

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал**  
**№ 1(27)**  
**Январь – март 2016 г.**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"  
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в  
которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на  
соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге "Пресса России" 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко

**Ответственные секретари:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,  
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, Б. Е. Победря, В. П. Радченко,  
А. Ф. Ревуженко, С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,  
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж  
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 62-16-19.

**Email:** predel21@mail.ru.

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>.

© ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева», 2016



Б. Г. Миронов<sup>1</sup>, Ю. Н. Радаев<sup>2</sup>

## ПРОФЕССОР Д. Д. ИВЛЕВ. К 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

<sup>1</sup> Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

6 сентября 2015 г. исполнилось бы 85 лет Дюису Даниловичу Ивлеву — доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации. Главное в творческой деятельности Д. Д. Ивлева — бескомпромиссное служение научной истине и неустанный поиск на самых передовых рубежах современной науки. Дюис Данилович ушел из жизни 3 марта 2013 г.

Без малого 60 лет его научной и общественной деятельности, выдающиеся научные достижения позволяют причислить Д. Д. Ивлева к категории самых оригинальных мыслителей современной России. Д. Д. Ивлеву принадлежит свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе семь монографий. Его вклад в математическую теорию пластичности и механику деформируемого твердого тела с полным правом можно назвать выдающимся. Д. Д. Ивлев — основатель и руководитель научной школы механики идеально пластических тел и конструкций, базирующейся в университетских и академических центрах Воронежа, Самары, Владивостока, Чебоксар. Огромная часть научной и педагогической деятельности Д. Д. Ивлева связана с подготовкой кадров высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела. В настоящее время в рамках созданной им научной школы работает свыше 20 докторов и более 100 кандидатов наук.

Д. Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в г. Чебоксары Чувашской Республики. Его отец — Ивлев Данил Осипович (1905–1969 гг.) — происходил из семьи крестьянина-бедняка, проживавшей в деревне Верхние Сунары Шуматовской волости Ядринского

---

© Миронов Б. Г., Радаев Ю. Н., 2016

*Миронов Борис Гурьевич*

e-mail: predel21@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ректор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Поступила 13.01.2016

езда.<sup>1</sup> Сельская комсомольская организация направила его в 1923 г. для учебы на Чувашский рабфак, а затем Д. О. Ивлев был направлен в Московский институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова и обучался там с 1926 по 1931 г. Желая лично участвовать в культурном возрождении Чувашии, получившей в 1920 г. административно-территориальную автономию, он в 1931 г. по направлению ЦК ВЛКСМ вернулся в Чебоксары, чтобы преподавать в Чувашском педагогическом институте. В 30-е годы Д. О. Ивлев был членом редакционной комиссии по переводу на чувашский язык произведений классиков марксизма-ленинизма, главным редактором Чувашского партийного издательства, ректором (1934–1937 гг.) Высшей коммунистической сельскохозяйственной школы, заведующим (1938–1941 гг.) кафедрой марксизма-ленинизма ЧГПУ. Д. О. Ивлев 3 августа 1941 г. был призван в армию и прошел всю войну, закончив ее в составе Третьего Белорусского фронта в звании майора. Награжден двумя орденами Красной Звезды. После войны преподавал общественно-экономические дисциплины в военных учебных заведениях в Закавказье (г. Кировабад Азербайджанской ССР) и Прибалтике (г. Рига) и, уже будучи в отставке, — в Ульяновском сельскохозяйственном институте. Данил Осипович с супругой Иулианией Даниловной вырастили двух сыновей, Дюиса и Дмитрия, и дочь Евгению. Ивлев Дмитрий Данилович — доктор филологических наук (1985 г.), профессор (1987 г.), известный специалист в области истории и теории русской литературы. В 1955 г. окончил филологический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Главное, что удалось сделать Д. О. Ивлеву — своей жизнью завоевать право на возможность самостоятельно мыслить и познавать как важнейшую форму бытия современного человека и дать своим детям четкий ориентир в жизни: приобретение новых знаний и систематическая научная работа.

После окончания средней школы в 1948 г. Д. Д. Ивлев покидает Чебоксары и поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, который заканчивает в 1953 г. В 1956 г., после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ, он успешно защитил диссертацию “Приближенное решение упруго-пластических задач методом малого параметра” в совете при МГУ (оппонентами по этой работе выступили В. В. Соколовский и Г. С. Шапиро; председательствовал на защите А. Ю. Ишлинский) и получил ученую степень кандидата физико-математических наук. С февраля 1957 г. по октябрь 1958 г. он работает в должности младшего научного сотрудника Института механики АН СССР. В 1959 г., после защиты диссертационной работы “Пространственная задача теории идеальной пластичности”, которая также представлялась в совет при МГУ, Д. Д. Ивлев получает степень доктора физико-математических наук. Оппонентами по докторской диссертационной работе выступили Л. А. Галин, Л. М. Качанов и Г. С. Шапиро.

В октябре 1959 г. Д. Д. Ивлев, будучи 29-летним доктором физико-математических наук и уже достаточно широко известным ученым в области математической теории пластичности, развивающим новое ее направление — теорию течения, по приглашению ректора Воронежского университета Б. И. Михантьева приезжает в г. Воронеж. В декабре 1959 г. Д. Д. Ивлев возглавил созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис

---

<sup>1</sup>См.: Жизнь и деятельность Ивлева Данила Осиповича (к 100-летию со дня рождения)/ Сб. статей и воспоминаний о Д. О. Ивлеве. Чебоксары: Изд-во ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2007. 81 с.

Данилович сумел в короткий срок активизировать научную и педагогическую работу. Лекции и научные семинары под руководством профессора Д. Д. Ивлева оставляли незабываемое впечатление и всегда поражали глубиной проникновения в суть обсуждаемых вопросов. В 60-е годы в Воронежском государственном университете на математико-механическом факультете Д. Д. Ивлев работал вместе с профессорами М. А. Красносельским, С. Г. Крейном, В. И. Соболевым. Основа творческого взаимодействия механиков и математиков Воронежского университета была заложена именно в те годы. Созданная Д. Д. Ивлевым воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые в те годы научные исследования были связаны с рядом фундаментальных и прикладных проблем механики сплошных деформируемых сред. Работы Д. Д. Ивлева и его учеников постоянно были в фокусе внимания ученых как в нашей стране, так и за ее пределами; их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным и ощущается до сих пор. В 1961 г. Д. Д. Ивлеву было присвоено ученое звание профессора. Под руководством профессора Д. Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР.

Параллельно с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в ВГУ профессор Д. Д. Ивлев в течение ряда лет заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, куда его пригласил ректор В. С. Постников. В эти же годы Д. Д. Ивлев по просьбе ректора Л. Н. Талова читает лекции в Воронежском педагогическом институте. Следует отметить, что уже в годы работы в Воронежском университете началось сотрудничество Д. Д. Ивлева с одним из своих аспирантов — Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды — научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Одним из талантливых учеников Д. Д. Ивлева тех лет также был В. В. Дудукаленко. Г. И. Быковцев стал первым деканом нового факультета — прикладной математики и механики, возглавил созданную им кафедру технической кибернетики и теории автоматического регулирования. Через несколько лет, после известных событий, связанных с абсолютно несправедливыми и неприемлемыми обвинениями, выдвинутыми против его научной и педагогической деятельности,<sup>2</sup> Геннадий Иванович возглавил кафедру механики деформируемого твердого тела в Куйбышевском (Самарском) государственном университете. С избранными научными статьями Г. И. Быковцева заинтересованный читатель может познакомиться по книге: Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. ст. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

В 1966 г. Д. Д. Ивлев возвращается в Москву, где сначала работает профессором МВТУ им. Н. Э. Баумана (1966–1970 гг.) и заведует кафедрой высшей математики, а затем (1971–1982 гг.) — заведующим кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном политехническом институте (сейчас Московский государственный открытый университет). Вместе со своими учениками профессорами Г. И. Быковцевым и И. А. Бережным параллельно он активно участвует в создании научной школы механики деформируемого твердого тела в г. Куйбышеве.

---

<sup>2</sup>Оценка этих событий имеется в статье: Яровой Г. П., Радаев Ю. Н. К 70-летию Г. И. Быковцева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. № 9/1(59). 2007. С. 9-30.

В 1982 г. Д. Д. Ивлев приезжает на родину в г. Чебоксары, где в период с 1982 г. по 1993 г. работает сначала заведующим кафедрой математического анализа, а затем — заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела в Чувашском государственном университете им. И. Н. Ульянова. В 1985–1993 гг. он является деканом физико-математического факультета. В 1993 г. Д. Д. Ивлев переходит на работу в Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, где до самой смерти заведовал кафедрой математического анализа. В конце 80-х Д. Д. Ивлев создал в Чебоксарах докторский диссертационный совет по механике деформируемого твердого тела и обеспечивал его функционирование в течение более чем двух десятков лет. Ему удалось придать ему качественно новый статус — регионального совета, в работе которого участвовали ведущие ученые нашей страны в области механики деформируемого твердого тела, прочности и пластичности тел и конструкций. Этот совет сыграл и продолжает играть исключительно важную роль в подготовке кадров высшей квалификации для многих региональных научных школ.

Работы Д. Д. Ивлева посвящены механике деформируемого тела, в основном математической теории пластичности.<sup>3</sup> Ряд результатов Д. Д. Ивлева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела. Далее нам представляется уместным дать необходимые сведения о развитии математической теории пластичности и ее современном состоянии.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (В. Saint-Venant, 1870 г.) [1], [2] на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска (Н. Tresca). Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения  $k$ . Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе "О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре" [3], представленной во Французскую Академию наук в 1773 г. В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по некоторой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скальванию по этой плоскости.

Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье—Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния, и поэтому его теория

---

<sup>3</sup>Среди них семь монографий: "Теория идеальной пластичности" (1966); "Теория упрочняющегося пластического тела" (в соавторстве с Г. И. Быковцевым, 1971); "Метод возмущений в теории упругоэластического тела" (в соавторстве с Л. В. Ершовым, 1978); "Теория пластичности" (в соавторстве с Г. И. Быковцевым, 1998); "Математическая теория пластичности" (в соавторстве с А. Ю. Ишлинским, 2001); фундаментальная двухтомная монография "Механика пластических сред" (2001, 2002); "Предельное состояние деформируемых тел и горных пород" (в соавторстве с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным, Ю. Н. Радаевым, С. И. Сенашевым, Е. И. Шемякиным, 2008).

нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (M. Levy, 1871 г.) [4]. Статьи Сен-Венана и Леви появились одна за другой в *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона—Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций.<sup>4</sup> Теория Леви, поскольку она основана на "неассоциированном" законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга.<sup>5</sup>

Соотношения Сен-Венана для плоской пластической деформации — статически определяемая система уравнений гиперболического типа, что и позволило позднее развить теорию полей скольжения, связываемую обычно с именами Генки (H. Hencky, 1923 г.) и Гейрингера (H. Geiringer, 1930 г.). Математический аппарат, соответствующий соотношениями Сен-Венана для плоской задачи, оказался, таким образом, вполне адекватным экспериментальным и теоретическим представлениям о течении идеально пластического тела. Заметим, что уравнения теории плоского напряженного состояния (в отличие от случая плоской деформации) не могут быть получены как частный случай пространственных уравнений.

Уравнения пространственной задачи математической теории пластичности длительное время оставались неизученными. И в настоящее время разработка теории трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния. Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности, Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения. "Задачи трехмерного пластического течения трудны и мало изучены." Так сформулировано отношение к вопросам пространственной задачи математической теории пластичности авторов известной обзорной статьи: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ в кн.: *Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 79–118.*

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви—Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболически. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории

<sup>4</sup>В настоящее время закон течения, устанавливающий пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций, называют законом Леви—Мизеса.

<sup>5</sup>Об этом ярко свидетельствуют работы: Михлин С.Г. Основные уравнения математической теории пластичности. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. 71 с.; Христианович С.А., Михлин С.Г., Девисон Б.Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды: Неустановившееся движение в каналах и реках. Математическая теория пластичности. Движение грунтовых вод / Изд-во АН СССР. Математический институт им. В.А. Стеклова; под ред. Н.Е. Кочкина. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. 407 с. (См. ч. II: С.Г. Михлин. Математическая теория пластичности. С. 157–218. Здесь на с. 163 приводятся пространственные уравнения Леви.)

идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [5], с. 144–146). Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптически (т. е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви—Мизеса, действительные характеристики отсутствуют.<sup>6</sup> Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования (см. [6]–[11]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения.

Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Кулона—Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности, и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние, и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов.<sup>7</sup> Фигуры

<sup>6</sup>Как представляется, задача поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона—Треска, для огромного большинства пространственных состояний уравнения теории пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Не спасает положения учет упругих деформаций и различных гипотез упрочнения. Все равно для абсолютного большинства пространственных состояний соответствующие уравнения эллиптически. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругоупругих деформаций, и для редко применяемых в настоящее время "неассоциированных" законов пластического течения.

<sup>7</sup>Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д.К. Чернов оставался вне поля зрения официальной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Жизнь, научное творчество и практическая инженерная деятельность Д.К. Чернова подробно освещены в книге: Д.К. Чернов и наука о металлах (под ред. акад. Н.Т. Гудцова.) М., Л.: Металлургиздат, 1950. 564 с. В это издание включены основные научные труды этого выдающегося

скольжения, которые наблюдались Д.К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся в известной монографии: Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1952. 556 с. (см. с. 103). Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. В начальный период развития теории пластичности при изучении пластического течения широко использовались представления о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия.<sup>8</sup> В предисловии мы уже говорили о соответствии между изменениями в структуре сильно деформированных металлов и при формации горных пород, отмечаемыми и описываемыми в петрографии. Поэтому теория линий скольжения в руках геологов может служить средством расшифровки процессов образования горных цепей и континентальных плато, восстановления истории движения земной коры (в том числе и ее континентальной части).<sup>9</sup> Таким образом, теория скольжения находит свое подтверждение на двух существенно отличающихся масштабных уровнях.

К настоящему времени уже стало ясно, что предельные состояния твердых тел должны также описываться статически определенными уравнениями гиперболического типа.<sup>10</sup> Теория предельного состояния первоначально развивалась в рамках механики сыпучих сред. Основоположник теории К. Кулон сформулировал (1773 г.) основные положения теории предельного состояния и ввел представление о поверхности сползания, которые были применены для решения ряда важных прикладных задач. Систематическое изложение теории предельного состояния сыпучих сред на основе представления о сетке скольжения было дано В.В. Соколовским в 1942 г. (см.: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 208 с.; третье издание: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 244 с.). Теории предельного состояния и идеальной пластичности, таким образом, имеют общие основы, однако они далеко не тождественны. Теория идеальной пластичности основана на представлении об условии пластичности, которое, вообще говоря, может приводить либо к статически определенным, либо к статически неопределенным состояниям. Теория предельного состояния в качестве своего предмета исследования берет лишь статически определенные состояния, которые могут быть достигнуты, скажем, при пропорциональном возрастании внешних нагрузок. Для предельного состояния все "предыдущие" свойства материала не играют никакой роли, поскольку предельное состояние определяется из замкнутой системы формально статически определенных соотношений, не имеющих ничего общего с допредельным поведением тела.

---

ученого. Его научная биография опубликована также в книге: Гумилевский Л.И. Чернов (научн. ред. проф. И.Я. Конфедератов.) М.: Молодая гвардия, 1975. 208 с.

<sup>8</sup>В настоящее время более эффективными являются прямой конечно-разностный численный анализ.

<sup>9</sup>Применение математической теории пластичности и концепции скольжения к задачам геологии и геофизики читатель может найти в монографиях: Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.; Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Изд-во Мир, 1969. 864 с.

<sup>10</sup>См.: Ивлев Д.Д. Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 5(39). С. 33–41.

Экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Кулона—Треска.<sup>11</sup> Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится, тем более что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текучести от условия Кулона—Треска. Тем не менее можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытными данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов до конца не удастся. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т. е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Кулона—Треска. Таким образом, критерий текучести Кулона—Треска, по-видимому, действительно лучше, чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т. е. большего соответствия условия Кулона—Треска физике пластической деформации, высказывались многие авторы.<sup>12</sup>

Итак, формально статически определяемая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности. Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (А. Наар, Th. von Karman) выдвинули условие "полной пластичности" [13], которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска,<sup>13</sup> и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определяемыми.

В 1923 г. Генки (Н. Hencky) [14] предложил использовать условие полной пластичности Хаара—Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определяемой системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона—Треска исследовались Р. Шилдом (R. T. Shield) [15]

<sup>11</sup>См., например, [12], с. 55, 57; [6], с. 29–34. Обычно при этом указывают на экспериментальные данные А. Надаи (A. Nadai) и Лоде (W. Lode, 1928 г.). Именно в результате выполненных ими в Геттингене при участии Прандтля экспериментов и был сделан вывод о предпочтительности условия пластичности Мизеса. *В опытах Надаи и Лоде окончательно установлено условие пластичности Мизеса, причем показано его преимущество перед условием наибольших касательных напряжений.* (Цит. по: Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. С. 57.) Имеется перевод оригинальной работы Лоде: Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов // Теория пластичности: сб. ст. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 168–205.

<sup>12</sup>Дискуссия по этому поводу имеется на с. 86, 87 упомянутой выше обзорной статьи А.А. Вакуленко и Л.М. Качанова.

<sup>13</sup>Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Кулона—Треска и соответствует ребру призмы Кулона—Треска. Ясно, что состояние полной пластичности может быть описано также в рамках условия пластичности Мизеса. Однако в этом случае ассоциированный с условием пластичности Мизеса закон течения приводит к неправильно определенной системе кинематических уравнений.

для ребер и граней призмы Кулона—Треска. Осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Кулона—Треска, были построены Р. Шилдом (R.T. Shield) в той же самой работе [15]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [16] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности Хаара—Кармана, доказав статическую определенность и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А.Ю. Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла, полагавшего, что "такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара—Кармана для металлов физически нереальна и она вводит ошибку неизвестной величины" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 321). Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви—Мизеса определить связанного с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании гипотезы Хаара—Кармана и замене закона течения Леви—Мизеса на *обобщенный* ассоциированный с условием пластичности Кулона—Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара—Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [17], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций,<sup>14</sup> следующие из *обобщенного* ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи *двух* условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров [22]. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: "Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение  $2k$ . Таким образом, для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение." Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от "неассоциированного" определяющего закона Леви [4] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [1],

<sup>14</sup>А.Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

[2] на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности, и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [18], [19], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара—Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона—Треска) и *обобщенный* ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в *регулярных* точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T. Koiter) в 1953 г.<sup>15</sup> Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

В работах Д.Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т. е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска, также гиперболически и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения.<sup>16</sup>

<sup>15</sup>Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface// Quart. Appl. Math. V. 11. № 3. 1953. P. 350–354.

<sup>16</sup>Этот результат был получен в работе [20]. Классическое изложение теории пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, имеется в монографии [11], с. 205–246.

Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определенных уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности "продиктованы скорее заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса" (см.: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ в кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 100). Тем не менее они замечают, что решения, полученные по схеме полной пластичности, могут представлять несомненный интерес, полемизируя при этом с Р. Хиллом, критически оценившим условие полной пластичности Хаара—Кармана как "искусственное и нереальное условие текучести" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 320, 321). Не вызывает возражений высказываемая ими мысль о том, что ценность того или иного решения пространственной задачи устанавливается возможностью либо построить согласованное кинематически допустимое поле, либо продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. В противном случае вопрос о значимости решения остается открытым. Ясно, что исключительную ценность представляют полные решения, когда удастся построить согласованное кинематически допустимое поле и продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. Таким образом, неполные решения обладают лишь относительной ценностью, а полные — абсолютной. На практике, однако, чаще всего удается построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны. Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так или иначе, большинство прикладных задач решены по идеально пластической схеме неполно.

В дальнейшем Д.Д. Ивлевым была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести, и в результате показано, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Любопытно отметить, что как статические, так и кинематические уравнения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для граней призмы Кулона—Треска, соответствующих кинематически определенным режимам течения, также являются гиперболическими; характеристические направления ориентированы так же, как и главные направления тензора напряжений, т. е. характеристики касаются главных направлений тензора напряжений.<sup>17</sup>

<sup>17</sup>См. работу [21]. Полное исследование характеристик уравнений осесимметричной задачи при условии пластичности Треска для различных режимов пластического течения читатель может найти в [8], с. 258–268.

Подобным же образом дело обстоит и в пространственной задаче: в случае грани произвольного кусочно-линейного условия текучести характеристические поверхности касаются главных направлений тензора напряжений.

В 1971 г. Д.Д. Ивлев и Г.И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности как идеального, так и упрочняющегося тела с учетом упругих деформаций и без их учета на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений.<sup>18</sup> Полученные ими результаты помогают установить, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т. е. эллиптичны; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптичны.

В 1966 г. выходит в свет монография Д.Д. Ивлева “Теория идеальной пластичности”. В этом оригинальном сочинении с высоким мастерством были изложены новые результаты и принципы математической теории идеальной пластичности и, прежде всего, теория пространственной и обобщенной плоской задачи. Заметим, что эта монография стоит в одном ряду с замечательными руководствами по теории пластичности, написанными советскими учеными-механиками, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами.<sup>19</sup> И в настоящее время “Теория идеальной пластичности” Д.Д. Ивлева служит незаменимым руководством для тех, кто пытается глубже проникнуть в основы математической теории идеальной пластичности с опорой на блестящее и последовательное изложение, данное грандом этой науки.

В механике упрочняющихся пластических тел Д.Д. Ивлев (совместно с Г.И. Быковцевым) последовательно развивал представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения, предложенные ранее в исследованиях А.Ю. Ишлинского и В. Прагера (W. Prager). Результаты их совместных исследований легли в основу классической монографии, которая по сути представляет собой каноническое изложение математической теории пластичности упрочняющегося тела в случае малых деформаций. В этой монографии читатель найдет исчерпывающий анализ общих уравнений теории течения и свойств их решений, включая анализ сильных и слабых разрывов с помощью аппарата геометрических и кинематических условий совместности Адамара—Томаса (J. Hadamard, T. Tomas).

<sup>18</sup>См.: Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с. Научная биография Г.И. Быковцева, отражающая его выдающийся вклад в развитие теории пространственной задачи математической теории пластичности, имеется в статье: Яровой Г.П., Радаев Ю.Н. К 70-летию Г.И. Быковцева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. № 9/1(59). 2007. С. 9–30.

<sup>19</sup>Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с. (Это последнее третье издание; второе издание: Соколовский В.В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 396 с.; первое издание книги было выпущено в свет издательством АН СССР в 1946 г.);

Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.;

Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. (Первое издание этой книги: Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 324 с.).

Исследования Д.Д. Ивлева в области математической теории пластичности подытожены в фундаментальной двухтомной монографии "Механика пластических сред".<sup>20</sup>

Помимо перечисленных, Д.Д. Ивлеву принадлежат различные результаты в области предельного состояния конструкций, статики и динамики сыпучих сред, устойчивости равновесия упругоэластических тел, гидродинамики, теории трещин и механики разрушения. Следует отметить обстоятельный обзор работ по механике разрушения с изложением основных результатов этой части механики деформируемого твердого тела, сделанный им в момент острой дискуссии, посвященной механике трещин (см.: Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1967. № 6. С. 88–128). Дискуссиям в механике посвящена важная и весьма поучительная статья: Ивлев Д.Д. Три дискуссии в механике // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54). С. 115–123. В ней Д.Д. Ивлев с присущей ему корректностью, тактом и бережным отношением к научным фактам затрагивает важную тему дискуссии по механике квазихрупкого разрушения и дает свою оценку имевшим место событиям, тем более что Д.Д. Ивлев лично участвовал в этой дискуссии. Мы также ранее высказывались по этому поводу в статье: Радаев Ю.Н. К 75-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 5(39). С. 5–32. Наши оценки результатов имевшей место более сорока лет назад дискуссии совпадают. В частности, Д.Д. Ивлев в указанной выше статье пишет: "Прав Ю.Н. Радаев, когда написал: *"Через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке"*." Далее последовала публикация Г.П. Черепанова "Научные сражения: Москва, 1960-е годы" (Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. № 2(68). 2009), в которой дается вульгарная и односторонняя интерпретация важных для научной общественности событий с оскорбительными высказываниями в адрес акад. А.Ю. Ишлинского, акад. Я.Б. Зельдовича, акад. С.А. Христиановича, акад. Е.И. Шемякина и проф. Г.И. Баренблатта. В конце этой так называемой "статьи" сказано, что мемуары Г.П. Черепанова написаны по предложению проф. Д.Д. Ивлева и Ю.Н. Радаева. Нет смысла комментировать действия Г.П. Черепанова. Содержание своей "статьи" он ни с кем не согласовывал и должен в полной мере отвечать за ее содержание, которое, как нам представляется, находится за гранью норм культурного общения. Ясно, что Г.П. Черепановым движет болезненное самомнение, сильно завышенная самооценка и стремление заявить о своей выдающейся роли в науке в условиях, когда об этом никто ничего не говорит. Позиция Д.Д. Ивлева по всем дискуссионным проблемам научной и общественной жизни в России всегда высказывалась им в предельно корректной форме и в присутствии ему академическом стиле.

В последние годы Д.Д. Ивлев активно разрабатывал общую гиперболическую парадигму механики сплошных сред и, шире, всего естествознания.

В течение трех последних десятилетий рядом российских ученых проводятся исследования в рамках научного направления, вектор которого был задан Д.Д. Ивлевым в его работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности

<sup>20</sup>См.: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 448 с.; Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругоэластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 448 с.

конца 50-х годов. Как уже указывалось, это один из самых сложных и наименее изученных разделов механики деформируемого твердого тела. Тем не менее за последние два десятилетия удалось существенно продвинуться в создании общей теории трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и предложить общую схему интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризующихся наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением (получены в [23] и [24]). Исследования в области пространственной задачи теории идеальной пластичности были подытожены в монографиях: Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.; Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И., Радаев Ю.Н., Сенашов С.И., Шемякин Е.И. Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.

В первой из указанных монографий сделана попытка дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке, с акцентом на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Исходной точкой построения общей теории пространственных уравнений выступает одна замечательная инвариантная векторная форма пространственных уравнений, анализ которой позволяет сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. Затем рассматриваются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, основные кинематические соотношения для приращений перемещений, следующие из него, а также исследуется кинематика течения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Показано, что скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т. е. когда Гауссова кривизна положительна, на поверхности максимальной скорости сдвига. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений вдоль изостатических траекторий выводятся преобразованием векторного уравнения равновесия к изостатической координатной сетке. Устанавливается возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

Значительное внимание уделяется исследованию трехмерных уравнений математической теории пластичности в триортогональных изостатических координатах [25].

Основной интерес здесь представляют уравнения совместности приращений деформаций и пространственные соотношения Коши. Уравнения совместности для приращений малых деформаций в триортогональной изостатической системе координат исследуются вместе дополнительными соотношениями, связывающими физические компоненты тензора несовместности. Существенных уравнений совместности – шесть. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона–Треска, имеется лишь три независимых уравнения совместности. Явно указываются и рассматриваются системы независимых уравнений совместности, сформулированные в изостатической координатной сетке. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении трех независимых уравнений совместности удовлетворялись три оставшихся уравнения совместности. Показано, что нарушения сплошности на поверхности идеально пластического тела распространяются вглубь тела вдоль асимптотических линий на слоях векторного поля, указывающего направления наибольшего главного нормального напряжения. Поскольку асимптотические линии *наименее* искривлены по сравнению с любыми другими линиями на поверхности (в том смысле, что нормальная кривизна асимптотических линий равна нулю), то нарушения сплошности проникают вглубь идеально пластического тела по наименее искривленным траекториям. Именно в этом смысле можно вести речь о минимальном искривлении траекторий распространения трещин в твердых телах.

Анализ плоской и осесимметричной задач выполнен с использованием аппарата производящих функций, определяющих канонические преобразования пространственных координат. Альтернативный вариант вывода всех основных геометрических соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений, сформулированных для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона–Треска, простым понижением на одну единицу их размерности был выполнен в статье [26].

В рамках построения математической теории пластичности с уравнениями гиперболического аналитического типа был выполнен групповой анализ уравнений пространственной, плоской и осесимметричной задач. В отношении пространственных уравнений эта работа еще далека от завершения, и продолжается поиск новых симметрий пространственных уравнений Д.Д. Ивлева. Методы группового анализа все шире проникают в механику деформируемого твердого тела, позволяя в некоторых случаях получать точные решения важнейших прикладных задач.<sup>21</sup> Получены новые результаты применения классических методов Ли к нелинейным уравнениям теории пластичности. Определены группы симметрий уравнений в частных производных теории пластичности, алгебры симметрий (алгебры Ли) и оптимальные системы одномерных подалгебр для пространственной, плоской и осесимметричной задач. Оптимальные системы позволяют найти ряд новых решений трехмерных уравнений теории пластичности инвариантно-групповой природы. Применение групповых методов (особенно это касается пространственной задачи) требует выполнения огромного объема рутинных преобразований и вычислений, которые были проведены с помощью систем символьных вычислений. Чтобы оценить примерный объем вычислительной работы, заметим, что лишь для одной естественной конечномерной (размерности 12) подалгебры алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий трехмерных уравнений

<sup>21</sup>При этом не следует однако преувеличивать возможности группового анализа. В настоящее время его роль как средства нахождения новых точных решений задач механики деформируемого твердого тела является более чем скромной.

пространственной задачи теории идеальной пластичности, оптимальная система одномерных подалгебр насчитывает один трехпараметрический элемент, 12 двухпараметрических, 66 однопараметрических элементов и 108 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного однопараметрического элемента и двадцати двух индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений плоской задачи (плоское деформированное состояние) имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного двухпараметрического элемента, 11 однопараметрических и 20 индивидуальных элементов.

Преподавание математической теории пластичности в российских университетах имеет свою историю и традиции. В настоящее время они прочно связаны с именами Д.Д. Ивлева и Г.И. Быковцева. Отличительной чертой их преподавательской деятельности является сочетание прикладного содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения. Такой синтез требовал также прочтения особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования.

Дюис Данилович вел большую общественную работу в Чувашии, часто выступал как яркий публицист на страницах региональной печати. Он является автором ряда оригинальных научно-популярных и публицистических изданий, таких как "Двое в академической лодке, не считая науки", "Мир эллиптический и мир гиперболический", "Короли и академики" и др. До конца жизни он оставался ответственным редактором созданной им естественнонаучной серии журнала "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева".

Д.Д. Ивлев был членом Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, членом редколлегий журналов "Известия РАН — Механика твердого тела" и "Прикладная математика и механика", членом экспертного совета по математике и механике ВАК Минобрнауки России, председателем диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, действительным членом Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, заслуженным деятелем науки и техники РФ (1992 г.), лауреатом Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники (2006 г.) Среди учеников Д.Д. Ивлева — доктора и кандидаты наук, которые работают в различных городах России: Москве, Воронеже, Самаре, Чебоксарах, Владивостоке.

Дюис Данилович Ивлев награжден медалями "За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.", "50 лет Победы в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.", "60 лет Победы в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.", медалью ордена "За заслуги перед Отечеством" II степени, высшей наградой Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики — Золотой медалью им. И.Я. Яковлева.

Дюис Данилович был строг и точен в науке, доброжелателен в жизни. Таким образом этого выдающегося человека запомнится нам навсегда.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] De Saint-Venant B. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état// Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1870, t. 70, pp. 473–480.
- [2] De Saint-Venant B. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état// Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II, 1871, t. 16, pp. 308-316, 373-382.<sup>22</sup>
- [3] Coulomb C.A. Essay sur l'application des règles de maximes et minimis á quelques problemes de statique, relatifs a l'architecture// Mémoires de mathematique et de physique, présentés a l'académie Royale des Sciences, Année 1773. Paris, de l'imprimerie Royale, 1776.
- [4] Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости // Теория пластичности: сб. ст. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 20–23.<sup>23</sup>
- [5] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
- [6] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 407 с.
- [7] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
- [8] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [9] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
- [10] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [11] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [12] Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Уруго-пластические деформации. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.
- [13] Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности: сб. ст. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 41–56.<sup>24</sup>
- [14] Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах // Теория пластичности: сб. ст. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 80–101.
- [15] Шилд Р.Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии: сб. переводов "Механика". 1957. № 1. С. 102–122.<sup>25</sup>

<sup>22</sup>Имеется перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости // Теория пластичности: сб. ст. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 11–19.

<sup>23</sup>Оригинальная работа: Levy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état// Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1870, t. 71, pp. 1323–1325.

<sup>24</sup>Оригинальная работа: Haar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien// Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. H. 2. S. 204–218.

<sup>25</sup>Оригинальная работа: Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry// Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. 233A. No. 1193. P. 267–287.

[16] Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля// Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 17–42.)

[17] Ишлинский А.Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости// Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90–108. (См. там же: С. 62–83. В заключительном подстрочном замечании А.Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)

[18] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред// Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90–96.<sup>26</sup>

[19] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях// Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 3. С. 546–549.<sup>27</sup>

[20] Ивлев Д.Д. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности// Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 3. С. 137. (Статья воспроизводится также в книге: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 20–21.)

[21] Ивлев Д.Д. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска// Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 6. С. 112–114. (См. там же: С. 263–267.)

[22] Радаев Ю.Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. № 6(56). 2007. С. 102–114.

[23] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. № 1. С. 86–94.

[24] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. № 5. С. 102–120.

[25] Радаев Ю.Н. О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. № 5. 2008. С. 79–89.

[26] Радаев Ю.Н. К теории плоской деформации идеально пластического тела// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. № 3(62). 2008. С. 272–289.

<sup>26</sup>См. также: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 5–14.

<sup>27</sup>См. также: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 15–20.

**ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ Д.Д. ИВЛЕВА****1955**

1. К теории простого деформирования пластических тел // Прикл. матем. и механика. 1955 Т. 19, вып. 6. С. 734–735.

**1956**

2. К использованию линейной тензорной связи в пластичности // Прикл. матем. и механика. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 289–292.
3. Выпучивание эксцентричной трубы // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1956. № 10. С. 112–166.

**1957**

4. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких круговому // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. № 1. С. 141–144.
5. Упруго-пластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник МГУ. 1957. № 2. С. 51–52 (совм. с Л.В. Ершовым).
6. Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. № 5. С. 113–118.
7. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 2. С. 294–296.
8. Приближенное решение задач теории малых упруго-пластических деформаций // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 2. С. 527–528.
9. Упруго-пластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. № 7. С. 129–131 (совм. с Л.В. Ершовым).
10. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. № 8. С. 149–152 (совм. с Л.В. Ершовым).
11. Упруго-пластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. № 9. С. 130–134 (совм. с Л.В. Ершовым).
12. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. № 10. С. 89–93.
13. Об определении перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. матем. и механика. 1957. Т. 21, вып. 5. С. 716–718.
14. Приближенное решение плоских упругопластических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. 1957. № 5. С. 17–26 (совм. с Л.В. Ершовым).

**1958**

15. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1958. № 1. С. 124–125 (совм. с Л.В. Ершовым).
16. О некоторых работах К.Н. Шевченко по теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1958. № 2. С. 159–162.
17. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22, вып. 1. С. 90–96.
18. Приближенное решение упругопластических осесимметрических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. 1958. № 2. С. 47–56 (совм. с Л.В. Ершовым).

19. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22, вып. 4. С. 480–486.
20. О некоторых частных решениях уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности и обобщение решения Л. Прандтля о сжатии пластической полосы шероховатыми плитами // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22, вып. 5. С. 673–678.
21. К построению теории идеальной пластичности // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22, вып. 6. С. 850–855.
22. Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1958. № 11. С. 107–109.
23. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 6. С. 488–490.

#### 1959

24. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1959. № 1. С. 132–133.
25. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 6. С. 546–549.
26. О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23, вып. 2. С. 247–281.
27. К теории разрушения твердых тел // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 618–624.
28. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1959. № 3. С. 137.
29. Об изотропном упрочнении пластических тел // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 4. С. 777–779.
30. К определению перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23, вып. 5. С. 987–988.
31. К теории идеальной пластической анизотропии // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23, вып. 6. С. 1107–1114.
32. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1959. № 6. С. 112–114.

#### 1960

33. К теории идеально затвердевающих сред // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 4. С. 742–745.
34. Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 6. С. 1232–1235.
35. О границе пластического состояния материала // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1960. № 1. С. 161.
36. О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24, вып. 1. С. 144–146.
37. О постулате изотропии в теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1960. № 2. С. 125–127.
38. К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24, вып. 4. С. 707–710.

39. Об экстремальных свойствах условий пластичности // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 951–955.
40. К построению гидродинамики вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. № 2. С. 280–282.
41. О работе В.С. Ленского "Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении" // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1960. № 6. С. 179–180.
42. К теории вдавливания штампа в пластическую среду // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1960. № 3. С. 214–216 (совм. с В.А. Жалниным).
43. О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство // Журнал прак. механики и технич. физики. 1960. № 4. С. 75–78.

#### 1961

44. Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1961. № 1. С. 173–174 (совм. с Г.И. Быковцевым).
45. К теории неустановившейся ползучести // Проблемы механики сплошной среды: Сб. статей, посв. 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 157–160.
46. Об определении поверхности выпучивающегося материала при вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство // Прикл. матем. и механика. 1961. Т. 25, вып. 2. С. 332–335.
47. К теории сферического деформированного состояния идеально пластических сред // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1961. № 1. С. 72–75 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
48. Об устойчивости полосы при сжатии // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 5. С. 1047–1049 (совм. с Л.В. Ершовым).
49. К построению теории упругости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 6. С. 1321–1324.
50. Об основных соотношениях теории анизотропной сыпучей среды // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1961. № 2. С. 116–121 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
51. О математическом описании поведения упругого изотропного тела при помощи кусочнолинейного потенциала // Прикл. матем. и механика. 1961. Т. 25, вып. 5. С. 897–905.
52. О кручении винтовых стержней из идеально жесткопластического материала // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1961. № 5. С. 124–126.
53. О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1961. № 6. С. 153–154 (совм. с В.А. Жалниным, В.С. Мищенко).
54. Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред // Прикл. матем. и механика. 1961. Т. 25, вып. 6. С. 1126–1128 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
55. О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. 1961. № 6. С. 197–203.

#### 1962

56. Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений // Прикл. матем. и механика. 1962. Т. 26, вып. 4. С. 709–714.

57. К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочнолинейных условиях пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1962. № 6. С. 95–102.

**1963**

58. К теории сжимаемых идеально пластических сред // Прикл. матем. и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 589–592 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
59. О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линейаризованном условии пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1963. № 3. С. 115–118 (совм. с В.В. Дудукаленко).
60. К теории сложных сред // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 1. С. 64–67.
61. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1963. № 3. С. 102–104 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
62. О предельном состоянии осесимметричных тел при условиях сопротивления сдвигу и отрыву // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1963. № 5. С. 79–85 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
63. О кручении анизотропно упрочняющихся стержней при линейаризованном законе пластического течения // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1963. № 5. С. 173–175 (совм. с В.В. Дудукаленко).
64. О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1963. № 5. С. 154–157 (совм. с И.А. Бережным).
65. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочнолинейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1963. № 6. С. 12–16 (совм. с В.А. Знаменским).
66. О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 5. С. 1024–1026 (совм. с В.В. Дудукаленко).

**1964**

67. К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1964. № 5. С. 102–108 (совм. с Г.И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).
68. О функциях нагружения анизотропного упрочняющегося пластического материала // Прикл. матем. и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 794–797 (совм. с Г.И. Быковцевым, В.В. Дудукаленко).
69. О предельном состоянии слоистых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1964. № 4. С. 77–86 (совм. с Ю.П. Листровой, Ю.В. Немировским).
70. Об устойчивости пластин в общем случае нелинейной деформационной теории при малых деформациях // Прикл. механика. 1964. № 2. С. 117–123 (совм. с И.Д. Легеней).
71. Пластичности теория (математич.) // Физический энциклопедич. словарь. М.: Сов. энцикл., 1964. С. 37–39.
72. Пластический шарнир // Физический энциклопедич. словарь. М.: Сов. энцикл., 1964. С. 37.
73. Пластичности условия // Физический энциклопедич. словарь. М.: Сов. энцикл., 1964. С. 39.

**1965**

74. О влиянии вязкости на механическое поведение упруго-пластических сред // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 3. С. 595–598 (совм. с И.А. Бережным).
75. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 4 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
76. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1965. № 1. С. 56–69 (совм. с Г.И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).
77. К теории устойчивости пластины в общем случае деформационной теории: Труды всесоюзн. конф. по устойчивости. М.: Стройиздат, 1965.

**1966**

78. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

**1967**

79. О некоторых случаях интегрируемости соотношений теории упрочняющихся пластических сред при сингулярных поверхностях текучести // Инж. журнал. Механика тверд. тела. 1967. № 1. С. 143–144 (совм. с Л.В. Ершовым).
80. О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред // Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 31, вып. 2. С. 346–348.
81. Об условиях квазихрупкого разрушения // Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 31, вып. 5. С. 537–542 (совм. с Л.В. Ершовым).
82. О деформационных теориях пластичности при сингулярных поверхностях нагружения // Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 32, вып. 5. С. 887–889.
83. О диссипативной функции в теории пластических сред // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 5. С. 1037–1039.
84. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеально-пластических телах // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 5. С. 1039–1042 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).
85. Об одном построении теории трещин // Инж. журнал. Механика тверд. тела. 1967. № 6. С. 91–94.
86. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1967. № 6. С. 88–128.

**1968**

87. О соотношениях на поверхности разрыва напряжений в трехмерных жесткопластических телах // Прикл. матем. и механика. 1968. Т. 38, вып. 3. С. 472–477 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).
88. О кинематических соотношениях на поверхности скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикл. матем. и механика. 1968. Т. 38, вып. 4. С. 623–631 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).
89. К задаче о внедрении гладкого клинообразного в плане штампа с плоским основанием в жесткопластическое пространство // Инж. журнал. Механика тверд. тела. 1968. № 6. С. 115–118 (совм. с Р.И. Непершиным).

**1969**

90. О деформационных теориях пластичности // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды: сб. статей, посв. 60-летию акад. Л.И. Седова. М., 1969. С. 233–239.

**1970**

91. О диссипативных функциях в теории вязкопластических сред // Проблемы механики сплошной среды (К 60-летию акад. В.В.Новожилова). 1970. С. 67–70 (совм. с И.А.Бережным, Е.В.Макаровым).
92. Об одной неполной задаче теории идеальной пластичности // Труды НИИ математики ВГУ. 1970. С. 145–148.
93. О деформационных моделях теории пластичности и сплошных сред // Прикл. матем. и механика. 1970. Т. 40, вып. 3. С. 553–557 (совм. с И.А.Бережным, Е.В.Макаровым).

**1971**

94. Об уравнениях теории идеальной пластичности в компонентах скоростей перемещений // Прикл. матем. и механика. 1971. Т. 41, вып. 1. С. 183–185 (совм. с А.Д.Чернышевым).
95. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с. (совм. с Г.И.Быковцевым).

**1972**

96. О приобретенной анизотропии пластических тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа: сб. статей, посв. 80-летию акад. Н.И.Мусхелишвили. М., 1972. С. 601–605 (совм. с И.А.Бережным, В.В.Дудукаленко).
97. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикл. матем. и механика. 1972. Т. 42, вып. 5. С. 957–959.
98. О построении модели сыпучих сред исходя из определения диссипативной функции // Основы пластичности: сб. трудов симпозиума. Варшава, 1973. С. 601–605 (совм. с И.А.Бережным, В.Б.Чадовым).

**1973**

99. О построении модели сыпучих сред на основе диссипативных функций // Докл. АН СССР. 1973. Т. 123. № 6 (совм. с И.А.Бережным, В.Б.Чадовым).
100. Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1973. № 4. С. 159–166 (совм. с Р.И.Непершиным).
101. Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния // Труды НИИ математики ВГУ. Воронеж, 1973. Вып. 10. С. 1–3.

**1974**

102. О диссипативной функции в теории анизотропных пластических сред // Изв. вузов. Машиностр. МВТУ. 1974. С. 21–24 (совм. с В.Б.Чадовым).
103. О некоторых моделях, построенных на основе механизмов упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1974. № 1 (совм. с И.А.Бережным, Н.В.Герасимовым).
104. О функции нагружения для идеально пластических моделей // Избр. проблемы прикл. механики: сб. статей, посв. 60-летию акад. В.Н.Челомея. М., 1974. С. 113–117 (совм. с И.А.Бережным, В.И.Цейлером).

**1975**

105. Об определении перемещений в упруго-пластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред (К 100-летию со дня рождения акад. Б.Г.Галеркина). М., 1975. С. 236–240.

106. О построении поверхностей сложных жесткопластических моделей // Механика деформируемых тел и конструкций: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1975. С. 62–70 (совм. с И.А. Бережным, В.И. Цейлером).
107. О течении жидкости с управляемой вязкостью // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 3. С. 582–584 (совм. с И.А. Бережным, Н.В. Герасимовым, В.И. Цейлером).
108. О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 4. С. 810–811 (совм. с И.А. Бережным, Р.К. Логвиновой).
- 1976**
109. Об определяющих неравенствах в теории пластичности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 4. С. 824–826 (совм. с И.А. Бережным).
- 1977**
110. Диссипативная функция в теории пластичности // Механика деформируемого тела: Межвуз. сб. Куйбышев, 1977. Вып. 3. С. 5–22 (совм. с И.А. Бережным).
- 1978**
111. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с. (совм. с Л.В. Ершовым).
112. Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1978. № 4. С. 80–87 (совм. с Е.В. Макаровым, Ю.М. Марушкой).
- 1980**
113. Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела // Прикл. матем. и механика. 1980. Т. 44. № 3. С. 540–549 (совм. с И.А. Бережным).
- 1981**
114. Определяющие неравенства в теории упругопластического тела: Тезисы докл. V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981 (совм. с И.А. Бережным).
- 1982**
115. Об уравнениях стареющих пластических тел // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1982. Т. XXV. № 5. С. 22–25 (совм. с Н.Х. Арутюняном).
116. Об обобщении решения Л. Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации: сб. статей в честь 60-летия акад. И.Ф. Образцова. М.: Машиностроение, 1982. С. 137–144 (совм. с Л.В. Ершовым, А.В. Романовым).
117. Об обобщении решения Прандтля в сферической системе координат // Прикл. матем. и механика. 1982. Т. 46, вып. 5. С. 524–527 (совм. с А.В. Романовым).
- 1983**
118. О влиянии внутреннего механизма вязкости на поведение идеально пластических сред // Прикл. матем. и механика. 1983. Т. 47, вып. 3. С. 524–527 (совм. с М.А. Артемовым).
119. Об одной предельной модели сплошной среды // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1074–1076 (совм. с И.Т. Артемьевым).
- 1984**
120. К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1984. № 1. С. 111–116 (совм. с И.Т. Артемьевым).

121. Об одном точном неавтономном решении теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 5. С. 1080–1083 (совм. с А.В. Романовым).
122. Об одном классе точных неавтономных задач теории идеальной пластичности // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела: сб. статей, посв. 60-летию акад. Ю.Н. Работнова. М.: Наука, 1984. С. 90–97 (совм. с А.В. Романовым).

**1985**

123. Краевая задача для сред с предельным сопротивлением всестороннему растяжению // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: ЧГУ, 1985. С. 3–9 (совм. с И.Т. Артемьевым).

**1986**

124. О течении идеально вязкой среды // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: ЧГУ, 1986. С. 33–42 (совм. с А.А. Горбуновым).
125. Об упругопластическом состоянии клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1986. № 1. С. 157–161 (совм. с И.Т. Артемьевым).
126. О нижней границе несущей способности тел, определяемой условиями предельного состояния: Аннотации докл. VI Всесоюзн. съезда по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986. С. 51 (совм. с И.Т. Артемьевым, А.А. Горбуновым).
127. Об определяющих соотношениях в теории предельного сопротивления сдвигу и среднему напряжению // Актуальные задачи механики сплошных сред. Чебоксары: ЧГУ, 1986. С. 45–52 (совм. с А.А. Горбуновым).
128. Об изгибе пластической полосы, ослабленной пологими выточками // Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. Чебоксары: ЧГУ, 1986. С. 57–60 (совм. с Л.Б. Шитовой).

**1988**

129. Определение напряженного состояния в деформируемом объеме порошкового материала методом характеристик // Порошковая металлургия. 1988. № 1. С. 6–10 (совм. с Н.А. Чайниковым).
130. Упругопластические равновесия остроугольного клина при предельном сопротивлении сдвигу, среднему растягивающему напряжению и отрыву // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1988. № 4. С. 157–162 (совм. с И.Т. Артемьевым).
131. Линеаризованные уравнения теории анизотропного идеального жесткопластического тела // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложений. Чебоксары: ЧГУ, 1988. С. 55–58 (совм. с Л.Б. Шитовой).

**1989**

132. Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1989. № 2. С. 183–185 (совм. с Е.А. Григорьевым, Л.Б. Шитовой).
133. Об образовании шейки при растяжении плоского образца с учетом влияния среднего напряжения // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: ЧГУ, 1989. С. 117–119 (совм. с Л.Б. Шитовой).

**1992**

134. Пластичности теория (математическая) // Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Бол. Российская энцикл., 1992. С. 628–631.
135. Пластический шарнир // Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Бол. Российская энцикл., 1992. С. 628.
136. Пластичности условие // Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Бол. Российская энцикл., 1992. С. 631.
137. К теории предельного состояния пластических пористых тел // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1992. № 3. С. 163–165.
138. Об условиях текучести идеально пластического тела // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1992. № 5. С. 107–109 (совм. с А.В. Романовым).
139. О свойствах основных соотношений теории идеальной пластической анизотропии // Актуальные проблемы механики деформ. тверд. тела: Сб. статей, посв. 70-летию Ж.С. Ержанова. Алма-Ата, 1992. С. 69–75 (совм. с И.Т. Артемьевым).

**1993**

140. Теория идеальной пластической анизотропии // Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 1. С. 73–78 (совм. с И.Т. Артемьевым).
141. Линеаризованные уравнения теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1993. № 5. С. 107–113 (совм. с И.Т. Артемьевым).
142. О применении обобщенных функций комплексного переменного к двумерной задаче теории упругости // Прочность и надежность конструкций. Сб. статей, посв. 50-летию В.Д. Кулиева. М., 1993. С. 83–89 (совм. с М.В. Михайловой).

**1994**

143. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Изв. АН Чувашской республ. 1994. № 2. С. 16–21 (совм. с М.А. Артемовым).
144. К теории идеально затвердевающих сред // Изв. АН Чувашской республ. 1994. № 2. С. 22–25 (совм. с М.А. Артемовым).
145. К теории предельного состояния сыпучих сред // Деп. в ВИНТИ 16.12.94. 2918-в94. 5 с. (совм. с Л.Б. Шитовой).

**1995**

146. О статических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1995. № 3. С. 104–110 (совм. с М.А. Артемовым).
147. О линеаризованных уравнениях кинематически определимых задач // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1995. № 6. С. 104–110 (совм. с М.А. Артемовым).
148. К теории затвердевающих сред // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1995. № 1. С. 14–21 (совм. с М.А. Артемовым).
149. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально-пластического материала // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1995. № 1. С. 39–48 (совм. с А.М. Васильевой, М.В. Михайловой).
150. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1995. № 1. С. 27–38 (совм. с Т.Л. Захаровой).

151. Об идеально пластическом состоянии полого кругового цилиндра при произвольном возмущении боковой поверхности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1995. № 1. С. 29–36 (совм. с А.М. Васильевой).

#### 1996

152. Об одной модели предельного состояния тел // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1996. № 1. С. 61–64 (совм. с Л.Б. Шитовой).
153. О пластическом течении бруса прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободной границей. Чебоксары, 1996. С. 8–17 (совм. с М.А. Артемовым).
154. О соотношениях теории пластической анизотропии // Динамика сплошных сред со свободной границей. Чебоксары, 1996. С. 121–125.
155. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Проблемы механики сплошной среды. Владивосток, 1996. С. 112–115.
156. О статической определенности предельного состояния твердого тела при отрыве // Проблемы механики. 1996. Т. 32. № 6. С. 48–51.
157. О разрывных решениях теории пластичности // Проблемы механики. 1996. Т. 32. № 7. С. 65–68 (совм. с М.А. Артемовым).
158. Об одном случае предельного состояния тел // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1996. № 3. С. 43–45 (совм. с М.А. Артемовым).
159. К теории дифференциальных соответствий в механике сплошной среды // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1996. № 2. С. 5–7.
160. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 3. С. 332–334 (совм. с М.А. Артемовым).
161. О течении трубы, ослабленной пологими выточками // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1996. № 6. С. 28–31 (совм. с Т.Л. Захаровой).
162. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально пластического материала // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1996. № 6. С. 79–87 (совм. с А.М. Васильевой, М.В. Михайловой).
163. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1996. № 6. С. 32–34.
164. Об образовании шейки в растягиваемой вязкопластической полосе // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1996. № 6. С. 35–38 (совм. с Т.И. Рыбаковой).

#### 1997

165. Об идеально пластическом состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Докл. РАН. 1997. Т. 353. № 1. С. 47–50 (совм. с М.А. Артемовым).
166. К теории идеально затвердевающих сред // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 5. С. 623–625 (совм. с М.А. Артемовым).
167. О напряженном состоянии идеально пластического полого цилиндра, близкого к круговому // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1997. № 4. С. 113–119 (совм. с А.М. Васильевой).

168. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1997. Т. 38. № 5. С. 165–172 (совм. с Т.Л. Захаровой).
169. О соотношениях ассоциированного закона течения и нагружения в теории идеальной пластичности // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1997. № 4. С. 78–94.

#### 1998

170. О пространственном течении идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1998. № 1. С. 5–12.
171. О течении трубы, ослабленной выточками // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 1. С. 40–42 (совм. с Т.Л. Захаровой).
172. Об устойчивости вязкопластической полосы // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 4. С. 490–491 (совм. с Т.И. Рыбаковой).
173. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 6. С. 765–767.
174. Об идеальном жесткопластическом течении плоской полосы // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 4. С. 483–485 (совм. с Л.А. Максимовой).
175. О возмущенном течении растягиваемой идеально пластической полосы // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 5. С. 632–633 (совм. с Л.А. Максимовой).
176. О соотношениях ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 6. С. 775–776.
177. О предельном состоянии идеально пластического прямоугольного бруса, ослабленного пологими выточками // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1998. № 4. С. 173–179 (совм. с М.А. Артемовым).
178. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с. (совм. с Г.И. Быковцевым).
179. Изменение жесткости и процессы микроповреждений в хрупком материале // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1998. № 5. С. 18–28 (совм. с В.В. Дудукаленко).

#### 1999

180. Об определении соотношений ассоциированного закона идеально-пластического течения // Прикладные задачи механики сплошных сред. Воронеж, 1999. С. 116–123.
181. К теории кинематически определимых состояний идеальнопластических тел // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1999. № 1. С. 92–98 (совм. с М.А. Артемовым).
182. О соотношениях общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. Чебоксары. Сводный том. № 3,4 (1998); № 1,2 (1999). С. 13–16 (совм. с Л.А. Максимовой).
183. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1999. № 6. С. 39–54 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
184. Полная пластичность в теории идеально пластического тела // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 3. С. 333–334 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

#### 2000

185. О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2000. № 1. С. 129–140 (совм. с И.П. Григорьевым).

186. О плоских течениях идеально жесткопластической среды // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 1. С. 43–45 (совм. с Л.А. Максимовой).
187. О вдавливании индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2000. № 3. С. 131–136 (совм. с Л.А. Максимовой).
188. О течениях изотропных сред // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2000. № 5. С. 5–12 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
189. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 1. С. 49–51 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
190. О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Докл. АН РАН. 2000. Т. 373. № 1. С. 39–41 (совм. с Л.А. Максимовой).
191. О свойствах течений изотропной среды // Докл. АН РАН. 2000. Т. 375. № 2. С. 191–194 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
192. Об определении связи "деформация–напряжение" в теории сложного нагружения при выполнении постулата изотропии А.А. Ильюшина // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 2000. № 4. С. 15–28.

#### 2001

193. О вдавливании жесткого штампа в идеально пластическое полупространство с учетом сдвиговых усилий // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 2. С. 196–199 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).
194. Об определении поля скоростей идеально пластического течения в случае общей плоской задачи // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 6. С. 758–763 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).
195. О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 5. С. 616–622 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).
196. Математическая теория идеальной пластичности. Состояние и развитие: Доклад на VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике // Известия инженерно-технологической акад. Чувашской республ. Сводный том. № 3, 4 (1999); № 1–4 (2000); № 1–4 (2001). С. 32–44 (совм. с А.Ю. Ишлинским).
197. О представлении состояния полной пластичности на диаграмме Мора // Известия инженерно-технологической акад. Чувашской республ. Сводный том. № 3, 4 (1999); № 1–4 (2000); № 1–4 (2001). С. 45–51 (совм. с Л.А. Максимовой).
198. О соотношениях плоской задачи теории упругопластического тела для неоднородного материала // Известия инженерно-технологической акад. Чувашской республ. Сводный том. № 3, 4 (1999); № 1–4 (2000); № 1–4 (2001). С. 52–59 (совм. с А.В. Горским, П.В. Горским).
199. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 448 с.
200. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с. (совм. с А.Ю. Ишлинским).
201. О предельных течениях изотропных сред // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск, 2001. С. 223–227 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
202. Условия изотропии и ассоциированный закон пластического деформирования // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сборник

статей, посв. 70-летию проф. Л.В.Ершова. М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2001. С. 93–116 (совм. с А.Ю.Ишлинским, Л.А.Максимовой).

### 2002

203. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 448 с.
204. О характеристических соотношениях для напряжений пространственной задачи сыпучей среды при полном предельном равновесии // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 5. С. 638–642 (совм. с А.Ю.Ишлинским, Р.И.Непершиным).
205. О характеристических соотношениях для скоростей перемещений в пространственной задаче полного предельного равновесия сыпучей среды // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 57–61 (совм. с А.Ю.Ишлинским, Р.И.Непершиным).
206. Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 6. С. 766–769 (совм. с А.Ю.Ишлинским, Р.И.Непершиным).
207. О вдавливании плоского штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии контактных касательных напряжений // Прикл. матем. и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 134–139 (совм. с Л.А.Максимовой, Р.И.Непершиным).
208. О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2002. № 4. С. 57–62 (совм. с А.Ю.Ишлинским, Р.И.Непершиным).
209. О свойствах моделей изотропных сред // Проблемы механики деформируемого твердого тела: Сб. статей к 70-летию акад. Н.Ф.Морозова. СПб, 2002. С. 149–153 (совм. с А.Ю.Ишлинским, Л.А.Максимовой).

### 2003

210. О сдавливании идеально пластической пирамиды плоским штампом // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 3. С. 337–339 (совм. с А.Ю.Ишлинским, Р.И.Непершиным).
211. О статически определяемых соотношениях теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 4. С. 483–486.
212. Статически определяемые соотношения теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 5. С. 634–637 (совм. с М.В.Михайловой).
213. О линеаризованных уравнениях статически определяемых соотношений теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 6. С. 769–771 (совм. с М.В.Михайловой).
214. К теории статически определяемых соотношений и предельного состояния пластических тел // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 1. С. 59–62 (совм. с А.Ю.Ишлинским).
215. Статически определяемые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2003. № 3. С. 84–89 (совм. с А.Ю.Ишлинским).
216. Идеи и результаты А.Ю.Ишлинского в теории пластичности // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2003. № 4. С. 167–174.

217. Идеи и результаты А.Ю.Ишлинского в теории пластичности // Проблемы механики: сб. статей к 90-летию А.Ю.Ишлинского. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. С. 30–38.
218. О соотношениях теории идеальной пластичности при условии пластичности максимального приведенного напряжения // Проблемы нелинейной механики: Сб. статей к 80-летию Л.А.Толоконникова. Тула: ТулГУ, 2003. С. 178–184 (совм. с А.Ю.Ишлинским).
219. Статически определяемые состояния теории идеальной пластичности: Тез. докл. межд. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики”. Тула, 2003. С. 147.
220. Статически определяемые соотношения теории идеальной пластичности // Изв. нац. акад. наук и искусств Чуваш. республ. 2003. № 3. С. 36–46 (совм. с М.В.Михайловой).
221. Теория идеальной пластичности. Состояние и развитие // Прикладная механика. 2003. № 11. С. 6–46.

#### 2005

222. Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 5(39). С. 33–41.
223. Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2005. 357 с.
224. О статически определяемых состояниях в теории идеальной пластичности // Вестник Чувашского педагогического университета им. И.Я.Яковлева. 2005. № 2(44). С. 13–18 (совм. с Л.А.Максимовой).
225. Статически определяемые соотношения теории сжимаемых идеально-пластических сред // Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сб. научно-методических статей. Вып. 19. Белорусский национальный технический университет. Минск, 2005. С. 21–24.
226. О соотношениях ассоциированного закона течения теории сжимаемых идеально-нопластических сред // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 5.
227. О статически определяемых соотношениях сжимаемых идеально-пластических сред // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2005. № 5. С. 131–134.

#### 2006

228. К теории статически определяемых состояний деформируемых тел // Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 131–136 (совм. с Л.А.Максимовой).
229. О развитии идеальнопластического состояния // Механика твердого тела. 2006. № 6. С. 130–133 (совм. с Н.М.Матченко).
230. Об идеях и результатах Е.И.Шемякина в механике предельного состояния твердых деформируемых тел и конструкций // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сборник статей к 75-летию Е.И.Шемякина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 46–51.
231. О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сборник статей к 75-летию Е.И.Шемякина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 287–290 (совм. с Н.М.Матченко).
232. Предельное состояние твердых тел как состояние статической определенности // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. III. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета им Н.И.Лобачевского, 2006. С. 100.

233. Об эволюции идеальнопластического состояния // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2006. № 1(48). С. 58–61.

234. Механика сплошной среды как раздел дифференциальной геометрии // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2006. № 5(52). С. 215–220.

#### 2007

235. О переходе статически неопределимого состояния в статически определимое // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 1. С. 5–9.

236. Три дискуссии // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 1. С. 157–163.

237. Чем отличается теория идеальной пластичности от теории предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 3. С. 3–10.

238. Три дискуссии в механике // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4(54). С. 115–123.

239. О предельных соотношениях при отрыве для анизотропного материала // Математические модели и методы механики сплошных сред: Сборник научных трудов к 60-летию А.А. Буренина. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2007. С. 106–107 (совм. с А.Н. Роштовой).

#### 2008

240. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с. (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным, Ю.Н. Радаевым, С.И. Сенашевым, Е.И. Шемякиным).

#### 2009

241. Коэффициент интенсивности статистической неопределимости и достижение состояния полной пластичности // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1(6). С. 76–80.

#### 2010

242. Об одном вопросе в теории предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 19–24.

243. Давление плоского штампа на ортотропное идеальнопластическое полупространство // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 182–190 (совм. с Р.И. Непершиным).

244. Об условиях анизотропии идеальнопластических тел // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 571–575 (совм. с Л.А. Максимовой).

245. О соотношениях теории теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 576–579 (совм. с Л.А. Максимовой, Б.Г. Мироновым).

246. О соотношениях теории теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 583–584 (совм. с Л.А. Максимовой).

247. Двусное растяжение тонкой упругопластической анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием // Успехи строительной механики и теории сооружений. СГТУ. Саратов, 2010. С. 81–90. (совм. с Т.Н. Павловой ).
248. Упругопластическое напряженное состояние толстой плиты из анизотропного сжимаемого материала, ослабленной эллиптическим отверстием // Успехи строительной механики и теории сооружений. СГТУ. Саратов, 2010. С. 44–53 (совм. с С.В. Ивановой )

**2011**

249. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 41–43 (совм. с Л.А. Максимовой, Б.Г. Мироновым).
250. Вопросы теории идеальнопластической трансляционной анизотропии // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 111–116.
251. К теории идеальной трансляционной пластической анизотропии // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 117–120 (совм. с Л.А. Максимовой, Б.Г. Мироновым).
252. К теории трансляционной идеальнопластической анизотропии // V Сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела: тез. докл. Всеросс. конф. 31 мая – 5 июня 2011 г., Астрахань, Россия / под науч. ред. Н.Ф. Морозова, М.Н. Покусаева. Астрахан. гос. техн. ун-т. Астрахань: Издательство АГТУ, 2011. С. 16–18 (совм. с Л.А. Максимовой, Б.Г. Мироновым).

**2012**

253. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии в случае плоской деформации // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 60–62 (совм. с Л.А. Максимовой, Б.Г. Мироновым).
254. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1(11). С. 63–66 (совм. с Л.А. Максимовой, С.В. Тихоновым).
255. О диссипативной функции в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1(11). С. 67–69 (совм. с Б.Г. Мироновым).
256. О статически определенных состояниях в теории трансляционной идеальнопластической анизотропии // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1(11). С. 70–74 (совм. с А.В. Ковалевым, С.В. Тихоновым).
257. О предельном состоянии взаимопроникающих твердых деформируемых тел // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 2(12). С. 3–6 (совм. с Л.А. Максимовой).
258. Пластическое деформирование многогранной призмы плоским инструментом // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4(14). С. 56–65 (совм. с Р.И. Непершиным).
259. О наложении усилий для достижения предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4(14). С. 205–207 (совм. с Л.А. Максимовой, Б.Г. Мироновым).

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ОРТОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ

*Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика  
М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия*

**Аннотация.** Изучается упругопластическое кручение однородного прямолинейного стержня с ортотропной анизотропией. Предполагается, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии. Построена бесконечная система законов сохранения, зависящая линейно от компонент тензора напряжений. Законы сохранения позволили свести задачу об определении напряженного состояния во внутренних точках стержня к вычислению интегралов по границе контура сечения. Это дало возможность определить упругопластическую границу внутри поперечного сечения, которое ограничено произвольным кусочно-гладким контуром.

**Ключевые слова:** упругопластическое кручение, ортотропный стержень, упругопластическая граница, законы сохранения.

УДК: 539.374

1. Введение. Ортотропной анизотропией обладают многие конструкционные материалы. Такая анизотропия возникает из-за технологической обработки: прокатки, сварки и т. п. [1]. Поэтому изучение поведения ортотропных материалов под действием различных нагрузок является актуальной задачей. В предлагаемой работе изучается упругопластическое кручение ортотропных стержней. Постановка задач и подробный анализ состояния задач об упругопластическом кручении изотропных стержней подробно изложены в книге [2]. Там, в частности, отмечено, что решение такой задачи еще далеко от завершения и имеются только некоторые частные решения для определенных видов поперечных сечений. В работах одного из авторов статьи [3] предложен метод построения упругопластической границы для изотропных стержней. Этот

---

© Сенашов С. И., Филюшина Е. В., 2016

*Сенашов Сергей Иванович*

e-mail: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

*Филюшина Елена Владимировна*

e-mail: flyushina@sibsau.ru, кандидат физико-математических наук, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (проект № Б-180-14).

Поступила 11.01.2016

метод основан на построении системы законов сохранения. Методы законов сохранения хорошо зарекомендовали себя при решении краевых задач идеальной пластичности [4],[5]. Теперь подобная методика начинает успешно применяться для решения упругопластических задач. Предложенная методика позволяет построить упругопластическую границу для ортотропных стержней, например, прокатных профилей, что позволяет точно определять прочностные характеристики стержней. Построенные в процессе решения задачи, аналитические выражения можно использовать для создания программ, позволяющих визуализировать упругопластические границы для ортотропных стержней. Это уже сделано для изотропных стержней [6],[7] и планируется сделать для ортотропных.

2. Постановка задачи. Пусть однородный стержень обладает ортотропной анизотропией, такой, что плоскость симметрии нормальна к образующей, т. е. совпадает с плоскостью поперечного сечения. Предположим, что усилия распределены по торцам и на каждом из них возникает скручивающий момент  $M_t$ .

$$M_t = \iint (x\tau_{23} - y\tau_{13})dxdy$$

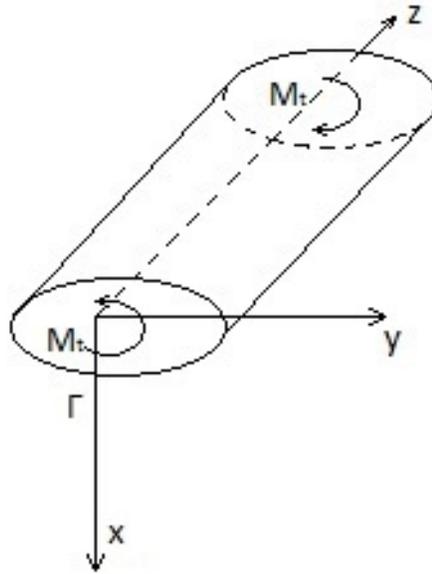


Рис. 1. Скручиваемый ортотропный стержень

В стержне, при достаточно большом значении скручивающего момента, возникают две зоны: упругая и пластическая. Рассмотрим упругую область. В этом случае задача сводится к определению двух компонент тензора напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , которые связаны с компонентами тензора деформаций с помощью обобщенного закона Гука [1]:

$$\frac{1}{G_2}\tau_{xz} = \varepsilon_{xz}, \frac{1}{G_1}\tau_{yz} = \varepsilon_{yz}, \quad (1)$$

где  $G_1, G_2$  – модули сдвига для плоскостей  $yz$  и  $xz$ .

Пусть, как это принято в задачах кручения, компоненты вектора перемещения имеют вид

$$u = -\theta yz, v = \theta xz, w = -\theta\varphi(x, y), \quad (2)$$

где  $\theta$  – относительный угол закручивания (крутка).

При этих предположениях из (1) получаем условия совместности

$$F_1 = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{G_1} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + 2\theta = 0. \quad (3)$$

Это уравнение и уравнение равновесия

$$F_2 = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

дают возможность определить компоненты тензора напряжений в упругой области.

Граничное условие получаем из предположения, что боковая поверхность свободна от напряжений. Это условие имеет вид:

$$\tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) = \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим пластическую область. Предполагается, что торцевые моменты  $M_t$  таковы, что в стержне возникают пластические зоны. Пусть в пластической зоне выполняется условие пластичности

$$2a_{13}\tau_{xz}^2 + 2a_{23}\tau_{yz}^2 = 1, \quad (6)$$

где параметры  $a_{13}, a_{23}$  характеризуют текущее состояние пластической анизотропии.

Предполагаем, что пластическая область охватывает всю боковую поверхность (рис. 2).

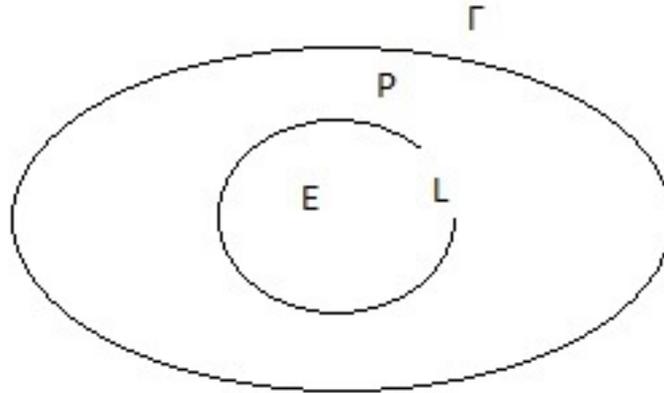


Рис. 2.  $\Gamma$  – внешняя граница,  $L$  – упруго-пластическая граница,

$P$  – пластическая область,  $E$  – упругая область

Необходимо решить следующую задачу: при сделанных выше предположениях определить неизвестную границу  $L$ .

3. Методика построения решения.

Определение. Пусть  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$  – система двух дифференциальных уравнений от двух независимых переменных. Законом сохранения называется соотношение

$$\partial_x A + \partial_y B = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0,$$

которое выполняется на всех решениях системы  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$ .

Здесь  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  – некоторые линейные дифференциальные операторы. Вектор  $(A, B)$  называется сохраняющимся током. Построим законы сохранения для системы уравнений (3), (4). Сохраняющийся ток ищем в виде

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (7)$$

где  $\tau_{xz} = u$ ,  $\tau_{yz} = v$ ,  $\alpha^i$ ,  $\beta^i$ ,  $\gamma^i$  – функции только  $x$ ,  $y$ . Тогда закон сохранения запишется так:

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2. \quad (8)$$

В этом случае операторы  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  сводятся к умножению на некоторые функции  $\omega_i$  от независимых переменных. Подставляя (7) в (8), получаем

$$\alpha_x^1 u + \alpha_x^2 u + \beta_x^1 v + \beta_x^2 v + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 u + \alpha_y^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta_y^2 v_y + \gamma_y^2 = \omega_1 \left( \frac{1}{G_2} u_y - \frac{1}{G_1} v_x + 2\theta \right) + \omega_2 (u_x + v_y). \quad (9)$$

Поскольку соотношение (9) выполняется тождественно, все коэффициенты при искомым функциям и их производных  $u$ ,  $v$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  должны быть равны нулю. В результате получаем

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \alpha^1 = \omega_2, \beta^1 = -\frac{\omega_1}{G_1}, \alpha^2 = \frac{\omega_2}{G_2}, \beta^2 = \omega_2, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 2\theta\omega_1.$$

Отсюда следует

$$\alpha^1 = \beta^2 = \omega_2, \beta^1 G_1 = -\alpha^2 G_2 = -\omega_1, \alpha_x^1 - \beta_y^1 \frac{G_1}{G_2} = 0$$

$$\beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, G_2 \alpha_x^1 - \beta_y^1 G_1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0$$

Для нахождения  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$  необходимо решить уравнения

$$G_2 \alpha_x^1 - G_1 \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0 \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует, что исследуемая система уравнений допускает бесконечное число нетривиальных законов сохранения. Будем искать два особых решения уравнений (10), т.е. такие решения, которые имеют особенность в точке  $(0,0)$ .

Первое решение уравнений (10), его обозначим  $\alpha_1^1$ ,  $\beta_1^1$  ищем в виде:

$$\alpha_1^1 = y(x^2 + k^2 y^2)^p, \beta_1^1 = x(x^2 + k^2 y^2)^p, \quad (11)$$

где  $k$ ,  $p$  – некоторые постоянные.

Подставляем (3.11) в (3.10), имеем:

$$p = -1, k^2 = \frac{G_2}{G_1}.$$

Второе решение уравнений (10), обозначим его  $\alpha_2^1$ ,  $\beta_2^1$ , ищем в виде:

$$\alpha_2^1 = x(x^2 + k^2 y^2)^p, \beta_2^1 = -y(x^2 + k^2 y^2)^p. \quad (12)$$

Здесь также  $p = -1$ ,  $k^2 = \frac{G_2}{G_1}$ .

Поскольку система уравнений (10) допускает преобразования трансляции

$$y' = y + y_0, x' = x + x_0,$$

где  $x_0, y_0$  – произвольные постоянные, то решения (11), (12) можно записать в виде:

$$\alpha_1^1 = \frac{(y - y_0)}{r}, \beta_1^1 = \frac{(x - x_0)}{r}, \alpha_2^1 = \frac{(x - x_0)}{r}, \beta_2^1 = -\frac{(y - y_0)}{r}, \quad (13)$$

где  $r = (x - x_0)^2 + \frac{G_2}{G_1}(y - y_0)^2$ .

Преобразуем полученные законы сохранения. Закон сохранения (8) можно записать по формуле Грина:

$$\int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dy = 0,$$

где  $\Gamma$  – произвольный кусочно-гладкий контур.

Пусть  $x_0, y_0$  – некоторые точки в области, охватываемой контуром  $\Gamma$ . Рассмотрим эллипс, внутри которого находится точка  $x_0, y_0$ . Тогда получаем (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dy + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \\ & + \int_{(x-x_0)^2+k^2(y-y_0)^2=\varepsilon^2} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx + \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Обход по контурам совершается так, что особая точка остается вне области, охватываемой контурами. Поскольку  $\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = 0$ , то получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dy = \\ & = - \int_{(x-x_0)^2+k^2(y-y_0)^2=\varepsilon^2} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx + \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dx. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь интеграл в правой части вычисляется по эллипсу  $\mathcal{E}: (x-x_0)^2+k^2(y-y_0)^2 = \varepsilon^2$ , в центре которого находится особая точка.

Пусть  $\alpha^1 = \alpha_1^1, \beta^1 = \beta_1^1$  из (13), вычислим интеграл в правой части (14). Имеем:

$$- \int_{\mathcal{E}} (\alpha_1^1 u + \beta_1^1 v + \gamma_1^1) dx + \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta_1^1 u + \alpha_1^1 v + \gamma_2^1 \right) dy. \quad (15)$$

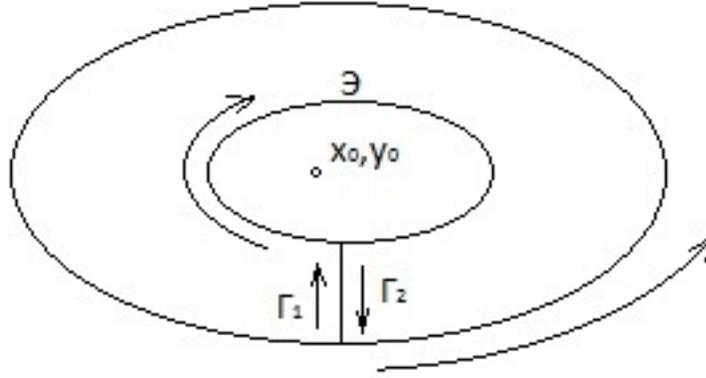


Рис. 3. Стрелочками показано направление обхода границ

Пусть  $x - x_0 = \varepsilon \sin \phi$ ,  $k(y - y_0) = \varepsilon \cos \phi$ , тогда  $\alpha_1^1 = \frac{1}{k} \frac{\cos \phi}{\varepsilon}$ ,  $\beta_1^1 = \frac{\sin \phi}{\varepsilon}$  и выражение (15) запишется так:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{k} \frac{\cos \phi}{\varepsilon} u + \frac{\sin \phi}{\varepsilon} + \gamma^1 \right) \varepsilon \cos \phi d\phi + \\
 & + \int_0^{2\pi} \left( -\frac{G_1}{G_2} \frac{\sin \phi}{\varepsilon} u + \frac{1}{k} \frac{\cos \phi}{\varepsilon} + \gamma^2 \right) \varepsilon \sin \phi d\phi = \\
 & = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\cos^2 \phi}{\varepsilon} - \frac{G_1}{G_2} \frac{1}{k} \sin^2 \phi \right) u + \left( \cos \phi \sin \phi + \frac{1}{k^2} \cos \phi \sin \phi \right) d\phi = \\
 & = \frac{u(x_0, y_0)}{2k} \int_0^{2\pi} \left( -1 - \frac{G_1}{G_2} \right) d\phi = \frac{u(x_0, y_0)}{2k} \left( -1 - \frac{G_1}{G_2} \right) \pi.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x_0, y_0) \frac{G_1 + G_2}{G_2 k} = - \int_{\Gamma} (\alpha_1^1 u + \beta_1^1 v + \gamma_1^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta_1^1 u + \alpha_1^1 v + \gamma_1^2 \right) dy. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим второе решение  $\alpha^1 = \alpha_2^1$ ,  $\beta^1 = \beta_2^1$ .

Поступая так же, как в первом случае, имеем:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Theta} (\alpha_2^1 u + \beta_2^1 v + \gamma_2^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta_2^1 u + \alpha_1^1 2v + \gamma_2^2 \right) dy = \\
& = \int_{\Theta} \left( \frac{(x-x_0)}{r} u - \frac{(y-y_0)}{r} v + \gamma_2^1 \right) dx - \left( \frac{G_1}{G_2} \frac{(y-y_0)}{r} u + \frac{(x-x_0)}{r} v + \gamma_2^2 \right) dy = \\
& = \int_0^2 \pi_0 \left( \frac{\sin \phi}{\varepsilon} u - \frac{\cos \phi}{\varepsilon k} v + \gamma_2^1 \right) \varepsilon \cos \phi d\phi - \left( \frac{G_1}{G_2} \frac{\cos \phi}{\varepsilon k} u + \frac{\sin \phi}{\varepsilon} v + \gamma_2^2 \right) (-\sin \phi) \varepsilon d\phi = \\
& = \int_0^2 \pi_0 \left( \frac{\cos^2 \phi}{k} + \sin^2 \phi \right) d\phi = v(x_0, y_0) \left( \frac{1}{k} + 1 \right) \pi.
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$v(x_0, y_0) \frac{k}{\pi(k+1)} = \int_{\Gamma} (\alpha_2^1 u + \beta_2^1 v + \gamma_2^1) dx - (-\beta_2^1 u + \alpha_2^1 v + \gamma_2^2) dy. \quad (17)$$

Теперь осталось вычислить интеграл в правых частях формул (16), (17). Для этого воспользуемся формулами (5) и (6). Они позволяют вычислить  $u = \tau_{xz}$ ,  $v = \tau_{yz}$  на  $\Gamma$ .

Имеем:

$$ul_1 + vl_2 = 0, 2a_{13}u^2 + 2a_{23}v^2 = 1.$$

Отсюда получаем выражения для  $u = \tau_{xz}$ ,  $v = \tau_{yz}$  на  $\Gamma$ .

$$u = -\frac{l_2}{l_1} v, 2a_{13} \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^2 v^2 + 2a_{23}v^2 = 1,$$

$$v^2 = \frac{l_1^2}{2(a_{13}l_2^2 + a_{23}l_1^2)}, v = \pm \frac{l_1}{\sqrt{2(a_{13}l_2^2 + a_{23}l_1^2)}}, \quad (18)$$

$$u = \mp \frac{l_2}{\sqrt{2(a_{13}l_2^2 + a_{23}l_1^2)}}. \quad (19)$$

В соответствии с торцевыми моментами (см. рис. 1) в формулах (18) и (19) выбираем верхний знак.

Полученные формулы подставляем в (16) и (17) и находим выражения для  $u = \tau_{xz}$ ,  $v = \tau_{yz}$  во всех точках в области, ограниченной контуром  $\Gamma$ . Это позволяет определить пластическую и упругую зоны. Те точки, где  $2a_{13}\tau_{xz}^2 + 2a_{23}\tau_{yz}^2 < 1$ , принадлежат упругой зоне, остальные попадают в пластическую зону.

4. Заключение. Результаты, полученные в этой работе, еще раз показывают, что использование законов сохранения эффективно для решения краевых задач. Глобальные по своей сути, они позволяют свести решение краевой задачи к нескольким квадратурам.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.  
 [2] Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.

[3] Сенашов С.И., Черепанова О.Н., Кондрин А.В. Об упругопластическом кручении стержня // Вестник СибГАУ. 2013. В. 3(49). С. 100-103.

[4] Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Издательство СО-РАН, 2001. 190с.

[5] Сенашов С.И., Гомонова О.В., Яхно А.Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Красноярск: СибГАУ, 2012. 137 с.

[6] Сенашов С.И., Черепанова О.Н., Кондрин А.В., Филюшина Е.В. Расчет напряженного состояния во внутренних точках упругопластического стержня постоянного сечения. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013618484.

[7] Сенашов С.И., Черепанова О.Н., Кондрин А.В., Яхно А.Н., Филюшина Е.В. Построение упругопластической границы, возникающей при кручении прямолинейного стержня с сечением прямоугольной формы. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 20146616472.

S. I. Senashov, E. V. Filyushina

### ELASTIC-PLASTIC TORSION BAR ORTHOTROPIC

*Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk, Russia*

**Abstract.** We study the elastic - plastic torsion uniform rectilinear rod orthotropic anisotropy. It is assumed that a side surface the rod is free from stresses and stored in a plastic state. Built infinite system of conservation laws, which depends linearly on the components of the stress tensor. The conservation laws allow to reduce the problem of determining the state of stress in the interior points of the rod to the calculation of integrals over the boundary of the contour section. This made it possible to determine elastic - plastic boundary within the cross section, which is limited arbitrary piecewise smooth contour.

**Keywords:** elastic - plastic torsion, orthotropic rod elastic - plastic boundary conservation laws

### REFERENCES

- [1] Lehnitsky S.G. The theory of elasticity of an anisotropic body. M: Nauka, 1977. 416 p. (in Russian)
- [2] Annin B.D., Cherepanov G.P. Elasto - plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 238 p. (in Russian)
- [3] Senashov S.I., Cherepanova O.N., Kondrin A.V. On the elastic-plastic torsion bar // Herald SibSAU 2013, B. 3 (49). P. 100-103.
- [4] Kiriakov P.P., Senashov S.I., Yahno A.N. Application of symmetries and conservation laws to solving differential equations. Novosibirsk: Publishing SORAN 2001. 190 p. (in Russian)
- [5] Senashov S.I., Gomonova O.V., Yahno A.N. Mathematical problems of two-dimensional equations of the perfect plasticity. Krasnoyarsk: Siberian State Aerospace University, 2012. 137 p. (in Russian)
- [6] Senashov S.I., Cherepanova O.N., Kondrin A.V., Filyushina E.V. The calculation of the stress state in the interior of elastic-plastic rod of constant cross section. Certificate of state registration of the computer number 2013618484
- [7] Senashov S.I., Cherepanova O.N., Kondrin A.V., Yahno A.N., Filyushina E.V. Building elastoplastic border arising torsional straight rod with rectangular cross-section. Certificate of state registration of the computer number 20146616472

---

*Senashov Sergei Ivanovich*

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk, Russia.

*Filyushina Elena Vladimirovna*

e-mail: filyushina@sibsau.ru, Ph. D. Sci. Phys. & Math., Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk, Russia.

М. В. Полоник<sup>1,2</sup>, Е. Е. Рогачев<sup>1</sup>

## УМЕНЬШЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕТАЛЛАХ ПРИ НАГРЕВАНИИ НИЖЕ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ

<sup>1</sup>Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,  
г. Владивосток, Россия

<sup>2</sup>Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

**Аннотация.** Моделируется процесс снятия остаточных напряжений в металлах при температурном воздействии. Рассмотрены режимы в стадии медленного нагрева до температуры, не создающей дополнительных необратимых деформаций, выдержки при этой температуре и режим медленного охлаждения. Стадия выдержки моделируется с учетом ползучих свойств материалов. Рассматриваются краевые задачи и описываются закономерности, отвечающие за снятие остаточных напряжений. В условиях ползучести Нортона получены аналитические решения.

**Ключевые слова:** остаточные напряжения, упругопластические деформации, пластическое течение, реология, отжиг, температурное воздействие.

УДК: 539.374

**Введение.** При отсутствии каких-либо внешних воздействий в телах или конструкциях всегда присутствуют напряжения, которые принято называть остаточными [1], [2]. Такие напряжения чаще всего отрицательно влияют на дальнейшую эксплуатацию изделий, вызывая коробление, возникновение трещин и в конечном итоге разрушение. В настоящее время для избежания таких дорогостоящих разрушений разработаны и применяются различные способы, приводящие к снятию таких нежелательных напряжений. В технологической практике одним из способов является процесс термической обработки, предполагающий медленный нагрев материала до определённой температуры, выдержку и последующее медленное охлаждение.

---

© Полоник М. В., Рогачев Е. Е., 2016

*Полоник Марина Васильевна*

e-mail: polonic@iacp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

*Рогачев Егор Егорович*

e-mail: egor1805@mail.ru, магистр, инженер-программист, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-31069-мол\_а).

Поступила 17.12.2015

Отметим, что термообработка (или нагрев для уменьшения остаточных напряжений, или отжиг для уменьшения напряжений) в зависимости от температуры нагрева и скорости охлаждения металла бывает разных видов. Как правило, для максимального уменьшения остаточных напряжений применяют высокотемпературный отжиг. Такой отжиг проводится в районе температур, не превышающих некоторую максимальную температуру, выше которой могут происходить структурные превращения (например, сталь от 450 до 650 °С). Низкотемпературный отжиг применяется к деталям, для которых более важным является сохранение поверхностной твердости, нежели максимальное уменьшение остаточных напряжений. Проводят такой отжиг при температурах до 250 °С (сталь). Нагрев до температуры отжига необходимо производить медленно, так, чтобы пониженные значения предела текучести при заданной температуре отжига были по возможности достигнуты одновременно и равномерно по всему сечению изделия. Режим охлаждения также является важнейшей стадией процесса, поскольку нарушение предписанного технологией режима охлаждения не только уменьшает эффект снятия напряжений, но может даже увеличить напряжения по сравнению с исходным состоянием.

Результаты моделирования высокотемпературного отжига представлены в [3]. На примере полого шара с накопленными необратимыми деформациями [4] в рамках линейного упругопластического тела показана возможность уменьшения остаточных напряжений. Моделирование осуществлялось квазистатическим процессом дополнительного деформирования при медленном нагревании, выдержке при определенной температуре и медленном охлаждении. Также в [3] показано, что без учета стадии выдержки, которую было предложено рассматривать с учетом ползучих свойств материалов [5], [6], снятие остаточных напряжений не происходит, более того, как и в [7], наблюдается их рост и повторное пластическое течение при охлаждении. В данной работе на основе полученных в [3] исследований представлены краевые задачи и описаны закономерности, отвечающие за снятие остаточных напряжений при низкотемпературном воздействии, – низкотемпературный отжиг. Как и в [3], за основу накопленных напряжений были приняты расчеты [4]. Необходимым условием этого выступала статическая определимость процесса пластического течения [9], [10]. В качестве закона ползучести для получения аналитического решения принят степенной закон ползучести Нортон [8].

**Предварительно накопленные остаточные напряжения.** Как и в [3], рассматривался полый шар ( $R_0$ ,  $r_0$ ,  $r_0 < R_0$ ) с предварительно накопленными необратимыми деформациями:

$$\begin{aligned} e_{rr}^p &= -2k\gamma - Ar^{-3}, \\ e_{\theta\theta}^p = e_{\varphi\varphi}^p &= -e_{rr}^p/2, \quad \gamma = (\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)^{-1}\mu^{-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} e_{rr} &= d_{rr} = \partial u / \partial r, \\ e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} &= d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = u/r, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $d_{rr}$  и  $d_{\theta\theta}$  – компоненты полных деформаций;  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе;  $k$  – предел текучести;  $A$  – константа, определяется по измеренным на внутренней границе полным деформациям  $d_{rr}(r_0)$  и заданным напряжениям  $\sigma_{\theta\theta}(r_0) = -2k$ . Уровень остаточных напряжений (рис. 1) рассчитан для образца из стали 30ХГСН2А с параметрами:  $\lambda = 1.8 \cdot 10^{11}$  Па,  $\mu = 8.1 \cdot 10^{10}$  Па,  $k = 1350 \cdot 10^6$  Па; геометрическими размерами:

$r_0/R_0 = 0.2$ ,  $R_0/R_0 = 1$ ; заданными  $\sigma_{\theta\theta}(r_0) = -2k$ Па и измеренными  $d_{rr}(r_0) = 0.03812$ ;  $\sigma_{rr}(R_0) = 0$ ,  $\sigma_{rr}(r_0) = 0$ .

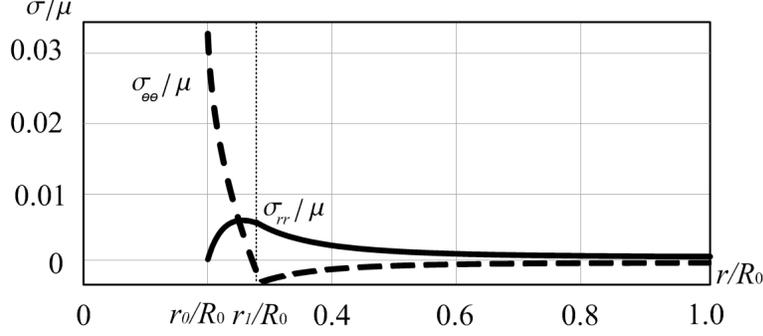


Рис. 1. Распределение предварительных остаточных напряжений для стали марки 30XГСН2А при  $T = 20^\circ\text{C}$

На всех рисунках приведены безразмерные величины  $\sigma/\mu$ ,  $r/R_0$  ( $\sigma_{rr}/\mu$  – сплошная,  $\sigma_{\theta\theta}/\mu$  – пунктирная линии). Представленное состояние среды будем считать исходным, тогда учтем, что в предположении необратимой несжимаемости, в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , существует две области:  $r_1 < r \ll R_0$  – упругая и  $r_0 \ll r \ll r_1$  – упругопластическая,  $r_1$  – граница областей. Упругопластическая область  $r_0 \ll r \ll r_1$  содержит накопленные телом при предварительном деформировании необратимые пластические деформации (1). В упругой области  $r_1 < r \ll R_0$  пластические деформации (1)  $e_{rr}^p$  и  $e_{\theta\theta}^p$  равны нулю, а упругие деформации (2)  $e_{rr}$  и  $e_{\theta\theta}$  зависят от компоненты перемещений  $u = u_r(r)$ .

**Моделирование стадии медленного низкотемпературного нагрева.** Проследим за изменениями напряжений (рис. 1) в материале на стадии медленного нагрева. В рамках закона Дюамеля – Неймана [11] с ростом температуры напряжения в среде будут изменяться согласно:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda(e_{rr} + 2e_{\theta\theta}) + 2\mu e_{rr} - 3\alpha_T K(T - T_0), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + 2\mu(e_{\theta\theta} - e_{rr}),\end{aligned}\quad (3)$$

где  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $K = \lambda + 2/3\mu$  – упругий модуль всестороннего сжатия;  $T$ ,  $T_0$  – текущая, начальная температура. Тогда для упругой области  $r_1 < r \ll R_0$  компоненты упругих деформаций  $e_{rr}$  и  $e_{\theta\theta}$  в (3) выражаются согласно (2). Для области  $r_0 \ll r \ll r_1$  в (3) следует учесть уровень накопленных необратимых деформаций  $e_{rr}^p$  и  $e_{\theta\theta}^p$ , определенный в (1):

$$\begin{aligned}e_{rr} &= d_{rr} - e_{rr}^p = \partial u / \partial r - e_{rr}^p, \\ e_{\theta\theta} &= e_{\varphi\varphi} = d_{\theta\theta} - e_{\theta\theta}^p = u/r - e_{\theta\theta}^p.\end{aligned}\quad (4)$$

Решение (4) справедливо при выполнении в области  $r_0 \ll r \ll r_1$  условия  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} < 2k_2$ , где  $k_2$  – предел текучести.

С повышением температуры происходит изменение предела текучести материала  $k_2 = k_2(T)$ :  $k_2 = 1350 \cdot 10^6 - 5(T - 200)(T - 100)(T - 20)(400 + 3T)/1824$ . Данная функция построена по известным экспериментальным данным [12]. Заметим, что для стали марки 30XГСН2А в диапазоне температур 20–250 °C предел текучести

$k_2 = 1350 \cdot 10^6 = const$  не меняется. Таким образом, условие  $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} < 2k_2$  выполняется на протяжении всего процесса равномерного нагревания до  $T_1 = 250^\circ\text{C}$ . При этой же температуре и ниже в технологической практике производится отжиг стали марки 30ХГСН2А, называемый низкотемпературным. Расчеты показывают, что при таком низкотемпературном воздействии в среде не возникает необратимых процессов. Как отмечалось в [3], для появления необратимых процессов необходимо выполнять равномерный нагрев до  $T_2 = 480^\circ\text{C}$ .

**Моделирование стадии выдержки.** Для материалов, находящихся под длительным влиянием неизменной температуры, характерно проявление свойств ползучести, стадию выдержки будем моделировать с учетом этих свойств. Ползучесть описываем с помощью степенного закона Нортона [8]. Для степени  $n = 3$  получено аналитическое решение. Для необратимых деформаций получено соотношение:

$$\begin{aligned} e_{rr}^v &= -(Bt\gamma^{-2} + c)^{-1} - A_1 r^{-3}, \\ e_{\theta\theta}^v &= -e_{rr}^v/2. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5)  $B$  – параметр материала;  $c$  – определяется при  $e_{rr}^v(t=0) = e_{rr}^p$ ;  $A_1$  – константа, определяется напряженно деформированным состоянием среды. Изменение необратимых (ползучих) деформаций (5) теперь следует учесть как в области  $r_2 < r \ll R_0$ , так и в области  $r_0 \ll r \ll r_2$  с накопленными пластическими деформациями (1). Параметр  $c$  в области  $r_2 < r \ll R_0$  определяется при условии, что в момент времени  $t = 0$  (связано с началом процесса выдержки)  $e_{rr}^p = 0$ :  $c = r^3 A^{-1}$ . В области  $r_0 \ll r \ll r_2$  с накопленными пластическими деформациями (1)  $e_{rr}^p = -2k\gamma - Ar^{-3}$ :  $c = r^3(A - A_1 + 2kr^3\gamma)^{-1}$ .

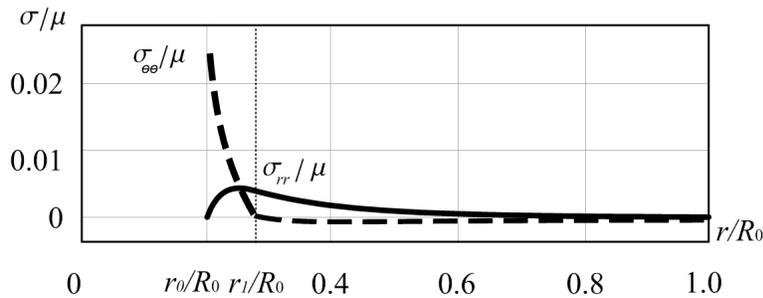


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений во всем слое для стали марки 30ХГСН2А после охлаждения до  $T = 20^\circ\text{C}$

Произведен расчет напряжений при выдержке  $t = 2.6$  часа при  $T = 250^\circ\text{C}$ . При неизменной общей деформации напряжения в теле с течением времени перераспределяются – происходит их релаксация. Если теперь тело охладить до комнатной температуры, в окрестности уровень остаточных напряжений изменится (рис. 1 и рис. 2). Процесс низкотемпературного воздействия и его снятия, в отличие от высокотемпературного [3], приводит к значительному снижению уровня предварительно накопленных необратимых деформаций и остаточных напряжений (рис. 2).

**Заключение.** Расчеты остаточных напряжений по зависимостям полученных точных решений привели к частичной релаксации остаточных напряжений. Данный опытный факт промоделирован на основе линейной упругопластической модели в

условиях неизменного предела текучести материала с ростом температуры и при учете ползучих свойств материалов на стадии выдержки. Для моделирования технологического приема отжига именно учет ползучести на стадии выдержки позволяет получить результат, имеющий место в технологической практике.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чернышев Г. Н., Попов А. Л., Козинцев В. М., Пономарев И. И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, 1996. 240 с.
- [2] Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х частях. Часть II. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [3] Polonik M. V., Rogachev E. E. A Decrease of Residual Stresses in the Elastic-Plastic-Creep Medium at Temperature Influence // *Advanced Materials Research*, 1040 (2014) 870–875. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1040.870.
- [4] Полоник М. В., Рогачев Е. Е. О снятии остаточных напряжений в упругопластической среде на примере полого шара // XXXVI Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова, 4-10 сентября 2012 г., Владивосток: сборник материалов. (Электронный ресурс). Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 175–177. Объем 600 Мб; 1 опт. компакт-диск (CD-ROM).
- [5] Murashkin E. V., Polonik M. V. Development of approaches to the creep process modeling under large deformations // *Applied Mechanics and Materials*, 249–250 (2013) 833–837.
- [6] Murashkin E. V., Polonik M. V. Determination of a Loading Pressure in the Metal Forming by the Given Movements // *Advanced Materials Research*, 842 (2014) 494–499.
- [7] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Terletskiy I. A. To the Formation of Residual Stress Field in the Vicinity of a Spherical Cavity Viscoelastoplastic Material // *Far Eastern Mathematical Journal*, 12(2) (2012) 146–159.
- [8] Локощенко А. М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ. 2007. 264 с.
- [9] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium // *Doklady Physics*, 45(12) (2000) 694–696. DOI: 10.1134/1.1342452.
- [10] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The formation of a one-dimensional residual stress field in the neighbourhood of a cylindrical defect in the continuity of an elastoplastic medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 67 (2003) 283–292. DOI: 10.1016/S0021-8928(03)90014-1.
- [11] Карслоу Г., Егер Г. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
- [12] Физические величины. Справочник / под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1231 с.

M. V. Polonik<sup>1,2</sup>, E. E. Rogachev<sup>1</sup>

## REDUCING THE RESIDUAL STRESSES IN METALS AT TEMPERATURES THAT DO NOT LEAD TO PLASTIC FLOW

<sup>1</sup>*Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia*

<sup>2</sup>*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

**Abstract.** The process of removing the residual stresses in metal under heating is simulated. There have been examined modes at the stages of slow heating to the temperature that do not lead to plastic flow, holding at this temperature, and slow cooling stage. The holding stage is modeled with consideration of creeping properties of materials. The boundary value problems are examined and the patterns responsible for the removal of residual stresses are described. The analytical solutions are obtained under the conditions of Norton's creep.

**Keywords:** residual stresses, elastic-plastic deformations, plastic flow, rheology, annealing temperature exposure.

## REFERENCES

- [1] Chernyshev G. N., Popov A. L., Kozintsev V. M., Ponomarev I. I. Residual stresses in deformable solids. M.: Nauka, 1996. 240 p. (In Russian)
- [2] Bell J. F. Experimental foundations of mechanics of deformable solids. In 2 parts. Part II. M.: Nauka, 1984. 432 p. (In Russian)
- [3] Polonik M. V., Rogachev E. E. A Decrease of Residual Stresses in the Elastic-Plastic-Creep Medium at Temperature Influence // *Advanced Materials Research*, 1040 (2014) 870–875. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1040.870.
- [4] Polonik M. V., Rogachev E. E. On the removal of residual stresses in the elastic-plastic medium for example a hollow sphere // XXXVI Far Eastern Mathematical Workshop Academician E.V. Zolotov, 4-10 September. 2012, Vladivostok: compendium. (Electronic resource). Vladivostok: IACP. 2012. S. 175-177. Volume of 600 MB, 1 opt. CD-ROM (CD-ROM). (In Russian)
- [5] Murashkin E. V., Polonik M. V. Development of approaches to the creep process modeling under large deformations // *Applied Mechanics and Materials*, 249–250 (2013) 833–837.
- [6] Murashkin E. V., Polonik M. V. Determination of a Loading Pressure in the Metal Forming by the Given Movements // *Advanced Materials Research*, 842 (2014) 494–499.
- [7] Burenin A. A., Kovtanjuk L. V., Terletskiy I. A. To the Formation of Residual Stress Field in the Vicinity of a Spherical Cavity Viscoelastoplastic Material // *Far Eastern Mathematical Journal*, 12(2) (2012) 146–159.

---

*Polonik, Marina Vasilyevna*

e-mail: polonic@iacp.dvo.ru, Ph.D., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS; Associate professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

*Rogachev, Egor Egorovich*

e-mail: egor1805@mail.ru, Master, Software Engineer, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia

[8] Lokoshchenko A. M. Process modeling creep and stress rupture of metals. M.: MSIU, 2007.

[9] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium // *Doklady Physics*, 45(12) (2000) 694-696. DOI: 10.1134/1.1342452.

[10] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The formation of a one-dimensional residual stress field in the neighbourhood of a cylindrical defect in the continuity of an elastoplastic medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 67 (2003) 283–292. DOI: 10.1016/S0021-8928(03)90014-1.

[11] Carslaw G. Thermal conductivity of solids / G. Carslaw, G. Jaeger. M.: Nauka, 1964. 487 p.

[12] Physical quantities. Handbook / edited by I. S. Grigoriev, E. Z. Meylthova. M.: Energoatomizdat, 1991. (In Russian)

А. А. Манцыбора<sup>1,2</sup>, М. В. Полоник<sup>1,2</sup>

## ВЛИЯНИЕ НАКОПЛЕННЫХ НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОСТОЯННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

<sup>1</sup>Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,  
г. Владивосток, Россия

<sup>2</sup>Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

**Аннотация.** Рассматривается задача о распространении сферической продольной ударной волны в упругопластической среде с накопленными необратимыми большими деформациями. Построено автомодельное решение центрально-симметричного движения продольной ударной волны постоянной интенсивности. Показано, что наличие накопленных необратимых деформаций влияет на скорость распространения ударной волны. Представлены результаты численного решения.

**Ключевые слова:** большие упругопластические деформации, ударная волна, автомодельная переменная, разрыв напряжений, сферические волны.

УДК: 539.371/.374

**Введение.** В процессе производства и технологической обработки все изделия накапливают как обратимые, так и необратимые деформации. Наличие данных деформаций в среде обуславливает остаточные напряжения. Существуют разные технологические приемы для снятия таких остаточных напряжений. Однако полностью снять остаточные напряжения невозможно. Таким образом, в материалах практически всегда присутствуют накопленные деформации. Такие деформации могут влиять на процессы распространения возмущений в среде. Хорошо изученные линейные модели не описывают подобные эффекты. Учет подобных эффектов возможен только в рамках нелинейных моделей. Однако с использованием нелинейных моделей упругопластической среды существует ряд сложностей, связанных как с выбором модели [1]–[6], так и с ее применением. Также следует отметить, что на сегодняшний день общепринятой

---

© Манцыбора А. А., Полоник М. В., 2016

*Манцыбора Александр Анатольевич*

**e-mail:** manzubor@iasr.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

*Полоник Марина Васильевна*

**e-mail:** polonik@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Поступила 17.12.2015

модели больших упругопластических деформаций не существует. В данной работе для расчета распространения сферической продольной ударной волны по среде с накопленными необратимыми деформациями используется модель больших упругопластических деформаций, представленная в [7]–[9]. В рамках данной модели были получены решения задач [10]–[15] теории больших упругопластических деформаций. В работе [16] данная модель была использована для описания влияния необратимых деформаций на распространение упругих волн по упругопластическому полупространству. Пластические волны, являющиеся поверхностями разрывов, в линейной теории были исследованы в [17]. Именно в рамках данной модели удастся построить автомодельное решение задачи о распространении сферической продольной упругой ударной волны в среде с накопленными необратимыми деформациями. Автомодельное решение задачи просто и дает качественную картину процессов.

**Основные соотношения.** Полагаем движение центрально-симметричным. Пусть упругопластическая среда была нагружена и накопила некоторый уровень необратимых деформаций, а затем была разгружена. Для простоты будем считать, что только следующие компоненты тензора пластических деформаций отличны от нуля:  $p_{rr} = p_{\theta\theta} = p_{\varphi\varphi} = \eta$ , где  $\eta = const$ , а все остальные тождественно равны нулю. Положим, что вектор перемещений в сферической системе координат имеет одну отличную от нуля компоненту  $u_r = u_r(r, t)$ . В этом случае движение среды обладает сферической симметрией. Компоненты тензора деформаций Альманси, с учетом сферической симметрии, выражаются через перемещения  $u_r$  следующим образом:

$$d_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2, \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{u_r}{r} \right)^2. \quad (1)$$

Остальные его компоненты равны нулю:

$$d_{r\theta} = d_{r\varphi} = d_{\varphi\theta} = 0.$$

С другой стороны, если представлять тензор конечных деформаций через упругую и пластическую части, с учетом нашего предположения  $p_{rr} = p_{\theta\theta} = p_{\varphi\varphi} = \eta$ ,  $d_{r\theta} = d_{r\varphi} = d_{\varphi\theta} = 0$ , при малых упругих деформациях получим:

$$\begin{aligned} d_{rr} &= e_{rr} + p_{rr} - 2e_{rr}p_{rr} = e_{rr}(1 - 2p_{rr}) + p_{rr}, \\ d_{\theta\theta} &= d_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} + p_{\theta\theta} - 2e_{\theta\theta}p_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} - 2e_{\varphi\varphi}p_{\varphi\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) можно однозначным образом выразить компоненты тензора упругих деформаций  $e_{ij}$  через тензор пластических деформаций  $p_{ij}$  и компоненты градиента вектора перемещений  $u_{i,j}$ :

$$e_{rr} = \frac{u_{r,r} - \frac{1}{2}(u_{r,r})^2 - \eta}{1 - 2\eta}, \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = \frac{\frac{u_r}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 - \eta}{1 - 2\eta}. \quad (3)$$

Связь тензора напряжений с упругими деформациями в сферических координатах записывается согласно аналогу формулы Мурнагана следующим образом:

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{rr}} (1 - 2e_{rr}); \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{\theta\theta}} (1 - 2e_{\theta\theta}); \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{\varphi\varphi}}. \quad (4)$$

Здесь  $W$  – функция упругого потенциала, которая зависит только от инвариантов тензора упругих деформаций, что возможно ввиду предположения о независимости

внутренней энергии от пластических деформаций. Воспользуемся разложением функции упругого потенциала  $W$  в ряд Тейлора по упругим инвариантам в окрестности состояния с нулевыми упругими деформациями:

$$W = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + lI_1 I_2 + mI_1^3 + nI_3 + \dots, \quad (5)$$

$$I_1 = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\varphi\varphi}, \quad I_2 = e_{rr}^2 + e_{\theta\theta}^2 + e_{\varphi\varphi}^2, \quad I_3 = e_{rr}^3 + e_{\theta\theta}^3 + e_{\varphi\varphi}^3.$$

Отношение плотностей вычислим из уравнения неразрывности

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{1 - 2L_1 + 2L_1^2 - 2L_2 - \frac{4}{3}L_1^3 + 4L_1 L_2 - \frac{8}{3}L_3}, \quad (6)$$

$$L_1 = d_{ii}, \quad L_2 = d_{ij}d_{ji}, \quad L_3 = d_{ij}d_{jk}d_{ki}.$$

Согласно нашим предположениям о том, что только три компоненты тензора конечных деформаций Альманси  $d_{\theta\theta}$ ,  $d_{\varphi\varphi}$  и  $d_{rr}$  отличны от нуля, для его инвариантов получаем:

$$L_1 = d_{rr} + 2d_{\theta\theta}, \quad L_2 = d_{rr}^2 + 2d_{\theta\theta}^2, \quad L_3 = d_{rr}^3 + 2d_{\theta\theta}^3. \quad (7)$$

Используя (6) и (7) и для компонент тензора Альманси (3), получим

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{u_r}{r}\right)^2 (1 - u_{r,r}). \quad (8)$$

Соотношения (4) определяют зависимость тензора напряжений от тензора упругих деформаций, которая согласно предположению о малости упругих деформаций в случае сферической симметрии принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= R((\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{\theta\theta})), \\ \sigma_{\theta\theta} &= R((\lambda + 2\mu)e_{\theta\theta} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{rr})), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= R((\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda(e_{rr} + e_{\theta\theta})), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $R = \sqrt{1 - 2p_{rr}}$ .

Уравнение движения в сферической системе координат имеет следующий вид:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = \rho \frac{dv_r}{dt}. \quad (10)$$

Рассмотрим такое движение точек среды, когда единственной отличной от нуля компонентой вектора перемещений является компонента  $u_r$ , причем зависит она только от радиуса  $r$  и момента времени  $t$ . В данном случае можно перейти от уравнения (10), записанного в частных производных, к обыкновенному дифференциальному уравнению. Это можно осуществить посредством введения автомодельной переменной  $\xi$  следующего вида:

$$\xi = \frac{r}{ct}. \quad (11)$$

Пусть вектор перемещений выражается следующим образом:

$$u_r(r, t) = ru(\xi). \quad (12)$$

Вычислим частные производные от  $u_r$  по времени и радиусу в соответствии с (12):

$$u_{r,r} = u(\xi) + \xi u'(\xi), \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} = r \left(-\frac{r}{ct^2}\right) u' = -cu' \xi^2. \quad (13)$$

Выражение для вектора скорости записывается следующим образом:

$$v_r = \dot{u}_r + u_{r,r}v_r \quad \Rightarrow \quad v_r = \frac{\dot{u}_r}{1 - u_{r,r}},$$

откуда в соответствии с (12)

$$v_r = -\frac{cu'\xi^2}{1 - u - u'\xi}. \quad (14)$$

Выразим через  $u(\xi)$  левую часть уравнения (10). Для этого перепишем соотношения для упругих деформаций (3), используя (13):

$$e_{rr} = \frac{u + \xi u' - \frac{1}{2}(u + \xi u')^2 - \eta}{1 - 2\eta}, \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = \frac{u - \frac{1}{2}u^2 - \eta}{1 - 2\eta}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (9), выразим компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left( (\lambda + 2\mu) \frac{u + \xi u' - \frac{1}{2}(u + \xi u')^2 - \eta}{1 - 2\eta} + 2\lambda \frac{u - \frac{1}{2}u^2 - \eta}{1 - 2\eta} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left( 2(\lambda + \mu) \frac{u - \frac{1}{2}u^2 - \eta}{1 - 2\eta} + \lambda \frac{u + \xi u' - \frac{1}{2}(u + \xi u')^2 - \eta}{1 - 2\eta} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \left( 2(\lambda + \mu) \frac{u - \frac{1}{2}u^2 - \eta}{1 - 2\eta} + \lambda \frac{u + \xi u' - \frac{1}{2}(u + \xi u')^2 - \eta}{1 - 2\eta} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Частная производная от  $\sigma_{rr}$  по радиусу имеет следующий вид:

$$\sigma_{rr,r} = R \left( (\lambda + 2\mu) \frac{(2u' - u''\xi)(1 - u - \xi u')}{1 - 2\eta} + 2\lambda u' \frac{1 - u}{1 - 2\eta} \right) \frac{\xi}{r}. \quad (17)$$

В результате для левой части уравнения (10), используя (16) и (17), получаем

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = \\ &= \frac{R}{r} \left( \left( (\lambda + 2\mu) \frac{(2u' - u''\xi)(1 - u - \xi u')}{1 - 2\eta} + 2\lambda u' \frac{1 - u}{1 - 2\eta} \right) \xi + \right. \\ &\quad \left. + 4\mu \left( \frac{u + \xi u' - \frac{1}{2}(u + \xi u')^2 - u + \frac{1}{2}u^2}{1 - 2\eta} \right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Благодаря соотношениям (12) и (18) из уравнения движения (10), записанного в частных производных, получаем обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее одномерное движение среды в безразмерной

форме:

$$\begin{aligned} & \left( (\lambda + 2\mu) \frac{(2u' - u''\xi)(1 - u - \xi u')}{1 - 2\eta} + 2\lambda u'(1 - u) \right) \xi + 4\mu \xi u' \left( \frac{1 - u - \frac{1}{2}\xi u'}{1 - 2\eta} \right) = \\ & = \rho_0 c^2 \xi^3 \frac{(u''\xi + 2u')(1 - u)^2}{(1 - u - u'\xi)^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

**Постановка задачи.** Пусть в предварительно продеформированной разгруженной среде имеется сферическая полость радиусом  $r_0$  (рис. 1, *a*).

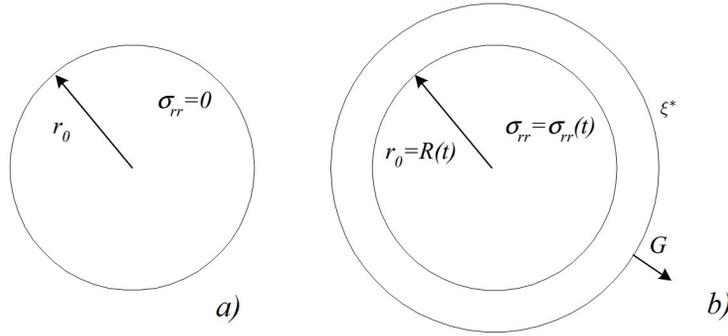


Рис. 1. Распространение ударной волны от внутренней полости

В момент времени  $t_0 = \frac{r_0}{G}$  ( $G = const$ ) на границе полости мгновенно изменяется напряженное состояние  $\sigma_{rr}^0 = \sigma_{rr}(t_0)$  так, что  $\sigma_{rr}^0 < 0$ . В результате такого ударного воздействия на среду в ней начинают распространяться возмущения. С учетом условия увеличения давления  $\sigma_{rr}^0 < 0$  из законов термодинамики следует, что передним фронтом возмущений будет сферическая ударная волна (рис. 1, *b*). Будем считать скорость  $G$  движения фронта волны в среде постоянной. Тогда поверхности разрыва будет соответствовать постоянное значение автомодельной переменной  $\xi^* = Gc^{-1}$ , где  $c = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho_0}$ . Согласно принятой гипотезе сплошности вектор перемещений на ударной волне рваться не может

$$[u_r] = 0, \quad (20)$$

а рвутся только его производные. Причем разрывы должны удовлетворять условиям совместности на поверхностях разрывов.

На сферической поверхности разрыва закон сохранения импульса в разрывах переписывается следующим образом:

$$[\sigma_{rr}] = -\rho_0[v_r]. \quad (21)$$

Кинематические условия совместности разрывов в сферической системе координат имеют вид:

$$[\dot{u}_r] = (v_r - G)[u_{r,r}]. \quad (22)$$

Откуда, если переписать уравнение для вектора скорости

$$v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_{r,r}v_r \quad (23)$$

в разрывах, получаем

$$[v_r] = \frac{(v_r - G)[u_{r,r}]}{1 - u_{r,r} + [u_{r,r}]} \quad (24)$$

Выразим разрыв тензора напряжений  $[\sigma_{rr}]$ , записанный в левой части (21), через разрыв градиента вектора перемещений  $[u_{r,r}]$ .

Для этого запишем соотношения (1) в разрывах

$$[d_{rr}] = \left[ u_{r,r} - \frac{1}{2} u_{r,r}^2 \right] = [u_{r,r}] - [u_{r,r}]u_{r,r} + \frac{1}{2} [u_{r,r}]^2. \quad (25)$$

Так же перепишем в разрывах соотношения (2), учитывая то, что рваться могут только упругие деформации, а пластические остаются постоянными:

$$\begin{aligned} [d_{rr}] &= [e_{rr}] - 2[e_{rr}]p_{rr} = [e_{rr}](1 - 2p_{rr}), \\ [d_{\theta\theta}] &= [d_{\varphi\varphi}] = [e_{\varphi\varphi}](1 - 2p_{\varphi\varphi}) = [e_{\theta\theta}](1 - 2p_{\theta\theta}) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25) и (26) разрыв тензора упругих деформаций может быть выражен следующим образом:

$$[e_{rr}] = [u_{r,r}] \frac{(1 - u_{r,r})}{1 - 2p_{rr}}. \quad (27)$$

Перепишывая соотношения (9) в разрывах и учитывая (26), имеем:

$$[\sigma_{rr}] = \frac{\rho}{\rho_0} ((\lambda + 2\mu)[e_{rr}] + \lambda([e_{\varphi\varphi}] + [e_{\theta\theta}])) = \frac{\rho}{\rho_0} (\lambda + 2\mu)[u_{r,r}] \frac{1 - u_{r,r} + \frac{1}{2}[u_{r,r}]}{1 - 2p_{rr}}. \quad (28)$$

Используя (24) и (28), перепишем закон сохранения импульса:

$$(\lambda + 2\mu)[u_{r,r}] \frac{1 - u_{r,r} + \frac{1}{2}[u_{r,r}]}{1 - 2p_{rr}} = \rho_0 \frac{(v_r - G)^2 [u_{r,r}]}{1 - u_{r,r} + [u_{r,r}]} \quad (29)$$

Уравнение (29) является алгебраическим уравнением относительно скорости распространения ударной волны  $G$ , откуда получаем

$$G = v_r + \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \frac{(1 - u_{r,r} + \frac{1}{2}[u_{r,r}])(1 - u_{r,r} + [u_{r,r}])}{1 - 2p_{rr}}}. \quad (30)$$

Если теперь считать  $[u_{r,r}] = \varphi = \text{const}$  известной интенсивностью волны, то получаем:  $G = \text{const}$  и  $\xi^* = \text{const}$ . Согласно (30) формулируем начальные условия задачи Коши для уравнения (19), к которой сведена таким образом поставленная задача. Из уравнения (20) и соотношения (12) получаем, что сразу за поверхностью  $\xi^*$

$$u(\xi^*) = 1 - \sqrt{1 - 2\eta}. \quad (31)$$

А для первой производной функции  $u(\xi)$  в точке  $\xi^*$  согласно уравнениям (1), (2), (13), (31) получаем

$$u'(\xi^*) = -\frac{\varphi}{\xi^*}. \quad (32)$$

Таким образом получаем соотношения (31) и (32), которые являются начальными условиями задачи Коши для уравнения (19). Поскольку аналитически найти решение

уравнения (19) не представляется возможным, то был проведен численный эксперимент. Численное интегрирование проводилось от  $\xi^*$  при условиях (31) и (32) и заканчивалось при некотором  $\xi_1$  ( $0 < \xi_1 < \xi^*$ ), когда  $u(\xi)$  достигает некоторого, заданного заранее предела  $u_1 = u(\xi_1)$ .

Для определения закона движения  $R = R(t)$  границы полости, при котором расходящаяся сферическая ударная волна имеет постоянную интенсивность, воспользуемся соотношением, следующим из постановки задачи:

$$R(t)u(\xi_r) + r_0 = R(t), \quad \xi_r = \frac{R(t)}{ct}. \quad (33)$$

Здесь необходимо отметить, что в отличие от сферической поверхности разрыва, которой соответствует фиксированное значение автомодельной переменной  $\xi^*$ , границе полости будет соответствовать  $\xi_r$ , которое изменяется с течением времени. Поэтому  $R(t)$  вычисляется согласно (33) методом простых итераций, где  $u(\xi)$  вычисляется из дифференциального уравнения (19).

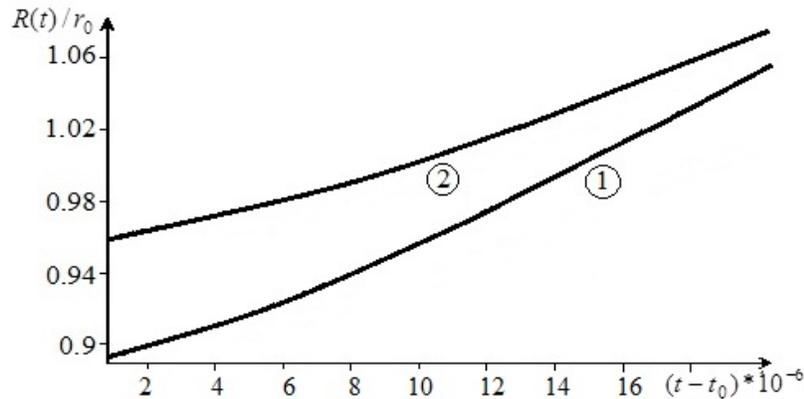


Рис. 2. Изменение радиуса внутренней полости  $R(t)/r_0$  с течением времени

Характерный график изменения радиуса внутренней полости, при котором передним фронтом распространяющихся в среду сжимающих ударных возмущений является сферическая ударная волна постоянной интенсивности, представлен на рис. 2 при следующих значениях безразмерных параметров Ламе: ( $\lambda_1 = \lambda/(\lambda + 2\mu) = 0.6$  и  $\mu_1 = \mu/(\lambda + 2\mu) = 0.2$ ) скачка  $[u_{r,r}] = \varphi = 0.01$  для кривой - 1 пластические деформации  $p_{rr} = -0.05$ , а для кривой - 2 при следующих значениях пластических деформаций  $p_{rr} = -0.13$ .

При найденном  $R = R(t)$  напряжение, необходимое для создания исследуемого автомодельного движения, находим из формулы (16), подставляя значение автомодельной переменной  $\xi_r(t)$ , соответствующее границе полости. Вид функции  $\sigma_{rr}^0 = \sigma_{rr}(R_0, t)$  показан на рис. 3, где ветви 1 и 2 получены при отсутствии о наличии пластических деформаций соответственно.

Согласно представленному графику в случае наличия предварительных сжимающих пластических деформаций необходимо менее резкое возрастание величины внутреннего давления для поддержания постоянства интенсивности расходящейся сферической ударной волны. При этом согласно графику можно более длительное время

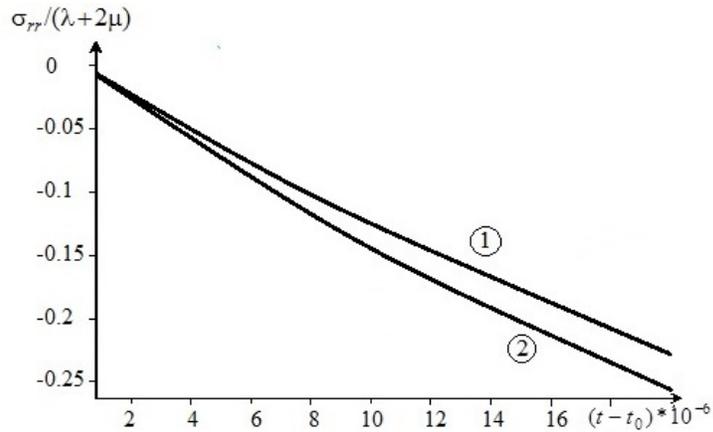


Рис. 3. Изменение напряжений  $\sigma_{rr}/(\lambda + 2\mu)$  с течением времени на внутренней полости

поддерживать ударную волну постоянной интенсивности, тем больше, чем больше предварительные пластические деформации. Поскольку напряжения на внутренней границе будут расти медленнее, чем в случае отсутствия пластических деформаций, процесс упругого деформирования будет проходить более длительное время при одинаковых пределах текучести материала, а также упругодеформируемая область будет занимать большую часть пространства при том же предельном значении для напряжений, так как в этом случае для достижения предельных значений потребуется больше времени.

**Заключение.** Таким образом, в рамках модели больших упругопластических деформаций на примере решения одномерной автомодельной задачи деформирования среды было рассмотрено распространение роста упругих деформаций. Оказалось, что в случае центральной симметрии и автомодельного движения среды упругие деформации могут изменяться на сферической ударной волне постоянной интенсивности. Численные расчеты показали, что накопленные пластические деформации влияют на скорость распространения упругой ударной волны.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lee E. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Trans ASME: J. Appl. Mech.*, 36(1) (1969) 1–6.
- [2] Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987. 232 с.
- [3] Быковцев Г. И., Шитиков А. В. Конечные деформации упругопластических сред // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
- [4] Роговой А. А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
- [5] Чернышов А. Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120–128.
- [6] Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
- [7] Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Kovtanyuk L. V. On a simple model for elastoplastic medium at finite deformations // Reports of the Russian Academy of Sciences, 347(2) (1996) 199–201.
- [8] Myasnikov V. P. The equations of motion of elastic-plastic materials under large deformations // Bulletin FEB RAS, 4 (1996) 8–13.
- [9] Ковтанюк Л. В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, № 1. С. 107–117.
- [10] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium // Doklady Physics, 45(12) (2000) 694–696. DOI: 10.1134/1.1342452.
- [11] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The formation of a one-dimensional residual stress field in the medium of a cylindrical defect in the continuity of an elastoplastic medium // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 67 (2003) 283–292. DOI: 10.1016/S0021-8928(03)90014-1.
- [12] Ermolenko A. V., Polonik M. V. On the possibility of improving operational characteristics of materials by preliminary pulse or impact treatment // Mechanics of Solids, 42(4) (2007) 652–660. DOI: 10.3103/S0025654407040176.
- [13] Polonik M. V., Murashkin E. V. Formation of the Stress Field in the Vicinity of a Single Defect under Shock (Impulse) Loading // Advanced Materials Research, 774–776 (2013) 1116–1121. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.774-776.111.
- [14] Murashkin E. V., Polonik M. V. Development of approaches to the creep process modeling under large deformations // Applied Mechanics and Materials, 249–250 (2013) 833–837. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMM.249-250.833.
- [15] Murashkin E. V., Polonik M. V. Determination of a Loading Pressure in the Metal Forming by the Given Movements // Advanced Materials Research, 842 (2014) 494–499. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.842.494.
- [16] Burenin A. A., Dudko O. V., Mantsybora A. A. Propagation of Reversible Deformation in a Medium with Accumulated Irreversible Strains // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 43(5) (2002) 770–776. DOI: 10.1023/A:1019808407336.
- [17] Burenin A. A., Dudko O. V., Semenov K. T. Conditions for the existence of discontinuity surfaces of irreversible strains in elastoplastic media // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 50(5) (2009) 878–885. DOI: 10.1007/s10808-009-0119-6.

A. A. Mantcybora<sup>1,2</sup>, M. V. Polonik<sup>1,2</sup>

**IMPACT OF THE CUMULATIVE IRREVERSIBLE DEFORMATION ON THE  
PERTURBATIONS PROPAGATION OF CONSTANT INTENSITY IN THE  
ELASTIC-PLASTIC MEDIUM**

<sup>1</sup>*Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok,  
Russia*

<sup>2</sup>*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

**Abstract.** The problem of propagation of the spherical longitudinal shock wave in the elastic-plastic medium with accumulated large irreversible deformations is examined. Self-similar solution of central symmetric longitudinal motion of the shock wave of constant intensity has been found. It is shown that the presence of accumulated irreversible deformation affects the rate of propagation of the shock wave. The results of the numerical solution are presented.

**Keywords:** Large elastic-plastic deformations, shock wave, self-simulated variable, stress discontinuity, spherical waves.

**REFERENCES**

- [1] Lee E. Elastic-plastic deformation at finite strains. Trans ASME: J. Appl. Mech., 36(1) (1969) 1–6.
- [2] Levitas V. I. Large elastoplastic deformation of materials at high pressure. Kiev: Nauk. Dumka, 1987. 232 p. (In Russian)
- [3] Bykovtsev G. I., Shitikov A. V. Finite deformation elastoplastic media // Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 311(1) (1990) 59–62. (In Russian)
- [4] Rogovoy A. A. Defining relations for finite elastic-inelastic deformations // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 46(5) (2005) 138–149.
- [5] Chernyshov A. D. Constitutive equations for elastic-plastic body at final deformations // Bulletin RAN, Mechanics of Solids, 1 (2000) 120–128.
- [6] Pozdeev A. A., Trusov P. V., Nyashina Y. I. Large elastoplastic deformation: theory, algorithms, applications. M.: Nauka, 1986. 232 p. (In Russian)
- [7] Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Kovtanyuk L. V. On a simple model for elastoplastic medium at finite deformations // Reports of the Russian Academy of Sciences, 347(2) (1996) 199–201.
- [8] Myasnikov V. P. The equations of motion of elastic-plastic materials under large deformations / V. P. Myasnikov / Bulletin FEB RAS, 4 (1996) 8–13.
- [9] Kovtanyuk L. V. The modeling of elastic-plastic deformation in non-isothermal case, Far Eastern Mathematical Journal, 5(1) (2004) 107–117. (In Russian)

---

*Polonik Marina Vasilyevna*

e-mail: polonik@mail.ru, Ph.D., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS; Associate professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

*Mantcybora, Alexandr Anatolyevich*

e-mail: manzubor@iacp.dvo.ru, Ph.D., Junior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.

- [10] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium // *Doklady Physics*, 45(12) (2000) 694–696. DOI: 10.1134/1.1342452.
- [11] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The formation of a one-dimensional residual stress field in the medium of a cylindrical defect in the continuity of an elastoplastic medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 67 (2003) 283–292. DOI: 10.1016/S0021-8928(03)90014-1.
- [12] Ermolenko A. V., Polonik M. V. On the possibility of improving operational characteristics of materials by preliminary pulse or impact treatment // *Mechanics of Solids*, 42(4) (2007) 652–660. DOI: 10.3103/S0025654407040176.
- [13] Polonik M. V., Murashkin E. V. Formation of the Stress Field in the Vicinity of a Single Defect under Shock (Impulse) Loading // *Advanced Materials Research*, 774–776 (2013) 1116–1121. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.774-776.111.
- [14] Murashkin E. V., Polonik M. V. Development of approaches to the creep process modeling under large deformations // *Applied Mechanics and Materials*, 249–250 (2013) 833–837. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMM.249-250.833.
- [15] Murashkin E. V., Polonik M. V. Determination of a Loading Pressure in the Metal Forming by the Given Movements // *Advanced Materials Research*, 842 (2014) 494–499. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.842.494.
- [16] Burenin A. A., Dudko O. V., Mantsybora A. A. Propagation of Reversible Deformation in a Medium with Accumulated Irreversible Strains // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 43(5) (2002) 770–776. DOI: 10.1023/A:1019808407336.
- [17] Burenin A. A., Dudko O. V., Semenov K. T. Conditions for the existence of discontinuity surfaces of irreversible strains in elastoplastic media // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 50(5) (2009) 878–885. DOI: 10.1007/s10808-009-0119-6.

О. В. Дудко<sup>1,2</sup>, А. А. Лаптева<sup>1</sup>, В. Е. Рагозина<sup>1</sup>

## О ВОЗНИКНОВЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОЛН В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ ЕЕ ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

<sup>1</sup>Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,  
г. Владивосток, Россия

<sup>2</sup>Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

**Аннотация.** Рассматриваются особенности возникновения и распространения одномерных сферических центрированных волн в разномодульной упругой среде. Построены решения нестационарных краевых задач со сходящимися и расходящимися волнами, возникающими в разномодульной среде вследствие воздействия в режиме „сжатие с последующим растяжением“ на границу сферы, границу сферической полости. Для частного случая квадратичной функции перемещения точек нагружаемой границы вычислены моменты возникновения центрированных волн, отличные от времени смены направления граничного воздействия.

**Ключевые слова:** разномодульная упругая среда, динамическое деформирование, сферическая симметрия, слабый разрыв, центрированная волна.

УДК: 539.374

**Введение.** Классическая линейная теория упругости, основанная на постулате о нормально-изотропном поведении упругих сред с линейной зависимостью между напряжениями и деформациями, рассматривает идеализацию механических свойств реальных материалов. Это существенно упрощает определяющие модельные соотношения и методы решения краевых задач теории. Однако хорошо известно, что большинство природных и конструкционных материалов нельзя считать линейно-упругими, особенно при изучении их динамического деформирования. Примером здесь могут

---

© Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е., 2016

*Дудко Ольга Владимировна*

**e-mail:** dudko@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

*Лаптева Анастасия Александровна*

**e-mail:** lanastal@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

*Рагозина Виктория Евгеньевна*

**e-mail:** ragozina@vls.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Поступила 27.12.2015

служить горные породы, грунты, различные связанные сыпучие или пористые среды, которые могут выдерживать значительные сжимающие нагрузки и практически не сопротивляться растягивающим усилиям. Учет подобных специфических механических свойств (нелинейной связи между напряжениями и деформациями, разномодульности) приводит к неклассическим моделям упругих сред (например, [1], [2]). Нелинейность, наличие сингулярности в деформационном поведении вносят новые качественные особенности в решения краевых задач динамики деформирования.

**Определяющие соотношения.** Модельные соотношения динамического деформирования изотропной упругой среды запишем в прямоугольной декартовой системе координат, пренебрегая тепловыми эффектами и вводя предположение об отсутствии массовых сил:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}), \\ v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}), \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left\{ 1 - 2J_1 + 2J_1^2 - 2J_2 - \frac{4}{3}J_1^3 + 4J_1J_2 - \frac{8}{3}J_3 \right\}^{1/2}, \\ J_1 &= \alpha_{kk}, \quad J_2 = \alpha_{ik}\alpha_{ki}, \quad J_3 = \alpha_{ik}\alpha_{kj}\alpha_{ji}. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) компоненты вектора перемещений и скорости перемещений точек среды  $u_i$ ,  $v_i$  являются функциями пространственных эйлеровых переменных  $(x_1, x_2, x_3)$  и времени  $t$ ;  $\sigma_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений Коши и тензора деформаций Альманси;  $\rho_0$ ,  $\rho$  — плотность среды в начальном и текущем состоянии;  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера;  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  — инварианты тензора деформаций Альманси; индексом после запятой обозначена частная производная по пространственной переменной, точкой — по времени. Упругий потенциал  $W$  является эмпирической функцией состояния, которая задает механические свойства материала и замыкает систему модельных соотношений (1). В случае изотропии среды упругий потенциал зависит только от инвариантов тензора деформаций. Ранее в [3] были рассмотрены особенности возникновения и распространения плоских волн в рамках модели [2], использующей упругий потенциал  $W(J_1, J_2, J_3)$  в виде разложения в ряд по сферическим функциям и описывающей разномодульные дилатирующие материалы. Учет эффекта дилатации, не затрудняющий изучения плоских волновых фронтов, существенно усложняет определяющие соотношения при переходе к криволинейным координатам. Так, решение простейших одномерных задач, аналогичных полученным в [3], в случае сферической симметрии в рамках модели [2] невозможно получить в аналитическом виде. Поэтому при изучении сферических волн воспользуемся подходом, заложенным в [1] и [2], но упругий потенциал зададим в виде [4]:

$$\begin{aligned} W(I_1, I_2) &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 |I_1| = \frac{\tilde{\lambda}}{2} I_1^2 + \mu I_2, \\ \tilde{\lambda} &= \lambda - 2\nu \text{Sign}(I_1), \quad \text{Sign}(I_1) = \begin{cases} 1, & I_1 > 0, \\ -1, & I_1 < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  — параметры Ламэ,  $\nu$  — упругий модуль, отвечающий за объемную разномодульность среды,  $I_1$ ,  $I_2$  — главные инварианты тензора малых деформаций. Потенциал (2) определяет разномодульные свойства среды путем включения дополнительного слагаемого особого вида, благодаря которому сингулярность учитывается фактически

за счет зависимости первого параметра Ламе  $\tilde{\lambda}$  от типа деформированного состояния ( $I_1 > 0$  — сжатие,  $I_1 < 0$  — растяжение). При сферически симметричных одномерных движениях, когда компоненты тензора малых деформаций выражаются только через одно ненулевое радиальное перемещение  $u_r(r, t)$ , упругий потенциал (2) с инвариантами  $I_1 = u_{r,r} + 2\frac{u_r}{r}$ ,  $I_2 = u_{r,r}^2 + 2\left(\frac{u_r}{r}\right)^2$  позволяет получить из системы (1) уравнение движения точек среды в следующей форме:

$$c_{\pm}^2 \left\{ u_{r,rr} + 2\frac{u_{r,r}}{r} - 2\frac{u_r}{r^2} \right\} = \ddot{u}_r, \quad (3)$$

$$c_{\pm} = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda} + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda \pm 2\nu + 2\mu}{\rho}} = \begin{cases} c_+, & I_1 < 0, \\ c_-, & I_1 > 0. \end{cases}$$

Здесь характеристическая скорость  $c_{\pm}$  принимает различные значения  $c_+$ ,  $c_-$  при разных знаках первого инварианта тензора малых деформаций  $I_1$  (для определенности примем  $c_+ > c_-$  при  $\nu > 0$ ). Так как инвариант  $I_1$  в случае сферической симметрии равен сумме двух слагаемых, каждое из которых может быть как положительным, так и отрицательным, то переход от состояния сжатия ( $I_1 < 0$ ) к состоянию растяжения ( $I_1 > 0$ ) или наоборот может достигаться при всевозможных соотношениях между значениями  $u_{r,r}$ ,  $u_r$  и  $r$ . Этот факт вносит в решения краевых задач деформирования разномодульных сред дополнительные особенности. Здесь рассмотрим две краевые задачи о нестационарном граничном воздействии на сферические границы с возникновением в разномодульной среде (2) сходящихся или расходящихся слабых сферических волн.

**Краевые задачи со сходящимися и расходящимися волнами.** Положим, что область первоначально недеформированного разномодульного материала, ограниченная сферической поверхностью радиусом  $R$ , с момента времени  $t = 0$  подвергается одномерному воздействию в режиме „ударное сжатие с последующим растяжением“. Для этого к границе  $r = R$  прикладывается нагрузка, приводящая граничные точки к движению по закону  $u_r(R, t) = \phi(t)$  (рис. 1, а). Функция  $\phi(t)$  — гладкая, отрицатель-

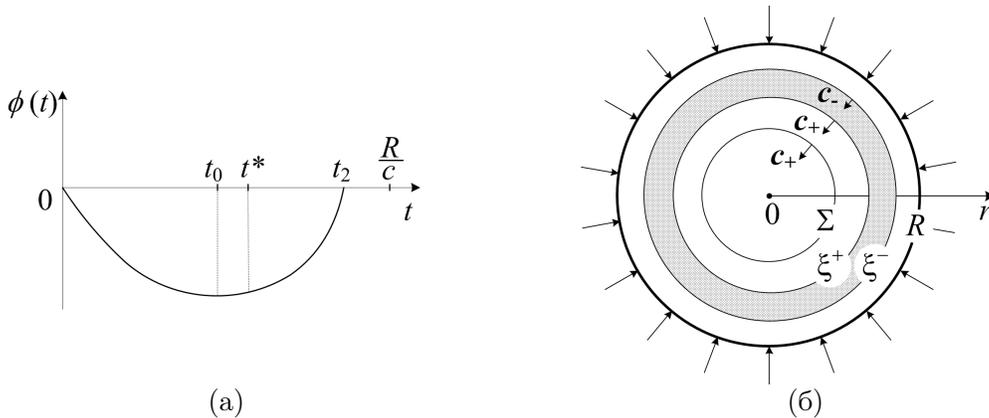


Рис. 1. Нагружение сферы в режиме „сжатие–растяжение“: (а) функция перемещения точек сферической границы  $r = R$ ; (б) волновая картина при  $t > t^*$

ная и дважды дифференцируемая на интервале  $t \in [0; t_2]$  ( $\phi'(0) \neq 0$ ) — задана таким

образом, что до момента времени  $t = t_0 > 0$  ( $\phi'(t_0) = 0$ ) на границу действуют сжимающие усилия, а при  $t_0 < t \leq t_2$  — растягивающие. Следует также отметить, что для исключения из рассмотрения эффектов отражения переднего фронта возмущений от центра сферы ( $r = 0$ ) значение  $t_2$  необходимо принять меньшим, чем  $R/c_{\pm}$ .

При таком воздействии в момент времени  $t = 0$  от сферической границы отделяется передний фронт возмущений — одномерная сходящаяся волна сжатия  $\Sigma(t)$ , движущаяся к центру сферы со скоростью  $c_+$  (рис. 1, б). При решении аналогичной задачи об одноосном сжатии–растяжении разномодульного полупространства [3] смена направления прикладываемых граничных усилий сразу же (в момент  $t = t_0$ ) инициировала возникновение движущегося слоя недеформированной среды с плоскими слабыми волнами в качестве переднего и заднего фронтов. Здесь же, в случае сходящихся сферических волн, изменение направленности граничного воздействия в момент  $t = t_0$  не приводит к одновременному возникновению на границе дополнительных фронтов возмущений. Анализ решения сферически симметричной задачи с уравнением движения (3) показал, что волновой фронт  $\xi \in [\xi^+; \xi^-]$ , несущий деформации растяжения в область среды, предварительно сжатую волной  $\Sigma(t)$ , отделяется от границы сферы в момент  $t^* > t_0$  ( $t^* < t_2 < R/c_+$ ), т. е. позже момента смены направленности граничных усилий со сжимающих на растягивающие (рис. 1, б). Такое запаздывание в случае сходящихся сферических волн возникает из-за сложной структуры первого инварианта  $I_1$ , для которого  $t^*$  — момент выхода его значения в ноль. Таким образом, выбранный режим нагружения внешней границы сферы, занятой разномодульным материалом, приводит при  $t = t^*$  к возникновению между областями сжатия и растяжения переходного слоя  $[\xi^+; \xi^-]$  — центрированной волны [5], внутри которой  $I_1 = 0$ . В отличие от плоского случая, внутри такого сферического слоя инвариант  $I_1$ , благодаря своей структуре, может иметь нулевое значение при ненулевых деформациях  $u_{r,r}$ . Фронты центрированной волны  $\xi^+$  и  $\xi^-$  являются слабыми разрывами — волнами ускорений, движущимися с разными скоростями  $c_+$  и  $c_-$  (характеристическими скоростями уравнения движения (3)). Ширина центрированной волны  $\Delta\xi = \xi^- - \xi^+$  в момент возникновения нулевая, с течением времени увеличивается за счет разницы значений  $c_+$  и  $c_-$ .

Полагаем теперь, что сжимающе-растягивающая нагрузка действует изнутри на поверхность сферической полости, вырезанной в бесконечном разномодульном пространстве. По аналогии с предыдущей постановкой перемещения точек границы  $r = r_0$  задаем гладкой, положительной на интервале  $t \in [0; t_2]$ , дважды дифференцируемой функцией  $u_r(r_0, t) = \psi(t)$  с максимумом в точке  $t_0$  ( $\psi'(t_0) = 0$ ) (рис. 2, а). Подобное воздействие также вызывает сначала возникновение переднего фронта сжатия  $\Sigma(t)$  со скоростью  $c_+$ , вслед за которым в момент  $t^*$  от границы полости отделяется расходящийся сферический слой центрированной волны  $\xi \in [\xi^+; \xi^-]$  (рис. 2, б) — области нулевого значения инварианта  $I_1$ . Передний и задний слабые фронты центрированной волны движутся с характеристическими скоростями  $c_+$  и  $c_-$  соответственно. Отличие от сходящихся волн заключается в моменте возникновения такого эффекта. В данном случае оказывается, что выход первого инварианта деформаций в ноль и, как следствие, возникновение центрированной волны происходят раньше ( $t^* < t_0$ ), чем смена характера воздействия на границе  $r = r_0$ .

Момент времени  $t^*$ , в обоих случаях вычисляемый из условия равенства нулю инварианта  $I_1$ , зависит от вида функции перемещений на нагружаемой границе. Если на границе сферы  $r = R$  задана квадратичная функция  $\phi(t) = vt + At^2/2$  ( $v < 0$ ,

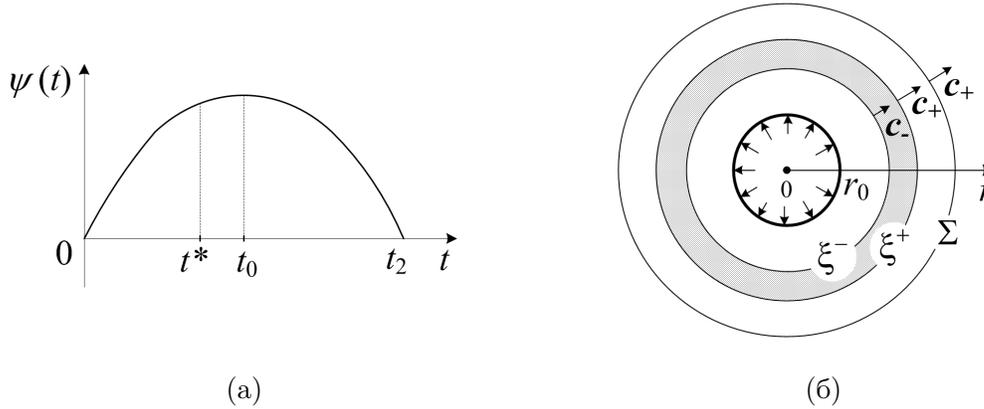


Рис. 2. Нагружение сферической полости в режиме „сжатие–растяжение“:  
 (а) функция перемещения точек сферической границы  $r = r_0$ ; (б) волновая картина при  $t > t^*$

$A > 0$ ,  $\phi(t) \leq 0$  при  $t \in [0; t_2]$ ), то момент возникновения сходящейся центрированной волны равен  $t^* = Rc_+^{-1} \ln(RA/(RA + vc_+)) > t_0$ . Аналогичным образом получаем время возникновения расходящейся волны  $t^* = -r_0c_+^{-1} \ln(r_0A/(r_0A - vc_+)) < t_0$ , если на границе сферической полости  $r = r_0$  при  $t \in [0; t_2]$  задана квадратичная функция  $\psi(t) \geq 0$  с параметрами  $v > 0$ ,  $A < 0$ .

**Заключение.** В работе получены решения одномерных краевых задач о нестационарном ударном воздействии на сферические границы в разномодульной упругой среде, приводящем к возникновению сходящихся и расходящихся сферических центрированных волн. Показаны принципиальные отличия таких решений не только от известных результатов линейной теории упругости, но и от полученных ранее аналогичных задач деформирования разномодульной среды с плоскими одномерными поверхностями разрывов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
- [2] Мясников В. П., Ляховский В. А. О поведении упругой среды с микронарушениями // Известия АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.
- [3] Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. Т. 6, № 1–2. С. 94–105.
- [4] Дудко О. В., Лаптева А. А., Чигарев А. В. К построению математической модели разномодульной изотропно-упругой среды // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2(16). С. 61–67.
- [5] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: „Московский лицей“, 1998. — 412 с.

O. V. Dudko<sup>1,2</sup>, A. A. Lapteva<sup>1</sup>, V. E. Ragozina<sup>1</sup>

**ON THE OCCURRENCE OF ONE-DIMENSIONAL SPHERICAL CENTERED WAVES IN THE MULTIMODULUS ELASTIC MEDIUM UNDER DYNAMIC STRAINING**

<sup>1</sup>*Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia*

<sup>2</sup>*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

**Abstract.** The occurrence and distribution features of one-dimensional spherical centered waves in multimodulus elastic medium are considered. The solutions of the nonstationary boundary value problems with convergent and divergent waves that arise in the multimodulus medium due to exposure „compression and then stretching“ in the sphere boundary and the spherical cavity have been built. The moments of occurrence of centered waves have been calculated for the special case of a quadratic move function of boundary points. These moments differ from the time of the change of boundary influence direction.

**Keywords:** multimodulus elastic medium, dynamic deformation, spherical symmetry, weak break, centered wave

**REFERENCES**

- [1] Lomakin E. V., Rabotnov Yu. N. Elasticity Theory Relations for Isotropic Bimodular Body // *Izv. AN SSSR. MTT.* 1978. Vol. 6. P. 29–34. (in Russian)
- [2] Myasnikov V. P., Lyakhovsky V. A. The elastic behavior of microfractured media // *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Solid.* 1984. No. 10. (in Russian)
- [3] Dudko O. V., Lapteva A. A., Semyonov K. T. About distribution of flat one-dimensional waves and their interaction with barrier in the media differently reacting to a stretching and compression // *Far Eastern Mathematical Journal.* 2005. Vol. 6. No. 1–2. P. 94–105. (in Russian)
- [4] Dudko O. V., Lapteva A. A., Chigarev A. V. On the construction of mathematical models of multimodulus isotropic elastic medium // *Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state.* 2013. No 2(16). P. 61–67. (in Russian)
- [5] A. G. Kulikovskii and E. I. Sveshnikova, *Nonlinear waves in elastic media*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

---

*Dudko Olga Vladimirovna*

e-mail: dudko@iacp.dvo.ru, Ph.D. in Physics and Mathematical Sciences, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

*Lapteva Anastasia Alexandrovna*

e-mail: lanastal@mail.ru, Ph.D. in Physics and Mathematical Sciences, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.

*Ragozina Victoria Evgenevna*

e-mail: ragozina@vlc.ru, Ph.D. in Physics and Mathematical Sciences, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.

А. В. Ковалев, И. Г. Хвостов

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГОМ ШАРЕ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

*Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*

**Аннотация.** Метод малого параметра применен к решению связанной задачи термоупругости для шара, поверхность которого в начальный момент времени охлаждается и далее поддерживается при постоянной температуре. Получены выражения для полей температуры, перемещения и напряжений в двух приближениях.

**Ключевые слова:** метод малого параметра, термоупругость, шар, связанная задача термоупругости.

УДК: 539.32

**Введение.** В настоящее время актуальным вопросам термомеханики, таким как определение напряженно-деформированного состояния тел с различной геометрией с учетом температуры, исследование необратимых деформаций в условиях температурного воздействия и др., посвящены работы многих авторов, например монография [1] и статьи [2]–[5].

Метод малого параметра является довольно широко используемым в механике деформируемого твердого тела в качестве метода нахождения приближенных аналитических решений. Данный метод может быть применен также и в задачах термоупругости. Так, в работе [6] была исследована система уравнений линейной связанной термоупругости с целью получения аналитических решений в виде рядов по параметру связанности системы, а также был исследован вопрос об их сходимости. Было показано на примере связанной задачи термоупругости для полупространства, что при малых значениях параметра связанности решения, полученные методом малого параметра, согласуются с точными решениями. В работе [7] метод малого параметра был использован для построения общего решения центрально-симметричной квазистатической задачи упругости при условии, что все термомеханические характеристики являются функциями температуры. В статье [8] было рассмотрено распространение

---

© Ковалев А. В., Хвостов И. Г., 2016

*Ковалев Алексей Викторович*

e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

*Хвостов Иван Геннадьевич*

e-mail: ig\_hvostov@mail.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 28.12.2015

плоских гармонических термоупругих волн в анизотропной среде с использованием метода малого параметра.

В данной работе в рамках метода малого параметра получено приближенное аналитическое решение связанной задачи термоупругости для шара.

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругий шар радиуса  $R$  с температурой  $T = T_0 = const$ . В момент времени  $t = 0$  поверхность этого шара мгновенно охлаждается до температуры  $T = 0$ , и эта температура поддерживается. Начальные и граничные условия, таким образом, для температуры будут выглядеть так:

$$T(r, 0) = T_0, \quad T(R, t) = 0. \quad (1)$$

Примем также, что на поверхности упругого тела выполняется следующее условие:

$$\sigma_r(R, t) = 0. \quad (2)$$

В соответствии с [9] и [10] запишем систему для связанной осесимметричной задачи термоупругости в сферических координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \left( \frac{1}{a} + \frac{3\alpha_t^2 E T_0}{\lambda_t (1 - 2\nu)} \right) \dot{T} - \frac{\alpha_t T_0}{\lambda_t} (\dot{\sigma}_r + 2\dot{\sigma}_\theta) = 0, \quad (4)$$

где  $u$  — радиальная компонента вектора перемещений,  $\sigma_r, \sigma_\theta$  — компоненты тензора напряжений,  $\lambda_t$  — коэффициент теплопроводности,  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $\alpha_t$  — коэффициент теплового расширения,  $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ .

**Построение решения.** Для определения приближенного аналитического решения системы будем применять метод возмущений [11]. Для этого введем следующие обозначения [12]:

$$\frac{1}{a} + \frac{3\alpha_t^2 E T_0}{\lambda_t (1 - 2\nu)} = \frac{1}{\kappa}, \quad \frac{\alpha_t T_0}{\lambda_t} = \delta \cdot d, \quad (5)$$

где  $\delta$  — малый параметр,  $\kappa, d$  — постоянные величины.

Выполнив разложения, аналогичные [11], для всех функций, входящих в уравнения, начальные и граничные условия связанной задачи термоупругости (1)–(4) с учетом принятых обозначений (5), получим:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\kappa} \dot{T}^{(0)} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} - \frac{2u^{(0)}}{r^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \quad (7)$$

– для нулевого приближения.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\kappa} \dot{T}^{(n)} = d \left( \frac{\partial \sigma_r^{(n-1)}}{\partial t} + 2 \frac{\partial \sigma_\theta^{(n-1)}}{\partial t} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial r} - \frac{2u^{(n)}}{r^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} \quad (9)$$

– для всех остальных приближений. Индексы  $(n-1)$  и  $(n)$  обозначают принадлежность к соответствующему приближению.

Отметим, что граничные и начальные условия для поиска нулевого приближения будут совпадать с условиями для исходной системы, в то время как для последующих приближений начальные и граничные условия будут нулевыми.

Для решения однородного уравнения теплопроводности (6) при заданных условиях воспользуемся методом разделения переменных.

Температура в нулевом приближении запишется в виде [13]

$$T^{(0)}(r, t) = \frac{2RT_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{R^2} t\right). \quad (10)$$

Перейдем к определению полей перемещений и напряжений в нулевом приближении. В рассматриваемой задаче только радиальная компонента перемещения  $u(r, t)$  не равна нулю. Через нее компоненты напряжения можно выразить по следующим формулам, верным для всех приближений [14]:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \frac{u_r}{r} - \alpha_t (1+\nu) T \right], \quad (11)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu} \left[ (1-\nu) \frac{u_r}{r} + \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha_t (1+\nu) T \right]. \quad (12)$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Таким образом, вследствие этого поиск перемещения в нулевом приближении сводится к решению одного дифференциального уравнения (7). Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u^{(0)} = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha_t}{r^2} \int_0^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx, \quad (13)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, которые подлежат определению из граничных условий. При  $R = 0$  мы должны иметь  $u = 0$ , откуда следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx = 0.$$

Это означает, что в уравнении (13) нужно отбросить слагаемое, содержащее  $C_2$ . Постоянная  $C_1$  определяется из условия (2). Тогда, используя уравнение (11), находим

$$\frac{EC_1}{1-2\nu} = \frac{2\alpha_t E}{(1-\nu)R^3} \int_0^R x^2 T^{(0)}(x, t) dx. \quad (14)$$

Далее, подставив выражение (13) в уравнения (11) и (12), получим компоненты напряжений в следующем виде:

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{2\alpha_t E}{1-\nu} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R x^2 T^{(0)}(x, t) dx - \frac{1}{r^3} \int_0^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx \right], \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta}^{(0)} = \frac{\alpha_t E}{1 - \nu} \left[ \frac{2}{R^3} \int_0^R x^2 T^{(0)}(x, t) dx + \frac{1}{r^3} \int_0^r x^2 T^{(0)}(x, t) dx - T^{(0)}(r, t) \right]. \quad (16)$$

Подставим теперь найденное значение нулевого приближения температуры (10) в подынтегральное выражение в формуле (13) с использованием (14). Вычислив интеграл, получим нулевое приближение радиального перемещения:

$$u^{(0)} = \frac{4\alpha_T(1-2\nu)T_0}{(1-\nu)\pi^2} r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) + \frac{2(1+\nu)\alpha_T R^2}{(1-\nu)\pi^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left[ \frac{R}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) - r \cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right) \right] \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right). \quad (17)$$

Далее с помощью уравнений (10), (15) и (16) получим компоненты тензора напряжений в нулевом приближении:

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{4\alpha_T E T_0}{(1-\nu)\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \frac{R^2}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left[ \frac{R}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) - r \cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right) \right] \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right\}. \quad (18)$$

$$\sigma_{\theta}^{(0)} = \frac{2\alpha_T E T_0}{(1-\nu)\pi^2} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \frac{R^2}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left[ \frac{R}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) - r \cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right) \right] \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \frac{\pi R}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right\}. \quad (19)$$

Перейдем к отысканию неизвестных функций температуры, перемещения и напряжений в первых приближениях. Для этого подставим выражения (18) и (19) в уравнение (8) для  $n = 1$ . Выполнив необходимые преобразования, получим уравнение теплопроводности с известной правой частью, которое имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\kappa} \dot{T}^{(1)} = \frac{4d\alpha_T E T_0 \kappa}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1} \pi n}{Rr} \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) - \frac{3}{R^2} \right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right),$$

решение которого получим с помощью метода разделения переменных. Имеем:

$$T^{(1)}(r, t) = G \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m(n^2 - m^2)r} \sin\left(\frac{\pi mr}{R}\right) \left[ \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right],$$

где

$$m \neq n, \quad G = \frac{24dR\alpha_T E T_0 \kappa}{\pi^3(1-\nu)}.$$

Подставим полученное первое приближение температуры в уравнение (9) для  $n = 1$ . Решение этого уравнения с учетом нулевых граничных условий будет определяться выражением, аналогичным (13):

$$u^{(1)} = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha_t}{r^2} \int_0^r x^2 T^{(1)}(x, t) dx.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем с помощью уравнений, аналогичных (15) и (16), учитывая нулевые граничные условия:

$$C_1 = \frac{2\alpha_T(1-2\nu)}{1-\nu} \int_0^R x^2 T^{(1)}(x, t) dx, \quad C_2 = 0.$$

После вычисления интеграла, выполнив необходимые преобразования, получим:

$$u^{(1)} = B_1 r \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2(n^2-m^2)} \left[ \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right] + \\ + \frac{B_2}{r^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2(n^2-m^2)} \left( \frac{R}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m r}{R}\right) - r \cos\left(\frac{\pi m r}{R}\right) \right) \left[ \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right],$$

$$\text{где } m \neq n, \quad B_1 = \frac{2\alpha_T G(1-2\nu)}{\pi R(1-\nu)}, \quad B_2 = \frac{\alpha_T R G(1+\nu)}{\pi(1-\nu)}.$$

По формулам, аналогичным (15) и (16), найдем первые приближения напряжений:

$$\sigma_r^{(1)} = B_3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2(n^2-m^2)} \left[ \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right] - \\ - \frac{B_4}{r^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2(n^2-m^2)} \left( \frac{R}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m r}{R}\right) - r \cos\left(\frac{\pi m r}{R}\right) \right) \left[ \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right], \\ \sigma_\theta^{(1)} = B_3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2(n^2-m^2)} \left[ \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right] + \\ + \frac{B_4}{2r^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2(n^2-m^2)} \left( \frac{R}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m r}{R}\right) - r \cos\left(\frac{\pi m r}{R}\right) \right) \left[ \exp\left(-\frac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t\right) \right],$$

$$\text{где } m \neq n, \quad B_3 = \frac{2\alpha_T E G}{\pi R(1-\nu)}, \quad B_4 = \frac{2\alpha_T E R G}{\pi(1-\nu)}.$$

Таким образом, в результате решения связанной задачи о термоупругом шаре в двух приближениях были получены поля температур, перемещений и напряжений:

$$T(r, t) = T^{(0)}(r, t) + \delta T^{(1)}(r, t), \\ u(r, t) = u^{(0)}(r, t) + \delta u^{(1)}(r, t), \\ \sigma_r(r, t) = \sigma_r^{(0)}(r, t) + \delta \sigma_r^{(1)}(r, t), \\ \sigma_\theta(r, t) = \sigma_\theta^{(0)}(r, t) + \delta \sigma_\theta^{(1)}(r, t).$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
- [2] Горностаев К. К., Ковалев А. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 135–140.
- [3] Горностаев К. К., Ковалев А. В. О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 176–184.
- [4] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе "нагрева – охлаждения" упругопластического шара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 (14). С. 123–132.
- [5] Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Велмуруган Р. Вычисление необратимых деформаций в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3(25). С. 168–175.
- [6] Soller A. I., Brull M. A. On the solution to transient coupled thermoelastic problems by perturbation techniques // ASME J. Appl. Mech. 1965. Vol. 32. № 2. P. 389–399.
- [7] Popovych V. S., Sulym H. T. Centrally symmetric quasistatic problem of thermoelasticity for a temperature sensitive body // Materials Science. 2004. Vol. 40. № 3. P. 365–375.
- [8] Chang H. H., Tarn J. Q. A state space formalism and perturbation method for generalized thermoelasticity of anisotropic bodies // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 40. P. 956–975.
- [9] Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1965. 204 с.
- [10] Подстригач Я. С. и др. Термоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1977. 248 с.
- [11] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 206 с.
- [12] Ковалев А. В., Хвостов И. Г. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2 (20). С. 29–35.
- [13] Карлслюу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
- [14] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

A. V. Kovalev, I. G. Khvostov

## STRESS AND DISPLACEMENT ANALYSIS OF AN ELASTIC BALL IN A THERMAL FIELD

Voronezh State University, Voronezh, Russia

**Abstract.** The method of the small parameter is applied to the coupled thermoelastic problem in a ball. The surface of thermoelastic body is cooled and supported at the constant temperature. The approximations with two components of the temperature, displacement and stresses are given.

**Keywords:** small parameter method, thermoelasticity, ball, coupled thermoelastic problem.

### REFERENCES

- [1] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. – Saratov: Publishing house of Saratov University, 2010. 328 p. (in Russian)
- [2] Gornostaev K. K., Kovalev A. V. About elastoplastic state of thick-walled tube with given temperature for model of complex environment // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015. № 1. P. 135–140. (in Russian)
- [3] Gornostaev K. K., Kovalev A. V. About symmetric deformation hardening elastoviscoplastic pipe taking into account temperature // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3 (25). P. 176–184. (in Russian)
- [4] Dats E. P., Mokrin S. N., Murashkin E. V. Calculation of accumulated residual deformation during "heating-cooling" the ball elastoplastic // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2012. № 4 (14). P. 123–132. (in Russian)
- [5] Dats E. P., Murashkin E. V., Velmurugan R. On computing irreversible strains of the hollow ball under unsteady thermal action // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3(25). P. 168–175. (in Russian)
- [6] Soller A. I., Brull M. A. On the solution to transient coupled thermoelastic problems by perturbation techniques // ASME J. Appl. Mech. 1965. Vol. 32. № 2. P. 389–399.
- [7] Popovych V. S., Sulym H. T. Centrally symmetric quasistatic problem of thermoelasticity for a temperature sensitive body // Materials Science. 2004. Vol. 40. № 3. P. 365–375.
- [8] Chang H. H., Tarn J. Q. A state space formalism and perturbation method for generalized thermoelasticity of anisotropic bodies // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 40. P. 956–975.
- [9] Kovalenko A. D. Introduction to thermoelasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1965. 204 p. (in Russian)

---

*Kovalev Alexey Viktorovich*

e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department of Mechanics and Computer Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

*Khvostov Ivan Gennadyevich*

e-mail: ig\_hvostov@mail.ru, Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

- [10] Podstrigach Ya. S. Thermoelasticity of electrically conductive bodies. Kiev: Naukova Dumka, 1977. 248 p. (in Russian)
- [11] Ivlev D. D., Yershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian)
- [12] Kovalev A. V., Khvostov I. G. Stress and displacement analysis of an elastic space weakened by a spherical cavity in a thermal field // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 2 (20). P. 29–35. (in Russian)
- [13] Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids. M.: Nauka, 1964. 488 p. (in Russian)
- [14] Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1975. 576 p. (in Russian)

М. В. Мир-Салим-заде

## ЗАКРЫТИЕ ЩЕЛИ, ИСХОДЯЩЕЙ ИЗ КОНТУРА КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЕ

*Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан*

**Аннотация.** Рассматривается подкреплённая стрингерами упругая изотропная пластина, имеющая круговое отверстие, из которого исходит одна прямолинейная щель переменной ширины, сравнимой с упругими деформациями. Исследуется случай, когда берега щели вошли в контакт на некотором участке. Определение параметров, характеризующих закрытие щели переменной ширины, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Сингулярное интегральное уравнение с помощью процедуры алгебраизации сведено к конечной нелинейной алгебраической системе, решаемой методом последовательных приближений. Из решения алгебраической системы найдены контактные напряжения и размер контактной зоны щели.

**Ключевые слова:** стрингерная пластина, круговое отверстие, щель переменной ширины, контактирование берегов щели, контактные напряжения.

УДК: 539.375

**Введение.** В различных отраслях техники широко применяются тонкие пластины, имеющие отверстия. Подкрепление ребрами жесткости таких пластин позволяет снизить в них уровень концентрации напряжений и затормозить рост имеющихся трещин (щелей). При некотором соотношении физических и геометрических параметров пластины в ней возможно появление зоны сжимающих напряжений, достаточных, чтобы берега щели на некотором участке вошли в контакт. Контактное взаимодействие берегов щели приводит к появлению на данном участке берегов щели контактных напряжений. Такая контактная задача для трещины впервые была решена в работах [1], [2]. Значительное внимание уделялось исследованию разрушения пластин, усиленных регулярной системой стрингеров [3]–[11], при этом рассматривалась трещина (модель) Гриффитса, т. е. трещина с невзаимодействующими кромками. В последнее время был опубликован ряд работ, посвященных рассмотрению тел с контактирующими трещинами [12]–[17]. Вопросы частичного контактирования берегов щели переменной ширины к настоящему времени малоизучены.

---

© Мир-Салим-заде М. В., 2016  
*Мир-Салим-заде Минавар Вагиф гызы*  
e-mail: minavar.mirsalimzade@imm.az, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 08.01.2016

**Постановка задачи.** Рассматривается бесконечная изотропная тонкая пластина, ослабленная круговым отверстием радиуса  $R$  и одной прямолинейной щелью переменной ширины вдоль оси абсцисс (рис. 1). Контур кругового отверстия и берега щели свободны от внешних усилий. Принято, что ширина щели сравнима с упругими деформациями. Материал пластины упругий. К пластине приклепаны поперечные ребра жесткости из другого упругого материала в точках  $z = \pm(2m + 1)L \pm iny_0$  ( $m=0,1,2,\dots$ ;  $n=1,2,\dots$ ) с постоянным шагом по всей длине стрингера симметрично относительно поверхности пластины. На бесконечности пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ .

Относительно стрингеров принимается гипотеза об одномерном континууме, т. е. считается, что при деформации толщина стрингера неизменяема, а напряженное состояние – одноосное. Стрингеры изгибу не подвергаются и работают лишь на растяжение.

Принимаются следующие допущения: а) в тонкой пластине реализуется плоское напряженное состояние; б) подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, их ослабление за счет постановки точек крепления не учитываются; в) пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления; г) все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами. Действие точки крепления моделируем: в стрингере – действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления; в пластине – действием сосредоточенной силы.

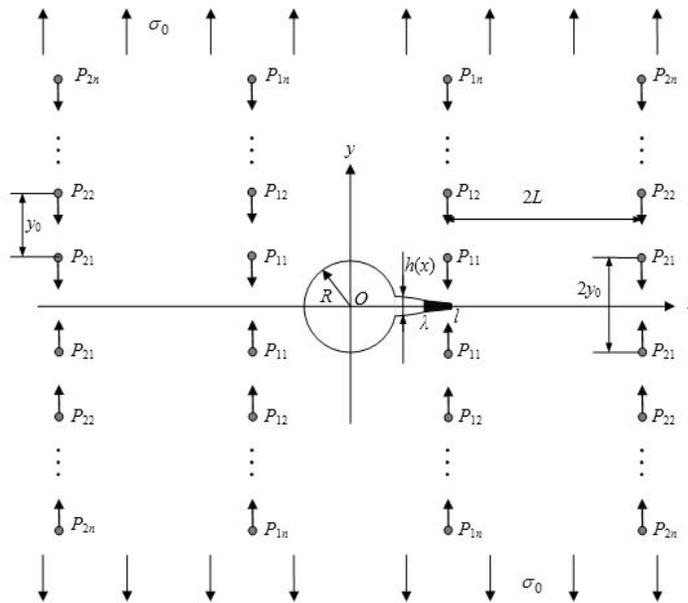


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер со средой.

Поскольку стрингеры уменьшают [1]–[10] деформацию растягиваемой пластины в направлении перпендикулярном щели, в окрестности кончика щели снижается коэффициент интенсивности напряжений. При некотором соотношении физических и геометрических параметров рассматриваемой пластины в ней будут возникать области, в которых берега щели на некотором участке войдут в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов щели. Можно заранее сказать, что зона контакта между берегами щели будет всегда начинаться с концевой точки, находящейся в области сжимающих напряжений. Принимаем, что эта область примыкает к вершине щели, а ее размер заранее неизвестен, но сравним с размером щели.

В концевой зоне, где берега щели вошли в контакт, будут возникать нормальные напряжения  $\sigma_y = p(x)$ . Величина контактных напряжений заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи механики разрушения.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид:  
– на контуре отверстия

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad |z| = R; \quad (1)$$

– на берегах щели

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, R \leq x < \lambda \quad \text{вне участков контакта}, \quad (2)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \lambda \leq x \leq l \quad \text{на участках контакта},$$

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = -h(x). \quad (3)$$

На основании формул Колосова – Мусхелишвили [18] и граничных условий на контуре отверстия и берегах щели задача сводится к определению двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\Phi'(t) + \Psi(t) = \begin{cases} 0 & R \leq x < \lambda \\ p(x) & \lambda \leq x \leq l, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\tau = Re^{i\theta}$ ,  $t$  – аффикс точек берегов щели.

**Метод решения задачи.** Решение краевой задачи (4)–(5) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z). \quad (6)$$

Здесь потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  определяют поле напряжений и деформаций в сплошной подкрепленной пластине.

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right],$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] +$$

$$+\frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[ \frac{mL - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right],$$

где  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластины, штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс  $m = n = 0$ .

Функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_R^l \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_R^l \left[ \frac{1}{t-z} - \frac{t}{(t-z)^2} \right] g(t) dt, \quad (7)$$

где  $g(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)]$ ;  $\mu$  — модуль сдвига материала пластины.

Неизвестная функция  $g(x)$  и потенциалы  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  должны быть определены из краевых условий (4)–(5). Для их определения представим граничное условие (4) в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + e^{2i\theta} [\bar{\tau}\Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)], \quad (8)$$

где  $\Phi_*(\tau) = \Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau)$ ,  $\Psi_*(\tau) = \Psi_0(\tau) + \Psi_1(\tau)$ .

Для решения краевой задачи (8) (определения потенциалов  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$ ) воспользуемся решением Н.И. Мусхелишвили [18]. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[ \frac{1-t^2}{t(1-tz)} + \frac{z-t}{(1-tz)^2} \right] g(t) dt - \\ &- \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{(mL - iny_0)(mL + iny_0) - 1}{(mL - iny_0)[z(mL - iny_0) - 1]^2} - \frac{(mL + iny_0)(mL - iny_0) - 1}{(mL + iny_0)[z(mL + iny_0) - 1]^2} \right\} + \\ &+ \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{1}{z[z(mL - iny_0) - 1]} - \frac{1}{z[z(mL + iny_0) - 1]} \right\}; \\ \Psi_2(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2'(z)}{z^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi z} \int_{L_1} \left[ \frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right] g(t) dt + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)z} \sum'_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{1}{z(mL - iny_0) - 1} - \frac{1}{z(mL + iny_0) - 1} + \frac{1}{z(mL - iny_0)} - \frac{1}{z(mL + iny_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В формулах (9) все линейные размеры отнесены к радиусу кругового отверстия  $L_1 = [R, l]$ .

Требую, чтобы функции (6) удовлетворяли краевому условию (5) на берегах щели, получим сингулярное интегральное уравнение относительно  $g(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(t, x) g(t) dt = F(x); \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
K(t, x) &= \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3-x-2t+2t^2x-x^3t^2}{x^2(1-tx)^2} \right]; \\
F(x) &= f_0(x) + f_1(x) + p_*(x); \quad p_*(x) = \begin{cases} 0 & R \leq x \leq \lambda \\ p(x) & \lambda \leq x \leq l \end{cases} \\
f_0(x) &= -\sigma_0 + \frac{\kappa+2}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-m,n} n y_0 \left[ \frac{1}{(x-mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{m,n} n y_0 \left[ \frac{1}{(x+mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{m,n} n y_0 \frac{(x-mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x-mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-m,n} n y_0 \frac{(x+mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x+mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\}, \\
f_1(x) &= -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-m,n} n \left\{ \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \frac{2\kappa}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \\
&\quad + \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right. \\
&\quad \left. -4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[ \frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{m,n} \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) [x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2) [(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\kappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \times \\
&\quad \times \left\langle -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + \right. \\
&\quad \left. +4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \right\rangle - 2 \left[ \frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3\sigma_0}{2x^4}.
\end{aligned}$$

В полученное сингулярное интегральное уравнение (10) входят неизвестные величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$  ( $m=1,2,\dots; n=1,2,\dots$ ) и контактные напряжения  $p(x)$ .

Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы  $P_{mn}$ , действующей на каждую точку крепления со стороны  $m$ -го стрингера, равна

$$P_{mn} = \frac{E_S F}{2ny_0} \Delta v_{mn} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где  $E_S$  — модуль Юнга материала ребра жесткости;  $F$  — площадь поперечного сечения стрингера;  $2ny_0$  — расстояние между рассматриваемыми точками крепления;  $\Delta v_{mn}$  — взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через  $a$  радиус точки крепления (площадки сцепления) и примем [1] естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек  $z = mL + i(ny_0 - a)$  и  $z = mL - i(ny_0 - a)$  равно взаимному смещению точек крепления  $\Delta v_{mn}$ . Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет эффективно отыскать решение поставленной задачи. С помощью комплексных потенциалов (6) и формул Колосова – Мусхелишвили [18] находим взаимное смещение  $\Delta v_{mn}$  указанных точек:

$$\Delta v_{kr} = \Delta v_{kr}^{(0)} + \Delta v_{kr}^{(1)} + \Delta v_{kr}^{(2)};$$

$$\Delta v_{kr}^{(0)} = \frac{\sigma_0}{4\mu} (1 + \kappa) d_1 + \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)\mu h} \sum_{m,n} P_{mn} \left\{ \kappa \ln \frac{d_3 + a^2}{d_3 + b^2} + \frac{2d_0 d_1 [2k(k - m)L^2 + ab]}{(d_3 + b^2)(d_3 + a^2)} \right\};$$

$$\Delta v_{kr}^{(1)} = \frac{1 + \kappa}{2\pi\mu} \int_{L_1} \omega(t) g(t) dt - \frac{d_1}{\pi\mu} \int_{L_1} \frac{d_2 g(t)}{A} dt;$$

$$A = d_2^2 + d_1^2; \quad \omega(t) = \arctg \frac{d_1}{d_2};$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{kr}^{(2)} = & \frac{\sigma_0}{2\mu} \left\{ \frac{(1 + \kappa)d_1}{B_2} + \frac{2d_1 k L}{B_2^2} \left( \frac{kL}{B_2} - kL \right) + \frac{k^2 L^2 - d_1^2}{B_2^2} \left( \frac{d_1}{B_2} - d_1 \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi\mu} \int_{L_1} \left\{ \kappa \left( \varphi_1 - \frac{td_1}{A_1^*} + \frac{d_1}{tA_1^*} \right) + \left( \frac{kL}{B_2} - kL \right) \left[ \frac{(1 - t^2)d_1}{A_1^*} - \frac{2td_4 d_1 d_2 + d_1(d_4 - t^2 d_1)}{A_1^{*2}} \right] + \right. \\ & + d_1 \left( \frac{1}{B_2} - 1 \right) \left[ \frac{(1 - t^2)d_4}{tA_1^*} - \frac{(d_4 - t^2 d_1^2)(d_2 + 2td_4 d_1^2)}{A_1^{*2}} \right] - \\ & - \left[ \frac{2}{t} \omega - \frac{2 - t^2 + t^3 - t}{t} \arctg \frac{d_1}{kL} + \frac{2td_1}{B_2} + \right. \\ & \left. \left. + (4t^2 - 1)\varphi_1 + \frac{2t^3 d_1 (d_4^2 - t^2 d_1^2) - 2(t^2 + 1 - 2t^3)d_4 t d_1}{A_1^{*2}} \right] \right\} g(t) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)\mu h} \sum_{m,n} P_{mn} \Pi, \end{aligned}$$

где  $b = (r - n)y_0 - a$ ;  $d_0 = b + a$ ;  $d_1 = ry_0 - a$ ;  $d_2 = t - kL$ ;  $d_3 = (k - m)^2 L^2$ ;  $d_4 = 1 - tkL$ ;

$$\begin{aligned} \Pi = & \kappa \left\{ \frac{C_4(DkL - D_1 d_1) - C_2^*(D_1 kL - d_1 D)}{(D_1^2 + D^2)B_2} - \frac{C_4(D_3 kL - D_2 d_1) - C_2^*(D_2 kL - d_1 D_3)}{(D_3^2 + D_2^2)B_2} \right\} - \\ & - \kappa(d_5 - 1) \left\{ \frac{D_3 d_6 - 2ny_0 m L D_2}{(D_3^2 + D_2^2)D_4} - \frac{D d_6 - 2ny_0 m L D_1}{(D^2 + D_1^2)D_4} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1 + \kappa}{2} \ln \frac{D^2 + D_1^2}{D_3^2 + D_2^2} + \frac{2ny_0(ny_0 - a)}{d_5 B_2} - \\
& - (d_5 - 1) \left\{ \frac{C_4 [mL(D^2 - D_1^2) + 2ny_0DD_1] - C_2^* [2mLD_1D - ny_0(D^2 - D_1^2)]}{(D^2 + D_1^2)d_5} - \right. \\
& \left. - \frac{C_4 [mL(D_3^2 - D_2^2) - 2ny_0D_2D_3] - C_2^* [ny_0(D_3^2 - D_2^2) + 2mLD_2D_3]}{(D_3^2 + D_2^2)d_5} \right\}; \\
& d_5 = m^2L^2 + n^2y_0^2; d_6 = m^2L^2 - n^2y_0^2; B_2 = k^2L^2 + d_1^2; \\
& C_4 = kL + \frac{kL}{B_2}; C_2^* = d_1 \left( 1 + \frac{d_1}{B_2} \right); D = kmL^2 + ny_0d_1 - 1; \\
& D_1 = d_1mL - ny_0kL; D_2 = d_1mL + ny_0kL; D_3 = kmL^2 - ny_0d_1 - 1; \\
& \varphi_1 = -\arctg \frac{td_1}{d_4}; D_4 = d_6^2 + 4y_0^2L^2m^2; A_1^* = d_4^2 + d_1^2t^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, искомые величины сосредоточенных сил определяются из решения бесконечной системы уравнений (11).

Так как напряжения в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров, ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (10) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Для построения решения сингулярного интегрального уравнения используем метод прямого решения сингулярных уравнений [19], [20]. Переходя к безразмерным переменным, решение представим в виде

$$g(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} g_0(\eta),$$

где  $g_0(\eta)$  – ограниченная функция.

Использование квадратурных формул [4] позволяет интегральное уравнение свести к системе  $M + 1$  алгебраических уравнений с  $M$  неизвестными  $g_0(\tau_1), \dots, g_0(\tau_m)$ :

$$\sum_{m=1}^M \frac{g^0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[ \frac{1}{\tau_m - \eta_r} + K(\tau_m, \eta_r) \right] = \pi F_*(\eta_r) \quad r = 1, 2, \dots, M+1, \quad (12)$$

$$F_*(\eta_r) = \begin{cases} f(\eta_r) & R \leq x < \lambda \\ f(\eta_r) + p(\eta_r) & \lambda \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Здесь  $\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1}$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ ;  $\eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)}$ ;  $r = 1, 2, \dots, M+1$ .

Так как решение сингулярного интегрального уравнения (10) ищется в классе всюду ограниченных функций, то оно существует при выполнении дополнительного условия (условия разрешимости краевой задачи) [18]. Выполнение дополнительного условия обеспечивает полученная алгебраическая система из  $M+1$  уравнений (12), служащая для определения неизвестных  $g_0(\tau_1), g_0(\tau_2), \dots, g_0(\tau_m)$  и  $\lambda$ .

В правую часть системы (12) входят неизвестные значения контактных напряжений  $p(\eta_r)$  в узловых точках, принадлежащих концевой зоне щели. Условием, служащим

для определения неизвестного контактного напряжения, возникающего на берегах щели в концевой зоне, является граничное условие (3). Запишем его для производной раскрытия смещений берегов щели:

$$g(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x, 0) - v^-(x, 0)] = -\frac{2\mu}{1+\kappa} h'(x), \quad (13)$$

где  $t$  — аффиксы точек концевой зоны трещины.

Требую выполнения условия (13) в узловых точках, содержащихся в концевой зоне  $(\lambda, l)$ , получим недостающие уравнения для определения приближенных значений контактного напряжения  $p(\tau_{m_1})$  в узловых точках:

$$g_0(\tau_{m_1}) = -\frac{2\mu}{1+\kappa} h'(\tau_{m_1}) \quad (m_1 = 1, 2, \dots, M_1), \quad (14)$$

где принято, что  $M_1$  — число узловых точек в отрезке  $(\lambda, l)$ .

Алгебраические системы (11), (12), (14) связаны между собой и должны решаться совместно. Решение полученной системы (11), (12), (14) позволяет определить значения искомой функции  $g(x)$  в узловых точках, значения контактных напряжений  $p(x)$ , величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$ , а также размер концевой зоны щели  $\lambda$ .

Полученная алгебраическая система (11), (12), (14) из-за неизвестного размера концевой зоны щели  $\lambda$  оказалась нелинейной и решалась методом последовательных приближений. Решаем систему (11), (12), (14) при некотором определенном значении параметра  $\lambda$  относительно  $N_1 \times N_2 + M + M_1$  неизвестных  $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, p_1, p_2, \dots, p_{M_1}$ . Эти неизвестные входят в систему (11), (12), (14) линейным образом. Выбранные значения  $\lambda$  и найденные в результате решения линейной алгебраической системы величины  $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, p_1, p_2, \dots, p_{M_1}$  подставляются в неиспользованное уравнение системы (12). Взятые значения  $\lambda$  и соответствующие ему значения  $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, p_1, p_2, \dots, p_{M_1}$  не будут удовлетворять неиспользованному уравнению системы (12). Поэтому, подбирая значения параметра  $\lambda$ , будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока последнее уравнение системы (12) не будет удовлетворяться с заданной точностью.

Для численной реализации метода последовательных приближений были проведены расчеты. В каждом приближении система уравнений (11), (12), (14) решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка  $M$  (до  $M=40$ ). Определялись значения контактных напряжений и параметра  $\lambda$ , характеризующего зону контакта берегов щели в зависимости от геометрических и физических параметров пластины, усиленной стрингерами при  $\nu = 0,3$ ;  $a/L = 0,01$ ;  $y_0/L = 0,25$ ;  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа (сплав В95);  $E_S = 11,5 \cdot 10^4$  МПа (композит Al-сталь);  $F_1/y_0 h = 1$ . Результаты расчетов представлены на рис. 2.

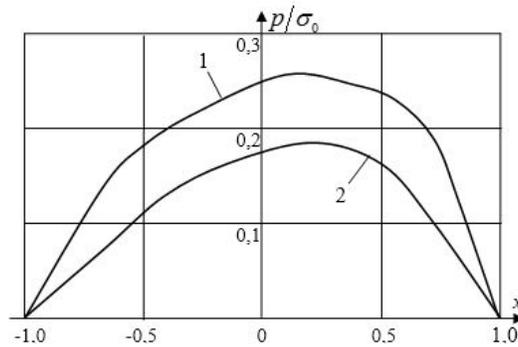


Рис. 2. Зависимость распределения контактных напряжений вдоль контактной зоны щели

Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14. При расчетах были использованы безразмерные координаты  $x' = \frac{2x-(l+\lambda)}{l-\lambda}$ . Кривая 1 соответствует безразмерной длине щели  $l_* = l/L = 0,75$ ; кривая 2 –  $l_* = 0,50$ .

**Закключение.** Анализ модели частичного закрытия щели переменной ширины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров, сводится к параметрическому исследованию бесконечной алгебраической системы (11), (12), (14) при различных геометрических и физических параметрах среды, усиленной стрингерами. Непосредственно из решения этой системы определяется контактные напряжения в концевой зоне, а также размеры зон контакта берегов щели.

Следует отметить, что полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определять характеристики подкрепления среды и напряженное состояние пластины, при которых достигается заданная область контакта берегов щели переменной ширины.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мирсалимов В. М., Алиева Г. М. Контактная задача для пластины с трещиной, усиленной ребрами жесткости // Изв. АН АзССР, серия физ.-техн. и мат. наук. 1985. № 3. С. 53-57.
- [2] Мирсалимов В. М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещины // ФХММ. 1986. № 1. С. 84-88.
- [3] Брок Д. Основы механики разрушения. М.: Высшая школа, 1980. 368 с.
- [4] Партон В. З. Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.
- [5] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [6] Максименко В. Н. Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия // Прикладная механика и техническая физика. 1988. № 2. С. 133-140.
- [7] Savruk M. P., Kravets V. S. Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers // Materials Science. 1994. 30, Issue 1. P. 95-104.
- [8] Savruk M. P., Kravets V. S. Two-dimensional problems of the theory of elasticity for reinforced cracked plates // Materials Science. 1995. 31, Issue 3. P. 350-362.
- [9] Kravets V. S. Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate // Materials Science. 1999. 35, Issue 3. P. 339-348.

- [10] Мир-Салим-заде М. В. Разрушение изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров // *Механика композитных материалов*. 2007. 43, № 1. С.59-72.
- [11] Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // *Математическое моделирование*. 2007. 19, № 3. С. 105–115.
- [12] Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // *Прикл. мех. и техн. физика*. 2010. 51, № 2. С. 148–159.
- [13] Мир-Салим-заде М. В. Разрушение перфорированной стрингерной пластины // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 4. С. 59–62.
- [14] Мирсалимов В. М. Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2009. № 2. С. 78–92.
- [15] Гасанов Ш. Г. Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2012. № 2. С. 58–64.
- [16] Мирсалимов В. М. Частичное закрытие трещиновидной полости в изотропной среде // *Деформация и разрушение материалов*. 2013. № 1. С. 16–20.
- [17] Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // *Прикл. мех. и техн. физика*. 2013. № 6. С. 181–190.
- [18] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [19] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
- [20] Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.

M. V. Mir-Salim-zada

## CLOSING OF A SLIT STARTED FROM CONTOUR OF CIRCULAR HOLE IN STRINGER PLATE

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

**Abstract.** A plate with circular hole from that is started rectilinear slit of variable width comparable to elastic deformation is considered. The plate is elastic and supported by stringers. The case of the slit faces contact on a certain part is investigated. Determination of parameters characterizing the closure of variable width slit is reduced to solution of a singular integral equation. The singular integral equation using the algebraization procedure is reduced to finite nonlinear algebraic equations system, solving by method of successive approximations. From the solution of the algebraic system the contact stresses and the size of the slit contact zone are found.

**Keywords:** elastic plate, stringers, periodic system of slots, contact of slots faces, contact stresses.

### REFERENCES

- [1] Mirsalimov V. M., Alieva G. M. Contact problem for ribs reinforced plate with a crack // Transactions of the Academy of Sciences of Azerbaijan SSR, Series of phys., techn. and math. sciences. 1985. № 3. P. 53–57.
- [2] Mirsalimov V. M. Some problems of structural arrest of cracks // Materials Science. 1986. Vol. 22, Issue 1. P. 81–85.
- [3] Broek D. Elementary engineering fracture mechanics. Leyden: Noordhoff international publishing. 1982.
- [4] Parton V. Z., Morozov E. M. Elastic-plastic fracture mechanics. Moscow: Nauka, 1985. (in Russian)
- [5] Cherepanov G. P. Mechanics of brittle fracture. New York: Mc Graw-Hill, 1979.
- [6] Maksimenko V. N. Influence of riveted stiffeners on crack development around a hole // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 1988. Vol. 29, Issue 2. P. 287–293.
- [7] Savruk M. P., Kravets V. S. Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers // Materials Science. 1994. Vol. 30, Issue 1. P. 95–104.
- [8] Savruk M. P., Kravets V. S. Two-dimensional problems of the theory of elasticity for reinforced cracked plates // Materials Science. 1995. Vol. 31, Issue 3. P. 350–362.
- [9] Kravets V. S. Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate // Materials Science. 1999. Vol. 35, Issue 3. P. 339–348.
- [10] Mir-Salim-zada M. V. Fracture of an Isotropic Medium Strengthened with a Regular System of Stringers // Mechanics of composite materials. 2007. Vol. 43, Issue 1. P. 41–50.
- [11] Mir-Salim-zada M. V. Modeling of partial crack closure in isotropic medium reinforced by regular stringers system // Matematicheskoe Modelirovanie. 2007. Vol. 19, № 3. P. 105–115.
- [12] Mir-Salim-zada M. V. Modeling of partial closure of cracks in a perforated isotropic medium reinforced by a regular system of stringers // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2010. Vol. 51, Issue 2. C. 269–279.

---

*Mir-Salim-zada Minavar*

e-mail: minavar.mirsalimzade@imm.az, Candidate Sci. Phys. & Math., Ass. Professor, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

- [13] Mir-Salim-zada M. V. Fracture of a perforated stringer plate // Mechanics of machines, mechanisms and materials. 2011. № 4. P. 59–62.
- [14] Mirsalimov V. M. Simulation of bridged crack closure in contact pair bushing // Mechanics of Solids. 2009. Vol. 44, Issue 2. C. 232–243.
- [15] Hasanov Sh. H. Cohesive crack with partially contacting faces in section of the road covering // Mechanics of machines, mechanisms and materials, 2012. № 2. P. 58–64.
- [16] Mirsalimov V. M. Partial closing of cracklike cavity in isotropic medium // Deformatsiya i Razrushenie materialov. 2013. № 1. P. 16–20.
- [17] Mirsalimov V. M., Rustamov B. E. Simulation of partial closure of a crack-like cavity with cohesion between the faces in an isotropic medium // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. Volume 54, Issue 6. P. 1021–1029.
- [18] Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Amsterdam: Kluwer. 1977.
- [19] Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshyn A. P. The stress distribution around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka, 1976.
- [20] Mirsalimov V. M. Non-one-dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 1987.

Р. А. Исмаилова

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗОН ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В СТЕРЖНЕВОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

*Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан*

**Аннотация.** Рассматривается плоская задача механики разрушения о взаимодействии произвольного числа зон предразрушения в стержневом тепловыделяющем элементе. В процессе работы тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ) возможны различные повреждения, в частности образование трещины. Рассматривается задача для ТВЭЛ с защитным покрытием для случая, когда по мере повышения интенсивности внутренних источников тепла в элементе образуются области повышенных напряжений. Области повышенных напряжений будут способствовать возникновению зон ослабленных межчастичных связей материала (предразрушения). Взаимодействие берегов зон предразрушения моделируется путем введения между берегами связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Задача о взаимодействии зон предразрушения сводится к решению системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Из решения этой системы уравнений находятся нормальные и касательные усилия в зонах зарождения трещин. Условие трещинообразования формируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала.

**Ключевые слова:** стержневой тепловыделяющий элемент, защитная оболочка, зоны предразрушения со связями между берегами, силы сцепления.

УДК: 539.375

**Введение.** Тепловыделяющие сборки часто изготавливают [1] в виде пучка цилиндрических стержневых тепловыделяющих элементов (ТВЭЛОВ), в зазорах между которыми параллельно оси элемента течет теплоноситель. В процессе работы ядерного реактора возможны различные повреждения ТВЭЛОВ, в частности трещинообразование в топливном стержне. В результате повреждений температура и напряжения в ТВЭЛЕ могут превысить допустимые для топлива значения, что может привести к аварийной ситуации. Задачи прочности ТВЭЛОВ актуальны в настоящее время и, несомненно, интерес к этим задачам будет повышаться в связи с существующей тенденцией развития машиностроения и энергетики. Задача о трещинообразовании в конструкциях и изделиях является важной проблемой теории прочности [2]–[8]. В связи с этим важное значение приобретает моделирование зарождения трещин в ТВЭЛАХ.

---

© Исмаилова Р. А., 2016  
*Исмаилова Рена Ашраф гызы*  
e-mail: soromat\_v@mail.ru, аспирант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

Поступила 08.01.2016

**Постановка задачи.** Рассмотрим систему «твэл - защитная оболочка» при установившемся режиме для случая, когда по мере повышения интенсивности внутренних источников тепла  $q$  в элементе образуются зоны повышенных напряжений, способствующих появлению в материале твэла зон предразрушения. Зоны предразрушения моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала [4]. Считается, что выполняются условия плоской деформации.

Пусть рассматриваемый твэл заполняет в плоскости  $z = x + iy$  круг радиусом  $R_1$  с центром в начале координат, ограниченный извне окружностью  $L_1$ , а поперечное сечение защитного покрытия заполняет в этой же плоскости кольцо, ограниченное извне окружностью  $L_2$  радиусом  $R_2$ , центр которого совпадает с центром окружности  $L_1$ , а изнутри окружностью  $L_1$ . Пусть в материале твэла имеется произвольное число  $N$  зон предразрушения (рис. 1).

В центрах зон предразрушения разместим начала локальных систем координат  $x_k O_k y_k$ , оси  $x_k$  которых совпадают с линиями зон предразрушения и образуют углы  $\alpha_k$  с осью  $x$  (рис. 1). Область сечения твэла, ограниченную окружностью  $L_1$ , обозначим через  $S_1$ , а область сечения защитной оболочки через  $S_0$ .

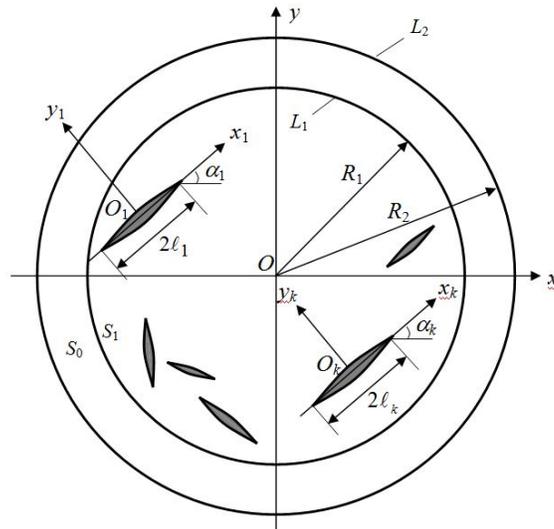


Рис. 1

Взаимодействие берегов зон предразрушения моделируем [4] путем введения между берегами связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. При действии нагрузок в связях, соединяющих берега зон предразрушения, будут возникать нормальные  $q_{y_k}(x_k)$  и касательные  $q_{x_k y_k}(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) усилия. Следовательно, к берегам зон предразрушения будут приложены нормальные и касательные напряжения численно равные  $q_{y_k}(x_k)$  и  $q_{x_k y_k}(x_k)$  соответственно. Величины этих напряжений и размеры зон предразрушения заранее неизвестны и подлежат определению.

Материалы твэла и защитной оболочки будем считать изотропными, однородными с неодинаковыми механическими свойствами.

Экспериментальные исследования [9]–[11] возникновения областей, в которых материал деформируется за пределом упругости, показывают, что в начальной стадии

нагрузки зоны предразрушения представляют собой узкий вытянутый слой, а затем с ростом нагрузки, внезапно появляется вторичная система областей, содержащих материал с частично нарушенными связями.

Рассмотрим задачу механики разрушения о трещинообразовании в материале твэла, подкрепленного защитной оболочкой, при условии что интенсивность тепловыделения  $q$  в твэле распределена по объему равномерно.

Краевая задача для функции напряжений  $U$  имеет следующий вид:

$$\Delta\Delta U = \frac{\alpha E q}{\lambda_c} \quad \text{при} \quad |z| \leq R_1, \quad (1)$$

$$\Delta\Delta U_0 = 0 \quad \text{при} \quad R_1 \leq |z| \leq R_2, \quad (2)$$

$$\text{при} \quad |z| = R_1 \quad \sigma_r - i\tau_{r\theta} = \sigma_r^0 - i\tau_{r\theta}^0, \quad (3)$$

$$v_r - iv_\theta = v_r^0 - iv_\theta^0,$$

$$\text{при} \quad |z| = R_2 \quad \sigma_r - i\tau_{r\theta} = f_0(t), \quad (4)$$

на берегах зон предразрушения

$$\sigma_{y_k} - i\tau_{x_k y_k} = q_{y_k} - iq_{x_k y_k}. \quad (5)$$

Здесь функция  $f_0(\theta)$  описывает действие теплоносителя на внешнюю поверхность защитной оболочки;  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $E$  — модуль упругости твэла;  $\lambda_c$  — коэффициент теплопроводности.

Основные соотношения задачи (1)–(5) необходимо дополнить уравнениями, связывающими раскрытие берегов зон предразрушения и усилий в связях. Эти уравнения представим в виде [4], [5]:

$$(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) = \Pi(x_k, \sigma_k) (q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k)), \quad (6)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N) \quad \sigma = \sqrt{(q_{y_k})^2 + (q_{x_k y_k})^2}.$$

Функция  $\Pi(x_k, \sigma_k)$  представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения;  $\sigma_k$  — модули вектора усилий в соответствующих связях,  $(v_k^+ - v_k^-)$  и  $(u_k^+ - u_k^-)$  — нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов  $k$ -ой зоны предразрушения.

Для определения значений интенсивности внутренних источников тепла, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи необходимо дополнить критерием появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого критерия принимаем условие критического раскрытия берегов зоны предразрушения

$$|(u_k^+ - u_k^-) - i(v_k^+ - v_k^-)| = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (7)$$

где  $\delta_c$  — характеристика сопротивления материала твэла трещинообразованию. Величина  $\delta_c$  определяется опытным путем [9].

Этот критерий позволяет определить параметры двухслойной цилиндрической структуры, при которых в твэле появляется трещина.

Таким образом, на основании изложенного математического описания к берегам зон предразрушения будут приложены нормальные и касательные усилия  $q_{y_k}$  и  $q_{x_k y_k}$  соответственно.

**Метод решения.** Используя комплексные потенциалы Колосова – Мухелишвили [12], рассматриваемую задачу сводим к отысканию двух пар комплексных функций  $\Phi_j(z)$  и  $\Psi_j(z)$  ( $j = 0, 1$ ) комплексного переменного  $z = x + iy$ , аналитических в областях  $S_j$  ( $j = 0, 1$ ) и удовлетворяющих граничным условиям:

$$\Phi_0(\tau_2) + \overline{\Phi_0(\tau_2)} - \frac{\tau_2^2}{R_2^2} \left[ \frac{R_2^2}{\tau_2} \Phi_0'(\tau_2) + \Psi_0(\tau_2) \right] = f_0(\theta) \quad \text{на } L_2, \quad (8)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \overline{\Phi_0(\tau_1)} - \frac{\tau_1^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{\tau_1} \Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1) \right] = \quad \text{на } L_1, \quad (9)$$

$$= \Phi_1(\tau_1) + \overline{\Phi_1(\tau_1)} - \frac{\tau_1^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{\tau_1} \Phi_1'(\tau_1) + \Psi_1(\tau_1) \right] + \frac{q_* \tau_1 \bar{\tau}_1}{32};$$

$$\begin{aligned} \kappa_0 \overline{\Phi_0(\tau_1)} - \Phi_0(\tau_1) + \frac{\tau_1^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{\tau_1} \Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1) \right] &= \quad \text{на } L_1, \quad (10) \\ &= \frac{\mu_0}{\mu_1} \left\{ \kappa_1 \overline{\Phi_1(\tau_1)} - \Phi_1(\tau_1) + \frac{\tau_1^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{\tau_1} \Phi_1'(\tau_1) + \Psi_1(\tau_1) \right] - \frac{q_* \tau_1 \bar{\tau}_1}{32} \right\}, \end{aligned}$$

$$\Phi_1(t_n) + \overline{\Phi_1(t_n)} + t_n \overline{\Phi_1'(t_n)} + \overline{\Psi_1(t_n)} = q_{y_n} - iq_{x_n y_n} - \frac{3q_* t_n^2}{32} \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (11)$$

где  $q_* = \alpha E q / \lambda_c$ .

Под действием нагружения за счет разности упругих свойств материала твэла и защитной оболочки на элемент со стороны защитной оболочки действует некоторая самоуравновешенная система сил. Считая пока эту нагрузку на элемент формально заданной, найдем комплексные потенциалы  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$ . Обозначим через  $N_1 - iT_1$  левую часть граничного условия (9) и разложим ее на контуре  $L_1$  в ряд Фурье:

$$\Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} - \frac{t^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{t} \Phi_0'(t) + \Psi_0(t) \right] = N_1 - iT_1, \quad (12)$$

$$N_1 - iT_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}.$$

Согласно граничным условиям (9), (10) и (12) для определения потенциалов  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  имеем на контуре  $L_1$  краевые условия

$$\Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - \frac{t^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{t} \Phi_1'(t) + \Psi_1(t) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ki\theta} \quad \text{на } L_1, \quad (13)$$

на отрезках  $y_k = 0, |x_k| \leq \ell_k$

$$\Phi_1(t_n) + \overline{\Phi_1(t_n)} + t_n \overline{\Phi_1'(t_n)} + \overline{\Psi_1(t_n)} = q_{y_n} - iq_{x_n y_n} - \frac{3q_* t_n^2}{32} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

Решение краевой задачи (13), (14) ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \Phi_{11}(z) + \Phi_{12}(z); \Psi_1(z) = \Psi_{11}(z) + \Psi_{12}(z); \quad (15)$$

$$\Phi_{11}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{g_k(t) dt}{t - z_k}; \quad (16)$$

$$\Psi_{11}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[ \frac{g_k(t)}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k(t) \right] dt;$$

$$T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0; z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0; z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0)$$

$$\frac{i(\kappa_1 + 1)}{2\mu_1} g_k(x) = \frac{\partial}{\partial x} [u_k^+ - u_k^- + i(v_k^+ - v_k^-)] \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (17)$$

Потенциалы  $\Phi_{12}(z)$  и  $\Psi_{12}(z)$  регулярны в сплошном круге радиуса  $R_1$ , они должны быть определены из решения для сплошного круга согласно краевому условию (13), а для определения неизвестных функций  $g_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) служат краевые условия (14) на отрезках  $y_k = 0$ ,  $|x_k| \leq \ell_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

В дальнейшем все линейные размеры отнесем к радиусу  $R_1$ .

Удовлетворяя функциям (15) – (16) граничным условиям на берегах зон предразрушения, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $g_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\ell_n}^{\ell_n} \frac{g_n(t) dt}{t - x_n} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[ g_k(t) K_{nk}(t, x_n) + \overline{g_k(t)} L_{nk}(t, x_n) \right] dt + \\ & + \Phi_{12}(x_n) + \overline{\Phi_{12}(x_n)} + x_n \overline{\Phi'_{12}(x_n)} + \overline{\Psi_{12}(x_n)} = q_{y_n} - iq_{x_n y_n} - \frac{3q_* x_n^2}{32}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$|x_n| \leq \ell_n \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{nk}(t, x) &= \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} \right]; \\ L_{nk}(t, x) &= \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{1}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} + \frac{T_k - X_n}{(\bar{T}_k - \bar{X}_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right]; \\ X_n &= x e^{i\alpha_n} + z_n^0. \end{aligned}$$

Краевое условие (13) позволяет получить вспомогательную задачу для сплошного круга

$$\Phi_{12}(\tau) + \overline{\Phi_{12}(\tau)} - e^{-2i\theta} \left[ \tau \overline{\Phi'_{12}(\tau)} + \overline{\Psi_{12}(\tau)} \right] = f(\tau), \quad (19)$$

$$f(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{A}_k e^{-ki\theta} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left\{ \left[ \frac{1}{t - z_k} - \frac{e^{2i\alpha_k}}{\tau^2 (t - \bar{z}_k)} \right] g_k(t) + \right. \quad (20)$$

$$+ \left[ \frac{1}{t - \bar{z}_k} - \frac{(\tau - T_k) e^{i\alpha_k}}{\tau^2 (t - \bar{z}_k)^2} \right] \overline{g'_k(t)} \Big\} dt,$$

$$z_k = (\tau - z_k^0) e^{-i\alpha_k}, \tau = e^{i\theta}.$$

Решение вспомогательной задачи (19) дается формулами Н. И. Мусхелишвили:

$$\Phi_{12}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\tau) \left( \frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau; \tag{21}$$

$$\Psi_{12}(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_{12}(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}_{12} \left( \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi'_{12}(z).$$

После подстановки функции (20) в формулу (21) и перемены порядка интегрирования, а также использования теории вычетов, окончательно получим:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left\{ \left( \frac{1}{z\bar{T}_k - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_k e^{i\alpha_k} g_k(t) + \right. \tag{22}$$

$$\left. + \left[ \frac{T_k}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_k - 2z + T_k}{(z\bar{T}_k - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_k} \overline{g_1(t)} \right\} dt + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k;$$

$$\Psi_{12}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[ \frac{e^{i\alpha_k} \bar{T}_k^3}{(z\bar{T}_k - 1)^2} g_k(t) + \right.$$

$$\left. + \left( z^2 \bar{T}_k^2 + 4 - 3z\bar{T}_k + zT_k \bar{T}_k^2 - 3T_k \bar{T}_k \right) \frac{\bar{T}_k e^{-i\alpha_k}}{(z\bar{T}_k - 1)^3} \overline{g_k(t)} \right] dt + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k;$$

$$a_0 + \bar{a}_0 = A_0; \quad A_0 = \bar{A}_0; \tag{23}$$

$$a_k = -\bar{A}_k (k = 1, 2, \dots); \quad b_k = -(k+1) \bar{A}_{-k-2} - A_{k+2} (k = 0, 1, \dots).$$

Подставляя найденные функции  $\Phi_{12}(z)$  и  $\Psi_{12}(z)$  в уравнения (18), окончательно получим систему  $N$  сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $g_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell_n}^{\ell_n} \frac{g_n(t) dt}{t - x_n} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \int_{-\ell_n}^{\ell_n} \left[ K_{nk}^*(t, x_n) g_k(t) + L_{nk}^*(t, x_n) \overline{g_k(t)} \right] dt = \tag{24}$$

$$= q_{y_n} - i q_{x_n y_n} - \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (2k+1) A_{-k} + \bar{A}_{-k} - (k+1) A_{-k-2} - \bar{A}_{k+2} \right] x_n^k - \frac{3q_* t^2}{32},$$

$$|x_n| \leq \ell_n (n = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь

$$K_{nk}^*(t, x) = K_{nk}(t, x) - \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{X_n \bar{T}_k^2}{1 - X_n \bar{T}_k} + \frac{\bar{X}_n^2 T_k - 2\bar{X}_n + \bar{T}_k}{(1 - T_k \bar{X}_n)^2} + \right.$$

$$+e^{-2i\alpha_n} \frac{2X_n (T_k \bar{T}_k - 1) + 4T_k + T_k^2 (\bar{X}_n + \bar{T}_k) (\bar{X}_n T_k - 3)}{(1 - T_k \bar{X}_n)^3} \Big];$$

$$L_{nk}^*(t, x_n) = L_{nk}(t, x) - \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{T_k^2 \bar{X}_n}{1 - T_k \bar{X}_n} + \frac{X_n^2 \bar{T}_k - 2X_n + T_k}{(1 - X_n \bar{T}_k)^2} + \frac{T_k^2 (X_n - T_k) e^{-2i\alpha_n}}{(1 - T_k \bar{X}_n)^2} \right].$$

К системе сингулярных интегральных уравнений (24) следует добавить дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи

$$\int_{-\ell_n}^{\ell_n} g_n(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (25)$$

Зная комплексные потенциалы  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$ , описывающие напряженно-деформированное состояние твэла, найдем следующую величину

$$-\kappa_1 \overline{\Phi_1(t)} + \Phi_1(t) - \frac{t^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{t} \Phi_1'(t) + \Psi_1(t) \right] = \quad (26)$$

$$= \frac{A_0}{2} (1 - \kappa_1) - (1 + \kappa_1) \bar{B}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{ik\theta} - \kappa_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} e^{-ik\theta} - (1 + \kappa_1) \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k e^{-ik\theta} + \kappa_1 \frac{q_* R_1^2}{32}.$$

Здесь

$$B_n = a_n^* + d_n + c_n; a_n^* = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{e^{i\alpha_k} g_k(t)}{T_k^{n+1}} dt;$$

$$d_0 = -\frac{3}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} e^{i\alpha_k} \bar{T}_k g_k(t) dt; d_n = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} e^{i\alpha_k} \bar{T}_{k+1}^{n+1} g_k(t) dt;$$

$$c_n = c_{n-2}^* - 2c_{n-2}'' + c_n^* \quad (n = 2, \dots); c_1 = 2c_0'' + c_1^*; c_0 = c_0^* + c_*;$$

$$c_* = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{T_k}{2} e^{-i\alpha_k} \overline{g_k(t)} dt;$$

$$c_n^* = \frac{(n+1)}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} e^{-i\alpha_k} \overline{g_k(t)} \bar{T}_k^{n+1} dt \quad (n = 0, 1, \dots);$$

$$c_n'' = \frac{(n+1)}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} e^{-i\alpha_k} \overline{\bar{T}_k^n g_k(t)} dt \quad (n = 0, 1, \dots);$$

$$c_n^* = \frac{(n+1)}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\ell_k}^{\ell_k} e^{-i\alpha_k} T_k \overline{\bar{T}_k^n g_k(t)} dt \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Коэффициенты  $A_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) при построении решения для твэла мы считали заданными, но они пока неизвестны. Их требуется определить в процессе решения краевой задачи. Для их нахождения привлечем решение задачи теории упругости для защитной оболочки (подкрепляющего цилиндра).

Для определения потенциалов  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$  и коэффициентов  $A_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) на основании соотношений (8), (12) и (10) имеем следующие граничные условия

$$\Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} - \frac{t^2}{R_2^2} \left[ \frac{R_2^2}{t} \Phi_0'(t) + \Psi_0(t) \right] = \quad (27)$$

$$= N_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ N_k \left( \frac{t}{R_2} \right)^k + N_{-k} \left( \frac{R_2}{t} \right)^k \right] \quad \text{на } L_2,$$

$$\Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} - \frac{t^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{t} \Phi_0'(t) + \Psi_0(t) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta} \quad \text{на } L_1, \quad (28)$$

$$-\kappa_0 \overline{\Phi_0(t)} + \Phi_0(t) - \frac{t^2}{R_1^2} \left[ \frac{R_1^2}{t} \Phi_0'(t) + \Psi_0(t) \right] = \quad (29)$$

$$= \frac{\mu_0}{\mu_1} \left\{ \frac{A_0}{2} (1 - \kappa_1) - (1 + \kappa_1) \bar{B}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{ik\theta} + \kappa_1 \frac{q_* R_1^2}{32} - \right.$$

$$\left. - \kappa_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} e^{-ik\theta} - (1 + \kappa_1) \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k e^{-ik\theta} \right\} \quad \text{на } L_1.$$

Функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  регулярны во внутри области  $S_0$  и, следовательно, могут быть разложены в ряд Лорана. Таким образом, внутри области  $S_0$  будем иметь

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k z^k; \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F'_k z^k. \quad (30)$$

Удовлетворяя функциями (30) краевым условиям (27)–(29) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$  в левой и правой частях краевых условий (27)–(29), получаем после некоторых преобразований

$$2F_0 - F'_{-2} = A_0; \quad 2F_0 - \frac{F'_{-2}}{\lambda^2} = N_0; \quad F_0 = \bar{F}_0; \quad \lambda = \frac{R_2}{R_1};$$

$$(1 - k) F_k + \bar{F}_{-k} - F'_{k-2} = A_k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(1 - k) F_k \lambda^k + \bar{F}_{-k} \lambda^{-k} - F'_{k-2} \lambda^{k-2} = N_k; \quad (31)$$

$$F_0 (1 - \kappa_0) - F'_{-2} = \frac{\mu_0}{\mu_1} \left\{ \frac{A_0}{2} (1 - \kappa_1) - (1 + \kappa_1) \bar{B}_0 + \frac{q_*}{64} (1 + \kappa_1) \right\};$$

$$(1 - k) F_k - \kappa_0 \bar{F}_{-k} - F'_{k-2} = D_k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (32)$$

$$D_k = \frac{\mu_0}{\mu_1} A_k \quad (k = 1, 2, \dots); \quad D_{-k} = -\frac{\mu_0}{\mu_1} \{ \kappa_1 A_{-k} + (1 + \kappa_1) \bar{B}_k \}.$$

Из уравнений (31) и (32) найдем

$$F_0 = \frac{N_0 \lambda^2 - A_0}{2(\lambda^2 - 1)}; \quad F'_{-2} = \frac{\lambda^2 (N_0 - A_0)}{\lambda^2 - 1};$$

$$F_k = \frac{(1+k)(\lambda^2-1)(N_k\lambda^{-k+2}-A_k) - (\bar{N}_{-k}\lambda^{k+2}-\bar{A}_{-k})(\lambda^{-k+2}-1)}{(1-k^2)(\lambda^2-1)^2 - (\lambda^{2k+2}-1)(\lambda^{-2k+2}-1)} \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots);$$

$$F_{-1} = \frac{\bar{A}_1}{1+\kappa_0}; F'_{-1} = -\frac{\kappa_0 A_1}{1+\kappa_0};$$

$$F_1 = \frac{(\bar{N}_{-1}\lambda^3 - \bar{A}_{-1})}{\lambda^4 - 1} - \frac{2A_1}{(1+\kappa_0)(\lambda^2+1)}; F'_{k-2} = -A_k + (1-k)F_k - \bar{F}_{-k};$$

$$A_0 = \frac{M_1}{M_0}; M_1 = \frac{\mu_0}{\mu_1}(1+\kappa_1)\left(\frac{q_*}{64} - \bar{B}_0\right) + (1+\kappa_0)\frac{N_0\lambda^2}{2(\lambda^2-1)};$$

$$M_2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} - \frac{(1-\kappa_0)}{2\lambda^2-1} - \frac{\mu_0}{\mu_1}(1-\kappa_1);$$

$$A_k = -\frac{1+\kappa_0}{\left(\frac{\mu_0}{\mu_1}-1\right)}\bar{F}_{-k} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$A_{-k}\left(1 + \frac{\mu_0}{\mu_1}\kappa_1\right) - (1+\kappa_0)\bar{F}_k = -\frac{\mu_0}{\mu_1}(1+\kappa_1)\bar{B}_k.$$

Последние соотношения позволяют выразить коэффициенты  $A_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) через величины  $B_k$ , которые зависят от неизвестных функций  $g_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). С другой стороны, в систему сингулярных интегральных уравнений, в ее правую часть, входят неизвестные коэффициенты  $A_k$ .

Если представить неизвестные функции  $g_k(x_k)$  в виде

$$g_k(x_k) = v_k(x_k) - iu_k(x_k),$$

то из системы  $N$  комплексных сингулярных интегральных уравнений после отделения действительных и мнимых частей получим для нахождения  $v_k(x_k)$  и  $u_k(x_k)$  систему  $2N$  действительных сингулярных интегральных уравнений. Будем использовать процедуру алгебраизации системы сингулярных интегральных уравнений [10], [13], [14].

Для правой части соотношения (17) имеем

$$\begin{aligned} & (v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0)) - i(u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0)) = \\ & = -\frac{1+\kappa_1}{2\mu_1} \int_{-\ell_k}^{x_k} g_k(x_k) dx_k \quad (k = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, бесконечная система алгебраических уравнений и система сингулярных интегральных уравнений должны решаться совместно.

Перейдем к алгебраизации упомянутых систем уравнений.

**Алгебраизация основных разрешающих уравнений.** С помощью замены переменного приведем все интервалы интегрирования к одному отрезку  $[-1, 1]$ . Для этого положим

$$t = \ell_n \tau; x = \ell_n \eta \quad (|t| < \ell_n, |x| < \ell_n).$$

Тогда система сингулярных интегральных уравнений (24) и дополнительные условия (25) запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_n(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \sum_{k \neq n}^N \int_{-1}^1 [g_k(\tau) K_{nk}^*(\ell_k \tau, \ell_k \eta) + \\
& + \overline{g_k(\tau)} L_{nk}^*(\ell_k \tau, \ell_k \eta)] d\tau = q_{y_n}(\eta) - iq_{x_n y_n}(\eta) - \frac{3q_* \eta^2}{32} - \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1) A_{-k} + \bar{A}_{-k} + (k+1) A_{-k-2} - \bar{A}_{k+2}] \ell_n^k \eta^k |\eta| < 1, \\
& \int_{-1}^1 g_n(\tau) d\tau = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N). \tag{34}
\end{aligned}$$

В уравнениях (34), (35) для неизвестных функций сохранены для удобства прежние обозначения.

Решение системы (34) при условиях (35) представим в виде

$$g_n(\tau) = \frac{\varphi_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \tag{35}$$

Здесь функции  $\varphi_n(\tau)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) непрерывны по Гельдеру на отрезке  $[-1, 1]$ , причем функции  $\varphi_n(\tau)$  заменяются интерполяционным многочленом, построенным по чебышевским узлам.

С помощью квадратурных формул типа Гаусса [10], [13], [14] система интегральных уравнений (34) при условиях (35) сводится к системе  $N \times M$  алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\varphi_n(\tau_m)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ )

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \ell_k \left[ \varphi_k(\tau_m) K_{nk}^*(\ell_k \tau_m, \ell_n \eta_r) + \overline{\varphi_k(\tau_m)} L_{nk}^*(\ell_k \tau_m, \ell_n \eta_r) \right] = \\
& = q_{y_n}(\eta_r) - iq_{x_n y_n}(\eta_r) - \sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1) A_{-k} + \bar{A}_{-k} + (k+1) A_{-k-2} - \bar{A}_{k+2}] \ell_n^k \eta_r^k - \frac{3q_* \eta_r^2}{32}; \\
& \sum_{m=1}^M \varphi_n(\tau_m) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N; r = 1, 2, \dots, M-1). \tag{36}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\tau_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M); \quad \eta_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Квадратурные формулы типа Гаусса позволяют с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
a_n^* &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \ell_k \int_{-1}^1 \frac{e^{i\alpha_k} g_k(\tau)}{(T_k^*)^{n+1}} d\tau = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^N \ell_k \sum_{m=1}^M \frac{e^{i\alpha_k} \varphi_k(\tau_m)}{(T_k^*)^{n+1}}; \\
d_0 &= -\frac{3}{4M} \sum_{k=1}^N \ell_k e^{i\alpha_k} \sum_{m=1}^M \bar{T}_k^* \varphi_k(\tau_m); \quad d_n = -\frac{1}{2M} \sum_{k=1}^N \ell_k e^{i\alpha_k} \sum_{m=1}^M (\bar{T}_{k+1}^*)^{n+1} \varphi_k(\tau_m);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_* &= \frac{1}{4M} \sum_{k=1}^N \ell_k e^{-i\alpha_k} \sum_{m=1}^M T_k^* \overline{\varphi_k(\tau_m)}; \\
c'_n &= \frac{(n+1)}{2M} \sum_{k=1}^N \ell_k e^{-i\alpha_k} \sum_{m=1}^M (\bar{T}_k^*)^{n+1} \overline{\varphi_k(\tau_m)} \quad (n = 0, 1, \dots); \\
c''_n &= \frac{(n+1)}{2M} \sum_{k=1}^N \ell_k e^{-i\alpha_k} \sum_{m=1}^M (\bar{T}_k^*)^n \overline{\varphi_k(\tau_m)} \quad (n = 0, 1, \dots); \\
c_n^* &= \frac{(n+1)}{2M} \sum_{k=1}^N \ell_k e^{-i\alpha_k} \sum_{m=1}^M (T_k^*) (\bar{T}_k^*)^n \overline{\varphi_k(\tau_m)} \quad (n = 0, 1, \dots)
\end{aligned}$$

полностью алгебраизировать связанные между собой системы уравнений, о которых говорилось выше. Упомянутые системы уравнений пока не замкнуты.

В правые части алгебраических систем (37) входят неизвестные значения нормальных  $q_{y_k}$  и касательных  $q_{x_k y_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) усилий в узловых точках зон предразрушения. Используя полученное решение, находим

$$g_n(x_k) = \frac{2\mu}{i(1 + \kappa_1)} \frac{d}{dx_k} [\Pi(x_k, \sigma_k) (q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k))]. \quad (38)$$

Эти комплексные дифференциальные уравнения служат для определения усилий  $q_{y_k}$  и  $q_{x_k y_k}$  в связях между берегами зон предразрушения. Для построения недостающих алгебраических уравнений для нахождения приближенных значений напряжений  $q_{y_k}(t_m)$  и  $q_{x_k y_k}(t_m)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ ) в узловых точках потребуем выполнения условий (38) в узловых точках  $t_m$ , содержащихся в зонах предразрушения. При этом используется метод конечных разностей. В результате получается система комплексных алгебраических уравнений из  $N \times M$  уравнений для определения значений  $q_{y_k}(t_m)$ ,  $q_{x_k y_k}(t_m)$  в узловых точках зон предразрушения.

Для сохранения расчетной схемы решение системы сингулярных интегральных уравнений искалось в виде (36), т.е. имеющих корневую особенность в конце зоны предразрушения. На самом же деле в рамках модели зоны предразрушения со связями между берегами напряжения в твэле всюду конечны, в том числе и в кончике полосы предразрушения.

То есть решение задачи следовало бы искать в классе ограниченных функций (напряжений). Условия ограниченности напряжений в кончике зон предразрушения служат для определения неизвестных размеров зон предразрушения. Дополним полученные основные системы алгебраических уравнений условиями ограниченности напряжений в окрестности вершин зон предразрушения

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m \varphi_k(\tau_m) \cdot ctg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N); \quad (39)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \varphi_k(\tau_m) \cdot tg \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

Системы алгебраических уравнений (31), (32), (37), (38), (39) являются замкнутыми. Из-за неизвестных длин зон предразрушения объединенная система алгебраических уравнений не линейна. Ее численное решение позволяет найти размеры зон предразрушения; значения  $\varphi_k(\tau_m)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ ). Зная функции  $g_k(x)$ , можно найти напряженно-деформированное состояние твэла и защитной оболочки.

**Предельный уровень интенсивности тепловыделения.** После нахождения искомым функций  $g_k(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) вычислялось раскрытие берегов зон предразрушения по соотношению

$$2v_{0k} = -\frac{\kappa_1 + 1}{2\mu_1} \int_{\ell_k}^{x_{0k}} g_k(x_k) dx_k \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

В результате расчетов определялись размеры длин зон предразрушения в зависимости от интенсивности внутренних источников тепла и параметра  $R_1/R_2$ .

В расчетах было принято  $M = 30$ ;  $\kappa_0/\kappa_1 = 1,5$ ;  $\mu_0/\mu_1 = 0,5$ . С помощью критерия критического раскрытия берегов зон предразрушения найдено условие, определяющее предельный уровень интенсивности тепловыделения в твэле для каждой зоны предразрушения.

Значение интенсивности тепловыделения, вызывающего появление  $k$ -той трещины, определяется из соотношения

$$-\frac{1 + \kappa_1}{2\mu_1} \int_{\ell_{0k}}^{x_{0k}} g_k(x_k) dx_k = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Критическим значением интенсивности внутренних источников тепла в твэле будет минимальное среди  $q_{*k}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ )

$$q_* = \min \{q_{*k}\}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Займовский А. С., Калашников В. В., Головин И. С. Тепловыделяющие элементы атомных реакторов. М.: Атомиздат, 1966.
- [2] Bolotin V. V. Mechanics of the initiation and initial development of fatigue cracks // Materials science. 1986. Volume 22. Issue 1. P. 14–19.
- [3] Мирсалимов В. М. Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 2. С. 35–45.
- [4] Мирсалимов В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 1. С. 132–151.
- [5] Mirsalimov V. M., Kalantarly N. M. Crack nucleation in circular disk under mixed boundary conditions // Archives of Mechanics. 2015. Vol. 67. Issue 2. P. 115–136.
- [6] Mir-Salim-zade M. V. Generation of cracks in a perforated reinforced plate // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2008. Vol. 49. Issue 6. P. 1030–1039.
- [7] Mirsalimov V. M., Hasanov Sh. G. Modeling of crack nucleation in covering on an elastic base // International J. of Damage Mechanics. 2014. Vol. 23. Issue 3. P. 430–450.
- [8] Mir-Salim-zade M. V. Modeling of crack formation in a perforated stringer panel // Mathematical Models and Computer Simulations. 2010. Vol. 2. № 4. P. 533–541.
- [9] Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1991.

- [10] Мирсалимов В. М. Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
- [11] Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and Creep of Metals. Berlin: Springer Verlag, 2011.
- [12] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
- [13] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.
- [14] Ladopoulos E. G. Non-linear singular integro-differential equations in Banach spaces by collocation evaluation methods // Universal J. of Integral Equations. 2013. Issue 1. P. 28–38.

R. I. Ismailova

## INTERACTION OF PREFRACTURE ZONES IN A ROD FUEL ELEMENT

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

**Abstract.** We study the plane fracture mechanics problem for interaction of arbitrary number of pre-fracture zones in a rod fuel element. During operation of the rod fuel element various damages, particularly cracks formation, are possible. We consider the problem for rod fuel element with a protective coating when with increasing of internal heat source intensity in the element are forming domains of higher stresses. The domains of higher stresses will contribute to the emergence of zones of weakened interparticle bonds of materials (pre-fracture zones). Interaction of prefracture zones faces is modeled by bonds between the faces having a given deformation diagram. The problem of the prefracture zones interaction is reduced to solving of a system of nonlinear singular integral equations. From solution of this equations system are found the normal and tangential forces in the zones of crack nucleation. Condition of cracking is formed based on the criterion of limit traction of the material bonds.

**Keywords:** rod fuel element, protective coating, prefracture zone with bonds between the faces, cohesive forces.

## REFERENCES

- [1] Zaymovsky A. S., Kalashnikov V. V., Golovnin I. S. Fuel elements of nuclear reactors. Moscow: Atomizdat, 1966. (in Russian)
- [2] Bolotin V. V. Mechanics of the initiation and initial development of fatigue cracks // Materials science. 1986. Vol. 22. Issue 1. P. 14–19.
- [3] Mirsalimov V.M. Initiation of defects such as a crack in the bush of contact pair // Matematicheskoye modelirovaniye. 2005. Vol. 17. № 2. P. 35–45. (in Russian)
- [4] Mirsalimov V. M. The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair // J. of Applied mathematics and mechanics. 2007. Vol. 71. Issue 1. P. 120–136.
- [5] Mirsalimov V. M., Kalantarly N. M. Crack nucleation in circular disk under mixed boundary conditions // Archives of Mechanics. 2015. Vol. 67. Issue 2. P. 115–136.
- [6] Mir-Salim-zade M. V. Generation of cracks in a perforated reinforced plate // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2008. Vol. 49. Issue 6. P. 1030–1039.
- [7] Mirsalimov V. M., Hasanov Sh. G. Modeling of crack nucleation in covering on an elastic base // International J. of Damage Mechanics. 2014. Vol. 23. Issue 3. P. 430–450.
- [8] Mir-Salim-zade M. V. Modeling of crack formation in a perforated stringer panel // Mathematical Models and Computer Simulations. 2010. Vol. 2. № 4. P. 533–541.
- [9] Panasyuk V. V. Mechanics of quasibrittle fracture of material. Kiev: Naukova dumka, 1991. (in Russian)
- [10] Mirsalimov V. M. Non-one-dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 1987. (in Russian)

---

*Ismailova Rena Ashraf gizi*

e-mail: sopromat\_v@mail.ru, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

- [11] Rusinko A., Rusinko K. *Plasticity and Creep of Metals*. Berlin: Springer Verlag, 2011.
- [12] Muskhelishvili N.I. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Amsterdam: Kluwer. 1977.
- [13] Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshyn A. P. *The stress distribution around cracks in plates and shells*. Kiev: Naukova Dumka, 1976. (in Russian)
- [14] Ladopoulos E. G. Non-linear singular integro-differential equations in Banach spaces by collocation evaluation methods // *Universal J. of Integral Equations*. 2013. Issue 1. P. 28–38.

С. В. Матвеев, А. Н. Матвеева, С. В. Тихонов

**ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ  
ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ  
ВКЛЮЧЕНИЕМ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ  
ОКРУЖНОСТЬЮ, ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается деформированное состояние анизотропной плоскости с круговым отверстием, подкреплённой включением, ограниченным эксцентричной окружностью. Предполагается, что каждый слой материала обладает свойствами трансляционной анизотропии. В работе определены перемещения в упругой и пластической областях.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, перемещение, включение, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим плоскость с эксцентричным включением, ограниченным окружностью. Плоскость находится в состоянии двусосного растяжения под действием взаимноперпендикулярных усилий  $p_1$  и  $p_2$  на бесконечности, на контуре отверстия действует нормальное давление  $q$  (рис. 1).

Условие предельного состояния для включения I примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_{11} - k_{21}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_{31})^2 = K_1^2, \quad k_{11}, k_{21}, k_{31}, K_1 - const. \quad (1)$$

Условие предельного состояния для слоя II примем в виде

---

© Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В., 2016

*Матвеев Сергей Владимирович*

**e-mail:** sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

*Матвеева Алена Николаевна*

**e-mail:** goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

*Тихонов Сергей Владимирович*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-41-02453, 16-31-00511).

Поступила 10.02.2016

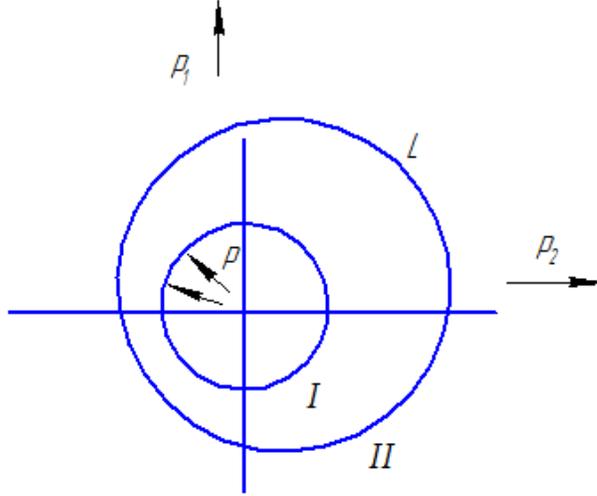


Рис. 1.

$$\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_{12} - k_{22}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_{32})^2 = K_2^2, \quad k_{12}, k_{22}, k_{32}, K_2 - const, \quad (2)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения в декартовой системе координат;  $k_{11}, k_{21}, k_{31}, K_1, k_{12}, k_{22}, k_{32}, K_2$  – константы анизотропии.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра  $\delta$ , будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)} \delta + \sigma_{ij}^{(II)} \delta^2 + \dots, \\ u_n &= u_n^{(0)} + \delta u_n^{(I)} + \delta^2 u_n^{(II)} \dots, \\ v_n &= v_n^{(0)} + \delta v_n^{(I)} + \delta^2 v_n^{(II)} \dots. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение упругопластической границы запишем в виде

$$r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^I + \delta^2 r_s^{II} + \dots \quad (4)$$

Уравнение контура  $L$

$$(x + \delta a)^2 + (y + \delta b)^2 = \alpha_2^2 \quad (5)$$

представим в виде

$$r_L = r_L^{(0)} + \delta r_L^I + \delta^2 r_L^{II} + \dots = \alpha_2 + \delta(-a \cos \theta - b \sin \theta + \alpha_2) + \dots \quad (6)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В дальнейшем все величины, имеющие размерность длины, отнесем к величине  $r_s^{(0)}$ . Примем:  $\rho_s = r_s/r_s^{(0)}$ ,  $\rho_L = r_L/r_s^{(0)}$ . Величины  $a\delta/r_s^{(0)}$ ,  $b\delta/r_s^{(0)}$ ,  $(p_1 - p_2)/2k_1$ ,  $k_{1n}$ ,  $k_{2n}$ ,  $k_{3n}$  будем считать достаточно малыми, порядка  $\delta$  и обозначим

$$\begin{aligned} \frac{(p_1 - p_2)}{2k_1} &= d_3 \delta, \quad d_3 = \text{const}, \quad 0 \leq d_3 \leq 1, \\ k_{1n} &= \delta k'_{1n}, \quad k_{2n} = \delta k'_{2n}, \quad k_{3n} = \delta k'_{3n}. \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем компонентам напряжений и перемещений в пластической области будем приписывать индекс  $p$ , а в упругой области индекс  $e$ .

Граничные условия на бесконечности в упругой области запишем в виде

$$\sigma_{\rho 2}^e = q_0 - \delta \cos(2\theta), \quad \sigma_{\theta 2}^e = q_0 + \delta \cos(2\theta), \quad \tau_{\rho\theta 2}^e = \delta \sin(2\theta). \quad (9)$$

Используя связь между компонентами напряжения в декартовой системе координат  $x, y$  и компонентами в полярной системе координат  $\rho, \theta$  в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) + \tau_{\rho\theta} \sin(2\theta), \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) - \tau_{\rho\theta} \sin(2\theta), \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin(2\theta) + \tau_{\rho\theta} \cos(2\theta), \end{aligned} \quad (10)$$

согласно (10) соотношения (1) и (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma_{pn}^p - \sigma_{\theta n}^p}{2} \right)^2 + \left( \tau_{\rho\theta n}^p \right)^2 - 2R_n \left( \frac{\sigma_{pn}^p - \sigma_{\theta n}^p}{2} \right) \cos(2\theta + \mu_n) - \\ - 2\tau_{\rho\theta n}^p R_n \sin(2\theta + \mu_n) + R_n^2 - K_n^2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R_n = \sqrt{\left( \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + k_{3n}^2}, \quad \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2R_n} = \cos(\mu_n), \quad \frac{k_{3n}}{R_n} = \sin(\mu_n).$$

Будем считать, что материал пластины и включения несжимаемы  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Напряженное состояние рассматриваемой плоскости было описано в работе [1]. Используя соответствующие выражения для компонент напряжения, найденные в указанной работе, получим компоненты перемещений в нулевом приближении в упругой области

$$\begin{aligned} u_2^{(0)e} &= \frac{3}{2E} \left( q - 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 2K_2 \ln \frac{1}{\alpha_2} \right) \frac{1}{\rho}, \\ v_2^{(0)e} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно [1], [2] определим компоненты перемещения в упругой области для первого приближения

$$\begin{aligned} u_2^{(I)e} &= -\frac{3\alpha_2(k_1 - k_2)}{\alpha_1 E \rho} - \frac{3(k_2 - k_1)}{2E\rho^2} (a \cos \theta + b \sin \theta) - \frac{3}{E} \left( \rho - \frac{1}{\rho^3} + \frac{4}{\rho} \right) \sin 2\theta + \\ &+ \frac{1}{E} \left( \frac{1}{\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right) (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta) + \frac{1}{E} \left( \frac{2}{\rho^3} + \frac{2}{\rho} \right) (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta), \\ v_2^{(I)e} &= -\frac{3(k_2 - k_1)}{2E\rho^2} (a \sin \theta + b \cos \theta) + \frac{1}{E} \left( 3\rho + \frac{3}{\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right) \sin 2\theta + \\ &+ \frac{1}{E} \left( \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right) (a_2'' \sin 2\theta - b_2'' \cos 2\theta) + \frac{1}{E} \left( \frac{2}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \right) (a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
a_2'' &= \alpha_2 T_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \\
&\quad - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + R'_2 \cos \mu_2, \\
b_2'' &= -\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \alpha_2 T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \sin \mu_2, \\
a_2''' &= \alpha_2 T_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \sin \mu_2, \\
b_2''' &= -\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \alpha_2 T_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \cos \mu_2, \\
T_{11} &= -R'_2 \cos \mu_2 - R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \right\} \cos \mu_1, \\
T_{12} &= R'_2 \sin \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \right\} \sin \mu_1 \\
T_{21} &= R'_2 \cos \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \right\} \cos \mu_1, \\
T_{22} &= R'_2 \sin \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \right\} \sin \mu_1.
\end{aligned}$$

Из ассоциированного закона пластического течения и (11) в пластической области получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\rho n}^p &= \lambda_n \left[ \frac{\sigma_{\rho n}^p - \sigma_{\theta n}^p}{2} - R'_n \cos(2\theta + \mu_n) \right], \\
\varepsilon_{\theta n}^p &= -\varepsilon_{\rho n}^p, \\
\varepsilon_{\rho \theta n}^p &= \lambda_n \left[ \tau_{\rho \theta n}^p - R'_n \sin(2\theta + \mu_n) \right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) получим

$$\frac{\varepsilon_{\rho \theta n}^p}{\varepsilon_{\rho n}^p - \varepsilon_{\theta n}^p} = \frac{\tau_{\rho \theta n}^p - R'_n \sin(2\theta + \mu_n)}{\sigma_{\rho n}^p - \sigma_{\theta n}^p - 2R'_n \cos(2\theta + \mu_n)}. \tag{15}$$

Уравнение несжимаемости в нулевом приближении будет иметь вид

$$\varepsilon_{\rho n}^{(0)p} + \varepsilon_{\theta n}^{(0)p} = 0. \tag{16}$$

Из (16) получим

$$\begin{aligned}
\frac{du_n^{(0)p}}{d\rho} + \frac{u_n^{(0)p}}{\rho} &= 0, \\
v_n^{(0)p} &= 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) получим

$$u_n^{(0)p} = \frac{C_n}{\rho}, \quad C_n - const. \tag{18}$$

На границе сопряжения слоев будет иметь место следующее условие

$$u_n^{(0)p} = u_{n+1}^{(0)p} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_n. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует

$$C_n = C_{n+1}. \tag{20}$$

Учитывая (20), решение уравнения (17) будет иметь вид

$$u_n^{(0)p} = \frac{C}{\rho}, \quad C - const. \quad (21)$$

Выражение (21) будет справедливо для всех слоев пластины. Определим компоненты деформаций:

$$\varepsilon_\rho^{(0)p} = \frac{du^{(0)p}}{d\rho} = -\frac{C}{\rho^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(0)p} = \frac{u^{(0)p}}{\rho} = \frac{C}{\rho^2}. \quad (22)$$

Предположим, что  $\tau_{\rho\theta n}^{(0)p} = \varepsilon_{\rho\theta n}^{(0)p} = 0$ , тогда из условий (12) и (21) получим компоненты перемещения во второй пластической области в нулевом приближении

$$u_2^{(0)p} = \frac{C}{\rho}, \quad v_2^{(0)p} = 0, \quad (23)$$

где

$$C = \frac{3}{E} \left( q - 2K_1 \ln \frac{1}{\alpha_1} - 2K_2 \ln \frac{1}{\alpha_2} \right).$$

В первой пластической области компоненты перемещения будут иметь вид

$$u_1^{(0)p} = \frac{C}{\rho}, \quad v_1^{(0)p} = 0.$$

Из уравнения несжимаемости получим выражения для компонент деформаций в первом приближении:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho n}^{(I)p} + \varepsilon_{\theta n}^{(I)p} &= 0, \quad \varepsilon_{\rho n}^{(I)p} = \frac{\partial u_n^{(I)p}}{\partial \rho}, \\ \varepsilon_{\theta n}^{(I)p} &= \frac{u_n^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_n^{(I)p}}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{\rho\theta n}^{(I)p} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_n^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{v_n^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_n^{(I)p}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) получим выражение для компонент перемещения в  $n$ -ом слое

$$\frac{\partial u_n^{(I)p}}{\partial \rho} + \frac{u_n^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_n^{(I)p}}{\partial \theta} = 0. \quad (25)$$

Из (15) получим линеаризованное соотношение

$$\left( \sigma_{\rho n}^{(0)p} - \sigma_{\theta n}^{(0)} \right) \varepsilon_{\rho\theta n}^{(I)p} = \left( \varepsilon_\rho^{(0)p} - \varepsilon_\theta^{(0)p} \right) \left[ \tau_{\rho\theta n}^{(I)p} - R'_n \sin(2\theta + \mu_n) \right]. \quad (26)$$

Согласно (22), (24) уравнение (26) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_n^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{v_n^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_n^{(I)p}}{\partial \theta} = \\ & = \frac{2C}{K_n \rho^2} R'_n \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 2 \right\} \sin(2\theta + \mu_n). \end{aligned} \quad (27)$$

Для выполнения условия несжимаемости (26) предположим

$$u_n^{(I)p} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi'}{\partial \theta}, \quad v_n^{(I)p} = \frac{\partial \psi'}{\partial \rho}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в уравнение (27), получим

$$\begin{aligned}
& \rho^2 \frac{\partial^2 \psi'_n}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\psi'_n}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi'_n}{\partial \theta^2} = \\
& = \frac{2C}{K_n} R'_n \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 2 \right\} \sin (2\theta + \mu_n). \quad (29)
\end{aligned}$$

Решение уравнения (29) представим как сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Частное решение уравнения (29) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\psi'_n \text{ частн} &= \left( \frac{1}{\rho} [S_n \sin w + T_n \cos w] + Q_n \right) \sin (2\theta + \mu_n), \\
w &= \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Подставляя (30) в (29), найдем

$$D_{1n} = \frac{2C}{K_n} R'_n, \quad S_n = -\frac{\sqrt{3}\alpha_1 D_{1n}}{8}, \quad T_n = -\frac{\alpha_1 D_{1n}}{8}, \quad Q_n = -\frac{D_{1n}}{2}. \quad (31)$$

Из (28), (29) получим

$$\begin{aligned}
u_n^{(I)p} \text{ частн} &= -\frac{2}{\rho^2} \left( \left[ S_n \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + T_n \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right] + Q_n \rho \right) \cos (2\theta + \mu_n), \\
v_n^{(I)p} \text{ частн} &= -\frac{1}{\rho^2} \left[ (S_n + \sqrt{3}T_n) \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (T_n - \sqrt{3}S_n) \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right] \sin (2\theta + \mu_n). \quad (32)
\end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения (29) в соответствии с выражениями (28) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
u_n^{(I)p} \text{ одн} &= -2 \left\{ \left[ C_{11}^{(n)} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(n)} \sin (\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin 2\theta - \right. \\
& \quad \left. - \left[ C_{21}^{(n)} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(n)} \sin (\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos 2\theta \right\}, \\
v_n^{(I)p} \text{ одн} &= \left[ C_{11}^{(n)} (\cos (\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\
& \quad \left. + C_{12}^{(n)} (\sin (\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \rho)) \right] \sin 2\theta + \\
& \quad \left. + \left[ C_{21}^{(n)} (\cos (\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + C_{22}^{(n)} (\sin (\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \rho)) \right] \cos 2\theta. \quad (33)
\end{aligned}$$

На границе сопряжения упругой и пластической области будут выполняться следующие условия

$$u_2^{(I)p} = u_2^{(I)e}, \quad v_2^{(I)p} = v_2^{(I)e}, \quad \rho = 1. \quad (34)$$

Из (13), (32)–(34) получим

$$\begin{aligned}
C_{11}^{(2)} &= \frac{6}{E} - \frac{b_2''}{2} + \frac{2}{E} a_2''' - [S_2 \sin w_2 - T_2 \cos w_2] \sin \mu_2, \\
C_{12}^{(2)} &= \frac{3b_2''' - 2a_2''' - 2}{\sqrt{3}E} + \frac{b_2''}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} (S_2 \sin w_2 - T_2 \cos w_2) \sin \mu_2 - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} ((S_2 + \sqrt{3}T_2)) \sin w_2 + (\sqrt{3}S_2 - T_2) \cos w_2) \cos \mu_2, \\
C_{21}^{(2)} &= -\frac{a_2''}{2E} + \frac{2b_2''}{E} - [S_2 \sin w_2 - T_2 \cos w_2 - Q_2] \cos \mu_2, \\
C_{22}^{(2)} &= \frac{3a_2''' + a_2''' - 2b_2''}{\sqrt{3}E} + \frac{1}{\sqrt{3}} (S_2 \sin w_2 - T_2 \cos w_2 + Q_2) \cos \mu_2 - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} ((S_2 + \sqrt{3}T_2) \sin w_2 + (\sqrt{3}S_2 - T_2) \cos w_2) \sin \mu_2, \\
&\quad w_2 = \sqrt{3} \ln \alpha_1.
\end{aligned} \tag{35}$$

где выражениями (13), (32)–(34) определены перемещения во втором слое пластины в первом приближении.

На границе слоев пластины будут выполняться следующие условия сопряжения

$$\begin{aligned}
u_2^{(I)p} + \frac{u_2^{(0)p}}{d\rho} \rho_s^{(I)} &= u_1^{(I)e} + \frac{u_1^{(0)e}}{d\rho} \rho_s^{(I)}, \\
v_2^{(I)p} + \frac{v_2^{(0)p}}{d\rho} \rho_s^{(I)} &= v_1^{(I)e} + \frac{v_1^{(0)e}}{d\rho} \rho_s^{(I)}, \\
\rho &= \alpha_2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Из (32)–(36) определим коэффициенты  $C_{11}^{(1)}$ ,  $C_{12}^{(1)}$ ,  $C_{21}^{(1)}$ ,  $C_{22}^{(1)}$ .

$$\begin{aligned}
C_{11}^{(1)} &= \frac{\sin w_1}{\sqrt{3}\alpha_2^2} A_1 + \frac{2 \cos(\frac{\pi}{6} - w)}{\sqrt{3}\alpha_2^2} B_1, \\
C_{12}^{(1)} &= -\frac{\cos w_1}{\sqrt{3}\alpha_2^2} A_1 + \frac{\sin(w_1 - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}\alpha_2^2} B_1, \\
C_{21}^{(1)} &= \frac{\sin w_1}{\sqrt{3}\alpha_2^2} A_2 - \frac{2 \cos(\frac{\pi}{6} + w_1)}{\sqrt{3}\alpha_2^2} B_2, \\
C_{22}^{(1)} &= \frac{\cos w_1}{\sqrt{3}\alpha_2^2} A_2 - \frac{2 \sin(\frac{\pi}{6} - w_1)}{\sqrt{3}\alpha_2^2} B_2,
\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= ((S_2 + \sqrt{3}T_2) \sin w_3 + (T_2 - \sqrt{3}S_2) \cos w_3) \cos \mu_2 + 2C_{11}^{(2)} \sin(\frac{\pi}{6} - w_1) - \\
&\quad - 2C_{12}^{(2)} \cos(\frac{\pi}{6} + w_1) - ((S_1 + \sqrt{3}T_1) \sin w_3 + (T_1 - \sqrt{3}S_1) \cos w_3) \cos \mu_1, \\
B_1 &= (S_1 \sin w_3 + T_1 \cos w_3 + Q_1 \alpha_2) \sin \mu_1 - (S_2 \sin w_3 + T_2 \cos w_3 + Q_2 \alpha_2) \sin \mu_2 + \\
&\quad + \alpha_2^2 C_{11}^{(2)} \cos w_1 + \alpha_2^2 C_{12}^{(2)} \sin w_1, \\
A_2 &= ((S_2 + \sqrt{3}T_2) \sin w_3 + (T_2 - \sqrt{3}S_2) \cos w_3) \sin \mu_2 + 2C_{21}^{(2)} \sin(\frac{\pi}{6} - w_1) - \\
&\quad - 2C_{22}^{(2)} \cos(\frac{\pi}{6} + w_1) - ((S_1 + \sqrt{3}T_1) \sin w_3 + (T_1 - \sqrt{3}S_1) \cos w_3) \sin \mu_1, \\
B_2 &= (S_1 \sin w_3 + T_1 \cos w_3 + Q_1 \alpha_2) \cos \mu_1 - (S_2 \sin w_3 + T_2 \cos w_3 + Q_2 \alpha_2) \cos \mu_2 + \\
&\quad + \alpha_2^2 C_{21}^{(2)} \cos w_1 + \alpha_2^2 C_{22}^{(2)} \sin w_1, \\
&\quad w_1 = \sqrt{3} \ln \alpha_2, \quad w_3 = \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Формулами (32), (33), (36), (37) определены компоненты перемещений для первого слоя пластины в первом приближении.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов С. В., Рыбакова Т. И. Упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 138–146.
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 41–43.
- [4] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 583–584.
- [5] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 576–579.
- [6] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 580–583.
- [7] Фоминых С. О. Двусосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 610–622.
- [8] Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.
- [9] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1 (6). С. 134–141.

S. V. Matveev, A. N. Matveeva, S. V. Tikhonov

**DEFORMED CONDITION OF ANISOTROPIC PLANE WEAKENED BY A HOLE REINFORCED BY THE INCLUSION OF LIMITED ECCENTRIC CIRCLE WITH BIAXIAL STRETCHING**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** We consider the deformed condition of anisotropic plane with a circular hole, supported by the inclusion, limited eccentric circle. It implies that each layer of material has the properties of translational anisotropy. The paper defines the displacement in the elastic and plastic regions.

**Keywords:** elasticity, plasticity, movement, including, translational anisotropy

**REFERENCES**

- [1] Tikhonov S. V., Rybakova T. I. Biaxial stretching of elastoplastic plain with eccentric, circular and anisotropic inclusion // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2015. № 3 (25). P. 138–146.
- [2] Ivlev D. D., Yershov L. V. Method of indignations in the theory of an elasto-plastic solids. M.: Science, 1978. 208 p.
- [3] Ivlev D. D., Maximova L.A., Mironov B. G. About ratios of the theory of transmitting ideal and plastic anisotropy in case of flat deformation // Izv. Russian Academy of Sciences. Mech. Sol. 2011. № 2. P. 41–43.
- [4] Ivlev D. D., Maximova L.A. About ratios of the theory of transmitting ideálnoplastichesky anisotropy at generalization of a condition of plasticity of Mises // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 583–584.
- [5] Ivlev D. D., Mironov B. G. About ratios of transmitting ideálnoplastichesky anisotropy at torsion // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 576–579.
- [6] Ivlev D. D., Maximova L.A., Mironov B. G. About ratios of the theory of transmitting ideálnoplastichesky anisotropy // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 580–583.
- [7] Fominykh S. O. Biaxial stretching of an uprugoplastichsky plate with a circular opening in case of transmitting anisotropy // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 610–622.

---

*Matveev Sergey Vladimirovich*

e-mail: sergio2100@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department Information Technologies, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Matveeva Alena Nikolaevna*

e-mail: roshtova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Tikhonov Sergey Vladimirovich*

e-mail: roshtova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[8] Kerzhayev A. P. An elasto-plastic condition of the two-layer thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure, at transmitting anisotropy // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2013. № 2 (16). P. 71–81.

[9] Kuznetsov P. N. Elasto-plastic condition of the non-uniform the plane weakened by a circular opening, supported inclusions, limited eccentric circles, at biaxial stretching // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2009. № 1 (6). P. 134–141.

Ю. В. Немировский

## ДИНАМИКА ГИБРИДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛИТ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрена задача динамического изгиба прямоугольных слоисто-волоконистых прямоугольных плит из идеально жестко-пластических материалов при воздействии нагрузок взрывного типа. Рассматриваются различные комбинации слоев и структур армирования по толщине и различные комбинации условий закрепления сторон плиты.

**Ключевые слова:** слоисто-волоконистые прямоугольные плиты, произвольное закрепление сторон, нагрузки взрывного типа, идеально пластические материалы, предельные нагрузки, время движения, остаточные прогибы.

УДК: 536.21

Первое исследование по остаточной повреждаемости пластических прямоугольных плит при воздействии нагрузок взрывного типа было выполнено Гвоздевым А.А. [1]. Пренебрегая упругими деформациями, упрочнением материала, влиянием скорости деформации на пластические свойства и используя широко известную приближенную схему предельного пластического состояния типа «конверт», он построил простую расчетную схему для оценки времени разрушения и степени остаточной повреждаемости шарнирно опертых и защемленных по всему контуру плит. Подробные схемы, без ссылок на работу [1], были использованы позднее в работах зарубежных ученых [2]–[4]. Простота и удобство расчетной схемы позволили расширить и развить исследования в этом направлении для расчетов односвязных и двусвязных шарнирно-опертых и защемленных плит различных геометрических очертаний. Описание и обзор полученных на данный момент результатов содержится в монографиях [5]–[7]. Существуют, однако, многочисленные ситуации нагружений, опорных закреплений, неоднородности строения конструкции, для которых построенные расчетные схемы не могут быть в прямую перенесены и требуют определенного развития. К таким ситуациям

---

© Немировский Ю. В., 2016  
*Немировский Юрий Николаевич*  
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102).

Поступила 12.01.2016

относятся, в частности, различия в способах закрепления контурных участков прямоугольных плит, использование слоисто-волоконистых композитных плит, воздействие взрывных нагрузок высокой интенсивности. Эти вопросы, в совокупности, и будут рассматриваться далее.

**Гибридные плиты, условия закрепления и схемы динамического движения.** Будем рассматривать слоистые плиты с симметричным строением слоев по толщине (рис. 1)

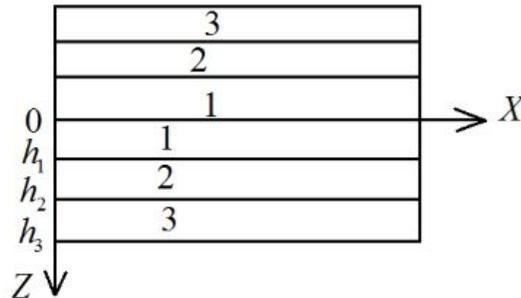


Рис. 1

Слои в общем случае будем считать ортотропными и различными. Ортотропия может быть физической, возникающей при прокатке слоя, либо конструкционной, вследствие разного расположения арматуры в слое, как, например, на рис. 2а и рис. 2б.

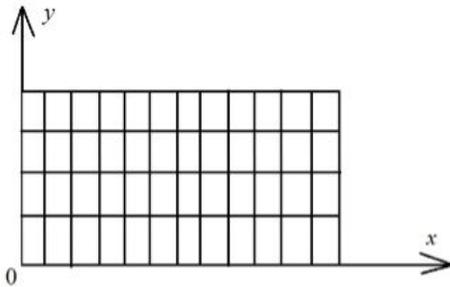


Рис. 2а

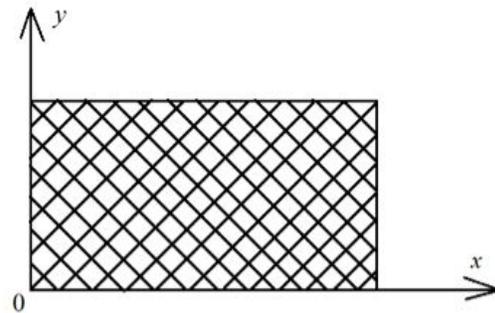


Рис. 2б

Все материалы плиты, объединенные в единый жесткий пакет, подчиняются модели идеального жестко-пластического тела и деформируются без проскальзывания. Будем рассматривать прямоугольные плиты со сторонами  $a$  и  $b$  и свяжем оси  $x$ ,  $y$  со сторонами. Считаем, что закрепление сторон может быть произвольным по контуру. В частности, одна из сторон может быть незакрепленной. Тогда, в общем случае, возможные схемы динамического движения могут иметь вид, изображенный на рис. 3а, 3б.

Координаты точек на рис. 3а будут равны

$$O(0,0), A(0,b), B(a,b), C(a,0), E'(x_1, y_1'), E''(x_1, y_1''), D'(x_2, y_1'), D''(x_2, y_1'')$$

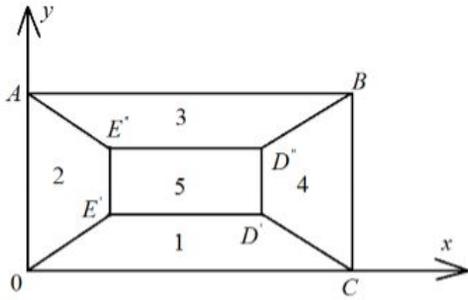


Рис. 3а

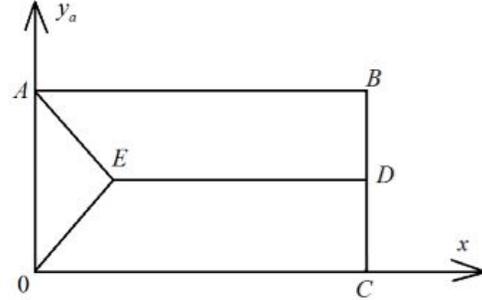


Рис. 3б

Длины отрезков

$$\begin{aligned}
 OE' &= l_1 = \left[ x_1^2 + (y_1')^2 \right]^{1/2}, & AE'' &= l_2 = \left[ x_1^2 + (b - y_1'')^2 \right]^{1/2}, \\
 E''D'' &= E'D' = l_5 = x_2 - x_1, \\
 BD'' &= l_3 = \left[ (a - x_2)^2 + (b - y_1'')^2 \right]^{1/2}, & E'E'' &= D'D'' = l_6 = y_1'' - y_1', \\
 CD' &= l_4 = \left[ (a - x_2)^2 + (y_1')^2 \right]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Отрезки  $OE'$ ,  $AE''$ ,  $BD''$ ,  $CD'$ ,  $E'E''$ ,  $E''D''$ ,  $D'D'$ ,  $D'E'$  будут линейными пластическими шарнирами, а на опорных контурных отрезках  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CO$  в зависимости от условий закрепления при изгибе заданы изгибающие моменты, определяемые ограничениями изгиба на контурных участках (например, нулевой при шарнирном закреплении или соответствующий предельный изгибающий момент при жестком закреплении от изгиба). Область  $E'E''D''D'$  возникает как развитая пластическая область при высоких уровнях амплитуды динамической нагрузки и вырождается в пластический шарнир, соответствующий требованию  $y_1'' = y_1' = y_1$ . Если сторона плиты  $BC$  будет свободна от нагрузки, то соответствующую схему деформирования получим, полагая  $x_2 = a$ . Для средних нагрузок она изображена на рис. 3б. Углы наклонов шарнирных линий определяются равенствами

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_1 &= \sin \alpha_2 = \frac{x_1}{l_1}; \\
 \sin \alpha_1 &= \cos \alpha_2 = \frac{y_1'}{l_1}; \\
 \cos \alpha_3 &= \sin \alpha_4 = \frac{b - y_1''}{l_2}; \\
 \sin \alpha_3 &= \cos \alpha_4 = \frac{x_2}{l_2}; \quad \cos \alpha_5 = \sin \alpha_6 = \frac{a - x_2}{l_3}; \\
 \sin \alpha_5 &= \cos \alpha_6 = \frac{b - y_2''}{l_3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_7 &= \sin \alpha_8 = \frac{y_1'}{l_4}; \\ \sin \alpha_7 &= \cos \alpha_8 = \frac{a - x_2}{l_4}.\end{aligned}\quad (2)$$

В рассматриваемых конструкциях материалы всех слоев будут ортотропными с пределами текучести  $\sigma_i^*$  и  $\sigma_{2i}^*$  в направлениях  $x$  и  $y$ , где в соответствии с моделью [8] для армированного слоя на рис 2а будем иметь

$$\sigma_{1i}^* = \sigma_{1i}^c (1 - \omega_{i1}) + \sigma_{1i}^a \omega_{i1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad \sigma_{2i}^* = \sigma_{2i}^c (1 - \omega_{i2}) + \sigma_{2i}^a \omega_{i2}.$$

Здесь  $\sigma_{1i}^c, \sigma_{2i}^c, \sigma_{1i}^a, \sigma_{2i}^a$  – пределы текучести связующего материала и материалов арматуры,  $\omega_{i1}, \omega_{i2}$  – коэффициенты армирования в направлениях  $x$  и  $y$ . Для армированного слоя типа изображенного на рис. 2б будем иметь

$$\sigma_{1i}^* = (1 - 2\omega_i) \sigma_{1i}^c + 2\omega_i \sigma_i^a \cos^2 \gamma_i, \quad \sigma_{2i}^* = (1 - 2\omega_i) \sigma_{2i}^c + 2\omega_i \sigma_i^a \sin^2 \gamma_i,$$

где  $\omega_i$  – коэффициент армирования,  $\gamma_i$  – угол армирования.

Тогда предельные изгибающие моменты в сечениях, перпендикулярных осям  $x$  и  $y$ , будут равны

$$M_1^* = \sum_{i=1}^n \sigma_{1i}^* (h_i^2 - h_{i-1}^2), \quad M_2^* = \sum_{i=1}^n \sigma_{2i}^* (h_i^2 - h_{i-1}^2),$$

где ( $h_0 = 0$ ),  $2h_n = h$  – толщина плиты.

Если прогиб на всем контуре прямоугольной пластины отсутствует, то вследствие непрерывности прогибов пластины на участках, разделенных пластическими шарнирными линиями для скорости прогибов, будем иметь выражения

$$\dot{w}_1 = \dot{A}_1 y, \quad \dot{w}_2 = \dot{A}_2 x, \quad \dot{w}_3 = \dot{A}_3 (y - b), \quad \dot{w}_4 = \dot{A}_4 (x - a), \quad \dot{w}_5 = V(t), \quad (3)$$

где

$$\dot{A}_1 = \frac{V}{y_1'}, \quad \dot{A}_2 = \frac{V}{x_1}, \quad \dot{A}_3 = \frac{V}{(y_1'' - b)}, \quad \dot{A}_4 = \frac{V}{(x_2 - a)}. \quad (4)$$

Если одна из сторон, например  $BC$ , свободна, то область 4 вырождается в линию  $x_2 = a$ .

**Высокие нагрузки.** Если нагрузки, действующие на прямоугольную плиту, будут достаточно высокие, то её динамическое движение будет происходить в соответствие со схемой на рис. За с развитой пластической областью. Уравнение движения в соответствии с принципом виртуальных мощностей и принципом Даламбера может быть представлено в форме

$$\iint_F (p - m\dot{v}) \delta \dot{w} dx dy - \sum_{k=1}^{12} M_k^{**} l_k \delta \dot{\Theta}_k = 0. \quad (5)$$

Здесь  $F$  – площадь пластинки,  $M_k^{**}$  – моменты в пластических шарнирах в поверхности и на контуре пластины,  $\delta \dot{w}$  – вариации скоростей прогибов,  $\delta \dot{\Theta}_k$  – вариации соответствующих скоростей углов перелома,  $m$  – поверхностная масса пластины.

$$m = 2 \sum_{i=1}^n \rho_i (h_i - h_{i-1}) \quad (6)$$

$$\rho_i = (1 - \omega_{1i} - \omega_{2i}) \rho_i^c + \omega_{1i} \rho_{1i}^a + \omega_{2i} \rho_{2i}^a,$$

где  $\rho_i^c$  – плотность связующего материала в  $i$ -м слое,  $\rho_{ki}^a$  – плотность материала арматуры в  $k$ -м направлении  $i$ -го слоя,  $z = h_k$  – координаты раздела слоев.

Принимая вариации кинематически допустимых прогибов на соответствующих участках пропорциональными выражениями (3), (4), в каждом конкретном случае закрепления плиты и структуры гибридной конструкции для равномерно распределенного давления  $p(t) = p_0 \varphi(t)$  (7) уравнение (5) можно представить в компактной форме

$$p(t) \Psi_1(x_1, x_2, y_1', y_1'') - m \dot{V}(\Psi_2(x_1, x_2, y_1', y_1'')) = \Psi_3(x_1, x_2, y_1', y_1''), \quad (7)$$

где функция  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  содержат неизвестные параметры кинематически допустимого поля прогибов в текущем состоянии, которые должны быть найдены из условий

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y_1'} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y_1''} = 0. \quad (8)$$

Будем рассматривать нагрузки взрывного типа в виде экспоненциальных импульсов

$$\varphi(t) = \exp(-\beta t), \quad (9)$$

где  $\beta$  – параметр.

Тогда начальные условия будут иметь вид

$$V(0) = C_5(0) = 0. \quad (10)$$

Время остановки  $t_f$  будет определяться из уравнения  $V(t_f) = 0$ , и амплитуда остаточного прогиба будет равна  $C_5(t_f)$ . Для определения амплитуды предельной нагрузки  $p_0^0$ , выше которой будет происходить движение рассматриваемой плиты, следует рассмотреть уравнение (8) при  $V = 0$ . Уравнение (9) в этом случае определяет параметры схемы разрушения  $(x_{01}, x_{02}, y_{01})$  плиты в предельном состоянии. Дальнейшие детали в силу громоздкости выражений не могут быть выписаны в общем виде и требуют определенной конкретизации. Так, например, для длинных пластин ( $a \gg b$ ) со свободными от закрепления сторонами  $OA$  и  $BC$  можно, принимая  $x_1 = 0, x_2 = a$ , упростить выражения и свести задачу к исследованию балки-полоски с различным закреплением на краях, решение которой описано в [6]. Для квадратных пластин ( $a = b$ ) с различным закреплением опорного контура, решение описано в [9].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 1-2. С. 18–21.
- [2] Cox A. D., Morland L. W. D. Dynamic plastic deformations simply supported square plates // Journal Mech. Phys. Solids. 1959. Vol. 7. P. 229–241.

[3] Вирма Э. Динамика пластических прямоугольных пластин // Ученые записки Тартуского государственного университета. Труды по математике и механике. 1972. Т. 305. № 12. С. 289–298.

[4] Jones N., Uran T. O., Tekin S. A. The dynamic plastic behavior of fully clamped rectangular plates // *Jnt. J. Solid Structures*. 1970. Vol. 6. № 12. P. 1499–1512.

[5] Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.

[6] Комаров К. Л., Немировский Ю.В. Динамика жесткопластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1984. 232 с.

[7] Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. Новосибирск: Издательство “ГЕО”, 2009, 311 с.

[8] Немировский Ю. В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя // *Прикладная механика и техническая физика*. 1969. № 5. С. 81–88.

[9] Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое поведение армированных квадратных пластических плит со смешанными условиями закрепления сторон // *Прикладные проблемы механики и математики*. 2015. Вып. 13. С. 74–81.

*Yu. V. Nemirovskii*

## DYNAMICS OF HYBRID RECTANGULAR PLASTIC PLATES

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** The problem of dynamic bending of a rectangular fibrous laminated rectangular plates of perfectly rigid-plastic materials when subjected to loads of explosive type. Discusses various combinations of the layers and structures of the reinforcement in thickness and various combinations of the conditions of fastening of the sides of the plate.

**Keywords:** fibrous laminated rectangular plates of arbitrary consolidation of parties, loads of explosive type, perfectly plastic materials, the maximum load, the residual deflection.

## REFERENCES

[1] Gvozdev A. A. Calculation of structures on the effect of the blast wave // *Construction industry*. 1943. № 1-2. P. 18–21.

[2] Cox A. D., Morland L. W. D. Dynamic plastic deformations simply supported square plates // *Journal Mech. Phys. Solids*. 1959. Vol. 7. P. 229–241.

[3] Wyrn E. Dynamics plastic rectangular plates // *Scientific notes of Tartu State University*. 1972. Vol. 305. № 12. P. 289–298.

[4] Jones N., Uran T. O., Tekin S. A. The dynamic plastic behavior of fully clamped rectangular plates // *Jnt. J. Solid Structures*. 1970. Vol. 6. № 12. P. 1499–1512.

[5] Erhov M. I. The theory of the ideal plastic bodies and structures. M.: Nauka, 1978.

---

*Nemirovsky Yuri Vladimirovich*

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

- 
- [6] Комаров К. Л., Nemirovsky Yu. V. Dynamics of rigid structural elements: Novosibirsk: Science, 1984. 232 p.
- [7] Nemirovsky Yu.V., Romanova T. P. Dynamic resistance of flat plastic barrier. Novosibirsk: Publishing House "FEO", 2009. 311 p.
- [8] Nemirovsky Yu. V. On a condition of plasticity (strength) for the reinforced layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1969. № 5. P. 81–88.
- [9] Nemirovsky Yu.V., Romanova T. P. The dynamic behavior of reinforced plastic square plates with mixed conditions securing sides // Applied Problems of Mechanics and Mathematics. 2015. Vol. 13. P. 74–81.

И. А. Семенова

## ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ НАБОРОМ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ (НЕЧЕТНО-СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ)

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия*

**Аннотация.** Изучаются базисные свойства (в частности, разложения Лагранжа) по функциям Фадля-Папковича, возникающим при решении краевой задачи для полуплоскости, содержащей периодический набор ребер жесткости, воспринимающих только изгибные деформации и не работающих на растяжение-сжатие. Разложениями Лагранжа, в отличие от разложений, которые появляются при решении краевых задач теории упругости в полуполосе, когда неизвестные коэффициенты разложений определяются из разложений двух заданных на торце полуполосы функций в ряды по двум системам функций Фадля-Папковича, называются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций. В этом смысле ряды Лагранжа играют такую же роль, какую тригонометрические ряды играют в решениях Файлона-Рибьера [1]. Вид функций Фадля-Папковича зависит от граничных условий на длинных сторонах полуполосы. Примеры разложений Лагранжа, по функциям Фадля-Папковича, возникающим при решении той или иной краевой задачи, можно найти в статьях [2]–[7]. Есть некоторые общие методы и подходы при изучении базисных свойств систем функций Фадля-Папковича. Однако в каждом конкретном случае возникают свои, специфические особенности, присущие только данной краевой задаче и соответствующим ей функциям Фадля-Папковича. Особенности разложений Лагранжа, возникающим при решении рассматриваемой краевой задачи, посвящена эта статья. Рассматриваются два типа разложений: разложения зависящих от некоторого параметра, целых по этому параметру порождающих [8] функций, т. е. функций, порождающих какую-либо систему функций Фадля-Папковича, когда параметр пробегает множество собственных чисел краевой задачи, и разложения с использованием финитных частей биортогональных функций. В первом случае целая порождающая функция продолжается как целая вне отрезка – торца полуполосы – на всю бесконечную прямую, биортогональные функции в явном виде не выписываются, а искомые коэффициенты разложений в ряды Лагранжа определяются прямо из уравнения для определения биортогональных функций. Во втором случае биортогональные функции выписываются в явном виде.

---

© Семенова И. А., 2016

*Семенова Ирина Александровна*

e-mail: irishka\_g\_05@mail.ru, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02-644 р\_поволжье\_a).

Поступила 02.02.2016

Они определены на отрезке – торце полуполосы, – имеют простой вид, но самое важное, что с их помощью можно строить разложения не только аналитических функций, но фактически любых функций, для которых существует интеграл Фурье. Для того чтобы построить разложение Лагранжа некоторой, заданной на отрезке – торце полуполосы – функции, нужно вначале эту функцию каким-либо образом продолжить вне этого отрезка. От того, как сделано это продолжение, будут зависеть коэффициенты разложения в ряды Лагранжа. Таким образом, разложения Лагранжа не единственны. Неединственность разложений Лагранжа, обусловленная комплекснозначностью систем функций Фадля-Папковича, – одно из важнейших свойств рассматриваемых систем функций.

**Ключевые слова:** полуплоскость, периодическая задача, ребра жесткости, функции Фадля-Папковича, биортогональные функции, разложения Лагранжа.

УДК: 539.3+ 517.95

**Формулировка краевой задачи. Основные положения.** Рассмотрим полуплоскость, составленную из одинаковых полуполос  $\{ \Pi : x \geq 0, |y| \leq 1 \}$ , между которыми вставлены ребра жесткости (рис. 1). Все ребра имеют одинаковую изгибную жесткость, которая не меняется по длине. Жесткость на растяжение-сжатие не учитывается. На рис. 1 условно показана внешняя периодическая нагрузка, приложенная к прямолинейной границе полуплоскости так, что в каждой полуполосе  $\Pi$  возникает нечетно-симметричная деформация. Нагрузка (сосредоточенные перерезывающие силы и моменты) может быть приложена также к концам ребер жесткости.

Введем обозначения:  $G$  – модуль сдвига пластины,  $E_1$  – модуль упругости ребра,  $\nu$  – коэффициент Пуассона для пластины и ребра,  $I$  – момент инерции поперечного сечения ребра,  $t$  – толщина пластины,  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  – соответственно продольное и поперечное перемещения в пластине.

Условие контакта ребра и пластины можно записать так [9]:

$$C \frac{d^4 V(x, \pm 1)}{dx^4} + \sigma_y(x, \pm 1) = 0, \quad C = \frac{E_1 I}{2Gt}. \quad (1)$$

Здесь  $V(x, y) = Gv(x, y)$ . Кроме того, в силу симметрии задачи, можно считать, что ребро не деформируется вдоль оси, т. е.

$$U(x, \pm 1) = Gu(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

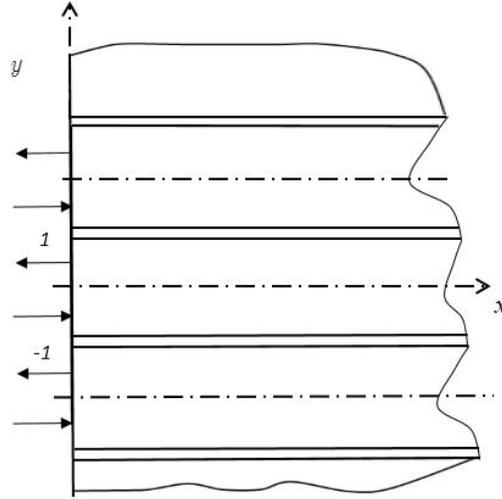


Рис. 1

Удовлетворяя граничным условиям (1), (2) с помощью метода начальных функций [9], получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций  $V_0(x)$ ,  $X_0(x)$

$$\begin{cases} (_C\alpha^4 L_{VV}(1) + L_{YV}(1))V_0(x) + (C\alpha^4 L_{VX}(1) + L_{YX}(1))X_0(x) = 0, \\ _L_{UV}(1)V_0(x) + L_{UX}(1)X_0(x) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$L_{UV}(1) = _L_{YX}(1) = -\frac{1}{2} [(1 - \nu) \sin \alpha + (1 + \nu) \alpha \cos \alpha],$$

$$L_{VX}(1) = -\frac{1 + \nu}{4} \sin \alpha, \quad L_{UX}(1) = -\frac{1}{4} \left[ \frac{3 - \nu}{\alpha} \sin \alpha + (1 + \nu) \cos \alpha \right], \quad (4)$$

$$L_{VV}(1) = -\frac{1}{2} (1 + \nu) \alpha \sin \alpha + \cos \alpha, \quad L_{YV}(1) = -(1 + \nu) \alpha (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha)$$

– дифференциальные операторы метода начальных функций, определенные при  $y = 1$ .

Ограничимся в формулах (3) для операторов (4) первыми членами разложений в ряды по степеням  $\alpha$ . Тогда получим такую систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} _L_{UX}(1)X_0(x) - \alpha V_0(x) = 0, \\ _L_{UV}(1)V_0(x) + L_{UX}(1)X_0(x) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Она имеет решение:

$$X_0(x) = C_2, \quad V_0(x) = C_1 + C_2 x. \quad (6)$$

По формулам метода начальных функций найдем все перемещения и напряжения, отвечающие начальным функциям (6). Например,

$$U(x, y) = L_{UV}(y)V_0(y) + L_{UX}(y)X_0(y) = -y\alpha(C_1 + C_2 x) + yC_2 \equiv 0. \quad (7)$$

Точно так же найдем

$$V(x, y) = C_1 + C_2x, \quad \sigma_x(x, y) = \sigma_y(x, y) = 0, \quad \tau_{xy}(x, y) = C_1.$$

Введем разрешающую функцию  $F(x)$ :

$$V_0 = L_{UX}(1)F(x), \quad X_0 = -L_{UV}(1)F(x). \quad (8)$$

Тогда второе уравнение системы (3) превратится в тождество, а из первого получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\{[C\alpha^4 L_{VV}(1) + L_{YV}(1)] L_{UX}(1) - [C\alpha^4 L_{VX}(1) + L_{YX}(1)] L_{UV}(1)\} F(x) = 0. \quad (9)$$

Разыскивая его решение в виде

$$F(x) = e^{\lambda x},$$

придем к трансцендентному характеристическому уравнению

$$L(\lambda) = \frac{C\lambda^3}{4} \left( (1 + \nu)\lambda + \frac{(3 - \nu)}{2} \sin 2\lambda \right) - \sin^2 \lambda = 0. \quad (10)$$

Оно, помимо двух нулевых корней, которым отвечает решение (6), имеет также бесконечное множество комплексно-сопряжённых корней  $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=2}^{\infty} = \Lambda$  и два вещественных корня  $\pm\lambda_1$ . Для них функцию  $F(x)$  можно представить в таком виде:

$$F(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k e^{\bar{\lambda}_k x} \quad (\lambda_k \in \Lambda, \lambda_1 < 0, Re\lambda_k < 0). \quad (11)$$

Ниже, для сокращения записи, будем считать корни  $\pm\lambda_1$  тоже комплексными, и лишь в окончательных выражениях перейдем к пределу, считая, что мнимая часть этих корней стремится к нулю. Пользуясь формулами (8), найдем начальные функции, отвечающие комплексным корням уравнения (10), а затем, по общим формулам метода начальных функций, – перемещения и напряжения

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ V(x, y) &= C_1 + C_2x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Функции

$$\begin{aligned}
\xi(\lambda_k, y) &= \frac{(1+\nu)}{4} (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\
\chi(\lambda_k, y) &= \left[ \frac{(1+\nu)}{4} \cos \lambda_k - \frac{(3+\nu)}{4\lambda_k} \sin \lambda_k \right] \cos \lambda_k y + \frac{(1+\nu)}{4} y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
s_x(\lambda_k, y) &= \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k - \nu \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
s_y(\lambda_k, y) &= - \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
t_{xy}(\lambda_k, y) &= \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y,
\end{aligned} \tag{13}$$

входящие в формулы (12), называются функциями Фадля-Папковича. Они таковы, что граничные условия по продольным сторонам полуполосы удовлетворяются автоматически.

Удовлетворяя с помощью выражений (12) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения коэффициентов  $a_k, \bar{a}_k$  из разложений по функциям Фадля-Папковича. Будем считать, что на торце полуполосы заданы нормальное и касательное напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \tag{14}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
\sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y), \\
\tau(y) &= C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y).
\end{aligned} \tag{15}$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $\bar{a}_k$  определяются отсюда в явном виде с помощью систем функций  $\{X_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$  и  $\{T_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$ , биортогональных к функциям Фадля-Папковича  $\{s_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{t_{xy}(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$  соответственно. А биортогональные функции для этих и других функций Фадля-Папковича находятся из решения уравнений:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, y) V_k(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s_y(\lambda, y) Y_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь  $\xi(\lambda, y), \chi(\lambda, y)$  и т. д. – порождающие функции. Они получаются из соответствующих функций Фадля-Папковича (13) заменой  $\lambda_k$  на комплексный параметр  $\lambda$ .

При  $\lambda = \lambda_m$  из уравнений (16) вытекают соотношения биортогональности типа:

$$\int_T s_x(\lambda_m, y) X_k(y) dy = \begin{cases} M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \quad (17)$$

$$\int_T t_{xy}(\lambda_m, y) T_k(y) dy = \begin{cases} \lambda_m M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где  $M_m = L'(\lambda_m)/2\lambda_m$ , а  $L'(\lambda_m)$  – производная функции  $L(\lambda)$ , определенная при  $\lambda = \lambda_m$ .  $T$  – контур интегрирования, лежащий в плоскости  $z = x + iy$  (составленный из отрезка мнимой оси  $y \in [-1, 1]$  и луча  $x \in (-\infty, 0]$ ), на который заменяется прямая интегрирования в формулах (16) в случае комплексных значений параметра  $\lambda$  [2], [3]. Понятно, что при всех  $\overline{\lambda_m}$  выполняются равенства типа:

$$\int_T s_x(\overline{\lambda_m}, y) X_k(y) dy = \int_T s_x(\lambda_m, y) \overline{X_k(y)} dy = 0, \quad (18)$$

$$\int_T t_{xy}(\overline{\lambda_m}, y) T_k(y) dy = \int_T t_{xy}(\lambda_m, y) \overline{T_k(y)} dy = 0.$$

Полагая в формулах (16)  $\lambda \rightarrow 0$  и учитывая, что при малых  $\lambda$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda, y) &\sim 1 + \dots, \quad t_{xy}(\lambda, y) \sim \lambda + \dots, \quad s_y(\lambda, y) \sim -\lambda^2 y + \dots, \\ L(\lambda) &\sim -\lambda^2 + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_k(y) dy = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T_k(y) dy = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y Y_k(y) dy = 0, \quad (20)$$

так, что функции  $\{V_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{T_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  ортогональны к константе, а функции  $\{Y_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  ортогональны к  $y$ . Поэтому, чтобы не потерять в разложениях Лагранжа по системам функций  $\chi(\lambda_k, y)$ ,  $t_{xy}(\lambda_k, y)$  некоторые константы, а в случае  $s_y(\lambda_k, y)$  – линейной функции, нужно ввести биортогональные функции с нулевым индексом  $V_0(y)$ ,  $T_0(y)$ ,  $Y_0(y)$ , ортогональные к функциям  $\chi(\lambda_k, y)$ ,  $t_{xy}(\lambda_k, y)$  и  $s_y(\lambda_k, y)$  соответственно. Сделаем это по формулам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, y) V_0(y) dy = -\frac{L(\lambda)}{\lambda^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_0(y) dy = -\frac{L(\lambda)}{\lambda}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y Y_k(y) dy = L(\lambda). \quad (21)$$

Правые части этих равенств выбраны так, что биортогональные функции с нулевым индексом ортогональны к соответствующим функциям Фадля-Папковича. А при  $\lambda = 0$  из формул (21) вытекают равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y Y_k(y) dy = 1. \quad (22)$$

Функции  $U_k(y)$ ,  $V_k(y)$ ,  $X_k(y)$ ,  $Y_k(y)$  и  $T_k(y)$  можно представить в виде суммы финитных, обращающихся в нуль вне отрезка  $|y| \leq 1$ , и не финитных частей, которые ортогональны ко всем функциям  $\{\sin m\pi\}_{m=1}^{\infty}$  или  $\{\cos m\pi\}_{m=1}^{\infty}$  на бесконечном промежутке [2]. Построим финитные части биортогональных систем функций, пользуясь результатами статьи [7].

**Построение финитных частей биортогональных функций.** Обозначим через  $u_k(y)$  финитную часть функции  $U_k(y)$  ( $k \geq 1$ ). Принимая в первой формуле (16)  $\lambda = m\pi = q_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), получим

$$\int_{-1}^1 \xi(q_m, y) u_k(y) dy = \frac{q_m L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (23)$$

Ниже потребуются следующие полезные формулы:

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) \sin(\lambda_k y) dy = -\frac{2q_m(-1)^m \sin \lambda_k}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad (24)$$

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = -\frac{2\lambda_k(-1)^m \sin \lambda_k}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad (25)$$

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) [\delta(y-1) + \delta(y+1)] dy = 2(-1)^m, \quad (26)$$

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] dy = 2(-1)^{m+1} q_m, \quad (27)$$

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] dy = 2(-1)^m q_m^2, \quad (28)$$

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] dy = 2(-1)^{m+1} q_m^3, \quad (29)$$

где  $\delta$ ,  $\delta'$  и т. д. – дельта-функции и их производные.

Возвращаясь к равенству (23) и имея в виду, что

$$\frac{q_m^5}{q_m^2 - \lambda_k^2} = q_m^3 + \lambda_k^2 q_m + \frac{\lambda_k^4 q_m}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad (30)$$

перепишем его в таком виде:

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) u_k(y) dy = -C (-1)^{m+1} \left( q_m^3 + \lambda_k^2 q_m + \frac{\lambda_k^4 q_m}{q_m^2 - \lambda_k^2} \right). \quad (31)$$

Воспользовавшись теперь формулами (25), (27) и (29), получим

$$u_k(y) = -C \left\{ \frac{\lambda_k^4 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] - \frac{1}{2} [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] \right\}. \quad (32)$$

Построим функцию  $v_k(y)$  – финитную часть функции  $V_k(y)$ . При  $\lambda = q_m$  имеем

$$\int_{-1}^1 \chi(q_m, y) v_k(y) dy = \frac{L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

Отсюда получим

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) v_k(y) dy = C (-1)^m \left( q_m^2 + \lambda_k^2 + \frac{\lambda_k^4}{q_m^2 - \lambda_k^2} \right). \quad (33)$$

Используя формулы (24), (26) и (28), приходим к следующему выражению:

$$v_k(y) = -C \left\{ \frac{\lambda_k^3 \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta(y-1) + \delta(y+1)] + \frac{1}{2} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] \right\}. \quad (34)$$

Найдем функцию  $v_0(y)$  – финитную часть биортогональной функций с нулевым индексом  $V_0(y)$ , полагая в соответствующем равенстве (21)  $\lambda = q_m$

$$\int_{-1}^1 \chi(q_m, y) v_0(y) dy = -\frac{L(q_m)}{q_m^2}.$$

Отсюда получим

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) v_0(y) dy = C (-1)^m q_m^2.$$

Пользуясь (28), найдем

$$v_0(y) = -\frac{C}{2} [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)]. \quad (35)$$

Обозначим  $x_k(y)$  – финитная часть функции  $X_k(y)$ . Принимая в третьей формуле (16)  $\lambda = q_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), придем к уравнению

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) x_k(y) dy = \frac{C q_m^3 (-1)^m}{2 (q_m^2 - \lambda_k^2)}.$$

А т. к.

$$\frac{q_m^3}{q_m^2 - \lambda_k^2} = q_m + \frac{\lambda_k^2 q_m}{q_m^2 - \lambda_k^2},$$

то, учитывая (24), (27), получим

$$x_k(y) = -\frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^2 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{1}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] \right\}. \quad (36)$$

Аналогично, полагая в четвертой формуле (16)  $\lambda = q_m$ , получим выражение для определения функции  $y_k(y)$  – финитной части функции  $Y_k(y)$ :

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) y_k(y) dy = \frac{C}{2} (-1)^{m+1} \frac{q_m^5}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (37)$$

Используя формулы (30), (24), (27) и (29), найдем

$$y_k(y) = \frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\lambda_k^2}{2} [\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] - \frac{1}{2} [\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] \right\}. \quad (38)$$

Финитную часть  $y_0(y)$  биортогональной функции с нулевым индексом  $Y_0(y)$  найдем из третьего равенства (21) при  $\lambda = q_m$ :

$$\int_{-1}^1 s_y(q_m, y) y_0(y) dy = L(q_m).$$

Учитывая (29), будем иметь

$$y_0(y) = -\frac{C}{4}[\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)]. \quad (39)$$

Принимая в последней формуле (16)  $\lambda = q_m$ , получим уравнение для определения функции  $t_k(y)$  – финитной части функции  $T_k(y)$ :

$$\int_{-1}^1 t_{xy}(q_m, y)t_k(y)dy = \frac{q_m L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}$$

или

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y)t_k(y)dy = \frac{C}{2}(-1)^m \frac{q_m^4}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (40)$$

Учитывая (25), (26) и (28), получим

$$t_k(y) = -\frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{2}[\delta(y-1) + \delta(y+1)] + \frac{1}{2}[\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] \right\}. \quad (41)$$

Для определения финитной части биортогональной функции с нулевым индексом, в соответствии с (21), получим уравнение

$$\int_{-1}^1 t_{xy}(q_m, y)t_0(y)dy = -\frac{L(q_m)}{q_m}.$$

Откуда, пользуясь (28), найдем

$$t_0(y) = \frac{C}{4}[\delta''(y-1) + \delta''(y+1)]. \quad (42)$$

Итак, финитные части функций, биортогональных к функциям Фадля-Папковича, имеют вид:

$$\begin{aligned} u_k(y) &= -C \left\{ \frac{\lambda_k^4 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\lambda_k^2}{2}[\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] - \frac{1}{2}[\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] \right\}, \\ v_k(y) &= -C \left\{ \frac{\lambda_k^3 \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{2}[\delta(y-1) + \delta(y+1)] + \frac{1}{2}[\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] \right\}, \\ x_k(y) &= -\frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^2 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{1}{2}[\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

$$y_k(y) = \frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} + \frac{\lambda_k^2}{2}[\delta'(y-1) + \delta'(y+1)] - \frac{1}{2}[\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)] \right\},$$

$$t_k(y) = -\frac{C}{2} \left\{ \frac{\lambda_k^4 \cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k} - \frac{\lambda_k^2}{2}[\delta(y-1) + \delta(y+1)] + [\delta''(y-1) + \delta''(y+1)] \right\},$$

$$\begin{aligned} v_0(y) &= -\frac{C}{2}[\delta''(y-1) + \delta''(y+1)], \quad y_0(y) = -\frac{C}{4}[\delta'''(y-1) + \delta'''(y+1)], \\ t_0(y) &= \frac{C}{4}[\delta''(y-1) + \delta''(y+1)]. \end{aligned}$$

**Разложения Лагранжа порождающих функций.** Дадим примеры разложений Лагранжа порождающих функций. В основе их построения лежат уравнения для

определения биортогональных систем. Таким путем удастся построить разложения Лагранжа не только порождающих функций. Если порождающую функцию разложить в степенной ряд по степеням параметра  $\lambda$ , то благодаря предельным переходам при  $\lambda \rightarrow 0$  можно построить разложения целых степенных функций (полиномов) – коэффициентов разложений при различных степенях  $\lambda$ .

Построим разложение Лагранжа заданной на отрезке  $[-1, 1]$  порождающей функции  $\xi(\lambda, y)$  по системе функций  $\{\xi(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ . Продолжим ее на всю вещественную ось в соответствии с формулой, которой она задана, и будем считать, что равенство

$$\xi(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \xi(\lambda_k, y) + \overline{A_k} \xi(\overline{\lambda_k}, y) \quad (44)$$

выполняется на всей оси. Умножим обе части равенства на некоторую биортогональную функцию  $U_m(y)$  и проинтегрируем от  $-\infty$  до  $+\infty$ , имея в виду, что при комплексных значениях параметра  $\lambda$ , т. е. справа, прямую интегрирования нужно заменить контуром  $T$ . Тогда, на основании первого равенства (16), а также соотношений биортогональности типа (17), (18) получим

$$\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = A_k M_k \lambda_k.$$

Откуда найдем искомые коэффициенты разложения

$$A_k = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{1}{\lambda_k M_k}. \quad (45)$$

Выделяя слагаемое, отвечающее вещественному корню  $\lambda_1$ , получим

$$\xi(\lambda, y) = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{\xi(\lambda_1, y)}{\lambda_1 M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\}. \quad (46)$$

Ряд (46) равномерно сходится к раскладываемой функции на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

Построим разложение Лагранжа порождающей функции  $\chi(\lambda, y)$  по системе функций Фадля-Папковича  $\chi(\lambda_k, y)$

$$\chi(\lambda, y) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \chi(\lambda_k, y) + \overline{A_k} \chi(\overline{\lambda_k}, y). \quad (47)$$

Учитывая, что функции  $V_k(y)$ , в силу первого равенства (20), ортогональны к константе, точно так же, как и выше, найдем

$$A_k = \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_k^2) M_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Умножим обе части равенства (47) на функцию  $V_0(y)$  и проинтегрируем по бесконечному промежутку. Учитывая, что функция  $V_0(y)$  ортогональна к функциям Фадля-Папковича  $\chi(\lambda_k, y)$ , на основании первых равенств (21), (22) найдем

$$A_0 = -\frac{L(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Ряд Лагранжа

$$\chi(\lambda, y) = -\frac{L(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{\chi(\lambda_1, y)}{M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right\}. \quad (49)$$

сходится равномерно к своей функции на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

Точно так же можно получить следующие разложения:

$$s_x(\lambda, y) = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{s_x(\lambda_1, y)}{M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right\}. \quad (50)$$

$$s_y(\lambda, y) = yL(\lambda) + \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{s_y(\lambda_1, y)}{\lambda_1^2 M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right\}. \quad (51)$$

$$t_{xy}(\lambda, y) = -\frac{L(\lambda)}{\lambda} + \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{t_{xy}(\lambda_1, y)}{\lambda_1 M_1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \cdot \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\}. \quad (52)$$

Ряды (50)–(52) равномерно сходятся при  $[-1, 1]$ .

**Разложения Лагранжа на основе финитных биортогональных функций.**

Приведем примеры разложений Лагранжа по функциям Фадля-Папковича, когда коэффициенты разложений находятся с помощью финитных биортогональных функций (43).

*Пример 1.* Пусть раскладываемая функция  $\sin \pi y$ . Представим ее рядом Лагранжа

$$\sin \pi y = \frac{u_1}{\lambda_1 M_1} \xi(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{u_k}{\lambda_k M_k} \xi(\lambda_k, y) + \frac{\bar{u}_k}{\bar{\lambda}_k M_k} \xi(\bar{\lambda}_k, y) \right\}, \quad |y| \leq 1.$$

Числа

$$u_k = \int_{-1}^1 \sin(\pi y) u_k(y) dy = -\frac{C \pi^5}{\lambda_k^2 - \pi^2}.$$

*Пример 2.* Функцию  $V(y) = \cos \pi y$  разложим в ряд Лагранжа

$$V(y) = v_0 + \frac{v_1}{M_1} \chi(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{v_k}{M_k} \chi(\lambda_k, y) + \frac{\bar{v}_k}{\bar{M}_k} \chi(\bar{\lambda}_k, y) \right\}. \quad (53)$$

Пользуясь формулами (43), найдем

$$v_k = \int_{-1}^1 \cos(\pi y) v_k(y) dy = \frac{\pi^4 C}{\lambda_k^2 - \pi^2}, \quad v_0 = \int_{-1}^1 \cos(\pi y) v_0(y) dy = \pi^2 C. \quad (54)$$

Ряд равномерно сходится на всем отрезке.

*Пример 3.* Если  $V(y) = y^2 - 1/3$ , то

$$v_k = -2C \lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, v_0 = 2C.$$

*Пример 4.* Разложение Лагранжа функции  $\sin \pi y$  по системе функций  $s_x(\lambda_k, y)$

$$\sin(\pi y) = \frac{x_1}{M_1} s_x(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{x_k}{M_k} s_x(\lambda_k, y) \right\},$$

$$x_k = \frac{-C}{2} \left( \frac{\pi \lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \pi^2} - \cos \pi \right). \quad (55)$$

*Пример 5.* Разложение Лагранжа функции  $\sin \pi y$  по системе функций  $s_y(\lambda_k, y)$

$$\sin(\pi y) = y \frac{C\pi^3}{2} + \frac{y_1}{\lambda_1^2 M_1} s_y(\lambda_1, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{y_k}{\lambda_k^2 M_k} s_y(\lambda_k, y) \right\},$$

$$y_k = -\frac{C\pi^5}{2(\lambda_k^2 - \pi^2)}. \quad (56)$$

*Пример 6.* Разложение Лагранжа по системе функций  $t_{xy}(\lambda_k, y)$

$$\frac{5}{9}y^4 - \frac{10}{3}y^2 + 1 = \frac{t_1}{\lambda_1 M_1} t_{xy}(\lambda_1, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_k}{\lambda_k M_k} t_{xy}(\lambda_k, y) \right\}, \quad (57)$$

$$t_k = \frac{20C}{9\lambda_k^2} (\lambda_k^3 \cot \lambda_k + 3\lambda_k \cot \lambda_k - 3).$$

Ряды (55), (56), (57) равномерно сходятся к своим функциям на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

**Пример решения краевой задачи.** Приведем пример решения краевой задачи. Пусть на торце полуполосы заданы нормальные напряжения  $\sigma_x(0, y) = \sigma(y) = y^5 - \frac{10}{7}y^3 + \frac{3}{7}y$ , а касательные  $\tau(y) = 0$ . Воспользуемся общими формулами для перемещений и напряжений, полученными в статье [5]:

$$U(x, y) = \frac{\xi(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 (1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \sigma_k \frac{\overline{Im(\lambda_k e^{\lambda_k x})}}{Im(\lambda_k)} \right\},$$

$$V(x, y) = \frac{\chi(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 (-1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \sigma_k \frac{Im(\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\},$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{s_x(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 (1 - \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \sigma_k \frac{Im(-\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{Im(\lambda_k)} \right\}, \quad (58)$$

$$\sigma_y(x, y) = -\frac{s_y(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 (1 + \lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{s_y(\lambda_k, y)}{M_k \lambda_k^2} \sigma_k \lambda_k \frac{\overline{Im(-\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}}{Im(\lambda_k)} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{t_{xy}(\lambda_1, y)}{M_1} \sigma_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \sigma_k \lambda_k \frac{\overline{Im(-e^{\lambda_k x})}}{Im(\lambda_k)} \right\}.$$

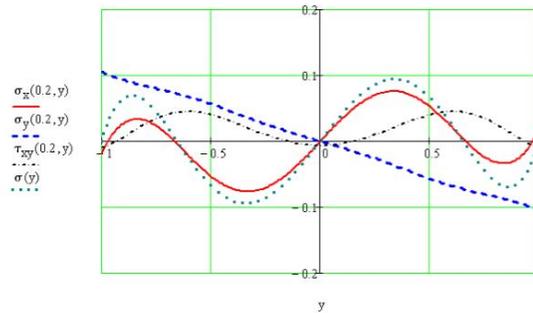


Рис. 2

Подставляя сюда числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y)x_k(y)dy = -C \left\{ \frac{8 [\lambda_k^4 + 10\lambda_k^3 ctg \lambda_k - 45\lambda_k^2 - 105\lambda_k ctg \lambda_k + 45]}{14\lambda_k^4} + \frac{1}{6} \right\},$$

получим решение задачи. На рис. 2 показан характер распределения касательных и нормальных напряжений в сечении полуэллипса  $x = 0.2$ , а также график раскладываемой функции.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
- [2] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.
- [3] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуэллипсе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.
- [4] Меньшова, И. В., Семенова И. А., Храмова, Н. В. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полуэллипсе. Обратнo-симметричная задача // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2 (20). С. 119–130.
- [5] Себряков Г. Г., Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Семенова И. А. Нечетно-симметричная краевая задача теории упругости для полуэллипса. Точное решение // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462, № 6. С. 662–665.
- [6] Семенова И. А. Примеры аналитических решений обратнo симметричной краевой задачи теории упругости в полуэллипсе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 215–224.
- [7] Меньшова И. В., Семенова И. А. Биортогональные системы функций и разложения Лагранжа по функциям Фадля-Папковича в задаче изгиба полуэллипса с продольными ребрами жесткости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21, № 24. С. 579–598.

[8] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971. 518 с.

[9] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М. : Стройиздат, 1975. 224 с.

I. A. Semenova

## HALF-PLANE WITH PERIODIC ARRAY OF STIFFENERS (IS INVERSELY SYMMETRIC DEFORMATION)

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** We study the basic properties (in particular, the Lagrangian decomposition) Feature-Fadl Papkovich arising when solving boundary value problem for the half-plane containing a periodic set of ribs, which receive only the flexural deformation and the tensile compression. Lagrangian decomposition, in contrast to the expansions, which appear in the solution of boundary value problems of elasticity theory in the half, when the unknown expansion coefficients are determined from the expansions of two given at the end of the half-strip functions in series of two systems of functions Fadl-Papkovich, called the expansion of only one function for whatever or a system of functions. In this sense, the Lagrange series play the same role as trigonometric series play in decisions Filon-Ribiere [1]. Fadl-type functions Papkovich depends on the boundary conditions on the long sides of the half-strip. Examples Lagrange expansions, Function-Fadl Papkovich arising in the solution of a boundary value problem can be found in the papers [2-7]. There are some common methods and approaches in the study of basic properties of systems functions Fadl-Papkovich. However, in each case having its own specific characteristics that are unique to a given boundary value problem and its corresponding functions Fadl-Papkovich. Lagrange features expansions arising when solving the boundary value problem, the subject of this article. Two types of decomposition. Decomposition (depending on a certain parameter, the whole of this parameter) generators [8] functions, ie functions generating any system of functions Fadl-Papkovich when the parameter runs through the set of eigenvalues ??of the boundary value problem and decomposition using finite parts of biorthogonal functions. In the first case, the whole generating function continues as a whole is a segment - end of the half-strip in the whole infinite straight line, biorthogonal functions not explicitly written out, and the desired expansion coefficients of the Lagrange series are determined directly from the equation for determining the bi-orthogonal functions. In the second case biorthogonal functions are written out explicitly. They are defined in the segment - the half-strip end, have a simple form, but most importantly, they can be used to build not only the expansion of analytic functions, but actually, all functions for which there is a Fourier integral. In order to construct a Lagrangian decomposition, defined on the interval - end of the half-strip - function, you must first this function in any way out of this segment to continue. The way this is done will depend on the continuation of the expansion coefficients in the Lagrange series. Thus, the Lagrange decomposition is not unique. Nonuniqueness Lagrange expansions caused by complex-systems functions Fadl-Papkovich - one of the most important properties of these systems functions.

**Keywords:** bending strip; ribs; the Fadle-Papkovich functions; biorthogonal functions.

---

*Semenova Irina Alexandrovna*, Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

**REFERENCES**

- [1] Timoshenko S. P., Goodier J. *Elasticity Theory*. M.: Nauka, 1975. 576 p.
- [2] Kovalenko, M. D., Shulyakovskaya T. D. Decomposition on Fadlya – Papkovich’s functions in a strip. *Theory bases // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body*. 2011. № 5. P. 78–98.
- [3] Kovalenko, M. D., Menshova I. V., Shulyakovskaya T. D. Decomposition on functions Fadlya – Papkovich. Examples of decisions in a semi-strip // *News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body*. 2013. № 5. P. 136–158.
- [4] Menshova I. V., Semenova I. A., Khramova N. V. Decompose in funktsiyam Fadlan – Papkovicha in polupolos. *Backsimmetrichnoy problems // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state*. 2014. № 2 (20). P. 119–130.
- [5] Sebryakov G. G., Kovalenko M. D., Menshova I. V., Semenova I. A. An Odd-Symmetric Boundary Value Problem of Elasticity Theory for a Semi-Strip: Exact Solution // *Doklady Physics*. 2015. Vol. 60. № 6. P. 274–277.
- [6] Semenova I. A. Examples of analytical solutions is inversely symmetric boundary-value problem of elasticity theory in polopolo // *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state*. 2014. № 4 (22). P. 215–224.
- [7] Menshov I. V., Semenov I. A. Orthogonal systems of functions and decomposition of Lagrange Function Fadl-Papkovich problem in a half-strip bending with longitudinal stiffeners // *Mechanics of Composite Materials and Structures*. - 2015 Vol. 21. - No 24. - Pp. 579-598.
- [8] Ibragimov I. I. *Methods of interpolation functions and some of their applications*. M.: Nauka, 1971. 518 p.
- [9] Vlasov V. V. *Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics*. M.: Stroyizdat, 1975. 224 p.

В. Д. Коробкин, М. Г. Ордян

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛЕЙ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж,  
Россия*

**Аннотация.** Рассмотрен вопрос построения непрерывных полей скоростей перемещений при пластическом течении материала с гладким профилем. Получены дифференциальные уравнения и первые определенные интегралы. Используя граничные условия на входе материала в пластическую область решена задача Коши и определены скорости перемещений.

В качестве примера определены поля скоростей для матрицы, профиль которой ограничен дугами окружностей. Проведено сравнение усилий деформирования с точными решениями при течении материала через сигмовидные матрицы.

**Ключевые слова:** пластичность, технологические задачи, поле скоростей перемещений, верхняя оценка усилий деформирования.

УДК: 539.374

Вопрос о непрерывных полях скоростей перемещений возник в связи с тем, что, как показано в работе [1], в упрочняющихся материалах нет разрыва скоростей перемещений. При деформировании упрочняющихся материалов, как правило, учитывают влияние факта неразрывности в среднем. Используют решение для жестко-пластического материала и считают, что кинематика для упрочняющегося материала мало отличается. Иногда, как, например, в работе [2], вместо поверхности разрыва вводят слой, устремляя при этом его толщину к нулю и фактически получают фиктивную поверхность разрыва скоростей перемещений. Течение жестко-пластического материала подробно изучено классиками теории пластичности и теории обработки металлов давлением. Наша задача заключается в следующем: используя метод, предложенный в работе [3], определить непрерывные поля скоростей перемещений для конкретных профилей матрицы и сравнить удельные усилия деформирования с известными точными решениями.

1. Рассмотрим плоский симметричный случай.

---

© Коробкин В. Д., Ордян М. Г., 2016

*Коробкин Валерий Дмитриевич*

**e-mail:** v.d.korobkin@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж, Россия.

*Ордян Михаил Гарегинович*

**e-mail:** omg84@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 15.02.2016

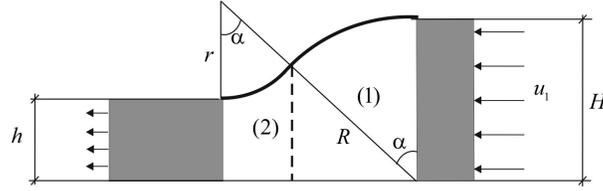


Рис. 1. Схема пластического течения

Пусть уравнение профиля матрицы задано в виде

$$y = f_1(x). \quad (1.1)$$

Будем считать, что уравнения траекторий движений точек описываются следующим образом:

$$y = C f_1(x), \quad (1.2)$$

где  $C$  — постоянная, которая изменяется в пределах от нуля до 1.

Дифференциальные уравнения траекторий движения точек

$$\frac{dy}{dx} = C f_1'(x). \quad (1.3)$$

Рассмотрим случай установившегося процесса

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x}. \quad (1.4)$$

Запишем условие несжимаемости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (1.5)$$

Из (1.2) и (1.3) получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y f_1'(x)}{f_1(x)}. \quad (1.6)$$

Подставляя в условия несжимаемости, получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{y f_1'(x)}{f_1(x)} \frac{\partial u_y}{\partial y} = -u_x \frac{f_1'(x)}{f_1(x)}. \quad (1.7)$$

Интегралы этого уравнения

$$y u_x = C_2, \quad \frac{y}{f_1(x)} = C_3. \quad (1.8)$$

Для определения  $u_x$  необходимо решить задачу Коши.

2. Рассмотрим случай, когда компоненты скорости  $u_x$  зависят только от координаты  $x$ .

Уравнение для определения  $u_x$  имеет вид

$$\frac{du_x}{dx} + \frac{u_x f_1'(x)}{f_1(x)} = 0. \quad (2.1)$$

Решая уравнение (2.1), имеем:

$$u_x f_1(x) = C_4. \quad (2.2)$$

Используя граничное условие при  $x = 0$ ;  $u_x = u_1$ ;  $f_1(0) = H$ , определим

$$u_x = \frac{u_1 H}{f_1(x)}. \quad (2.3)$$

Если предположить:  $H = 1$ , то  $R = 1$

$$u_x = \frac{u_1}{f_1(x)}, f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}. \quad (2.4)$$

В итоге имеем:

$$u_x = \frac{u_1}{f_1(x)}; u_y = \frac{u_1 f_1'(x)}{f_1^2(x)} y. \quad (2.5)$$

Таким образом:

$$\varepsilon_x = -\frac{u_1 f_1'(x)}{f_1^2(x)}; \varepsilon_y = \frac{u_1 f_1'(x)}{f_1^2(x)}; \gamma_{xy} = -u_1 \frac{1 + 2x^2}{f_1^5(x)}. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом можно определить компоненты скорости деформаций во второй зоне пластической деформации.

Используя экстремальный принцип определения верхней оценки усилий деформирования, получим

$$q = k(N_1 + N_2), \quad (2.7)$$

где

$$N_1 = \int_0^{\sin\alpha} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{4\varepsilon_x^2 + \gamma_{xy}^2} dy dx; N_2 = \int_{\sin\alpha}^{(1+r)\sin\alpha} \int_0^{\sqrt{2}-\sqrt{1-(x-\sqrt{2})^2}} \sqrt{4\varepsilon_x^2 + \gamma_{xy}^2} dy dx,$$

где  $kN_1$  и  $kN_2$  — соответственно удельные усилия деформирования для первой и второй зон пластической деформации.

Для различных углов  $\alpha$  и радиусов  $r$ , то есть отношения  $\frac{H}{h}$  получены удельные усилия деформирования

$$h = (1 + r)\cos\alpha - r. \quad (2.8)$$

Сравнение удельных усилий прессования, полученных в данной работе с аналогичными результатами для сигмоидной матрицы [4], показывает интервал применимости данного класса полей скоростей перемещений. Оптимальные результаты получены для углов  $\alpha = (50^\circ \div 70^\circ)$ . Максимальная погрешность составила один процент.

Вывод. При определении усилий прессования упрочняющегося материала можно использовать кинематику течения, полученную при применении непрерывных полей скоростей перемещений, сравнивая предварительно с результатами удельных усилий для жестко-пластического материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
- [2] Коробкин В. Д., Чудаков П. Д. Диссипация мощности на поверхностях разрыва в упрочняющемся материале // Изв. АН СССР, МГТ. 1969. № 3. С. 158–161.
- [3] Коробкин В. Д. Построение непрерывных полей скоростей по линиям тока // Изв. вузов. Машиностроение. 1973. № 9. С. 28–31.
- [4] Richmond O., Devenpeck M. L. Proc. 4-th Congr. Appl. Mech. ASME. 1962. P. 1053.

V. D. Korobkin, M. G. Ordyan

**APPLICATION OF CONTINUOUS FIELDS OF RATES OF DISPLACEMENTS  
IN SOME TECHNOLOGICAL PROBLEMS IN THE THEORY OF PLASTICITY**

*Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh, Russia*

**Abstract.** The question of construction of continuous fields of rates of displacements at plastic flow of material with a smooth profile is considered. Differential equations and the first definite integrals are obtained. Using the boundary conditions on the input material in plastic region the Cauchy problem is solved and rates of displacements are determined.

As an example, the velocities field for the matrix, the profile of which is limited by circular arcs, is defined. A comparison of the efforts the deformation with the exact solutions for the flow of material through the sigmoid matrices is conducted.

**Keywords:** plasticity, technological problems, the field of rates of displacements, the upper estimate of deformation efforts.

**REFERENCES**

- [1] Ivlev D. D., Bikovtsev G. I. Theory of a hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 232 p. (in Russian)
- [2] Korobkin V. D., Chudakov P. D. Dissipation of the power at surfaces of discontinuity in the hardening material // Izv. AN SSSR, MTT. 1969. № 3. P. 158–161. (in Russian)
- [3] Korobkin V. D. Построение непрерывных полей скоростей по линиям тока // Izv. vuzov, Mashinostroenie. 1973. № 9. P. 28–31. (in Russian)
- [4] Richmond O. Devenpeck M. L. Proc. 4-th Congr. Appl. Mech. ASME. 1962. P. 1053.

---

*Korobkin Valery Dmitrievich*

e-mail: v.d.korobkin@yandex.ru, Doctor Sci. Phys. & Math, Professor, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh, Russia.

*Ordyan Mikayel Gareginovich*

e-mail: omg84@mail.ru, PhD in Phys. & Math, Assoc. Professor, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Voronezh, Russia.

В. Н. Орлов<sup>1,2</sup>, Н. В. Кудряшова<sup>2</sup>

## ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

<sup>1</sup>Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Ялта, Россия

<sup>2</sup>Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка с полиномиальной правой частью третьей степени. Доказана теорема существования решения этого уравнения в области аналитичности, а также получено аналитическое приближенное решение в случае точных начальных условий.

**Ключевые слова:** нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажорант, область аналитичности, аналитическое приближенное решение.

УДК: 517.928.4

**Результаты исследования и их обсуждение.** Впервые появление нелинейного дифференциального уравнения связано с именами Риккати (конец 16 века), Абеля (1825 год), Пенлеве (1889 год). Как отмечается в работах [1]–[8], нелинейные дифференциальные уравнения указанных авторов имеют широкое применение в различных областях науки и техники. Большой вклад в разрешимость в квадратурах этой категории дифференциальных уравнений внесли известные ученые Белоруссии Н. П. Еругин, Н. А. Лукашевич, А. И. Яблонский, А. А. Самодуров, А. В. Чичурин. Тем не менее проблема решения данной категории дифференциальных уравнений далека от завершения, причиной тому являются подвижные особые точки, являющиеся препятствием к разрешимости в квадратурах данной категории дифференциальных

---

© Орлов В. Н., Кудряшова Н. В., 2016

*Орлов Виктор Николаевич*

**e-mail:** orlowvn@rambler.ru, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Математика, теория и методика обучения математике», Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Ялта, Россия; доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

*Кудряшова Наталья Валерьевна*

**e-mail:** natakudry94@mail.ru, студентка 5 курса физико-математического факультета, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.12.2015

уравнений [1]–[8]. С 1981 года появились работы одного из соавторов [1]–[8], посвященные математическому обоснованию аналитического приближенного метода решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. Как свидетельствуют публикации [9]–[12], этот метод успешно можно применять к данной категории нелинейных дифференциальных уравнений. Основой аналитического приближенного метода является новая версия метода мажорант в доказательстве теорем существования решения нелинейных дифференциальных уравнений.

В данной работе используется метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, предложенный в работах [1]–[8]. Идея метода доказательства теорем существования, предложенная в этих работах, основана на применении метода мажорант не к правой части дифференциальных уравнений, как это представлено в классической литературе, а к самому решению нелинейного дифференциального уравнения. Такой подход позволяет определить область действия теоремы, построить само приближенное решение дифференциального уравнения и получить оценки этого решения.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''' = a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y + a_4(x),$$

где  $a_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  – аналитические функции в рассматриваемой области. С помощью некоторой замены переменной

$$y = u(x)w(x) + v(x)$$

приводится к нормальному виду

$$y''' = y^3 + r(x)$$

при условиях

$$\begin{cases} u(x) = C; \\ v(x) = -\frac{C^2 a_2(x)}{3}; \\ a_1(x) = \frac{1}{C^2}; \\ a_3(x) = \frac{C^2}{3} a_2^2(x); \\ r(x) = -\frac{C^4 a_2(x)}{27} - \frac{C^2}{3} a_2'''(x) + a_4(x). \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$y''' = y^3 + r(x), \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = y_1; \\ y''(x_0) = y_2. \end{cases} \quad (2)$$

**Теорема 1.** Пусть

1.  $r(x) \in C^\infty$  в области

$$|x - x_0| < \rho_1,$$

где  $0 < \rho_1 = \text{const}$ ;

1.  $\exists M_1 : \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \leq M_1$ , где  $M_1 = \text{const}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Тогда решение задачи Коши (1)–(2) является аналитической функцией

$$y(x) = \sum_0^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (3)$$

в области

$$|x - x_0| < \rho_2,$$

$$\text{где } \rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{(M+1)^2} \right\}, M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** В силу условия теоремы имеем

$$r(x) = \sum_0^{\infty} A_n (x - x_0)^n. \quad (4)$$

Подставим (3) и (4) в (1):

$$\sum_3^{\infty} C_n n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3} = \sum_0^{\infty} (C_n^{**} + A_n) (x-x_0)^n, \quad (5)$$

где  $C_n^{**} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^*$ ,  $C_n^* = \sum_0^n C_i C_{n-i}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Равенство (5) обратится в тождество при условиях:

$$n(n-1)(n-2)C_n = C_{n-3}^{**} + A_{n-3}, \quad (6)$$

которые позволяют однозначно определить все коэффициенты  $C_n$ , начиная с  $n \geq 3$ :

$$C_3 = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} (C_0^3 + A_0),$$

$$C_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} (3C_0^2 C_1 + A_1),$$

$$C_5 = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} (3C_0 C_1^2 + 3C_0^2 C_2 + A_2),$$

$$C_6 = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} (3C_0^2 C_3 + 6C_0 C_1 C_2 + C_1^3 + A_3).$$

Таким образом, получаем формальное представление решения уравнения (5) в виде (3). В силу однозначности определения коэффициентов  $C_n$  из (6) следует единственность полученного формального решения.

Исходя из структуры коэффициентов  $C_3 - C_6$ , методом математической индукции докажем справедливость оценок:

$$|C_{3n}| \leq \frac{1}{3n(3n-1)(3n-2)} (M+1)^{2n+1}, \quad (7)$$

$$|C_{3n+1}| \leq \frac{1}{(3n+1)3n(3n-1)} (M+1)^{2n+1}, \quad (8)$$

$$|C_{3n+2}| \leq \frac{1}{(3n+2)(3n+1)3n} (M+1)^{2n+1}, \quad (9)$$

где

$$M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Докажем оценку (7). Из (6) с учетом (7)–(9) имеем

$$|C_{3n+3}| = \left| \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} (C_{3n}^{**} + A_{3n}) \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \left( \sum_{i=1}^{3n} C_i C_{3n-i}^* + A_{3n} \right) \right| = \\
& = \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \left( \left| \sum_{i=1}^{3n} C_i \sum_{j=1}^{3n-i} C_j C_{3n-i-j} \right| + |A_{3n}| \right) \leq \\
& \leq \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \left( \sum_{i=3}^{3n} \frac{(M+1)^{i+1}}{i(i-1)(i-2)} \times \right. \\
& \times \sum_{j=3}^{3n-i} \frac{(M+1)^{j+1}}{j(j-1)(j-2)} \cdot \frac{(M+1)^{2n-i-j-2}}{(3n-i-j)(3n-i-j-1)(3n-i-j-2)} + M = \\
& = \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \times \sum_{i=3}^{3n} \frac{(M+1)^{i+1}}{i(i-1)(i-2)} (M+1)^{2n-i-1} \cdot \\
& \left. \sum_{j=3}^{3n-i} \frac{1}{j(j-1)(j-2)} \frac{1}{(3n-i-j)(3n-i-j-1)(3n-i-j-2)} + M \right).
\end{aligned}$$

Далее

$$|C_{3n+3}| \leq \frac{(M+1)^{2n}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \left( (3n-3) + \frac{M}{(M+1)^{2n}} \right).$$

Окончательно

$$|C_{3n+3}| \leq \frac{(M+1)^{2n+3}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}.$$

Аналогичным образом подтверждаются оценки (8) - (9).

Покажем сходимость ряда (3) в области  $|x - x_0| < \rho_2$ .

Рассмотрим ряд

$$\sum_0^{\infty} v_n (x - x_0)^n = \sum_0^{\infty} v_{3k} (x - x_0)^{3k} + \sum_0^{\infty} v_{3k+1} (x - x_0)^{3k+1} + \sum_0^{\infty} v_{3k+2} (x - x_0)^{3k+2},$$

который в силу (7)-(9) является мажорирующим для ряда (3).

Имеем:

$$\begin{aligned}
\sum_0^{\infty} v_n (x - x_0)^n &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)} (M+1)^{2k+1} (x - x_0)^{3k} + \\
&+ \sum_0^{\infty} \frac{1}{3k(3k+1)(3k-1)} (M+1)^{2k+1} (x - x_0)^{3k+1} + \\
&+ \sum_0^{\infty} \frac{1}{3k(3k+2)(3k+1)} (M+1)^{2k+1} (x - x_0)^{3k+2}.
\end{aligned}$$

На основании признака Даламбера для первого ряда, находящегося в правой части последнего ряда, имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(M+1)^{2k+3} (x - x_0)^{k+1} 3k(3k-1)(3n-2)}{3k(3k-1)(3k+1)(M+1)^{2k+1} (x - x_0)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| (M+1)^2 (x - x_0) \frac{3k-2}{3k+1} \right| =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (M+1)^2 |x - x_0| < 1.$$

Аналогично показываем для остальных двух рядов.

Следовательно, мажорантный ряд сходится в области  $|x - x_0| < \frac{1}{(M+1)^2}$ .

Положим  $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{(M+1)^2} \right\}$ , тогда получаем сходимость ряда (3) в области  $|x - x_0| < \rho_2$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения

$$y_N(x) = \sum_0^N C_n(x - x_0)^n, \quad (10)$$

задачи (1)-(2) в области

$$|x - x_0| < \rho_3$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| \leq \Delta, \quad (11)$$

где

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{2N+5}{3}} \cdot |x - x_0|^{N+1}}{3n \left(1 - (M+1)^2 |x - x_0|^3\right)} \left( \frac{1}{(3n-1)(3n-2)} + \frac{|x - x_0|}{(3n-1)(3n+1)} + \frac{|x - x_0|^2}{(3n+1)(3n+2)} \right) \quad (12)$$

в случае  $N+1 = 3n$ ,

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{2N+3}{3}} \cdot |x - x_0|^{N+1}}{(3n+1) \left(1 - (M+1)^2 |x - x_0|^3\right)} \left( \frac{1}{3n(3n-1)} + \frac{|x - x_0|}{3n(3n+2)} + \frac{(M+1)^2 |x - x_0|^2}{(3n+2)(3n+3)} \right) \quad (13)$$

в случае  $N+1 = 3n+1$ ,

$$\Delta \leq \frac{(M+1)^{\frac{2N+1}{3}} \cdot |x - x_0|^{N+1}}{(3n+2) \left(1 - (M+1)^2 |x - x_0|^3\right)} \left( \frac{1}{3n(3n+1)} + \frac{(M+1)^2 |x - x_0|}{(3n+1)(3n+3)} + \frac{(M+1)^2 |x - x_0|^2}{(3n+3)(3n+4)} \right) \quad (14)$$

в случае  $N+1 = 3n+2$ ,

при этом  $\rho_3 = \min \left\{ \rho_2, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^2}} \right\}$ ,  $\rho_2$  из теоремы 1,  $M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**Доказательство.** Докажем теорему для случая  $N+1 = 3n$ . Имеем:

$$\begin{aligned} |y(x) - y_N(x)| &= \left| \sum_0^\infty C_n(x - x_0)^n - \sum_0^N C_n(x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{N+1}^\infty C_n(x - x_0)^n \right| = \\ &= \left| C_{N+1}(x - x_0)^{N+1} + C_{N+2}(x - x_0)^{N+2} + \dots + C_{N+k}(x - x_0)^{N+k} + \dots \right| = \\ &= \left| C_{3n}(x - x_0)^{3n} + C_{3n+1}(x - x_0)^{3n+1} + C_{3n+2}(x - x_0)^{3n+2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + C_{3n+k-1}(x - x_0)^{3n+k-1} + \dots \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |C_{3n}| \cdot |x - x_0|^{3n} + |C_{3n+1}| \cdot |x - x_0|^{3n+1} + |C_{3n+2}| \cdot |x - x_0|^{3n+2} + \dots \\
&\quad + |C_{3n+k-1}| \cdot |x - x_0|^{3n+k-1} + \dots \leq \\
&\leq \frac{(M+1)^{2n+1} \cdot |x - x_0|^{3n}}{3n(3n-1)(3n-2)} + \frac{(M+1)^{2n+1} \cdot |x - x_0|^{3n+1}}{3n(3n-1)(3n+1)} + \frac{(M+1)^{2n+1} \cdot |x - x_0|^{3n+2}}{3n(3n+1)(3n+2)} + \\
&+ \frac{(M+1)^{2n+3} \cdot |x - x_0|^{3n+3}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} + \frac{(M+1)^{2n+3} \cdot |x - x_0|^{3n+4}}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)} + \frac{(M+1)^{2n+3} \cdot |x - x_0|^{3n+5}}{(3n+5)(3n+4)(3n+3)} + \\
&+ \frac{(M+1)^{2n+5} \cdot |x - x_0|^{3n+6}}{(3n+6)(3n+5)(3n+4)} + \frac{(M+1)^{2n+5} \cdot |x - x_0|^{3n+7}}{(3n+7)(3n+6)(3n+5)} + \frac{(M+1)^{2n+5} \cdot |x - x_0|^{3n+8}}{(3n+8)(3n+7)(3n+6)} + \dots \leq \\
&\leq \frac{1}{1 - (M+1)^2 |x - x_0|^3} \left( \frac{(M+1)^{2n+1} \cdot |x - x_0|^{3n}}{3n(3n-1)(3n-2)} + \frac{(M+1)^{2n+1} \cdot |x - x_0|^{3n+1}}{3n(3n-1)(3n+1)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{(M+1)^{2n+1} \cdot |x - x_0|^{3n+2}}{3n(3n+1)(3n+2)} \right) = \\
&= \frac{(M+1)^{2n+1} \cdot |x - x_0|^{3n}}{3n \left( 1 - (M+1)^2 |x - x_0|^3 \right)} \left( \frac{1}{(3n-1)(3n-2)} + \frac{|x - x_0|}{(3n-1)(3n+1)} + \frac{|x - x_0|^2}{(3n+1)(3n+2)} \right) = \\
&= \frac{(M+1)^{\frac{2N+5}{3}} \cdot |x - x_0|^{N+1}}{3n \left( 1 - (M+1)^2 |x - x_0|^3 \right)} \left( \frac{1}{(3n-1)(3n-2)} + \frac{|x - x_0|}{(3n-1)(3n+1)} + \frac{|x - x_0|^2}{(3n+1)(3n+2)} \right)
\end{aligned}$$

Следовательно, получили оценку погрешности (12). Оценка справедлива в области

$$|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^2}}.$$

Для вариантов  $N+1 = 3n+1$ ,  $N+1 = 3n+2$  получаем (13) и (14) соответственно. Теорема доказана.

**Пример.** Найдём приближенное решение задачи Коши (1)-(2) в случае  $r(x) = 0$  для начальных данных  $y(1) = \sqrt{2}$ ,  $y'(1) = \sqrt{2}/5$ ,  $y''(1) = 1$ .

Выберем значение аргумента  $x = 1,1$ . Используя формулу (10), при  $N = 3$  вычислим приближенное решение. Расчеты приведены в таблице 1.

Таблица 1

x	y	y <sub>3</sub>	Δy	Δy <sub>3</sub>	Δ <sub>1</sub>
1,1	1,44400	1,45297	0,00897	0,03	0,01

где  $y$  – значение точного решения,  $y_3$  – приближенное решение задачи Коши (1)–(2),  $\Delta y$  – абсолютная погрешность,  $\Delta y_3$  – априорная погрешность, полученная по теореме 2,  $\Delta_1$  – апостериорная погрешность, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности. Для  $\varepsilon = 0,01$  получаем  $N = 4$ . Так как добавка в структуре приближенного решения для  $N = 4$  не превышает требуемой точности. Следовательно, приближенное решение  $y_3$  имеет погрешность  $\varepsilon = 0,01$ .

**Вывод.** В работе получено решение двух задач из общего набора, необходимого для аналитического приближенного метода решения нелинейного дифференциального уравнения. Приведённый расчет эксперимента иллюстрирует эффективную возможность оптимизировать априорную погрешность с помощью апостериорной погрешности в отсутствие точного решения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.
- [2] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Риккати // Науч.-техн. ведомости СПбПУ. 2008. № 4. С. 102–108.
- [3] Орлов В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник МАИ. 2008. Т. 15, № 5. С. 128–135.
- [4] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 10. С. 1829–1832.
- [5] Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.
- [6] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2009. № 4 (35). 2009. С. 23–32.
- [7] Редкозубов С. А., Орлов В. Н. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля // Известия института инженерной физики. 2009. № 4 (14). С. 12–14.
- [8] Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 399–405.
- [9] Орлов В. Н., Пчелова А. З. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 (14). С. 113–132.
- [10] Пчелова А. З. О точных критериях существования подвижных особых точек решений одного дифференциального уравнения в комплексной области // Современные проблемы математики, механики и информатики: материалы Международной научной конференции. Тула: Тульский гос. ун-т, 2013. С. 107–110.
- [11] Орлов В. Н., Гузь М. П. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения // Междунар. научно-практич. конф. “Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий”, 12–15 августа, 2013 г. Чебоксары. С. 36–46.
- [12] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Междунар. научно-практич. конф. “Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий”. 2013. С. 47–52.

V. N. Orlov<sup>1,2</sup>, N.V. Kudryashova<sup>2</sup>

**THE EXISTENCE THEOREM FOR SOLVING A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH POLYNOMIAL RIGHT-HAND SIDE OF THE THIRD DEGREE IN THE FIELD OF ANALYTIC**

*Vernadsky Crimean Federal center, Yalta, Russia*

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The article considers the nonlinear differential equation of the third order with polynomial right-hand side of the third degree. We proved the theorem of existence of the solution of this equation in the field of analyticity, and also received the analytical approximate decision in case of exact entry conditions.

**Keywords:** non-linear differential equation, Cauchy problem, method majorants, field of analytic.

**REFERENCES**

- [1] Orlov V. N. The method of approximate solution of the first, second Painlevé differential equations and the Abel. M.: Moscow State Pedagogical University, 2013. 174 p.
- [2] Orlov V. N. The method of approximate solution of the first, second differential Riccati equations // Scientific and technical vedomosti of the St. Petersburg. Petersburg. 2008. № 4. P. 102–108.
- [3] Orlov V. N. A method for the approximate solution of differential equations of the matrix Riccati // Vestnik MAI. 2008. Vol. 15. № 5. P. 128–135.
- [4] Orlov V. N., Lukashevich N. A. The study of the approximate solutions of the second Painlevé equation // Differ. equation. 1989. Vol. 25, № 10. P. 1829–1832.
- [5] Orlov V. N. The approximate solution of the first Painlevé equation // Vestnik of A. Tupolev Kazan State Technical University. 2008. № 2. P. 42–46.
- [6] Orlov V. N. The study of the approximate solution of differential equations of Abel in the neighborhood of a singular point of mobile // Vestnik of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences. 2009. № 4 (35). P. 23–32.
- [7] Redkozubov S. A., Orlov V. N. Exact criteria for the existence of a singular point of mobile differential equation Abel // Proceedings of the Institute of Engineering Physics. 2009. № 4 (14). P. 12–14.
- [8] Orlov V. N. Precise boundaries for the approximate solution of differential equations of Abel in the vicinity of the approximate value of the mobility of a singular point in the

---

*Orlov Victor Nikolayevich*

e-mail: orlovvn@rambler.ru, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department "Mathematics, theory and methods of teaching mathematics", Vernadsky Crimean Federal center, Yalta, Russia; Doctor of Physics and Mathematics, Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Kudryashova Natalia Valerievna*

e-mail: natakudry94@mail.ru, Student of physics and mathematics, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

complex domain // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. 2010. № 2 (8). P. 399–405.

[9] Orlov V. N., Pchelova A. Z. The construction of the approximate solution of nonlinear differential equations in the field of analyticity // Vestnik of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Line : Mechanics of definable state. 2012. № 4 (14).

[10] Pchelova A. Z. On the exact criteria for the existence of movable singular points of solutions of differential equations in the complex domain // Modern problems of mathematics, mechanics and Informatics : proceedings of the International conference. Tula: Tula State University, 2013. P. 107–110.

[11] Orlov V. N., Guz M. P. Study of the effect of perturbations of the movable singular point on the approximate solution of the Cauchy problem of a nonlinear differential equations // Intern. scientific-practical. Conf. “Fundamental and applied problems of deformable solid mechanics, mathematical modeling and information technologies”. Cheboksary. 2013. P. 36–46.

[12] Orlov V. N., Leontieva T. Y. the construction of the approximate solution of nonlinear differential equations in the field of analysis // Intern. scientific-practical. Conf. “Fundamental and applied problems of deformable solid mechanics, mathematical modeling and information technologies”. 2013. P. 47–52.

Б. В. Михайлов<sup>1</sup>, С. Б. Михайлов<sup>2</sup>

## К ОБОСНОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ МЕТОДОМ СИЛ

<sup>1</sup> Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

<sup>2</sup> ООО «МЕГА-ОЙЛ», г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Рассмотрена причина повышенной погрешности расчета методом сил некоторых элементов конструкции в механике. Предложен метод использования уточняющих коэффициентов при решении задач механики на определение линейных и угловых перемещений методом сил.

**Ключевые слова:** линейные и угловые перемещения, прогиб в точке, модуль упругости, момент инерции, метод сил, изгибающий момент, уточненный коэффициент.

УДК: 531.8

**Актуальность исследуемой проблемы.** При определении линейных и угловых перемещений некоторых элементов конструкции методом сил погрешность расчетов превышает 5%. Поэтому выявление причин погрешности некоторых элементов конструкции методом сил является актуальной задачей.

**Материал и методика исследований.** При решении задач механики на определение перемещений в некоторых случаях нельзя применять метод сил, т. к. при этом необходимо, чтобы касательные, проведенные через вершину параболических эпюр, были параллельны оси балки [1]. Основным способом устранения указанного недостатка метода сил является использование уточненных коэффициентов при определении площади эпюр изгибающего момента.

**Результаты исследований и их обсуждение.** При решении задач механики, в частности сопротивления материалов на определение линейных и угловых перемещений методом сил возникают некоторые трудности в виде ошибок расчетов, превышающих 5%.

Рассмотрим пример. Определить прогиб в точке  $K$  для балки (рис. 1), у которой модуль упругости  $E$  и момент инерции относительно оси  $X$   $I_X$  заданы.

---

© Михайлов Б. В., Михайлов С. Б., 2016

Михайлов Борис Васильевич, кандидат технических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Михайлов Сергей Борисович, инженер, ООО «МЕГА-ОЙЛ», г. Чебоксары, Россия.

Поступила 02.02.2016

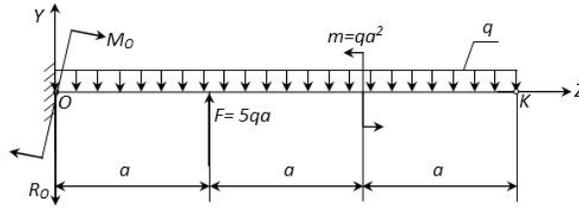


Рис. 1. Расчетная схема балки

Для решения данной задачи в начале применим метод начальных параметров. Определим реакции в точке заземления:

$$\sum Y = 0; \quad -R_O - q \cdot 3a + F = 0,$$

тогда:

$$R_O = 5 \cdot qa - 3 \cdot qa = 2 \cdot qa.$$

$$\sum m_O = 0; \quad F \cdot a + m - q \cdot 3a \cdot \frac{3}{2}a - M_O = 0,$$

тогда:

$$M_O = 5 \cdot qa \cdot a + qa^2 - \frac{9}{2}qa^2 = \frac{3}{2}qa^2.$$

Определим прогиб в точке K методом начальных параметров [1]:

$$\begin{aligned} EI_x \cdot y_k &= EI_x \cdot y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot z_k + \frac{M_O(z_k - 0)^2}{2} - \frac{m(z_k - 2a)^2}{2} - \frac{R_O(z_k - 0)^3}{6} + \\ &+ \frac{F(z_k - a)^3}{6} - \frac{q(z_k - 0)^4}{24} = 0 + 0 + \frac{\frac{3}{2}qa^2(3a - 0)^2}{2} - \frac{qa^2(3a - 2a)^2}{2} - \\ &- \frac{2qa(3a - 0)^3}{6} + \frac{5qa(3a - a)^3}{6} - \frac{q(3a - 0)^4}{24} = \frac{13}{24}qa^4, \end{aligned}$$

тогда:

$$y_k = \frac{13 \cdot qa^4}{24 \cdot EI_x} = 0,54 \frac{qa^4}{EI_x}. \quad (1)$$

Знак «+» перед  $y_k$  означает, что прогиб направлен вверх.

Решим эту же задачу методом сил [2]. Построим эпюры изгибающих моментов от действия внешних сил и от действия единичной силы, приложенной в точке K.

Составим функциональную зависимость изгибающего момента от координаты z на всех участках, построим грузовую и единичную эпюры (рис. 2).

Определим прогиб в точке K методом сил. Для этого перемножим площади грузовой эпюры на ординаты единичной эпюры [1].

$$EI_x \cdot y_k = \left[ -\frac{1}{3} \frac{qa^2}{2} a \frac{3}{4} a + \frac{2}{3} \frac{qa^2}{2} 0,41a \left( a + \frac{3}{8} 0,41a \right) - \frac{1}{3} qa^2 \cdot 0,59a \left( 2a - \frac{1}{4} 0,59a \right) - \right.$$

$$-\frac{1}{3}qa^2 \cdot 0,35a \left(2a + \frac{1}{4}0,35a\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{3qa^2}{2} \cdot 0,65a \left(3a - \frac{3}{8}0,65a\right) \Big] = \frac{29,16}{24}qa^4,$$

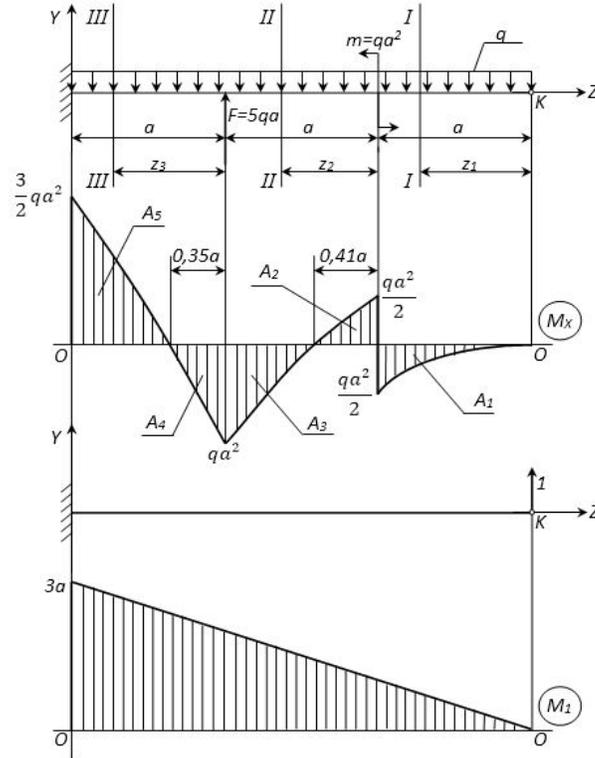


Рис. 2. Расчетная схема, грузовая и единичная эпюры

тогда:

$$y_k = \frac{29,16 \cdot qa^4}{24 \cdot EI_x} = 1,22 \frac{qa^4}{EI_x}. \quad (2)$$

Положение усугубляется тем, что на вид данное решение методом сил вполне правдоподобно. Но погрешность расчета методом сил выражения (2) по сравнению с выражением (1) превышает 5%, в нашем случае 126%, что недопустимо.

Одной из причин данной ошибки на наш взгляд является то, что площади эпюр  $A_1, A_2, A_3, A_4,$  и  $A_5$  (рис. 2) определены неточно. Независимо от формы параболы, ширины и высоты эпюры используются одни и те же коэффициенты. Если парабола выпуклостью вниз, то коэффициент  $K = \frac{1}{3}$ . Если парабола выпуклостью вверх, то коэффициент  $K = \frac{2}{3}$ .

Так, например, площадь сечения эпюры, ограниченная параболой выпуклостью вниз и осями  $X$  и  $Y$  (рис. 3а), определяется в зависимости от ширины ( $l$ ), высоты ( $h$ ) по следующей формуле [1]:

$$A_{\text{эп}} = \frac{1}{3}h \cdot l. \quad (3)$$

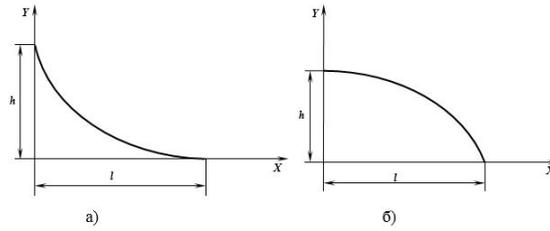


Рис. 3. Формы эпюр

а – эпюра, ограниченная параболой выпуклостью вниз и осями  $X$  и  $Y$ ;

б – эпюра, ограниченная параболой выпуклостью вверх и осями  $X$  и  $Y$ .

Формула для определения площади эпюры, ограниченная параболой выпуклостью вверх и осями  $X$  и  $Y$  (рис. 3б) имеет следующий вид [1]:

$$A_{\text{эп}} = \frac{2}{3} h \cdot l. \tag{4}$$

Коэффициенты в формулах (3) и (4) независимо от величины действительных чисел и переменных уравнения параболы берутся  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$ . На самом деле данные коэффициенты зависят от действительных чисел и переменных уравнения параболы.

Для примера рассмотрим несколько уравнений параболы и уравнение прямой, выраженное формулой  $y=x$ . В начале построим прямую, выраженную формулой  $y=x$  (рис. 4).

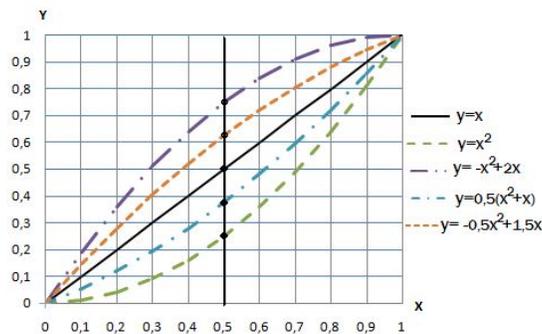


Рис. 4. Прямая и параболы, заданные разными уравнениями

Далее построим параболу, заданную уравнением  $y = x^2$  в интервале от 0 до 1. Затем построим вторую параболу, заданную уравнением  $y = -x^2 + 2x$  в том же интервале. Площадь сечения, ограниченная линиями  $y=0$ ,  $x=1$  и параболой, заданной уравнением  $y = x^2$ (рис. 4) определяется формулой:

$$A_I = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1. \tag{5}$$

Площадь треугольника, ограниченная линиями  $y=0$ ,  $x=1$  и  $y=x$  (рис. 4) определяется формулой:

$$A_{II} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1. \quad (6)$$

Площадь сечения, ограниченная линиями  $y=0$ ,  $x=1$  и параболой, заданной уравнением  $y = -x^2 + 2x$  (рис. 4), определяется формулой:

$$A_{III} = \frac{2}{3} \cdot 11. \quad (7)$$

Построим еще две параболы с другими действительными числами и переменными. Эти параболы будут находиться между линиями уравнений  $y = -x^2 + 2x$ ,  $y=x$  и  $y = x^2$  в интервале от 0 до 1.

Построим параболы, заданные уравнениями  $y = -0,5x^2 + 1,5x$  и  $y = 0,5(x^2 + x)$ , в том же интервале.

Тогда площадь сечения, ограниченная линиями  $y=0$ ,  $x=1$  и параболой, заданной уравнением  $y = 0,5(x^2 + x)$  (рис. 4), определяется формулой:

$$A_{IV} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1. \quad (8)$$

Площадь сечения, ограниченная линиями  $y=0$ ,  $x=1$  и параболой, заданной уравнением  $y = -0,5x^2 + 1,5x$  (рис. 4), определяется формулой:

$$A_V = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1. \quad (9)$$

Анализируя формулы (5), (8) и (7), (9), можно сделать вывод о том, что площади сечений  $A_I$  и  $A_{IV}$  равны, также равны площади  $A_{III}$  и  $A_V$ . На самом деле из рисунка видно, что это не так. Значит, коэффициенты  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$  в формулах (8) и (9) должны иметь другие значения.

Для определения этих уточненных коэффициентов мы предлагаем использовать уравнение зависимости коэффициента ( $K$ ) от ординаты параболы, находящейся на линии при  $x=0,5$ . Так как коэффициенты  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{2}{3}$  находятся на одной прямой, значит, будущее уравнение – это уравнение прямой. Ордината уравнения  $y = x^2$  при  $x=0,5$  равна  $\frac{1}{4}$ , т. е.  $y_1 = \frac{1}{4} = 0,25$ . А ордината уравнения  $y = -x^2 + 2x$  при  $x=0,5$  равна  $\frac{3}{4}$ , т. е.  $y_2 = \frac{3}{4} = 0,75$ . Для них коэффициенты соответственно равны  $K_1 = \frac{1}{3}$  и  $K_2 = \frac{2}{3}$ .

Используя формулу уравнения прямой [3], проходящей через две точки, получим следующее уравнение для определения уточненных коэффициентов при других значениях ординат:

$$K = \frac{4}{6}y + \frac{1}{6}. \quad (10)$$

Для проверки возьмем уравнение  $y=x$  и определим коэффициент данного уравнения исходя из уравнения (10). Ордината уравнения  $y=x$  при  $x=0,5$  равна  $\frac{1}{2}$ , т. е.  $y = \frac{1}{2}$ . Тогда

$$K = \frac{4}{6}y + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Что соответствует коэффициенту в выражении (6). Значит, наши предположения верны.

Решим задачу методом сил с учетом сказанного выше. Определим уточненные коэффициенты площадей эпюр  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и  $A_5$  (рис. 2). Для этого воспользуемся формулой (10). У эпюры площадью  $A_1$  определим ординату  $y_1$ . Для этого ординату изгибающего момента в середине эпюры **1** делим на максимальное значение ординаты эпюры **1**. Т. е.  $y_1 = \frac{\frac{1}{8}qa^2}{\frac{1}{2}qa^2} = \frac{1}{4}$ . Тогда коэффициент площади эпюры **1** определим следующим образом:

$$K_1 = \frac{4}{6}y_1 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Аналогично определим другие коэффициенты для эпюр площадью  $A_2, A_3, A_4$  и  $A_5$ .

Для эпюры площадью  $A_2$   $y_2 = \frac{0,27qa^2}{\frac{1}{2}qa^2} = 0,54$ . Тогда:

$$K_2 = \frac{4}{6}y_2 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot 0,54 + \frac{1}{6} = 0,53.$$

Для эпюры площадью  $A_3$   $y_3 = \frac{0,45 \cdot qa^2}{qa^2} = 0,45$ . Тогда:

$$K_3 = \frac{4}{6}y_3 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot 0,45 + \frac{1}{6} = 0,47.$$

Для эпюры площадью  $A_4$   $y_4 = \frac{0,49 \cdot qa^2}{qa^2} = 0,49$ . Тогда:

$$K_4 = \frac{4}{6}y_4 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot 0,49 + \frac{1}{6} = 0,49.$$

Для эпюры площадью  $A_5$   $y_5 = \frac{0,797 \cdot qa^2}{\frac{3}{2}qa^2} = 0,53$ . Тогда:

$$K_5 = \frac{4}{6}y_5 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \cdot 0,53 + \frac{1}{6} = 0,52.$$

Определим прогиб в точке **K** методом сил с учетом уточненных коэффициентов.

$$\begin{aligned} EI_x \cdot y_k &= \left[ -K_1 \frac{qa^2}{2} a \frac{3}{4} a + K_2 \frac{qa^2}{2} 0,41a \left( a + \frac{3}{8} 0,41a \right) - K_3 \cdot qa^2 \cdot 0,59a \left( 2a - \frac{1}{4} 0,59a \right) - \right. \\ &\quad \left. - K_4 \cdot qa^2 \cdot 0,35a \left( 2a + \frac{1}{4} 0,35a \right) + K_5 \frac{3qa^2}{2} \cdot 0,65a \left( 3a - \frac{3}{8} 0,65a \right) \right] = \\ &= \left[ -\frac{1}{3} \frac{qa^2}{2} a \frac{3}{4} a + 0,53 \frac{qa^2}{2} 0,41a \left( a + \frac{3}{8} 0,41a \right) - 0,47 \cdot qa^2 \cdot 0,59a \left( 2a - \frac{1}{4} 0,59a \right) - \right. \\ &\quad \left. - 0,49 \cdot qa^2 \cdot 0,35a \left( 2a + \frac{1}{4} 0,35a \right) + 0,52 \frac{3qa^2}{2} \cdot 0,65a \left( 3a - \frac{3}{8} 0,65a \right) \right] = 0,53 \cdot qa^4. \end{aligned}$$

тогда:

$$y_k = \frac{0,53 \cdot qa^4}{EI_x} = 0,53 \frac{qa^4}{EI_x}. \quad (11)$$

Погрешность расчета, с учетом уточненных коэффициентов выражения (11) по сравнению с выражением (1) не превышает 5 %, в нашем случае 1,85 %, что вполне допустимо.

**Резюме.** Приведенные выше расчеты позволяют сделать вывод, что при решении задач механики, в частности сопротивления материалов методом сил, необходимо использовать уточненные коэффициенты для разных значений ординат, которые находятся с помощью уравнения (10).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Межецкий Г. Д., Загребин Г. Г., Решетник Н. Н., Слепов А. А. Сопротивление материалов: учебник. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К<sup>0</sup>», 2008. 416 с.
- [2] Степин П. А. Сопротивление материалов: учебник. 12-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2012. 320 с.
- [3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. 1970. 720 с.

*B. V. Mikhailov<sup>1</sup>, S. B. Mikhailov<sup>2</sup>*

#### TO REASONS FOR SOME COEFFICIENTS IN CASE OF CALCULATION OF ELEMENTS OF CONSTRUCTION BY METHOD OF FORCES

<sup>1</sup>*Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia*

<sup>2</sup>*ООО «MEGA-OIL», Cheboksary, Russia*

**Abstract.** Considered the reason for high error in the calculations of the method forces some structural mechanics. Pre is a false method of using refinement coefficients in the solution of problems of mechanics on the determination of linear and angular displacements by the method of forces.

**Keywords:** the linear and angular relocation, a sag in a point, the elastic modulus, an inertia moment, a method of forces bending the moment, the specified coefficient.

#### REFERENCES

- [1] Mezheckij G. D., Zagrebin G. G., Reshetnik N. N., Slepov A. A. Soprotivlenie materialov: uchebnik. M.: Izdatel'sko-torgovaja korporacija «Dashkov i K<sup>0</sup>», 2008. 416 p. (in Russian)
- [2] Stepin P. A. Soprotivlenie materialov: uchebnik. 12-e izd., ster. SPb.: Izdatel'stvo «Lan'», 2012. 320 p. (in Russian)
- [3] Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov. 1970. 720 p. (in Russian)

---

*Mikhailov Boris Vasilevich*, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

*Mikhailov Sergey Borisovich*, Engineer, ООО «MEGA-OIL», Cheboksary, Russia.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (eks\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chdpu.edu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marycbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

Профессор Д. Д. Ивлев. К 85-летию со дня рождения .....	3
<i>Сенашов С. И., Филюшина Е. В.</i> Упругопластическое кручение ортотропного стержня .....	37
<i>Полоник М. В., Рогачев Е. Е.</i> Уменьшение остаточных напряжений в металлах при нагревании ниже предела текучести .....	46
<i>Манцыбора А. А., Полоник М. В.</i> Влияние накопленных необратимых деформаций на распространение возмущений постоянной интенсивности в упругопластической среде .....	53
<i>Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е.</i> О возникновении одномерных сферических центрированных волн в разномодульной упругой среде при ее динамическом деформировании .....	64
<i>Ковалев А. В., Хвостов И. Г.</i> Об определении напряжений и перемещений в упругом шаре с учетом температуры .....	70
<i>Мир-Салим-заде М. В.</i> Закрытие щели, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине .....	78
<i>Исмаилова Р. А.</i> Взаимодействие зон предразрушения в стержневом тепловыделяющем элементе .....	90
<i>Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В.</i> Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении ....	105
<i>Немировский Ю. В.</i> Динамика гибридных прямоугольных пластических плит	115
<i>Семенова И. А.</i> Полуплоскость с периодическим набором ребер жесткости (нечетно-симметричная деформация) .....	122
<i>Коробкин В. Д., Ордян М. Г.</i> Применение непрерывных полей скоростей перемещений в некоторых технологических задачах теории пластичности .....	137
<i>Орлов В. Н., Кудряшова Н. В.</i> Теорема существования решения одного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью третьей степени в области аналитичности .....	141
<i>Михайлов Б. В., Михайлов С. Б.</i> К обоснованию некоторых коэффициентов при расчете элементов конструкции методом сил .....	150
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	157
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	160

СОДЕРЖАНИЕ .....	162
------------------	-----

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2016. № 1 (27)**

**Отв. за выпуск:** А. В. Балашникова

**Технические редакторы:** А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

**Компьютерная верстка:** А. В. Балашникова

**Макет:** А. В. Балашникова

---

Подписано в печать 25.03.2016. Выход в свет 31.03.2016.  
Формат 70х100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 26,63.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет  
им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в отделе полиграфии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38