклады РАН. – 1996. – Т. 347. – № 3. – С. 342–345.
- [2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, С. В. Шибырин // Известия РАН. МТТ. – 1997. – № 1. – С. 56–63.
- [3] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Примеры решений в полуполосе / М. Д. Коваленко, И. В. Меньшова, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МТТ. – 2013. – № 5. – С. 136–158.
- [4] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 3. – 662 с.
- [5] Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1983. – 752 с.
- [6] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.

Меньшова Ирина Владимировна,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: menshovairina@yandex.ru

I. V. Menshova

**ABOUT PERIODIC SOLUTIONS OF FILON – RIBIERE FOR  
TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY**

*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences*

**Abstract.** The periodic solutions (in the trigonometric series) for the boundary value problems of elasticity theory for the semi strip in the case of symmetric and inversely symmetric deformations are given. The solutions are constructed for two possible types of prolongations in the half-plane: 1) in the longitudinal sides of semi strip transverse displacements and shear stresses are equal to zero; 2) in the longitudinal sides of semi strip longitudinal displacements and normal stresses are equal to zero. Two approaches are considered: traditional method of solving and the solving in terms of initial functions, specifically, inverse method. In the case when on the and face of the semi strip the concentrated loads, represented by delta-functions (normal or tangential concentrated loads) or its first derivative (concentrated bending moment, concentrated shear dipole) are given, the series can be express through elementary functions. Some features of the problems resolving are expanded.

**Keywords:** boundary value problem, periodic solutions of Faylon – Ribere, semi strip, method of initial functions, inverse method.

**REFERENCES**

- [1] *Shemyakin, E. I.* About regional tasks of the theory of elasticity for areas with angular points (flat deformation) / E. I. Shemyakin // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1996. – Vol. 347. – № 3. – P. 342–345. (in Russian)
- [2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadlya – Papkovich’s functions in a strip. Examples of decisions in to semi-strip / M. D. Kovalenko, S. V. Shibirin // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 1997. – № 1. – P. 56–63. (in Russian)
- [3] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2013. – № 5. – P. 136–158. (in Russian)
- [4] *Fikhtengolts, G. M.* Course of differential and integral calculus / G. M. Fikhtengolts. – M. : Fizmatlit, 2001. – Vol. 3. – 662 p. (in Russian)
- [5] *Prudnikov, A. P.* Integrals and ranks. Special functions / A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. – M. : Nauka, 1983. – 752 p. (in Russian)
- [6] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p. (in Russian)

*Menshova, Irina Vladimirovna*

*PhD, Senior Researcher at the Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow*

## НОВЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КЛАССА СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва

**Аннотация.** В статье разработаны два метода. Первый метод позволяет найти обращение сингулярного (особого) интеграла с обобщенным ядром типа Коши.

Второй метод позволяет свести класс сингулярных интегральных уравнений первого рода типа Коши к линейным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и обратно. Полученные в данной статье формулы дают возможность достаточно просто вычислить главное значение интеграла типа Коши. Предложен новый способ обращения сингулярного интеграла с ядром Коши.

Разработанные методы позволяют построить решение класса смешанных краевых задач. В качестве примера построено решение новой краевой задачи и выявлены ранее неизвестные явления (см. статью В. Д. Кулиева и Н. Л. Борисовой “Трещина продольного сдвига, находящаяся на границе раздела двух биупругих полос разной толщины. Новые явления”).

**Ключевые слова:** ядро, сингулярное интегральное уравнение, смешанные краевые задачи, интеграл типа Коши, уравнение Фредгольма.

УДК: 539.375

**1. Сингулярное (особое) интегральное уравнение с обобщенным ядром типа Коши. Частный случай.** Рассмотрим сингулярное (особое) интегральное уравнение с обобщенным ядром типа Коши:

$$\frac{1}{2c} \int_{-l}^l f(t) \frac{2W\left(\frac{\alpha}{c}t\right) W'\left(\frac{\alpha}{c}t\right)}{W^2\left(\frac{\alpha}{c}t\right) - W^2\left(\frac{\alpha}{c}x\right)} dt = \sigma(x) \quad (|x| \leq l), \quad (1.1)$$

$$\text{где } W'\left(\frac{\alpha}{c}t\right) = \frac{dW\left(\frac{\alpha}{c}t\right)}{d\left(\frac{\alpha}{c}t\right)}.$$

Здесь  $\sigma(x)$  — некоторая заданная четная функция, причем  $\sigma(x) \in H^\beta[-l, l]$ ,  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ , и, следовательно,  $\sigma(x) \in C[-l, l]$ .

Пусть искомая  $f(t)$  удовлетворяет условиям:

$$f(t) = \frac{f_0(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}}, \quad f_0(-t) = -f_0(t), \quad f_0(t) \in H^\beta[-l, l], \quad \frac{1}{2} < \beta < 1. \quad (1.2)$$

Здесь  $\beta$  — показатель Гельдера.

Заметим, что, если некоторая функция удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\beta$ , то она удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\gamma$  при всяком  $\gamma \leq \beta$ .

Поступила 16.02.2014

Далее пусть  $W\left(-\frac{\alpha}{c}x\right) = -W\left(\frac{\alpha}{c}x\right)$ . Для определенности предположим, что  $W\left(\frac{\alpha}{c}x\right)$  — строго монотонно возрастающая и непрерывная функция по  $x \in [0, l]$ . Тогда решение уравнения (1.1) дается формулой :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{W^2\left(\frac{\alpha}{c}l\right) - W^2\left(\frac{\alpha}{c}x\right)}} \left[ -\frac{1}{c}W\left(\frac{\alpha}{c}x\right) \int_{-l}^l \frac{\sigma(t)\sqrt{W^2\left(\frac{\alpha}{c}l\right) - W^2\left(\frac{\alpha}{c}t\right)}}{W^2\left(\frac{\alpha}{c}t\right) - W^2\left(\frac{\alpha}{c}x\right)} W'\left(\frac{\alpha}{c}t\right) dt + C_0 \right]. \quad (1.3)$$

Поскольку  $f(-x) = -f(x)$ , то из (1.3) следует, что  $C_0 \equiv 0$ . Таким образом, окончательно находим решение уравнения (1.1) в виде:

$$f(x) = -\frac{1}{c} \frac{W\left(\frac{\alpha}{c}x\right)}{\sqrt{W^2\left(\frac{\alpha}{c}l\right) - W^2\left(\frac{\alpha}{c}x\right)}} \int_{-l}^l \frac{\sigma(t)\sqrt{W^2\left(\frac{\alpha}{c}l\right) - W^2\left(\frac{\alpha}{c}t\right)}}{W^2\left(\frac{\alpha}{c}t\right) - W^2\left(\frac{\alpha}{c}x\right)} W'\left(\frac{\alpha}{c}t\right) dt. \quad (1.4)$$

Следует заметить, что нечетность функции  $f_0(x)$  необходима для единственности решения класса сингулярных смешанных краевых задач. Очевидно, предложенный метод решения уравнения (1.1) является обобщением метода, предложенного в [1]. Решение (1.1) можно построить и при других условиях (см. [1]), наложенных на функции  $f(x)$  и  $W\left(\frac{\alpha}{c}x\right)$ .

**§2. Методы сведения класса интегральных уравнений первого рода типа Коши к линейным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и обратно.** В монографии [2] автором данной статьи был предложен метод сведения класса интегральных уравнений первого рода типа Коши к фредгольмовым уравнениям второго рода с непрерывным ядром. Этот метод в основном опирается на доказанные в [2] леммы и теоремы (см. [2], глава I, §1–§3).

Ниже проводимые исследования показывают, что этот метод останется справедливым, если плотность интеграла типа Коши удовлетворяет обычным условиям, принятым в общей теории сингулярных интегральных уравнений (см., например, [3], [4]). Поэтому нет необходимости введения дополнительных условий, ранее сформулированных в монографии [2] при разработке данного метода.

Кроме того, эти же исследования дают возможность разработать новый метод, позволяющий свести интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром определенного класса к интегральному уравнению первого рода типа Коши.

**2.1. Леммы**

**Определение 1.** Под  $f^+(x) \in K_\delta^+[0, a]$ ,  $\delta \in [0, 1[$  понимается следующее: функция  $f^+(x)$  принадлежит классу функций вида

$$f^+(x) = \frac{f_0^+(x)}{(a^2 - x^2)^\delta}, \quad f_0^+(x) \in H^\beta[0, a], \quad 0 \leq \delta < \beta \leq 1. \quad (2.1)$$

Этот класс функций является общепринятым в общей теории сингулярных интегральных уравнений [3], [4].

**Определение 2.** Под  $f(x) \in K_\delta] -a, a]$ ,  $\delta \in [0, 1[$  понимается следующее:

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{(a^2 - x^2)^\delta}, \quad f_0(-x) = -f_0(x), \quad f_0(x) \in H^\beta[-a, a], \quad (2.2)$$

$$0 \leq \delta < \beta \leq 1.$$

**Лемма 1.** Пусть  $f^+(x) \in K_\delta^+[0, a[$ ,  $\delta \in [0, 1[$ . Тогда для функции  $\psi^+(x)$ , определяемой формулой

$$\psi^+(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f^+(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau, \quad (2.3)$$

справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Если  $0 \leq \delta < 1/2$ , то функция  $\psi^+(x)$  ограничена и непрерывна на промежутке  $0 < x \leq a$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \psi^+(x) = \psi^+(a) = 0. \quad (2.4)$$

Утверждение 2. Если  $\delta = 1/2$ , то функция  $\psi^+(x)$  ограничена и непрерывна на промежутке  $0 < x \leq a$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \psi^+(x) = \psi^+(a) = \frac{f_0^+(a)}{a}. \quad (2.5)$$

Утверждение 3. Если  $1/2 < \delta < 1$ , то функция  $\psi^+(x)$  ограничена и непрерывна на любом промежутке  $0 < x \leq a - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < a$ ), но неограничена в каждом отрезке  $[a - \varepsilon, a]$ , то есть точка  $a$  — особая точка, причем

$$\psi^+(x) \sim A_0 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2} - \delta}, \quad (2.6)$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{f_0^+(a)}{a} \cdot \frac{\Gamma(1 - \delta)}{\Gamma(3/2 - \delta)}, \quad x \rightarrow a - 0,$$

где  $\Gamma(u)$  — гамма-функция Эйлера.

Утверждение 4. Для любого  $\delta \in [0, 1[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0^+(\tau) d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} - \frac{2}{\pi} \frac{f_0^+(x)}{a^{2\delta}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right\} = \\ = -\frac{1}{\pi} \frac{f_0^+(0)}{a^{2\delta}} [C + \Psi(1 - \delta)] + A_1(\delta), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$|A_1(\delta)| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \left| \int_x^a \frac{f_0^+(\tau) - f_0^+(x)}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau \right|, \quad (2.8)$$

$$|A_1(\delta)| < \frac{A}{\pi} \frac{1}{a^{2\delta - \beta}} \cdot \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right) \Gamma(1 - \delta)}{\Gamma\left(2 - \delta - \frac{1}{2}\beta\right)}. \quad (2.9)$$

Здесь  $A$  — постоянная Гельдера,  $\beta$  — показатель Гельдера ( $0 \leq \delta < \beta \leq 1$ ),  $\Psi(u)$  — пси-функция Эйлера,  $C$  — постоянная Эйлера.

Доказательство. Сначала докажем утверждения 1–3. Функцию  $\psi^+(x)$  представим в виде

$$\psi^+(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0^+(\tau) d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 = x^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ d\tau = (a^2 - x^2) \sin \varphi \cos \varphi (x^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-\delta} \psi_1^+(x), \quad (2.10)$$

$$\psi_1^+(x) = \int_0^{\pi/2} g(\varphi) D(x, \varphi) d\varphi,$$

$$g(\varphi) = (\cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}-\delta}, D(x, \varphi) = \frac{f_0^+(\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi})}{\sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$(0 \leq \delta < 1, 0 < x < a).$$

Функция  $g(\varphi)$  интегрируема на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Действительно,

$$\int_0^{\pi/2} g(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}-\delta} d\varphi =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi = \sqrt{u}; 0 \leq u \leq 1 \\ d\varphi = \frac{du}{2\sqrt{u}\sqrt{1-u}}, \cos^2 \varphi = 1 - u \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{-1/2} (1-u)^{-\delta} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, 1-\delta\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\delta\right)} \quad (0 \leq \delta < 1).$$

Функция  $D(x, \varphi)$  непрерывна при  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 < x \leq a$ , причем при  $x \rightarrow a-0$  равномерно стремится к  $f_0^+(a)/a$  для любого  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} D(x, \varphi) = \frac{f_0^+(a)}{a}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \psi_1^+(x) = \psi_1^+(a) = \frac{f_0^+(a)}{2a} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\delta\right)} \quad (0 \leq \delta < 1). \quad (2.11)$$

Из (2.10) с учетом (2.11) приходим к выводам:

1<sup>0</sup>. Если  $(0 \leq \delta < 1/2)$ , то функция  $\psi^+(x)$  ограничена и непрерывна на промежутке  $0 < x \leq a$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \psi^+(x) = \psi^+(a) = 0.$$

Утверждение 1 доказано.

2<sup>0</sup>. Если  $\delta = 1/2$ , то функция  $\psi^+(x)$  ограничена и непрерывна в промежутке  $0 < x \leq a$ , причем

$$\psi^+(a) = \frac{f_0^+(a)}{a}.$$

Утверждение 2 доказано.

3<sup>0</sup>. Если  $1/2 < \delta < 1$ , то функция  $\psi^+(x)$  ограничена и непрерывна на любом промежутке  $0 < x \leq a - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < a$ ), но неограничена на каждом отрезке  $[a - \varepsilon, a]$ , то есть точка  $a$  действительно является особой точкой, причем при  $x \rightarrow a - 0$  функция  $\psi^+(x)$  стремится к бесконечности (см. (9)).

Утверждение 3 доказано.

Теперь докажем утверждение 4.

Функцию  $\psi^+(x)$  представим в виде

$$\psi^+(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0^+(\tau) d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} = \psi_{01}^+(x) + \psi_{02}^+(x), \quad (2.12)$$

$$\psi_{01}^+(x) = \frac{2}{\pi} f_0^+(x) \int_x^a \frac{d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad (2.13)$$

$$\psi_{02}^+(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0^+(\tau) - f_0^+(x)}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (2.14)$$

$$(0 < x < a, 0 \leq \delta < 1).$$

По условию леммы  $f_0^+(x) \in H^\beta [0, a]$ , где  $\beta$  — показатель Гельдера (см. определение 1) и, следовательно, функция  $f_0^+(x)$  непрерывна в промежутке  $[0, a]$ .

Ниже предлагается способ, позволяющий вычислить интеграл  $\psi_{01}^+(x)$ , если  $0 < x < a$ . Этот способ позволяет также дать исчерпывающее математическое обоснование справедливости главного члена асимптотики, найденного в монографии [2] (см. Глава I, §1).

Суть этого способа раскрывается в дальнейшем изложении.

Интеграл в (2.13) представим в виде

$$\int_x^a \frac{d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} = D_1(x, c, \delta) + D_2(x, c, \delta), \quad (2.15)$$

$$D_1(x, c, \delta) = \int_x^c \frac{d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad (2.16)$$

$$D_2(x, c, \delta) = \int_c^a \frac{d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} \quad (2.17)$$

$$(0 < x < c < a).$$

Тогда

$$\psi_{01}^+(x) = \frac{2}{\pi} f_0^+(x) D_1(x, c, \delta) + \frac{2}{\pi} f_0^+(x) D_2(x, c, \delta) \quad (2.18)$$

$$(0 < x < c < a).$$

Рассмотрим интеграл

$$D_1(x, c, \delta) = \int_x^c \frac{d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} =$$



$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{\tau^2 - x^2} \Rightarrow \tau = \sqrt{u^2 + x^2} \Rightarrow \\ d\tau = \frac{udu}{\sqrt{u^2 + x^2}}; 0 \leq u \leq \sqrt{c^2 - x^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{du}{(a^2 - (u^2 + x^2))^\delta \sqrt{u^2 + x^2}} = \frac{1}{a^{2\delta}} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{du}{\left[1 - \frac{u^2 + x^2}{a^2}\right]^\delta \sqrt{u^2 + x^2}}. \quad (2.19)$$

Поскольку  $0 < \frac{u^2 + x^2}{a^2} < 1$ , то в силу (3.7.40<sup>1</sup>) (см. [2], С. 395) для любого  $\delta \in [0, 1[$  имеем

$$\frac{1}{\left[1 - \frac{u^2 + x^2}{a^2}\right]^\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \delta)}{n! \Gamma(\delta)} \left(\frac{u^2 + x^2}{a^2}\right)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \delta)}{n! \Gamma(\delta)} \left(\frac{u^2 + x^2}{a^2}\right)^n \quad (2.20)$$

(берется главное значение степени).

Равенство (2.19), очевидно, справедливо при любых действительных значениях  $\delta$ .

Заметим, что (см. [2], С. 180) для любого  $\delta \in [0, 1[$ :

$$\frac{\Gamma(n + \delta)}{n!} = \frac{\Gamma(n + \delta)}{\Gamma(n + 1)} = \frac{1}{n^{1-\delta}} \left[1 - \frac{\delta}{2n} (1 - \delta) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.21)$$

Из (2.18) с учетом (2.20) получаем:

$$D_1(x, c, \delta) = \frac{1}{a^{2\delta}} \left\{ \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + x^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \delta)}{a^{2n} \Gamma(n + 1)} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} (u^2 + x^2)^{n-1/2} du \right\} =$$

$$= \frac{1}{a^{2\delta}} \left\{ \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + x^2}} + \frac{\delta}{a^2} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} (u^2 + x^2)^{1/2} du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \delta)}{a^{2n} \Gamma(n + 1)} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} (u^2 + x^2)^{n-1/2} du \right\} =$$

$$= \frac{1}{a^{2\delta}} \left\{ \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + x^2}} + \frac{\delta}{a^2} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} (u^2 + x^2)^{1/2} du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m + 1 + \delta)}{a^{2(m+1)} \Gamma(m + 2)} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} (u^2 + x^2)^{m+1/2} du \right\}$$

$$(0 < x < c < a),$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}
a^{2\delta} D_1(x, c, \delta) &= \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x} + \\
&+ \frac{\delta}{2} \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} + \left(\frac{x}{c}\right)^2 \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x} \right] + \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\delta)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)}{(m+1)\Gamma(m+2)} \left(\frac{c}{a}\right)^{2(m+1)} \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \times \right. \\
&\quad \times \left[ 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \left(\frac{x}{c}\right)^{2k} \prod_{q=1}^k \frac{2m-2q+3}{m-q+1} \right] \left. \right\} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta)} \left(\frac{x}{a}\right)^2 \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)\Gamma(3/2+m)}{\Gamma^2(m+2)} \left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \\
&\quad (0 < x < c < a, 0 \leq \delta < 1).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Исследуем следующие ряды:

$$\begin{aligned}
\Theta_1(\delta) &= \frac{1}{2\Gamma(\delta)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)}{(m+1)\Gamma(m+2)} = \\
&= -\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\Gamma(\delta)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)}{(m+1)\Gamma(m+2)},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_2(\delta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+2)\Gamma(m+2)} \left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \\
&\quad (0 \leq \delta < 1).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ряд в (2.23), в силу (2.21), является сходящимся рядом. Определим его сумму. С помощью  $K_\alpha$  — формулы суммирования функциональных рядов ( $0 < \alpha \leq \pi/2$ ) [5] имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Gamma(\delta)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)}{(m+1)\Gamma(m+2)} &= -\frac{\delta}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1-\tau)}{\tau^{1+\delta}} d\tau = \\
&= \frac{1}{2} [-C - \Psi(1-\delta)],
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\Theta_1(\delta) = \left\{ -\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} [-C - \Psi(1-\delta)] \right\} \geq 0 \quad (0 \leq \delta < 1).$$

Здесь  $C$  — постоянная Эйлера,  $\Psi(u)$  — пси-функция Эйлера:

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} \text{ или } \ln \Gamma(u) = \int_1^u \Psi(\eta) d\eta \\
&\quad (\Psi(1) = -C).
\end{aligned}$$

Теперь исследуем ряд (2.24). С помощью (2.21) приходим к выводам:

1<sup>0</sup>. Если ( $0 \leq \delta < 1/2$ ), то ряд в (2.24) сходится при  $x = a$ . Действительно, в силу  $K_\alpha$  — формулы суммирования имеем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+2)\Gamma(m+2)} = \frac{\pi}{\sin \delta\pi \cdot \Gamma(1-\delta)} \times$$

$$\times \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\delta\right)}{\Gamma(1-\delta)} - \sqrt{\pi} \right] - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(1-\delta) \quad (0 < \delta < 1/2), \quad (2.26)$$

откуда при  $\delta \rightarrow +0$  получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+2)\Gamma(m+2)} = \sqrt{\pi} \left( 2\ln 2 - \frac{1}{2} \right). \quad (2.27)$$

2<sup>0</sup>. Если  $1/2 \leq \delta < 1$ , то исследуемый ряд при  $x = a$  расходится.

3<sup>0</sup>. Если  $1/2 \leq \delta < 1$  и  $0 < x < a$ , то ряд в (2.24) сходится.

Стало быть, ряд в (2.24) для любого  $\delta \in [0, 1[$  сходится, если  $0 < x < a$ .

Из (2.22) при  $c \rightarrow a - 0$  с учетом (2.25) находим:

$$a^{2\delta} D_1(x, a, \delta) = \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}{(x/a)} \right] + D_1^*(x, a, \delta), \quad (2.28)$$

$$D_1^*(x, a, \delta) = \frac{\delta}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}{(x/a)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} (-C - \Psi(1 - \delta)) + \quad (2.29)$$

$$+ \frac{1}{2\Gamma(\delta)} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)}{(m+1)\Gamma(m+2)} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[ \frac{1}{2^k} \left(\frac{x}{a}\right)^{2k} \prod_{q=1}^k \frac{2m-2q+3}{m-q+1} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta)} \left(\frac{x}{a}\right)^2 \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}{(x/a)} \right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1+\delta)\Gamma(3/2+m)}{\Gamma(m+2)\Gamma(m+2)} \left(\frac{x}{a}\right)^{2m}$$

$$(0 \leq \delta < 1).$$

Из (2.28) и (2.29) следует, что  $D_1(x, a, \delta) = D_1\left(\frac{x}{a}, \delta\right)$  и  $D_1^*(x, a, \delta) = D_1^*\left(\frac{x}{a}, \delta\right)$ . Отсюда приходим к выводам:

1<sup>0</sup>. Если  $x \rightarrow +0$ , то для любого  $\delta \in [0, 1[$ :

$$D_1^*(0, \delta) = -\frac{1}{2} [C + \Psi(1 - \delta)]. \quad (2.30)$$

2<sup>0</sup>. Если  $\delta = 0$ , то для любого  $x \in ]0, a[$ :

$$D_1^*\left(\frac{x}{a}, 0\right) = 0. \quad (2.31)$$

Теперь рассмотрим интеграл:

$$D_2(x, c, \delta) = \int_c^a \frac{d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} \quad (0 \leq \delta < 1, x < c < a). \quad (2.32)$$

Докажем, что

$$\lim_{c \rightarrow a-0} D_2(x, c, \delta) = 0. \quad (2.33)$$

Доказательство. Интеграл (2.32) представим в виде:

$$D_2(x, c, \delta) = (a^2 - c^2)^{1-\delta} D_2^*(x, c, \delta),$$

$$D_2^*(x, c, \delta) = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \varphi)^{1/2-\delta} \sin \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi - x^2}}$$

$$(0 \leq \delta < 1, 0 < x < c < a).$$

Поскольку

$$D_2^*(x, a, \delta) = \frac{1}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi)^{1/2-\delta} \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2a\sqrt{a^2 - x^2} (1 - \delta)}$$

и  $0 \leq \delta < 1, 0 < x < a$ , то

$$\lim_{c \rightarrow a-0} D_2(x, c, \delta) = 0.$$

Доказательство закончено.

Из (2.13), (2.16), (2.17), (2.18) с учетом (2.22), (2.28), (2.29) и (2.34) имеем

$$\psi_{01}^+(x) = \frac{2}{\pi} f_0(x) D_1\left(\frac{x}{a}, \delta\right) \quad (2.34)$$

$$(0 \leq \delta < 1, 0 < x < a).$$

Остается доказать существование интеграла (2.14).

Рассмотрим этот интеграл

$$\psi_{02}^+(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0^+(\tau) - f_0^+(x)}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau \quad (0 \leq x < a). \quad (2.35)$$

Поскольку  $f_0^+(x) \in H^\beta[0, a]$ , ( $0 \leq \delta < \beta \leq 1$ ), то этот интеграл существует, причем

$$\left| \int_x^a \frac{f_0^+(\tau) - f_0^+(x)}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau \right| < A \int_x^a \frac{|\tau - x|^\beta}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau =$$

$$= A \int_x^a \frac{|\tau - x|^{\beta-1/2}}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau + x}} d\tau \quad (0 \leq x < a), \quad (2.36)$$

где  $A$  — постоянная Гельдера. Кроме того,

$$\psi_{02}^+(0) = A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{f_0^+(\tau) - f_0^+(0)}{(a^2 - \tau^2)^\delta \tau} d\tau,$$

$$\begin{aligned}
 |A_1| &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^a \frac{f_0^+(\tau) - f_0^+(0)}{(a^2 - \tau^2)^\delta \tau} d\tau \right| \leq \\
 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{|f_0^+(\tau) - f_0^+(0)|}{(a^2 - \tau^2)^\delta \tau} d\tau < \frac{2}{\pi} A \int_0^A \frac{\tau^{\beta-1}}{(a^2 - \tau^2)^\delta} d\tau = \\
 &= \frac{1}{\pi} A \frac{1}{a^{2\delta-\beta}} \cdot \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right) \Gamma(1 - \delta)}{\Gamma\left(2 - \delta - \frac{1}{2}\right)}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Таким образом, интеграл (2.12) в силу (2.34), (2.35) определяется так:

$$\begin{aligned}
 \psi^+(x) &= \frac{2}{\pi} f_0^+(x) D_1\left(\frac{x}{a}, \delta\right) + \psi_{02}^+(x) \\
 &(0 \leq \delta < 1, 0 < x < a).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Из (2.38) с учетом (2.28), (2.30), (2.37) приходим к (2.7).

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $f(x) \in K_\delta[0, a[$  (см. определение 2). Тогда для функции  $\psi(x)$ , определяемой формулой

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau, \tag{2.39}$$

справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Если  $0 < \delta < 1/2$ , то функция  $\psi(x)$  ограничена и непрерывна в промежутке  $0 \leq x \leq a$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \psi^+(x) = \psi^+(a) = 0, \tag{2.40}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \psi(x) = \psi(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{f_0(\tau)}{(a^2 - \tau^2)^\delta \tau} d\tau. \tag{2.41}$$

Интеграл в (2.41) существует в несобственном смысле, так как  $f_0(-\tau) = -f_0(\tau)$ .

Утверждение 2. Если  $\delta = 1/2$ , то функция  $\psi^+(x)$  ограничена и непрерывна в промежутке  $0 \leq x \leq a$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \psi(x) = \psi(a) = \frac{f_0(a)}{a}. \tag{2.42}$$

Утверждение 3. Если  $1/2 < \delta < 1$ , то функция  $\psi(x)$  ограничена и непрерывна на любом отрезке  $0 \leq x \leq a - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < a$ ), но неограничена на каждом отрезке  $[a - \varepsilon, a]$ , то есть точка  $a$  — особая точка, причем

$$\psi(x) \sim A_0 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2} - \delta}, \tag{2.43}$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{f_0(a)}{a} \cdot \frac{\Gamma(1 - \delta)}{\Gamma(3/2 - \delta)} (x \rightarrow a - 0).$$

Доказательство данной леммы следует как частный случай из доказательства леммы 1.

**Лемма 3.** Пусть  $f^+(x) \in K_\delta^+[0, a[$  (см. определение 1) и пусть

$$\psi^+(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0^+(\tau) d\tau}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} \quad (0 < x < a). \quad (2.44)$$

Тогда

$$f^+(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau \psi^+(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \quad (0 < x < a). \quad (2.45)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau \psi^+(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} &= -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \int_\tau^a \frac{f_0^+(t)}{(a^2 - t^2)^\delta \sqrt{t^2 - \tau^2}} dt d\tau = \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^{a-\varepsilon} \frac{f_0^+(t)}{(a^2 - t^2)^\delta} \int_x^t \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2} \sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau dt = \\ &= -\frac{d}{dx} \int_x^{a-\varepsilon} \frac{f_0^+(t)}{(a^2 - t^2)^\delta} dt \stackrel{def}{=} -\frac{d}{dx} \int_x^{a-\varepsilon} f^+(t) dt = f^+(x) \quad (0 < x < a). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Данная лемма остается в силе, если  $f(x) \in K_\delta [0, a]$  (см. определение 2).

**Определение 3.** Под  $\psi(x) \in K_{\delta_1} [0, a[$  понимается:

$$\psi(x) = \frac{\psi_0(x)}{(a^2 - x^2)^{\delta_1}}, \quad \delta_1 = \delta - 1/2, \quad \delta \in [0, 1[, \quad \psi_0(x) \in C [0, a]. \quad (2.47)$$

**Лемма 4.** Если  $\psi(x) \in K_{\delta_1} [0, a[$ , то

$$\left\{ \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \int_t^a \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau \right\}_{t=0}^{t=a} = 0 \quad (0 < \lambda < \infty). \quad (2.48)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \int_t^a \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau &= \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \int_t^a \frac{\tau \psi_0(\tau)}{(a^2 - \tau^2)^{\delta-1/2} \sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau = \\ &= \frac{\sin \lambda t}{\lambda} (a^2 - t^2)^{1-\delta} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi)^{1-\delta} \psi_0 \left( \sqrt{t^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Поскольку

$$\int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi)^{1-\delta} d\varphi = \frac{1}{2} B \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \delta \right),$$

$$\psi_0(t) \in C [0, a],$$

то из (2.49) приходим к утверждению данной леммы.

**Замечание.** Если  $\psi_0 \in H^\beta [0, a]$  ( $1/2 < \beta \leq 1$ ), то утверждение леммы 4 остается в силе.

**2.2. Связь между плотностями интегралов типа Фурье первого и второго рода и плотностями интегралов типа Хенкеля первого и второго рода.** Рассмотрим интегралы

$$S_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt, \quad S_2(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a t \psi(t) J_0(\lambda t) dt, \quad (2.50)$$

$$S_1^*(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f * (t) \cos \lambda t dt, \quad S_2^*(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \psi * (t) J_0(\lambda t) dt. \quad (2.51)$$

Здесь  $J_0(\lambda t)$  ( $Im \lambda \equiv 0$ ) — бесселева функция первого рода нулевого порядка.

**Определение 4.** Интегралы  $S_1(\lambda)$  и  $S_1^*(\lambda)$  в дальнейшем будем называть синус и косинус интегралами типа Фурье первого и второго рода, а функции  $f(t)$  и  $f^*(t)$  — их плотностями соответственно.

**Определение 5.** Интеграл  $S_2(\lambda)$  (или  $S_2^*(\lambda)$ ) в дальнейшем будем называть интегралом типа Ханкеля первого рода (или второго рода), а функцию  $\psi(t)$  (или  $\psi^*(t)$ ) — плотностью интеграла типа Ханкеля.

**Замечание 1.** При  $a \rightarrow +\infty$  из (2.50) и (1.51) приходим к известным преобразованиям Фурье и Ханкеля.

Предложенный ниже метод сведения определенного класса сингулярных интегральных уравнений 1-ого рода типа Коши к интегральным фредгольмовым уравнениям второго рода состоит из двух этапов.

Первый этап. Поставим первую задачу. Пусть  $S_1(\lambda) = S_2(\lambda)$ . Требуется найти такой интегральный оператор, действие которого на плотность интеграла типа Фурье — функцию  $f(t)$  — дает плотность интеграла типа Ханкеля — функцию  $\psi(t)$ . Кроме того, следует найти формулу обращения этого интегрального оператора и доказать, что найденная таким образом связь между функциями  $f(t)$  и  $\psi(t)$  является необходимым и достаточным условием для того, чтобы  $S_1(\lambda) = S_2(\lambda) \quad \forall \lambda \in ]0, \infty]$ .

Второй этап. Поставим вторую задачу. Требуется найти такой интегральный оператор, действие которого на особый интеграл с ядром Коши с плотностью  $f(t)$  (функция  $f(t)$  одновременно является плотностью интеграла типа Фурье) дает другой интегральный оператор от функции  $f(t)$ , причем потребуем, чтобы последний интегральный оператор совпадал с интегральным оператором от плотности интеграла типа Фурье —  $f(t)$ . Кроме того, следует найти обращения этих интегральных операторов.

Аналогичные задачи (третья и четвертая) рассматриваются для функции  $f * (t)$  и  $\psi^*(t)$ .

Ответ на первую и третью задачи дают лемма 5 и лемма 6 соответственно, а ответ на вторую и четвертую задачу дают теорема 1 и теорема 2, которые будут рассматриваться ниже.

**Лемма 5.** Пусть  $f(x) \in K_\delta [0, a]$  (см. определение 2). Тогда в силу леммы 2  $\psi(x) \in K_{\delta_1} [0, a]$  (см. определение 3). Для того, чтобы  $S_1(\lambda) = S_2(\lambda), \forall \lambda \in ]0, \infty]$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad (2.52)$$

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau \psi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}.$$

Данная лемма является обобщением леммы 1, доказанной в [2] (см. С. 15–16). Лемма 5 доказывается аналогично только что упомянутой лемме 1. Однако формула (1.2.19) в [2] получается из доказанной выше леммы 4.

**Лемма 6.** Пусть  $\psi^*(x) \in K_\delta [0, a]$ , а  $f^*(x) \in K_{\delta_1} [0, a]$ . Для того, чтобы  $S_1^*(\lambda) = S_2^*(\lambda), \forall \lambda \in ]0, \infty]$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$f^*(x) = \int_x^a \frac{\psi^*(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad (2.53)$$

$$\psi^*(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau f^*(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}. \quad (2.54)$$

Данная лемма является обобщением леммы 2, доказанной в [2] (см. С. 16–18). При доказательстве леммы 6 следует поступать так же, как в упомянутой лемме 2 в [2]. При этом формулу (1.22) в [2] можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1^*(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f^*(t) dt - \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a t f^*(t) \int_0^t \frac{J_1(\lambda\tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt d\tau = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f^*(t) dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{dJ_0(\lambda\tau)}{d\tau} \int_\tau^a \frac{t f^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f^*(t) dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[ J_0(\lambda\tau) \int_\tau^a \frac{t f^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt \right]_{\tau=0}^{\tau=a} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^a J_0(\lambda\tau) \frac{d}{d\tau} \int_\tau^a \frac{t f^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt d\tau \right\} = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a J_0(\lambda\tau) \frac{d}{d\tau} \int_\tau^a \frac{t f^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt d\tau = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a J_0(\lambda\tau) \psi^*(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Действительно, поскольку  $f^*(x) \in K_{\delta_1}[0, a]$ , то

$$\begin{aligned} &\lim_{\tau \rightarrow a-0} \int_\tau^a \frac{t f^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow a-0} \int_\tau^a \frac{\tau f^*(t)}{(a^2 - \tau^2)^{\delta-1/2} \sqrt{t^2 - \tau^2}} dt = 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

а интеграл

$$\int_0^a f^*(t) dt = \int_0^a \frac{f^*(t)}{(a^2 - \tau^2)^{\delta-1/2}} dt$$

существует в несобственном смысле.

**Замечание 2.** Леммы 5 и 6 остаются в силе, если  $\lambda = i\mu$  ( $Im\mu \equiv 0, 0 < \mu < \infty$ ).

**Лемма 7.** Пусть  $f(x) \in K_\delta[0, a[$  (см. определение 2) и пусть

$$\gamma(x) = \int_x^a \frac{f_0(\tau)}{(a^2 - \tau^2)^\delta \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau \quad (0 \leq x < a). \quad (2.57)$$



Для того, чтобы функция  $F(x)$  определялась формулой

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau \gamma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau \quad (2.58)$$

$$(0 \leq x < a),$$

необходимо и достаточно, чтобы функция  $\gamma(x)$  определялась формулой

$$\gamma(x) = \int_0^x \frac{F(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau \quad (0 \leq x < a). \quad (2.59)$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что, поскольку  $f(x) \in K_\delta [0, a]$ , то в силу леммы 2 (см. утверждение 3)  $\gamma(x) \in K_{\delta_1} [0, a]$ ,  $\delta_1 = \delta - 1/2$ , т. е.

$$\gamma(x) = \frac{\gamma_0(x)}{(a^2 - x^2)^{\delta-1/2}}, \quad \gamma_0(x) \in C[0, a], \quad \gamma(x) = \frac{\pi}{2} \psi(x),$$

причем в силу леммы 2  $\gamma(x) \in C[0, a]$ , если  $1/2 < \delta < 1$ , если же  $0 \leq \delta \leq 1/2$ , то  $\gamma(x) \in C[0, a]$ .

Необходимость. Пусть функция  $F(x)$  определяется формулой (2.58). Тогда докажем, что функция  $\gamma(x)$  определяется формулой (2.59). Рассмотрим интеграл:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} q(\tau) d\tau, \quad q(\tau) = \int_0^\tau \frac{t\gamma(t)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} dt. \quad (2.60)$$

Этот интеграл с помощью метода интегрирования по частям представим в виде:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} q(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} x \int_0^x \frac{F(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (2.61)$$

С другой стороны, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} q(\tau) d\tau &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_0^\tau \frac{t\gamma(t)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} dt d\tau = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^x t\gamma(t) \int_t^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - t^2}} d\tau dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{d}{dx} \int_0^x t\gamma(t) dt = x\gamma(x). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Из (2.61) и (2.62) окончательно находим:

$$\gamma(x) = \int_0^x \frac{F(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (2.63)$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь функция  $\gamma(x)$  определяется формулой (2.59). Тогда докажем, что функция  $F(x)$  определяется формулой (2.58).

Рассмотрим интеграл:

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^t \frac{F(y)}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy dt.$$

Этот интеграл, в силу (2.59), равен:

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^t \frac{F(y)}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy dt = \int_0^x \frac{t\gamma(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^x F(y) \int_y^x \frac{t}{\sqrt{x^2 - t^2} \sqrt{t^2 - y^2}} dt dy = \int_0^x \frac{t\gamma(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt,$$

откуда

$$\int_0^x F(y) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{t\gamma(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt. \quad (2.64)$$

Из (2.64) окончательно находим:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t\gamma(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt. \quad (2.65)$$

Достаточность также доказана.

**2.3. Новые теоремы в теории сингулярных интегральных уравнений и связь особых интегралов с ядром Коши с интегралами абелева типа.** Теперь перейдем к доказательству теоремы 1 и теоремы 2.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) = f_0(x)(a^2 - x^2)^{-\delta}$ ,  $\delta \in [0, 1]$ ;  $f_0(x) \in H^\beta[-a, a]$ ,  $f_0(x) = -f_0(-x)$ ,  $0 < \delta < \beta \leq 1$ .

Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t - \tau} dt = \int_x^a \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau, \quad (0 < x < a). \quad (2.66)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_\tau^a \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt d\tau, \quad (0 < x < a). \quad (2.67)$$

Функцию  $F(x)$  можно представить в виде (рис. 1)

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \int_0^t \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2} \sqrt{t^2 - \tau^2}} dt + \int_{x+\varepsilon}^a f(t) \int_0^x \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2} \sqrt{t^2 - \tau^2}} dt \right].$$

Отсюда

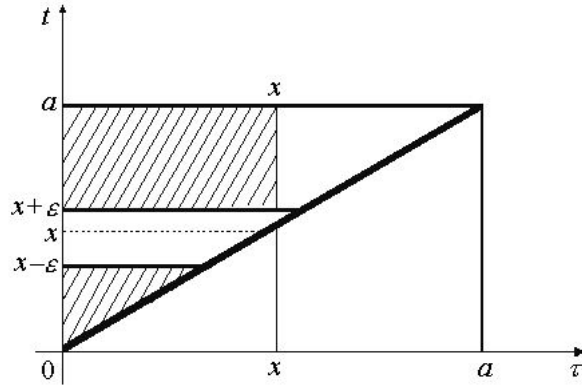


Рис. 1

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \left[ \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \ln(x+t) dt + \int_{x+\varepsilon}^a f(t) \ln(x+t) dt \right] - \left[ \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \ln(x-t) dt + \int_{x+\varepsilon}^a f(t) \ln(t-x) dt \right] \right\} \quad (2.68)$$

$(0 < x < a)$ .

Из (2.68) после элементарной выкладки имеем

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{t+x} dt + \int_{x+\varepsilon}^a \frac{f(t)}{t+x} dt + \int_0^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-x} dt + \int_{x+\varepsilon}^a \frac{f(t)}{t-x} dt + f(x-\varepsilon) \ln(2x-\varepsilon) - f(x+\varepsilon) \ln(2x+\varepsilon) + [f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)] \ln \varepsilon \right\} \quad (2.69)$$

Поскольку  $f_0(x) \in H^\beta[-a, a]$  и  $0 \leq \delta < \beta \leq 1$ , то все внеинтегральные выражения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  исчезают. С другой стороны, используя условие  $f_0(x) = -f_0(-x)$ , из (2.69) находим

$$F(x) = \frac{1}{\pi} V.p. \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt. \quad (2.70)$$

$$\frac{1}{\pi} V.p. \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau \gamma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau, \quad (2.71)$$

$$\gamma(\tau) = \int_{\tau}^a \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt.$$

Формула (2.71) дает связь особого интеграла с ядром Коши с интегралом абелева типа.

Запишем равенство (2.71) в виде:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-\tau} dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{t \gamma(t)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} dt. \quad (2.72)$$

Теперь, умножая обе части (2.72) на  $1/\sqrt{x^2 - \tau^2}$ , а затем, интегрируя по  $\tau$  от нуля до  $x$  ( $0 < x < a$ ), имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t - \tau} dt d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{t\gamma(t)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} dt d\tau. \quad (2.73)$$

Отсюда, в силу леммы 7, имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t - \tau} dt d\tau = \gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} \psi(x) \quad (2.74)$$

$$(0 < x < a).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Поскольку  $f(x) \in K_\delta [0, a]$ , то формула (2.74) дает связь между теоремой 1 и леммой 2, т. е. все утверждения леммы 2 остаются в силе и для интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t - \tau} dt d\tau,$$

и, тем самым, дают полную информацию о его поведении (см. §3).

Следствие 2. Если заданная функция  $f(x)$  принадлежит классу функций  $K_\delta [0, a]$ , где  $\delta \in [0, 1]$ , то формула (2.71) дает возможность вычислить главное значение сингулярного (особого) интеграла с ядром Коши.

Действительно,

$$\begin{aligned} \text{V.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) dt}{(a^2 - t^2)^\delta (t - x)} &= F(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{(a^2 - \tau^2)^{\delta-1/2} \sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi)^{1/2-\delta} \frac{f_0(\sqrt{\tau^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi})}{\sqrt{\tau^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi d\tau \\ &(0 \leq x < a). \end{aligned} \quad (2.75)$$

В частности, при  $f_0(t) = A_{2n+1} t^{2n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) и при  $\delta = 1/2$  из правой части равенства (2.75) находим:

$$\begin{aligned} \text{V.p.} A_{2n+1} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{t^{2n+1} dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} &= \\ &= A_{2n+1} \sum_{k=0}^n \left\{ (2k)! \left[ \frac{(2n-2k)!!}{2^n (k)! (n-k)!} \right]^2 a^{2k} x^{2n-2k} \right\} \\ &(0! = 1, (0)!! = 1). \end{aligned} \quad (2.76^1)$$

Откуда при  $n = 0$  приходим к замечательному результату:

$$\text{V.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dt}{(a^2 - t^2)^{1/2} (t - x)} = 0 (|x| < a). \quad (2.76^2)$$

Если  $f_0(t) = \sum_{n=0}^m A_{2n+1} t^{2n+1}$ , то формула (2.76<sup>1</sup>) позволяет вычислить главное значение интеграла типа Коши (2.75) в явном виде.

**Лемма 8.** Пусть

$$f^*(x) = \int_x^a \frac{\psi^*(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \quad (0 \leq x < a) \quad (2.77)$$

и пусть  $\psi^*(x) \in K_\delta [0, a]$ , т. е.

$$\psi^*(x) = \frac{\psi_0^*(x)}{(a^2 - x^2)^\delta}, \quad \psi_0^*(-x) = -\psi_0^*(x), \quad (2.78)$$

$$\psi_0^*(x) \in H^\beta [0, a], \quad 0 \leq \delta < \beta \leq 1.$$

Тогда

$$f^*(x) \in K_{\delta_1} [0, a], \quad \delta_1 = \delta - 1/2, \quad \text{т.е.}$$

$$f^*(x) = \frac{f_0^*(x)}{(a^2 - x^2)^{\delta_1}}, \quad f_0^*(-x) = f_0^*(x) \in H^\beta [0, a], \quad 1/2 < \beta \leq 1,$$

$$\psi^*(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau f^*(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} \quad (0 \leq x < a). \quad (2.79)$$

Данная лемма доказывается аналогично лемме 1 и лемме 2.

**Теорема 2.** Пусть функция  $\psi^*(x) \in K_\delta [0, a]$ , (следовательно,  $f^*(x) \in K_{\delta_1} [0, a]$ ). Кроме того, предполагается, что имеют место формулы (2.77) и (2.79). Тогда

$$\frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f^*(t)}{t - x} dt d\tau = -\frac{\pi}{2} \psi^*(x) \quad (2.80)$$

$$(0 < x < a).$$

Здесь сингулярный (особый) интеграл

$$\int_{-a}^a \frac{f^*(t)}{t - x} dt$$

понимается в смысле главного значения по Коши.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$F^*(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \frac{d}{d\tau} \int_\tau^a \frac{t f^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt d\tau, \quad (2.81)$$

$$(0 < x < a).$$

Функцию  $F^*(x)$  можно представить в виде

$$F^*(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{x^2 - \tau^2} f_1^*(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \frac{1}{x^2} \int_0^x \sqrt{x^2 - \tau^2} f_1^*(\tau) d\tau, \quad (2.82)$$

$$(0 < x < a).$$

$$f_1^*(\tau) = \frac{d}{d\tau} \gamma(\tau), \quad \gamma(\tau) = \int_\tau^a \frac{t f^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt.$$

Отсюда

$$F * (x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - \tau^2} \gamma(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=x} + \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\tau \gamma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau \right] + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{x^2 - \tau^2}}{x^2} \gamma(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=x} + \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{\tau \gamma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau \right]. \quad (2.83)$$

Элементарные выкладки дают

$$F^*(x) = \frac{2}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{\tau}^a \frac{t f^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt d\tau - \frac{2}{\pi x} \int_0^a f^*(t) dt. \quad (2.84)$$

Поскольку  $f^*(x) = f^*(-x)$ , то  $x f^*(x) = -x f^*(-x)$ . Положим  $t f^*(t) = f(t)$ . Тогда из (2.84) следует

$$F * (x) = \frac{1}{x} F(x) - \frac{2}{\pi x} \int_0^a \frac{f(t)}{t} dt. \quad (2.85)$$

Здесь функция  $F(x)$  формулой (2.67). Функция  $f(x)$  удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Следовательно, из (2.85), в силу теоремы 1, находим

$$F^*(x) = \frac{1}{\pi x} \int_{-a}^a \frac{t f^*(t)}{t - x} dt - \frac{1}{\pi x} \int_{-a}^a f^*(t) dt = \frac{1}{\pi} V.p. \int_{-a}^a \frac{f^*(t)}{t - x} dt. \quad (2.86)$$

Из (2.81) и (2.86) с помощью формулы обращения Абея приходим к формуле (2.80).

Теорема 2 доказана.

Следствие 3. Пусть в (2.78)  $\delta = 0$ . Тогда  $\psi^*(x) \in C[-a, a]$ ,  $\psi^*(-x) = -\psi^*(x)$ ,  $f^*(x) = \sqrt{a^2 - x^2} f_0^*(x)$ ,  $f_0^*(-x) = f_0^*(x) \in H^\beta[0, a]$ ,  $0 < \beta \leq 1$  (см. лемма 8). В этом случае из (2.80) и (2.79) имеем:

$$\frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} f_0^*(t)}{t - x} dt d\tau = -\frac{\pi}{2} \psi^*(x) \quad (2.87)$$

$$\psi^*(x) = -\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau \sqrt{a^2 - \tau^2} f_0^*(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau, \quad (0 < x < a). \quad (2.88)$$

Это следствие играет фундаментальную роль, так как:

- 1<sup>0</sup>. Дает связь между теоремой 2 и леммой 6.
- 2<sup>0</sup>. Дает возможность свести класс сингулярных интегральных уравнений первого рода типа Коши к интегральным фредгольмовым уравнениям второго рода с непрерывным ядром.
- 3<sup>0</sup>. Если  $\delta = 0$ , то формула

$$\frac{1}{\pi} V.p. \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} f_0^*(t)}{t - x} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^a \frac{t \sqrt{a^2 - t^2} f_0^*(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt d\tau \quad (2.89)$$

$$(0 < x < a)$$

дает возможность вычислить главное значение особого интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} f_0^*(t)}{t - x} dt.$$

Например, если  $f_0^*(x) \equiv 1$ , то из (2.89) и (2.88) находим:

$$\frac{1}{\pi} V.p. \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt = -x, \quad \psi^*(x) = x \quad (0 < x < a).$$

**§3 Анализ формулы в (2.74).** Лемма 2 дает возможность провести анализ формулы в (2.74). Поскольку в теореме 1 функция  $f(x) \in K_\delta[0, a]$  (см. определение 2), то из леммы 2 следует, что функция  $\psi(x) \in K_{\delta_1}[0, a]$ , где  $\delta_1 = \delta - \frac{1}{2}$ .

Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. Пусть  $f(x) \in K_\delta[0, a]$  и пусть  $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ . Тогда пусть в силу леммы 2  $\psi(x) \in C[0, a]$ , и, следовательно, равенство в (2.74) имеет место при  $0 \leq x \leq a$ .

Случай 2. Пусть  $f(x) \in K_\delta[0, a]$  и пусть  $\frac{1}{2} < \delta < 1$ . Тогда в силу леммы 2 функция  $\psi(x) \in K_{\delta_1}[0, a]$ ,  $\delta_1 = \delta - \frac{1}{2}$  ( $0 < \delta_1 < \frac{1}{2}$ ), т. е.

$$\psi(x) = \frac{\psi_0(x)}{(a^2 - x^2)^{\delta_1}}, \quad \psi_0(-x) = \psi_0(x) \in C[0, a]. \quad (3.1)$$

Поэтому равенство в (2.74) имеет место при  $0 \leq x < a$ .

Из (2.74) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_x^a \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f_0(t)}{(a^2 - t^2)(t - \tau)} dt d\tau d\xi = \\ & = \frac{\pi}{2} \int_x^a \frac{\xi \psi_0(\xi)}{(a^2 - \xi^2)^{\sigma_1} \sqrt{\xi^2 - x^2}} d\xi \equiv \Psi^*(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$f_0(-t) = -f_0(t)$ ,  $f_0(t) \in H^\beta[0, a]$ , ( $\frac{1}{2} < \delta < \beta \leq 1$ ).

Покажем, что  $\Psi^*(x) \in C[0, a]$ . Действительно,

$$\Psi^*(x) = \frac{\pi}{2} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2} - \delta_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{1 - 2\delta_1} \psi(\sqrt{x^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}) d\phi$$

( $0 < \delta_1 < \frac{1}{2}$ ),

откуда следует, что  $\Psi^*(x) \in C[0, a]$ , причем  $\Psi^*(a) = 0$ .

Случай 3. Пусть  $f(x) \in K_{1/2}[0, a]$ . Тогда в силу леммы 2  $\psi(x) \in C[0, a]$ . В этом случае из (2.74) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f_0(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}(t - \tau)} dt d\tau = \frac{\pi}{2} \psi(x), \quad (3.3)$$

$$f_0(-t) = -f_0(t), \quad f_0(t) \in H^\beta[0, a], \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1. \quad (3.4)$$

Для любых трех случаев в силу леммы 3 и леммы 5 имеет место равенство

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a t \psi(t) J_0(\lambda t) dt \quad (3.5)$$

для любых  $\lambda \in ]0, \infty[$ . Это равенство остается в силе, если  $\lambda$  — чисто мнимое. Тогда из 3.5 следует:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f(t) \frac{\operatorname{sh} \lambda t}{\lambda} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a t \psi(t) I_0(\lambda t) dt \quad (3.6)$$

( $0 < \lambda < \infty$ ).

Случай 3 играет фундаментальную роль в теории трещин. Поэтому продолжим исследования для этого случая.

**§4. Важные теоремы.** Ниже для случая 3 доказываются три теоремы, которые играют важную роль:

– дают возможность свести класс сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядром Коши к интегральным уравнениям Фредгольма с непрерывным ядром и обратно;

– дают существенный вклад в теории асимптотического анализа.

В этом случае функции  $\psi(x)$  и  $f(x)$  связаны между собой формулами

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0(t)}{\sqrt{a^2 - t^2} \sqrt{t^2 - x^2}} dt, \quad (4.1)$$

$$f_0(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{t \psi(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt, \quad (4.2^1)$$

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad f_0(-x) = -f_0(x), \quad \psi(-x) = \psi(x). \quad (4.2^2)$$

Здесь возникают два вопроса:

Первый вопрос. Если  $f_0(x) \in H^\beta[0, a]$ , где  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ , то функция  $\psi(x)$ , определяемая по формуле (4.1), в силу леммы 2 принадлежит классу непрерывных функций  $C[0, a]$ . Удовлетворяет ли условию Гельдера с показателем  $\beta$  функция  $\psi(x)$ , непрерывная на отрезке  $[0, a]$ , если  $f_0(x) \in H^\beta[0, a]$ ?

Второй вопрос. Удовлетворяет ли условию Гельдера с показателем  $\beta$  функция  $f_0(x)$ , непрерывная на отрезке  $[0, a]$ , если  $\psi(t) \in H^\beta[0, a]$ ?

На первый вопрос отвечает теорема 3, а на второй вопрос – теорема 4.

**Теорема 3.** Пусть  $f_0(t) \in H^\beta[0, a]$ ,  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ . Тогда непрерывная на отрезке  $[0, a]$  функция  $\psi(x)$ , определяемая по формуле (4.1), принадлежит классу функций Гельдера  $H^\beta[0, a]$  с тем же показателем  $\beta$ .

Доказательство. Из (4.1) имеем

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_0(\sqrt{x^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}) d\phi}{\sqrt{x^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}}. \quad (4.3)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(x_1)| &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{f_0(\sqrt{x^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi})}{\sqrt{x^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}} - \frac{f_0(\sqrt{x_1^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi})}{\sqrt{x_1^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}} \right| d\phi \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} C |x^2 - x_1^2|^\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^2 \phi|^\beta d\phi \leq C |x^2 - x_1^2|^\beta, \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1. \end{aligned}$$



Следовательно,  $\psi(x) \in H^\beta[0, a]$ ,  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ .

Теорема 3 доказана.

Следствие 4. Если  $f(x) \in K_{1/2}[0, a]$ , т.е. если

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}, f_0(-x) = -f_0(x), f_0(x) \in H^\beta[0, a], \frac{1}{2} < \beta \leq 1, \quad (4.4)$$

то в силу теоремы 1 имеет место равенство в (3.3), причем в этом равенстве функция  $\psi(x)$ , определяемая по формуле (4.1), является непрерывной функцией на отрезке  $[0, a]$  (см. лемму 2) и принадлежит классу функций  $H^\beta[0, a]$  ( $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ ).

**Определение 6.** Под  $\psi(x) \in B[0, a]$  понимается:

1<sup>0</sup>. Функция  $\psi(x)$  определяется формулой

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0(\tau)}{\sqrt{a^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (4.5)$$

2<sup>0</sup>.  $Im \psi(\pm x) \equiv 0$ ,  $\psi(-x) = \psi(x)$ ,  $\psi(x) \in C[0, a]$ ,  $Im f_0(\pm x) = 0$ .

3<sup>0</sup>.  $\psi(x) \in H^\beta[0, a]$ , где  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ , т. е.

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| < C |x_1^2 - x_2^2|^\beta.$$

Из (4.5) следует, что

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (4.6)$$

Имеет место

**Теорема 4.** Пусть функции  $\psi(x)$  и  $f(x)$  связаны между собой формулами:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{f_0(\tau) d\tau}{(a^2 - \tau^2)^{1/2}} \sqrt{\tau^2 - x^2},$$

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^a \frac{\tau \psi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Далее, пусть  $\psi(x) \in B[0, a]$ . Тогда функция  $f(x)$  принадлежит классу функций  $K_{1/2}[0, a]$ , то есть:

$$f_0(-x) = -f_0(x), \quad f_0(a) = a\psi(a), \quad f_0(x) \in H^\beta[0, a], \quad \left(\frac{1}{2} < \beta \leq 1\right).$$

**Доказательство.** Поскольку  $\psi(x) \in B[0, a]$ , то  $f_0(-x) = -f_0(x)$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \psi(-x) &= \frac{2}{\pi} \int_{-x}^a \frac{f_0(\tau)}{\sqrt{a^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi i} \int_{-x}^x \frac{f_0(\tau)}{\sqrt{a^2 - \tau^2} \sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau + \int_x^a \frac{f_0(\tau)}{\sqrt{a^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi i} \int_{-x}^x \frac{f_0(\tau)}{\sqrt{a^2 - \tau^2} \sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau + \psi(x).$$

Поскольку  $Im\psi(\pm x) = 0$  и  $Imf_0(\pm x) = 0$ , то

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{f_0(\tau) + f_0(-\tau)}{\sqrt{a^2 - \tau^2} \sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = 0 \quad (0 < x < a).$$

Отсюда следует, что

$$f_0(-\tau) = -f_0(\tau),$$

так как  $f_0(\tau) \neq 0$ ,  $f_0(-\tau) \neq 0$ ,  $f_0(\tau) \in C[0, a]$ .

Далее, из (4.6) имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{d}{dx} \int_{x+\varepsilon}^a \frac{\tau \psi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} = \\ &= \frac{(x+\varepsilon)\psi(x+\varepsilon) - x\psi(x)}{\sqrt{2x+\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}} + \frac{x\psi(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \\ &\quad - x \int_{x+\varepsilon}^a \frac{\tau[\psi(\tau) - \psi(x)]}{(\tau^2 - x^2)\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Поскольку  $\psi^+(x) \in B[0, a]$ , то первое слагаемое в (4.7) при  $\varepsilon \rightarrow +0$  исчезает, а интеграл в (4.7) при  $\varepsilon \rightarrow +0$  существует как несобственный интеграл.

Поэтому

$$f(x) = \frac{x\psi(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - x \int_x^a \frac{\tau[\psi(\tau) - \psi(x)]}{(\tau^2 - x^2)\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau. \quad (4.8)$$

Формулу (4.8) можно записать так:

$$f_0(x) = x\psi(x) - x \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \left[ \psi \left( \sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \right) - \psi(x) \right] d\varphi. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что  $f_0(a) = a\psi(a)$ .

Остается доказать, что если  $\psi(x) \in B[0, a]$ , то  $f_0(x) \in H^\beta[0, a]$ .

Пусть  $f_0(x) = x\omega(x)$ . Тогда из (4.9) следует:

$$\omega(x) = \psi(x) - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \left[ \psi \left( \sqrt{x^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi} \right) - \psi(x) \right] d\phi. \quad (4.10)$$

Из (4.10) нетрудно получить:

$$\begin{aligned} |\omega(x) - \omega(x_1)| &< \{|\psi(x) - \psi(x_1)| + \\ &+ \frac{1}{2\beta - 1} [C_1 (a^2 - x^2)^\beta + C_2 (a^2 - x_1^2)^\beta]\} = \\ &= \{|\psi(x) - \psi(x_1)| + \psi(a) - \psi(a)\} + \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\beta - 1} \left[ C_1 (a^2 - x^2)^\beta + C_2 (a^2 - x_1^2)^\beta \right] \Big\} \leq \\
 & \leq \{ |\psi(a) - \psi(x)| + |\psi(a) - \psi(x_1)| + \\
 & + \frac{1}{2\beta - 1} \left[ C_1 (a^2 - x^2)^\beta + C_2 (a^2 - x_1^2)^\beta \right] \Big\} < \\
 & < \left\{ C_3 (a^2 - x^2)^\beta + C_4 (a^2 - x_1^2)^\beta + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2\beta - 1} \left[ C_1 (a^2 - x^2)^\beta + C_2 (a^2 - x_1^2)^\beta \right] \right\} = \\
 & = C_1^* (a^2 - x^2)^\beta + C_2^* (a^2 - x_1^2)^\beta,
 \end{aligned}$$

$$C_1^* = C_3 + \frac{1}{2\beta - 1} C_1,$$

$$C_2^* = C_4 + \frac{1}{2\beta - 1} C_2 \quad (0 < (2\beta - 1) \leq 1, x \neq x_1), \quad (4.12)$$

так как  $\psi(x) \in H^\beta [0, a]$ ,  $\psi(-x) = \psi(x)$ .

Из (4.11) следует, что  $\omega(x) \in H^\beta [0, a]$ , где  $1/2 < \beta \leq 1$  и, следовательно,  $f(x) \in H^\beta [0, a]$  ( $1/2 < \beta \leq 1$ ).

Теорема 4 доказана.

Следствие 5. Если  $\psi(-x) = \psi(x) \in H^\beta [0, a]$ ,  $1/2 < \beta \leq 1$ , то в силу теоремы 4 имеет место равенство в (3.3), так как  $f(x) \in K_{1/2} [0, a]$ .

Следствие 6. В силу лемм 3 и 5 и теорем 3 и 4 имеем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{f_0(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a t \psi(t) J_0(\lambda t) dt, \quad (4.13)$$

причем, если  $f_0(t) \in H^\beta [0, a]$ ,  $1/2 < \beta \leq 1$ , то  $\psi(t) \in H^\beta [0, a]$ ,  $1/2 < \beta \leq 1$ , и наоборот.

Еще раз заметим, что функции  $\psi(t)$  и  $f(t)$  в (4.13) связаны между собой формулами (4.1) и (4.2).

Из (4.13) с помощью теоремы 1 в смысле Эрдейи и теоремы 2 в смысле Эрдейи, доказанных нами в [2] (см. С. 194–200), без применения “нейтрализатора”, введенного ван дер Корпутом (см., например, [6] С. 40–42), а также с помощью следствия 3 в [2] (см. С. 204) имеем:

1<sup>0</sup>. Если  $\beta = 1$ , т. е. если  $f_0(t) \in C^1 [0, a] = H^1 [0, a]$  (или  $\psi(t) \in C^1 [0, a]$ ), то

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{f_0(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a t \psi(t) J_0(\lambda t) dt = \\
 & = \frac{1}{\lambda^{3/2}} \frac{f_0(a)}{\sqrt{a}} \sin \left( \lambda a - \frac{\pi}{4} \right) + O(\lambda^{-5/2}) = \\
 & = \frac{1}{\lambda^{3/2}} \sqrt{a} \psi(a) \sin \left( \lambda a - \frac{\pi}{4} \right) + O(\lambda^{-5/2}) (\lambda \rightarrow +\infty).
 \end{aligned} \quad (4.14)$$

2<sup>0</sup>. Если  $1/2 < \beta < 1$ , т. е. если  $f_0(t) \in H^\beta [0, a]$  (или  $\psi(t) \in H^\beta [0, a]$ ), то имеет место асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{f_0(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a t \psi(t) J_0(\lambda t) dt \sim \\ &= \frac{1}{\lambda^{3/2}} \sqrt{a} \psi(a) \sin\left(\lambda a - \frac{\pi}{4}\right) (\lambda \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Существенное усиление результата (4.15) вряд ли возможно. Поэтому результат (4.15) является большим вкладом в теории асимптотического анализа. Формулы (4.14) и (4.15) играют важную роль в теории трещин.

Имеет место

**Теорема 5.** Пусть в равенстве (3.3) функция  $f_0(t)$  обладает свойствами:

1<sup>0</sup>.  $f_0(t) \in H^1[0, a]$ , т. е.  $f_0(t) \in Lip[-a, a]$ ,  $f_0(-t) = -f_0(t)$ .

2<sup>0</sup>.  $f_0'(t) \in H^\beta[-a, a]$ ,  $1/2 < \beta < 1$ . (4.16)

Тогда  $\psi(x) \in C^1[0, a]$ ,  $[x\psi'(x)] \in H^\beta[-a, a]$ ,  $1/2 < \beta < 1$  (см. (3.3)).

Доказательство. Равенство (3.3) с учетом (2.76<sup>2</sup>) представим в виде:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2-\tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) - f_0(\tau)}{\sqrt{a^2-t^2}(t-\tau)} dt d\tau = \frac{\pi}{2} \psi(x). \quad (4.17)$$

Рассмотрим функцию

$$\Theta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2-\tau^2}} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) - f_0(\tau)}{\sqrt{a^2-t^2}(t-\tau)} dt d\tau \right\}. \quad (4.18)$$

Если  $\Theta(x) \in C[0, a]$ , то  $\psi(x) \in C^1[0, a]$ , что следует из (4.18) и (4.17).

Докажем, что  $\Theta(x) \in C[0, a]$ .

Из (4.17), сначала интегрируя по частям интеграл, стоящий внутри фигурной скобки, а затем дифференцируя полученное выражение, находим

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \frac{1}{\pi x} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2-\tau^2}} \left[ \frac{d}{d\tau} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) - f_0(\tau)}{\sqrt{a^2-t^2}(t-\tau)} dt \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi x} \int_0^x \frac{\tau}{\sqrt{x^2-\tau^2}} \left[ \int_{-a}^a \frac{f_0(t) - f_0(\tau) - f_0'(\tau)(t-\tau)}{\sqrt{a^2-t^2}(t-\tau)^2} dt \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Это равенство справедливо, так как  $f_0(t) \in Lip[-a, a]$  и, следовательно,  $f_0'(x) \in C[-a, a]$ .

Поскольку считается, что непрерывная на отрезке  $[-a, a]$  функция  $f_0'(x)$  удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\beta$  ( $1/2 < \beta < 1$ ), то

$$f_0(t) - f_0(\tau) = \int_{\tau}^t f'(u) du, \quad f_0'(\tau)(t-\tau) = \int_{\tau}^t f_0(\tau) du. \quad (4.20)$$

Имеет место

$$\frac{f_0(t) - f_0(\tau) - f_0'(\tau)(t-\tau)}{(t-\tau)^2} = \frac{\int_{\tau}^t [f_0'(u) - f_0'(\tau)] du}{(t-\tau)^2}. \quad (4.21)$$

Полагая, что  $r = |u - \tau|$  и  $\rho = |t - \tau|$ , из (4.21) имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\int_{\tau}^t [f'_0(u) - f'_0(\tau)] du}{(t - \tau)^2} \leq \frac{C \int_0^{\rho} r^{\beta} dr}{\rho^2} = \\ & = \frac{C}{\beta + 1} \cdot \frac{\rho^{\beta}}{\rho} = \frac{C}{\beta + 1} \cdot \frac{1}{|t - \tau|^{1-\beta}} \quad (1/2 < \beta < 1), \end{aligned} \quad (4.22)$$

так как  $f'_0(x) \in H^{\beta}[-a, a]$ .

Здесь  $C$  — постоянная Гельдера. Поскольку  $0 < 1 - \beta < 1/2$ , то из (4.20)–(4.22) следует, что подынтегральная функция находящегося внутри квадратной скобки интеграла в правой части равенства (4.19) будет интегрируемой на отрезке  $[-a, a]$ . Следовательно, функция  $\Phi(\tau)$ , определяемая по формуле

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(t)}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - \tau)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) - f_0(\tau)}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - \tau)} dt \\ & \quad (|\tau| < a), \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям:

$$\Phi(\tau) \in H^1[-a, a], \quad (4.23)$$

$$\Phi'(\tau) \in H^{\beta}[-a, a], \quad 1/2 < \beta < 1. \quad (4.24)$$

Эти же результаты следуют из предложений, сформулированных в [3] (см. §7, С. 27–28, §18, С. 58–63). Теперь вернемся к формуле (4.19). Формулу (4.19) можно записать так:

$$x\mathcal{E}(x) = \int_0^x \frac{\Phi'(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \int_0^{\pi/2} \Phi'(x \sin \theta) d\theta. \quad (4.25)$$

Из (4.25) в силу (4.23) сразу следует, что  $[x\mathcal{E}(x)] \in C[0, a]$  и, следовательно,  $\psi'(x) \in C[-a, a]$ . С другой стороны, из (4.25) в силу (4.24) имеем:

$$\begin{aligned} |x\mathcal{E}(x) - x_1\mathcal{E}(x_1)| &= \int_0^{\pi/2} |\Phi'(x \sin \theta) - \Phi'(x_1 \sin \theta)| d\theta < \\ &< C |x^2 - x_1^2|^{\beta}, \quad \Phi'(-x) = \Phi'(x) \quad (0 \leq x, x_1 \leq a). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\psi(x) \in C^1[0, a], \quad (4.26)$$

$$[x\psi'(x)] \in H^{\beta}[-a, a], \quad 1/2 < \beta < 1. \quad (4.27)$$

Теорема 5 доказана.

Данная теорема играет большую роль при решении конкретных задач в теории трещин.

Теорема 3 (или теорема 5) дает возможность определить асимптотику интеграла

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a t\psi(t) J_0(\lambda t) dt \quad (4.28)$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$  с большой точностью.

Покажем это.

Принимая во внимание [2]

$$J_0(u) = \frac{J_1(u)}{u} + \frac{dJ_1(u)}{du},$$

интеграл (4.28) представим в виде

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a t\psi(t) J_0(\lambda t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{\lambda} a\psi(a) J_1(\lambda a) + \Psi(\lambda) \right\}. \quad (4.29)$$

Здесь

$$\Psi(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^a \gamma(t) J_1(\lambda t) dt, \quad (4.30)$$

$$\gamma(t) = t\psi'(t). \quad (4.31)$$

Поскольку  $\psi(-t) = \psi(t)$ , то  $\psi'(-t) = -\psi'(t)$ .

В [2] (см. С. 207–222) автором данной статьи, используя формулу Сонина для функции Бесселя  $J_\nu(w)$  ( $\text{Re } \nu > 0$ ), где  $\nu$  — любое, и формулу Бурмана – Лагранжа об обращении степенных рядов, методом перевала получено асимптотическое представление функции Бесселя  $J_\nu(w)$  (см. (2.4.87) в [2]). С помощью формулы (2.4.87), соблюдая условие Н. Г. де Брейна [7] (см. С. 27) о почленном интегрировании асимптотического представления функции  $J_1(\lambda t)$ , можно показать, что:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a t\psi(t) J_0(\lambda t) dt &= \frac{1}{\lambda^{3/2}} \sqrt{a}\psi(a) \times \\ &\times \left[ \sin\left(\lambda a - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8\lambda a} \cos\left(\lambda a - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{15}{64(\lambda a)^2} \sin\left(\lambda a - \frac{\pi}{4}\right) \right] + O(\lambda^{-\frac{9}{2}}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

При получении формулы (4.32) из (4.29) и (4.30) использована теорема 1 в смысле Эрдейи и предположено, что функция  $\gamma(t)$  в точке  $t = 0$  имеет нуль второго порядка.

**§5 Простой способ обращения сингулярного (особого) интеграла с ядром Коши.** Пусть  $f(x) \in K_{1/2}[-a, a]$ , то есть:

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}, f_0(-x) = -f_0(x), \quad f_0(x) \in H^\beta[-a, a], \quad (5.1)$$

$$1/2 < \beta \leq 1.$$

Тогда из теоремы 1 (см. (2.70) и (2.71)) имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(t)}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} dt = F(x), \quad (5.2)$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau \gamma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau, \quad (5.3)$$

$$\gamma(\tau) = \int_\tau^a \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt = \int_\tau^a \frac{f_0(t)}{\sqrt{a^2 - t^2} \sqrt{t^2 - \tau^2}} dt, \quad (5.4)$$

$$\gamma(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} \psi(\tau), F(-x) = F(x). \quad (5.5)$$

Поскольку  $f_0(x) \in H^\beta[-a, a]$ , то  $F(x) \in H^\beta[-a, a]$ , что следует из теоремы 3 и 4, а также непосредственно из (5.2).

Пусть  $F(x) \in H^\beta[-a, a]$  — некоторая заданная функция. Требуется найти решение сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt = F(x), \quad (5.6)$$

если  $f(x) \in K_{1/2}[-a, a]$  (см. (5.1)).

Из (5.3) в силу леммы 7 получаем:

$$\gamma(\tau) = \int_0^\tau \frac{F(t)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} dt. \quad (5.7)$$

Из (5.7) и (5.4) получаем:

$$\int_\tau^a \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} dt = \int_0^\tau \frac{F(t)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} dt. \quad (5.8)$$

Из (5.8) следует:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2}} \left[ \int_0^t \frac{F(\tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \right] dt \quad (5.9)$$

$(0 < x < a).$

Поскольку считается, что непрерывная функция  $F(x) \in H^\beta[-a, a]$ , где  $1/2 < \beta \leq 1$ , является известной функцией, то формула (5.9) есть формула обращения особого интеграла с ядром Коши с плотностью, удовлетворяющей условиям (5.1).

Из (5.9) после элементарных выкладок имеем:

$$\begin{aligned} -\pi f(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^{x-\varepsilon} F(\tau) \left\{ \ln \left[ 2\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - \tau^2)} + (a^2 - x^2) + (a^2 - \tau^2) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \ln(x^2 - \tau^2) \right\} d\tau + \frac{d}{dx} \int_{x+\varepsilon}^a F(\tau) \left\{ \ln \left[ 2\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - \tau^2)} + (a^2 - x^2) + (a^2 - \tau^2) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \ln(\tau^2 - x^2) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} -\pi f(x) &= F(x + \varepsilon) \ln \left[ (x + \varepsilon)^2 - x^2 \right] - F(x - \varepsilon) \ln \left[ x^2 - (x - \varepsilon)^2 \right] + \\ &\quad + F(x - \varepsilon) \ln \left\{ 2\sqrt{(a^2 - x^2) \left[ a^2 - (x - \varepsilon)^2 \right]} + (a^2 - x^2) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ a^2 - (x - \varepsilon)^2 \right] \right\} - F(x + \varepsilon) \ln \left\{ 2\sqrt{(a^2 - x^2) \left[ a^2 - (x + \varepsilon)^2 \right]} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a^2 - x^2) + [a^2 - (x + \varepsilon)^2] \Big\} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{x-\varepsilon} F(\tau) \frac{2x\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau^2 - x^2} d\tau + \\
& + \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{x+\varepsilon}^a F(\tau) \frac{2x\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau^2 - x^2} d\tau. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Поскольку четная непрерывная на отрезке  $[-a, a]$  функция  $F(x) \in H^\beta[-a, a]$ , где  $1/2 < \beta \leq 1$ , то вне интегральные выражения в (5.10) при  $\varepsilon \rightarrow +0$  исчезают. Поэтому из (5.1) приходим к формуле:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a F(\tau) \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau - x} d\tau. \tag{5.11}$$

Отсюда видно, что, если плотность  $f(x)$  особого интеграла с ядром Коши (5.2) удовлетворяет условиям (5.1), то решение сингулярного интегрального уравнения (5.6) определяется однозначно по формуле (5.11) и оправдывает справедливость формулы (1.3).

Пусть теперь в теореме 2 функция  $f^*(x)$  удовлетворяет условиям:

$$f^*(x) = \sqrt{a^2 - x^2} f_0^*(x), f_0^*(-x) = f_0^*(x) \in H^\beta[-a, a], \quad 1/2 < \beta \leq 1. \tag{5.12}$$

Поскольку  $f_0^*(x) \in H^\beta[-a, a]$ , то функция  $F^*(x)$ , определяемая по формуле (2.86), удовлетворяет условиям:

$$F^*(-x) = -F^*(x), F^*(x) \in H^\beta[-a, a]. \tag{5.13}$$

Пусть функция  $F^*(x)$  — некоторая заданная функция. Тогда с помощью (2.86) и (2.89) приходим к формуле обращения особого интеграла (2.86):

$$f^*(x) = -\frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{1}{\sqrt{t^2 - x^2}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau F^*(\tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau dt. \tag{5.14}$$

Из (5.14) с учетом (5.13) после элементарных выкладок получаем:

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\tau F^*(\tau)}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} d\tau - \\
& - \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau - x} F^*(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$f^*(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{F^*(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - x)},$$

причем (см. (5.13)):

$$\int_{-a}^a \frac{F^*(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} = 0.$$



В заключение автор выражает искреннюю благодарность проф. Е. Я. Клименкову за обсуждение данной работы, а также старшему преподавателю кафедры прикладной математики Н. Л. Борисовой за ее творческое редактирование и оформление.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кулиев, В. Д.* Обращение особого интеграла с обобщенным ядром Коши и одно его применение // Сборник трудов X Международной научной школы “Гидродинамика больших скоростей” и Международной научной конференции “Гидродинамика. Механика. Энергетические установки.” (к 145 - летию со дня рождения академика А. Н. Крылова). – Чебоксары : ЧПИ МГОУ, 2008. – С. 317–333.
- [2] *Кулиев, В. Д.* Сингулярные краевые задачи / В. Д. Кулиев. – М. : Физматлит, 2005. – 720 с.
- [3] *Мухелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 513 с.
- [4] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
- [5] *Кулиев, В. Д.* Новая формула суммирования функциональных рядов и некоторые ее приложения (ч.1) / В. Д. Кулиев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 107–118.
- [6] *Копсон, Э.* Асимптотические разложения / Э. Копсон. – М. : Мир, 1966. – 160 с.
- [7] *Де Брейн, Н. Г.* Асимптотические методы в анализе / Н. Г. Де Брейн. – М. : Мир, 1961. – 245 с.

*Кулиев Валех Джафарович,*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва*

*e-mail: pmdekanat@rambler.ru*

V. D. Kuliev

## NEW EFFECTIVE METHOD FOR SOLVING A CLASS OF MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM

*Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow*

**Abstract.** The paper developed two methods. The first method allows you to find solution singular integral with the generalized Cauchy kernel.

The second method allows us to reduce class of singular integral equations of the first kind of Cauchy type to linear Fredholm integral equations of the second kind with a continuous kernel and back. The results obtained in this paper formulas make it possible simply to calculate the principal value of the integral of Cauchy type. A new method of solution of a singular integral with the Cauchy kernel.

The developed methods allow to construct a solution of mixed class of boundary value problems. As an example, built a new solution of the boundary value problem and revealed previously unknown phenomena (see. Article VD Guliyev and NL Borisova "longitudinal shear crack, located on the border between two biuprugih strips of different thickness. The new phenomena").

**Keywords:** core, singular integral equations, mixed boundary value problems of integral of Cauchy type, the Fredholm equation.

### REFERENCES

- [1] *Kuliev, V. D.* The address of special integral with the generalized Cauchy's kernel and one it application // Collection of works X of the International school of sciences "Hydrodynamics big speeds" and International scientific conference "Hydrodynamics. Mechanics. Power stations." (to 145 - to the anniversary since birth academician A. N. Krylova). – Cheboksary : ChPI MSOU, 2008. – P. 317–333. (in Russian)
- [2] *Kuliev, V. D.* Singular regional tasks / V. D. Kuliev. – M. : Fizmatlit, 2005. – 720 p. (in Russian)
- [3] *Muskhelishvili, N. I.* Singular integrated equations / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1966. – 513 p. (in Russian)
- [4] *Gakhov, F. D.* Regional tasks / F. D. Gakhov. – M. : Nauka, 1977. – 640 p. (in Russian)
- [5] *Kuliev, V. D.* New formula of summation of functional ranks and some it appendices (part 1) / V. D. Kuliev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 1 (15). – P. 107–118. (in Russian)
- [6] *Kopson, E.* Asymptotic decomposition / E. Kopson. – M. : Mir, 1966. – 160 p. (in Russian)
- [7] *De Breyn, N. G.* Asymptotic methods in the analysis / N. G. De Breyn. – M. : Mir, 1961. – 245 p. (in Russian)

*Kuliev, Valekh Dzhafarovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of the Higher Mathematics, Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow*

Н. М. Калантарлы

## РОСТ ТРЕЩИНЫ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ В КОНЦЕВЫХ ЗОНАХ В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕВОМ ДИСКЕ

*Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку*

**Аннотация.** Предложена модель разрушения вращающегося диска, основанная на исследовании зоны процесса разрушения вблизи кончика трещины. Принято, что зона предразрушения представляет собой слой конечной длины, в котором между отдельными структурными элементами материала частично нарушены связи (концевая зона). Наличие связей между берегами трещины в концевой зоне моделируется приложением к поверхности трещины сил сцепления, вызванных присутствием связей. Получена зависимость предельной скорости равномерного вращения кольцевого диска от длины трещины.

**Ключевые слова:** равномерно вращающийся кольцевой диск, трещина со связями между берегами, сила сцепления, зона предразрушения.

УДК: 539.375

**Введение.** Разнообразное применение кольцевых дисков и, зачастую, сложные условия эксплуатации делают исследование их напряженно-деформированного состояния и разрушения весьма востребованной задачей. Этой задаче посвящена обширная литература (см. обзор в монографиях [1], [2]). В настоящей работе для равномерно вращающегося кольцевого диска используется модель трещины со связями между берегами [3]–[7].

**Постановка задачи.** Рассмотрим кольцевой диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к плоскости сечения диска и проходящей через ее центр. Считается, что поперечное сечение кольцевого диска заполняет в плоскости  $z = x + iy$  область  $S$ , ограниченную извне и изнутри окружностями радиуса  $R_1$  и  $R$ , соответственно. Имеет место плоское напряженное состояние.

Принято, что в сечении диска имеется произвольно размещенная прямолинейная трещина с концевыми зонами предразрушения. Размер концевых зон предразрушения соизмерим с длиной трещины. В концевых зонах действуют связи между берегами. Размер концевых зон изначально неизвестен и определяется в процессе решения рассматриваемой задачи механики разрушения.

Отнесем кольцевой диск к полярной системе координат  $r\theta$ , выбрав начало координат в центре концентрических окружностей  $L_1$  и  $L$  с радиусами соответственно  $R_1$  и  $R$  (рис. 1). В центре прямолинейной трещины с концевыми зонами предразрушения поместим начало локальной системы координат  $x_1O_1y_1$ . Ось  $x_1$  образует угол  $\alpha_1$  с осью  $x$  ( $\theta = 0$ ) и совпадает с линией трещины.

Под действием инерционных сил в связях, соединяющих берега трещины в концевых зонах предразрушения, будут возникать нормальные  $q_{y_1}$  и касательные  $q_{x_1y_1}$  усилия. Следовательно, в концевых зонах к берегам трещины в диске приложены нормальные и касательные

напряжения, равные, соответственно,  $q_{y_1}$  и  $q_{x_1y_1}$ . Во внутренней области трещины (вне концевых зон) берега трещины свободны от внешних нагрузок.

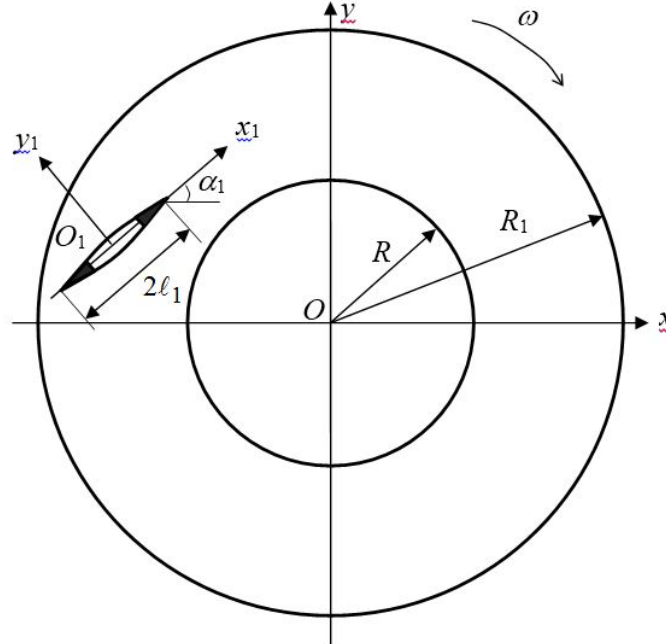


Рис. 1

Для исследования напряженно-деформированного состояния равномерно вращающегося кольцевого диска, ослабленного произвольно размещенной прямолинейной трещиной с концевыми зонами предразрушения, необходимо совместное решение уравнений теории упругости с объемными силами при следующих граничных условиях

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_1,$$

$$\sigma_{y_1} = 0; \quad \tau_{x_1y_1} = 0 \text{ при } y_1 = 0 \text{ и } x_1 \in (\lambda_1, \lambda_2), \quad (2)$$

$$\sigma_{y_1} = q_{y_1}; \quad \tau_{x_1y_1} = q_{x_1y_1} \text{ при } y_1 = 0, \quad x_1 \in [-\ell_1, \lambda_1] \text{ и } [\lambda_2, \ell_1],$$

где  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  — компоненты тензора напряжений.

Постановку рассматриваемой задачи необходимо дополнить уравнением, связывающим усилия в связях и перемещения раскрытия берегов концевых зон предразрушения

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = \Pi(x_1, \sigma_1) [q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1)]. \quad (3)$$

Здесь  $(v_1^+ - v_1^-)$  — нормальные и  $(u_1^+ - u_1^-)$  — касательные составляющие раскрытия берегов зон предразрушения; функция  $\Pi(x_1, \sigma_1)$  представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей;  $\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1y_1}^2}$  — модуль вектора усилий в соответствующих связях. При постоянном значении функции  $\Pi$  имеем в уравнении (3) линейный закон деформирования связей; в общем случае он нелинейный и задан.

**Метод решения краевой задачи.** Решение граничной задачи (1)–(2) ищем в виде суммы:

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r^1, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^1, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}^1. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$  — частное решение уравнений теории упругости для равномерно вращающегося кольцевого диска без трещины с концевыми зонами предразрушения;  $\sigma_r^1, \sigma_\theta^1, \tau_{r\theta}^1$  — искомые компоненты напряжений, вызванные наличием в сечении трещины с концевыми зонами предразрушения во вращающемся диске.

Компоненты напряжений  $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= -\frac{2\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)}\rho\omega^2 r^2 - \frac{p_1 R_1^2 - pR^2}{R_1^2 - R^2} + \frac{1}{r^2} \frac{(p_1 - p) R_1^2}{(R_1^2 - R^2)}, \\ \sigma_\theta^0 &= -\frac{2\lambda + \mu}{4(\lambda + 2\mu)}\rho\omega^2 r^2 - \frac{p_1 R_1^2 - pR^2}{R_1^2 - R^2} - \frac{1}{r^2} \frac{(p_1 - p) R^2 R_1^2}{(R_1^2 - R^2)}, \\ \tau_{r\theta}^0 &= 0; \quad p = -\frac{2\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)}\rho\omega^2 R^2; \quad p_1 = -\frac{2\lambda + 3\mu}{4(\lambda + 2\mu)}\rho\omega^2 R_1^2, \end{aligned}$$

где  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе;  $\rho$  — плотность материала.

Для определения второго напряженного состояния (компонент тензора напряжений  $\sigma_r^1, \sigma_\theta^1, \tau_{r\theta}^1$ ) имеем следующие краевые условия:

$$\sigma_r^1 - i\tau_{r\theta}^1 = 0 \quad |z| = R; \quad (5)$$

$$\sigma_r^1 - i\tau_{r\theta}^1 = 0 \quad |z| = R_1;$$

$$\sigma_{y_1}^1 - i\tau_{x_1 y_1}^1 = -(\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1 y_1}^0) \quad y_1 = 0, \quad x_1 \in (\lambda_1, \lambda_2); \quad (6)$$

$$\sigma_{y_1}^1 - i\tau_{x_1 y_1}^1 = q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} - (\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1 y_1}^0) \quad y_1 = 0, \quad x_1 \in [-\ell_1, \lambda_1] \text{ и } [\lambda_2, \ell_1].$$

Используя формулы Колосова – Мусхелишвили [8], граничные условия (5)–(6) представим в виде:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] = 0 \quad \tau = Re^{i\theta}; \quad (7)$$

$$\Phi(\tau_1) + \overline{\Phi(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_1\Phi'(\tau_1) + \Psi(\tau_1)] = 0 \quad \tau_1 = R_1 e^{i\theta};$$

$$y_1 = 0, \quad x_1 \in (\lambda_1, \lambda_2); \quad (8)$$

$$\Phi(x_1) + \overline{\Phi(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'(x_1)} + \overline{\Psi(x_1)} = q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} - (\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1 y_1}^0)$$

$$y_1 = 0, \quad x_1 \in [-\ell_1, \lambda_1] \text{ и } [\lambda_2, \ell_1].$$

Таким образом, задача сведена к определению двух функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , аналитических в кольцевой области  $S$ . Комплексные потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  ищем в следующем виде:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z); \quad (9)$$

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k; \quad (10)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t)dt}{t - z_1}; \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ \frac{\overline{g_1(t)}}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1(t) \right] dt. \quad (11)$$

Здесь  $g_1(t)$  — искомая функция, характеризующая раскрытие берегов трещины;  $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$ ;  $z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0)$ .

Неизвестная искомая функция  $g_1(x_1)$  и комплексные потенциалы  $\Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  должны быть определены из краевых условий на берегах трещины и контуре  $r = R_1$ . После некоторых преобразований и вычислений соответствующих интегралов, находим:

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left\{ \left( \frac{1}{z\bar{T}_1 - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_1 e^{i\alpha_1} g_1(t) + \left[ \frac{T_1}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_1 - 2z + T_1}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \right\} dt, \quad (12)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ \frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1(t) + \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1(t)} (z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1 \bar{T}_1^2 - 3T_1 \bar{T}_1) \right] dt.$$

В соотношениях (11), (12) искомая функция  $g_1(x_1)$ , характеризует раскрытие берегов трещины.

Для нахождения комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  имеем следующую краевую задачу

$$\Phi_0(\tau) + \bar{\Phi}_0(\tau) - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] = -(f_1^0 - if_2^0); \quad (13)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \bar{\Phi}_0(\tau_1) - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_1 \Phi'_0(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1)] = 0.$$

Здесь  $\tau = R e^{i\theta}$ ;  $f_1^0(\theta) - if_2^0(\theta) = \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]$ ;  $\tau_1 = R_1 e^{i\theta}$ ;  $\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ ;  $\Psi_*(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$ .

Решение краевой задачи (13) получаем методом степенных рядов. Удовлетворяя функциями (10) граничным условиям (13), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$ .

Для нахождения искомой функции  $g_1(x_1)$  необходимо функциями (9)–(12) удовлетворить граничным условиям на берегах прямолинейной трещины с концевыми зонами предразрушения при  $y_1 = 0$ ,  $x_1 \in [-\ell_1, \ell_1]$ . Тогда, после некоторых преобразований, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $g_1(x_1)$ :

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ R(t, x_1) g_1(t) + S(t, x_1) \overline{g_1(t)} \right] dt = \pi f(x_1) \quad x_1 \in [-\ell_1, \ell_1], \quad (14)$$

$$\text{где } f(x_1) = \begin{cases} f_0(x_1) & y_1 = 0 \quad x_1 \in (\lambda_1, \lambda_2) \\ q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} + f_0(x_1) & y_1 = 0 \quad x_1 \in [-\ell_1, \lambda_1] \text{ и } [\lambda_2, \ell_1] \end{cases}$$

$$f_0(x_1) = -(\sigma_{y_1}^0 - i\tau_{x_1 y_1}^0) - \left[ \Phi_0(x_1) + \overline{\Phi_0(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'_0(x_1)} + \overline{\Psi_0(x_1)} \right].$$

Функции  $R(t, x_1)$  и  $S(t, x_1)$  определяются по известным формулам [9].

К сингулярному интегральному уравнению нужно добавить уравнение, обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура трещины с концевыми зонами предразрушения

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1(x_1) dx_1 = 0. \quad (15)$$

В случае внешней трещины в уравнении (15) нет необходимости.

Сделав замену переменных  $\xi = t/\ell_1$  и  $\eta = x_1/\ell_1$ , переходим в интегральном уравнении (13) к безразмерным переменным. Решение интегрального уравнения (14) ищем в виде

$$g_1^0(\eta) = \frac{\varphi_0(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (16)$$

Применяя процедуру алгебраизации [9], [10] к сингулярному интегральному уравнению (14) и дополнительному условию (15), получим систему  $M$  алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g_1(t_m) = v_1^0(t_m) - iu_1^0(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell_1 \left[ \varphi_0(t_m) R(\ell_1 t_m, \ell_1 \eta_r) + \overline{\varphi_0(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 \eta_r) \right] = f(\eta_r); \quad (17)$$

$$\sum_{m=1}^M \varphi_0(t_m) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1),$$

где  $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ );  $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$  ( $r = 1, 2, \dots, M-1$ ).

Напряжения во вращающемся кольцевом диске всюду ограничены, поэтому решение сингулярного интегрального уравнения (14) ищется в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Следовательно, к системе алгебраических уравнений (17) добавляются условия разрешимости краевой задачи. В рассматриваемой задаче их можно записать как условия конечности напряжений в окрестности кончиков трещины с концевыми зонами предразрушения:

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m \varphi_0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0; \quad (18)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \varphi_0(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

Таким образом, получена замкнутая конечная комплексная алгебраическая система (17)–(18) для определения неизвестных  $\varphi_0(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) и размеров концевых зон предразрушения.

В правые части алгебраической системы (17) входят неизвестные значения  $q_{y_1}(x_1)$  и  $q_{x_1 y_1}(x_1)$  нормальных и касательных напряжений в узловых точках, содержащихся в зонах предразрушения. Используя полученное решение задачи, находим

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} \frac{d}{dx_1} [\Pi(x_1, \sigma_1) (q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1))]. \quad (19)$$

Комплексное дифференциальное уравнение (19) используется для нахождения напряжений  $q_{y_1}(x_1)$  и  $q_{x_1 y_1}(x_1)$  в связях между берегами концевых зон трещины.

Для построения недостающих алгебраических уравнений, с помощью которых находят-ся приближенные значения напряжений  $q_{y_1}(t_{m_1})$  и  $q_{x_1 y_1}(t_{m_1})$  ( $m_1 = 1, 2, \dots, M$ ) в узловых точках, требуем, чтобы в узловых точках  $t_{m_1}$ , содержащихся в концевых зонах, выполнялись условия (19). При этом используется метод конечных разностей. В результате получаем комплексную алгебраическую систему из  $M_1$  уравнений для определения приближенных значений  $q_{y_1}(t_{m_1})$  и  $q_{x_1 y_1}(t_{m_1})$  ( $m_1 = 1, 2, \dots, M$ ) в узловых точках зон предразрушения.

Алгебраическая система (17)–(19) из  $M + M_1 + 2$  уравнений оказалась из-за неизвестных размеров концевых зон трещины нелинейной даже в случае линейно-упругих связей. Для решения алгебраической системы (17)–(19) применяли метод последовательных приближений

и метод упругих решений А. А. Ильющина [11]. В каждом приближении линейная алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента.

Используя полученное решение задачи, найдем раскрытие трещины у края концевых зон, т.е. при  $x_1 = \lambda_1$  и для правого конца трещины при

$$v_1(\lambda_2, 0) - iv_1(\lambda_2, 0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{\lambda_2}^{\ell_1} g_1(x_1) dx_1; \quad (20)$$

для левого конца трещины при  $x_1 = \lambda_1$

$$v_1(\lambda_1, 0) - iv_1(\lambda_1, 0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{\lambda_1} g_1(x_1) dx_1. \quad (21)$$

Здесь  $v_1(x_0, 0) = v_1^+(x_0, 0) - v_1^-(x_0, 0)$ ;  $u_1(x_0, 0) = u_1^+(x_0, 0) - u_1^-(x_0, 0)$  при  $x_0 = \lambda_2$  для правой вершины трещины и  $x_0 = \lambda_0$  для левой вершины трещины.

Используя замену переменных и квадратурную формулу Гаусса к соотношениям (20) и (21), находим для правой вершины трещины:

$$v_1(\lambda_2, 0) - iv_1(\lambda_2, 0) - i(u_1(\lambda_2, 0) - iv_1(\lambda_2, 0)) = -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sum_{m=1}^{M_2} g_1(t_m); \quad (22)$$

для левой вершины трещины:

$$v_1(\lambda_1, 0) - iv_1(\lambda_1, 0) - i(u_1(\lambda_1, 0) - iv_1(\lambda_1, 0)) = -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_1} \sum_{m=1}^{M_1} g_1(t_m). \quad (23)$$

Здесь  $M_2$  — число узловых точек, содержащихся в отрезке  $(\lambda_2, \ell_1)$ ,  $M_1$  — число узловых точек в отрезке  $(-\ell_1, \lambda_1)$ .

Отделяя действительную и мнимую части в соотношениях (21), (22), находим для правой вершины трещины (у края концевой зоны):

$$\begin{aligned} v_1(\lambda_2, 0) - v_1(\lambda_2, 0) &= -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sum_{m=1}^{M_2} v_1^0(t_m), \\ u_1(\lambda_2, 0) - u_1(\lambda_2, 0) &= -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sum_{m=1}^{M_2} u_1^0(t_m); \end{aligned}$$

для левой вершины трещины:

$$\begin{aligned} v_1(\lambda_1, 0) - v_1(\lambda_1, 0) &= -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_1} \sum_{m=1}^{M_1} v_1^0(t_m), \\ u_1(\lambda_1, 0) - u_1(\lambda_1, 0) &= -\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_1} \sum_{m=1}^{M_1} u_1^0(t_m). \end{aligned}$$

Для модуля раскрытия берегов трещины у основания концевой зоны предразрушения находим

для правой вершины трещины

$$V_1^r = \sqrt{[v_1^+(\lambda_2, 0) - v_1^-(\lambda_2, 0)]^2 + [u_1^+(\lambda_2, 0) - u_1^-(\lambda_2, 0)]^2} = \quad (24)$$



$$= \frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sqrt{A_1^2 + A_2^2};$$

для левой вершины трещины

$$\begin{aligned} V_1^l &= \sqrt{[v_1^+(\lambda_1, 0) - v_1^-(\lambda_1, 0)]^2 + [u_1^+(\lambda_1, 0) - u_1^-(\lambda_1, 0)]^2} = \\ &= \frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sqrt{A_3^2 + A_4^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $A_1 = \sum_{m=1}^{M_2} v_1^0(t_m)$ ;  $A_2 = \sum_{m=1}^{M_2} u_1^0(t_m)$ ;  $A_3 = \sum_{m=1}^{M_1} v_1^0(t_m)$ ;  $A_4 = \sum_{m=1}^{M_1} u_1^0(t_m)$ .

В качестве критерия разрушения используем критерий критического раскрытия трещины. Таким образом, условием, определяющим критическое значение величины угловой скорости вращения кольцевого диска, при которой трещина начнет расти, будет:  
для правой вершины трещины

$$V_1^p = \delta_{cr};$$

для левой вершины трещины

$$V_1^l = \delta_{cr}.$$

С учетом соотношений (24), (25), окончательно найдем:  
для роста правой вершины трещины

$$\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \delta_{cr}; \quad (26)$$

для роста левой вершины трещины

$$\frac{\pi(1+\kappa)}{2\mu} \frac{\ell_1}{M_2} \sqrt{A_3^2 + A_4^2} = \delta_{cr}. \quad (27)$$

Совместное решение полученных уравнений (17)–(19), (26) или (27) позволяет при заданных параметрах кольцевого диска найти критическую величину угловой скорости вращения и размеры концевых зон предразрушения для состояния предельного равновесия, при котором произойдет рост трещины.

**Выводы.** С помощью разработанной математической модели разрушения вращающегося кольцевого диска возможно оценивать на этапе проектирования гарантированный ресурс диска с учетом ожидаемых дефектов и условий нагружения; устанавливать допустимый уровень дефектности диска, максимальные значения рабочих нагрузок; выбирать материал кольцевого диска с требуемыми статическими и циклическими характеристиками трещиностойкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Саврук, М. П. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – Киев : Наукова думка. – 1988. – 620 с.

[2] Саврук, М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – Киев : Наукова думка. – 1989. – 248 с.

[3] *The special issue: Cohesive models* // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987.

[4] Мирсалимов, В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 132–151.

- [5] *Mirsalimov, M. V.* Interaction between Periodic System of Rigid Inclusions and Rectilinear Cohesive Cracks in an Isotropic Medium under Transverse Shear / M. V. Mirsalimov, F. F. Hasanov // *Acta Polytechnica Hungarica*. – 2014. – Vol. 11. – No. 5. – P. 161–176.
- [6] *Калантарлы, Н. М.* Разрушение неравномерно нагретого кольцевого диска / Н. М. Калантарлы // *Проблемы машиностроения*. – 2014. – Т. 17. – № 3. – С. 19–25.
- [7] *Калантарлы, Н. М.* Предельно-равновесное состояние неравномерно нагретого кольцевого диска, ослабленного произвольной системой когезионных трещин / Н. М. Калантарлы // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 3 (19). – С. 37–47.
- [8] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [9] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наук. думка. – 1976. – 443 с.
- [10] *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. М. : Наука, 1987. – 256 с.
- [11] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

*Калантарлы Наиля Мерадж кызы,*

*кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку*

*e-mail: nailyak1975@gmail.com*

N. M. Kalantarly

**GROWTH OF CRACK WITH INTERFACIAL BONDS IN END ZONES IN A  
UNIFORMLY ROTATING ANNULAR DISK***Institute of Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan*

**Abstract.** Fracture model, based on the study of fracture process zone near the crack tip is proposed for rotating disk. It is assumed that the prefracture zone is a layer of finite length, in which between the separate structural elements of material the bonds are partially broken (end zone). The presence of the interfacial bonds in the end zone is modeled by application to the crack surface the cohesive forces caused by the presence of bonds. The dependence of limit rotational velocity of the annular disk on the crack length is obtained.

**Keywords:** uniformly rotating annular disk, cracks with interfacial bonds, cohesive forces, prefracture zone.

**REFERENCES**

- [1] *Savruk, M. P.* Fracture mechanics and strength of materials. Vol. 2: Stress intensity factors in cracked bodies. – Kiev : Naukova dumka, – 1988. – 620 p. (in Russian)
- [2] *Savruk, M. P.* Numerical analysis in plane problems of cracks theory / M. P. Savruk, P. N. Osiv, I. V. Prokopchuk. – Kiev : Naukova dumka. – 1989. – 248 p. (in Russian)
- [3] *The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech.* – 2003. – Vol. 70. – No. 14. – P. 1741–1987. (in Russian)
- [4] *Mirsalimov, V. M.* The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair / V. M. Mirsalimov // *J. of Applied Math. and Mech.* – 2007. – Vol. 71. – P. 120–136. (in Russian)
- [5] *Mirsalimov, M. V.* Interaction between Periodic System of Rigid Inclusions and Rectilinear Cohesive Cracks in an Isotropic Medium under Transverse Shear / M. V. Mirsalimov, F. F. Hasanov // *Acta Polytechnica Hungarica.* – 2014. – Vol. 11. – No. 5. – P. 161–176.
- [6] *Kalantarly, N. M.* Fracture of non-uniformly heated annular disk / N.M. Kalantarly // *Problems of mechanical engineering.* – 2014. – Vol. 17. – № 3. – P. 19–25. (in Russian)
- [7] *Kalantarly, N. M.* Limit-equilibrium state of non-uniformly heated annular disk, weakened by an arbitrary system of cohesive cracks / N.M. Kalantarly // *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state.* – 2014. – № 3 (19). – P. 37–47. (in Russian)
- [8] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problem in the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1977. – 707 p. (in Russian)
- [9] *Panasyuk, V. V.* Stress distribution near cracks in plates and shells / V. V. Panasyuk, M. P. Savruk and A. P. Datsyshyn – Kiev : Naukova dumka. – 1976. – 443 p. (in Russian)
- [10] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p. (in Russian)
- [11] *Il'yushin, A. A.* Plasticity / A. A. Il'yushin. – M. ; L. : Gostekhizd, 1948. – 376 p. (in Russian)

*Kalantarly, Nailya Merach kizi*

*PhD, Assoc. Professor, Doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of NAN of Azerbaijan, Baku*

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВОЗДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ТОЛЩИНЫ ПЛАСТИНЫ НА ТРЕЩИНУ

*Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку*

**Аннотация.** Рассматривается контактная задача о частичном контактировании берегов прямолинейной трещины, вызванного локальным изменением толщины материала пластины на пути роста трещины. При некоторых формах выточек и соотношениях их геометрических параметров уменьшается деформация растягиваемой пластины в направлении, перпендикулярном трещине. В связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в кончиках трещины. При некоторых соотношениях геометрических параметров пластины с локальными изменениями толщины на пути роста трещины будут возникать зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт. Считается, что на некоторой части контакта возникает сцепление берегов, а на остальной возможно проскальзывание. Определение неизвестных контактных напряжений и размеров зон контакта сводится к решению системы двух сингулярных интегральных уравнений. Каждое сингулярное интегральное уравнение с дополнительными условиями сведено к задаче Римана, решение которой получено в квадратурах. Найдены нормальные и касательные напряжения на участках контакта, а также размеры зон контакта берегов трещины.

**Ключевые слова:** прямолинейная трещина, локальное изменение толщины пластины, контактная зона сцепления, зона проскальзывания, контактные напряжения.

УДК: 539.375

**Постановка задачи.** При некоторых формах выточек и соотношениях их геометрических параметров уменьшается деформация растягиваемой пластины в направлении, перпендикулярном трещине, и в связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в кончиках трещины. Следует ожидать, что при некотором соотношении геометрических параметров пластины с локальными изменениями толщины на пути роста трещины, будут возникать зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт. Это приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины.

Рассматривается тонкая упругая пластинка постоянной толщины  $2h_0$  всюду, за исключением некоторой области  $S$  вблизи конца сквозной прямолинейной трещины. Характерный линейный размер области  $S$  считается малым по сравнению с длиной трещины. Трещина расположена у области  $S$ . В области  $S$  толщина пластины представляет собой некоторую функцию координат. Как известно, такие локальные изменения в толщине пластины нетрудно выполнить технологически, как некоторые выточки (выдавки) или, наоборот, наплавления (утолщения) материала. Цель таких выточек или наплавлений в задержке или торможении развития сквозной трещины.

Пусть пластина изготовлена из однородного изотропного упругого материала и содержит прямолинейную трещину. Для торможения развития трещины вблизи ее концов создают локальные изменения в толщине пластины, как некоторые выточки (выдавки).

В случае, когда характерный линейный размер области  $S$  считается малым по сравнению с длиной трещины или с каким-либо другим характерным линейным размером  $L$  пластинки в плане, возможно эффективное асимптотическое решение этой задачи, основанное на представлении о тонкой структуре конца трещины [1]. Задачу о тонкой структуре конца трещины (т. е. о распределении напряжений и деформаций на расстояниях  $r$  от конца трещины, удовлетворяющих условию  $L \gg r \gg \rho$ , где  $\rho$  — радиус кривизны конца трещины) можно ставить следующим образом.

Рассмотрим окрестность конца прямолинейной трещины, которая мала по сравнению с характерным линейным размером в плане пластины, но больше сравнительно с характерным линейным размером области  $S$ . Тогда трещина на плоскости  $x$  у представится полубесконечным разрезом вдоль  $y = 0, -\infty < x < 0$ .

На бесконечности реализуется напряженное поле, характерное для тонкой структуры конца трещины. Это поле считается заданным и имеет [1] вид

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \Phi(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}, \quad \Omega(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}, \quad (1)$$

где  $z = x + iy = re^{i\theta}$ ;  $r, \theta$  — полярные координаты;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  комплексные потенциалы Н. И. Мусхелишвили [2].

В рассматриваемой задаче параметрами нагружения являются коэффициенты интенсивности  $K_I, K_{II}$ , представляющие собой некоторые функции формы пластины и граничных условий.

Под действием внешней нагрузки и влияния локального изменения толщины вблизи конца трещины, в зоне сжимающих напряжений берега трещины на некотором участке  $y = 0, \lambda \leq x \leq 0$ , войдут в контакт, что будет способствовать к появлению контактных напряжений на данном участке. Вне контактного участка берега трещины свободны от усилий. Параметр  $\lambda$ , характеризующий границу области контакта между берегами трещины, должен быть определен в процессе решения задачи.

Считается, что площадка контакта состоит из участка сцепления берегов  $(d, 0)$  и участка  $(\lambda, d)$ , на котором возможно проскальзывание. Модель контакта с трением и сцеплением впервые была рассмотрена Л. А. Галиным [3].

Размеры контактных зон пока неизвестны и подлежат определению. Область  $S$  может иметь любые (но конечные) размеры и конфигурацию.

При действии внешней силовой нагрузки и воздействия локального изменения толщины пластины вблизи конца трещины на пластину на некотором участке берега трещины взаимодействуют между собой, что приводит к появлению нормальных  $p_y(x)$  и касательных  $p_{xy}(x)$  контактных напряжений. Значения этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\sigma_{xy} &= 0 \text{ при } y = 0, -\infty < x < \lambda, \\ \sigma_y &= p_y(x), \tau_{xy} = f p_y(x) \text{ при } y = 0, \lambda < x < d, \\ \sigma_y &= p_y(x), \tau_{xy} = p_{xy}(x) \text{ при } y = 0, d < x < 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где принято, что на участке проскальзывания имеет место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Кулона);  $f(x)$  — коэффициент трения;  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений в декартовых координатах.

Постановку задачи следует дополнить соотношением для перемещений на участках контакта

$$v^+ - v^- = 0 \text{ при } y = 0, \lambda < x < 0, \quad (3)$$

$$u^+ - u^- = 0 \text{ при } y = 0, d < x < 0,$$

где  $(v^+ - v^-)$  — нормальная;  $(u^+ - u^-)$  — касательная составляющие раскрытия берегов трещины.

Рассматриваемая задача состоит в определении контактных напряжений на участке  $y = 0$ ,  $\lambda \leq x \leq 0$ , напряженно-деформированного состояния пластины вне трещины.

Решение краевой задачи

Напряженно-деформированное состояние в рассматриваемой пластине можно представить в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(1)}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)},$$

$$u = u_0 + u_1; \quad v = v_0 + v_1.$$

Здесь  $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}, u_0, v_0$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений для пластины с трещиной при отсутствии локальных изменений в кончике трещины;  $\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}$  — возмущенное напряженное состояние из-за наличия локального изменения толщины в окрестности кончика трещины, а  $u_1, v_1$  — составляющие вектора перемещений, вызванные наличием локального изменения толщины.

Невозмущенное напряженное состояние  $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}$  известно.

Перейдем к определению возмущенного напряженного состояния. Предположим, что пластинка находится в обобщенном плосконапряженном состоянии, и, учитывая переменность толщины в области  $S$ , запишем общие уравнения статического деформирования пластины переменной толщины в виде

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$N_x = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$N_y = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Здесь  $N_x, N_y, N_{xy}$  — нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины соответственно;  $u, v$  — компоненты вектора перемещений;  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластинки.

Функция толщины  $h(x,y)$  может быть представлена в виде [4]

$$h(x,y) = h_0 [1 + \varepsilon \bar{h}(x,y)], \quad (6)$$

где  $\bar{h}(x,y)$  — некоторая известная безразмерная непрерывная функция;  $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1)$  — малый параметр;  $h_1$  и  $h_2$  — соответственно, наименьшее и наибольшее значение толщины пластинки в области  $S$ .

Решение задачи ищем методом малого параметра

$$N_x = N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(1)} + \dots; \quad N_y = N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(1)} + \dots \quad (7)$$

$$N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(1)} + \dots; u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots; v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots$$

Формулы (6) и (7) подставляем в уравнения (4) и (5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малых параметров. В полученных уравнениях уравнения нулевого приближения (невозмущенного состояния) совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого и второго приближений совпадают с теми же уравнениями с объемной силой, определяемой из решения предыдущих приближений.

Краевые условия задачи в первом приближении примут вид

$$N_y^* = 0; \quad N_{xy}^* = 0 \text{ при } y = 0, -\infty < x < \lambda, \quad (8)$$

$$N_y^* = N_y^+; \quad N_{xy}^* = f N_y^+ \text{ при } y = 0, \lambda < x < d,$$

$$N_y^* = N_y^+; \quad N_{xy}^* = N_y^+ \text{ при } y = 0, d < x < 0.$$

При выводе уравнений и граничных условий первого приближения были введены следующие обозначения

$$N_y^* = N_y^{(1)} - \bar{h}(x, y) N_y^{(0)}; \quad N_{xy}^* = N_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x, y) N_{xy}^{(0)}.$$

Здесь  $N_y^+$  и  $N_{xy}^+$  — искомые контактные усилия, подлежащие определению.

$$N_y^+ = 2h_0 p_y; \quad N_{xy}^+ = 2h_0 p_{xy}.$$

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытия берегов трещины

$$(v_1^+ - v_1^-) = 0 \text{ при } y = 0, \lambda \leq x \leq 0, \quad (9)$$

$$(u_1^+ - u_1^-) = 0 \text{ при } y = 0, d < x < 0.$$

При наличии объемных сил решение ищем в виде суммы

$$N_x^* = N_{x_0}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}; \quad N_y^* = N_{y_0}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}; \quad N_{xy}^* = N_{xy_0}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)},$$

где  $N_{x_0}^{(1)}, N_{y_0}^{(1)}, N_{xy_0}^{(1)}$  — любое частное решение при наличии объемной силы;  $N_{x_1}^{(1)}, N_{y_1}^{(1)}, N_{xy_1}^{(1)}$  — общее решение при отсутствии объемной силы.

Для построения решения при объемных силах используем представление А. Г. Угодчикова [5]

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4Re \left[ \Phi_1^{(1)}(z) - \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right];$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2 \left[ z\Phi_1'(z) + \Psi_1(z) - \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \bar{F}_1 - \bar{Q}_1) \right].$$

В эти соотношения входят две аналитические функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  и две функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$ , представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F}, \quad (10)$$

$$F = X_1 + Y_1 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} (N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + i \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} (N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}).$$

Используя общие представления для напряжений, для определения функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  имеем задачу линейного сопряжения [2]

$$[\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^+ + [\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^- = 2p_1(x), \quad (11)$$

$$[\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^+ - [\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^- = 0.$$

$$\text{где } p_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < \lambda \\ f(x) + N_y^+(1 - if) & \text{при } y = 0, \lambda < x < d \\ f(x) + N_y^+ - iN_{xy}^+ & \text{при } y = 0, d \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \kappa} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1 + \kappa)} \left( \kappa \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial z} \right) \text{ при } y = 0. \quad (12)$$

Функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$  можно формально записать в виде

$$F_1(z, \bar{z}) = \int z dz \int \bar{z} F(z, \bar{z}) d\bar{z}; \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int z dz \int z \overline{F(z, \bar{z})} dz.$$

Для функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  находим

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z}} \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{t} p_1(t) dt}{t - z}. \quad (13)$$

Здесь функция  $\sqrt{z}$  аналитична вне полубесконечного разреза при  $y = 0, x < 0$  и положительна на продолжение разреза.

Для перемещений с помощью найденных потенциалов в первом приближении найдем

$$(u_1^+ - u_1^-) - i(v_1^+ - v_1^-) = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \left[ -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 p_1(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt \right]. \quad (14)$$

Удовлетворяя условиям (9), получим интегральные уравнения относительно неизвестных функций  $N_y^+(x)$  и  $N_{xy}^+(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_1(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^0 N_y^+(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt = 0 (\lambda \leq x \leq 0), \quad (15)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_2(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_d^0 N_{xy}^+(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^d f N_y^+(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt = 0 (d \leq x \leq 0),$$

где  $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$ ;  $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ .

Условиями для определения размеров контактной зоны являются условия конечности напряжений в окрестности вершины трещины. Добавляя условие конечности напряжений, находим для каждого сингулярного интегрального уравнения недостающее уравнение соответственно

$$K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} = 0, \quad K_{II}^{(0)} + \varepsilon K_{II}^{(1)} = 0, \quad (17)$$

$$K_I^{(0)} = K_I, \quad K_{II}^{(0)} = K_{II},$$

$$K_x I^{(1)} = \bar{h}(0, 0) K_I^{(0)} + K_I^*, \quad K_{II}^{(1)} = \bar{h}(0, 0) K_{II}^{(0)} + K_{II}^*,$$



$$K_I^* = -\frac{\sqrt{2}}{\pi i} \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{f_1(x)dx}{\sqrt{x}} + \int_{\lambda}^0 \frac{N_y^+(x)dx}{\sqrt{x}} \right],$$

$$K_{II}^* = -\frac{\sqrt{2}}{\pi i} \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{f_2(x)dx}{\sqrt{x}} + \int_{\lambda}^0 \frac{N_{xy} + (x)dx}{\sqrt{x}} \right].$$

Решение сингулярных интегральных уравнений (15) и (16) получим путем решения соответствующей задачи Римана [6]. Сингулярное интегральное уравнение (15) представим в следующем виде

$$\int_{\lambda}^0 \frac{\sqrt{t}N_y^+(t)dt}{t-x} = \pi F_1(x) \quad (\lambda \leq x \leq 0), \tag{18}$$

где  $F_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{t}f_1(t)dt}{t-x}$ .

Решив сингулярное интегральное уравнение (18) (см. [7] приложение) с учетом условий ограниченности контактных напряжений при  $x=\lambda$  и  $x=0$  (условие разрешимости сингулярного интегрального уравнения в классе всюду ограниченных функций), получим формулу для нахождения нормальных контактных напряжений

$$N_y^+(x) = \frac{X^+(x)}{\pi i} \int_{\lambda}^0 \frac{F_1^*(t)dt}{X^+(t)(t-x)}. \tag{19}$$

Здесь  $F_1^*(t) = \frac{F(t)}{\pi i}$ ,  $X(t) = \sqrt{t(t-\lambda)}$ .

Аналогично решая сингулярное интегральное уравнение (17), получим расчетную формулу для определения касательных напряжений на участке сцепления берегов трещины  $(d,0)$

$$N_{xy}^+(x) = \frac{X_1^+(x)}{\pi i} \int_d^0 \frac{F_2^*(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)}. \tag{20}$$

Здесь

$$F_2^*(t) = \frac{F_2(t)}{\pi i}; \quad F_2(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f_2(t)\sqrt{t}dt}{t-x} - \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^d \frac{fN_y^+(t)\sqrt{t}dt}{t-x};$$

$$X_1(t) = \sqrt{t(t-d)}.$$

Касательные контактные напряжения на участке проскальзывания  $(\lambda,d)$  находятся по закону Кулона. Анализ частичного контактирования берегов трещины в пластине сводится к параметрическому исследованию полученных формул и уравнений (17) при различных законах распределения напряжений в пластине, геометрических параметров изменения толщины пластины, а также механических постоянных материала.

Для компонент нормальных и сдвигающих усилий, приходящихся на единицу длины, имеем

$$N_x = [1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)] N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^*,$$

$$N_y = [1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)] N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^*,$$

$$N_{xy} = [1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)] N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^*.$$

**Конкретные примеры.** Для определения распределения контактных напряжений и размера контактной зоны необходимо задать закон изменения толщины в пластине в окрестности конца трещины (область  $S$ ). Рассмотрим наиболее распространенные на практике формы выточек и утолщений.

*Конусовидная выточка*

Пусть выточка имеет форму усеченного кругового конуса с осью, проходящей вблизи конца сквозной трещины, перпендикулярно плоскости  $Oxy$ . Нижнее и верхнее основания – круговые с радиусами  $R_1$  и  $R_0$  соответственно. Толщина пластины у основания выточки равна  $2h_1$ . Уравнение верхней поверхности пластины имеет вид

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \leq R_1^2 & \text{область } S \\ h_1 + \varepsilon \left( \sqrt{x^2 + (y-b)^2} - R_0 \right) & \text{при } R_1^2 \leq x^2 + (y-b)^2 \leq R_0^2 \\ h_0 & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \geq R_0^2. \end{cases}$$

Здесь малый параметр определяется по формуле

$$\varepsilon = (h_0 - h_1)/(R_0 - R_1).$$

Очевидно, что, если  $h_1 > h_0$ , получим конусовидное утолщение. Для конусовидной выточки пластины получаем

$$\bar{h} = \begin{cases} -\frac{R_0-h_1}{h_0} & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \leq R_1^2 & \text{область } S \\ \frac{1}{h_0} \left( \sqrt{x^2 + (y-b)^2} - R_0 \right) & \text{при } R_1^2 \leq x^2 + (y-b)^2 \leq R_0^2 \\ 0 & \text{при } x^2 + (y-b)^2 \geq R_0^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = 0 \text{ при } x^2 + (y-b)^2 \leq R_1^2, \quad x^2 + (y-b)^2 \geq R_0^2$$

$$\text{при } R_1^2 \leq x^2 + (y-b)^2 \leq R_0^2 \text{ (область } S),$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{x}{h_0 \sqrt{x^2 + (y-b)^2}}; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{y}{h_0 \sqrt{x^2 + (y-b)^2}}.$$

Подставляя эти формулы и (10), находим

$$X_1 + iY_1 = F = 0 \text{ при } x^2 + (y-b)^2 \leq R_1^2, \quad x^2 + (y-b)^2 \geq R_0^2,$$

$$X_1 + iY_1 = \frac{x}{h_0 \sqrt{x^2 + (y-b)^2}} \left( N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)} \right) + \frac{iy}{h_0 \sqrt{x^2 + (y-b)^2}} \left( N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} \right)$$

$$\text{при } R_1^2 \leq x^2 + (y-b)^2 \leq R_0^2 \text{ (область } S).$$

Здесь выражения  $\left( N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)} \right)$  и  $\left( N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} \right)$  определяются по соотношениям

$$\frac{N_x^{(0)} + N_y^{(0)}}{2h_0} = 2 \left[ \Phi^{(0)}(z) + \overline{\Phi^{(0)}(z)} \right],$$

$$\frac{N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}}{2h_0} = \Phi^{(0)}(z) + \Omega^{(0)}(z) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi^{(0)'(z)}},$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

С помощью соотношений (10), (12) находим функцию  $f(x)$ . После нахождения функции  $f(x)$  по соотношениям (19) и (20), (17) с помощью численного интегрирования находились контактные напряжения и значения параметров  $\lambda$ ,  $d$ , характеризующих зону контакта берегов трещины в зависимости от геометрических параметров пластины при  $\nu=0,32$ .

Ниже приводятся значения параметра  $\lambda_0 = \lambda/R_0$  в зависимости от относительной толщины выточки (от отношения глубины выточки к толщине пластины)  $h_1/h_0$ .

$h_1/h_0$	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1
$\lambda/R_0$	0	1,062	1,233	1,762	1,921	2,481	2,617

Параболоидная выточка

Пусть выточка в кончике трещины имеет форму усеченного параболоида вращения с осью, проходящей вблизи конца сквозной трещины, перпендикулярно плоскости Оху. Верхняя поверхность пластины описывается уравнением

$$h = \begin{cases} h_1 + \varepsilon \frac{x^2 + (y - b)^2}{R_0} & \text{при } x^2 + (y - b)^2 \leq R_0^2 \\ h_0 & \text{при } x^2 + (y - b)^2 > R_0^2. \end{cases}$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр, в этом случае определяемый как  $\varepsilon = (h_0 - h_1)/R_0$ . Если  $h_1 > h_0$ , получим пластину с параболическим утолщением.

Повторяя изложенную методику, находим функцию  $f(x)$ .

Система соотношений отличается от предыдущего случая только подынтегральным выражением. В результате расчетов определялись контактные напряжения и значения параметров  $\lambda$ ,  $d$ , характеризующих зону контакта берегов трещины в зависимости от геометрических и физических параметров пластины с выточкой при  $\nu = 0,32$ .

Ниже приводятся результаты расчетов

$h_1/h_0$	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1	0,05
$\lambda/R_0$	0	0	1,036	1,316	1,908	2,012	2,301	2,832

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.  
 [2] Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.  
 [3] Галин, А. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления / Л. А. Галин // Прикл. математика и механика. – 1945. – Т. 9. – Вып. 5. – С. 413–424.  
 [4] Mirsalimov, V. M. Fracture of plates with variable thickness / V. M. Mirsalimov // Materials Science. – 1996. – Vol. 32. – No. 3. – P. 296–305.  
 [5] Угодчиков, А. Г. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах / А. Г. Угодчиков, М. И. Длугач, А. Е. Степанов. – М. : Высшая школа. 1970. – 528 с.  
 [6] Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977, – 640 с.  
 [7] Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.

Велиев Фарид Эльхан оглы,

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

e-mail: iske@mail.ru

F. E. Veliev

**CONTACT PROBLEM OF EFFECT BY LOCAL CHANGE OF PLATE THICKNESS ON THE CRACK***Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku*

**Abstract.** A contact problem of partial contacting of rectilinear crack surfaces caused by a local change of the plate material thickness on crack growth path is considered. At some forms of recesses and ratios of their geometric parameters the deformation of elongated plate is decreased in direction perpendicular to the fracture. In this connection stress intensity factor in the crack tip decreased. At some ratios of the geometric parameters of the plate with local thickness changes on the crack growth path a zone of compressive stresses will occur. In this zone of compressive stresses the crack surfaces in a certain section will contact. It is assumed that in some part of the contact zone the engagement of the crack surfaces occurs and in the rest part the slippage is allowed. Determination of unknown contact stresses and sizes of the contact zones is reduced to solving of system of two singular integral equations. Each singular integral equation with the additional conditions is reduced to the Riemann problem, which is solved by quadratures. Normal and tangential stresses in the contact zones are found, as well as the size of the crack contact zones.

**Keywords:** rectilinear crack, local change of plate thickness, contact engagement zone, slippage zone, contact stresses.

**REFERENCES**

- [1] *Cherepanov, G. P.* Mechanics of brittle fracture / G. P. Cherepanov. – New York : Mc Graw-Hill, 1979. – 950 p. (in Russian)
- [2] *Muskhelishvili, N. I.* Some basic problems of mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili. – Amsterdam : Kluwer, 1977. – 707 p. (in Russian)
- [3] *Galín, L. A.* Indentation of stamp in presence of friction and cohesion / L. A. Galin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1945. – Vol. 9. – Issue 5. – P. 413–424. (in Russian)
- [4] *Mirsalimov, V. M.* Fracture of plates with variable thickness / V. M. Mirsalimov // Materials Science. – 1996. – Vol. 32. – No. 3. – P. 296–305.
- [5] *Ugodchikov, A. G.* Solution of boundary value problems of the plane elasticity theory on digital and analog machines / A. G. Ugodchikov, M. I. Dlugach, A. E. Stepanov. – M. : Vysshaja shkola, 1970. – 528 p. (in Russian)
- [6] *Gakhov, F. D.* Boundary value problems / F. D. Gakhov. – M. : Nauka, 1977. – 640 p. (in Russian)
- [7] *Mirsalimov, V. M.* Non-one-dimensional elastoplastic problems / V. M. Mirsalimov. – M. : Nauka, 1987. – 256 p. (in Russian)

Valiyev, Farid Elkhan oglu

PhD, Sciences, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Azerbaijan, Baku

А. В. Никитин

## ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары

**Аннотация.** Рассматривается неоднородная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что она сохраняет значение предела текучести постоянным вдоль параллельных прямых. Определено напряженное состояние для трубы. В работе [2] изучено предельное состояние трубы при анизотропии Мизеса – Хилла. Трансляционная анизотропия впервые введена в работах [3]–[7]. В работе [8] рассмотрено упругопластическое состояние двуслойной трансляционно-анизотропной трубы. Предельное состояние слоистой трубы при наличии трансляционной анизотропии исследовалось в [10], [13]. Упругопластическое состояние неоднородной трубы рассмотрено в работах [11], [12].

**Ключевые слова:** пластичность, неоднородность, труба, анизотропия, давление.

УДК: 539.375

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов  $\alpha, \beta$ ;  $\alpha < \beta$  (рис. 1). Условие пластичности примем в виде [5]:

$$A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_{xy}^2, \quad k_1, k_2, k_3 = const, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты напряжения в декартовой системе координат,  $k_{xy} = k_{xy}(x, y)$ .

При  $A = B = 1$  и  $k_{xy} = const$  имеет место трансляционная анизотропия, при  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ,  $k_{xy} = const$  — анизотропия Мизеса – Хилла.

Положим,

$$\delta = \frac{A - B}{2}, \quad k_1 = k^0 + \delta k'_1, \quad k_2 = k^0 + \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3,$$

$$k_{xy} = k_0 + \delta(cx + dy), \quad k_0, c, d = const, \quad (2)$$

где  $\delta$  — малый безразмерный параметр.

Тогда

$$A = t + \delta, \quad B = t - \delta, \quad t = \frac{A + B}{2}. \quad (3)$$

---

Поступила 10.01.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14-01-31323 мол\_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179).

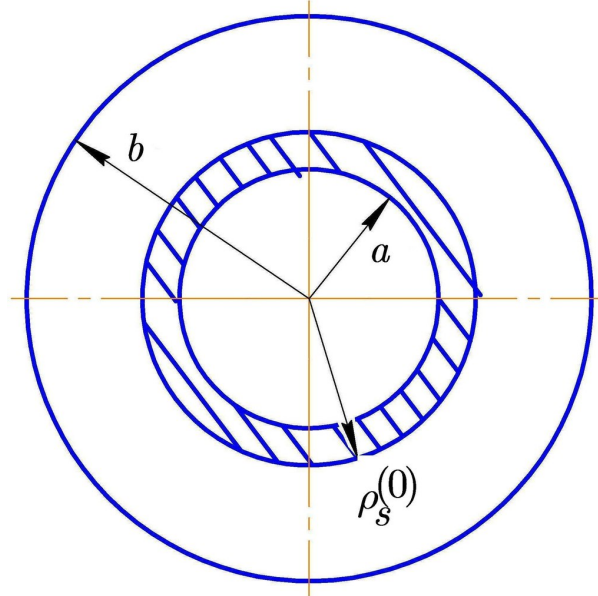


Рис. 1

В последующем все величины, которые имеют размерность напряжения, предполагаются безразмерными, отнесенными к величине предела текучести  $k_0$ .

Обозначим

$$\frac{k_{xy}}{k_0} = \chi, \quad \frac{p}{k_0} = q. \quad (4)$$

Все величины, имеющие размерность длины, отнесем к некоторой характерной величине  $\rho_s^{(0)}$  и обозначим:

$$\frac{a}{\rho_s^{(0)}} = \alpha, \quad \frac{r}{\rho_s^{(0)}} = \rho. \quad (5)$$

Связь между напряжениями в декартовой системе координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (7)$$

Из (1), (2), (6), (7) имеем условие пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} & (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 [A \cos^2 2\theta + B \sin^2 2\theta] + 4\tau_{\rho\theta}^2 [A \sin^2 2\theta + B \cos^2 2\theta] + \\ & + A(k_1 - k_2)^2 + 4Bk_3^2 + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)\tau_{\rho\theta}(A - B)\sin 4\theta - \\ & - 4\tau_{\rho\theta}[\sin 2\theta(k_1 - k_2) + 2k_3 \cos 2\theta] - 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)(\cos 2\theta(k_1 - k_2) - 2k_3 \cos 2\theta) = \\ & = 4(1 + \delta\rho(c \cos \theta + d \sin \theta))^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решение будем искать решение в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}. \quad (10)$$

Предположим, что нулевое, исходное напряженное состояние трубы является осесимметричным, т. е.

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (11)$$

Компоненты напряжений в нулевом приближении определены в [1].

В первом приближении (8) преобразуется к виду:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_\rho^{(1)} = 2\rho [c \cos \theta + d \sin \theta] + 1 + (k'_2 - k'_1) \cos 2\theta + 2k'_3 \sin 2\theta, \quad (12)$$

а (9) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(1)}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Удовлетворим (13), полагая

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12), (16) найдем

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \theta^2} &= 2\rho^3 (c \cos \theta + d \sin \theta) + \\ &+ \rho^2 + \rho^2 \cos 2\theta (k'_2 - k'_1) + 2\rho^3 k'_3 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение уравнения (17) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi^{(1)} = \Phi_{odn}^{(1)} + \Phi_{chastn}^{(1)}. \quad (16)$$

Однородное уравнение (17) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (17)$$

Положим,

$$\Phi_{odn}^{(1)} = R_1 \cos(m\theta) + R_2 \sin(m\theta) = R \cos(m\theta + \theta_0), \quad (18)$$

где

$$R_i = R_i(\rho), \quad \cos(\theta_0) = \frac{R_1}{R}, \quad \sin(\theta_0) = \frac{R_2}{R}, \quad R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Согласно[1], имеем при  $m = 0$ :

$$R = C_{00} + C_{01}, \text{ где } C_{00}, C_{01} - \text{const}, \quad (19)$$

при  $m = 1$ :

$$R = \rho(C_{11} + C_{12} \ln \rho), \text{ где } C_{11}, C_{12} - \text{const}, \quad (20)$$

при  $m \geq 2$ :

$$R = \rho \left[ C_{m1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + C_{m2} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right], \quad (21)$$

где  $C_{m1}, C_{m2} - \text{const}$ .

Согласно (17) при  $m = 0, 1, 2$

$$R = (C_{00} + C_{01}) + \rho(C_{11} + C_{12} \ln \rho) + \rho \left[ C_{m1} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{m2} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right]. \quad (22)$$

Частное решение неоднородного уравнения (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{chastn}^{(1)} = & \frac{1}{2} \left( \rho^2 \ln \rho - \frac{\rho^2}{2} \right) + \frac{\rho^3}{2} (c \cos \theta + d \sin \theta) + \\ & + \rho^2 \left( \frac{k'_2 - k'_1}{4} \right) \cos 2\theta + \frac{k''_3}{2} \rho^2 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (16), (18), (23), (24) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)} = & C_{00} + \frac{C_{11}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\ & \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1} \left[ (1 - m^2) \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) - (\sqrt{m^2 - 1}) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] + \right. \\ & \left. + C_{m2} \left[ \sqrt{m^2 - 1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + (1 - m^2) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\ & + \rho(c \cos \theta + d \sin \theta) + \ln \rho + \left( \frac{k'_1 - k'_2}{2} \right) \cos 2\theta - k'_3 \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)} = & C_{00} + \frac{C_{11}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\ & \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1} \left[ (1 - m^2) \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) - (\sqrt{m^2 - 1}) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] + \right. \\ & \left. + C_{m2} \left[ \sqrt{m^2 - 1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + (1 - m^2) \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\ & + 3\rho(c \cos \theta + d \sin \theta) + (1 + \ln \rho) + \left( \frac{k'_2 - k'_1}{2} \right) \cos 2\theta + k'_3 \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(1)} = & \frac{C_{11}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) - \frac{\bar{C}_{11}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} (m\sqrt{m^2 - 1}) \times \\ & \times \left[ -C_{m1} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + C_{m2} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) \right] \sin(m\theta + \theta_0) + \\ & + \rho(c \sin \theta - d \cos \theta) + \frac{(k'_2 - k'_1)}{2} \sin 2\theta - k'_3 \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $C_{00}, C_{m1}, C_{m2} - \text{const}$  при  $m \geq 1$ .

При  $k'_1 = k'_2 = k'_3 = 0$  имеем решение, полученное в работе[13], при  $A = B = 1$  решение, полученное в [11].

Граничные условия на внутреннем контуре трубы, согласно [1]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)p}|_{\rho=\alpha} &= 0, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p}|_{\rho=\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$



Из (25), (25), (26) имеем

$$\begin{aligned} & C_{00} + \frac{1}{\alpha} C_{21} [-3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] + \\ & + C_{22} [\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)] \cos 2\theta + \frac{C_{11}}{\alpha} \cos \theta + \frac{\bar{C}_{11}}{\alpha} \sin \theta = \\ & = -\alpha (c \cos \theta + d \sin \theta) - \ln \alpha - \left( \frac{k'_1 - k'_2}{2} \right) \cos 2\theta + k'_3 \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}}{\alpha_1} \sin \theta - \frac{\bar{C}_{11}}{\alpha_1} \cos \theta + \frac{2\sqrt{3}}{\alpha} [-C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)] \sin 2\theta \\ & = \alpha (d \cos \theta - c \sin \theta) - \frac{(k'_2 - k'_1)}{2} \sin 2\theta + k'_3 \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (27), (28) вытекает:

$$\begin{aligned} C_{21} &= -\frac{\sqrt{3}}{36} \alpha (\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + 3 \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) (k_1 - k_2), \\ C_{22} &= -\frac{\sqrt{3}}{36} \alpha (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - 3 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha)) (k_1 - k_2), \\ C_{11} &= -c\alpha^2, \\ \bar{C}_{11} &= -d\alpha^2, \\ C_{00} &= -\ln \alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставив (30) в (25)–(25) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)} &= \ln \left( \frac{\rho}{\alpha} \right) + \cos 2\theta \left( \frac{k'_1 - k'_2}{2} \right) \left( 1 + \frac{\alpha}{\rho} \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3\rho} \alpha \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + \\ & \quad - k'_3 \sin 2\theta + \left( \rho - \frac{\alpha^2}{\rho} \right) (c \cos \theta + d \sin \theta), \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \ln \left( \frac{\rho}{\alpha} + 1 \right) + \cos 2\theta \left( \frac{k'_2 - k'_1}{2} \right) \left( 1 - \frac{\alpha}{\rho} \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3\rho} \alpha \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + \\ & \quad + k'_3 \sin 2\theta + \left( 3\rho - \frac{\alpha^2}{\rho} \right) (c \cos \theta + d \sin \theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)} &= \frac{\rho^2 - \alpha^2}{\rho} (c \sin \theta - d \cos \theta) + \frac{(\rho - \alpha)}{\rho} \sin 2\theta \left( \frac{k'_2 - k'_1}{2} \right) - k'_3 \cos 2\theta. \end{aligned}$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] *Ивлев, Д. А.* О предельном состоянии слоистых круговых цилиндров из анизотропного материала под действием внутреннего давления / Д. А. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 57–63.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 60–62.

- [4] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 63–65.
- [5] *Ивлев, Д. Д.* О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 1 (11). – С. 66–69.
- [6] *Ивлев, Д. Д.* Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии / Д. Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 101–106.
- [7] *Ивлев, Д. Д.* К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 1 (9). – С. 107–110.
- [8] *Кержаев, А. П.* Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии / А. П. Кержаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2013. – № 2 (16). – С. 71–81.
- [9] *Максимова, Л. А.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. А. Максимова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.
- [10] *Никитин, А. В.* Предельное состояние слоистой трансляционно-анизотропной трубы / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела– 2014. – № 2 (16). – С. 101–104.
- [11] *Никитин, А. В.* Упругопластическое состояние трансляционно – анизотропной линейно – неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – С. 148–155.
- [12] *Никитин, А. В.* Влияние нелинейной неоднородности материала на упругопластическое состояние толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления при трансляционной анизотропии / А. В. Никитин, С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – С. 137–147.
- [13] *Никитин, А. В.* Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы / А. В. Никитин, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 58–67.
- [14] *Тихонов, С. В.* О двусосном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала / С. В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 161–168.

*Никитин Андрей Витальевич,*

*аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

*e-mail: ligalas5@mail.ru*

A. V. Nikitin

**LIMIT STATE OF AN INHOMOGENEOUS PIPE UNDER INTERNAL PRESSURE***I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

**Abstract.** The nonhomogeneous thick-walled tube under internal pressure. It is assumed that it retains the yield strength value is constant along parallel lines. Defined stress condition for the pipe. In [2] studied the limiting condition of the pipe when the anisotropy of the Mises – Hill. Translational anisotropy introduced in [3]–[7]. In [8] considered the elastic-plastic state of the two-the translation and anisotropic pipe. Limit state of laminated tubes in the presence of the translational anisotropy was studied in [10], [13]. The elastoplastic state of the inhomogeneous pipe is considered in [11], [12].

**Keywords:** plasticity, heterogeneity, pipe, anisotropy, pressure.

**REFERENCES**

- [1] *Ivlev, D. D.* perturbation Method in the theory of elastic-plastic body / D. D. Ivlev, L. V. Ershov. – M. : Nauka, 1978. – 208 p. (in Russian)
- [2] *Ivlev, D. A.* About the ultimate state of laminated circular cylinders made of anisotropic material under the action of the internal pressure / D. A. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2 (66). – P. 57–63. (in Russian)
- [3] *Ivlev, D. D.* On the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in torsion / D. D. Ivlev, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (11). – P. 60–62. (in Russian)
- [4] *Ivlev, D. D.* On the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in the case of plane deformation / D. D. Ivlev, L. A. Maksimov, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (11). – P. 63–65. (in Russian)
- [5] *Ivlev, D. D.* About the dissipative function in the theory of translational idealisations anisotropy in the generalization of the conditions Mises plasticity / D. D. Ivlev, L. A. Maksimov, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2012. – № 1 (11). – P. 66–69. (in Russian)
- [6] *Ivlev, D. D.* theory idealisations translational anisotropy / D. D. Ivlev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 1 (9). – P. 101–106. (in Russian)
- [7] *Ivlev, D. D.* the theory of ideal translational plastic anisotropy / D. D. Ivlev, L. A. Maksimov, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 1 (9). – P. 107–110. (in Russian)
- [8] *Kerzaev, A. P.* elastic-plastic mode of double tol-sitostanol pipe under internal pressure, when the translational anisotropy / A. P. Kerzaev // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2013. – № 2 (18). – P. 71–81. (in Russian)
- [9] *Maksimova, L. A.* On the elastoplastic state of the inhomogeneous pipe under internal pressure / L. A. Maksimova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – No. 2. – P. 91–95. (in Russian)
- [10] *Nikitin, A. V.* Limiting condition layered translational anisotropic pipe / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // proceedings of VIII all-Russian conference on mechanics of deformable solids. – 2014. – № 2 (18). – P. 101–104. (in Russian)

[11] *Nikitin, A. V.* Elastoplastic state of PA - linearly anisotropic inhomogeneous pipe under internal pressure / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – № 4 (80). – P. 148–155. (in Russian)

[12] *Nikitin, A. V.* The influence of nonlinear inhomogeneity of the material on the elastoplastic state of thick-walled pipes under the influence of internal pressure in translational anisotropy / A. V. Nikitin, S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – № 4 (80). – P. 137–147. (in Russian)

[13] *Nikitin, A. V.* Limiting condition multilayer anisotropic thick-walled pipes / A. V. Nikitin, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2014. – № 4 (22). – P. 58–67. (in Russian)

[14] *Tikhonov, S. V.* On the biaxial stretching of the plane of heterogeneous elastic-plastic material / S. V. Tikhonov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2007. – No. 2. – P. 161–168. (in Russian)

*Nikitin, Andrey Vitalevich*

*Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

Ю. В. Немировский

## ВТОРОЕ ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск*

**Аннотация.** Для полиметаллических круглых и кольцевых пластин из материалов с линейным упрочнением разработан метод определения второй предельной нагрузки (нагрузки предразрушения). В основу расчета положено представление о начале предразрушения полиметаллической конструкции в соответствии с концепцией слабейшего звена, когда достигается наименьшая для данного набора материалов предельная деформация предразрушения. В качестве физических законов деформирования материалов использовалась модель В. Прагера для линейно-упрочняющихся материалов с кусочно-линейным потенциалом Треска.

**Ключевые слова:** полиметаллические пластины, пластическое деформирование, линейно-упрочняющиеся материалы, кусочно-линейный потенциал Треска, предразрушение, первая и вторая предельные нагрузки.

УДК: 539.374

**1. Введение.** В последние десятилетия проводятся интенсивные исследования по созданию эффективных полиметаллических конструкций для различных отраслей промышленности и стройиндустрии. Наиболее простыми с технологической точки зрения является приемы изготовления плоских полиметаллических пластин любых геометрических форм и размеров без серьезных ограничений по выбору материалов. Существующие технологические приемы (склеивание, сварка взрывом и диффузионная сварка, холодное газодинамическое или плазменное напыление) позволяет создавать плоские симметричные (рис. 1) и несимметричные (рис. 2) пакеты из практически любых наборов металлов и сплавов [1]–[3].

В любой такой конструкции сохраняются индивидуальные свойства отдельных слоев, но ее несущая способность может существенно изменяться в зависимости от выбора количества материалов, их расположения и относительных параметров толщин слоев. В рамках модели идеальных жестко-пластических материалов задача рационального подбора материалов полиметаллических преград была рассмотрена в [4]. Однако, многие металлические материалы и сплавы обладают свойством существенного упрочнения и предельная нагрузка полиметаллической конструкции может оказаться в реальности слишком заниженной. В связи с этим для таких конструкций было предложено ввести второе предельное состояние [5], при котором в соответствии с концепцией слабейшего звена какой-либо из материалов достигнет предельной деформации предразрушения. Соответствующие решения рассматривались для полиметаллических балок. В данной работе предлагается рассмотреть аналогичную задачу для круглых и кольцевых пластин.

---

Поступила 08.02.2015

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14-01-00102.

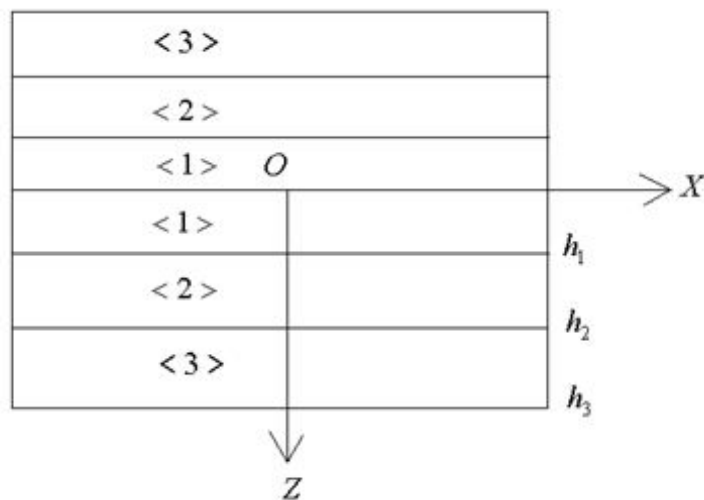


Рис. 1

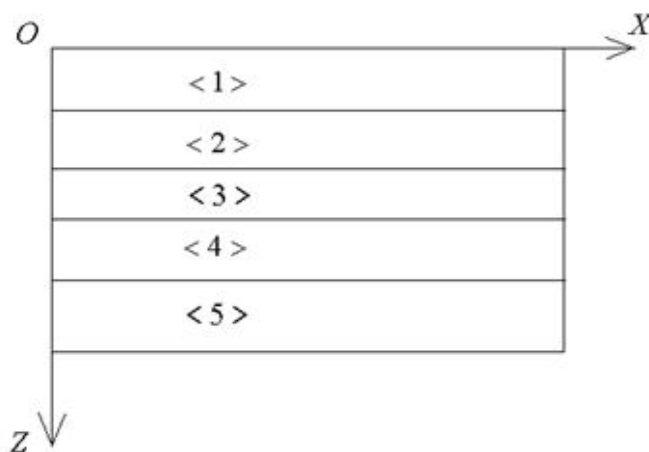


Рис. 2

**2. Формулировка основных уравнений.** Будем рассматривать круглые или кольцевые полиметаллические пластины в условиях осесимметричного изгиба при симметричном расположении слоев относительно срединной поверхности. Для удобства и единообразия законов деформирования, будем описывать модели деформирования всех материалов в рамках модели изотропного линейно-упрочняющегося материала с кусочно-линейным потенциалом в форме Треска (рис. 3). Тогда связь напряжений и деформаций в соответствии с уравнениями В. Прагера [6] для различных режимов будет определяться равенствами:

$$\begin{aligned}
 AB: & \sigma_2 = \sigma_0 + d\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 > 0 \\
 A: & \sigma_1 = \sigma_0 + d\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma_0 + d\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 \geq 0, \quad \varepsilon_2 \geq 0 \\
 AF: & \sigma_1 = \sigma_0 + d\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 = 0 \\
 BC: & \sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_0 + 2d\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 > 0 \\
 CD: & \sigma_1 = -\sigma_0 + d\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 < 0, \quad \varepsilon_2 = 0 \\
 DE: & \sigma_2 = -\sigma_0 + d\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 < 0 \\
 EF: & \sigma_2 - \sigma_1 = -(\sigma_0 + 2d\varepsilon_2), \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 < 0 \\
 \sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_0}, \quad \sigma_2 = \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_0}, \quad d = \frac{\bar{d}}{\bar{\sigma}_0}, \quad \sigma_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\sigma}_0}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

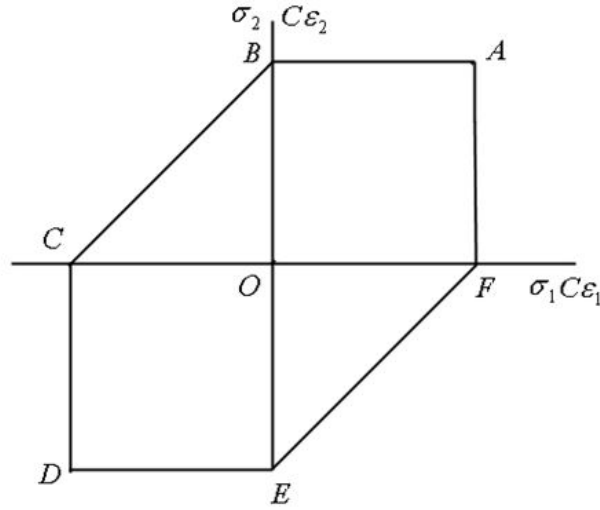


Рис. 3

Здесь  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  — главные напряжения и деформации,  $\bar{d}, \bar{\sigma}_0$  — коэффициент линейного упрочнения и предел текучести материала,  $\bar{\sigma}_0^0$  — безразмеривающий предел текучести. Будем рассматривать полиметаллические пластины симметричной структуры (рис. 1). Тогда для деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и безразмерных изгибающих моментов  $M_1, M_2$  будем иметь выражения:

$$\varepsilon_1 = z\kappa_1, \quad \varepsilon_2 = z\kappa_2 \tag{2}$$

$$M_1 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{1i} z dz, \quad M_2 = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{2i} z dz \tag{3}$$

$$\kappa_1 = -w'', \quad \kappa_2 = -\frac{1}{x} w' \tag{4}$$

$$z = \frac{\bar{z}}{H_0}, \quad w = \frac{\bar{w} \bar{H}_0}{R^2}, \quad h_i = \frac{\bar{h}_i}{\bar{H}_0}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad M_1 = \frac{\bar{M}_r}{\sigma_0 \bar{H}_0^2},$$

где  $\bar{w}, r, R$  — прогиб, текущий радиус и внешний радиус пластинки,  $\bar{h}_i, \bar{H}_0$  — координаты раздела слоев по толщине и безразмеривающий параметр толщины пластины, штрих обозначает производную по безразмерной координате  $x$ .

Закон деформирования для рассматриваемых полиметаллических пластин в плоскости  $M_1, M_2$  будет соответствовать шестиугольнику  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  на рис. 4, где для режимов  $A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, E_1F_1, F_1A_1$  будем иметь

$$\begin{aligned} A_1 : M_1 &= M_0 + D_0\kappa_1 \\ M_2 &= M_0 + D_0\kappa_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_1B_1 : M_2 &= M_0 + D_0\kappa_2 \\ 0 \leq M_2 &\leq M_0 + D_0\kappa_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A_1F_1 : M_1 &= M_0 + D_0\kappa_1 \\ 0 \leq M_2 &\leq M_0 + D_0\kappa_2. \end{aligned} \quad (7)$$

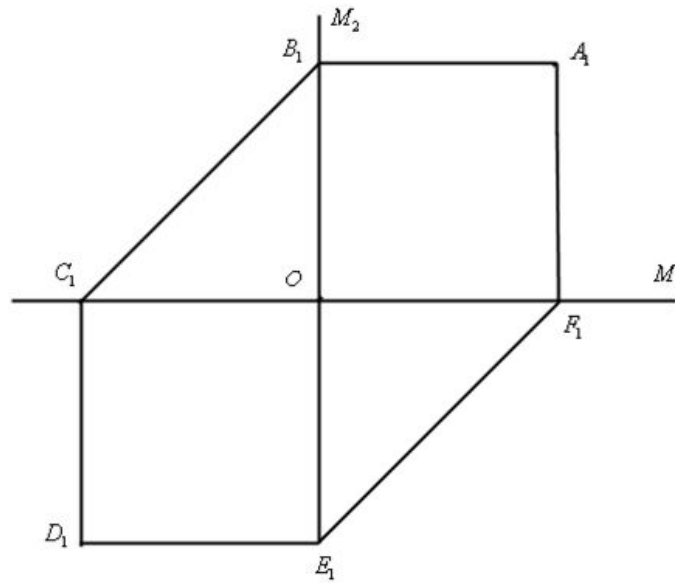


Рис. 4

В выражениях (5)–(7):

$$M_0 = \sum_{i=1}^n \sigma_{0i} (h_i^2 - h_{i-1}^2), \quad D_0 = \sum_{i=1}^n d_i (h_i^2 - h_{i-1}^2). \quad (8)$$

Изгибающие моменты должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$(xM_1)' - M_2 = Q \cdot x, \quad (Q \cdot x)' + px = 0, \quad p = \frac{\bar{q}R^2}{\bar{\sigma}_0 \bar{H}_0^2}, \quad Q = \frac{\bar{Q}R}{\bar{\sigma}_0 \bar{H}_0^2}. \quad (9)$$

**3. Кольцевая шарнирно-опертая по наружному контуру пластинка со свободным внутренним контуром  $x_0$ .** Рассмотрим в качестве примера задачу о равномерно нагруженной кольцевой пластинке  $x_0 \leq x \leq 1$ , шарнирно опертой на нагруженном контуре  $x = 1$ . В этом случае выполняются граничные условия:

$$Q(x_0) = 0, \quad M_1(x_0) = M_1(1) = 0, \quad w(1) = 0 \quad (10)$$

и решение задачи в области  $x_0 \leq x \leq 1$  будет соответствовать режиму  $A_1B_1$ , для которого



$$w''(x) = 0 \text{ и } M_2 = M_0 + D_0 \kappa_2. \quad (11)$$

Тогда, учитывая выражения (4), (8), (9) для пластин постоянной толщины, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой  $p$ , получим выражения

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{(1-x)}{(1-x_0)} w_0, \quad \kappa_2 = \frac{w_0}{(1-x_0)x}, \\ M_2 &= M_0 + \frac{D_0 w_0}{(1-x_0)x}, \quad Q \cdot x = -p(x^2 - x_0^2), \\ M_1 &= \frac{1}{x} \left[ M_0(x - x_0) + \frac{D_0 w_0}{(1-x_0)} \ln \frac{x}{x_0} - \frac{p}{6} (x^3 - 3xx_0^2 + 2x_0^3) \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь граничным условием  $M_1(1) = 0$ , получим в предельном состоянии зависимость максимального прогиба  $w_0$  от давления  $p$ :

$$M_0(1-x) - \frac{Dw_0}{(1-x_0)} \ln x_0 - \frac{p(1-2x_0^2+2x_0^3)}{6}. \quad (12)$$

В соответствии с концепцией слабейшего звена, второе предельное состояние будет достигнуто при реализации условия

$$\max_{x_0 \leq x \leq 1} h_k \kappa_2(x) = \varepsilon_k^* \quad (13)$$

$$\varepsilon_k^* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*),$$

где  $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*$  — предельные деформации материалов соответствующих слоев. Для рассматриваемой задачи условие (13) будет иметь вид:

$$\frac{w_0^*}{(1-x_0)} = \frac{\varepsilon_k^* x_0}{h_k}. \quad (14)$$

И тогда из (12) получим выражения второй предельной нагрузки:

$$p_2^* = p_1^* - \frac{6D_0 \varepsilon_k}{h_k} \frac{x_0 \ln x_0}{(1-3x_0^2+2x_0^3)}, \quad (15)$$

где

$$p_1^* = \frac{6M_0(1-x_0)}{(1-3x_0^2+2x_0^3)} \quad (16)$$

соответствует первой предельной нагрузке, когда материалы всех слоев будут идеально-пластическими.

**4. Шарнирно-опертая пластинка без отверстия.** Для шарнирно-опертой пластинки без отверстия, нагруженной равномерно распределенным давлением  $p$ , при наличии в материалах упрочнения, в пластинке, очевидно, будет существовать два пластических состояния: режим  $A_1$  в области  $0 \leq x \leq x_1$  и режим  $A_1 B_1$  в области  $x_1 \leq x \leq 1$ . При этом должны выполняться граничные условия:

$$w'(0) = Q(0) = w_1(1) = M_1(1) = 0, \quad w(0) = w_0, \quad (17)$$

$$[Q]_{x_1} = [w]_{x_1} = [w']_{x_1} = [w]_{x_1} = [M_1]_{x_1} = 0, \quad (18)$$

где символ  $[...]_{x_1}$  обозначает скачок соответствующей функции на границе  $x = x_1$  раздела пластических состояний. Интегрируя уравнения равновесия (9), с учетом выражений (5), (6) и условия (17), (18), получим следующие выражения для прогибов  $w$  и изгибающих моментов  $M_1$

$$w(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{p}{64D_0} (8x_1^3 - 3x_1^4 - 6x_1^2x^2 + 4^4), & 0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{px_1^2}{64D_0} (1-x), & x_1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}, \quad (19)$$

$$M_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} M_0 + \frac{3}{16} (x_1^2 - x^2), & 0 \leq x \leq x_1 \\ M_0 (1 - \frac{1}{x}) + \frac{px_1^2}{8x} \ln x + \frac{p}{6} (\frac{1}{x} - x^2), & x_1 \leq x \leq 1. \end{array} \right\} \quad (20)$$

Из условия  $M_1(x_1) = M_0$  получим уравнение для границы  $x_1$  пластических состояний

$$p \left( 1 - x_1^2 + \frac{3}{4} x_1 \ln x_1 \right) = 6M_0. \quad (21)$$

При  $x_1 \rightarrow 0$  отсюда получим значение первой предельной нагрузки

$$p_1^* = 6M_0. \quad (22)$$

Второе предельное состояние  $p_2^*$  будет достигнуто при выполнении условия

$$h_k \kappa_1(0) = h_k \kappa_2(0) = \varepsilon_k^*,$$

которое при учете выражений (4) и (19) примет вид

$$\frac{3p_2^* x_1^2}{16D_0} = \frac{\varepsilon_k^*}{h_k}. \quad (23)$$

Уравнение (21) при этом будет иметь вид

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \left[ 1 - \frac{4x_1^2 - 3x_1 \ln x_1}{4} \right]^{-1}. \quad (24)$$

Исключая из уравнений (23) и (24)  $p_2^*$ , получим уравнение для границы  $x_1$  при достижении второго предельного состояния

$$4D_0 \varepsilon_k (4 - 4x_1^2 + 3x_1 \ln x_1) = 3p_1^* x_1^2 \quad (25)$$

После вычисления корня  $x_1$  этого уравнения по формуле (23) определим значение второй предельной нагрузки.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Fleck, J. Explosive welding of composite materials / J. Fleck, A. Laber, R. Leonard // J. Compos. Mater. – 1969. – Vol. 3. – № 4. – P. 669–701.
- [2] Король, В. К. Основы производства многослойных материалов / В. К. Король, М. С. Гилденгорг. – М. : Металлургия, 1978. – 277 с.
- [3] Дерibas, А. А. Физика прочности и сварки взрывом / А. А. Дерibas. – Новосибирск : Наука, 1977. – 188 с.
- [4] Немировский, Ю. В. Рациональное проектирование плоских преград при воздействии взрывных нагрузок // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф : труды VII Всероссийской научной конференции (Красноярск, 13-17 окт. 2003 г.). – Красноярск, 2003. – Т. 1. – С. 191–194.
- [5] Немировский, Ю. В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок / Ю. В. Немировский // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1. – С. 150–159.
- [6] Прагер, В. Новый метод анализа напряжений и деформаций в пластических телах, обладающих упрочнением / В. Прагер // Механика. – 1957. – № 5. – С. 124–129.

Немировский Юрий Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Y. V. Nemirovsky

**LIMITING ELASTIC STATE OF COMPRESSED RING PLATES WITH  
VARIOUS STRUCTURES OF REINFORCING**

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich SB RAS, Novosibirsk*

**Abstract.** Limiting elastic state of ring curvilinear reinforced plates with various structures of reinforcing such as radial-peripheral, spiral and mixed one is considered. Conditions of limiting elastic state are formulated. Statements of flat stresses problem and buckling problem in terms of polar coordinate system are presented. The critical loads are determined for various laws of reinforcement and estimations of efficiency for various structures are presented.

**Keywords:** buckling, composite plate, structures of reinforcement, radial orthotropy.

**REFERENCES**

- [1] *Fleck, J.* Explosive welding of composite materials / J. Fleck, A. Laber, R. Leonard // *J. Compos. Mater.* – 1969. – Vol. 3. – № 4. – P. 669–701.
- [2] *Korol, V. K.* Bases of production of multilayered materials / V. K. Korol, M. S. Gildengorg. – M. : Metallurgy, 1978. – 277 p. (in Russian)
- [3] *Deribas, A. A.* Physics of durability and welding by explosion / A. A. Deribas. – Novosibirsk : Nauka, 1977. – 188 p. (in Russian)
- [4] *Nemirovsky, Yu. V.* Rational design of flat barriers at influence of explosive loadings // *Modern methods of mathematical modeling natural and anthropogenous disasters : works VII of the All-Russian scientific conference (Krasnoyarsk, 13–17 October 2003).* – Krasnoyarsk, 2003. – Vol. 1. – P. 191–194. (in Russian)
- [5] *Nemirovsky, Yu. V.* Second limit condition of uniform and composite beams / Yu. V. Nemirovsky // *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state.* – 2009. – № 1. – P. 150–159. (in Russian)
- [6] *Prager, V.* New method of the analysis of tension and deformations in the plastic bodies possessing hardening / V. Prager // *Mechanics.* – 1957. – № 5. – P. 124–129. (in Russian)

*Nemirovsky, Yuri Vladimirovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

Б. Г. Миронов, Т. В. Митрофанова

## К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары

**Аннотация.** Кручение представляет собой один из видов деформации тела, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений стержня под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. В работе исследовано предельное состояние цилиндрического анизотропного стержня при кручении. Построено поле характеристик основных соотношений, найдены огибающие семейства характеристик. Определены соотношения вдоль характеристик. Полученные результаты могут быть применены при решении новых задач теории предельного состояния.

**Ключевые слова:** кручение, цилиндрический стержень, анизотропия, напряжение, огибающая.

УДК: 539.375

Рассмотрим анизотропный цилиндрический стержень, ориентированный в декартовой системе координат  $xuz$ , причем образующие стержня направлены параллельно оси  $z$ . Предположим, что стержень закручивается вокруг своей оси.

Пусть напряженное состояние стержня характеризуется условием пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты напряжений в декартовой системе координат.

К соотношению (1) присоединим три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1), (2) является статически неопределимой. Предположим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \quad (3)$$

С учетом (3) из (1) и (2) получим

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0, \quad (4)$$

Поступила 08.02.2015

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14-01-31323 мол\_а) и в рамках выполнения государственного задания (код проекта 1179).

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

где  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  — касательные напряжения, зависящие от  $x$  и  $y$ .

Согласно [1] характеристики соотношения (4), (5) ортогональны вектору градиента к поверхности течения в соответствующей точке.

Рассмотрим случай, когда условие (4) имеет вид

$$A\tau_{xz}^2 + B\tau_{yz}^2 = 1. \quad (6)$$

Условие (6) перепишем в виде

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b^2} = 1, \quad (7)$$

где  $a = \frac{1}{\sqrt{A}}, b = \frac{1}{\sqrt{B}}$ .

Условие пластичности (7) в плоскости напряжений соответствует эллипс (рис. 1б).

Так как боковая поверхность стержня свободна от усилий, то вектор касательного напряжения направлен по касательной к контуру  $L$ , где  $L$  — контур поперечного сечения стержня плоскостью  $z = \text{const}$ .

Рассмотрим стержень, контур поперечного сечения которого есть эллипс (рис. 1а)

$$L: \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1. \quad (8)$$

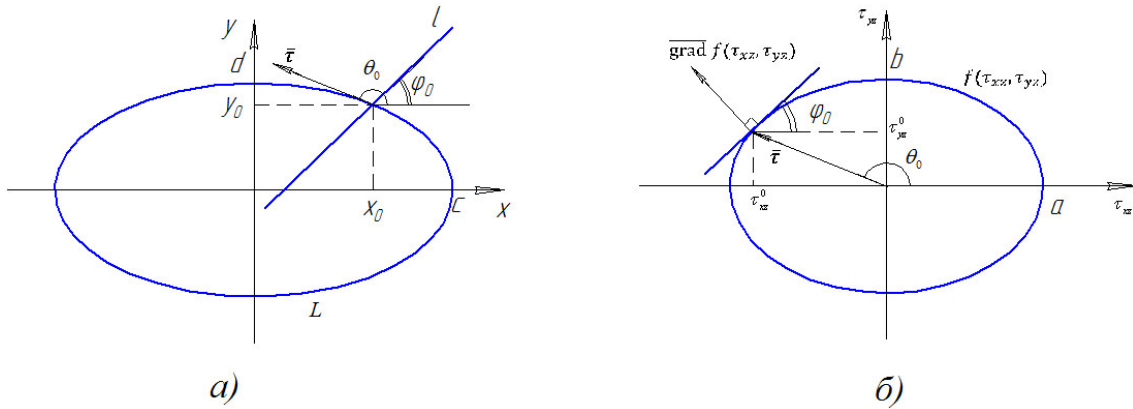


Рис. 1

Пусть  $(x_0, y_0) \in L$  и через точку  $(x_0, y_0)$  проходит характеристика  $l$ . Следовательно,

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\tau_{yz}^0}{\tau_{xz}^0} = -\frac{d^2}{c^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}, \quad (9)$$

где  $\theta_0$  — угол, который образует вектор касательного напряжения  $\tau$  с осью  $Ox$ .

Тогда получим

$$\operatorname{tg} \phi_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\tau_{xz}^0}{\tau_{yz}^0} = \frac{b^2 c^2}{a^2 d^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}, \quad (10)$$

где  $\phi_0$  — угол наклона характеристики к оси  $Ox$ .

Из (10) уравнение семейства характеристик  $l$  примет вид

$$y = y_0 + \frac{b^2 c^2}{a^2 d^2} \cdot \frac{y_0}{x_0} (x - x_0). \quad (11)$$

Уравнения огибающей данного семейства характеристик имеет вид

$$y = \pm \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c}{d} \left( \frac{(b^2 c^2 - a^2 d^2)}{4 \frac{2}{3}} - x \frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

В частности, когда поперечное сечение стержня представляет собой окружность ( $c = d = 1$ ), уравнение огибающей имеет вид [2].

В изотропном случае, когда  $a = b = 1$ , уравнение огибающей примет вид

$$y = \pm \frac{c}{d} \left( \frac{c^2 - d^2}{c^{\frac{4}{3}}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (13)$$

### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Деревянных, Е. А.* Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Е. А. Деревянных, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2012. – № 4 (76). – С. 108–112.

[2] *Миронов, Б. Г.* О кручении цилиндрических анизотропных стержней / Б. Г. Миронов, Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2011. – № 9. – С. 150–155.

[3] *Миронов, Б. Г.* О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 98–101.

*Миронов Борис Гурьевич,*

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: rektorat@chdpu.edu.ru

*Митрофанова Татьяна Валерьевна,*

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: mitrofanova\_tv@mail.ru

B. G. Mironov, T. V. Mitrofanova

## THE QUESTION OF TORSION ANISOTROPIC BARS

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

**Abstract.** Torsion is a type of deformation of the body, characterized by the relative rotation of the cross-sections of the rod under the influence of moments acting in these sections. We have investigated the limiting condition anisotropic cylindrical rod under torsion. Constructed field characteristics of the fundamental relations, found the envelope of performance. The relationships along the characteristics. The results can be applied to solve new problems in the theory of a limiting condition.

**Keywords:** torsion, a cylindrical bars, anisotropy, stress envelope.

### REFERENCES

- [1] *Derevyannih, E. A.* About the general ratios of the theory of torsion of anisotropic cores / E. A. Derevyannih, B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2012. – № 4 (76). – P. 108–112. (in Russian)
- [2] *Mironov, B. G.* About torsion of cylindrical anisotropic cores / B. G. Mironov, T. V. Mitrofanova // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2011. – № 9. – P. 150–155. (in Russian)
- [3] *Mironov, B. G.* About torsion of the prismatic cores which are under the influence of pressure linearly changing along the forming / B. G. Mironov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2006. – № 1 (48). – P. 98–101. (in Russian)

*Mironov, Boris Guryevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Mitrofanova, Tatiana Valeryevna*

*PhD, Associate Professor, Department of Computer Science and Computer Engineering, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*



## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (cotedurhone\_mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

**Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов.

**Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва.

**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@mech.math.msu.su](mailto:lomakin@mech.math.msu.su)) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Манжиров Александр Владимирович** ([manzh@ipmnet.ru](mailto:manzh@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Матченко Николай Михайлович** ([eks\\_05@mail.ru](mailto:eks_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Миронов Борис Гурьевич** ([rektorat@chdpu.edu.ru](mailto:rektorat@chdpu.edu.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([irakon63@hotmail.com](mailto:irakon63@hotmail.com)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

**Михайлов Глеб Константинович** ([gkmikh@mail.ru](mailto:gkmikh@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

**Мурашкин Евгений Валерьевич** ([evmurashkin@gmail.com](mailto:evmurashkin@gmail.com)) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва.

**Победра Борис Ефимович** ([rob@mail.ru](mailto:rob@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

**Ревуженко Александр Филиппович** ([revuzhenko@yandex.ru](mailto:revuzhenko@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.</i> Конечные деформации и экстрадеформации термоупругого континуума второго типа с микроструктурой .....	3
<i>Трещев А. А., Леонов В. М.</i> Магнитно-импульсная обработка металлов. Исследование характеристик .....	30
<i>Спиридонова Е. В.</i> Численно-аналитическое решение плоских задач теории трещин в смешанной постановке .....	39
<i>Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.</i> О различных методах адаптации схемы лучевых прифронтовых разложений в задачах осесимметричной динамики нелинейноупругих сред .....	50
<i>Спасская М. В., Трещев А. А.</i> Термоупругое деформирование цилиндрической оболочки из анизотропного разнородного материала .....	66
<i>Сенашов С. И., Гомонова О. В.</i> Об упругопластическом кручении стержня, находящегося под действием давления, меняющегося вдоль образующей .....	76
<i>Семенова И. А.</i> Примеры аналитических решений обратно симметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе .....	86
<i>Абиев Т. К.</i> Контактная задача о частичном взаимодействии берегов прямолинейной трещины в полосе при неравномерном нагреве .....	97
<i>Меньшова И. В.</i> О периодических решениях Файлона – Рибьера в двумерной задаче теории упругости .....	106
<i>Кулиев В. Д.</i> Новые эффективные методы решения класса смешанных краевых задач .....	132
<i>Калантарлы Н. М.</i> Рост трещины со связями между берегами в концевых зонах в равномерно вращающемся кольцевом диске .....	163
<i>Велиев Ф. Э.</i> Контактная задача о воздействии локальным изменением толщины пластины на трещину .....	172
<i>Никитин А. В.</i> Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления .....	181
<i>Немировский Ю. В.</i> Второе предельное состояние полиметаллических круглых и кольцевых пластин .....	189
<i>Мионов Б. Г., Митрофанова Т. В.</i> К вопросу о кручении анизотропных стержней .....	197
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	201

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	204
СОДЕРЖАНИЕ .....	206

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2015. № 1 (23)**

**Отв. за выпуск:** А. В. Балашникова

**Технические редакторы:** А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова

**Макет:** А. В. Балашникова

---

Подписано в печать 31.03.2015.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 26,00.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38