

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Научный журнал
№ 3(33)
Июль – сентябрь 2017 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, В. Д. Кулиев, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, А. В. Манжиров, Г. К. Михайлов,
Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко,
С. А. Редкозубов, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев,
А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева», 2017

О. В. Дудко, В. Е. Рагозина

О ПЛОСКИХ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ УПРУГОЙ СЛАБОПОРИСТОЙ СРЕДЫ

*Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
г. Владивосток, Россия*

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В работе исследуются особенности нелинейной динамики деформирования слабопористого материала в рамках упругой кусочно-линейной модели с одной ненулевой сингулярной точкой в области сжатия. На примере решения нестационарной краевой задачи о возникновении плоского одномерного сильного разрыва деформаций и его движении с постоянной скоростью в пористом полупространстве показаны некоторые сходства и отличия в нелинейной динамике пористых и разномодульных материалов.

Ключевые слова: слабопористая среда, упругость, кусочно-линейная модель, нестационарное нагружение, сильный разрыв.

УДК: 539.3

Введение. Твердые среды, которые механика деформирования относит к классу пористых, равным образом можно найти как в естественной природной форме (например, вулканические и осадочные породы), так и среди современных искусственных материалов. К последним относятся пенометаллы — различные вспененные (газонаполненные) сплавы алюминия, никеля, магния, меди и др. Пенометаллы обладают широким спектром полезных свойств [1, 2], среди которых наиболее привлекательными для современной промышленности являются их малая плотность по сравнению с основным материалом и способность поглощать ударную энергию. В зависимости от степени пористости и уровня прилагаемой нагрузки такие материалы могут вести

© Дудко О. В., Рагозина В. Е., 2017

Дудко Ольга Владимировна

e-mail: dudko@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук; доцент, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Рагозина Виктория Евгеньевна

e-mail: ragoza@vls.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия.

Поступила 10.07.2017

себя и как упругопластические, и как упругие среды с переменными модулями упругости в свободном и компактированном состояниях [3]–[5]. В работе рассматриваются особенности нестационарного процесса ударного деформирования слабопористого материала, который с учетом предположений о малости деформаций и обратимости закрытия и раскрытия пор можно считать упругой кусочно-линейной разнопрочной средой с сингулярностью в области сжатия [5]. Применяемые здесь подходы к анализу динамики деформирования пористой среды во многом основаны на результатах [6]–[8], полученных для изотропноупругой среды с различным сопротивлением растяжению и сжатию. На примере решения нестационарной краевой задачи о возникновении плоской одномерной поверхности сильного разрыва и ее движении с постоянной скоростью покажем некоторые сходства и отличия в нелинейной динамике деформирования пористых и разномодульных сред.

1. Модельные соотношения динамики упругого деформирования слабопористой среды. Слабопористыми средами принято считать материалы с пористостью 0.1–5.0% [3, 4]. Диаграмма одноосного деформирования упругой слабопористой среды [5] в случае малости деформации e имеет вид кусочно-линейной функции $\sigma(e)$ с одной сингулярной точкой $\sigma^* = \sigma(e^*)$ в области сжатия ($e^* < 0$, $\sigma^* < 0$) (рис. 1). При динамическом изменении напряжения $\sigma(e)$ в момент его перехода через значение

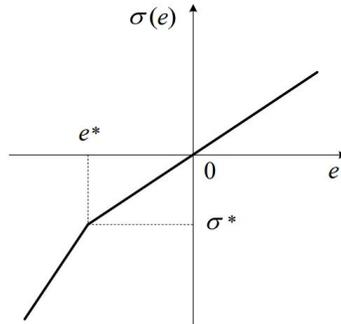


Рис. 1. Диаграмма одноосного деформирования упругой слабопористой среды

σ^* (критический уровень, при котором происходит упругое закрытие или раскрытие пор) скачком изменяются значения механических параметров материала — плотности ρ и упругих модулей λ , μ (параметров Ламе):

$$\sigma(e) = \begin{cases} (\lambda_0 + 2\mu_0)e, & e^* \leq e < +\infty, \\ (\lambda_1 + 2\mu_1)e + \Delta\sigma, & -\infty < e \leq e^*, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta\sigma = (\lambda_0 - \lambda_1 + 2(\mu_0 - \mu_1))e^* > 0, \quad e^* < 0.$$

В зависимости (1) параметры с индексом 0 соответствуют состоянию среды с раскрытыми порами, с индексом 1 — компактированному состоянию с закрытыми порами. В случае плоских одномерных движений точек такой среды ее уравнение движения в прямоугольной декартовой системе координат при малых деформациях принимает

простую форму:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad C = \begin{cases} a = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}, & e \leq e^*, \\ b = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}, & e > e^*, \end{cases} \quad (2)$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_0}{1 - \theta}, \quad a > b,$$

где u — единственная ненулевая компонента вектора перемещений точек среды ($u_1(x_1, t) = u(x, t)$, $u_2 = u_3 = 0$), зависящая от пространственной координаты x и времени t ; плотность среды ρ_1 при закрытых порах вычисляется через плотность некомпактированного материала ρ_0 и его заданную пористость θ [3]. Очевидно, что $\rho_1 = \rho_0$ при $\theta = 0$ для сплошного материала без пор, поэтому для рассматриваемой здесь слабопористой среды будем считать, что $\theta \ll 1$ и плотность при раскрытых и закрытых порах неизменна ($\rho_1 = \rho_0 = \rho$). Такое предположение не оказывает существенного влияния на результаты, но позволяет несколько упростить дальнейший анализ. Характеристическая скорость C в уравнении (2) принимает различные значения в зависимости от уровня деформации e (а точнее, от состояния пор — закрытого или раскрытого). В [6]–[8] для нестационарных краевых задач динамики разномодульных кусочно-линейных упругих сред показано, что подобное свойство модельных соотношений может приводить к появлению в обобщенных решениях различных нелинейных эффектов — ударных волн, волн ускорений, движущихся слоев недеформированной среды и др. Модель (1)–(2) отличается от используемых в [6]–[8] соотношений расположением особой точки диаграммы $\sigma(e)$. Если у разномодульной упругой среды особенность находится в точке $\sigma(0) = 0$ и изменение значения C происходит при переходе от растяжения к сжатию (или наоборот), то в пористой среде подобные нелинейные эффекты динамики деформирования можно получить без смены типа напряженно-деформированного состояния, не выходя на протяжении всего динамического процесса из области $e \leq 0$, $\sigma(e) \leq 0$. Покажем это на примере решения простой краевой задачи о нестационарном одномерном сжатии пористой среды.

2. Нестационарное одномерное сжатие пористого полупространства. Возникновение плоского одномерного сильного разрыва с постоянной скоростью. Считаем, что до момента времени $t = 0$ полупространство $x \geq 0$, заполненное упругой слабопористой средой (1), находилось в недеформированном состоянии. Положим, что с момента $t = 0$ полупространство подвергается нестационарному сжатию под действием граничной нагрузки $\sigma^0(e) = \sigma(e)|_{x=0} < 0$, монотонно убывающей с ростом t от начального значения $\sigma_0 = \sigma^0(e)|_{t=0} \in (\sigma^*; 0)$ и в некоторый момент времени $t = t^* > 0$ переходящей через особую точку σ^* . Разобьем решение краевой задачи на две последовательные временные стадии: $0 \leq t < t^*$ и $t \geq t^*$.

1) $0 \leq t < t^*$. Пусть с момента $t = 0$ приложение сжимающей нагрузки $\sigma^0(e)$ на границе полупространства приводит к одномерному движению точек граничной плоскости $x = 0$ по известному закону $u(0, t) = \varphi(t) \geq 0$, где $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая на интервале $t \in [0; t^*)$ нелинейная функция такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$, $\varphi''(t) > 0$ (рис. 2, а).

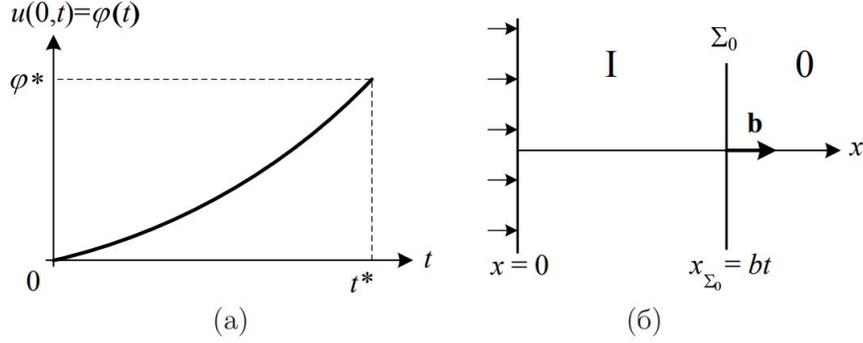


Рис. 2. Постановка задачи при $0 \leq t < t^*$: (а) функция граничного перемещения $u(0, t) = \varphi(t)$; (б) волновая картина с первичным фронтом сжатия $\Sigma_0(t)$ ($|\mathbf{b}| = b$)

Дополнительное ограничение, наложенное в условии задачи на начальное значение граничного напряжения σ_0 , обеспечивает отсутствие эффекта мгновенного закрытия пор при $t = 0$. Вследствие такого воздействия от границы $x = 0$ в момент времени $t = 0$ отделяется плоский одномерный фронт сжатия $\Sigma_0(t)$ (рис. 2, б) — первичный скачок деформаций с координатой $x_{\Sigma_0}(t) = bt$, который распространяется в недеформированное полупространство со скоростью $b = \text{const}$, соответствующей некомпактированному состоянию среды. Движение точек среды за фронтом $\Sigma_0(t)$ подчиняется уравнению (2), решение которого для области $x \in [0; bt]$ при $t \in [0; t^*)$ (область I на рис. 2, б) можно записать в форме Д'Аламбера:

$$u^I(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{b}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{b}\right), \quad (3)$$

где f_1, g_1 — неизвестные функции. Вычисляем их из уравнения (2) с учетом условия непрерывности перемещений $u^I|_{x=bt} = 0$ на поверхности $\Sigma_0(t)$ и краевого условия $u^I(0, t) = \varphi(t)$:

$$f_1\left(t - \frac{x}{b}\right) = \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right), \quad g_1(x, t) = 0,$$

откуда согласно (3) получаем решение задачи на интервале времени $t \in [0; t^*)$:

$$u^I(x, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right). \quad (4)$$

Из (1), (2) записываем функцию для динамического поля напряжения в области I, соответствующего перемещению (4):

$$\sigma^I(x, t) = -\rho b \varphi'\left(t - \frac{x}{b}\right). \quad (5)$$

2) $t \geq t^*$. В момент времени $t = t^*$ перемещение на границе полупространства достигает значения

$$u^I(0, t^*) = \varphi(t^*) = \varphi^* = \text{const}, \quad (6)$$

при котором соответствующее ему граничное напряжение $\sigma^0(e) = \sigma^I(e)|_{x=0} = -\varphi'(t)/b$, вычисляемое из (1), (2) и (4), становится равным σ^* . Это приводит к закрытию пор в малой окрестности границы полупространства и соответственно к изменению в этой области механических параметров материала с множества $\{\lambda_0, \mu_0\}$ на множество $\{\lambda_1, \mu_1\}$. Первичный фронт сжатия $\Sigma_0(t)$ достигает в этот момент положения

$x = bt^*$, а мгновенное распределение поля перемещения в области $x \in [0; bt^*]$ согласно решению (4) становится равным

$$u^I(x, t^*) = \varphi\left(t^* - \frac{x}{b}\right).$$

Дальнейшее нарастание модуля сжимающей граничной нагрузки $\sigma^0(e)$ после ее перехода через сингулярную точку σ^* приводит к тому, что слой материала с закрытыми порами с течением времени расширяется от границы полупространства в направлении увеличения координаты x (область II на рис. 3, а). На переднем фронте этого слоя — поверхности $\Sigma_1(\tau)$ ($\tau = t - t^*$) — вследствие смены механических параметров среды в уравнении движения (2) скачком происходит изменение характеристической скорости C со значения b на значение $a > b$. В упругой разномодульной среде такое разрывное увеличение характеристической скорости возможно только на ударной волне [7]–[9], движущейся со скоростью $G(\tau)$ ($b < G(\tau) < a$) в область предварительно растянутой среды и скачком изменяющей тип деформированного состояния с растяжения на сжатие. Однако в упругом пористом материале, в отличие от разномодульной среды, сильный разрыв деформаций может возникнуть в области, предварительно сжатой до некоторого уровня $e^0 > e^*$ (т. е. предварительно растягивать среду не требуется, что и демонстрирует приведенное далее решение).

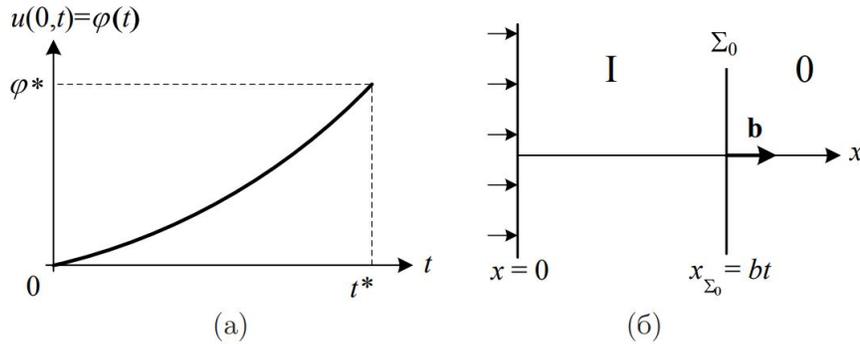


Рис. 3. Постановка задачи при $t \geq t^*$: (а) волновая картина с сильным разрывом $\Sigma_1(\tau)$ ($|\mathbf{G}| = G(\tau)$); (б) функция граничного перемещения $u(0, t)$ (сплошная линия — заданная на интервале $t \in [0; t^*]$ функция

Решение задачи в области II за фронтом $\Sigma_1(\tau)$ (рис. 3, а), как и на предыдущей стадии, можно представить в форме Д’Аламбера

$$u^{II}(x, \tau) = f_2\left(\tau - \frac{x}{a}\right) + g_2\left(\tau + \frac{x}{a}\right), \quad \tau = t - t^* \tag{7}$$

с неизвестными функциями f_2, g_2 . Для их вычисления на границе области II — движущейся поверхности сильных разрывов $\Sigma_1(\tau)$ — необходимо поставить дополнительные краевые условия, связывающие скачкообразные изменения параметров напряженно-деформированного состояния и кинематики среды. Такими дополнительными соотношениями на $\Sigma_1(\tau)$ являются следствия законов сохранения для сплошной среды (условия совместности разрывов первого порядка [10], [11]) и условие непрерывности

перемещений, записанные для плоского одномерного движения точек среды в предположении малости деформаций:

$$\sigma^+ - \sigma^- = -\rho G(v^+ - v^-), \quad v^+ - v^- = -G \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^- \right\}, \quad u^+ = u^-. \quad (8)$$

В (8) $G = G(\tau)$ — скорость распространения поверхности $\Sigma_1(\tau)$ с координатой $x_{\Sigma_1}(\tau) = \int_0^\tau G(\xi) d\xi$; верхние индексы "+" и "-" обозначают значения величины в малой окрестности перед $\Sigma_1(\tau)$ и сразу за ней соответственно. В общем случае $G(\tau)$ — еще одна неизвестная функция, в аргументы которой помимо времени и параметров предварительного деформированного состояния входят неизвестные характеристики динамического процесса за фронтом $\Sigma_1(\tau)$.

В отношении краевых условий на границе $x = 0$ предположим, что функция перемещения граничных точек $\varphi(t)$ при $t \geq t^*$ имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi(\tau + t^*) = \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*, \quad \tilde{\varphi}(0) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (9)$$

где φ^* — постоянное значение (6), достигнутое первоначальной функцией $\varphi(t)$ к моменту $t = t^*$, а $\tilde{\varphi}(\tau)$ — функция, описывающая изменение граничного перемещения с момента $t = t^*$ (рис. 3, б).

Вычисление скорости $G(\tau)$ — достаточно трудоемкая процедура даже в простейших случаях одноосного или центральносимметричного деформирования. Поэтому воспользуемся подходом, предложенным в [8] для сходящихся сферических волн в разномодульной упругой среде: положим, что скорость фронта $\Sigma_1(\tau)$ известна, а функцию граничного перемещения $\tilde{\varphi}(\tau)$, приводящего с момента $\tau = 0$ к возникновению такой поверхности разрывов, наоборот, сочтем неизвестной и требующей определения. Таким образом, решение задачи на этапе $t \geq t^*$ связано, во-первых, с построением поля перемещения $u^{II}(x, \tau)$ в динамической области $x \in [0; x_{\Sigma_1}(\tau)]$ и, во-вторых, с изменением первоначально заданной функции граничных перемещений $\varphi(t)$ согласно полученному u^{II} при $x = 0$. Записывая соотношения (8) с учетом представлений (7), (9) и вычисленных для области I решений (4), (5), получаем систему для определения неизвестных функций f_2 , g_2 и $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} f_2(\tau) + g_2(\tau) &= \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*, \\ f_2\left(\tau - \frac{x_{\Sigma_1}}{a}\right) + g_2\left(\tau + \frac{x_{\Sigma_1}}{a}\right) &= \tilde{\varphi}\left(\tau - \frac{x_{\Sigma_1}}{b}\right) + \varphi^*, \\ \left\{ 1 - \left(\frac{x'_{\Sigma_1}}{a}\right)^2 \right\} \left\{ f'_2\left(\tau - \frac{x_{\Sigma_1}}{a}\right) - g'_2\left(\tau + \frac{x_{\Sigma_1}}{a}\right) \right\} &= \frac{b}{a} \left\{ 1 - \left(\frac{x'_{\Sigma_1}}{b}\right)^2 \right\} \tilde{\varphi}\left(\tau - \frac{x_{\Sigma_1}}{b}\right) + \frac{\Delta\sigma}{a}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выделяя из второго и третьего уравнений $f_2(\xi)$, $g_2(\eta)$, систему (10) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} f_2(\tau) + g_2(\tau) &= \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*, \\ f_2(\xi) &= \frac{a+b}{2a} \tilde{\varphi}\left(\xi + x_{\Sigma_1}(\psi(\xi)) \frac{b-a}{ab}\right) + \frac{\Delta\sigma}{2a\rho} \psi(\xi) + f_0, \\ g_2(\eta) &= \frac{a-b}{2a} \tilde{\varphi}\left(\eta - x_{\Sigma_1}(\omega(\eta)) \frac{b+a}{ab}\right) - \frac{\Delta\sigma}{2a\rho} \omega(\eta) + g_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где f_0, g_0 — константы интегрирования, для которых выполняется соотношение $f_0 + g_0 = \varphi^*$; $\psi(\xi), \omega(\eta)$ — известные функции своих аргументов ($\psi(\xi) = \omega(\eta) = \tau$), если задано $x_{\Sigma_1}(\tau)$.

Согласно (7) и (11), решение в области $x \in [0; x_{\Sigma_1}(\tau)]$ при $\tau \geq 0$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} u^{II}(x, \tau) = & \frac{a+b}{2a} \tilde{\varphi} \left(\tau - \frac{x}{a} + x_{\Sigma_1} \left(\psi \left(\tau - \frac{x}{a} \right) \right) \cdot \frac{b-a}{ab} \right) + \\ & + \frac{a-b}{2a} \tilde{\varphi} \left(\tau + \frac{x}{a} - x_{\Sigma_1} \left(\omega \left(\tau + \frac{x}{a} \right) \right) \cdot \frac{b+a}{ab} \right) + \\ & + \frac{\Delta\sigma}{2a\rho} \left\{ \psi \left(\tau - \frac{x}{a} \right) - \omega \left(\tau + \frac{x}{a} \right) \right\} + \varphi^*. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь, постулируя динамику поверхности Σ_1 (т. е. задавая $G(\tau)$), из (11), (12) вычисляем соответствующую такой динамике функцию $\tilde{\varphi}(\tau)$. Положим, что $G(\tau) = G = \text{const}$ и $x_{\Sigma_1}(\tau) = G\tau$ ($b < G < a$, $\tau \geq 0$). В этом случае введенные в (11) функции $\psi(\xi), \omega(\eta)$ примут вид:

$$\psi(\xi) = \frac{a}{a-G}\xi, \quad \omega(\eta) = \frac{a}{a+G}\eta,$$

а решение (12) запишется в более компактной форме

$$\begin{aligned} u^{II}(x, \tau) = & \frac{a+b}{2a} \tilde{\varphi} \left(\alpha \left(\tau - \frac{x}{a} \right) \right) + \frac{a-b}{2a} \tilde{\varphi} \left(\beta \left(\tau + \frac{x}{a} \right) \right) + \frac{\Delta\sigma(G\tau-x)}{\rho(a^2-G^2)} + \varphi^*, \\ \alpha = & 1 - \frac{G}{b} \cdot \frac{a-b}{b-G}, \quad \beta = 1 - \frac{G}{b} \cdot \frac{a+b}{a+G}. \end{aligned} \quad (13)$$

Возвращаясь к представлению (9), откуда $\tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi+t^*) - \varphi^*$, из (13) окончательно получаем решение в области II за фронтом волны $\Sigma_1(\tau)$:

$$u^{II}(x, \tau) = \frac{a+b}{2a} \varphi \left(\alpha \left(\tau - \frac{x}{a} \right) + t^* \right) + \frac{a-b}{2a} \varphi \left(\beta \left(\tau + \frac{x}{a} \right) + t^* \right) + \frac{\Delta\sigma(G\tau-x)}{\rho(a^2-G^2)}. \quad (14)$$

Напряжение при $x \in [0; x_{\Sigma_1}(\tau)]$ ($\tau \geq 0$), соответствующее такому перемещению, с учетом (1), (2) примет вид:

$$\sigma^{II}(x, \tau) = -\rho\alpha \frac{a+b}{2} \varphi' \left(\alpha \left(\tau - \frac{x}{a} \right) + t^* \right) + \rho\beta \frac{a-b}{2} \varphi' \left(\beta \left(\tau + \frac{x}{a} \right) + t^* \right) - \frac{G^2}{a^2-G^2} \Delta\sigma. \quad (15)$$

Теперь из первого уравнения системы (11) и записанного при $x = 0$ решения (14) получаем выражение для функции $\tilde{\varphi}(\tau)$:

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \frac{a+b}{2a} \varphi(\alpha\tau + t^*) + \frac{a-b}{2a} \varphi(\beta\tau + t^*) + \frac{\Delta\sigma}{\rho(a^2-G^2)} G\tau, \quad \tau \geq 0. \quad (16)$$

Таким образом, (16) определяет функцию $u^{II}(0, \tau) = \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*$ — перемещение точек граничной плоскости, при котором возникший в момент времени $t = t^*$ вторичный сильный разрыв $\Sigma_1(\tau)$ будет двигаться с заданной постоянной скоростью G .

Вопрос о моменте времени t^* , когда напряжение $\sigma^I(e)$ достигает на границе $x = 0$ значения σ^* , решается заданием конкретной функции $\varphi(t)$. Учитывая, что из (1), (4) можно записать:

$$\sigma^I(e^*) = (\lambda_0 + 2\mu_0) \left. \frac{\partial u^I}{\partial x} \right|_{x=0, t=t^*} = \sigma^*, \quad \left. \frac{\partial u^I}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{b} \varphi'(t),$$

уравнение для вычисления t^* будет иметь вид:

$$\varphi'(t)|_{t=t^*} = -\frac{b}{\lambda_0 + 2\mu_0}\sigma^*. \quad (17)$$

Если перемещение точек границы полупространства при $t \in [0; t^*)$ задано в виде квадратичной функции $\varphi(t) = v_0 t + At^2/2$ ($v_0 = \text{const} > 0$, $A = \text{const} > 0$), то согласно (17) получаем $t^* = -A^{-1}(b\sigma^*/(\lambda_0 + 2\mu_0) + v_0)$.

Далее графически представлено решение описанной задачи, полученное для пористого материала с механическими параметрами $\rho = 2697$ кг/м³, $\lambda_0 = 57.793$ ГПа, $\mu_0 = 25.690$ ГПа, $\lambda_1 = 58.501$ ГПа, $\mu_1 = 26.004$ ГПа, соответствующими пеноалюминию с пористостью $\theta = 0.1\%$ [3]. Характеристическая скорость C в уравнении движения (2) для такого материала принимает значения $a = 6401.16$ м/с, $b = 6362.35$ м/с. В качестве постоянного значения скорости поверхности сильного разрыва $\Sigma_1(\tau)$ выбрано $G = (a + b)/2 = 6381.75$ м/с. Деформация закрытия пор e^* принята равной $-\theta = -0.001$ [3], а соответствующее ей напряжение $\sigma^* = -0.1092$ ГПа вычислено из (1). Для параметров начальной квадратичной функции граничного перемещения $\varphi(t)$ заданы значения $v_0 = 0.1$ м/с, $A = 10000$ м/с², согласно которым $\sigma_0 = -1.7159$ МПа $> \sigma^*$, $t^* = 0.626 * 10^{-3}$ с.

На рисунке 4 показана функция перемещения граничных точек полупространства $u(0, t)$ за весь временной период деформирования. Из графика следует, что для возникновения сильного разрыва деформаций $\Sigma_1(\tau)$ с заданной постоянной скоростью G ($b < G < a$) требуется увеличить интенсивность сжимающего воздействия на границу полупространства (а именно увеличить скорость перемещения граничных точек) по сравнению с первоначально заданным.

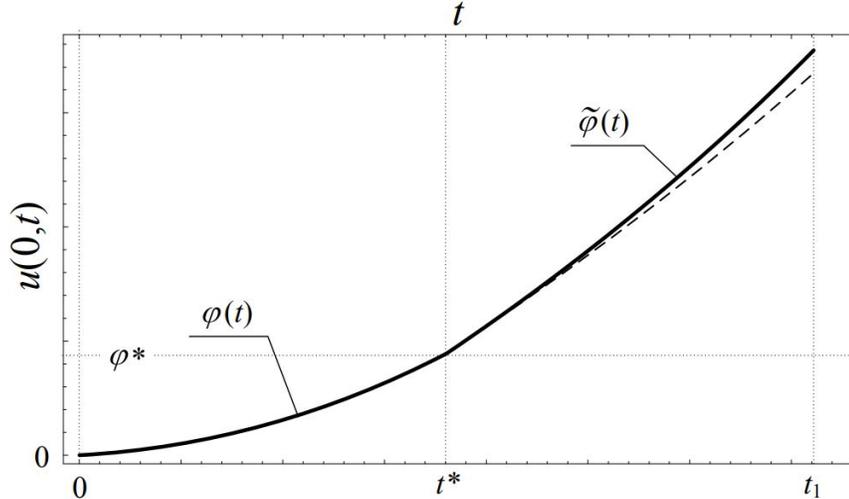


Рис. 4. Перемещение граничных точек полупространства: $u(0, t) = \varphi(t)$ при $t \in [0; t^*)$; $u(0, t) = \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*$ при $t \geq t^*$ (пунктирная линия — продолжение функции $\varphi(t)$ на интервал $t \in [t^*; +\infty)$)

Мгновенное распределение поля перемещения $u(x, t)$ во всей области деформирования в момент времени $t_1 = 2t^*$ представлено на рисунке 5 (а). График $u(x, t_1)$ имеет изломы в точках $x = bt_1$ и $x = G(t_1 - t^*)$ — мгновенных координатах

фронтов сильных разрывов деформаций $\Sigma_0(t)$ и $\Sigma_1(t - t^*)$ (первичной и вторичной волн сжатия). На рисунке 5 (б) показана соответствующая такому полю перемещения диаграмма напряжения $\sigma(x, t_1)$, из которой следует, что волна $\Sigma_1(\tau)$ скачком увеличивает уровень предварительных ненулевых деформаций сжатия. В [9] такая поверхность, не изменяющая тип деформированного состояния ($(\partial u/\partial x)^+ < 0$, $(\partial u/\partial x)^- < 0$), названа простой ударной волной. Наклон графика $\sigma^{II}(x, t_1 - t^*)$ в области $x \in [0; x_{\Sigma_1}]$ превосходит наклон $\sigma^I(x, t_1)$ в области $x \in [x_{\Sigma_1}; x_{\Sigma_0}]$. Выбирая различные моменты времени $t \geq t^*$, можно показать, что интенсивность разрыва $[\sigma(x, \tau)]|_{\Sigma_1(\tau)} = \sigma^I(x_{\Sigma_1(\tau)}, \tau + t^*) - \sigma^{II}(x_{\Sigma_1(\tau)}, \tau)$ на поверхности $\Sigma_1(\tau)$, нулевая при $\tau = 0$, возрастает с течением времени.

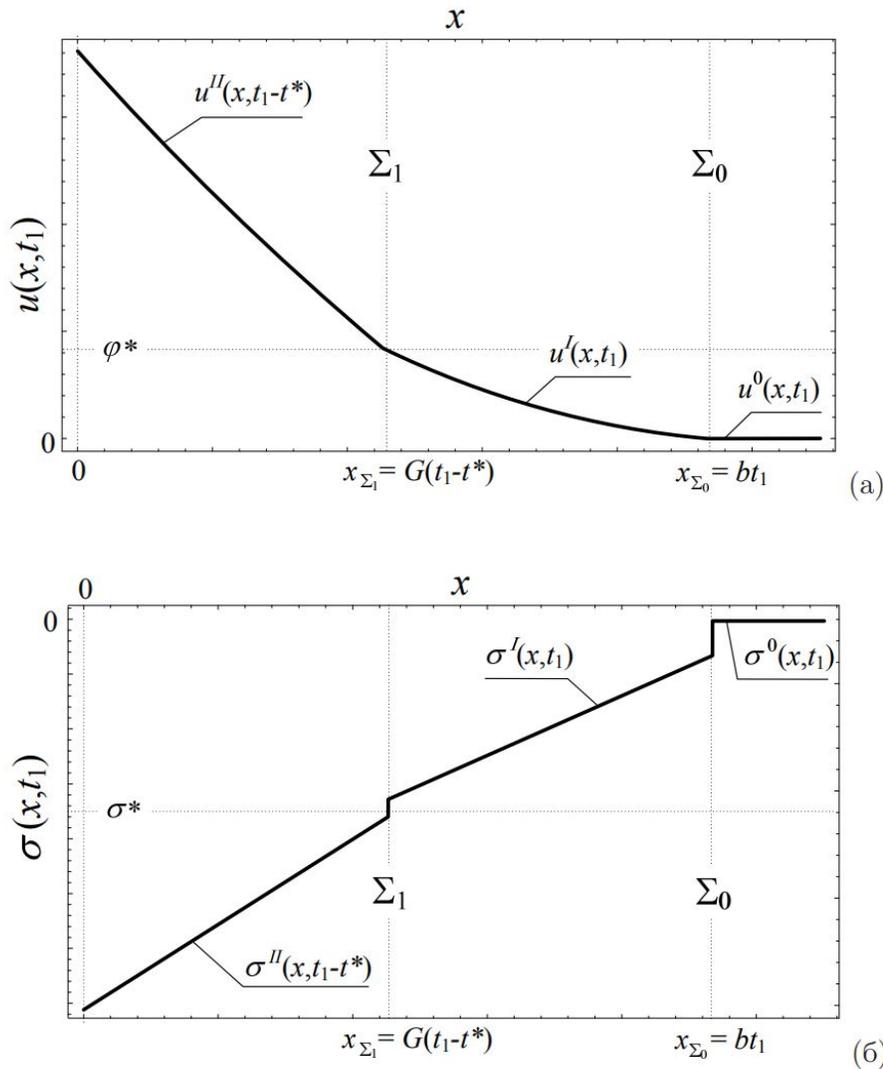


Рис. 5. Мгновенные распределения полей во всей области деформирования в момент времени $t_1 = 1.5t^*$: (а) перемещение точек среды $u(x, t_1)$; (б) напряжение $\sigma(x, t_1)$

Заключение. В работе для упругой слабопористой среды показана возможность описания ее нелинейной динамики деформирования в рамках кусочно-линейной модели с ненулевой сингулярной точкой в области сжатия. Так же, как и в разномодульной среде [6]–[8], характеристическая скорость уравнения движения пористой среды может при определенных условиях изменять свое значение, что приводит к возникновению различных нелинейных эффектов — сильных и слабых разрывов деформаций. Такое свойство модели пористой среды позволяет при решении нестационарных краевых задач использовать подходы, аналогичные разработанным для кусочно-линейных разномодульных материалов [8]. Однако условия возникновения нелинейных волн деформаций в пористой среде отличны от условий для разномодульной модели [6]–[8]. Так, показано, что в предварительно сжатом до некоторого уровня слабопористом упругом полупространстве вторичный сильный разрыв деформаций — простая ударная волна [9] — может возникнуть вследствие продолжающегося сжатия на границе, в отличие от разномодульной среды, где для появления ударной волны требуется воздействие в режиме «предварительное растяжение с последующим сжатием». Следует заметить, что приведенные в работе результаты демонстрируют качественные особенности динамического деформирования упругой слабопористой среды без рассмотрения эффектов взаимодействия первичного и вторичного волновых фронтов. Дальнейшее решение требует привлечения подходов приближенного анализа, основанных на различных модификациях метода возмущений [12].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schaedler T. A., Jacobsen A. J., Torrents A., Sorensen A. E., Lian J., Greer J. R., Valdevit L., Carter W. B. Ultralight Metallic Microlattices // *Science*. 2011. Vol. 334. P. 962 – 965. doi: 10.1126/science.1211649.
- [2] Xuejin Liu, Jinhua Zhang, Qin Fang, Hao Wu, Yadong Zhang. Response of Closed-Cell Aluminium Foams under Static and Impact Loading: Experimental and Mesoscopic Numerical Analysis // *International Journal of Impact Engineering*. 2016. Vol. 100. P. 382 – 394. doi:10.1016/j.ijimpeng.2016.11.004.
- [3] Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. Mathematical Modeling of Deformation of a Porous Medium, Considering Its Strengthening due to Pore Collapse // *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 7th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (AMiTaNS'15)*. AIP Conference Proceedings. 2015. Vol. 1684, Iss. 1. 070006. doi: 10.1063/1.4934307.
- [4] Садовский В. М., Садовская О. В. Анализ деформации пористой среды с учетом схлопывания пор // *Прикладная механика и техническая физика*. 2016. Т. 57. № 5(339). С. 53 – 65.
- [5] Садовская О. В., Садовский В. М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
- [6] Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е. О возникновении плоских и сферических волн в упругой среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2012. № 4 (14). С. 147 – 155.
- [7] Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // *Дальневосточный математический журнал*. 2005. Т. 6. № 1-2. С. 94 – 105.
- [8] Рагозина В. Е., Дудко О. В. Движение сходящихся сферических волн деформаций в разномодульной упругой среде // *Прикладная механика и техническая физика*. 2016. Т. 57. № 4. С. 149 – 157. doi: 10.15372/PMTF20160414.
- [9] Маслов В. П., Мосолов П. П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды // *Прикладная математика и механика*. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419 – 437.
- [10] Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
- [11] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [12] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. О различных методах адаптации схемы лучевых прифронтных разложений в задачах осесимметричной динамики нелинейно-упругих сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2015. № 1 (23). С. 49 – 64.

O. V. Dudko, V. E. Ragozina

ON FLAT ONE-DIMENSIONAL MOTIONS OF AN ELASTIC LOW-POROSITY MEDIUM

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

Abstract. The paper investigates the features of the nonlinear deformation dynamics of a low-porosity material in the framework of an elastic piecewise linear model with one nonzero singular point in the compression region. Some similarities and differences in nonlinear dynamics of porous and multimodulus materials are shown by an example of the nonstationary boundary value problem on the occurrence of the flat one-dimensional strong strain rupture and its moving with constant velocity in the porous half-space.

Keywords: low-porosity medium, elasticity, piecewise linear model, unsteady loading, strong discontinuity.

REFERENCES

- [1] Schaedler T. A., Jacobsen A. J., Torrents A., Sorensen A. E., Lian J., Greer J. R., Valdevit L., Carter W. B. Ultralight Metallic Microlattices // *Science*. 2011. Vol. 334. P. 962–965. doi: 10.1126/science.1211649.
- [2] Xuejin Liu, Jinhua Zhang, Qin Fang, Hao Wu, Yadong Zhang. Response of Closed-Cell Aluminium Foams under Static and Impact Loading: Experimental and Mesoscopic Numerical Analysis // *International Journal of Impact Engineering*. 2016. Vol. 100. P. 382–394. doi:10.1016/j.ijimpeng.2016.11.004.
- [3] V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya. Mathematical Modeling of Deformation of a Porous Medium, Considering Its Strengthening due to Pore Collapse // *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 7th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (AMiTaNS'15)*. AIP Conference Proceedings. 2015. Vol. 1684, Iss. 1. 070006. doi: 10.1063/1.4934307.
- [4] Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. Analyzing the Deformation of a Porous Medium with Account for the Collapse of Pores // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. No. 5. P. 808–818. doi: 10.1134/S0021894416050072.
- [5] Sadovskaya O., Sadovskii V. *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials*. Heidelberg, Germany: Springer, 2012. 390 p.
- [6] Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E. About the Occurrence of Plane and Spherical Waves in an Elastic Medium, Different Resistance to Tension and Compression//

Dudko Olga Vladimirovna

e-mail: dudko@iacp.dvo.ru, Ph.D. Phys. & Math., Leading Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS; Assistant Professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

Ragozina Victoria Evgenevna

e-mail: ragozina@vlc.ru, Ph.D. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.

Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2012. Vol. 4 (14). P. 147-155. (in Russian).

[7] Dudko O. V., Lapteva A. A., Semyonov K. T. About distribution of flat one-dimensional waves and their interaction with barrier in the media differently reacting to a stretching and compression // Far Eastern Mathematical Journal. 2005. Vol. 6. No. 1–2. P. 94–105. (in Russian).

[8] Ragozina V. E., Dudko O. V. Propagation of Converging Spherical Deformation Waves in a Heteromodular Elastic Medium // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57. No. 4. P. 701–708. doi: 10.1134/S0021894416040143.

[9] Maslov V. P., Mosolov P. P. General Theory of Motion Equations of an Elastic Multimodulus Medium // Prikladnaya Matematika i Mechanica. 1985. Vol. 49, Iss. 3. P. 419–437. (in Russian).

[10] Blend D. R. Nonlinear Dynamic Elasticity. Blaisdell, Waltham, 1969.

[11] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[12] Ragozina V. E., Ivanova Y. E. On the Various Methods of Adaptation of Frontline Ray Expansions Scheme in the Problems of the Axisymmetric Dynamics of Nonlinear Elastic Medium // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. Vol. 1 (23). P. 49–64. (in Russian).

В. Е. Рагозина¹, Ю. Е. Иванова^{1, 2}

О РАЗЛИЧНЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ОПИСАНИЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ В ТЕРМИНАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

¹Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия

²Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. На примере задачи об ударном нагружении сферической полости в нелинейно-упругой среде рассматривается применение метода срачиваемых асимптотических разложений к описанию распространения одномерных ударных волн ненулевой кривизны. Показано, что в прифронтной области сингулярная задача метода возмущений определяется решением эволюционного уравнения, отличного от уравнения плоской продольной волны. Рассмотрены различные варианты уравнений, возникающих во внешней краевой задаче, и их приближенные решения.

Ключевые слова: нелинейно-упругая среда, ударная деформация, метод возмущений, эволюционное уравнение, сферическая ударная волна.

УДК: 539.3

Введение. Изучению особенностей формирования и распространения ударных волн в твердых телах посвящено большое число научных исследований [1]–[3]. При этом здесь нет полной аналогии с гидродинамикой, так как возникающие продольные и поперечные волны в общем случае взаимосвязаны. Помимо этого, положение и геометрия ударных волн зависят от предварительных деформаций и строящегося решения за ударными волнами. Все эти факторы приводят к тому, что построение точных решений динамических задач в твердых телах практически невозможно. Приходится обращаться к приближенным аналитическим или численным методам. Среди аналитических методов высокую эффективность при решении задач с ударными волнами

© Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е., 2017

Рагозина Виктория Евгеньевна

e-mail: ragozina@vls.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия.

Иванова Юлия Евгеньевна

e-mail: ivanova@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток; доцент, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Поступила 10.07.2017

показали метод возмущений [4] и лучевой метод [5]. Ранее в [6, 7] было продемонстрировано, что применение метода сращиваемых асимптотических разложений в задачах динамики в упругих средах приводит к анализу одиночного эволюционного уравнения или системы эволюционных уравнений. Для продольных одномерных плоских волн — это уравнение Хопфа [8], поперечные одномерные плоские волны описываются уравнением Хопфа для квадрата интенсивности волнового процесса [6]. Ударные волны с ненулевой кривизной волнового фронта сводятся к эволюционным уравнениям, отличным от уравнений плоских волн [9]. В перечисленных работах основное внимание уделялось внутренней краевой задаче с получением эволюционного уравнения, его решению, сращиванию разложений. При этом внешнее разложение строилось последовательным решением ряда по сути квазистатических задач. В предлагаемой статье на примере задачи об ударном нагружении на границе сферической полости в среде рассматривается волновой процесс с ненулевой кривизной волнового фронта. Предлагаются два варианта внешней краевой задачи, приводящие на каждом шаге метода к ряду квазистатических или динамических задач. Проводится подробный анализ варианта решения, включающего динамическую внешнюю задачу, показано, что при его построении возникает необходимость решения дополнительной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, вытекающей из процедуры сращивания разложений и выполнения граничных условий.

1. Общие модельные соотношения и постановка краевой задачи. Система уравнений, задающая движение нелинейноупругой изотропной среды в пространственной криволинейной системе координат Эйлера x^i ($i = 1, 2, 3$), имеет вид:

$$\begin{aligned} v^j &= \dot{u}^i (\delta_j^i - u_{,j}^i)^{-1}, \quad 2\alpha_{ij} = u_{,i,j} + u_{,j,i} - u_{k,i}u_{,j}^k, \quad \rho = \rho_0 \det (\delta_j^i - u_{,j}^i), \\ \sigma_{,j}^{ij} &= \rho(\dot{v}^i + v_{,j}^i v^j), \quad \sigma_j^i = \frac{\rho}{\rho_0} (\delta_k^i - 2\alpha_k^i) \frac{\partial W}{\partial \alpha_k^j}, \\ W(I_1, I_2, I_3) &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \dots, \\ I_1 &= \alpha_i^i, \quad I_2 = \alpha_j^i \alpha_i^j, \quad I_3 = \alpha_j^i \alpha_k^j \alpha_i^k, \\ u_{,j}^i &= \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i u^k, \quad u_{,i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k u_k, \quad \dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u^i и v^i — контравариантные компоненты векторов перемещений и скорости точек среды, α_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси, σ^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений Эйлера—Коши, ρ и ρ_0 — плотность среды в текущем и свободном состоянии, W — упругий потенциал, λ , μ , l , m , n — упругие модули среды, Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля второго рода, δ_j^i — дельта Кронекера. Формула для W в (1.1) записана при адиабатическом приближении описания движения среды. В (1.1) и далее принято соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу, многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высоким порядком малости.

Пусть в пространстве, занятом нелинейно-упругой средой, есть сферическая полость радиуса r_0 . Решение задачи удобно строить в сферической системе координат: $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$. До момента времени $t = 0$ деформации в среде отсутствуют. С момента $t = 0$ к внутренней границе полости приложено ударное нагружение,

вызывающее известные перемещения на границе:

$$\begin{aligned} u_r|_{r=r_0+f(t), t \geq 0} &= f(t), \quad f'(0) > 0, \\ u_\theta|_{r=r_0+f(t), t \geq 0} &= 0, \quad u_\varphi|_{r=r_0+f(t), t \geq 0} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $f(t)$ — заданная функция времени. Полагаем, что результатом удара будет поле перемещений $u = u_r(r, t)$, $u_\theta = u_\varphi = 0$. В соответствии с условием $f'(0) > 0$ мгновенно образуется расходящаяся сферическая ударная волна. Следствием выполнения геометрических, кинематических [10] и динамических [11] условий совместности на этой поверхности разрывов будут краевые условия:

$$\begin{aligned} u|_{r=r_0+\int_0^t G(\xi)d\xi} &= 0, \quad \tau = [u, r]|_{r=r_0+\int_0^t G(\xi)d\xi} = -u_{,r}^-|_{r=r_0+\int_0^t G(\xi)d\xi}, \\ G &= C(1 + \theta_1\tau + \theta_2\tau^2 + \dots), \\ \theta_1 &= \frac{9}{4} - \frac{3l+m+n}{2(\lambda+2\mu)}, \quad \theta_2 = \frac{7}{4} - \frac{3l+m+n}{2(\lambda+2\mu)} - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} - \frac{3l+m+n}{2(\lambda+2\mu)} \right)^2, \\ C &= \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где квадратными скобками обозначен скачок величины заключенной в них, G — скорость движения ударной волны в направлении единичной внешней нормали, τ — интенсивность ударной волны.

Перепишывая систему уравнений (1.1) в сферических координатах для поставленной краевой задачи, приходим к единственному уравнению движения:

$$\begin{aligned} u_{,rr} \left(1 + \alpha_1 u_{,r} + \alpha_2 \frac{u}{r} \right) + 2 \frac{u_{,r}}{r} - 2 \frac{u}{r^2} + \alpha_3 \frac{u^2}{r^3} + \frac{u_{,r}^2}{r} + \\ + \alpha_5 \frac{uu_{,r}}{r^2} &= \frac{1}{C^2} \left\{ \ddot{u} \left(1 - u_{,r} - 2 \frac{u}{r} \right) + 2\dot{u}\dot{u}_{,r} \right\} + \dots, \\ \alpha_1 &= -9 + 6 \frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{-8\lambda - 4\mu + 4l + 12m}{\lambda+2\mu}, \\ \alpha_3 &= \frac{18(\lambda+\mu) - 6(2l+4m+n)}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_4 = \frac{-16\lambda - 26\mu + 8l + 12m + 6n}{\lambda+2\mu}, \\ \alpha_5 &= \frac{-2\lambda + 8\mu + 4l + 12m}{\lambda+2\mu}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Получить точное решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (1.4) представляется невозможным. Поэтому далее будем искать решение краевой задачи (1.2)–(1.4), используя метод сращиваемых асимптотических разложений.

2. Внешнее разложение решения задачи об одномерной сферической продольной ударной волне. Рассмотрим два варианта выбора безразмерных переменных, приводящих к различным уравнениям внешней краевой задачи метода возмущений и их решение. Сначала зададим безразмерные переменные в виде:

$$s = \frac{r-r_0}{r_0} \varepsilon^{-3}, \quad m = \frac{r-r_0-Ct}{r_0} \varepsilon^{-2}, \quad w(s, m) = \frac{u(r, t)}{r_0} \varepsilon^{-4}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (2.1)$$

где ε — малый параметр задачи, вид которого определяется выбором функции нагружения на границе $r = r_0$. В новых переменных внешняя краевая задача запишется как:

$$\begin{aligned}
 & (w_{,ss} + 2\varepsilon w_{,sm} + \varepsilon^2 w_{,mm}) \left\{ 1 + \alpha_1 \varepsilon (w_{,s} + \varepsilon w_{,m}) + \alpha_2 \frac{w\varepsilon^4}{1 + \varepsilon^3 s} \right\} + \\
 & + 2 \frac{\varepsilon^3 (w_{,s} + \varepsilon w_{,m})}{1 + \varepsilon^3 s} - 2 \frac{w\varepsilon^6}{(1 + \varepsilon^3 s)^2} + \alpha_3 \frac{w^2 \varepsilon^{10}}{(1 + \varepsilon^3 s)^3} + \alpha_4 \frac{\varepsilon^4 (w_{,s} + \varepsilon w_{,m})^2}{1 + \varepsilon^3 s} + \\
 & + \alpha_5 \frac{w\varepsilon^7 (w_{,s} + \varepsilon w_{,m})}{(1 + \varepsilon^3 s)^2} = \varepsilon^2 w_{,mm} \{1 - 2\varepsilon (w_{,s} + \varepsilon w_{,m})\} - \\
 & - 2 \frac{\varepsilon^6 w w_{,mm}}{1 + \varepsilon^3 s} + 2\varepsilon^3 w_{,m} (w_{,ms} + \varepsilon w_{,mm}) + \dots, \\
 & w|_{s=\varepsilon g(s\varepsilon - m), s\varepsilon - m \geq 0} = g(s\varepsilon - m), \quad w|_{s\varepsilon - m \leq 0} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где функция $g(s\varepsilon - m)$ соответствует функции нагружения на границе $f(t)$. Представляя искомую функцию безразмерных перемещений асимптотическим рядом по степеням малого параметра

$$w(s, m) = w_0(s, m) + \varepsilon w_1(s, m) + \varepsilon^2 w_2(s, m) + \dots \tag{2.3}$$

и подставляя в систему уравнений (2.2), на i -ом шаге метода получим уравнение:

$$w_{i,ss} = B_i(s, m), \quad B_0(s, m) = 0,$$

где функции $B_i(s, m)$ определяются предыдущими приближениями. В итоге методом последовательных приближений найдем внешнее разложение решения до требуемого порядка точности:

$$\begin{aligned}
 w(s, m) = & f_0(m)s + g(-m) + \varepsilon \{ -f'_0(m)s^2 + f_1(m)s - f_0(m)g(-m) \} + \\
 & + \varepsilon^2 \left\{ \frac{2}{3} f''_0(m)s^3 - f'_1(m)s^2 + f_2(m)s - f_1(m)g(-m) + \right. \\
 & \left. + g(-m)g'(-m) \right\} + \dots,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $f_i(m)$ — неизвестные функции, которые определяются сопоставлением с дополнительным внутренним разложением, построенным в области, где полученное разложение (2.4) становится неравномерно пригодным. Выбранный вариант безразмерных переменных (2.1) на каждом шаге метода приводит к решению квазистатической задачи, хотя исходная внешняя краевая задача является нестационарной. Ранее подобное внешнее решение было получено для антиплоской деформации в [9], где подробно описана процедура дальнейшего решения. Перечислим его основные этапы, не останавливаясь детально на их описании. Заметим, что неравномерность ряда (2.4) по пространственной координате наиболее полно проявляется при переходе к масштабам $s \sim \varepsilon^{-3}$, при этом внутренняя задача метода на нулевом шаге построения асимптотики основана на интегрировании нелинейного эволюционного уравнения для продольных сферических волн [12]. Сопоставление внешнего и внутреннего решений проводится стандартным образом с определением неизвестных констант решения эволюционного уравнения и неизвестных функций $f_i(m)$ в (2.4).

В настоящей статье авторы описывают еще одно решение краевой задачи (1.2)–(1.4), включающее внешнее решение асимптотической схемы, учитывающее в полном

объеме динамические свойства исходной краевой задачи. С этой целью определим следующие безразмерные переменные:

$$y = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad z = \frac{Ct}{r_0}, \quad v(y, z) = \frac{u(r, t)}{r_0} \phi^{-1}, \quad (2.5)$$

где ϕ — малый параметр задачи. В этом случае уравнение движения (1.4) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & v_{,yy} \left(1 + \alpha_1 \phi v_{,y} + \alpha_2 \frac{\phi v}{1+y} \right) + 2 \frac{v_{,y}}{1+y} - 2 \frac{v}{(1+y)^2} + \alpha_3 \frac{\phi v^2}{(1+y)^3} + \\ & + \alpha_4 \frac{\phi v_{,y}^2}{1+y} + \alpha_5 \frac{\phi v v_{,y}}{(1+y)^2} = v_{,zz} \left\{ 1 - 2\phi v_{,y} - 2 \frac{\phi v}{1+y} \right\} + 2\phi v_{,z} v_{,yz} + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

В качестве примера, одновременно позволяющего продемонстрировать особенности построения решения внешней краевой задачи и получить обозримые результаты вычислений, выберем частный случай квадратичной функции вида

$$v|_{y=-\phi(2az+az^2)} = -2az - az^2, \quad a = \text{const}. \quad (2.7)$$

Как и ранее в (2.3), представим неизвестную функцию $v(y, z)$ рядом по степеням малого параметра ϕ . Последовательная подстановка ряда (2.3) в уравнение движения (2.6) приводит на i -ом шаге метода к решению уравнения гиперболического типа:

$$\Phi_{i,\xi\eta} = H_i(\xi, \eta), \quad v_i = \left(\frac{\Phi_i}{1+y} \right)_{,y}, \quad \xi = z - y, \quad \eta = z + y, \quad (2.8)$$

где функции $H_i(\xi, \eta)$ определяются предыдущими шагами метода, причем $H_0 = 0$. В результате получим внешнее решение в виде:

$$\begin{aligned} v(y, z) = & -a \left(\frac{2\xi}{1+y} + \frac{\xi^2}{(1+y)^2} \right) + \phi \left[\frac{N'(\eta) - X'(\xi)}{1+y} - \frac{N(\eta) + X(\xi)}{(1+y)^2} - \right. \\ & - a^2 \left\{ 2 \left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4} \right) \frac{1}{1+y} + \left(2\alpha_2 - 4\alpha_1 - \frac{3}{2}\varphi \right) \frac{\xi}{(1+y)^2} - 2 \left(3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\alpha_3}{4} + \frac{5}{4}\varphi + 1 \right) \frac{\xi^2}{(1+y)^3} + \frac{1}{3} \left(-\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{\varphi}{2} - 1 \right) \left(\frac{8\xi^3}{(1+y)^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\xi^4}{(1+y)^5} \right) \right\} + \dots, \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_4 - 2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $X(\xi)$, $N(\eta)$ — пока неизвестные функции. Подстановка (2.9) в граничное условие (2.7), позволяет получить одно из двух уравнений, связывающих эти неизвестные функции:

$$\begin{aligned} X(z) + X'(z) = & N'(z) - N(z) - a^2 \left\{ 2 \left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4} \right) + (2\alpha_2 - 4\alpha_1 - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2}\varphi + 4) z - 2 \left(3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{4} + \frac{5}{4}\varphi - 4 \right) z^2 + \right. \\ & \left. + \left(-\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{\varphi}{2} + 2 \right) \left(\frac{8}{3}z^3 + \frac{2}{3}z^4 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Внешнее решение (2.9) не может быть применено для описания деформаций и перемещений в окрестности переднего фронта ударной волны (1.3). Одновременно оно

остаётся неопределённым до конца, поскольку неизвестные функции $X(\xi)$ и $N(\eta)$ связаны только (2.10). Дополнительным краевым условием для них следует считать соотношение, следующее из сопоставления внешнего решения (2.9) с внутренним, которое необходимо построить в окрестности ударной волны. Решение (2.9) теряет равномерный характер, если $\xi \sim \phi$ или же $y \sim \phi^{-1}$. Рассмотрим возникающую при этом внутреннюю задачу асимптотической процедуры.

3. Асимптотическое представление решения в прифронтовой области ударной волны. Пусть для начала равномерность ряда (2.9) нарушается при малых значениях переменной $\xi \sim \phi$. Тогда для перехода в область, удалённую от нагружаемой границы, изменим масштабы полухарактеристической переменной и неизвестной функции:

$$p = \phi^{-1}\xi, \quad n = y, \quad f(p, n) = v(y, z)\phi^{-1}, \quad (3.1)$$

где функция $f(p, n)$ – новая неизвестная функция. В новых переменных уравнение движения (2.6) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & (\phi f_{,nn} - 2f_{,pn}) \left\{ 1 + \alpha_1 \phi (\phi f_{,n} - f_{,p}) + \alpha_2 \phi^2 \frac{f}{1+n} \right\} + \\ & + f_{,pp} \left\{ \alpha_1 (\phi f_{,n} - f_{,p}) + (\alpha_2 + 2) \phi \frac{f}{1+n} + 2\phi f_{,n} \right\} + \\ & + 2 \frac{(\phi f_{,n} - f_{,p})}{1+n} - 2\phi \frac{f}{(1+n)^2} + \alpha_3 \phi^3 \frac{f^2}{(1+n)^3} + \alpha_4 \phi \frac{(\phi f_{,n} - f_{,p})^2}{1+n} + \\ & + \alpha_5 \phi^2 \frac{f(\phi f_{,n} - f_{,p})}{(1+n)^2} - 2f_{,p}(\phi f_{,pn} - f_{,pp}) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подстановка искомых перемещений в виде ряда по степеням малого параметра ϕ

$$f(p, n) = f_0(p, n) + \phi f_1(p, n) + \dots$$

в уравнение движения (3.2) даёт в нулевом приближении эволюционное уравнение вида:

$$v_{0,n} + \frac{\alpha_1}{2} v_0 v_{0,p} + \frac{v_0}{1+n} = 0, \quad v_0 = f_{0,p}. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) описывает поведение решения в прифронтовой области ударной волны. Последнее слагаемое уравнения (3.3) отличает его от известного уравнения Хопфа для плоских продольных ударных волн. Оно отвечает за сферический характер затухания ударной волны. Общее решение (3.3) вдоль характеристик можно записать в виде:

$$v_0(1+n) = F \left(p - \frac{\alpha_1}{2} v_0(1+n) \ln(1+n) \right), \quad (3.4)$$

где F – произвольная функция своего аргумента, её конкретный вид определяется краевыми условиями задачи и внешним решением (2.9). Из (3.4) следует, что характеристики в плоскости (p, n) будут логарифмическими кривыми, вдоль которых будет сохранять постоянное значение функция $v_0(1+n)$, а интенсивность $v_0(p, n)$ с увеличением радиуса n будет затухать. Внешнее решение (2.9) позволяет выбрать вид частного решения внутренней области:

$$v_0(p, n) = \frac{A}{1+n},$$

где A — неизвестная константа, и получить для перемещений

$$f_0(p, n) = \frac{Ap}{1+n} + \varphi_0(n),$$

где $\varphi_0(n)$ — неизвестная функция. Вид функции $\varphi_0(n)$ определяется из условия (1.3), записанного в безразмерных переменных внутренней области:

$$f_0(p, n)|_{p=p_0(n)} = 0,$$

где функция $p = p_0(n) + \phi p_1(n) + \phi^2 p_2(n) + \dots$ задает связь переменных p, n на фронте ударной волны. Для ее определения получим уравнение

$$\frac{dp_0}{dn} = \theta_1 f_{0,p}(n, p_0(n)), \quad p_0|_{n=0} = 0, \quad \theta_1 = -\frac{\alpha_1}{4},$$

из которого следует, что $p_0(n) = A\theta_1 \ln(1+n)$, $\varphi_0(n) = -\frac{A^2\theta_1 \ln(1+n)}{1+n}$. В результате находим внутреннее решение в виде:

$$f_0(p, n) = \frac{Ap}{1+n} - \frac{A^2\theta_1 \ln(1+n)}{1+n}. \quad (3.5)$$

Неизвестную константу A определяем при сращивании внешнего и внутреннего разложений. Сопоставляя два шага внешнего и один внутреннего разложений:

$$v_0(y, \xi) + \phi v_1(y, \xi)|_{y=n, \xi=\phi p} = \phi f_0(p, n), \quad (3.6)$$

получаем, что $A = -2a$. Помимо этого, условие (3.6) позволяет определить недостающее уравнение для нахождения неизвестных функций внешнего решения:

$$N'(2n) - X'(0) - \frac{X(0) + N(2n)}{1+n} - 2a^2 \left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4} \right) + 4a^2\theta_1 \ln(1+n) = 0, \quad (3.7)$$

в которое входят неизвестные константы $X'(0), X(0)$. Система уравнений (3.7), (2.10) решается последовательно, т. к. уравнение (3.7) не содержит неизвестной функции $X(z)$. Проинтегрировав систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, получим:

$$\begin{aligned} N(\eta) &= 8a^2\theta_1 \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) \left(\ln\left(1 + \frac{\eta}{2}\right) + 1\right) + N_0 \left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^2 - \\ &\quad - 2 \left\{ X'(0) + 2a^2 \left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4}\right) \right\} \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) - X(0), \\ X(\xi) &= (-12 + 6\alpha_1 - 6\alpha_2 - \alpha_3 + 3\varphi)a^2 + (12 + 6\alpha_2 - 8\alpha_1 + \\ &\quad + \alpha_3 - \frac{7}{2}\varphi) a^2 \xi - \left(8 + 4\alpha_2 - 6\alpha_1 + \frac{\alpha_3}{2} - \frac{5}{2}\varphi\right) a^2 \xi^2 - \frac{2}{3}(2 + \alpha_2 - \alpha_1 + \\ &\quad + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{1}{4}\varphi) a^2 \xi^4 + X_0 \exp(-\xi) - 4a^2\theta_1 \exp(-\xi) \int_0^\xi \frac{\exp(t)}{1+t/2} dt - \\ &\quad - 8a^2\theta_1 \frac{\xi}{2} \ln\left(1 + \frac{\xi}{2}\right) - N_0 \left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^2 - \{8a^2\theta_1 - 2N_0 - 2X'(0) - \\ &\quad - 4a^2 \left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4}\right)\} \left(1 + \frac{\xi}{2}\right) + 16a^2\theta_1 - N_0 - 2X'(0) + \\ &\quad + X(0) - 4a^2 \left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4}\right), \quad \xi = z - y, \quad \eta = z + y, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где N_0, X_0 — неизвестные постоянные интегрирования. Константу X_0 определим из соотношения $X(z)|_{z=0} = X_0$. Оставшиеся неизвестные константы $X(0), X'(0), N_0$ связаны с внешним решением (2.9) так, что все слагаемые в (2.9), содержащие эти константы, вне зависимости от значения самих констант обращаются в нуль. Поэтому далее считаем $X(0) = X'(0) = N_0 = 0$, тогда из (3.7) получим $N'(0) = 2a^2 \left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4} \right)$. Таким образом были определены все неизвестные константы и функции внешнего и внутреннего разложений. В результате внешнее разложение запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 v(y, \xi) = & -\frac{2a\xi}{1+y} - \frac{a\xi^2}{(1+y)^2} + \phi a^2 \{ (6\alpha_1 - 8\theta_1 - 12 - 6\alpha_2 - \alpha_3 + \\
 & + \frac{13}{4}\varphi) \frac{1}{1+y} - 4\theta_1 \left(1 + \frac{\xi}{(1+y)^2} \right) \ln \left(1 + y + \frac{\xi}{2} \right) + (8\theta_1 - 12 + \\
 & + 6\alpha_1 - 6\alpha_2 - \alpha_3 + 3\varphi) \left(\frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+y} \right) \exp(-\xi) + \\
 & + (-8\theta_1 + 12 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3 - 3\varphi) \frac{1}{(1+y)^2} + \\
 & + (-12 + 12\alpha_1 - 8\alpha_2 - \alpha_3 - 5\varphi) \frac{\xi}{(1+y)^2} + \\
 & + 2 \left(1 + 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{4} - \frac{5\varphi}{4} \right) \frac{\xi^2}{(1+y)^3} - \\
 & - \frac{1}{3} \left(-1 - \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{8\xi^3}{(1+y)^4} + \frac{2\xi^4}{(1+y)^5} \right) + \\
 & + 4\theta_1 \left(\frac{1}{1+y} + \frac{\xi}{(1+y)^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) + \\
 & + \left(8 - 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2} - \frac{5\varphi}{2} \right) \left(\frac{2\xi}{1+y} + \frac{\xi^2}{(1+y)^2} \right) + \frac{2}{3} (2 - \alpha_1 + \\
 & + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{\varphi}{2}) \left(\frac{4\xi^3}{1+y} + \frac{\xi^4}{(1+y)^2} \right) + 4\theta_1 \frac{\exp(-\xi)}{(1+y)^2} \int_0^\xi \frac{\exp(t)}{1+t/2} dt \} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Выше был рассмотрен случай, когда равномерность внешнего решения (2.9) нарушалась в области, где $\xi \sim \phi$. Но возможен и случай, когда нарушение равномерности происходит за счет пространственной переменной, а именно при $y \sim \phi^{-1}$. Тогда новые безразмерные переменные внутренней задачи

$$p = z - y, \quad n = \phi y, \quad f(p, n) = v(y, z)\phi^{-1}$$

приводят в нулевом приближении к уравнению:

$$v_{0,n} + \frac{v_0}{n} = 0, \quad f_{0,p} = v_0, \quad f(p, n) = f_0(p, n) + \phi f_1(p, n) + \dots, \tag{3.10}$$

общее решение которого вдоль характеристик $v_0(n, p)n = F(p)$, где $F(p)$ — произвольная функция, дает частное внутреннее решение, согласованное с внешним разложением, вида

$$f_0(p, n) = \frac{Bp}{n}, \tag{3.11}$$

где B — неизвестная константа. Для ее определения при сращивании был выбран промежуточный масштаб пространственной переменной $l = \phi^{1/2}y = \phi^{-1/2}n$. При этом выполнялось

$$v_0(y, \xi)|_{\xi=p, y=l\phi^{-1/2}} = \phi f_0(p, n)|_{y=l\phi^{1/2}}, \quad (3.12)$$

позволило получить $A = -2a$ и завершить решение для нулевого приближения. Полученное решение определяет поле перемещений при переходе к большим расстояниям, где перемещения и деформации вследствие затухания исходного импульса асимптотически стремятся к нулю.

4. Заключение. В работе на основе метода сращиваемых асимптотических разложений изучается распространение одномерных расходящихся одиночных сферических волн в нелинейно-упругих средах. Особое внимание уделяется описанию взаимовлияния внешнего и внутреннего решений. Показаны два варианта выбора безразмерных переменных, приводящих во внешней краевой задаче к решению ряда последовательных квазистатических или динамических задач. В последнем случае для определения неизвестных констант и функций при сращивании разложений, помимо сопоставления, что использовалось ранее [6, 7, 9], возникает необходимость решения дополнительной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что в отличие от поведения решения за фронтом плоской ударной волны [6, 7], в сферически симметричной задаче, начиная с первого порядка малости, асимптотика внешнего решения содержит отраженные от переднего фронта волны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский Лицей, 1998. 412 с.
- [2] Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
- [3] Буренин А. А., Чернышов А. Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 711–717.
- [4] Найфе А. Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [5] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Reviews. 1995. Vol. 48. № 1. P. 1–39.
- [6] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 3. С. 82–95.
- [7] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об ударной деформации несжимаемого полупространства под действием сдвигающей нагрузки переменного направления // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17. № 2 (58). С. 87–96.
- [8] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [9] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Математическая модель движения сдвиговых ударных волн ненулевой кривизны на основе их эволюционного уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15. № 1 (49). С. 77–85.
- [10] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [11] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
- [12] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 239 с.

V. E. Ragozina¹, Yu. E. Ivanova^{1, 2}**THE VARIOUS POSSIBILITIES FOR DESCRIBING OF SPHERICALLY SYMMETRIC SHOCK WAVES IN AN ELASTIC MEDIUM IN TERMS OF ASYMPTOTIC SERIES**¹*Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia*²*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

Abstract. On the example of the problem of shock loading of a spherical cavity in a nonlinearly elastic medium, the application of the matched asymptotic expansions method to the description of the propagation of one-dimensional shock waves of nonzero curvature is considered. It is shown that the singular problem of the perturbation method in the front region is determined by the solution of the evolution equation, which differs from the equation of a plane longitudinal wave. Various versions of the equations arising in the exterior boundary value problem and their approximate solutions are considered.

Keywords: nonlinear elastic medium, impact deformation, perturbation method, evolution equation, spherical shock wave.

REFERENCES

- [1] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear waves in elastic mediums. M.: Moscow Lyceum, 1998. 412 p. (in Russian).
- [2] Bland D. R. Nonlinear Dynamic Elasticity. M: MIR, 1972. 183 p. (in Russian).
- [3] Burenin A. A., Chernyshov A. D. Shock waves in an isotropic elastic space // PMM.1978. Vol. 42. № 4. P. 711–717. (in Russian).
- [4] Nayfeh A. H. Introduction to Perturbation Techniques. M.: MIR, 1984. 535 p.(in Russian).
- [5] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Reviews.1995. Vol. 48. № 1. P. 1–39.
- [6] Ragozina V. E., Ivanova Yu. E. About the evolutionary equations of flat problems of a shock straining of solids // Computational Continuum Mechanics. 2009. Vol. 2. № 3. P. 82 – 95. (in Russian).
- [7] Ragozina V. E., Ivanova Yu. E. On the impact deformation of an incompressible half-space under the action of a shear load of variable direction // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014. Vol. 8. Is. 4 (58). P. 87-96.(in Russian).
- [8] Whitham G. Linear and Nonlinear Waves. M: MIR, 1977. 622 p.(in Russian).

Ragozina Victoria Evgenevna

e-mail: ragozina@vlc.ru, Ph. D. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.

Ivanova Yulia Evgenevna

e-mail: ivanova@iacp.dvo.ru, Ph. D. Phys. & Math., Researcher, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok; Asson. Professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

- [9] Ragozina V. E., Ivanova Yu. E. Mathematical model of movement of shear shock waves of nonzero curvature on the basis of their evolution equation // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2012. Vol. 15.№ 1 (49). P. 77–85. (in Russian).
- [10] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [11] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. M.: MIR, 1964. 308 p. in Russian.
- [12] Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. M.: MIR, 1967. 239 p. in Russian.

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, В. С. Чиков

ВАРИАНТ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Проанализирована структура тензора упругости цилиндрически-ортотропного материала. Для такого материала записаны нелинейные определяющие соотношения, удовлетворяющие обобщению частного постулата изотропии и учитывающие конечные деформации. Указана программа экспериментов, позволяющая идентифицировать предложенные определяющие соотношения.

Ключевые слова: определяющие соотношения, анизотропные материалы, конечные деформации, эксперимент.

УДК: 539.3

Тензорно-линейная связь между напряжениями и конечными деформациями в цилиндрически-ортотропном материале. Представим тензорно-линейные определяющие соотношения как обобщение закона Гука на случай конечных деформаций, используя энергетически сопряженную пару тензоров напряжений и деформаций: энергетический тензор напряжений \mathbf{T} и тензор деформаций Коши-Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

где \mathbf{N} — постоянный тензор четвертого ранга, называемый тензором упругости.

Структура тензора \mathbf{N} для анизотропных материалов с различными типами симметрии свойств хорошо известна из работ [1, 2, 3 и др.].

Рассматриваемый в данной работе цилиндрически-ортотропный материал обладает криволинейной анизотропией и в каждой точке среды имеет в качестве главных осей

© Соколова М. Ю., Христич Д. В., Чиков В. С., 2017

Соколова Марина Юрьевна

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhrstich@rambler.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Чиков Валерий Сергеевич

e-mail: avreliukvochi@mail.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01875_а).

Поступила 05.08.2017

анизотропии оси цилиндрической системы координат. Известно, что в главных осях анизотропии ортотропный материал имеет структуру, определяемую матрицей

$$(\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} N_{rrrr} & N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{\varphi\varphi rr} & N_{\varphi\varphi\varphi\varphi} & N_{\varphi\varphi zz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{zzrr} & N_{zz\varphi\varphi} & N_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{r\varphi r\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\varphi z\varphi z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zr z r} \end{pmatrix},$$

причем в силу симметричности тензора \mathbf{N} имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} N_{rr\varphi\varphi} &= N_{\varphi\varphi rr}, & N_{rrzz} &= N_{zzrr}, & N_{\varphi\varphi zz} &= N_{zz\varphi\varphi}, \\ N_{r\varphi r\varphi} &= N_{\varphi r\varphi r}, & N_{\varphi z\varphi z} &= N_{z\varphi z\varphi}, & N_{zr z r} &= N_{r z r z}. \end{aligned}$$

Как отмечается в работе [1], если главная ось анизотропии проходит внутри тела, то на этой оси неразличимы радиальное и тангенциальное направления. В связи с этим между ненулевыми константами упругости цилиндрически-ортотропного материала должна быть установлена связь:

$$N_{rrrr} = N_{\varphi\varphi\varphi\varphi}, \quad N_{rrzz} = N_{\varphi\varphi zz}, \quad N_{r z r z} = N_{\varphi z\varphi z}.$$

Таким образом, цилиндрически-ортотропный материал имеет тензор упругости, который в главных осях анизотропии имеет не девять независимых компонентов, а только шесть. Окончательно, тензор линейной упругости цилиндрически-ортотропного материала в главных осях анизотропии имеет вид

$$(\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} N_{rrrr} & N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrrr} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{rrzz} & N_{rrzz} & N_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{r\varphi r\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zr z r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zr z r} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Сравнивая (2) с представлениями тензоров упругости для различных типов анизотропных материалов [2], можно сделать вывод о том, что цилиндрически-ортотропный материал имеет структуру тензора упругости такую же, как и тетрагональный материал.

Представление процессов деформирования анизотропных материалов в шестимерном пространстве. Различными авторами для представления тензоров напряжений и деформаций вводится в рассмотрение шестимерный тензорный базис. В частности, в работе [2] введен канонический тензорный базис, образованный тензорами

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3), & \mathbf{I}^1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2), & \mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1), \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1), & \mathbf{I}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2), & \mathbf{I}^5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3). \end{aligned} \quad (3)$$

Тензоры (3) нормируются соотношениями $\mathbf{I}^\alpha \cdot \mathbf{I}^\beta = \delta^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$. Базисные векторы \mathbf{a}_i полагаются направленными вдоль главных осей анизотропии материала: вектор \mathbf{a}_3 направлен вдоль главной поворотной оси, вектор \mathbf{a}_2 — вдоль побочной оси, вектор \mathbf{a}_1 перпендикулярен им. Полагаем, что в начальный момент векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ совпадают с векторами неподвижного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Любой симметричный тензор второго ранга в пространстве E_3 можно разложить по базисным тензорам (3), например тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и энергетический тензор напряжений можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = e_\alpha \mathbf{I}^\alpha, \quad \mathbf{T} = t_\alpha \mathbf{I}^\alpha, \quad (4)$$

где греческий индекс α принимает значения от 0 до 5. Коэффициенты разложений e_α, t_α связаны с компонентами тензоров $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \mathbf{T} = t_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ в неподвижном базисе соотношениями

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}), \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}), \quad e_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}). \end{aligned} \quad (5)$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}} e_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} e_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} e_1, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{e_3}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{e_4}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{e_5}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для тензора \mathbf{T} соотношения аналогичны.

Соотношения (5), (6) могут иметь место только в том случае, когда предполагается, что при деформации положение главных осей анизотропии не изменяется, то есть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ совпадают с векторами неподвижного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ не только в начальный момент, но и в процессе деформирования.

В теории процессов А. А. Ильюшина [4] процесс деформирования рассматривают в шестимерном пространстве и характеризуют образом процесса, под которым понимают траекторию деформирования (годограф вектора деформаций) с приписанными каждой ее точке вектором напряжений и другими термомеханическими параметрами, например, температурой. Будем рассматривать далее образы процессов, построенные в пространстве тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. В этом пространстве рассматриваются шестимерные векторы деформаций $\mathbf{e} = e_\alpha \mathbf{i}_\alpha$ и напряжений $\mathbf{t} = t_\alpha \mathbf{i}_\alpha$. Отметим, что координаты шестимерных векторов \mathbf{e}, \mathbf{t} совпадают с коэффициентами разложений соответствующих тензоров (4).

По тензорам канонического базиса (3) в работах [2, 3] построены тензоры четвертого ранга, которые используют в качестве базиса для представления тензоров, характеризующих упругие свойства материала. Базисные тензоры четвертого ранга представляются в виде:

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha) \quad (7)$$

и нормируются соотношением [3]

$$\mathbf{I}^{ij} \dots \mathbf{I}^{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{jk} \delta^{il} \right), \quad i, j, k, l = 0, 1, \dots, 5.$$

Тензоры (7) симметричны по парам индексов, их компоненты приведены в монографии [2].

Любой полусимметричный тензор четвертого ранга \mathbf{N} , имеющий диадное представление в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ в виде

$$\mathbf{N} = N_{ijkl} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}, \quad (8)$$

может быть разложен по базисным тензорам (7):

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha, \beta=0}^5 n_{\alpha\beta} \mathbf{I}^{\alpha\beta}, \quad n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha}. \quad (9)$$

Связь между компонентами $n_{\alpha\beta}$ и N_{ijkl} установлена в монографии [2] и имеет вид:

$$n_{\alpha\beta} = \beta_{\alpha}^{ij} N_{ijkl} \beta_{kl}^{\beta}, \quad N_{ijkl} = \beta_{ij}^{\alpha} n_{\alpha\beta} \beta_{kl}^{\beta}, \quad (10)$$

где матрицы β_{α}^{ij} и β_{kl}^{β} определяются одной и той же таблицей

$$(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица (β) может быть использована и для записи соотношений (5), (6):

$$\varepsilon_{ij} = \beta_{ij}^{\alpha} e_{\alpha}, \quad e_{\alpha} = \beta_{\alpha}^{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (12)$$

В шестимерном пространстве с базисными векторами \mathbf{i}_{α} тензору \mathbf{N} ставится в соответствие симметричный тензор второго ранга $\mathbf{n} = n_{\alpha\beta} \mathbf{i}_{\alpha\beta}$, где $\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_{\alpha} \mathbf{i}_{\beta} + \mathbf{i}_{\beta} \mathbf{i}_{\alpha})$ — базисные тензоры второго ранга шестимерного пространства, которые являются образами тензоров (7).

Запишем представление тензора упругости цилиндрически-ортотропного материала (2) в шестимерном пространстве. Воспользовавшись соотношениями (10), (11), получим ненулевые компоненты тензора \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} n_{00} &= \frac{1}{3} (2N_{rrrr} + 2N_{rr\varphi\varphi} + 4N_{rrzz} + N_{zzzz}), \\ n_{11} &= \frac{1}{3} (N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - 4N_{rrzz} + 2N_{zzzz}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$n_{10} = n_{01} = -\frac{\sqrt{2}}{3} (N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz}),$$

$$n_{22} = N_{rrrr} - N_{rr\varphi\varphi}, \quad n_{33} = N_{r\varphi r\varphi}, \quad n_{44} = n_{55} = N_{zrzr}.$$

Отметим, что структура тензора \mathbf{n} для цилиндрически-ортотропного материала совпадает со структурой этого тензора для тетрагонального материала [2].

Если рассматривать тензор \mathbf{n} как образ тензора упругости материала в шестимерном пространстве, то тензорно-линейные соотношения между напряжениями и деформациями (1) можно записать в пространстве тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (14)$$

причем тензор \mathbf{n} в формуле (14) имеет компоненты, связанные с компонентами тензора упругости соотношениями (13).

Нелинейные соотношения для цилиндрически-ортотропного материала. При рассмотрении нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропного материала будем использовать в качестве основной гипотезы сформулированный А. А. Ильюшиным [4] частный постулат изотропии, который в работах [2, 5, 6] был обобщен на случай анизотропных материалов.

Первоначально частный постулат изотропии был сформулирован А. А. Ильюшиным для случая малых деформаций начально изотропного материала. Согласно частному постулату, образ процесса деформирования начально-изотропного тела инвариантен относительно не только ортогональных преобразований, связанных с выбором начальной системы координат, но и произвольных преобразований вращения и отражения в пятимерном девиаторном подпространстве. Так как при таких преобразованиях изменяются третьи инварианты тензоров напряжений и деформаций, то частный постулат требует, чтобы инварианты такого типа явно не входили в функционалы, определяющие свойства материала. В соответствии с частным постулатом вектор напряжений в каждой точке траектории деформирования определяется только параметрами, характеризующими внутреннюю геометрию проекции траектории в пятимерное девиаторное подпространство. В работе [7] предложено обобщение частного постулата на случай конечных деформаций, частично обоснованное в опытах с тонкостенными трубками [8].

Для того чтобы сформулировать обобщение частного постулата на случай анизотропных материалов, рассмотрим понятие собственных упругих состояний материала. По определению Я. Рыхлевского [9] собственным тензором оператора \mathbf{N} (собственным упругим состоянием) называется тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$, для которого

$$\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha = (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha.$$

В шестимерном пространстве это определение принимает вид:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad (15)$$

причем вектор $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ является шестимерным образом тензора $\boldsymbol{\omega}_\alpha$.

Если для некоторого материала все шесть собственных значений λ_α различны, то разложение тензора \mathbf{n} по собственному базису имеет вид:

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha.$$

При наличии корня характеристического уравнения λ_α кратности k соответствующая ему часть разложения тензора \mathbf{n} имеет вид:

$$\mathbf{n}_{(\alpha)} = \lambda_\alpha (\boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} + \dots + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1}).$$

В общем случае разложение тензора \mathbf{n} по собственному базису представляется в виде:

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \boldsymbol{\Omega}_\alpha, \quad (16)$$

где n — число различных корней характеристического уравнения, базисные тензоры $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$, соответствующие однократному корню λ_α , имеют вид $\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha$, а соответствующие корню кратности k — $\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} + \dots + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1}$.

Для изотропного и анизотропных материалов различных типов собственные значения и собственные векторы определены в работе [2]. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами других авторов [9, 10].

В работе [2] показано, что триклинные, моноклинные и ромбические материалы имеют по шесть различных собственных значений и по шесть собственных подпространств, причем все они одномерные. Тетрагональные материалы имеют четыре однократных собственных значения и одно двукратное, которым соответствуют четыре одномерных собственных подпространства и одно двумерное. У гексагональных и тригональных материалов по два однократных и по два двукратных собственных значения. У этих материалов по два одномерных и по два двумерных собственных подпространства. Кубические материалы имеют три различных собственных значения: однократное, двукратное и трехкратное — и три собственных подпространства: одномерное, двумерное и трехмерное. Изотропный материал имеет два различных собственных значения: однократное и пятикратное — и два собственных подпространства: одномерное и пятимерное (девиаторное).

В работах [2], [11] сформулированы две формы обобщения частного постулата для начально анизотропных материалов: общая и предельная. В соответствии с общей формой обобщения частного постулата на случай анизотропных материалов *образ процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве материала, инвариантен относительно группы собственных ортогональных преобразований.*

Из этого обобщения следует, что в каждом неодномерном собственном подпространстве процесс определяется только внутренней геометрией траектории и не зависит от ориентации относительно базисных векторов этого подпространства. Если траектория деформирования материала полностью расположена в собственном подпространстве, то приведенная формулировка обобщения частного постулата допускает наличие составляющей вектора напряжений $\Delta \mathbf{t}$, ортогональной собственному подпространству. Отметим, что отклонение $\Delta \mathbf{t}$ является величиной второго порядка малости и не зависит от ориентации траектории деформирования относительно базисных векторов собственного подпространства.

В соответствии с предельной формой обобщения частного постулата *образ процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве, также расположен в этом подпространстве.* В этом случае связь между напряжениями и деформациями может быть представлена в виде:

$$\mathbf{t}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^m A_{(\alpha)}^i \mathbf{r}_i^{(\alpha)}, \quad (17)$$

где $A_{(\alpha)}^i [s_{(\alpha)}(t), \kappa_{(\alpha)}^1, \kappa_{(\alpha)}^2, \dots, \kappa_{(\alpha)}^{m-1}]$ — функционал процесса деформирования $\mathbf{e}_{(\alpha)}(t)$, m и $\mathbf{r}_i^{(\alpha)}$ — размерность и базис собственного подпространства.

В соответствии с ограничениями, накладываемыми на определяющие соотношения предельной формой частного постулата изотропии в виде (17), связь между напряжениями и деформациями должна содержать только линейные и квадратичные инварианты, характеризующие материалы различных типов [2], [11].

Конкретизируем соотношения (17) для цилиндрически-ортотропного материала. Для этого определим его собственные упругие состояния. Как указано выше, тензор упругости для цилиндрически-ортотропного материала в трехмерном пространстве имеет вид (2). В соответствии с соотношениями (13) в шестимерном пространстве с базисными векторами \mathbf{i}_α матрица компонент этого тензора имеет представление:

$$(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{01} & n_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Составим характеристическое уравнение для тензора \mathbf{n} :

$$\begin{vmatrix} n_{00} - \lambda & n_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{01} & n_{11} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{22} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{33} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные значения тензора \mathbf{n} в этом случае равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(n_{00} + n_{11} \pm \sqrt{(n_{00} - n_{11})^2 + 4n_{01}^2} \right), \quad (19)$$

$$\lambda_3 = n_{22}, \quad \lambda_4 = n_{33}, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = n_{44},$$

а собственные векторы определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= \mathbf{i}_0 \cos \varphi + \mathbf{i}_1 \sin \varphi, & \boldsymbol{\omega}_2 &= -\mathbf{i}_0 \sin \varphi + \mathbf{i}_1 \cos \varphi, \\ \boldsymbol{\omega}_3 &= \mathbf{i}_2, & \boldsymbol{\omega}_4 &= \mathbf{i}_3, & \boldsymbol{\omega}_5 &= \mathbf{i}_4, & \boldsymbol{\omega}_6 &= \mathbf{i}_5, \end{aligned} \quad (20)$$

где угол φ выражается через компоненты $n_{\alpha\beta}$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2n_{01}}{n_{00} - n_{11} + \sqrt{(n_{00} - n_{11})^2 + 4n_{01}^2}}. \quad (21)$$

С учетом (13) выражения для собственных значений тензора упругости через константы упругости цилиндрически-ортотропного материала имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(N_{rrrr} + N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi} \pm \sqrt{(N_{rrrr} - N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi})^2 + 8N_{rrzz}^2} \right),$$

$$\lambda_3 = N_{rrrr} - N_{rr\varphi\varphi}, \quad \lambda_4 = N_{r\varphi r\varphi}, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = N_{zrzr}. \quad (22)$$

Соответственно соотношение (21) преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\sqrt{2}(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz})}{(N_{rrrr} - N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi} + 8N_{rrzz}) + \sqrt{D}}, \quad (23)$$

где $D = (N_{rrrr} - N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi} + 8N_{rrzz})^2 + 8(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz})^2$.

Закон Гука (14), в соответствии с полученными результатами, может быть записан в виде:

$$\mathbf{t} = \lambda_1 (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2 (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_2) \boldsymbol{\omega}_2 + \lambda_3 e_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_4 e_3 \mathbf{i}_3 + \lambda_5 \mathbf{e} \cdot (\mathbf{i}_4 \mathbf{i}_4 + \mathbf{i}_5 \mathbf{i}_5).$$

Таким образом, цилиндрически-ортотропные материалы так же, как и тетрагональные, имеют пять собственных подпространств: четыре одномерных с базисами $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\Omega}_3 = \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2$, $\boldsymbol{\Omega}_4 = \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$ и единственное двумерное собственное подпространство с базисом $\boldsymbol{\Omega}_5 = \mathbf{i}_4 \mathbf{i}_4 + \mathbf{i}_5 \mathbf{i}_5$. В соответствии с этим могут быть определены два линейных и три квадратичных инварианта деформаций.

Линейные инварианты относительно группы симметрии материала тензоров деформаций и напряжений определяются [2], [11] как скалярные произведения их шестимерных образов \mathbf{e} и \mathbf{t} и единичного собственного вектора $\boldsymbol{\omega}_\alpha$:

$$e_\alpha = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad t_\alpha = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (24)$$

где m — количество инвариантных базисных векторов для рассматриваемого типа материала, определяющее размерность линейного инвариантного пространства, — или как скалярные произведения векторов \mathbf{e} и \mathbf{t} и базисных векторов линейного инвариантного подпространства:

$$e_\alpha = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_\alpha, \quad t_\alpha = \mathbf{t} \cdot \mathbf{i}_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1.$$

Для цилиндрически-ортотропного материала $m = 2$ поэтому существуют два линейных инварианта:

$$e_0 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_0 \quad \text{и} \quad e_1 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_1 \quad (25)$$

или

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \text{и} \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}). \quad (26)$$

Из выражений для e_0 и e_1 следует, что линейными инвариантами являются также величины $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ и ε_{33} .

Квадратичные инварианты тензоров деформаций и напряжений определяются через базисные тензоры квадратичных инвариантных подпространств $\boldsymbol{\Omega}$ выражениями [2]

$$s_{(\gamma)}^2 = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}, \quad t_{(\gamma)}^2 = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{t}.$$

Квадратичными инвариантами деформаций для цилиндрически-ортотропного материала являются длины векторов — проекций вектора деформаций в квадратичные

инвариантные подпространства с базисными тензорами $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{e}_{(\gamma)} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{\Omega}$, $\gamma = 3, 4, 5$, которые определяются по формулам

$$s_{(3)}^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e} = e_2^2, \quad s_{(4)}^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e} = e_3^2, \quad s_{(5)}^2 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{i}_4 \mathbf{i}_4 + \mathbf{i}_5 \mathbf{i}_5) \cdot \mathbf{e} = e_4^2 + e_5^2 \quad (27)$$

или

$$s_{(3)}^2 = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2, \quad s_{(4)}^2 = \varepsilon_{12}^2, \quad s_{(5)}^2 = \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2. \quad (28)$$

В работах [11], [12] предложен вариант нелинейных определяющих соотношений, связывающих напряжения и деформации в анизотропных материалах и удовлетворяющих предельной форме обобщения частного постулата А. А. Ильюшина. Для цилиндрически-ортотропного материала, в соответствии с найденными линейными (25) и квадратичными (27) инвариантами, нелинейные определяющие соотношения могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{t} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\alpha, \beta=1} \left(n^{\alpha\beta} + \frac{\partial n^{\alpha\beta}}{\partial e_\alpha} e_\alpha \right) e_\beta \mathbf{i}_\alpha + \sum_{\gamma=3}^{\gamma=5} 2 \left(G^\gamma + \frac{\partial G^\gamma}{\partial s_{(\gamma)}^2} s_{(\gamma)}^2 \right) \mathbf{e}_{(\gamma)}. \quad (29)$$

Если в соотношениях (29) $n^{\alpha\beta}$, $2G^\gamma$ — постоянные, то при бесконечно малых деформациях эти соотношения совпадают с законом Гука. Будем считать, что функции $n^{\alpha\beta}(e_\alpha, e_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$ зависят только от линейных инвариантов тензора деформаций, а функции $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$ — только от квадратичных инвариантов в соответствующих подпространствах, то есть процессы в различных инвариантных подпространствах протекают независимо. С учетом этого предположения соотношения (29) удовлетворяют предельной форме обобщения частного постулата А. А. Ильюшина.

Конкретизируем вид функций $n^{\alpha\beta}(e_\alpha, e_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$. Наименьшее число констант эти функции содержат, если они зависят от своих аргументов линейным образом:

$$n^{\alpha\beta}(e_\alpha, e_\beta) = n_0^{\alpha\beta} + \bar{n}^{\alpha\beta}(e_\alpha + e_\beta), \quad \alpha, \beta = 0, 1, \\ G^\gamma(s_{(\gamma)}) = G_0^\gamma + \bar{G}^\gamma s_{(\gamma)}, \quad \gamma = 3, 4, 5. \quad (30)$$

В соотношениях (30) $n_0^{\alpha\beta}$, $\bar{n}^{\alpha\beta}$, G_0^γ , \bar{G}^γ — постоянные.

Подставляя (30) в (29), получим выражения для компонент вектора напряжений в шестимерном пространстве в виде:

$$t_0 = (n_0^{00} + 3\bar{n}^{00}e_0 + \bar{n}^{01}e_1) e_0 + (n_0^{01} + \bar{n}^{01}(e_0 + e_1)) e_1, \\ t_1 = (n_0^{01} + \bar{n}^{01}(e_0 + e_1)) e_0 + (n_0^{11} + \bar{n}^{01}e_0 + 3\bar{n}^{11}e_1) e_1, \\ t_2 = (2G_0^3 + 3\bar{G}^3 |e_2|) e_2, \quad t_3 = (2G_0^4 + 3\bar{G}^4 |e_3|) e_3, \\ t_4 = \left(2G_0^5 + 3\bar{G}^5 \sqrt{e_4^2 + e_5^2} \right) e_4, \quad t_5 = \left(2G_0^5 + 3\bar{G}^5 \sqrt{e_4^2 + e_5^2} \right) e_5. \quad (31)$$

Соотношения (31) записаны в пространстве меры деформаций Коши–Грина, причем векторы \mathbf{e} и \mathbf{t} являются шестимерными образами тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{T} (4).

Задача об идентификации предложенного варианта определяющих соотношений (31) состоит в экспериментальном определении пяти функций $n^{\alpha\beta}(e_\alpha, e_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$, которые с учетом принятых представлений (30) содержат 12 констант. Шесть из этих констант связаны с константами упругости, входящими в закон

Гука для цилиндрически-ортотропного материала соотношениями (13). Предлагается для определения констант, входящих в нелинейные соотношения (31), провести четыре эксперимента с цилиндрическими образцами, ось которых совпадает с осью цилиндрической анизотропии. К этим экспериментам отнесем растяжение сплошного цилиндра, раздачу полого цилиндра внутренним давлением, цилиндрический и продольный сдвиги.

Свойства материалов обычно определяют из одноосных экспериментов со стержневыми образцами или из двухосных экспериментов с тонкостенными трубками, которые позволяют реализовывать сложное нагружение: растяжение с действием внутреннего (внешнего) давления, растяжение с кручением. Основным преимуществом таких экспериментальных образцов является однородность напряженно-деформированного состояния, реализуемого в них. Главным недостатком таких экспериментов является невозможность достижения больших деформаций из-за потери устойчивости тонкостенных трубок. Альтернативным подходом к проведению экспериментов по конечному деформированию является использование образцов, в которых создается неоднородное напряженно-деформированное состояние. В частности, можно использовать сплошные и полые цилиндрические образцы. Обработка экспериментов с такими образцами связана с необходимостью разработки математических моделей конечного деформирования цилиндрических образцов с целью определения связи между функциями, описывающими распределение напряжений и деформаций во внутренних точках образцов, и измеряемыми в опытах силовыми и геометрическими параметрами.

Функции (30) могут быть идентифицированы в четырех опытах с цилиндрическими образцами: 1) опыте на растяжение сплошного цилиндрического образца (измеряемые величины: осевая сила, удлинение и изменение наружного радиуса цилиндра); 2) опыте на раздачу полого толстостенного цилиндра внутренним давлением при зажатых торцах (измеряемые величины: внутреннее давление, изменение наружного и внутреннего радиусов цилиндра); 3) опыте на цилиндрический сдвиг (измеряемые величины: момент на подвижной наружной обойме, угол закручивания наружной поверхности цилиндра); 4) опыте на продольный сдвиг (измеряемые величины: усилие на подвижной наружной обойме, величина сдвига наружной поверхности цилиндра). Вторым опытом можно заменить экспериментом на кручение цилиндра с зажатými торцами (измеряемые величины: крутящий момент, угол закручивания на наружной поверхности и изменение наружного радиуса цилиндра) либо провести такой эксперимент для верификации определенных материальных функций. Схемы используемых экспериментов приведены на рисунках 1–5.

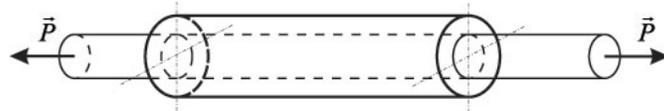


Рис. 1. Схема эксперимента на одноосное растяжение цилиндра

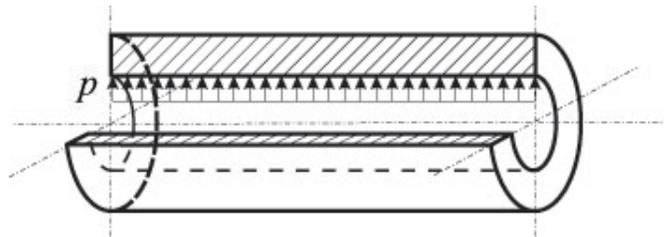


Рис. 2. Схема эксперимента по нагружению цилиндра внутренним давлением



Рис. 3. Схема эксперимента по кручению цилиндра

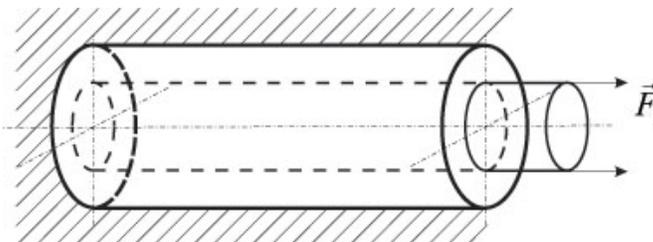


Рис. 4. Схема эксперимента по продольному сдвигу цилиндра

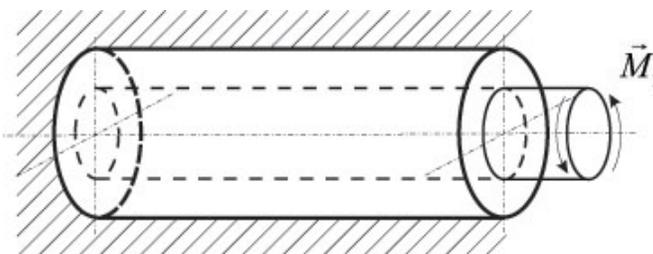


Рис. 5. Схема эксперимента по цилиндрическому сдвигу цилиндра

Отметим, что экспериментальные методики, которые предлагается использовать для идентификации определяющих соотношений, известны и подробно рассмотрены в работах [13]–[16] и др.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
- [2] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [3] Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
- [4] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
- [5] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 587–594.
- [6] Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христинич Д. В. Постулат А. А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38–45.
- [7] Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры процессов конечного деформирования // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1987. № 2. С. 49–53.

- [8] Толоконников О. Л. Установка для испытаний трубчатых образцов материалов в среде высокого давления // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1985. № 3. С. 185–187.
- [9] Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
- [10] Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // Прикладная механика и техническая физика. 1986. № 4. С. 127–135.
- [11] Христоч Д. В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипопругих тел: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Тула, 2014. 252 с.
- [12] Христоч Д. В. Варианты нелинейной связи между напряжениями и деформациями в анизотропных материалах // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 216–224.
- [13] Панов А. Д., Шумаев В. В. Применение логарифмической меры деформации для решения задач кручения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 1. С. 92–100.
- [14] Соколова М. Ю., Чиков В. С. Описание конечных деформаций сплошных цилиндров при кручении // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 109–118.
- [15] Астапов В. Ф., Маркин А. А., Соколова М. Ю. Определение упругих свойств материалов из опытов на сплошных цилиндрах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 104–111.
- [16] Иксарь А. В. Элементы теории эксперимента для термовязкопластических тел при конечных деформациях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2006. 110 с.

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, V. S. Chikov

A VARIANT OF NONLINEAR CONSTITUTIVE RELATIONS FOR A CYLINDRICALLY ORTHOTROPIC MATERIAL

Tula State University, Tula, Russian

Abstract. The structure of the elasticity tensor for cylindrically orthotropic material is analyzed. For such material nonlinear constitutive relations, which satisfy a generalization of the partial postulate of isotropy and take into account finite deformations, are written. An experimental program allowing to identify the proposed constitutive relations is specified.

Keywords: constitutive relations, anisotropic materials, finite deformations, experiment.

REFERENCES

- [1] Lekhnitsky S. G. Theory of elasticity of an anisotropic body. M.: Nauka, 1977. 416 p. (in Russian).
- [2] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. M., FIZMATLIT, 2013. 320 p.
- [3] Chernykh K. F. Introduction into anisotropic elasticity. M.: Nauka, 1988. 192 p. (in Russian).
- [4] Il'yushin A. A. Plasticity. Foundations of the general mathematical theory. M: Izd-vo AN SSSR, 1963. 272 p. (in Russian).
- [5] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Nonlinear relations of anisotropic elasticity and the partial postulate of isotropy // Applied mathematics and mechanics. 2007. Vol. 71. No. 4. P. 587–594. (in Russian).
- [6] Markin A. A., Sokolova M. Yu., Khristich D.V. A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations // Izvestiya of RAS. Mechanics of Solids. 2011. No. 1. P. 38–45. (in Russian).
- [7] Markin A. A., Tolokonnikov L. A. Measures of processes of finite deforming // Izvestiya of Northern Caucasia scientific center of the higher school. Natural sciences. 1987. No. 2. P. 49–53. (in Russian).
- [8] Tolokonnikov O. L. Device for testing of tubular specimens of material in a medium of high pressure // Izvestiya AN SSSR. Mechanics of solids. 1985. No. 3. P. 185–187. (in Russian).
- [9] Rychlewski J. On Hooke's law // Applied mathematics and mechanics. 1984. Vol. 48. No. 3. P. 420 – 435. (in Russian).

Sokolova Marina Yur'evna

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russian.

Khristich Dmitrii Viktorovich

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Tula State University, Tula, Russian.

Chikov Valerii Sergeevich

e-mail: avrelykvochi@mail.ru, Postgraduate Student, Tula State University, Tula, Russian.

[10] Ostrosablin N. I. On the structure of tensors of elastic modules and classification of anisotropic materials // Applied mechanics and technical physics. 1986. No. 4. P. 127 - 135. (in Russian).

[11] Khristich D. V. Identification of anisotropic materials and modelling of processes of finite deforming of hypoelastic bodies: dis. ... doct. fiz.-mat. nauk. Tula, 2014. 252 p. (in Russian).

[12] Khristich D. V. Variants of nonlinear relation between stresses and strains in anisotropic materials // Izvestiya TulGU. Estestvennye nauki. 2014. No. 1. P. 1. P. 216–224. (in Russian).

[13] Panov A. D., Shumaev V. V. Application of the logarithmic measure of strain for solution of problems of torsion // Izvestiya of RAS. Mechanics of solids. 2012. No. 1. P. 92 – 100. (in Russian).

[14] Sokolova M. Yu., Chkirov V. S. A description of solid cylinders finite strains at torsion // Izvestiya TulGU. Estestvennye nauki. 2013. No. 2. P. 1. P. 109 – 118. (in Russian).

[15] Astapov V. F., Markin A. A., Sokolova M. Yu. Identification of elastic properties of materials from experiments on solid cylinders // Izvestiya of RAN. Mechanics of solids. 2002. No. 1. P. 104–111. (in Russian).

[16] Iksar' A. V. Elements of the theory of experiments for thermo-visco-plastic bodies at finite deformations: dis. ... cand. fiz.-mat. nauk. M, 2006. 110 p. (in Russian).

И. В. Злобина, Н. В. Бекренев, С. П. Павлов

ПРОЧНОСТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ В СВЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г.
Саратов, Россия

Аннотация. Выполнены исследования прочностных характеристик композиционных материалов, армированных углеродными волокнами, после их модифицирования в СВЧ электромагнитном поле различной подведенной мощности. На примере пултрузионного карбона установлено, что, по сравнению с контрольными образцами СВЧ, воздействие средней мощности в течение 2 минут на окончательно сформированный объект позволяет повысить предельные напряжения изгиба на 10–12%, среза – на 36–38%, растяжения – на 34%, смятия – на 81%. При этом продолжительность процесса разрушения при изгибе образца увеличивается на 50–60%, при срезе – до 5 раз, а остаточная деформация снижается с 10–15 мм до 1 мм и менее.

Ключевые слова: композиционные материалы, углеродные волокна, пултрузионный карбон, микроструктура, контактная зона, СВЧ электромагнитное поле.

УДК: 621.9.047/048

Введение. В конструкции современных и перспективных летательных аппаратов все шире применяются композиционные материалы на основе углепластиков.

В настоящее время на долю углепластиков приходится до половины веса современного самолета как боевого, так и гражданского, до 70 % их поверхности. Внедрение композиционных материалов позволяет снижать вес летательных аппаратов на тонны [1]. Анализ научно-технической литературы, материалов конференций и выставок свидетельствует об интенсивном развитии производства композиционных материалов

© Злобина И. В., Бекренев Н. В., Павлов С. П., 2017

Злобина Ирина Владимировна

e-mail: irinka_7_@mail.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики и деталей машин, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия.

Бекренев Николай Валерьевич

e-mail: nikolaj.bekrenev@yandex.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой технической механики и деталей машин, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия.

Павлов Сергей Петрович

e-mail: pspсар@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия.

Поступила 13.07.2017

на основе углеродных волокон и стеклотканей и их широком применении в авиационной, автомобильной, судостроительной промышленности, ракетостроении и космической технике. По данным исследовательской компании Grand View Research, объем мирового рынка углепластиков достигнет к 2022 г. \$23,55 млрд. По данным другой исследовательской компании, MarketsandMarkets, глобальный рынок углепластиков уже к 2020 г. поднимется до уровня \$35,74 млрд. При этом изменится структура применяемых углепластиков и композитов на их основе: если в 2014 г. доля терморепактивных композитов составляла порядка 75%, то в перспективе наиболее высокие темпы роста будут характерны для термопластичных композитов на основе углепластиков, что повлечет за собой также реорганизацию технологического обеспечения производства изделий [2]–[4]. Одними из основных потребителей композитов на основе углеродных волокон в промышленно развитых странах были и остаются аэрокосмическая и оборонная промышленность, а также автомобилестроение (особенно производство гоночных болидов и суперкаров). В частности на аэрокосмическую отрасль приходилось в 2014 г. более 30% потребления данных материалов [2].

Постановка задачи. Изложенное свидетельствует о существовании и сохранении в близкой и отдаленной перспективе потребности высокотехнологичных производств с применением композиционных материалов высокого качества. Однако композиционные материалы характеризуются выраженной анизотропией физико-механических характеристик, определяемой видом и ориентацией армирующих компонентов. В тоже время перспективные авиационные и ракетные комплексы будут высокоманевренными, будут использованы в условиях гиперзвуковых скоростей в атмосфере и ближнем космосе, что выдвигает повышенные требования к механической и термической прочности их конструктивных элементов, имеющих сложные формы, сильно влияющие на распределение опасных механических и температурных напряжений. В этой связи с целью снижения габаритно-массовых характеристик конструктивных элементов, особенно из полимерных материалов, целесообразно их армирование содержащими углеродные волокна композиционными материалами. Перспективно использование армированных микро- и наночастицами композитов с полимерной матрицей, обладающих малым весом, значительной прочностью и высоким температурным потенциалом. Весьма актуальными являются исследование и разработка методов определения эффективных термомеханических свойств армированных композитов и их оптимизация с учетом свойств межфазного слоя, конструктивных особенностей изделия и характера действующих нагрузок.

Путем моделирования полей напряжений в сложных по конструкции изделиях [5, 6] выявлена потенциальная возможность повышения их эксплуатационной прочности за счет размещения в составе материала изделия упрочненных областей, ориентация и форма которых коррелируют с формой полей напряжений, возникающих при функционировании изделия. Одним из новых путей реализации данной возможности по сравнению с предыдущими исследованиями является оптимизация микроструктуры посредством распределения включений, их ориентации, варьирования объемной доли и формы включений по отношению к заданной целевой функции. Путем внесения армирующих компонентов возможно создание элементарных ячеек, которые будут являться наименьшей структурой, периодически повторяющейся в композиционном материале. При изменении объемной доли или формы включений, топологии элементарной ячейки материал будет приобретать различные свойства. На основе анализа

априорной информации можно считать, что данная оптимизация может быть проведена не только путем внесения компонентов, но и их модифицированием электрофизическими воздействиями, что значительно проще реализовать, поскольку процесс является управляемым благодаря регулированию технологических режимов без вмешательства в синтез материала.

Однако наряду с известными преимуществами, композиционные армированные волокнами материалы имеют существенный недостаток – высокую анизотропию свойств. Например, обладая высокой прочностью на разрыв в направлении армирующих волокон, такие материалы имеют существенно меньшую изгибную прочность и прочность по межслоевому сдвигу [3, 4], что предопределяет сочетание двух описанных выше путей оптимизации конструкции изделий из неметаллических материалов, однако в этом направлении в настоящее время объем исследований еще невелик.

Применение СВЧ электромагнитного поля для тепловой и нетепловой обработки диэлектрических, в том числе композиционных, материалов позволяет интенсифицировать процесс и повысить степень равномерности обработки вследствие объемного характера воздействия [7]–[11]. В настоящее время благодаря работам отечественных и зарубежных ученых в основном создана теория СВЧ-нагрева диэлектрических материалов и разработаны научные основы расчета СВЧ-камер различного типа и технологических магнетронов, реализованные в установках промышленного и бытового назначения.

Методика исследований и аппаратура. Нами исследовано влияние воздействия СВЧ электромагнитного поля на прочностные характеристики пултрузионного карбона, наиболее распространенного композиционного материала в конструкциях ультралегких летательных аппаратов и возможного упрочняющего компонента в неметаллических изделиях, формируемых из термопластов путем экструзии, прессования или аддитивных технологий.

В экспериментах использовали СВЧ-установку с магнетроном OM75S(31) с частотой 2450 МГц. Применяли три режима СВЧ-мощности: низкий РI, средний РII и высокий РIII. По результатам постановочных опытов и на основе априорной информации время СВЧ-воздействия выбрано равным 2 минуты. Одновременно обрабатывали по 3 образца длиной 80 мм и диаметром 5 мм. Образцы помещали на расстоянии 15 мм от нижней поверхности камеры установки. Для обеспечения нормальной работы магнетрона и недопущения перегрева в камере устанавливали балластную емкость с водой.

Испытания образцов до и после обработки проводили на установке, оснащенной тензометрическими датчиками усилий и червячным механизмом нагружения с постоянной скоростью (рис. 1). Сигналы датчиков передавались через аналогово-цифровой преобразователь (АЦП) в компьютер. Обработка результатов измерения нарастания приложенной к образцу нагрузки производилась по специальной заложенной в установке программе (LabVIEW, г. Орел) и позволила получить графики нагрузки (момента на приводе) в динамике от момента приложения до разрушения. Специальное разработанное нами оснащение позволяло выполнять испытания образцов на срез, изгибную прочность, смятие и продольную устойчивость. Прочность образцов оценивали как среднюю величину измерений нагружающего момента по максимальным и минимальным точкам графика кинетики нагружения в пределах участка, соединяющего восходящую и нисходящую ветви. Затем по известным зависимостям механики материалов вычисляли напряжения среза и изгиба, а также модуль упругости.



Рис. 1. Компьютерная установка для испытаний на изгиб, срез, смятие и продольную устойчивость: общий вид (а); рабочая зона (б); момент испытаний (в); момент разрушения образца (г)

При испытаниях на изгибную прочность образцы устанавливали на опоры оснастки, закрепленной на тензометрическом датчике, через АЦП связанным с компьютером, в котором обработка сигналов производилась и выдавалась на экран монитора в виде графика текущих величин нагружающего момента M . Расстояние между опорами – 60 мм. Нагружение осуществляли при помощи червячного редуктора с электроприводом, входящего в состав установки. С пуансоном контактировал индикатор, по которому фиксировали каждые 0,1 мм деформации. Соответственно с экрана монитора считывали значения нагружающего момента. Измерения останавливали после потери образцом целостности или после прекращения устойчивого падения нагрузки на датчике. Предельную нагрузку определяли как среднее по нескольким точкам значение нагружающего момента, согласно полученному графику от момента прекращения стабильного нарастания его величины до момента спада не менее, чем на 15%. Прочность оценивали по максимальному напряжению изгиба, определяемому расчетным путем на основе полученных значений нагрузок. Модуль упругости определяли также расчетным путем с учетом нарастания деформации и деформирующей силы по известным зависимостям сопротивления материалов.

При испытаниях на срез образцы длиной 30 мм (контрольные и после СВЧ обработки) устанавливали цилиндрической поверхностью в продольный паз в шейке вала экспериментальной установки. При этом глубина паза равнялась радиусу образца. На

вал надевали рычаг с внутренним пазом, в который попадала наружная часть цилиндрической поверхности образца. При вращении вала момент рычагу передавался через испытуемый образец. При этом рычаг воздействовал на тензометрический датчик, через АЦП связанный с компьютером, в котором производилась обработка сигналов и выдавалась на экран монитора в виде графика текущих величин нагружающего момента M . При нагружении в диаметральной плоскости образца действовали перерезывающие силы, при превышении предела прочности вызывающие деформацию сдвига и затем срез части образца. Измерения останавливали после потери образцом целостности. Прочность оценивали по максимальному касательному напряжению среза, определяемому расчетным путем на основе полученных значений нагрузок.

При испытаниях на смятие образцы длиной 15 мм (контрольные и после обработки) устанавливали цилиндрической поверхностью на подпятник (опору) оснастки, закрепленной на тензометрическом датчике, через АЦП связанным с компьютером, в котором производилась обработка сигналов и выдавалась на экран монитора в виде графика текущих величин нагружающего момента M . С пуансоном контактировал индикатор, по которому фиксировали каждые 0,05 мм деформации. Соответственно с экрана монитора считывали значения нагружающего момента. Измерения останавливали после потери образцом целостности или после прекращения устойчивого падения нагрузки на датчик. Прочность оценивали по максимальному напряжению сжатия, определяемому расчетным путем на основе полученных значений нагрузок.

При испытаниях на растяжение образцы (контрольные и после СВЧ обработки) закрепляли в захватах машины испытательной универсальной ИР 5082-100 (рис. 2).



Рис. 2. Рабочая зона установки ИР 5082-100 (а) и испытываемый образец в захватах (б)

Нагрузка воспринималась тензометрическими датчиками и через АЦП передавалась на компьютер, в котором производилась обработка сигналов и выдавалась на экран монитора в виде графика текущих величин нагружающей силы и соответствующей деформации. Нагружение осуществляли при помощи привода установки с программируемым выбором величины нагружающей силы и скорости ее нарастания. Измерения останавливались автоматически после потери образцом целостности. Предельная нагрузка выдавалась на экран монитора. Прочность оценивали по среднему

растягивающему напряжению, приводящему к разрушению образца и определяемому расчетным путем на основе полученных значений нагрузок.

Схемы испытаний представлены на рисунках 3–6.

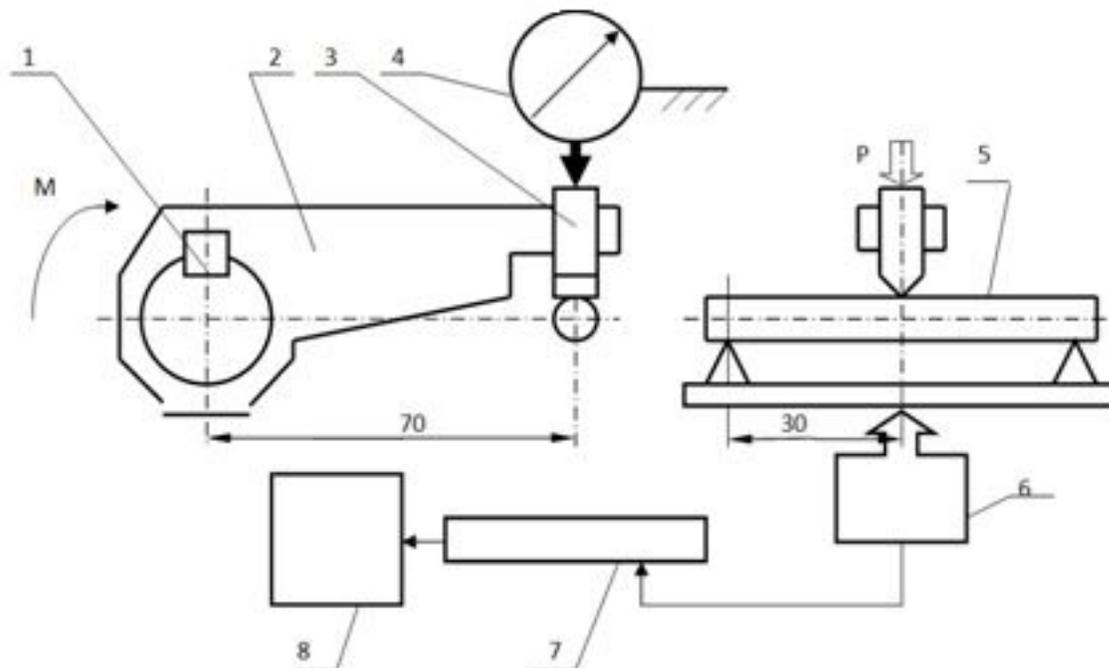


Рис. 3. Схема испытаний на изгибную прочность: 1 – шпонка; 2 – рычаг; 3 – пуансон; 4 – индикатор часового типа с ценой деления 0,01 мм; 5 – образец; 6 – тензометрический датчик; 7 – аналогово-цифровой преобразователь; 8 – компьютер

Результаты и обсуждение. Результаты испытаний в виде текущих графиков нагружения образцов, взятых с монитора лабораторной установки, представлены на рисунках 7 и 8, получены на основе их данных после пересчета зависимости величин напряжений при соответствующей схеме нагружения (рис. 9). Результаты испытания образцов на машине ИР 5082-100 представлены на рисунке 10.

Анализ графиков, описывающих кинетику нагружения, позволяет сделать вывод, что воздействие СВЧ электромагнитного поля не только приводит к увеличению предельных напряжений, но и способствует растянутому во времени процессу разрушения. На графиках в ряде случаев выделяются явные параллельные оси абсцисс участки от момента окончания нагружения до момента начала разрушения, определяющиеся по началу спада графика. Это может быть проявлением пластической деформации образца, сопровождающейся накоплением внутренней энергии, т. е., возможно, СВЧ электромагнитное поле, воздействуя на компоненты матрицы, вызывает переориентацию больших молекул и увеличение точек их взаимодействия с армирующими волокнами.

Анализ графиков (рис. 9, 10) позволяет сделать следующие выводы.

Напряжения изгиба образцов в процессе испытаний после СВЧ воздействия возрастают относительно необработанных образцов на 5 % при малой мощности, что можно

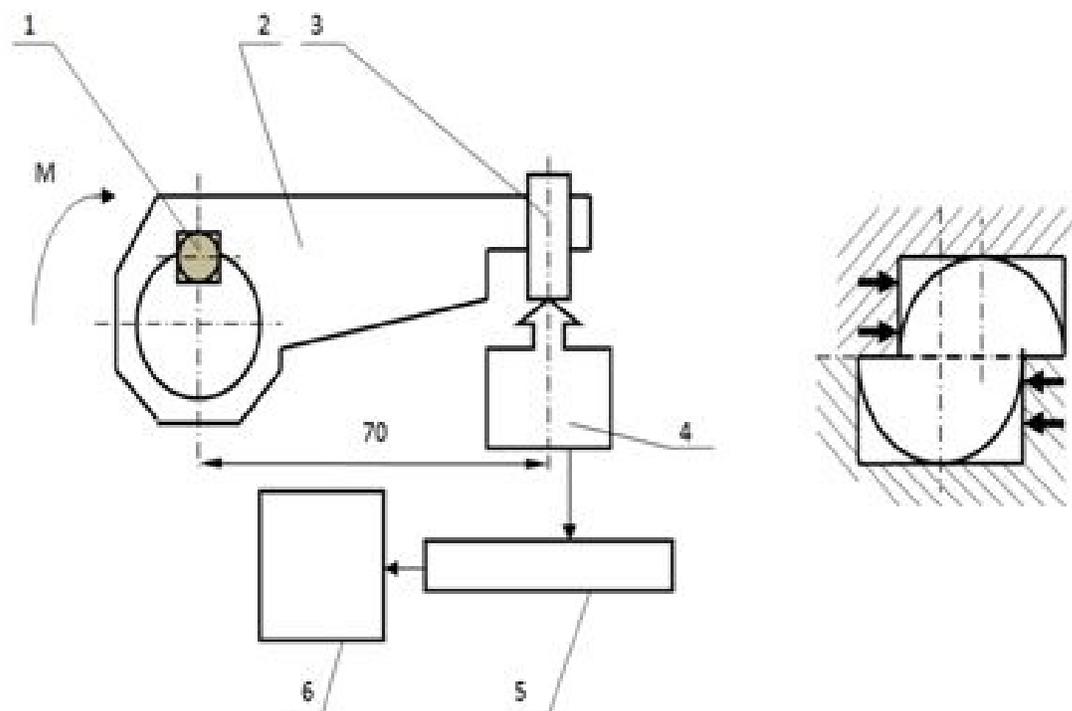


Рис. 4. Схема испытаний на срез: 1 – образец; 2 – рычаг; 3 – пуансон; 4 – тензометрический датчик; 5 – аналогово-цифровой преобразователь; 6 – компьютер

считать малозначимым, лежащим в пределах погрешности, и на 10–12 % – при средней и большой мощности. Модуль упругости материала увеличивается (3–6 %). Указанные результаты можно считать лежащими в пределах погрешности измерения, то есть в исследованном диапазоне СВЧ мощности воздействие электромагнитного поля незначительно влияет на изгибную прочность стержней из карбона и практически не влияет на продольную устойчивость. Напряжения среза образцов изменяются более явно: при малой и средней СВЧ мощности увеличение составляет от 36 до 38 %. При растяжении образцов после СВЧ обработки предельные напряжения в них возрастают по сравнению с контрольными на 34%. Также существенно увеличивается модуль упругости (на 23–24 %). Наибольшие изменения касаются предельных напряжений смятия, которые увеличиваются практически на 81 %.

Как уже отмечалось выше, СВЧ воздействие на карбоновые образцы способствует увеличению периода разрушения. Обобщенные диаграммы по данным графиков (рис. 7 и 8) представлены на рисунке 11.

По-видимому, при электрофизическом воздействии происходит дополнительное взаимодействие углеродных волокон со связующим и внешней полимерной оболочкой, приводящее к образованию местных сшивок и продольных связей. В результате эти дополнительные связи продолжают обеспечивать целостность образца после разрыва основной массы волокон и препятствуют полному разрушению. Часть волокон

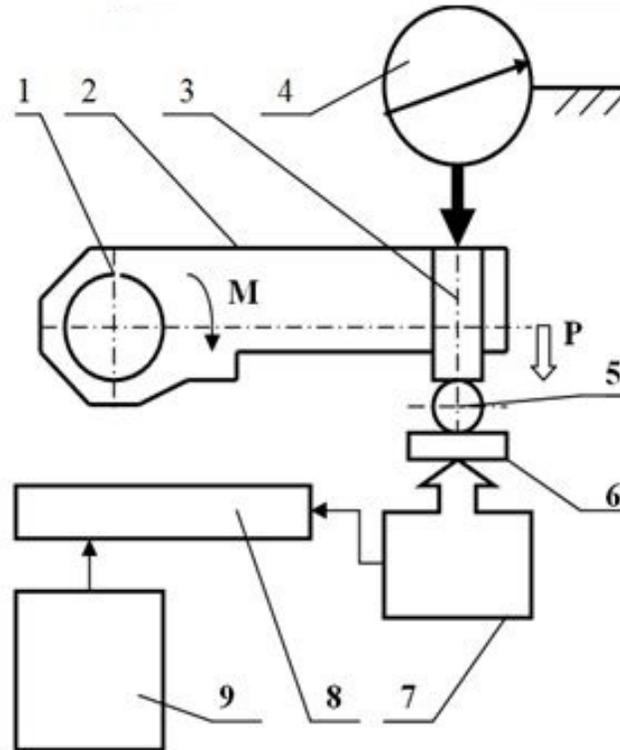


Рис. 5. Схема испытания на смятие: 1 – шпонка; 2 – рычаг; 3 – пуансон; 4 – индикатор часового типа с ценой деления 0,01 мм; 5 – образец; 6 – подпятник; 7 – тензометрический датчик; 8 – аналогово-цифровой преобразователь; 9 – компьютер

сохраняет целостность по причине возникновения дополнительных мостиков, воспринимающих нагрузку. При средней мощности происходит увеличение точек контакта связующего с волокнами и ускорение диффузионных процессов, образец становится более монолитным. Вследствие этого повышается упругость образца, он деформируется в большей степени под действием нагрузки без разрушения. Разрушение происходит уже не только в виде разрыва волокон, но и связующего. В результате разрушение происходит хаотически: по волокнам, по участкам с менее прочным связующим, по участкам с менее выраженной адгезией связующего и волокон. Это проявляется в «осколочном» характере зоны разрушения, на микрофотографии видны микрофрагменты, разнонаправленно заполняющие разлом. При воздействии большой (для данного материала) мощности описанный механизм можно считать сохраняющимся, однако возможно значительное повышение твердости и хрупкости связующего и разрушение углеродных волокон на уровне предположительно наноструктурных фрагментов. Образец разрушается вследствие роста количества и протяженности микротрещин в структуре, но спустя большее время, чем после электрофизического воздействия средней мощности. Это является причиной некоторого снижения прочностных характеристик по сравнению с образцами после воздействия СВЧ электромагнитного поля средней мощности.

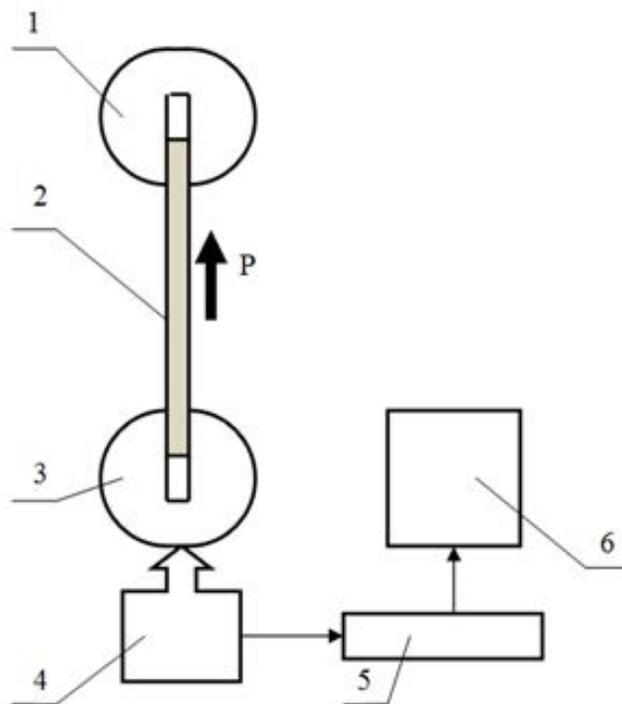


Рис. 6. Схема испытания на растяжение: 1 и 3 – захваты; 2 – образец; 4 – тензометрический датчик; 5 – аналогово-цифровой преобразователь; 6 – компьютер

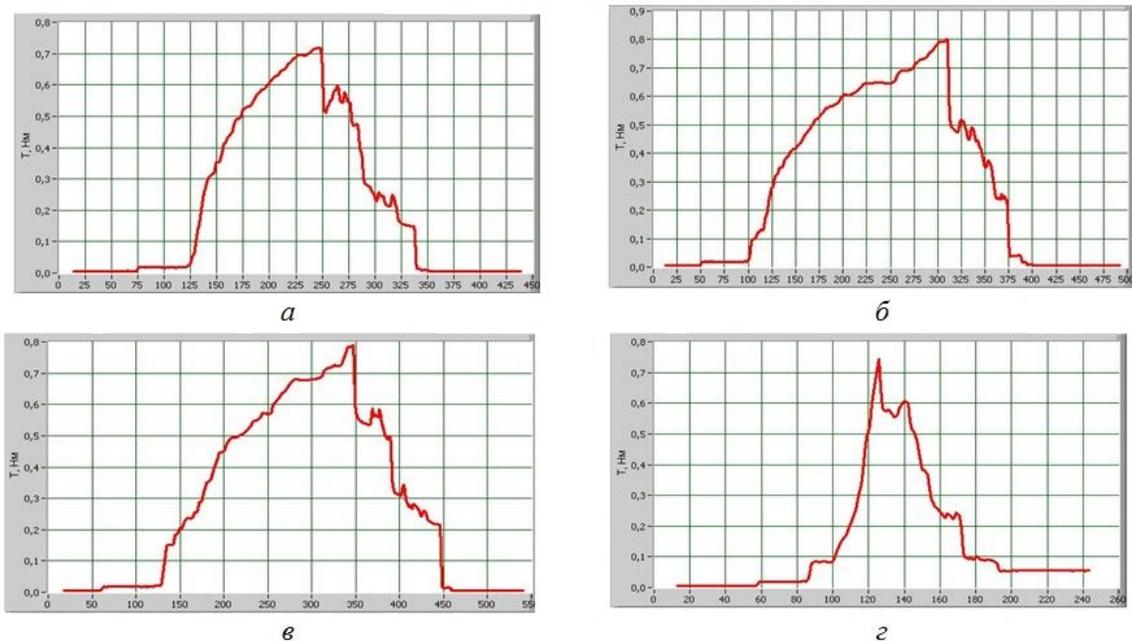


Рис. 7. Изменение воспринимаемой образцом нагрузки после модифицирования при малой (а), средней (б) и максимальной (в) СВЧ-мощности; г – контрольный образец при испытании на изгиб (по оси абсцисс указано время в мс)

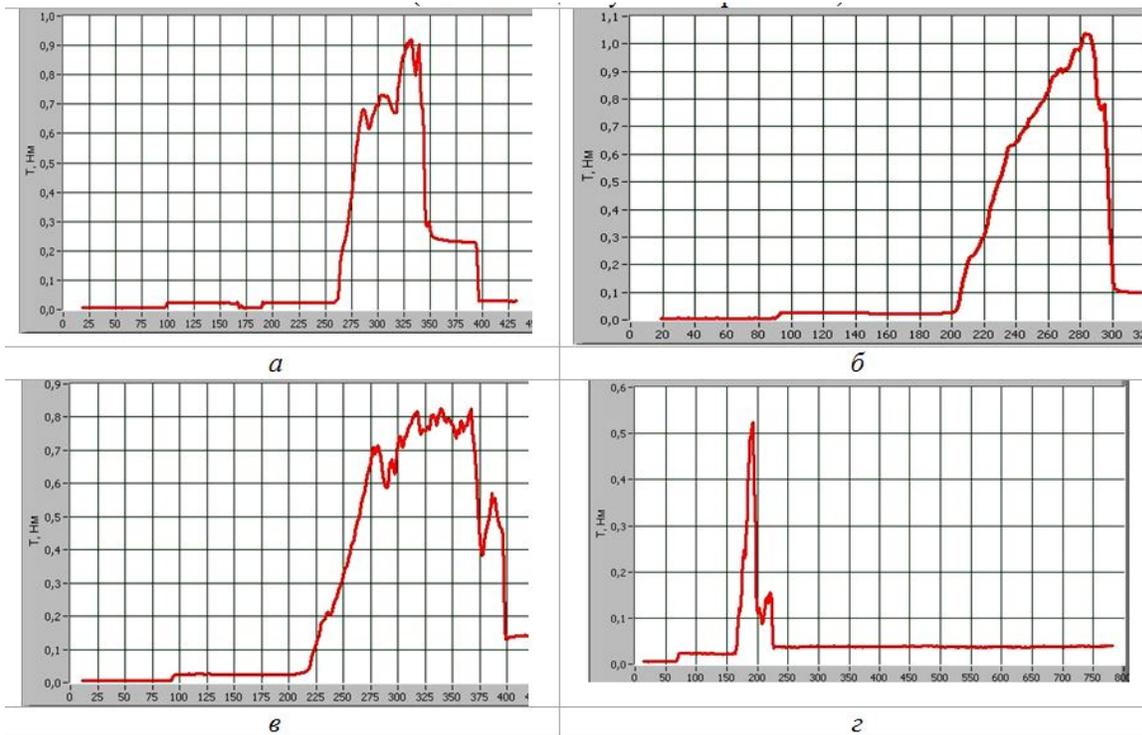


Рис. 8. Изменение воспринимаемой образцом нагрузки после модифицирования при малой (а), средней (б) и максимальной (в) СВЧ мощности; г – контрольный образец при испытании на срез (по оси абсцисс указано время в мс)

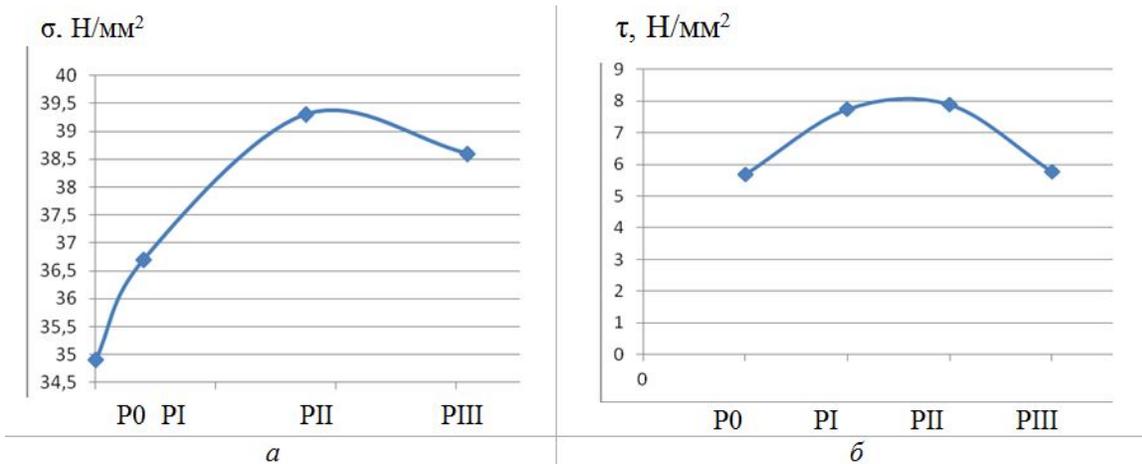


Рис. 9. Влияние мощности СВЧ электромагнитного поля на предельные напряжения изгиба (а) и среза (б) в сравнении с контрольным образцом (точка P_0)

Изложенные предположения о механизме повышения прочности и времени сохранения целостности образца под нагрузкой после воздействия СВЧ электромагнитного поля подтверждаются фотографиями внешнего вида образцов. Во всех случаях разрушение начиналось после деформации образца с образованием стрелы прогиба в

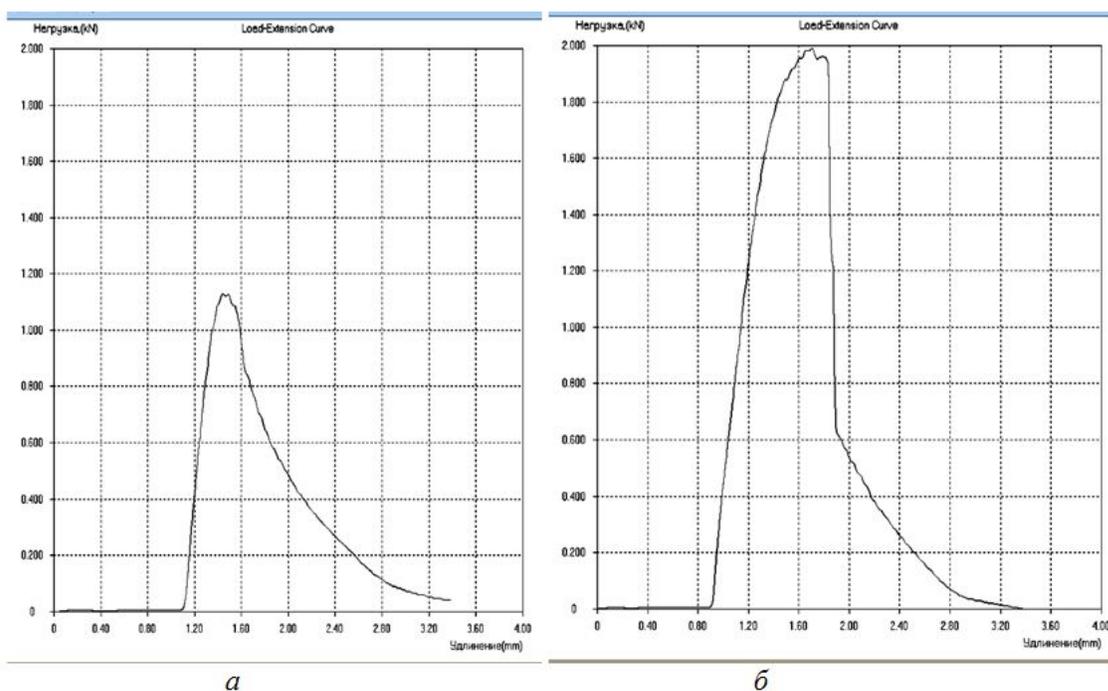


Рис. 10. Типичные графики нагружения образцов при растяжении: контрольного (а), после СВЧ воздействия средней мощности (б)

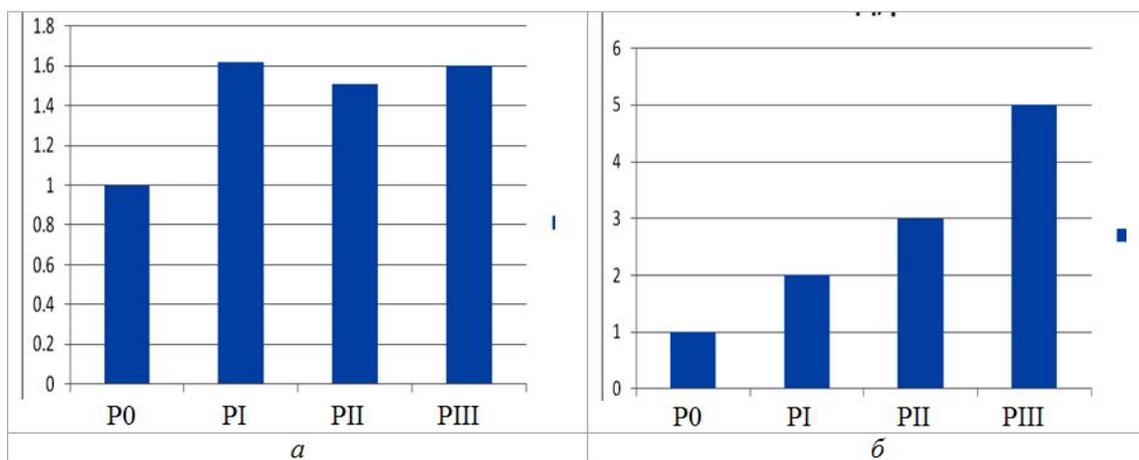


Рис. 11. Изменение периода времени от стабилизации нагрузки до разрушения образцов по сравнению с контрольным после СВЧ воздействия в относительных единицах: а – испытания на изгиб; б – испытания на срез

10–15 мм. Однако, если контрольный образец после снятия нагрузки сохранял указанную деформацию (рис. 12 а), то образец, испытанный после СВЧ воздействия малой мощности, имел после снятия нагрузки остаточную деформацию не более 2–3 мм (рис. 12 б). СВЧ воздействие средней мощности практически исключает остаточную деформацию (рис. 12 в). После воздействия СВЧ электромагнитного поля большой мощности сохраняется остаточная деформация около 1–2 мм (рис. 12 г).

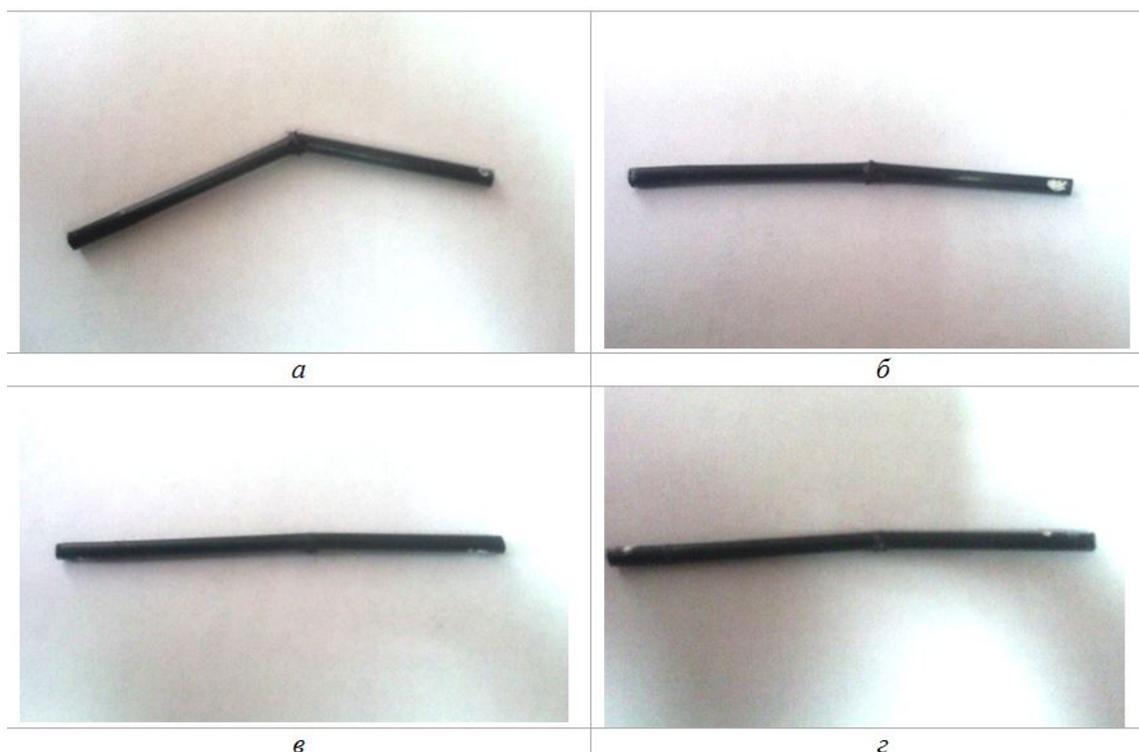


Рис. 12. Остаточная деформация после испытаний на изгибную прочность контрольного образца (а) и образцов, обработанных в СВЧ электромагнитном поле: при малой (б), средней (в) и большой (г) мощности

Данный эффект может быть связан с описанным выше фактом разрушения меньшего количества углеродных волокон у образцов, подвергнутых воздействию СВЧ электромагнитного поля, а также с образованием дополнительных связей между ними.

Заключение. Обобщая приведенные результаты экспериментов, можно сделать вывод, что в исследованном диапазоне входных параметров воздействие на образцы из карбона СВЧ электромагнитного поля средней мощности целесообразно использовать для увеличения прочностных характеристик изделий, поскольку при этом обеспечивается наибольшее увеличение времени воздействия нагрузок всех исследованных схем при достаточном увеличении абсолютных значений прочностных характеристик по напряжениям среза и смятия, а также некотором их увеличении по напряжениям изгиба.

Полученные результаты могут быть использованы для модифицирования путем СВЧ воздействия дополнительных упрочняющих структур в виде армированных углеродными волокнами композитов изделий из прессованных или литых термопластов, а также изделий сложной формы, сформированных при помощи аддитивных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кошкин Р. П. Основные направления развития и совершенствования беспилотных авиационных систем. URL: <http://spmagazine.ru/420>, (дата обращения: 28.01.2017).
- [2] URL: <http://mplast.by/novosti/2016-04-29-mirovoy-ryinok-ugleplastikov-dostignet-otmetki-v-23-mlrd-k-2022-godu/> (дата обращения: сентябрь 2016).
- [3] Каблов Е. Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // Авиационные материалы и технологии. 2015. № 1 (34). С. 3–33.
- [4] Каблов Е. Н. Материалы и химические технологии для авиационной техники // Вестник Российской академии наук. 2012. Т. 82. № 6. С. 520–530.
- [5] Павлов С. П., Пальков Р.С. Влияние свойств межфазового слоя на эффективные механические характеристики нанокompозитов // Деформация и разрушение материалов и наноматериалов (DFMN–2013): материалы V междунар. конф., г. Москва, 26–29 нояб. 2013 г. С. 554–556.
- [6] Tsuyoshi Nomura, Ercan M. Dede, Tadayoshi Matsumori, Atushi Kawamoto. Simultaneous Optimization of Topology and Orientation of Anisotropic Material using Isoparametric Projection Method // 11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 7th–12th, June 2015, Sydney, Australia.
- [7] Злобина И. В., Коломейцев В. А., Бекренев Н. В. Повышение равномерности термической обработки композиций органических материалов СВЧ излучением // Научное обозрение, 2014. № 12 (1). С. 80–83.
- [8] Злобина И. В., Коломейцев В. А. Применение СВЧ излучения для термической обработки диэлектрических органических материалов с неоднородной структурой и составом // Материалы 11-й Междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП–2014». 2014. С. 235–241.
- [9] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The Influence of Microwave Electromagnetic Field on Mechanical Properties of Composite Materials // Наукоемкие технологии. 2016. Т. 17. № 2. С. 25–30.
- [10] Zlobina, I. V., Bekrenev N. V. The influence of electromagnetic field microwave on physical and mechanical characteristics of CFRP (carbon fiber reinforced polymer) structural // Solid State Phenomena. 2016. Vol. 870. P. 101–106.
- [11] Zlobina I. V., Bekrenev N. V., Muldasheva G. K. Increasing of the endurance of polymeric construction materials with the multilevel hierarchical structure in the microwave electromagnetic field // AIP Publishing, 020236-1. – 02023.

I. V. Zlobina, N. V. Bekrenev, S. P. Pavlov

STRENGTH TESTS OF THE COMPOSITE MATERIALS MODIFIED IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD THE MICROWAVE OVEN

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov

Abstract. Researches of strength characteristics of the composite materials reinforced by carbon fibers after their modifying in the microwave oven the electromagnetic field of various brought power are executed. On the example of carbon fabrics it is established that, in comparison with control samples of the microwave oven, influence of average power within 2 minutes on finally created object allows to increase the extreme tension of a bend on 10–12 %, a cut – on 36–38 %, stretchings – on 34 %, a smashing – on 81%. At the same time duration of process of destruction at a bend of a sample increases on 50–60 % , at a cut – up to 5 times, and residual deformation decreases from 10 – 15 mm to 1 mm and less.

Keywords: composite materials, carbon fibers, pultruzionny carbon fabrics, microstructure, contact zone, microwave oven electromagnetic field.

REFERENCES

- [1] Koshkin R. P. Osnovnye napravleniya razvitiya i sovershenstvovaniya bespilotnyh aviacionnyh sistem. URL: <http://spmagazine.ru/420> (data obrashheniya: 28.01.2017). (in Russian).
- [2] URL: <http://mplast.by/novosti/2016-04-29-mirovoy-ryinok-ugleplastikov-dostigniet-otmetki-v-23-mlrd-k-2022-godu/> (data obrashheniya: sentjabr' 2016). (in Russian).
- [3] Kablov E. N. Innovacionnye razrabotki FGUP "VIAM" GNC RF po realizacii «Strategicheskikh napravlenij razvitiya materialov i tehnologij ih pererabotki na period do 2030 goda» // Aviacionnye materialy i tehnologii. 2015. № 1 (34). S. 3–33. (in Russian).
- [4] Kablov E. N. Materialy i himicheskie tehnologii dlja aviacionnoj tehniki // Vestnik Rossijskoj akademii nauk. 2012. Vol. 82. № 6. S. 520–530. (in Russian).
- [5] Pavlov S. P., Pal'kov R. S. Vlijanie svojstv mezhfazovogo sloja na jeffektivnye mehanicheskie harakteristiki nano kompozitov // Deformacija i razrushenie materialov i nanomaterialov (DFMN-2013) : materialy V mezhdunar. konf., g. Moskva, 26-29 nojab. 2013 g. S. 554–556. (in Russian).
- [6] Tsuyoshi Nomura, Ercan M. Dede, Tadayoshi Matsumori, Atushi Kawamoto. Simultaneous Optimization of Topology and Orientation of Anisotropic Material using Isoparametric Projection Method // 11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 7th–12th, June 2015, Sydney, Australia.

Zlobina Irina Vladimirovna

e-mail: irinka_7_@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

Bekrenev Nikilay Valeryevich

e-mail: nikolaj.bekrenev@yandex.ru, Dr. Sci. Tech., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

Pavlov Sergey Petrivich

e-mail: pspsar@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

[7] Zlobina I. V., Kolomejcev V. A., Bekrenev N. V. Povyshenie ravnomernosti termicheskoj obrabotki kompozicij organicheskikh materialov SVCh izlucheniem // Nauchnoe obozrenie, 2014. № 12 (1). S. 80–83. (in Russian).

[8] Zlobina I. V., Kolomejcev V. A. Primenenie SVCh izluchenija dlja termicheskoj obrabotki dijelektricheskikh organicheskikh materialov s neodnorodnoj strukturoj i sostavom // Materialy 11-j Mezhdunar. nauch.-tehn. konf. «Aktual'nye problemy jelektronnogo priborostroenija APJeP–2014». 2014. S. 235–241. (in Russian).

[9] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The Influence of Microwave Electromagnetic Field on Mechanical Properties of Composite Materials // Naukoemkie tehnologii. 2016. Vol. 17. № 2. S. 25–30. (in Russian).

[10] Zlobina, I. V., Bekrenev N. V. The influence of electromagnetic field microwave on physical and mechanical characteristics of CFRP (carbon fiber reinforced polymer) structural // Solid State Phenomena. 2016. Vol. 870. P. 101–106. (in Russian).

[11] Zlobina I. V., Bekrenev N. V., Muldasheva G. K. Increasing of the endurance of polymeric construction materials with the multilevel hierarchical structure in the microwave electromagnetic field // AIP Publishing, 020236-1. – 02023. (in Russian).

А. Н. Максимов, Н.Н. Пушкаренко, Е. А. Деревянных, Н. В. Храмова

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛОСТЯМИ

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе определены нулевые значения компонент напряжений в упругой и пластической областях, а также первые приближения компонент напряжений в пластической области для случая, удовлетворяющего условию полной пластичности.

Ключевые слова: механика, напряжения, деформации, пластичность, упругость.

УДК: 539.3+624.073

В работе исследуется напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного полостью. Для определения напряженного состояния в пластической области используются соотношения теории предельного равновесия, берущие начало от работ Кулона.

Впервые задача о трехосном растяжении несжимаемого упругопластического пространства со сферической полостью рассмотрена Т. Д. Семькиной [1]. В [2] и [3] рассмотрено пространство со сферической и эллипсоидальной полостями в случае несжимаемого упругопластического материала.

В настоящей работе в линеаризированной постановке рассматривается упругопластическое состояние пространства с полостью из сжимаемого идеальнопластического материала при трехосном сдавливании на бесконечности. Рассмотрен один из

© Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н., Деревянных Е. А., Храмова Н. В., 2017

Максимов Алексей Николаевич

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики, физики и информационных технологий, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Пушкаренко Николай Николаевич

e-mail: stl_mstu@mail.ru, кандидат технических наук, декан инженерного факультета, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Деревянных Евгения Анатольевна

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информационных технологий, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Храмова Наталья Владимировна

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, старший преподаватель кафедры математики, физики и информационных технологий, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.08.2017

случаев, при котором могут быть удовлетворены условия полной пластичности. Случай, соответствующий сферической полости, рассмотрен в [4], в [5], [6] – задача, соответствующая одному из случаев, удовлетворяющих условию полной пластичности, развернутое решение которой приведено в [7].

Задача решена методом малого параметра в сферической системе координат, в безразмерных единицах длины. Все величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу сферической полости ρ_0 .

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды определено в виде [8]:

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \quad (1)$$

где σ'_{ij} – компоненты девиатора напряжения, k_0 – коэффициент сцепления, $a = tg\alpha$ – коэффициент внутреннего трения, α – угол внутреннего трения.

Для решения задачи в сферической системе координат используем уравнения равновесия [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{\rho\theta} ctg\theta) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} ((\sigma_\theta - \sigma_\phi) ctg\theta + 3\tau_{\rho\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} (3\tau_{\rho\phi} + 2\tau_{\theta\phi} ctg\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия пластичности Треска–Сен-Венана [10] с учетом (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\rho\theta}^2 &= 0, \\ \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\theta\phi}^2 &= 0, \\ \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\rho\phi}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\theta\phi} &= \tau_{\rho\theta} \cdot \tau_{\rho\phi}, \\ \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\phi} \cdot \tau_{\theta\phi}, \\ \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\rho\phi} &= \tau_{\rho\theta} \cdot \tau_{\theta\phi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_\rho l + \tau_{\rho\theta} m + \tau_{\rho\phi} n &= P_\rho, \\ \tau_{\rho\theta} l + \sigma_\theta m + \tau_{\theta\phi} n &= P_\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tau_{\rho\phi}l + \tau_{\theta\phi}m + \sigma_{\phi}n = P_{\phi},$$

где $\sigma_{\rho}, \tau_{\rho\theta}, \dots$ – компоненты девиатора напряжения, l, m, n – направляющие косинусы нормали, $P_{\rho}, P_{\theta}, P_{\phi}$ – проекции усилий на оси ρ, θ, ϕ , $\sigma = (\sigma_{\rho} + \sigma_{\theta} + \sigma_{\phi})/3$ – среднее давление.

Компоненты напряжения представим в виде рядов по малому параметру $\delta (\delta \ll 1)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \sigma_{\rho}^0 + \delta\sigma'_{\rho}, \sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^0 + \delta\sigma'_{\theta}, \sigma_{\phi} = \sigma_{\phi}^0 + \delta\sigma'_{\phi}, \\ \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\theta}^0 + \delta\tau'_{\rho\theta}, \tau_{\rho\phi} = \tau_{\rho\phi}^0 + \delta\tau'_{\rho\phi}, \tau_{\theta\phi} = \tau_{\theta\phi}^0 + \delta\tau'_{\theta\phi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия пластичности (3) и (4) могут быть удовлетворены в трех случаях. Случай, соответствующий сферической полости, был рассмотрен в [4] и [6].

Рассматривается один из случаев, удовлетворяющих условию полной пластичности (3) и (4)

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &= 0, \\ \sigma_{\phi}^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &= 0, \\ \sigma_{\theta}^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решая совместно (7) и (3), получим

$$\sigma_{\rho}^0 = \sigma_{\phi}^0, \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\phi}^0 = \tau_{\theta\phi}^0. \quad (8)$$

Тогда (6) с учетом (8) примет вид:

$$\sigma^0 = (2\sigma_{\rho}^0 + \sigma_{\theta}^0)/3. \quad (9)$$

Решая совместно (7) и (9), получим

$$\sigma_{\rho}^0 = \sigma_{\theta}^0/A + D, \quad (10)$$

где A и D – определенные константы [4].

Уравнения равновесия (2) с учетом (8) примут вид:

$$\frac{\partial\sigma_{\rho}^0}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}(\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0) = 0, \frac{\partial\sigma_{\rho}^0}{\partial\phi} = 0, \frac{\partial\sigma_{\theta}^0}{\partial\theta} + (\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0)ctg\theta = 0. \quad (11)$$

Решая совместно (10) и (11), получим для компонент нормального напряжения в нулевом приближении в пластической области

$$\sigma_{\rho}^0 = \sigma_{\phi}^0 = \frac{c}{a} \frac{\rho^{\frac{6a}{3-2a}}}{(\sin\theta)^{\frac{6a}{3+4a}}} - \frac{k_0}{a}, \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta}^0 = \left[\frac{c}{a} \frac{\rho^{\frac{6a}{3-2a}}}{(\sin\theta)^{\frac{6a}{3+4a}}} - \frac{k_0}{a} \right] A - DA.$$

Решая совместно (7), (8) и линеаризованные условия пластичности (3), получим

$$\sigma'_\rho - \sigma' \left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0, \sigma'_\phi - \sigma' \left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0. \quad (13)$$

Тогда

$$\sigma'_\rho = \sigma'_\phi, \quad (14)$$

$$\sigma' = (2\sigma'_\rho + \sigma'_\theta)/3. \quad (15)$$

Решая совместно (13) и (15), получим

$$\sigma'_\theta = A\tilde{\sigma}', \quad (16)$$

где $\tilde{\sigma}' = \sigma'_\rho = \sigma'_\phi$.

Решая совместно (7), (8) и линеаризированные условия пластичности (4), получим

$$\tau'_{\rho\phi} = 0. \quad (17)$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (12), (17) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \left((1-A)\tilde{\sigma}' + \tau'_{\rho\theta} \text{ctg}\theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau'_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \left((A-1)\text{ctg}\theta \tilde{\sigma}' + 3\tau'_{\rho\theta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \phi} + 2\tau'_{\theta\phi} \text{ctg}\theta &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для решения (13) водится функция $U(\rho, \theta, \phi)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\tilde{\sigma}' = \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \tau'_{\theta\phi} = -\frac{1}{\rho \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}, \tau'_{\rho\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{A}{\rho \sin \theta} U. \quad (19)$$

Тогда первое и третье уравнения (15) тождественно удовлетворяются, а второе уравнение примет вид:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - (A-3)\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} - A \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \text{ctg}\theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} - 2AU = 0. \quad (20)$$

Решение (17) найдено методом разделения переменных

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) (a_{mn} \cos m\phi + b_{mn} \sin m\phi) (\sin \theta)^{\frac{A+1}{2A} + \alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta), \quad (21)$$

где первый множитель (18) представляет решение уравнения Эйлера, в котором

$$\chi_{1,2} = \frac{A}{2} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} + 1\right)^2 - A(2\alpha + 1)(n + 0,5) + An^2 - m^2 + 1/2}, \quad (22)$$

C_1, C_2 – константы, которые могут быть определены из граничных условий и условий сопряжения,

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{A+1}{2A}\right)^2 - \frac{m^2}{A}}, \quad (23)$$

второй сомножитель представляет решение уравнения Фурье, в котором a_{mn}, b_{mn} – коэффициенты Фурье [4], $P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta)$ – полином Якоби.

Подставляя (18) в (15) и принимая во внимание (12), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области:

$$\begin{aligned} \sigma'_\rho &= \sigma'_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1-1} + C_2 \rho^{\chi_2-1}) (a_{mn} \cos m\phi - b_{mn} \sin m\phi) \cdot (\sin \theta)^{\frac{A+1}{2A} + \alpha} \times \\ &\times \left[\left(\frac{A+1}{2A} + \alpha \right) \cos \theta \cdot P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \right], \\ \sigma'_\theta &= A\sigma'_\rho, \tau'_{\rho\phi} = 0, \\ \tau'_{\theta\phi} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1-1} + C_2 \rho^{\chi_2-1}) (b_{mn} \cos m\phi - a_{mn} \sin m\phi) (\sin \theta)^{\frac{1-3A}{2A} + \alpha} \times \\ &\times m \cdot P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta), \\ \tau'_{\theta\rho} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1-1} (A - \chi_1) + C_2 \rho^{\chi_2-1} (A - \chi_2)) (a_{mn} \cos m\phi + b_{mn} \sin m\phi) \times \\ &\times (\sin \theta)^{\frac{1-A}{2A} + \alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (24)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Семькина Т. Д. О трехосном растяжении упругопластического пространства, ослабленного сферической полостью // Известия АН СССР. Серия: Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 174–177.
- [2] Ефремов В. Г. Идеальнопластическое напряженное состояние тел вблизи сферической полости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1999. № 3. С. 70–75.
- [3] Максимов А. Н., Ефремов В. Г. Об определении предельного напряженного состояния в массиве, ослабленном эллипсоидальной полостью // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. 2001. №2 (15). С. 128–134.
- [4] Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н. К вопросу определения возмущенного состояния идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного сферической полостью // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2016. №3 (29). С. 112–115.
- [5] Максимов А. Н. Об определении возмущенного состояния массива при условии полной пластичности // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4. С. 95–99.
- [6] Максимов А. Н. Напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого пространства, ослабленного сферической полостью // Современное состояние в области механики и энергетики: сборник статей ВНК. Чебоксары, 2016. С. 592–599.
- [7] Максимов А. Н. К вопросу определения напряженного состояния массива из сыпучей среды // Вестник Чувашской государственной сельскохозяйственной академии. 2017. №1 (1). С. 75–81.
- [8] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: ГИТТЛ, 1954.
- [9] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

[10] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

A. N. Maksimov, N. N. Pushkarenko, E. A. Dereviannih, N. V. Khramova

TO THE QUESTION OF IDENTIFICATION OF THE PERTURBED STATE OF A MASSIVE WEARED BY POLES

Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Abstract. In this paper, the zero values of the stress components in the elastic and plastic regions are determined, as well as the first approximations of the stress components in the plastic region for the case that satisfies the condition of complete plasticity.

Keywords: mechanics, stress, strain, flexibility, elasticity.

REFERENCES

[1] Semykina T. D. On triaxial stretching of an elastoplastic space weakened by a spherical cavity // *Izvestiya Academy of Sciences of the USSR. Series: Mechanics and engineering.* 1963. No. 1. P.174–177. (in Russian).

[2] Efremov V. G. Ideal-plastic stress state of bodies near a spherical cavity // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. MTT.* 1999. № 3. P.70-75. (in Russian).

[3] Maksimov A. N., Efremov V. G. On the determination of the limiting stress state in an array weakened by an ellipsoidal cavity // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named I. Y. Yakovlev.* 2001. № 2. P.128–134. (in Russian).

[4] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. On the problem of determining the perturbed state of an idelnoplastic compressible mass, weakened by a spherical cavity // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limiting state.* 2016. № 3(29). P. 112–115. (in Russian).

[5] Maksimov A. N. On the definition of the disturbed state of the array under the condition of complete plasticity // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limiting state.* 2016. № 4. P. 95–99. (in Russian).

[6] Maksimov A. N. Stress state of an ideally plastic compressible space weakened by a spherical cavity // *Current state in the field of mechanics and energy: a collection of articles of VNPk.* Cheboksary, 2016. P. 592–599. (in Russian).

Maksimov Aleksey Nikolaevich

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Pushkarenko Nikolay Nikolaevich

e-mail: stl_mstu@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Dereviannih Evgeniya Anatolyevna

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Khramova Natalia Vladimirovna

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, Senior Lecturer, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

[7] Maksimov A. N. To the problem of determining the stress state of an array from a granular medium // Bulletin of the Chuvash State Agricultural Academy. 2017. No. 1. P. 75–81. (in Russian).

[8] Sokolovsky V. V. Static of the granular medium. M.: GITTL, 1954. (in Russian).

[9] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).

[10] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. 231 p. (in Russian).

А. В. Никитин

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

*Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического университета,
г. Чебоксары*

Аннотация. Рассматривается предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал предполагается неоднородным и обладающим свойствами анизотропии в пластической области. Неоднородность материала заключается в том, что предел текучести зависит от координат, причем он постоянен вдоль концентрических окружностей. Определено предельное состояние трубы в первом приближении.

Ключевые слова: пластичность, неоднородность, труба, анизотропия.

УДК: 539.3+624.073

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a , b ; $a < b$, которая находится под действием внутреннего давления p (рис. 1). Условие пластичности примем в виде [2]:

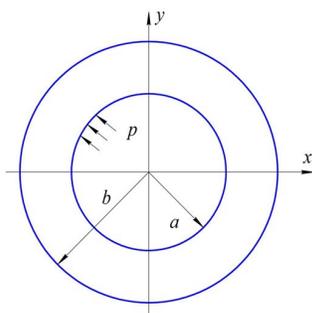


Рис. 1. Толстостенная труба радиусов a, b ; $a < b$

© Никитин А. В., 2017

Никитин Андрей Витальевич

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры управления в технических системах и программирования Чебоксарского института (филиала) Московского политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.08.2017

$$A \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + B (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_{xy}^2, \quad k_1, k_2, k_3 = -const, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Положим

$$k_{xy} = k_0 + \delta c(x^2 + y^2), \quad k_0, c = -const, \quad (2)$$

где δ — малый безразмерный параметр.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (4)$$

Из (1) – (4) получим пластичности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} &(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 [A \cos^2(2\theta) + B \sin^2(2\theta)] + 4\tau_{\rho\theta}^2 [A \sin^2(2\theta) + B \cos^2(2\theta)] \\ &+ [A(k_1 - k_2)^2 + 4Bk_3^2] + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)\tau_{\rho\theta}(A - B)\sin(4\theta) - \\ &- 4\tau_{\rho\theta}[\sin(2\theta)(k_1 - k_2) + 2\cos(2\theta)k_3] - \\ &- 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta)[\cos(2\theta)(k_1 - k_2) - 2k_3\sin(2\theta)] = \\ &= 4(1 + c\delta\rho^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)))^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим, что

$$\frac{a}{\rho_s^{(0)}} = \alpha, \quad \frac{b}{\rho_s^{(0)}} = \beta,$$

$$k_1 = \delta_1 k'_1, \quad k_2 = \delta_1 k'_2, \quad k_3 = \delta_1 k'_3.$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)} \delta + \sigma_{ij}^{(II)} \delta^2 + \dots \quad (7)$$

Согласно (2) предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль концентрических окружностей

$$c(x^2 + y^2) = d, \quad d = const \quad (8)$$

и изменяется в зависимости от изменения величины d .

Будем считать, что на внутренней поверхности трубы действует постоянное давление p , а внешняя поверхность свободна от усилий.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде (7).

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Из (1), (7), (9) имеет место

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} = -2. \quad (10)$$

Решая совместно (6), (9), (10), получим

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = 2 \ln \rho + C, \sigma_{\theta}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \rho + C, \quad (11)$$

где C – const.

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p , внешняя граница трубы свободна от усилий:

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -p. \quad (12)$$

Из (11), (12) имеют место

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = -p + 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}. \quad (13)$$

Из (5), (7), (10) получим:

$$\sigma_{\theta n}^{(I)} - \sigma_{\rho n}^{(I)} = 2c\rho^2 + \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos(4\theta) \right] - k_1 \cos(2\theta) + k_2 \cos(2\theta) + 2k_3 \sin(2\theta). \quad (14)$$

Уравнения равновесия (6) удовлетворим, полагая, что

$$\sigma'_{\rho}{}^p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma'_{\theta}{}^p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau'_{\rho\theta}{}^p = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (15)$$

Из (14), (15) получим:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 2c\rho^4 + \rho^2 (G + H \cos(4\theta)) + \rho^2 \cos(2\theta) (k_2 - k_1) + 2k_3 \rho^2 \sin(2\theta), \quad (16)$$

где

$$G = \left(\frac{a+b}{2} \right), \quad H = \left(\frac{a-b}{2} \right).$$

В первом приближении граничные условия согласно [1] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho}{}^p \Big|_{\rho=\alpha} &= 0, \\ \tau'_{\rho\theta}{}^p \Big|_{\rho=\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение в пластической зоне будет определяться из (16), (17):

$$\begin{aligned} \sigma_p' p = & \frac{\sin(2\theta)}{8\rho} [8k_3\alpha (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \cos(\sqrt{3} \ln \rho)) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \\ & - (8k_3\alpha (\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) - 8k_3\rho] + \\ & + \frac{\cos(2\theta)}{8\rho} [(-4(k_1 - k_2)\alpha\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \cos(\sqrt{3} \ln \rho)) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \\ & + (4(k_1 - k_2)\alpha\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + 4(k_1 - k_2)\rho] + \\ & + \frac{\cos(4\theta)}{8\rho} [(H\alpha(\sqrt{15}) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln \rho)) \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \\ & - (H\alpha(\sqrt{15}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - 7 \sin(\sqrt{15} \ln \rho)) \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) - 7H\rho] + \\ & + c \frac{\rho^2}{\alpha^2} + G \ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta' p = & \frac{\sin(2\theta)}{8\rho} [8k_3\alpha (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \cos(\sqrt{3} \ln \rho)) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \\ & - (8k_3\alpha (\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) + 8k_3\rho] + \\ & + \frac{\cos(2\theta)}{8\rho} [(-4(k_1 - k_2)\alpha\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) + \cos(\sqrt{3} \ln \rho)) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + \\ & + (4(k_1 - k_2)\alpha\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - 4(k_1 - k_2)\rho] + \quad (18) \\ & + \frac{\cos(4\theta)}{8\rho} [(H\alpha(\sqrt{15}) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) + 7 \cos(\sqrt{15} \ln \rho)) \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \\ & - (H\alpha(\sqrt{15}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - 7 \sin(\sqrt{15} \ln \rho)) \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) + H\rho] + \\ & + c \frac{3\rho^2}{\alpha^2} + G \ln(\rho + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}' p = & \frac{\sin(2\theta)}{240\rho} \left[-240\alpha \left(\frac{k_2 - k_1}{2} \right) (\cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \right. \\ & - 240\alpha\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) \left(\frac{k_2 - k_1}{2} \right) (\cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \\ & + \frac{1}{6} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) + 60\rho(2k_2 - 2k_1)] + \\ & + \frac{\cos(2\theta)}{240\rho} [-240\alpha k_3 (\cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \\ & - 240\alpha k_3 \sin(\cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \frac{1}{6} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \sin(\sqrt{3} \ln \alpha) - 240\rho k_3] + \\ & + \frac{\sin(4\theta)}{240\rho} [-60\alpha H (\cos(\sqrt{15} \ln \rho) - \frac{1}{4} \sin(\sqrt{15} \ln \rho)) \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \\ & - 60H\alpha\sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha) [\cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \frac{1}{60}\alpha \sin(\sqrt{15} \ln \rho)] + 60\rho H]. \end{aligned}$$

Таким образом (18) полностью описывают напряженное состояние неоднородно-анизотропной трубы в первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Ивлев Д. А. Об анизотропии пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (66). С. 64–68.
- [3] Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 60–70.
- [4] Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). Ч. 2. С. 148–155.
- [5] Никитин А. В., Миронов Б. Г. Определение перемещений в пластической и упругой областях в толстостенной неоднородной трубе при трансляционной анизотропии // Сборник статей по материалам XIV Международной заочной научно-практической

конференции «Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии». 2014. №2 (14). С. 93–106.

A. V. Nikitin

THE QUESTION OF THE ULTIMATE STATE INHOMOGENEOUS PIPE UNDER INTERNAL PRESSURE

Cheboksary institute (branch) of the Moscow polytechnic university, Cheboksary, Russia

Abstract. Considered is limit state of the inhomogeneous pipe under internal pressure. The material is assumed heterogeneous and possesses the properties of anisotropy in the plastic region. The heterogeneity of the material is that pre-turnover depends on the coordinates, and it is constant along concentric circles. Defined is limit state of the pipe in the first approximation.

Keywords: plasticity, heterogeneity, pipe, anisotropy.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. *Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela*. M.: Nauka, 1978. 208 s. (in Russian).
- [2] Ivlev D. A. Ob anizotropii plasticheskikh tel // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva*. 2010. № 2 (66). S. 64–68. (in Russian).
- [3] Nikitin A. V. Predel'noe sostojanie neodnorodnoj trubj, nahodjashhejsja pod dejstviem vnutrennego davlenija // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva*. Serija: *Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2015. № 1 (23). S. 60–70. (in Russian).
- [4] Nikitin A. V., Tihonov S. V. Uprugoplasticheskoe sostojanie transljacionno-anizotropnoj linejno-neodnorodnoj trubj, nahodjashhejsja pod dejstviem vnutrennego davlenija // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva*. 2013. № 4 (80). Ch. 2. S. 148–155. (in Russian).
- [5] Nikitin A. V., Mironov B. G. Opređenje peremeshhenij v plasticheskoi i uprugoi oblasti v tolstostennoj neodnorodnoj trubje pri transljacionnoj anizotropii // *Sbornik statej po materialam XIV Mezhdunarodnoj zaochnoj nauchno-prakticheskoi konferencii «Nauchnaja diskussija: voprosy matematiki, fiziki, himii, biologii»*. 2014. №2 (14). S. 93–106. (in Russian).

Nikitin Andrey Vitalevich

e-mail: ligalas5@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Cheboksary Institute (branch) of the Moscow polytechnic university, Cheboksary, Russia.

А. Н. Спорыхин

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СМЕСЕЙ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Вопросам устойчивости пластически деформирующихся сред посвящены многие работы. Состояние этих исследований, проведенных на основании трехмерных линеаризованных уравнений устойчивости, отражено в обзорных статьях и монографиях [1] – [4] и др. При этом значительная часть конкретных результатов получена в основном для задач устойчивости в геомеханике [5] – [7] и др. Для описания поведения и исследования устойчивости в строгой линеаризованной трехмерной постановке целого ряда реальных структур, состоящих из n – компонент, необходимо для лучшего приближения к действительности привлекать более общие модели тел. Очевидно, что в рамках простейших структурных моделей тел [8] – [9], в том числе и модели [10], невозможно адекватно описать поведение многокомпонентных смесей. Ниже для предложенной модели многокомпонентного тела рассматривается один из возможных приближенных подходов к исследованию устойчивости многокомпонентных упруговязкопластических (EVP) смесей. Устанавливается, что исследование устойчивости основного (докритического) состояния смеси может быть сведено к изучению устойчивости континуума с комплексными физико-механическими параметрами.

Ключевые слова: смеси, устойчивость, напряжение, деформация, пластичность, вязкость.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим EVP многокомпонентное тело, механическая модель которого изображена на рисунке 1. Индексы e, e_1, p, v обозначают соответственно упругий, пластический и вязкий механизмы. Модель представляет собой последовательное соединение α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots$) моделей тела $S_p^1 = H \sim StV \sim K$ ¹, состоящего из последовательно соединенных тел: H – тела Гука, StV – тела Сен-Венана и K – тела Кельвина–Фойхта. При этом у каждой из этих моделей S_p^α свои собственные константы. Число α определяет порядок обобщенной модели тела S_p^α .

© Спорыхин А. Н., 2017

Спорыхин Анатолий Николаевич

e-mail: anspro@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.08.2017

¹Модель этого тела была предложена А. Н. Спорыхиным [10].

$$\varepsilon_{nn}^p = 0, \alpha = 1, 2. \quad (4)$$

Следовательно, компоненты дивергента тензора деформации e_{ij}^p тождественно равны компонентам тензора деформаций ε_{ij}^p .

Напряжения, приложенные к моделям, одинаковы, тогда

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = S_{ij} (\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \sigma_{ij}). \quad (5)$$

Тензоры скоростей пластической деформации e_{ij}^p связаны с тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона течения

$$e_{ij}^p = \psi_\alpha \left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^p - \eta_\alpha e_{ij}^p \right), \quad \alpha = 1, 2, \quad (6)$$

если выполняется условие пластичности

$$\left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^p - \eta_\alpha e_{ij}^p \right) \left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^p - \eta_\alpha e_{ij}^p \right) = k_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь η_α – коэффициент вязкости, c_α – коэффициент упрочнения, k_α – предел текучести, ψ_α – скалярные положительные множители, соответственно, первой ($\alpha = 1$) и второй ($\alpha = 2$) модели.

Полные деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i. \quad (8)$$

Уравнения (1)–(8) с уравнениями равновесия

$$\nabla_i \sigma_j^i + X_j = 0 \quad (9)$$

представляют собой систему уравнений, описывающих деформированное состояние *EVP* среды второго порядка.

2. Системы S_p^α , испытывающие *EVP* деформации, обладают свойством внутренней неконсервативности вследствие необратимости вязких и пластических деформаций. Поэтому согласно [3, 4] исследование устойчивости состояния такой системы должно основываться на анализе движения такой системы вблизи основного состояния равновесия при сообщении системе некоторых малых возмущений, то есть на основе динамического подхода.

При исследовании устойчивости систем S_p^α , для которых наблюдается явление разгрузки, для упрощения задач ввиду их сложности применяем обобщенную концепцию продолжающегося нагружения [2, 3] и будем исследовать соответствующую линеаризованную задачу с известными зонами разгрузки, возникшими в докритическом состоянии.

Рассмотрим сплошную среду объема V . Предположим, что на части поверхности Σ_P *EVP* тела заданы поверхностные усилия p_i , а на части поверхности Σ_U – перемещения u_i , причем величины p_i и u_i с ростом времени t стремятся или принимают значения p_i^0 и u_i^0 , не зависящие от времени.

Пусть решение системы уравнений (1) – (8) при этих граничных условиях есть

$$\overset{0}{\sigma}_{ij}(x_k, t), \overset{0}{\varepsilon}_{ij}(x_k, t), \overset{0}{e}_{ij}^{\alpha}(x_k, t), \overset{0}{e}_{ij}^{p\alpha}(x_k, t), \overset{0}{u}_i(x_k, t). \quad (10)$$

Будем предполагать, что с ростом времени эти решения стремятся к

$$\overset{0}{\sigma}_{ij}(x_k), \overset{0}{\varepsilon}_{ij}(x_k), \overset{0}{e}_{ij}^{\alpha}(x_k), \overset{0}{e}_{ij}^{p\alpha}(x_k), \overset{0}{u}_i(x_k). \quad (11)$$

В дальнейшем исследуется устойчивость этого состояния по отношению к малым возмущениям при предположении, что об устойчивости движения можно судить по линеаризованной системе уравнений (1) – (9).

В случае второго варианта теории малых докритических деформаций [5] трехмерные линеаризованные уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_s \left(\overset{+}{\sigma}_j^s + \overset{0}{\sigma}_k^s \nabla^k \overset{+}{u}_j \right) + \overset{+}{X}_j - \rho \frac{\partial^2 \overset{+}{u}_j}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

Здесь и далее верхние индексы «+» и «0» приписаны соответственно компонентам невозмущенного состояния и возмущениям.

Граничные условия на внешней поверхности Σ_P обобщенного EVP тела следующие:

$$N_s \left(\overset{+}{\sigma}_j^s + \overset{0}{\sigma}_k^s \nabla^k \overset{+}{u}_j \right) = \overset{+}{P}_j, \quad (13)$$

при этом в случае «следающей» нагрузки

$$\overset{+}{P}_j = \overset{0}{P}_k \nabla^k \overset{+}{u}_j, \overset{+}{X}_j = \overset{0}{X}_k \nabla^k \overset{+}{u}_j, \quad (14)$$

а в случае «мертвой» нагрузки

$$\overset{+}{P}_j = \overset{+}{X}_j = 0. \quad (15)$$

Если на части поверхности тела Σ_U заданы перемещения, то граничные условия принимают вид:

$$\overset{+}{u}_j = 0. \quad (16)$$

Для компонент тензора деформаций имеют место формулы Коши

$$2\overset{+}{\varepsilon}_{jk} = \nabla_k \overset{+}{u}_j + \nabla_j \overset{+}{u}_k, 2\overset{0}{\varepsilon}_{jk} = \nabla_k \overset{0}{u}_j + \nabla_j \overset{0}{u}_k. \quad (17)$$

Соотношение (2) в этом случае запишется

$$\overset{+}{\sigma}_{ij}^{\alpha} = \lambda_{\alpha} \overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{\alpha} + 2\mu_{\alpha} \overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (18)$$

Для полных деформаций из (3) следует:

$$\overset{+}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{\alpha} + \overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha} \right). \quad (19)$$

Условие пластической несжимаемости таково:

$$\overset{+}{\varepsilon}_{nn}^{p\alpha} = 0, (\alpha = 1, 2). \quad (20)$$

Для несжимаемого упрочняющегося, EVP обобщенного S_p^α тела линейризованные условия пластичности (7) и ассоциированный закон течения (6) принимают соответственно вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} 0 \\ S_j^k - c_\alpha \varepsilon_j^{p\alpha k} - \eta_\alpha e_j^{p\alpha k} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} + \\ S_j^k - c_\alpha \varepsilon_j^+ - \eta_\alpha e_j^{p\alpha k} \end{array} \right) = 0 \\ e_j^{p\alpha k} = \psi_\alpha^+ \left(\begin{array}{c} + \\ S_j^k - c_\alpha \varepsilon_j^{p\alpha k} - \eta_\alpha e_j^{p\alpha k} \end{array} \right) + \psi_\alpha^+ \left(\begin{array}{c} 0 \\ S_j^k - c_\alpha \varepsilon_j^{p\alpha k} - \eta_\alpha e_j^{p\alpha k} \end{array} \right), \quad \alpha = 1, 2 \end{array} \right. \quad (21)$$

Исключая из соотношений (19) вариации упругих ε_k^+ , а также пластических ε_k^{p+} деформаций и величины ψ_α^+ получим

$$\left[\begin{array}{l} 2\mu_\alpha \sigma^{ij} - \frac{2}{3}\mu_\alpha (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \varepsilon_k^+ g^{ij} - c_\alpha \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^+ g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^+ - \sigma^{ij} \right) - \\ - \eta_\alpha \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^+ g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^+ - \sigma^{ij} \right) \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} 0 \\ S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha} \end{array} \right) = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2\eta_\alpha \psi_\alpha^+ \right) \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^+ g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^+ - \sigma^{ij} \right) + \\ & + 2c_\alpha \psi_\alpha^+ \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^+ g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^+ - \sigma^{ij} \right) = \\ & = k_\alpha^{-2} \left(\lambda_\alpha \varepsilon_n^+ + g^{kl} + 2\mu_\alpha g^{nk} g^{ml} \varepsilon_{nm}^+ - \sigma^{kl} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ S_{kl} - c_\alpha \varepsilon_{kl}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{kl}^{p\alpha} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ S^{ij} - c_\alpha \varepsilon^{p\alpha ij} - \eta_\alpha e_{kl}^{p\alpha} \end{array} \right) + 2\psi_\alpha^+ \left[2\mu_\alpha \sigma^{ij} - \frac{2}{3}\mu_\alpha (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \varepsilon_k^+ + g^{ij} \right], \quad \alpha = 1, 2.$$

Таким образом, линейризованные уравнения состояния (22), (23) для обобщенного S_p^α тела совместно с соотношениями (17)–(19) и линейризованными уравнениями второго варианта трехмерной теории устойчивости при малых деформациях (12) с краевыми условиями (13), (16) представляют собой замкнутую связную краевую задачу. Уравнения (12), (17), (19), (22), (23), описывающие возмущенное состояние обобщенной модели S_p^α второго порядка, представляют собой сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных с нестационарными коэффициентами. Поэтому практическое значение в решении проблем устойчивости неупругих сред получил приближенный подход [4], позволяющий исследование устойчивости основного состояния производить по предельной системе уравнений.

Устремляя время t к бесконечности и учитывая, что при этом $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \psi_\alpha^+ \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, (\alpha = 1, 2)$, получаем предельную систему уравнений.

Уравнения равновесия таковы:

$$\nabla_s \left(\sigma_j^s + \sigma_k^s \nabla^k u_j^+ \right) + X_j^+ - \rho \ddot{u}_j = 0. \quad (24)$$

Уравнения состояния принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2\mu_\alpha \sigma_{ij}^+ - \frac{2}{3}\mu_\alpha (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \varepsilon_k^{\alpha k} g^{ij} - c_\alpha \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^{\alpha k} g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^+ - \sigma_{ij}^+ \right) - \\ - \eta_\alpha \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^{\alpha k} g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^+ - \sigma_{ij}^+ \right) \left(S_{ij}^0 - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} \right) = 0 \\ \lambda_\alpha \varepsilon_k^{\alpha k} + g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^+ - \sigma_{ij}^+ = k^{-2} \left(\lambda_\alpha \varepsilon_n^{\alpha n} + g^{kl} + \right. \\ \left. + 2\mu_\alpha g^{nk} g^{ml} \varepsilon_{nm}^+ - \sigma^{kl} \right) \left(S^{ij} - c_\alpha \varepsilon^{p\alpha ij} \right) \left(S_{kl}^0 - c_\alpha \varepsilon_{kl}^{p\alpha} \right) \\ \varepsilon_{ij}^+ = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2, \quad \sum \alpha = 1, 2 \end{array} \right. \quad (25)$$

При этом вариации компонент тензора деформации связаны с вариациями компонент вектора перемещений формулами Коши (17).

Краевые условия на нагруженной поверхности тела Σ_P таковы:

$$N_s \left(\sigma_j^s + \sigma_k^s \nabla^k u_j^+ \right) = P_j^+ \quad (26)$$

3. Рассмотрим краевую задачу (24)–(26), (17). Выкладки проведем в декартовых координатах. Решение этих уравнений будем искать в виде:

$$u_j^0(x_k, t) = u_j(x_k) e^{st}, \quad \varepsilon_{ij}^{\alpha} (x_k, t) = \varepsilon_{ij}^{\alpha} (x_k) e^{st}, \quad \sigma_{ij}^0 (x_k, t) = \sigma_{ij} (x_k) e^{st}, \quad (27)$$

то есть в компонентах векторов и тензоров, характеризующих возмущения, выделим временной множитель e^{st} ($s = i\omega$ – комплексная величина) и для амплитудных величин оставим прежние обозначения, опустив значок плюса.

Подставляя решения (27) в уравнение (24) получим

$$\left(\sigma_{ij} + \sigma_{jk}^0 u_{i,k} \right)_{,j} + X_j + \rho \omega^2 u_i = 0. \quad (28)$$

Из соотношений (23) получаем

$$\sigma_{ij} = A_1 A_2 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu_0^{-1} \varepsilon_{ij} - \mu_0^{-1} \left[\frac{B_1}{K_1^0 K_2^0} \left(f_{ij}^{01} - \frac{B_2 F}{K_2^0} f_{ij}^{02} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(B_2 F f_{kl}^{01} - K_2^0 f_{kl}^{02} \right) + B_2 K_2^{-1} f_{ij}^{02} f_{kl}^{02} \right] \varepsilon_{kl}, \quad (29)$$

где обозначено

$$A_1 = \frac{\lambda_1}{2\mu_1 \mu_0 (3\lambda_1 + 2\mu_1)} + \frac{\lambda_2}{2\mu_2 \mu_0 (3\lambda_2 + 2\mu_2)}; \quad A_2 = \frac{1}{\mu_0 (1 - 3A_1)}; \\ f_{ij}^{\alpha} = S_{ij}^0 - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha}; \quad F = f_{ij}^{01} f_{ij}^{02}; \quad B_\alpha = \frac{a^\alpha}{2\mu_\alpha \mu_0 (a^\alpha k_\alpha^2 - 2\mu_\alpha)}; \quad a^\alpha = \frac{4\mu_\alpha^2}{k_\alpha^2 (2\mu_\alpha + c_\alpha + S\eta_\alpha)}; \quad (30) \\ \mu_0 = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}; \quad K_\alpha = 1 + k_\alpha^2 B_\alpha, \quad \sum \alpha = 1, 2.$$

Соотношения (29), (30) можно трактовать как зависимость между напряженным и деформируемым состоянием в упругой анизотропной среде с комплексными модулями.

Связь между амплитудными величинами деформаций и перемещений, а также граничные условия на поверхности Σ_P среды согласно уравнениям (17), (26) и (27) имеют вид:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad (31)$$

$$\left(\sigma_{ij} + \overset{0}{\sigma}_{jk} u_{i,k} \right) N_j = P_i. \quad (32)$$

Таким образом, в рамках принятой механической модели *EVP* смеси (к таким средам можно отнести суспензии одной *EVP* среды в другой, полимерные растворы и многие другие) исследование устойчивости докритического состояния смеси сведено к исследованию устойчивости анизотропного континуума с комплексными физико-механическими параметрами.

Заметим, как и для случая обобщенной модели S_p^α ($\alpha = 1, 2$) второго порядка, с очевидной вероятностью в рамках предложенного подхода можно вывести соотношения вида (29) для обобщенной модели S_p^α произвольного порядка ($\alpha = 1, 2, \dots$).

Таким образом, статические задачи устойчивости в случае геометрически линейной теории сводятся к задачам на собственные значения относительно параметра ω . Для принятого критерия устойчивости основное состояние тела будет устойчивым, если для собственных значений ω_β выполняются следующие условия [1, 2]:

$$Im\omega_\beta \geq 0, (\beta = 1, 2, \dots, \infty). \quad (33)$$

Условия (33) определяют область устойчивости в пространстве параметров нагружения, характеризующих исследуемую конкретную задачу, так как собственные значения ω_β зависят не только от геометрии тела и вида соотношений (29), но также и от параметров нагружения – величин, характеризующих внешние нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гузь А. Н., Спорыхин А. Н. Трехмерная теория неупругой устойчивости. Общие вопросы // Прикладная механика. 1982. Т. 18, № 7. С. 3–22.
- [2] Гузь А. Н., Спорыхин А. Н. Трехмерная теория неупругой устойчивости. Конкретные результаты // Прикладная механика. 1982. Т. 18, № 8. С. 3–27.
- [3] Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.
- [4] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1997. 361 с.
- [5] Гузь А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наукова Думка, 1977. 204 с.
- [6] Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 232 с.
- [7] Спорыхин А. Н. Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. 372 с.
- [8] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
- [9] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.

[10] Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.

A. N. Sporykhin

TO THE RESEARCH OF STABILITY OF ELASTOVISCOUSPLASTIC MIXTURES

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. There are many researches relating to problems of stability of plastically deforming solids. Survey of articles and monographs [1]–[4] reflects the state of researches based on three-dimensional linearized equations of stability. As that, considerable part of practical results were found for stability problems in geomechanics [5]–[7]. For description of the behavior and for stability analysis in a strict three-dimensional linearized formulation for a number of real structures consisting of n – components it is necessary to involve more general models of solids for better approximation. Obviously, it is impossible to describe adequately the behavior of multi-component mixtures using simple structural models of solids [8]–[9], including [10]. In the article it is considered one of the possible approximate approaches to the research of stability of multi-component elastoviscousplastic (EVP) mixtures. It is shown, that the research of stability of the ground state of mixture can be reduced to the research of stability of continuum with complex physical and mathematical parameters.

Keywords: mixtures, stability, stress, deformation, plasticity, viscosity.

REFERENCES

- [1] Guz A. N., Sporykhin A. N. Three-dimensional theory of non-elastic stability. General questions // Prikladnaya mechanika. 1982. Vol. 18, № 7. P. 3–22. (in Russian).
- [2] Guz A. N., Sporykhin A. N. Three-dimensional theory of non-elastic stability. Specific results // Prikladnaya mechanika. 1982. Vol. 18, № 8. P. 3–27. (in Russian).
- [3] Guz A. N. Basic of three-dimensional theory of stability of deformable solids. Kiev: Visha shkola, 1986. 512 p. (in Russian).
- [4] Sporykhin A. N. Perturbation method in problems of stability of complex continuum. Voronezh: Voronezh State University, 1997. 361 p. (in Russian).
- [5] Guz A. N. Basic of theory of stability of excavations. Kiev: Naukova Dumka, 1977. 204 p. (in Russian).
- [6] Sporykhin A. N., Shashkin A. I. Stability of equilibrium of three-dimensional solids and problems of mechanics of excavations. M.: FIZMATLIT, 2004. 232 p. (in Russian).
- [7] Sporykhin A. N. Non-conservative problems of three-dimensional theory of non-elastic stability in geomechanics. Voronezh: Izdatelskiy dom VGU, 2015. 372 p. (in Russian).
- [8] Reiner M. Reology. M.: Nauka, 1965. 223 p. (in Russian).
- [9] Ivlev D. D., Bykovcev G. I. Theory of strain-hardening plastic solid. M.: Nauka, 1971. 231 p. (in Russian).
- [10] Sporykhin A. N. About stability of deforming of elastoviscousplastic solids // PMTF. 1967. № 4. P. 52–58. (in Russian).

Sporykhin Anatoliy Nicolaevich

e-mail: anspor@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

В. А. Кадымов

К ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет,
г. Москва, Россия

Аннотация. В работе обсуждаются общие вопросы математического моделирования контактных задач пластического течения с возможным наличием объемов промежуточных «смазок», анализируются характерные особенности рассматриваемых процессов, дается их физическая интерпретация, указаны подходы для их включения в математическую модель. Во второй части рассматривается специальный класс контактных задач пластического течения в сравнительно тонком пластическом слое между двумя сближающимися поверхностями внешних тел. Развивается известная теория А. А.Ильюшина на следующие случаи: а) учета анизотропии свойств контактной поверхности; б) удержания физических объемов промежуточных «смазок» вдоль контакта в процессах объемной штамповки. Обе особенности продемонстрированы автором на решении конкретных практических задач, также представлены качественные выводы.

Ключевые слова: механика, напряжения, деформации, пластичность, упругость.

УДК: 539.3+624.073

1. Рассмотрим один из общих подходов в описании физических процессов контактного взаимодействия системы, включающей «инструмент–обрабатываемое тело–промежуточная мягкая среда». Это сложные пространственные начально-краевые задачи математической физики с неизвестными границами и неклассическими условиями на них. В зависимости от исследуемого процесса главную роль в их описании могут играть такие факторы как

- вязкое и деформационное упрочнение деформируемого объема Ω^p ;
- объемная сжимаемость подвергаемого обработке объема Ω^p ;
- упругие деформации инструментов Ω^e , в частности нормальные упругие перемещения W^e инструмента на поверхности контакта;
- наличие и удержание промежуточных «смазочных» объемов Ω^* на контакте;
- состояние контактной поверхности, наличие на ней рельефных конфигураций;

© Кадымов В. А., 2017

Кадымов Вагид Ахмедович

e-mail: vkadymov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Московского государственного гуманитарно-экономического университета, г. Москва, Россия.

Поступила 10.08.2017

- интенсивность теплообмена между контактирующими телами и средами, возможность образования приконтактных зон затвердевания или размягчения;
- влияние сложности реализации процесса на распределение физических параметров в исследуемом процессе;
- эффект сверхпластичности;
- влияние электрических свойств контактирующих тел, и т. д.

Ниже мы представим физическое обоснование приведенных характерных особенностей и одновременно укажем один из возможных способов их включения в математическую модель исследуемого процесса.

1.1. Если все размеры области Ω^p являются величинами одного порядка, то допускается рассмотреть Ω^e как недеформируемый объем. Однако если размеры области Ω^p имеют разный порядок (как, например, в процессах течения в тонком пластическом слое), то нормальные упругие перемещения \vec{w}^e тел инструмента могут оказаться соизмеримыми с толщиной h текущего слоя Ω^p ($\vec{w}^e \sim h$). В связи с этим появляется необходимость в рассмотрении модели контактного взаимодействия упругих Ω^e и пластических Ω^p тел.

1.2. Как правило, в практике расчета технологических процессов обработки материалов давлением находят применение физические уравнения для траекторий процессов с малой кривизной (типа уравнений Сен-Венана) [1–3]:

$$\tilde{\sigma} - \sigma \tilde{\mathbf{E}} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{v_u} (\tilde{V} - V \tilde{\mathbf{E}}), \quad \tilde{x} \in \Omega^p \quad (1)$$

$$\sigma_u = \Phi_1(e, v_u, T, \dots), \quad (2)$$

$$V \equiv \text{div } \vec{v} = 0, \quad (3)$$

т. е. предполагается, что объемные деформации малы по сравнению с деформациями сдвига так, что принимаем условие несжимаемости (3). Однако в технологической практике встречаются примеры, когда невозможно пренебречь объемными деформациями (например, в порошковой металлургии); вместо (3) в таком случае принимаем функциональную зависимость

$$\sigma = \Phi_2(\theta, e, v_u, T, \dots) \quad (3')$$

либо условие линейной связи

$$\sigma = K\theta. \quad (3'')$$

Здесь θ – относительное изменение объема, определяемое из следующей дифференциальной задачи:

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{div} \vec{v}, \quad \theta|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

e – степень деформации (характеристика деформации по А. А. Ильюшину, пропорционально изменяющаяся со временем: $de/dt \geq 0$), определяемая из другой дифференциальной задачи:

$$\frac{de}{dt} = v_u \equiv \sqrt{(2/3)v_{ij}v_{ij}}, \quad e|_{t=0} = 0; \quad (5)$$

T – температура в области $\Omega^p \cup \Omega^e$, определяемая из следующей задачи:

$$\frac{dT}{dt} = a_0^2 \Delta T + k_0 \sigma_u v_u, \quad \vec{x} \in \Omega^p \quad (6)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = a_1^2 \Delta T_1; \quad \vec{x} \in \Omega^e \quad (7)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями (на которых не будем останавливать внимание); $a_0^2 = \lambda_0 / \rho c_0$; $a_1^2 = \lambda_1 / \rho_1 c_1$; $\lambda_0, \lambda_1, c_0, c_1$ – коэффициенты теплопроводности и теплоемкости пластического тела и контактирующего инструмента соответственно.

1.3. В практике машиностроения находят применение инструменты, имеющие контактные поверхности со сложной рельефной конфигурацией. Последнее способствует образованию направленных потоков пластического течения в объеме Ω^p . В частности, благодаря рельефной конфигурации контактной поверхности инструмента происходит лучшее заполнение труднодоступных мест под штампами. Для описания свойств контактных поверхностей вводится тензор $\tilde{\phi}$ коэффициентов анизотропии [4–6] так, что вектор сил контактного трения и вектор относительной скорости скольжения $\Delta \vec{v} / |\Delta \vec{v}|$ перестают быть коллинеарными:

$$\vec{T} = \tilde{\phi} \bullet \frac{\Delta \vec{v}}{|\Delta \vec{v}|}. \quad (8)$$

В случае классического (изотропного) трения на контактной поверхности тензор $\tilde{\phi}$ оказывается шаровым ($\phi_{ij} = f \delta_{ij}$) так, что векторы \vec{T} и $\Delta \vec{v}$ оказываются параллельными ($\vec{T} // \Delta \vec{v}$). Тензор $\tilde{\phi}$ зависит от свойств двух контактирующих тел, он может быть определен экспериментальным путем.

Использование уравнения (8) в краевых условиях, на контактных поверхностях скольжения делает исходную краевую задачу более сложной. В частности, меняется тип дифференциальных уравнений исследуемой задачи.

1.4. Проблема использования и удержания промежуточных смазочных объемов вдоль поверхности контакта известна в технологической практике обработки металлов давлением как пластогидродинамический эффект. Понятно, что наличие объема смазки улучшает состояние контактной поверхности, уменьшает неоднородность деформаций в приконтактной области объема Ω^p , а значит, снижает возможность его разрушения. С другой стороны, использование объемов смазки на контакте приводит к экономии энергозатрат.

Однако сложность реализации пластогидродинамического эффекта заключается в удержании объема смазки в течение прохождения всего этапа процесса обработки. И если мы при этом не будем принимать какие-то специальные меры, то промежуточная («мягкая») среда еще до начала процесса пластической обработки может быть вытеснена из контакта. Отметим, что пластогидродинамический эффект успешно применяется в некоторых процессах обработки металлов давлением [7]. Эта проблема открыта для процессов объемной штамповки.

Таким образом, если физический процесс происходит при наличии промежуточного объема смазки Ω^* (она, как правило, ведет себя как нелинейно вязкая среда), то для этого необходимо ставить и решать контактную задачу в объеме $\Omega^p \cup \Omega^e \cup \Omega^*$.

1.5. Учет и корректное включение температуры и температурных факторов при выборе математической модели также могут оказаться затруднительными. Несмотря на то, что нам известна температурная зависимость от множества механических и физических параметров, тем не менее отсутствует общая постановка связанной контактной задачи со сложным термосиловыми воздействиями. Для горячих процессов, протекающих при высоких температурах, вязкие свойства материала в объеме Ω^p становятся более чувствительными и доминирующими. Здесь следует выделить процессы, происходящие с интенсивным теплообменом с внешними телами. В таком случае, в результате резкого охлаждения в начальной стадии протекания процесса образуются приконтактные слои затвердевания. С другой стороны, нельзя исключить образование проскальзывания на контакте, которое в динамических процессах сопровождается интенсивным трением. В результате вблизи поверхности контакта могут образоваться слои размягчения (сравните с рассмотренным выше случаем).

Если внешние нагрузки отклоняются от пропорционального изменения, то появляется необходимость в рассмотрении двучленных уравнений теории пластичности.

Таким образом, для того, чтобы физический процесс был более строго описан с помощью исходной модели, можно ввести в нее дополнительные характерные особенности (в частности, те из них, что мы отметили выше). Последнее приводит к более сложной математической модели, что соответственно потребует проведения сложного ее анализа. Необходимо, чтобы построенная таким путем модель оказалась пригодной для расчетов.

Отметим еще одно обстоятельство. Для того, чтобы поставить краевую задачу, необходимо:

- 1) знать границы пластических и жестких областей;
- 2) определить истинную границу контакта и сформулировать на ней соответствующие условия.

Ясно, что граница контакта изменяется в течение физического процесса. С другой стороны, меняются одновременно и условия на ней. Например, контактная граница скольжения (это смешанные условия относительно скоростей и напряжений) в результате пластической деформации может переходить в границу контакта с условиями адгезии (это совершенно другие условия). Выбранные граничные условия не должны противоречить результатам эксперимента.

Проблема построения математических моделей в механике континуума хорошо описана в [8].

Как следует из вышеизложенного, не представляется возможным исследовать контактную проблему в общем виде. Потому переходят к разного рода упрощениям или же выдвигают гипотезы. Однако можно поступить иначе: выделить ограниченный класс контактных задач пластического течения.

2. Рассмотрим пластические течения в сравнительно тонком слое $\Omega^p (h \ll L)$, заключенном между двумя сближающимися поверхностями внешних тел Ω^e , где h, L – характерные толщина и линейный размер текущего слоя Ω^p . Такие процессы широко распространены в технологии машиностроения: штамповка и прессование тонкостенных элементов конструкций, тонколистовая прокатка и др. Указанный класс физических процессов обладает рядом характерных особенностей. Практически вдоль всей поверхности контакта наблюдается проскальзывание между Ω^p и Ω^e [1], [2]. В таких процессах контактное давление достигает значений P , превышающих величину предела текучести пластического материала $\sigma_s (P \geq \sigma_s)$, так что свойства материала

в начальном приближении оказываются близкими к свойствам гидродинамической жидкости. С другой стороны, большие давления вызывают нормальные упругие перемещения $w^e = \hat{w}P$ контактных поверхностей, которые в свою очередь оказываются соизмеримыми с толщиной текущего слоя Ω^p . В горячих процессах, протекающих при интенсивном теплообмене, формируются приконтактные слои затвердевания так, что истинная граница пластического течения отличается от границы контакта.

Для описания указанных процессов А. А. Ильюшин построил математическую теорию пластического течения в тонком слое [1], которая позволяет с удовлетворительной точностью провести расчеты и получить качественные оценки физико-механических параметров. В работе [2] эта теория развивается на случай течения пластического слоя по упругодеформируемым поверхностям.

Указанная теория развита на случай течения пластического слоя между поверхностями с анизотропными свойствами относительно сил трения на контакте [4]–[6]. Кроме того, в [6] поставлена начально-краевая задача и предложен метод ее решения. Для частного случая ортотропного трения на контакте

$$\vec{T} = - \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \phi_i = \mu_i \tau_s \quad (9)$$

выведено нелинейное параболическое уравнение для определения контура $\Gamma_t : y = \bar{\phi}(x, t)$ свободно растекающегося пластического слоя на плоскости

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \tau} = \bar{\phi} + \nu \bar{\phi} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu \bar{\phi}^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2}, \quad (10)$$

где $\tau(t) = \ln(h_0/h(t))$ – характеристика деформации ($d\tau/dt > 0$); для определенности мы положим $\mu_1 = 1$, $\mu_2 \equiv \nu < 1$.

Уравнение (10) имеет специальный класс автомодельных решений. Так, область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой, стремится к эллипсу, когда $\tau(t)$ возрастает (рис. 1):

$$\Gamma_t : y^2 \equiv \bar{\phi}^2(x, t) = \bar{A}(\tau)x^2 + \bar{B}(\tau), (\bar{A} < 0, \bar{B} > 0), \quad (11)$$

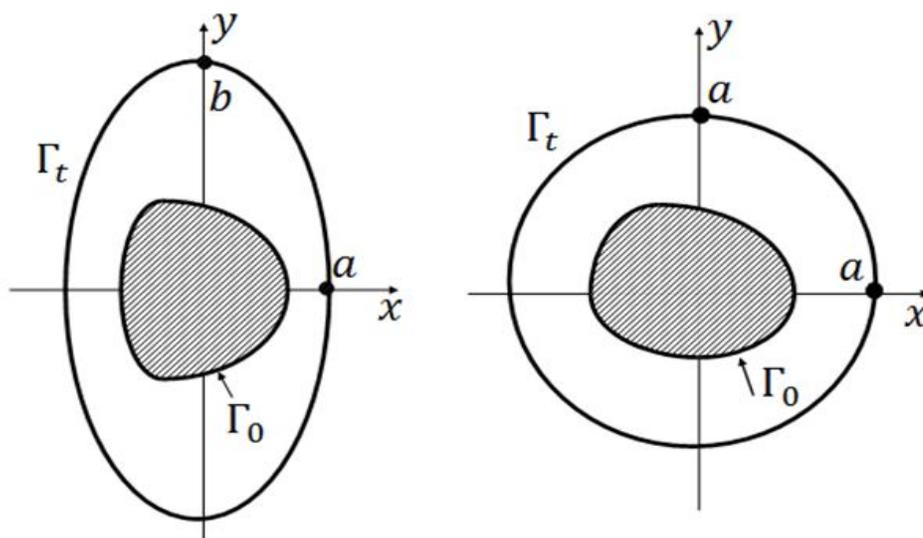
$$\bar{A}(\tau) = \frac{c_1 e^{2\tau}}{1 - \nu c_1 e^{2\tau}}, \bar{B}(\tau) = \frac{c_2 e^{2\tau}}{\sqrt{1 - \nu c_1 e^{2\tau}}}, c_2 = \frac{\bar{B}_0}{\sqrt{1 - \nu \bar{A}_0}}, c_1 = \frac{\bar{A}_0}{1 + \nu \bar{A}_0},$$

с отношением полуосей $a = \sqrt{\bar{B}/(-\bar{A})}$ и $b = \sqrt{\bar{B}} : \lim_{\tau \rightarrow \infty} |b/a| = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sqrt{|\bar{A}|} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, ($\nu \neq 1$), так что в известном изотропном случае кривая (11) переходит в уравнение окружности:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |b/a| = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sqrt{|\bar{A}|} = 1, (\nu = 1).$$

Как мы отмечали ранее, необходимо обоснование способа осуществления процесса пластической осадки, который обеспечит удержание объема промежуточной («мягкой») среды на контакте. Поясним, что такое сохранение объема смазки в процессе штамповки тонкостенных деталей может быть обеспечено с помощью правильного учета нормальных упругих перемещений контактных поверхностей тел инструмента [2].

Ниже мы приводим эпюры распределения контактного давления $P(r)$ и упругих перемещений $w^e(r) = \hat{w}P$ в двух следующих случаях, которые получены на основе теории А. А. Ильюшина (рис. 2) :



а) анизотропный случай ($\nu < 1$)

б) изотропный случай ($\nu = 1$)

Рис. 1 (а, б). Свободное растекание пластического слоя на плоскости между сближающимися поверхностями тел инструмент
а) с ортотропными свойствами относительно сил контактного трения;
б) с изотропными свойствами относительно сил контактного трения

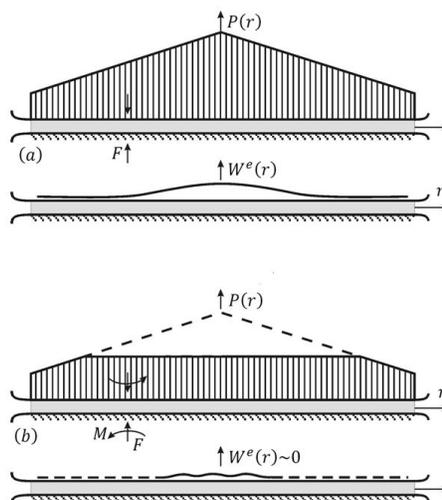


Рис. 2. Эпюры распределения контактного давления и нормальных упругих перемещений контактных поверхностей тел инструмента в случае:
а) «чистой» осесимметричной осадки пластического слоя;
б) осадки пластического слоя вращающимися телами.

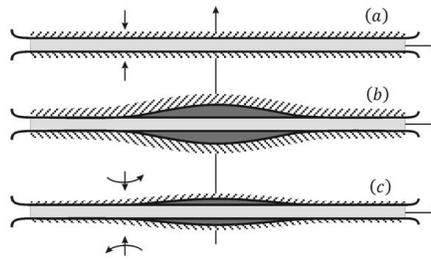


Рис. 3. Осесимметричная пластическая осадка тонкого слоя вращающимися телами с удержанием промежуточного объема смазки

а / «чистая» пластическая осадка кругового диска;

б / прессование кругового диска с помощью вращающихся тел.

Как реализовать процесс прессования диска с сохранением объема смазки, начиная с вышеуказанного распределения механических параметров по двум случаям ?

Сперва мы реализуем «чистую» осадку до тех пор, пока осаживаемый диск не перешел в состояние пластического течения (нетрудно провести расчет потребного для этого общего усилия осадки). При этом промежуточная среда (смола, полимерные растворы) из-за ее вязких свойств не успевает вытесниться из области контакта. Поэтому в силу наличия упругих нормальных перемещений инструмента в области контакта (ввиду того, что $w^e(r) \rightarrow 0$ при $\chi \equiv \left(\frac{d\tau/dt}{\dot{\phi}(t)} \right) \rightarrow 0$, см. рис. 2) промежуточная среда концентрируется в центральной части контакта (рис. 3).

Далее мы реализуем осадку с вращением так, что промежуточная среда начинает вытекать из центральной части контакта. В конечном итоге, это ведет к уменьшению контактного давления, а также элементарной работы внешних сил.

В заключение укажем несколько работ [9]–[12], в которых развиваются другие подходы в исследовании контактных задач пластического течения в тонком слое.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 480 с.
- [2] Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
- [3] Ивлев Д. Д. и др. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. М.: Физматлит. 2008. 832 с.
- [4] Александрович А. И., Векшин Б. С., Поталов И. Н. Тензор коэффициентов трения анизотропных поверхностей // Трение и износ. 1985. Т. VI. № 6. С. 996–1004.
- [5] Кийко И. А. Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // Прикладная матем. и мех. Т. 70, вып. 2. С. 344–351.
- [6] Кадымов В. А. Математическое моделирование контактных задач пластического течения // Nonlinear Analysis. 1997. Vol. 30. № 8. Р. 5259–5265.
- [7] Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1999. 688 с.
- [8] Седов Л. И. Механика сплошных сред. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.

[9] Мохель А. Н., Салганик Р. Л. Тонкий пластический слой с произвольным контуром, сжимаемый между жесткими плитами // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 4. С. 809–813.

[10] Георгиевский Д. В. Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Известия РАН МТТ. 2006. № 1. С. 47–59.

[11] Белов Н. А., Кадымов В. А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами // Известия РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 46–58.

[12] Кадымов В. А., Сосенушкин Е. Н., Белов Н. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора // Известия МГТУ «МАМИ». № 2 (16). 2013. Т. 2. С. 206–212.

V. A. Kadymov

ON FORMULATION AND SOLVING THE NONSTATIONARY CONTACT PROBLEMS OF PLASTIC FLOW

Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia

Abstract. The general approach in mathematical modeling of contact problems with the possible presence of the volumes of intermediate ‘lubricants’ has been discussed in the paper. The characterized peculiarities for considered processes are analyzed; the physical explanations for each case are given. The ways of their inclusion into mathematical model are indicated. In the second part it is considered the individual class of contact problems in which the plastic flows take place in a comparatively thin plastic layer between two converging surfaces of external bodies. The known Ilyushin’s theory of plastic flow in a thin layer is developed in the following cases of: a) taking account of anisotropic properties of contact surfaces; b) preservation of the physical volumes of ‘lubricants’ along the contact in the process of stamping. The both peculiarities are demonstrated by the author on the solutions of the specific practical problems, the qualitative conclusions of the solutions are also given.

Keywords: mechanics, tension, deformations, plasticity, elasticity.

REFERENCES

- [1] Il’jushin A. A. Trudy (1946–1966). T. 2. Plastichnost’. M.: FIZMATLIT, 2004. 480 s. (in Russian).
- [2] Kijko I. A. Teorija plasticheskogo techenija. M.: MGU, 1978. 75 s. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. i dr. Predel’noe sostojanie deformiruemyh tel i gornyh porod. M.: FIZMATLIT, 2008. 832 s. (in Russian).
- [4] Aleksandrovich A. I., Vekshin B. S., Potapov I. N. Tenzor koeficientov trenija anizotropnyh poverhnostej // Trenie i iznos. 1985. T. VI. № 6. S. 996–1004. (in Russian).
- [5] Kijko I. A. Anizotropija v processah techenija tonkogo plasticheskogo sloja // Prikladnaja matematika i mehanika T. 70, vyp. 2. S. 344–351. (in Russian).
- [6] Kadymov V. A. Matematicheskoe modelirovanie kontaktnyh zadach plasticheskogo techenija // Nonlinear Analysis. 1997. Vol. 30. № 8. P. 5259–5265. (in Russian).
- [7] Kolmogorov V. L. Mehanika obrabotki metallov davleniem. M.: Metallurgija. 1999. 688 s. (in Russian).
- [8] Sedov L. I. Mehanika sploshnyh sred. T. 2. M.: Nauka, 1970. 568 s. (in Russian).
- [9] Mohel’ A. N., Salganik R. L. Tonkij plasticheskij sloj s proizvol’nym konturom, szhimaemyj mezhdzhu zhestkimi plitami // DAN SSSR. 1987. T. 293. № 4. S. 809–813. (in Russian).
- [10] Georgievskij D. V. Zadacha Prandtlja dlja slaboneodnorodnogo po predelu tekuchesti plasticheskogo sloja // Izvestiya RAN. MTT. 2006. № 1. C. 47–59. (in Russian).
- [11] Belov N. A., Kadymov V. A. O kraevoj zadache techenija plasticheskogo sloja mezhdzhu sblizhajushhimisja zhestkimi plitami // Izv.RAN. MTT. 2011. № 1. C. 46–58. (in Russian).

Kadymov Vagid Ahmedovich

e-mail: vkadymov@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia.

[12] Kadyrov V. A., Sosenushkin E. N., Belov N. A. Jeksperimental'nye issledovanija po plasticheskoj osadke mezhdu nepodvizhnymi stenkami tonkih polos v forme prjamougol'nika i sektora // Izvestija MGTU «MAMI». № 2 (16). 2013. T. 2. S. 206–212. (in Russian).

Ю. В. Немировский

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛИТ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. Использование кусочно-линейных условий пластичности позволило получить целый ряд глубоких и впечатляющих аналитических решений плоских и пространственных задач теории пластического деформирования [1], [2]. Можно надеяться, что применение кусочно-линейных потенциалов будет полезно также и при решении обратных задач теории пластичности. Одной из важнейших в теории пластичности является задача оптимального проектирования конструкций, общая постановка которой была сформулирована свыше пятидесяти лет назад [3]–[5]. Системы уравнений, описывающие оптимальные проекты при условиях пластичности Мизеса и Треска, были исследованы в работах [4]–[8]. Было установлено, что системы разрешающих уравнений задачи оптимального проектирования для гладкого условия пластичности (типа Мизеса–Хилла) являются нелинейными системами смешанно-составного типа.

Ключевые слова: теплопроводность, кольцевые пластинки, круглые пластинки, сотовые конструкции, слоистые конструкции, аналитические решения.

УДК: 536.21

В [6], [7] было показано, что для каждого отрезка условия Треска система разрешающих уравнений оказывается существенно более простой. Однако полный анализ не был завершён: вопрос сопряжения решений, отвечающих различным режимам, был лишь схематически намечен, а вопрос о существовании непротиворечивых полей напряжений в общем случае не был рассмотрен. Поэтому авторы ограничились рассмотрением лишь простейших осесимметричных задач. Возникающие трудности в поиске конкретных решений привели к тому, что один из основоположников теории оптимального проектирования конструкций в заключении своей работы [5] указывал: «... следует считать, что конструкции, удовлетворяющие условию абсолютно минимального веса, вообще говоря, не существуют». Это замечание на некоторое время привело к охлаждению интереса исследователей к этой проблеме.

© Немировский Ю. В., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 11.07.2017

Некоторое дальнейшее продвижение было достигнуто в работах [9]–[14], в которых были получены отдельные решения для гладких поверхностей текучести, оценки оптимальных проектов для вложенных поверхностей текучести, показано что для произвольных кусочно-линейных условий пластичности в главных напряжениях разрешающая система уравнений распадается на две подсистемы из двух нелинейных уравнений гиперболического типа каждая. Это позволило получить широкий спектр аналитических решений, согласованных с полями скоростей. Были построены решения для сингулярных режимов и оптимальные проекты, отвечающие сопряжению различных режимов, в том числе и оптимальные проекты для условия пластичности А. Ю. Ишлинского [1], [2].

Дальнейшим логическим развитием этих идей является рассмотрение кусочно-гладкого условия пластичности в пространстве $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Этот подход позволяет исследовать задачу оптимизации для пластин из произвольных анизотропных материалов [15] и дает возможность рассчитывать на получение новых решений. Поскольку любая поверхность текучести в пространстве $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ может быть изнутри и снаружи аппроксимирована многогранниками, то решения для кусочно-линейных поверхностей, в соответствии с указанной в [9] теоремой, могут быть использованы для получения верхней и нижней оценки веса конструкции.

Рассмотрим пластины, нагруженные и закрепленные в своей плоскости, и введем безразмерные координаты x_i , напряжения σ_{ij} , перемещения u_i , деформации ε_{ij} и толщину пластины h , усилия T_{ij} , T_n , T_τ по формулам

$$x_i = x_i^* x_0^{-1}, \quad u_i = u_i^* x_0^{-1} t_0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* \sigma_0^{-1}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* t_0, \quad h = h^* h_0^{-1}, \\ T_{ij} = \sigma_{ij}^* h, \quad T_n = T_n^* (\sigma_0 h_0)^{-1}, \quad T_\tau = T_\tau^* (\sigma_0 h_0)^{-1},$$

где $i, j = 1, 2$; x_0, t_0, σ_0, h_0 – характерные длина, время, напряжение, толщина; T_n^* , T_τ^* – нормальная и касательная составляющие контурной нагрузки. Тогда в рамках постановки задач оптимального проектирования пластических конструкций функции $\sigma_{ij}, h, u_i, \varepsilon_{ij}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$(\sigma_{ij} h)_{,j} = 0, \quad (\dots)_{,j} = \partial(\dots)/\partial x_j \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

условию пластичности в параметрической форме

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(\alpha, \beta), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(\alpha, \beta), \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(\alpha, \beta), \\ \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \quad (2)$$

условию оптимальности Друккера–Шилда [3]

$$\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} = D_* = const > 0, \quad (3)$$

соотношениям Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i,\omega} = \frac{u_{1,2} - u_{2,1}}{2D_*}, \quad (4)$$

граничным условиям на Γ_f ($f(x_1, x_2) = 0$)

$$T_n |\nabla f|^2 = h [\sigma_{11}(f_{,1})^2 + \sigma_{22}(f_{,2})^2 + 2\sigma_{12}(f_{,1})(f_{,2})], \\ T_\tau |\nabla f|^2 = h [(\sigma_{22} - \sigma_{11})(f_{,1})(f_{,2}) + \sigma_{12} \{(f_{,1})^2 - (f_{,2})^2\}], \\ |\nabla f|^2 = [(f_{,1})^2 + (f_{,2})^2] \quad (5)$$

и на Γ_n ($\varphi(x_1, x_2) = 0$)

$$\begin{aligned} u_n |\nabla\varphi|^2 &= u_1\varphi_{,1} + u_2\varphi_{,2}, \\ u_\tau |\nabla\varphi|^2 &= u_2\varphi_{,2} - u_1\varphi_{,1} = 0, \quad |\nabla\varphi|^2 = (\varphi_{,1})^2 + (\varphi_{,2})^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме того, должен быть выполнен закон пластического течения, который утверждает, что для регулярных точек поверхности текучести вектор скоростей деформаций направлен по нормали к поверхности текучести, что математически выражается соотношениями

$$\varepsilon_{11}\sigma_{11,\alpha} + \varepsilon_{22}\sigma_{22,\alpha} + 2\varepsilon_{12}\sigma_{12,\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{11}\sigma_{11,\beta} + \varepsilon_{22}\sigma_{22,\beta} + 2\varepsilon_{12}\sigma_{12,\beta} = 0. \quad (7)$$

Поскольку начало координат должно располагаться внутри поверхности текучести, а нормаль к ней должна быть направлена наружу, также должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} J &= \sigma_{11}(\sigma_{22,\alpha}\sigma_{12,\beta} - \sigma_{12,\alpha}\sigma_{22,\beta}) + \sigma_{22}(\sigma_{12,\alpha}\sigma_{11,\beta} - \sigma_{11,\alpha}\sigma_{12,\beta}) + \\ &+ \sigma_{12}(\sigma_{11,\alpha}\sigma_{22,\beta} - \sigma_{22,\alpha}\sigma_{11,\beta}) > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения (3), (7) позволяют выразить компоненты деформаций через параметры α , β в форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= D_* J^{-1} (\sigma_{22,\alpha}\sigma_{12,\beta} - \sigma_{12,\alpha}\sigma_{22,\beta}), \\ \varepsilon_{22} &= D_* J^{-1} (\sigma_{12,\alpha}\sigma_{11,\beta} - \sigma_{11,\alpha}\sigma_{12,\beta}), \\ 2\varepsilon_{12} &= D_* J^{-1} (\sigma_{11,\alpha}\sigma_{22,\beta} - \sigma_{22,\alpha}\sigma_{11,\beta}). \end{aligned} \quad (9)$$

С другой стороны, исключая u_1 , u_2 из (4), получим соотношения (уравнения совместности деформаций):

$$D_*\omega_{,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{12,1}, \quad D_*\omega_{,2} = \varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1}. \quad (10)$$

Таким образом, четыре дифференциальных уравнения (1), (10) с учетом зависимостей (2), (9) вместе с граничными условиями (5), (6) позволяют найти решение задачи оптимального проектирования – определить функции $\alpha(x_1, x_2)$, $\beta(x_1, x_2)$, $\omega(x_1, x_2)$, $h(x_1, x_2)$. Тип системы уравнений и соответственно метод ее решения зависят от формы условия пластичности, т. е. от конкретного вида параметрических зависимостей.

Для плоского участка поверхности параметрические зависимости (2) можно записать в форме

$$\sigma_{ij} = a_{ij}\alpha + b_{ij}\beta + c_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}; \quad a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} = \text{const}; \quad i, j = 1, 2, \quad (11)$$

или после соответствующей нормировки в виде:

$$\sigma_{11}(a_{22}b_{12} - b_{22}a_{12}) + \sigma_{22}(a_{12}b_{11} - b_{12}a_{11}) + \sigma_{12}(a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22}) = 1, \quad (12)$$

$$c_{11}(a_{22}b_{12} - b_{22}a_{12}) + c_{22}(a_{12}b_{11} - b_{12}a_{11}) + c_{12}(a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22}) = 1. \quad (13)$$

Тогда для деформаций будем иметь выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= D_*(a_{22}b_{12} - b_{22}a_{12}), \quad \varepsilon_{22} = D_*(a_{12}b_{11} - b_{12}a_{11}), \\ 2\varepsilon_{12} &= D_*(a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22}). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая это, из (10) получаем $\omega(x_1, x_2) = \omega_0$ следующие выражения для перемещений:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u_1^0 + D_* [\omega_0 x_2 + (a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})x_1 + \frac{1}{2}(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})x_2], \\ u_2(x_1, x_2) &= u_2^0 + D_* [\omega_0 x_1 + \frac{1}{2}(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})x_1 + \frac{1}{2}(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})x_2], \\ u_1^0, u_2^0 &= const. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, плоскому участку условия пластичности соответствует континуум параллельных друг другу векторов скоростей деформаций. Каждому вектору скорости деформации соответствует свой проект. И тогда в соответствии с теоремой, доказанной в [9], при одинаковых силовых граничных условиях объемы всех этих проектов совпадают.

Для определения объема необходимо найти $h(x_1, x_2)$. Из (1) с учетом (11) для рассматриваемого плоского участка получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (a_{11}\alpha + b_{11}\beta + c_{11})H_{,1} + (a_{12}\alpha + b_{12}\beta + c_{12})H_{,2} + \\ + a_{11}\alpha_{,1} + a_{12}\alpha_{,2} + b_{11}\beta_{,1} + b_{12}\beta_{,2} = 0, \\ (a_{12}\alpha + b_{12}\beta + c_{12})H_{,1} + (a_{22}\alpha + b_{22}\beta + c_{22})H_{,2} + \\ + a_{12}\alpha_{,1} + a_{22}\alpha_{,2} + b_{12}\beta_{,1} + b_{22}\beta_{,2} = 0, \quad H = \ln h. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как система (16) относительно трех неизвестных функций недоопределена, то следует ожидать, что в этом случае решение задачи оптимального проектирования будет не единственным. Для доопределения одну из функций будем считать известной. Пусть, например $\beta = \beta_0 = const$. В этом случае для нахождения функций $H(x_1, x_2), \alpha(x_1, x_2)$ получим систему

$$\begin{aligned} (a_{11}\alpha + b_{11}\beta_0 + c_{11})H_{,1} + (a_{12}\alpha + b_{12}\beta_0 + c_{12})H_{,2} + a_{11}\alpha_{,1} + a_{12}\alpha_{,2} = 0, \\ (a_{12}\alpha + b_{12}\beta_0 + c_{12})H_{,1} + (a_{22}\alpha + b_{22}\beta_0 + c_{22})H_{,2} + a_{12}\alpha_{,1} + a_{22}\alpha_{,2} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Характеристики этой системы определяются из уравнения

$$\begin{aligned} dx_2^2[(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})\beta_0 + a_{12}c_{11} - a_{11}c_{12}] + \\ + dx_1 dx_2[(a_{11}b_{12} - a_{22}b_{11})\beta_0 + a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}] + \\ + dx_1^2[(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})\beta_0 + a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассматривая случай силового нагружения на контуре пластины, следует иметь в виду, что контурные нагрузки должны удовлетворять требованию равенства нулю главного вектора и главного момента, которые определяются равенствами

$$\begin{aligned} N_1 = - \int_{\Gamma} [T_n dx_2 + T_\tau dx_1] = 0, \quad N_2 = - \int_{\Gamma} [T_n dx_1 - T_\tau dx_2] = 0, \\ M = \int_{\Gamma} [(T_n x_1 + T_\tau x_2) dx_1 + (T_n x_2 - T_\tau x_1) dx_2] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Метод решения системы уравнений (17) зависит от вида аппроксимирующих функций. Например, в частном случае

$$a_{11} = a_{22} = b_{12} = 0, \quad b_{11} = b_{22} > 0, \quad a_{12} < 0, \quad \beta_0 = -c_{22}/b_{22}$$

из (18) имеем $dx_2^2 = 0$. Следовательно, система (17) имеет параболический тип. Если же принять

$$a_{11} = a_{22} = b_{12} = 0, \quad b_{11} = b_{22} > 0, \quad a_{12} < 0, \quad \beta_0 = -(c_{11} + c_{22})/b_{22},$$

то из (18) находим $(dx_2/dx_1)^2 = -1$, т. е. в этом случае система (17) имеет эллиптический тип. Можно в обоих случаях построить решение одинаково нагруженных

прямоугольных пластин и проверить в соответствии с общим результатом [9], что, хотя профили толщины в этих решениях будут различны, общий объем пластины будет одинаковым. Однако мы продемонстрируем это обстоятельство другим путем. Запишем уравнения равновесия (1) и условие пластичности для некоторой k -й плоскости в виде:

$$(T_{11})_{,1} + (T_{12})_{,2} = 0, \quad (T_{12})_{,1} + (T_{22})_{,2} = 0, \quad T_{ij} = \sigma_{ij}h \quad (20)$$

$$A_k T_{11} + B_k T_{22} + C_k T_{12} = h \quad (21)$$

Эта система уравнений недоопределена, имеет одну свободную функцию, которую далее будем считать известной: $T_{11} = \psi_1(x_1, x_2)$. В этом случае из системы (20) получаем

$$T_{12} = -\psi_2(x_1, x_2) + \phi_2(x_1), \quad T_{22} = -\psi_3(x_1, x_2) + \phi_2'(x_1) + \psi_3(x_1) \\ \psi_2(x_1, x_2) = \int \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad \psi_3(x_1, x_2) = \int \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} dx_2.$$

Функции $\phi_2(x_1)$, $\phi_3(x_1)$ определяются из граничных условий (5), согласованных с требованиями (9). После определения усилий T_{ij} распределение толщины вычисляется по формуле (21).

В качестве примера рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами $OA = CB = a$, $OC = AB = b$. Оси координат x_1 и x_2 направим, соответственно, вдоль сторон OA и OC . Пусть на сторонах прямоугольника заданы усилия

$$\text{на } OA, CB : T_n = T_{22} = P_0 + P_1 x_1, \quad T_\tau = -T_{12} = -K,$$

$$\text{на } AB, OC : T_n = T_{11} = R_0 + R_1 x_2, \quad T_\tau = T_{12} = K,$$

где $P_0, P_1, R_0, R_1, K = const$.

$$T_{11} = R_0 + R_1 x_2 + R_3 x_1^2 \left(\frac{x_1}{a} - 1 \right)^2 \left(\frac{b^2}{6} - b x_2 + x_2^2 \right), \quad R_3 = const.$$

Принимая далее $A_k = 0$ для функций T_{12} , T_{22} , h получаем выражения

$$T_{12} = K - \frac{R_3}{3a^2} (2x_1^3 - 3x_1^2 a + x_1 a^2) (b^2 - 3b x_2 + 2x_2^3) x_2,$$

$$T_{22} = P_0 + P_1 x_1 + \frac{R_3}{6} \frac{x_2^2}{a^2} (6x_1^2 - 6x_1 a + a^2) (b - x_2)^2,$$

$$h = B_k (P_0 + P_1 x_1) + C_k K + R_3 \left(\frac{B_k x_2^2}{6a^2} (6x_1^2 - 6x_1 a + 1) (b - x_2)^2 - \right. \\ \left. - \frac{C_k x_1 x_2}{3a^2} (x_1 - a) (2x_1 - a) (2x_2^2 - 3b x_2 + b^2) \right).$$

Как видим, при различных значениях R_3 профили пластины будут различными. Тем не менее ее объем

$$V = 2 \int_0^a \int_0^b h dx_1 dx_2 = (B_k P_0 + K C_k) ab + \frac{a^2}{2} B_k P_1 > 0$$

одинаков для всех этих проектов, поскольку не зависит от R_3 . Для кольцевых пластин, нагружаемых по контурам равномерно распределенными нагрузками P_1 и P_2 , условие пластичности для плоского участка с номером m и уравнение равновесия имеют вид:

$$a_m T_1 + b_m T_2 = h, \quad T_2 = (rT_1)', \quad (\dots)' = d(\dots)/dr, \quad (22)$$

из которых можно выразить h в виде:

$$h = b_m (rT_1)' + a_m T_1. \quad (23)$$

Умножая это равенство на $2\pi r$ и интегрируя в пределах от r_1 до r_2 , для объема пластины будем иметь выражение

$$V = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} [b_m (rT_1)' + a_m T_1] r dr.$$

Для m -го линейного участка напряжение σ_1 удовлетворяет неравенствам $c_m \leq \sigma_1 \leq d_m$ или $c_m h \leq T_1 \leq d_m h$, которое с учетом выражения (23) может быть переписано в виде:

$$c_m \leq \frac{T_1}{b_m (rT_1)' + a_m T_1} \leq d_m. \quad (24)$$

Таким образом, выбирая множество функций $T_1(r)$, удовлетворяющих граничным условиям $T_1(r_1) = P_1$, $T_1(r_2) = P_2$ и неравенствам (24), будем иметь множество оптимальных проектов, соответствующих m -му участку кусочно линейного условия пластичности для рассматриваемой кольцевой пластинки. Однако еще необходимо согласовать статические и кинематические поля. Для рассматриваемого отрезка многоугольника текучести условия оптимальности и закон пластического течения дают для деформаций следующие выражения: $\varepsilon_1 = D_* a_m$, $\varepsilon_2 = D_* b_m$, и поскольку должны быть выполнены условия совместности деформаций $(r\varepsilon_2)' = \varepsilon_1$, то должно быть $a_m = b_m$. Это требование соответствует двум параллельным сторонам шестиугольника пластичности А. Ю. Ишлинского [1], [2], и в этом случае объем всех проектов будет одинаковым и равным $V = 2\pi a_m (r_2^2 P_2 - r_1^2 P_1) > 0$. Подробнее решение для круглых кольцевых и эллиптических пластин при условии пластичности А. Ю. Ишлинского описано в работах [13], [14] и для изгибаемых трехслойных пластин с легким наполнителем — в работе [9]. В [10] показано, что для однородных осесимметричных оболочек оптимальный проект существует лишь для прямолинейного участка, соответствующего требованию $a_m = b_m$, при этом в оптимальной оболочке реализуется строго безмоментное состояние. При использовании кусочно-линейных условий пластичности возможны пластические состояния, соответствующие ребрам многоугольника, поскольку любое ребро соответствует линейным зависимостям величин T_{ij} от одной функции (например, α), то соответствующие уравнения для $\alpha(x_1, x_2)$ и $h(x_1, x_2)$ получим из (16), полагая $\beta \equiv 0$ и заменяя a_{ij}, c_{ij} на коэффициенты параметрического ребра $\bar{a}_{ij}, \bar{c}_{ij} : \bar{\sigma}_{ij} = \bar{a}_{ij}\alpha + \bar{c}_{ij}, i, j = 1, 2$. Таким образом, для ребра задача становится статически определимой.

Для решения кинематических задач на ребре, являющемся пересечением плоскостей,

$\Phi_k = A_k \sigma_{11} + B_k \sigma_{22} + C_k \sigma_{12} = 1$, $\Phi_m = A_m \sigma_{11} + B_m \sigma_{22} + C_m \sigma_{12} = 1$; пользуясь условиями оптимальности и пластического течения, будем иметь выражения

$$\varepsilon_{11} = A_m D_* + \lambda(A_k - A_m), \quad \varepsilon_{22} = B_m D_* + \lambda(B_k - B_m),$$

$$2\varepsilon_{12} = C_m D_* + \lambda(C_m - C_k).$$

Подставляя эти выражения в (10) после исключения функции ω для λ получим уравнение

$$(B_k - B_m)\lambda_{,11} + (A_k - A_m)\lambda_{,22} + (C_m - C_k)\lambda_{,12} = 0.$$

Таким образом, в случае ребер статическая и кинематическая задачи разделяются. При реализации вершины, образующейся пересечением трех плоскостей $\Phi_k = 1$, $\Phi_m = 1$, $\Phi_n = 1$, оптимальным будет проект постоянной толщины $h = h_0$. В общем случае при использовании в качестве условия пластичности некоторого многогранника в пространстве напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ в пределах пластины могут реализоваться состояния, соответствующие напряженным состояниям плоскости, ребра или вершины. Границы $\Gamma_s r$ этих состояний заранее неизвестны и должны быть определены из условий непрерывности векторов усилий и перемещений на этих границах, а предельные размеры соответствующих областей и ограничения на параметры действующих нагрузок определяются из неравенств, характеризующих размеры соответствующих плоских участков и ребер. Дать формальное описание процедуры в общем случае затруднительно. Однако при выборе конкретных пар плоскостей и ребер такие решения могут быть получены и проанализированы по схеме, подробно описанной в [11], [12] для случаев кусочно-линейных многоугольников в главных напряжениях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Ученые записки МГУ. Механика. 1946. Вып. 17. С. 90–108.
- [2] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
- [3] Drucker D. C., Shield R. T. Design for minimum weight // Proc. IX International Congress of Applied Mechanics. 1957. V. 5. P. 212–222.
- [4] Shield R. T. Plate design for minimum weight // Quarterly of Applied Mathematics. 1960. V. 28, № 2. P. 131–144.
- [5] Shield R. T. Optimum design methods for structures // Plasticity. Proc. 2nd Sympos. Naval Structural Mechanics. Pergamon Press, 1960. / Шилд Р. Методы оптимального проектирования конструкций // Механика. Сб. переводов. 1962. № 2. С. 148–159.
- [6] Hu T. C., Shield R. T. Minimum-volume design of discs // ZAMP. 1961. Vol. 12. № 5. P. 414–443.
- [7] Эстрин М. И. О пластинках наименьшего веса, находящихся в условиях плоского напряженного состояния // Труды ЦНИИ строительных конструкций. 1961. Вып. 4. С. 91–103.
- [8] Reitman M. I. Analysis of equations of the theory of perfectly plastic shells // Archiwum mechaniki stosowanej. 1967. Vol. 19. №4. P. 595–601.
- [9] Немировский Ю. В. Об оценках веса пластических конструкций // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 4. С. 159–162.
- [10] Немировский Ю. В. Оболочки абсолютно минимального веса // Механика деформируемого твердого тела: межвуз. сб. Вып. 3. Куйбышев, 1978. С. 3–78.

[11] Немировский Ю. В., Небогатое В. М. Некоторые решения задачи оптимального проектирования неосесимметричных пластинок // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во ГГУ, 1985. С. 78–87.

[12] Немировский Ю. В., Небогатое В. М. Исследование возможных сопряжений оптимальных проектов пластических плит // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 107–115.

[13] Немировский Ю. В., Небогатое В. М. Оптимальное проектирование эллиптических жестко-пластических плит // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 5. С. 77–84.

[14] Немировский Ю. В., Небогатое В. М. Об идеально-пластическом состоянии плит минимального веса // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 11. С. 99–104.

[15] Гольденблат И. И., Копнов В. И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.

Yu. V. Nemirovskii

OPTIMUM DESIGN OF PLASTIC PLATES PIECEWISE UNDER LINEAR POTENTIALS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. Use of piecewise-linear conditions of plasticity has allowed to receive whole number of deep and impressive analytical decisions flat and spatial tasks of the theory of plastic deformation [1], [2]. It is possible to hope that use kusochno of linear potentials will be useful as well at the decision and return tasks of the theory of plasticity. One of the most important in the theory plasticity the problem of optimum design of structures, the general is which statement has been formulated [3]–[5] over fifty years ago. The systems of the equations describing optimum projects under plasticity conditions Mises and Treske, have been investigated in works [4]–[8]. It has been established that the systems of the resolving equations tasks of optimum design for smooth condition of plasticity (like Mises–Hill) are nonlinear systems of mixed-compound type.

Keywords: heat conduction, circular plates, honeycomb structures, fiber composites, analytical solutions.

REFERENCES

[1] Ishlinskij A. Ju. Ob uravnenijah deformirovaniya tel za predelom uprugosti // Uchenye zapiski MGU. Mehanika. 1946. Vyp. 17. S. 90–108. (in Russian).

[2] Ishlinskij A. Ju., Ivlev D. D. Matematicheskaja teorija plastichnosti. M.: FIZMATLIT, 2001. 704 s. (in Russian)

[3] Drucker D. S, Shield R. T. Design for minimum weight // Proc. IX International Congress of Applied Mechanics. 1957. Vol. 5. P. 212–222.

[4] Shield R. T. Plate design for minimum weight // Quarterly of Applied Mathematics. 1960. Vol. 28, № 2. P. 131–144.

[5] Shield R. T. Optimum design methods for structures // Plasticity. Proc. 2nd Sympos. Naval Structural Mechanics. Pergamon Press, 1960. / Shild R. Metody optimal'nogo

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

proektirovanija konstrukcij // *Mehanika. Sb. perevodov.* 1962. № 2. S. 148–159. (in Russian).

[6] Hu T. S., Shield R. T. Minimum-volume design of discs // *ZAMP.* 1961. Vol. 12. № 5. P. 414–443.

[7] Jestrin M. I. O plastinkah naimen'shego vesa, nahodjashhihsja v uslovijah ploskogo naprjazhennogo sostojanija // *Trudy TsNII stroitel'nyh konstrukcij.* 1961. Vyp. 4. S. 91–103. (in Russian).

[8] Reitman M. I. Analysis of equations of the theory of perfectly plastic shells // *Archiwum mechaniki stosowanej.* 1967. V. 19. №4. P. 595–601.

[9] Nemirovskij Ju. V. Ob ocenkah vesa plasticheskij konstrukcij // *Izvestiya AN SSSR. Mehanika tverdogo tela.* 1968. № 4. S. 159–162. (in Russian).

[10] Nemirovskij Ju. V. Obolochki absoljutno minimal'nogo vesa // *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela: mezhvuz. sb. Vyp. 3.* Kujbyshev, 1978. S. 3–78. (in Russian).

[11] Nemirovskij Ju. V., Nebogatoe V. M. Nekotorye reshenija zadachi optimal'nogo projektirovanija neosesimmetrichnyh plastinok // *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Gor'kij: Izd-vo GGU,* 1985. S. 78–87. (in Russian).

[12] Nemirovskij Ju. V., Nebogatoe V. M. Issledovanie vozmozhnyh soprjazhenij optimal'nyh projektov plasticheskij plit // *Izvestiya AN SSSR. Mehanika tverdogo tela.* 1986. № 1. S. 107–115. (in Russian).

[13] Nemirovskij Ju. V., Nebogatoe V. M. Optimal'noe projektirovanie jellipticheskij zhestko-plasticheskij plit // *Prikladnaja mehanika.* 1986. T. 22. № 5. S. 77–84. (in Russian).

[14] Nemirovskij Ju. V., Nebogatoe V. M. Ob ideal'no-plasticheskom sostojanii plit minimal'nogo vesa // *Prikladnaja mehanika.* 1986. T. 22. № 11. S. 99–104. (in Russian).

[15] Gol'denblat I. I., Kopnov V. I. Kriterii prochnosti i plastichnosti konstrukcionnyh materialov. M.: Mashinostroenie, 1968. 192 s. (in Russian).

Б. Г. Миронов

О КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВЫМ СЕЧЕНИЕМ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет,
г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено кручение идеальнопластического цилиндрического стержня с круговым сечением, содержащим включение в виде квадрата, определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжений, построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, предел текучести.

УДК: 539.735

Кручение изотропных цилиндрических и призматических идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1], [2].

Кручение анизотропных и неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [1]–[6].

Рассмотрим круговой цилиндрический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат $x y z$.

Ось z направлена параллельно образующим стержня. Сечение стержня плоскостью $z = const$ есть круг радиуса R .

Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных хордой AB : $y = b$ (рис. 1).

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

условиями пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2 \quad (2)$$

© Миронов Б. Г., 2017
Миронов Борис Гурьевич
e-mail: mirovov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Поступила 02.08.2017

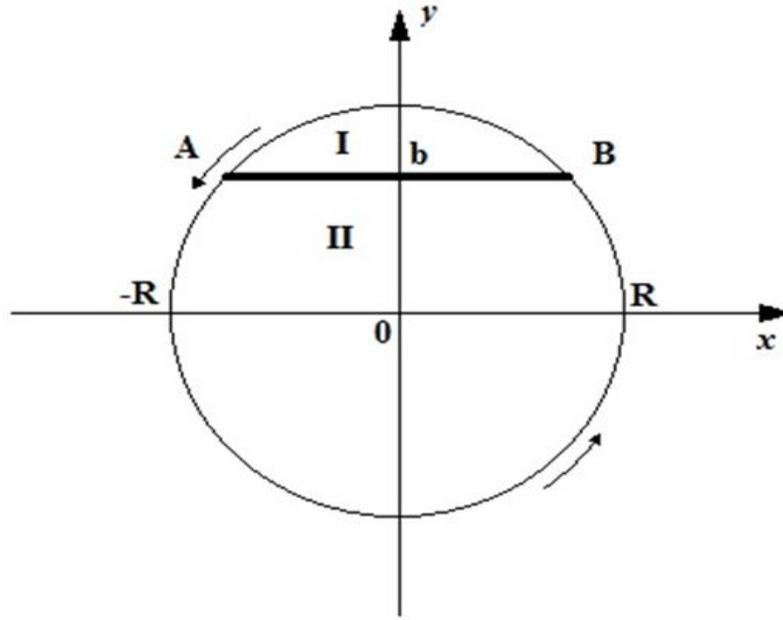


Рис. 1

в области I,

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2 \quad (3)$$

в области II,
уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где $k_1 < k_2$.

Согласно [2] характеристики соотношения (4) есть прямые, ортогональные вектору касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j}, \quad (5)$$

где \bar{i}, \bar{j} – орты осей x и y соответственно, которые не меняются вдоль характеристики и направлены по касательной к контуру поперечного сечения стержня.

На линии неоднородности AB неизбежен скачок касательных напряжений, поэтому при переходе через кривую AB вектор касательного напряжения $\bar{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4), меняют свое направление. Это приводит к дополнительной линии разрыва напряжений ACB области II (рис. 2).

В области, ограниченной кривой ACB , характеристики соотношения (4) задаются уравнением

$$y = b - (x + b \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{ctg} \beta, \quad (6)$$

а вектор касательного напряжения имеет вид:

$$\bar{\tau}_{ACB} = k_2(\bar{i} \cos \beta + \bar{j} \sin \beta); \quad (7)$$

где $x_0 \in (-\sqrt{R^2 - b^2}, \sqrt{R^2 - b^2})$, $\sin \alpha = x_0/R$, $\cos \alpha = -\sqrt{R^2 - x_0^2}/R$, $\sin \beta = k_1/k_2 \sin \alpha$, $\cos \beta = -\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha}/k_2$.

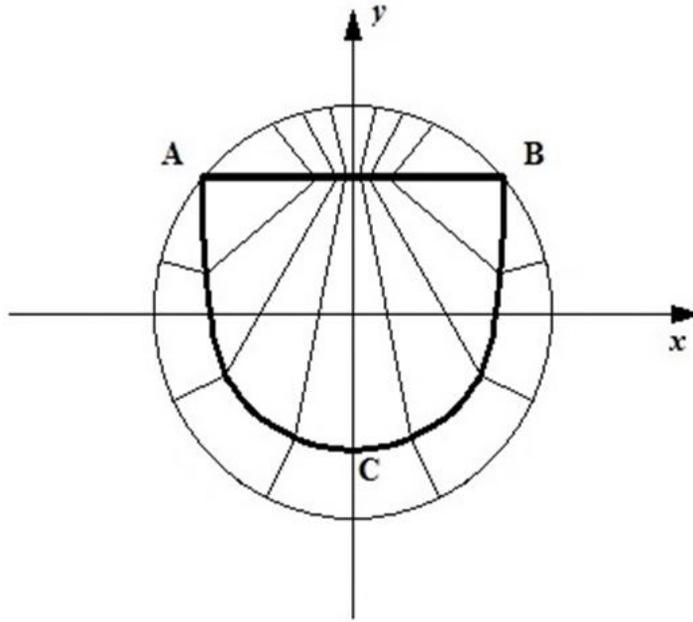


Рис. 2

Уравнение линии разрыва напряжений ACB имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \sqrt{x^2 + y^2} \cos \beta}{y + \sqrt{x^2 + y^2} \sin \beta}. \quad (8)$$

Рассмотрим цилиндрический стержень с круговым сечением, в случае, когда стержень содержит включение, поперечное сечение которого есть квадрат ABB_1A_1 со стороной $\sqrt{2}R$ (рис. 3).

Пусть условие пластичности в квадрате имеет вид (3), а вне ее – (2). В этом случае в квадрате появятся две дополнительные линии разрыва напряжений, которые совпадают с его диагоналями.

Характеристики соотношения (4) определяются уравнениями

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}} - \left(x + \frac{R}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha\right) \operatorname{ctg} \beta_1 \quad (9)$$

в треугольнике AOB ,

$$y = -\frac{R}{\sqrt{2}} - \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha\right) \operatorname{ctg} \beta_1 \quad (10)$$

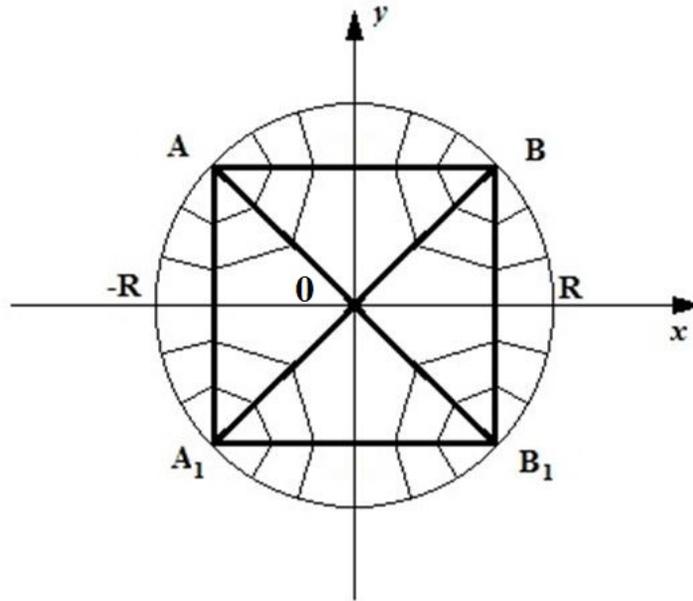


Рис. 3

в треугольнике A_1OB_1 ,

$$y = -\frac{R}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha - \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{ctg} \beta_2 \quad (11)$$

в треугольнике BOB_1 ,

$$y = -\frac{R}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha - \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{ctg} \beta_2 \quad (12)$$

в треугольнике AOA_1 ,

где $\sin \beta_1 = k_1/k_2 \sin \alpha$, $\cos \beta_1 = -\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha}/k_2$, $\cos \beta_2 = k_1/k_2 \cos \alpha$, $\sin \beta_2 = -\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \alpha}/k_2$, $\sin \alpha = x_0/R$, $\cos \alpha = -y_0/R$, $x_0^2 + y_0^2 = R^2$.

На рисунках 2 и 3 жирными линиями нарисованы линии разрыва напряжений, а тонкими линиями – характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
- [3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 С. 108–112.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении цилиндрических анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 9. С. 150–155.

[5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.

[6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу о кручении призматических стержней с включением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2(32). С. 18–22.

B. G. Mironov

**ABOUT TORSION OF HETEROGENEOUS CYLINDRICAL CORES WITH
CIRCULAR CUT**

Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia

Abstract. In the work torsion of an ideal plastic cylindrical core with circular cut and with square inclusion is considered. Tension of a core is defined, lines of a rupture of tension are found, the field of characteristics is built.

Keywords: torsion, tension, plasticity, fluidity limit.

REFERENCES

- [1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teoriya plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
- [3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhikh sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2012. No. 4. P. 108–112. (in Russian).
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. O kruchenii cilindricheskih anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2011. No. 9. P. 150–155. (in Russian).
- [5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. Teoriya plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G., Mironov Yu. B. About torsion of piecewise isotropic prismatic cores with inclusion // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2017. No. 2(32). P. 18–22. (in Russian).

Mironov Boris Guryevich

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia.

В. Н. Орлов, Ю. Г. Жеглова

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Первое из простейших нелинейных дифференциальных уравнений Риккати, разновидность скалярного и матричного вида, широко применяется в теории оптимальных фильтров Калмана–Бьюси для скалярного вида. Матричное дифференциальное уравнение играет важную роль в теории гамильтоновых систем, в задачах оптимального управления, экономики. Следующее из этой категории – уравнение Абеля – находит приложение в нелинейной оптике, нелинейной диффузии, нелинейной волновой теории. К ним следует добавить уравнения Пенлеве, которые имеют прямое отношение к теории эволюционных процессов. Общим свойством, объединяющим эти виды уравнений, является наличие подвижных особых точек, которые относят эти уравнения к классу, в общем случае не разрешимых в квадратурах. Это обстоятельство и актуализирует развитие аналитического приближенного метода решений этой категории уравнений. Рассматриваемый в работе класс уравнений также относится к этой категории; представлено доказательство теоремы существования решения рассматриваемого класса уравнений в области аналитичности, основанного на методе мажорант, применяемого к решению искомого уравнения, позволяющего построить аналитическое приближенное решение и получить априорную оценку погрешности. Теоретические результаты протестированы численным экспериментом.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки, аналитическое приближенное решение, априорная оценка погрешности.

УДК: 517.95:515.172.22

Результаты исследования и их обсуждение. Обоснованием приложений нелинейных дифференциальных уравнений при решении задач являются публикации:

© Орлов В. Н., Жеглова Ю. Г., 2017

Орлов Виктор Николаевич

e-mail: orlovvn@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Жеглова Юлия Германовна

e-mail: jeglovaug@mgsu.ru, ассистент кафедры, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 15.08.2017

1) в теории оптимальных фильтров Калмана–Бьюси [1] и [2], в экономике [3], для уравнений Риккати;

2) в нелинейной волновой теории [4]–[6], в задачах упругости [7], нелинейной диффузии [8], уравнении Абеля;

3) интерес к уравнению Пенлеве связан с возможностью решения эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния. В этом случае вспомогательное уравнение, полученное редукцией эволюционного уравнения, относится к уравнениям без подвижных критических особых точек, к уравнениям Пенлеве [9]–[11].

Решение поставленной задачи для рассматриваемого класса дифференциальных уравнений основано на подходе, предложенном в работах [12]–[18].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_0(x)y^5 + a_1(x)y^4 + a_2(x)y^3 + a_3(x)y^2 + a_4(x)y + a_5(x), \quad (1)$$

которое с помощью замены переменной

$$y = G(x)u(x) + C(x) \quad (2)$$

приводится к нормальной форме

$$y''' = y^5 + r(x) \quad (3)$$

при условиях

$$\begin{cases} G(x) = A = \text{const}, & C(x) = -\frac{A^5}{5}a_4(x), & a_0(x) = \frac{A^{20}}{3125}a_4^5(x) + C'''(x), \\ a_1(x) = \frac{A^{15}}{125}a_4^4(x), & a_2(x) = \frac{2A^{10}}{25}a_4^3(x), & a_3(x) = \frac{2A^5}{5}a_4^2(x), & a_5(x) = \frac{1}{A^5}. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^5 + r(x), \quad (5)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть

1) $r(x) \in C^\infty$ в области

$$|x - x_0| < \rho_1, \quad 0 < \rho_1 = \text{const}; \quad (7)$$

2) $\exists M_n: \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \leq M_n, M_n = \text{const}, n = 0, 1, 2, \dots$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (5)–(6) в виде:

$$y(x) = \sum_0^\infty C_n(x - x_0)^n \quad (8)$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$, где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}} \right\}, \quad M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. На основании условий теоремы следует

$$r(x) = \sum_0^\infty A_n(x - x_0)^n.$$

Тогда с учетом (8) из уравнения (5) получаем

$$\sum_0^{\infty} C_n (x - x_0)^{n-3} n(n-1)(n-2) = \sum_0^{\infty} C_n^{***} (x - x_0)^n + \sum_0^{\infty} A_n (x - x_0)^n,$$

где

$$C_n^{***} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^{**}, \quad C_n^{**} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^*, \quad C_n^* = \sum_0^n C_i C_{n-i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из последнего соотношения следует рекуррентное выражение для однозначного определения коэффициентов C_n :

$$n(n-1)(n-2)C_n = C_{n-3}^{***} + A_{n-3}, \quad (9)$$

где коэффициенты C_n :

$$C_3 = \frac{1}{6}(C_0^5 + A_0), \quad C_4 = \frac{1}{24}(5C_1C_0^4 + A_1), \quad C_5 = \frac{1}{60}(5C_2C_0^4 + 10C_1^2C_0^3 + A_2), \dots$$

Аналитические выражения получены с помощью программируемых средств Maple. На основе полученных выражений строим гипотезу для оценок коэффициентов C_n :

$$|C_{3k}| \leq \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k-1)(3k-2)} = \vartheta_{3k}, \quad |C_{3k+1}| \leq \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k-1)(3k+1)} = \vartheta_{3k+1},$$

$$|C_{3k+2}| \leq \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k+1)(3k+2)} = \vartheta_{3k+2}.$$

Справедливость оценок основана на методе математической индукции. Проиллюстрируем случай $n = 3k$:

$$|C_{3k+3}| \leq \frac{M(M+1)^{4k+4}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}.$$

Из рекуррентного соотношения (9) следует

$$(3k+3)(3k+2)(3k+1)C_{3k+3} = C_{3k}^{***} + A_{3k}$$

или

$$\begin{aligned} & (3k+3)(3k+2)(3k+1)C_{3k+3} = \\ & = \sum_{i=0}^{3k+3} C_i \sum_{j=0}^{3k+3-i} C_j C_{3k+3-i-j} \sum_{l=0}^{3k+3-i-j} C_l C_{3k+3-i-j-l} + A_{3k}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} |C_{3k+3}| & \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left(\sum_{i=0}^k \frac{M(M+1)^{4i}}{3i^*(3i+1)(3i+2)} \times \right. \\ & \times \sum_{j=0}^{k-i} \frac{M(M+1)^{4j}}{3(k-i-j)^*(3(k-i-j)+1)(3(k-i-j)+2)} \times \\ & \times \frac{M(M+1)^{4(k-i-j)}}{(3(k-i-j)+3)(3(k-i-j)+2)(3(k-i-j)+1)} \times \\ & \left. \times \sum_{l=0}^{k-i-j} \frac{M(M+1)^{4l}}{3(k-i-j-l)^*(3(k-i-j-l)+1)(3(k-i-j-l)+2)} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{M(M+1)^{4(k-i-j-l)}}{(3(k-i-j-l)+3)(3(k-i-j-l)+2)(3(k-i-j-l)+1) + M} \Big) \leq \\
& \leq \frac{M(M+1)^{4k}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left(\sum_{i=0}^k \frac{1}{3i^*(3i+1)(3i+2)} \times \right. \\
& \times \sum_{j=0}^{k-i} \frac{1}{3(k-i-j)^*(3(k-i-j)+1)(3(k-i-j)+2)} \times \\
& \times \frac{1}{(3(k-i-j)+3)(3(k-i-j)+2)(3(k-i-j)+1)} \times \\
& \times \sum_{l=0}^{k-i-j} \frac{1}{3(k-i-j-l)^*(3(k-i-j-l)+1)(3(k-i-j-l)+2)} \times \\
& \times \left. \frac{1}{(3(k-i-j-l)+3)(3(k-i-j-l)+2)(3(k-i-j-l)+1) + M} \right) \leq \\
& \leq \frac{M(M+1)^{4k+4}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости оценок для вариантов $n = 3k+1$, $n = 3k+2$. Рассмотрим мажорирующий ряд для ряда (9):

$$\sum_0^{\infty} \vartheta_n(x-x_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k}(x-x_0)^{3k} + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2}. \quad (10)$$

На основании признака Даламбера получаем область сходимости ряда (10):

$$|x-x_0| < \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}}.$$

Следовательно, с учетом пункта 1 теоремы получаем область

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}} \right\}$$

для представления решения уравнения (5) в виде (8).

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение

$$y_N(x) = \sum_0^N C_n(x-x_0)^n. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для аналитического приближенного решения (11) задачи (5)–(6) в области $|x-x_0| < \rho_2$ справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| \leq \Delta,$$

которая в случае $N+1 = 3k$ имеет вид:

$$\Delta \leq \frac{M(M+1)^{\frac{4(N+1)}{3}} |x-x_0|^{N+1}}{1 - M(M+1)|x-x_0|^3} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|x-x_0|}{N(N+1)(N+2)} + \frac{|x-x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)} \right),$$

для случая $N+1=3k+1$ получаем

$$\Delta \leq \frac{M(M+1)^{\frac{4N}{3}} |x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)} + \frac{|x-x_0|}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|x-x_0|^2}{N(N+1)(N+2)} \right)$$

и для $N+1=3k+2$ будем иметь

$$\Delta \leq \frac{M(M+1)^{\frac{4(N-1)}{3}} |x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(N-1)(N-2)(N-3)} + \frac{|x-x_0|}{N(N-1)(N-2)} + \frac{|x-x_0|^2}{N(N-1)(N+1)} \right),$$

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}} \right\}, \quad 0 < \rho_2 = \text{const},$$

$$M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned} \Delta y_N(x) &= |y(x) - y_N(x)| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_n (x-x_0)^n \right| \leq \left| \sum_{N+1}^{\infty} \vartheta_n (x-x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{N+1}^{\infty} \vartheta_{3k} (x-x_0)^{3k} \right| + \left| \sum_{N+1}^{\infty} \vartheta_{3k+1} (x-x_0)^{3k+1} \right| + \left| \sum_{N+1}^{\infty} \vartheta_{3k+2} (x-x_0)^{3k+2} \right| \leq \\ &\leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k-1)(3k-2)} |x-x_0|^{3k} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k-1)(3k+1)} |x-x_0|^{3k+1} + \\ &\quad + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k+1)(3k+2)} |x-x_0|^{3k+2} \leq \\ &\leq \frac{M(M+1)^{4k} |x-x_0|^{3k}}{3k(3k-1)(3k-2)} \sum_{k=1}^{\infty} (1+M(M+1)^{4k} |x-x_0|^{3k}) + \\ &\quad + \frac{M(M+1)^{4k} |x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k-1)(3k+1)} \sum_{k=1}^{\infty} (1+M(M+1)^{4k} |x-x_0|^{3k}) + \\ &\quad + \frac{M(M+1)^{4k} |x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)} \sum_{k=1}^{\infty} (1+M(M+1)^{4k} |x-x_0|^{3k}) = \\ &= \frac{M(M+1)^{4k} |x-x_0|^{3k}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3} \left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{|x-x_0|}{3k(3k-1)(3k+1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x-x_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)} \right) = \frac{M(M+1)^{\frac{4(N+1)}{3}} |x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|x-x_0|}{N(N+1)(N+2)} + \frac{|x-x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)} \right).$$

Аналогичным образом получаем структуры оценок для вариантов $N+1 = 3k+1$, $N+1 = 3k+2$ в области

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}} \right\},$$

где

$$0 < \rho_1 = \text{const}, \quad M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пример. $y''' = y^5(x) + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = \frac{1}{2}$. Приближенное решение в области аналитичности:

x_1	$y_4(x_1)$	Δ_1	Δ_2
0,35	1,157	0,011	0,0002

где $y_4(x_1)$ — приближенное решение (11); Δ_1 — априорная оценка, теорема 2; Δ_2 — апостериорная оценка. Для $\Delta_2 = 0,0002$ по теореме 2 определяем $N = 12$. Слагаемые с $N = 5$ по 12 в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$, следовательно, приближенное решение $y_4(x)$ имеет погрешность $\varepsilon = 0,0002$.

Заключение. Предложенный метод мажорант в доказательстве теоремы существования позволяет построить аналитическое приближенное решение, оценить его погрешность и оптимизировать с помощью апостериорной оценки погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bucy R. S. Optimal Filtering for correlated Noise // J. of Mat. Analysis and Applications. 1967. Vol. 20. No. 1. P. 1–8.
- [2] Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. Vol., 61, No. 1 (July). P. 31–53.
- [3] Сулейманов Б. И. Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустик // Зап. науч. семинара ЛОМИ. 1991. 187. С. 110–128.
- [4] Чудновский В. М., Холодкевич Е. Д. Теория сверхизлучательных лавин радиоволнового диапазона // Физика твердого тела. 1982. Т. 24. № 4. С. 1118–1123.
- [5] Чудновский В. М. Лавинный распад инвертированного состояния квантовой системы: автореф. канд. физ.-мат. наук. Минск: БГУ, 1983. 16 с.
- [6] Самодуров А. А., Чудновский В. М. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 1. С. 9–10.
- [7] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat J. Solids Structures. 1977. 13. P. 93–10.
- [8] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. "Moving Boundary Problems" / D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. P. 129–145.
- [9] Ablowitz M., Romani A., Segur H. Nonlinear evolutions and ordinary differential equations of Painleve type // Lett. Al Nuovo Cim. 1978. Vol. 23. No. 9. P. 333–338.

- [10] Ablowitz M., Romani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II // J. Mat. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721, 1006–1015.
- [11] Ablowitz M., Satsuma I. Solutions and rational solutions of nonlinear evolution equations // J. Mat. Phys. 1978. Vol. 19. No. 10. P. 2180–2186.
- [12] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.
- [13] Орлов В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Чебоксары: Перфектум, 2012. 112 с.
- [14] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 10. С. 1829–1832.
- [15] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А., Самодуров А. А. Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для второго уравнения Пенлеве // Вестник БГУ. Серия 1: Физика, математика, информатика. Минск, 2002. С. 79–85.
- [16] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве // Известия ТулГУ. Серия: Дифф. уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. С. 26–29.
- [17] Орлов В. Н. О приближенном решении второго уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.
- [18] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4 (35). С. 23–32.

V. N. Orlov, Yu. G. Zheglova

**AN EXISTENCE THEOREM FOR THE SOLUTION OF A CLASS
OF A THIRD-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH
POLYNOMIAL RIGHT-HAND SIDE OF THE FIFTH DEGREE
IN THE DOMAIN OF ANALYTICITY**

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow

Abstract. The first of Riccati's simplest nonlinear differential equations, in a kind of scalar and matrix form, is widely used in the theory of optimal Kalman–Bucy filters for the scalar form. The matrix differential equation plays an important role in the theory of Hamiltonian systems, in problems of optimal control, of economics. The following Abel equation from this category finds application in nonlinear optics, nonlinear diffusion, nonlinear wave theory. They should be supplemented by the Painleve equations, which are directly related to the theory of evolutionary processes. A common property that unites these types of equations is the presence of movable singular points that classify these equations in a general case that are not solvable in quadratures. This circumstance also actualizes the development of an analytic approximate method of solutions of this category of equations. The class of equations considered in this paper also belongs to this category. In this paper we prove the existence theorem for the solution of the class of equations under consideration in the analyticity region based on the majorant method applied to the solution of the desired equation, which allows us to construct an analytical approximate solution and obtain an a priori estimate of the error. Theoretical results are tested by the numerical experiment.

Keywords: nonlinear differential equation, Cauchy problem, majorant method, neighborhood of a movable singular point, analytic approximate solution, priori error estimate.

REFERENCES

- [1] Bucy R. S. Optimal Filtering for correlated Noise // J. of Mat. Analysis and Applications. 1967. Vol. 20, No. 1. P. 1–8.
- [2] Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. Vol. 61, No. 1 (July). P. 31–53.
- [3] Sulejmanov B. I. Vtoroe uravnenie Penleve v odnoj zadache o nelinejnyh jeffektah vblizi kaustik // Zap. nauch. seminar LOMI. 1991. 187. S. 110–128. (in Russian).
- [4] Chudnovskij V. M., Holodkevich E. D. Teorija sverhizluchatel'nyh lavin radiovolnovogo diapazona // Fizika tverdogo tela. 1982. T. 24. № 4. S. 1118–1123. (in Russian).
- [5] Chudnovskij V. M. Lavinyj raspad invertirovannogo sostojanija kvantovoj sistemy: avtoref. kand. fiz.-mat. nauk. Minsk: BGU, 1983. 16 s. (in Russian).
- [6] Samodurov A. A., Chudnovskij V. M. Prostoj sposob opredelenija vremeni zaderzhki sverhizluchatel'noj bozonnoj laviny // Dokl. AN BSSR. 1985. T. 29. № 1. S. 9–10. (in Russian).

Orlov Viktor Nikolaevich

e-mail: orlovn@mgsu.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Moscow National Research State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Zheglova Yulia Germanovna

e-mail: jeglovayug@mgsu.ru, Assistant of the Department, Moscow National Research State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

- [7] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // *Internat J. Solids Structures*. 1977. 13. P. 93–10.
- [8] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // *Proc. Symp. "Moving Boundary Problems"* / D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. P. 129–145.
- [9] Ablowitz M., Romani A., Segur H. Nonlinear evolutions and ordinary differential equations of Painleve type // *Lett. Al Nuovo Cim*. 1978. Vol. 23. No. 9. P. 333–338.
- [10] Ablowitz M., Romani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II // *J. Mat. Phys*. 1980. Vol. 21. P. 715–721, 1006–1015.
- [11] Ablowitz M., Satsuma I. Solutions and rational solutions of nonlinear evolution equations // *J. Mat. Phys*. 1978. Vol. 19. No. 10. P. 2180–2186.
- [12] Orlov V. N. Metod priblizhennogo reshenija pervogo, vtorogo differencial'nyh uravnenij Penleve i Abelja. M.: MPGU, 2013. 174 s. (in Russian).
- [13] Orlov V. N. Metod priblizhennogo reshenija skaljarnogo i matrichnogo differencial'nyh uravnenij Rikkati. Cheboksary: Perfektum, 2012. 112 s. (in Russian).
- [14] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Issledovanie priblizhennogo reshenija vtorogo uravnenija Penleve // *Differenc. uravnenija*. 1989. T. 25. № 10. S. 1829–1832. (in Russian).
- [15] Orlov V. N., Lukashevich N. A., Samodurov A. A. Postroenie priblizhennogo reshenija v okrestnosti podvizhnoj osoboj točki dlja vtorogo uravnenija Penleve // *Vestnik BGU. Serija 1: Fizika, matematika, informatika*. Minsk, 2002. S. 79–85. (in Russian).
- [16] Orlov V. N. Kriterii sushhestvovaniya podvizhnyh osobyh toček reshenij vtorogo uravnenija Penleve // *Izvestija TulGU. Serija: Diff. uravnenija i prikladnye zadachi. Vyp. 1*. Tula: Izd-vo TulGU, 2006. S. 26–29. (in Russian).
- [17] Orlov V. N. O priblizhennom reshenii vtorogo uravnenija Penleve // *Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva*. 2008. № 2. S. 42–46. (in Russian).
- [18] Orlov V. N. Issledovanie priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti podvizhnoj osoboj točki // *Vestnik MGTU im. N. J. Baumana. Serija: Estestvennye nauki*. 2009. № 4 (35). S. 23–32. (in Russian).

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Кулиев Валех Джафарович (pmdekanat@gmail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Манжиров Александр Владимирович (manzh@inbox.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матченко Николай Михайлович (eks_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chgpu.edu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Редкозубов Сергей Алексеевич (marusbka434@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv) – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес predel21@mail.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

и английском языке: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Дудко О. В., Рагозина В. Е.</i> О плоских одномерных движениях упругой слабопористой среды.....	3
<i>Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.</i> О различных возможностях описания сферически симметричных ударных волн в упругой среде в терминах асимптотических рядов.....	16
<i>Соколова М. Ю., Христинич Д. В., Чиков В. С.</i> Вариант нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропного материала.....	27
<i>Злобина И. В., Бекренев Н. В., Павлов С. П.</i> Прочностные испытания модифицированных в СВЧ электромагнитном поле композиционных материалов.....	41
<i>Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н., Деревянных Е. А., Храмова Н. В.</i> К вопросу определения возмущенного состояния массива, ослабленного полостями	56
<i>Никитин А. В.</i> К вопросу о предельном состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления.....	63
<i>Спорышин А. Н.</i> К исследованию устойчивости упруговязкопластических смесей.....	68
<i>Кадымов В. А.</i> К постановке и решению нестационарных контактных задач пластического течения.....	76
<i>Немировский Ю. В.</i> Оптимальное проектирование пластических плит при кусочно-линейных потенциалах.....	86
<i>Мионов Б. Г.</i> О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением.....	95
<i>Орлов В. Н., Жеглова Ю. Г.</i> Теорема существования решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с полиномиальной правой частью пятой степени в области аналитичности.....	101
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	110
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	113
СОДЕРЖАНИЕ.....	115

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2017. № 3 (33)**

Отв. за выпуск: А. В. Балашникова

Технические редакторы: А. В. Балашникова, Е. В. Мурашкин, С. В. Тихонов

Компьютерная верстка: А. В. Балашникова

Макет: А. В. Балашникова

Подписано в печать 23.09.2017. Выход в свет 30.09.2017.
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 17,75.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе ФГБОУ ВО «Чувашский
государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38