

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал**  
**№ 4(38)**  
**октябрь – декабрь 2018 г.**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
"Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева"  
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 1 раз в три месяца

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций (свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко

**Ответственные секретари:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, Ю. А. Демьянов, В. Г. Зубчанинов, Р. А. Каюмов,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,  
А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин,  
В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин,  
А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), В. П. Тамуж  
(Латвия), А. В. Чигарев (Белоруссия)

**Адрес редакции и издательства:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1184

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2018



Ю. Н. Радаев

## К ТЕОРИИ НЕПЛОТНО СВЯЗАННЫХ СРЕД КУЛОНА-МОРА И ОБОБЩЕННЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРАНДТЛЯ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассматриваются трехмерные течения идеально пластических сред, подчиняющихся критерию текучести Кулона–Мора, и обобщенных пластических тел Прандтля. С прикладной точки зрения речь идет о моделировании состояний и достаточно медленных процессов движения сыпучих неплотно связанных сред. Основой математического моделирования выступает представление об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений и приращения тензора деформации, а также об ортогональных им направлениях (определяющих ориентацию мгновенно нерастяжимых директоров), расположенных в плоскости ортогональной главной оси приращения тензора деформации, соответствующей промежуточному главному приращению деформации. В асимптотических осях получены канонические диадные представления для тензора напряжений и приращения тензора деформации и с помощью них – новые формы трехмерных уравнений равновесия. Обсуждаются различные (симметризованный и несимметризованный) варианты представления критерия текучести Кулона–Мора в терминах главных нормальных напряжений и соответствующие формулировки ассоциированного закона течения. Проанализированы уравнения ассоциированного закона течения, которые затем используются при изучении кинематики необратимого течения. Показано, что приращение дилатации всегда положительно (кроме случая, когда среда Кулона–Мора вырождается в идеально пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Установлено, что в процессе течения сред Кулона–Мора материальные волокна, ориентированные вдоль ортогональных асимптотическим директорам направлений, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. Получено диадное представление приращения тензора деформации в терминах мгновенно нерастяжимых директоров. Рассматривается кинематическое ограничение, которое накладывает ассоциированный закон на течения сред Кулона–Мора. Указанное ограничение трактуется как условие, позволяющее определить величину промежуточного главного напряжения („внеплоского“ главного напряжения в случае плоского деформированного состояния), которое не входит в формулировку критерия Кулона–Мора. Показано, что при отсутствии внутреннего трения в среде промежуточное главное напряжение является точно медианным.

**Ключевые слова:** среда Кулона–Мора, пластическое тело Прандтля, главное напряжение, асимптотические директора, сцепление, внутреннее трение, ассоциированный закон течения

УДК: 539.374

**1. Предварительные сведения и вводные замечания.** Сыпучие среды (пески, грунты, гранулированные среды) состоят из множества отдельных однородных частиц, которые могут взаимодействовать друг с другом. Такие среды способны сопротивляться исключительно сжимающим нормальным напряжениям и не оказывают никакого сопротивления растягивающим. В настоящее время в механике сыпучих сред используются две основные математические модели: сплошная (континуальная) и зернистая (дискретная). Во втором случае среда считается состоящей из соприкасающихся твердых зерен правильной формы, например, сферической или многогранной и обычно называется гранулированной средой. В первом случае, сыпучие среды (их состояния и течения) прекрасно моделируются однородной изотропной сплошной средой с присущей ей в предельном состоянии зависимостью сдвиговых напряжений от нормальных сжимающих напряжений. Среда Кулона—Мора, характеризующаяся взаимным трением и сцеплением элементов, является основной континуальной моделью механики сыпучих сред и традиционно рассматривается как важнейшее обобщение модели идеально пластической среды.

В настоящей работе предложена новая схема моделирования сжимаемых течений среды Кулона—Мора, а также обобщенных пластических тел Прандтля, основанная на представлении об асимптотических направлениях тензора напряжений и приращения тензора деформации. По этой причине при исследовании ее напряженного состояния естественно воспользоваться понятием о непрерывно распределенных на двумерных элементах внутренних силах и классической концепцией симметричного тензора напряжений. Следовательно, можно вести речь о нормальном и касательном напряжениях, действующих на данной двумерной элементарной площадке. В механике сыпучих сред, так же как и в теории идеально пластического тела, для анализа напряженного состояния широко применяются графические построения. Наиболее известными из них следует признать круговые графики напряжений, так называемые круги Мора (см., например, [1]).

Теории пластичности, как правило, основываются на представлении о пределе текучести. Весьма показательной в этом смысле является модель идеально пластического тела [2-9]: в состоянии пластического течения главные нормальные напряжения связаны некоторым „конечным“ уравнением (так называемым условием текучести). Все сказанное относится также к моделям неплотно связанных сред, в частности, песку или сухому грунту, которые служат обобщением представлений об идеально пластическом теле и составляют теорию идеально сыпучих сред. Первоначальные исследования в этой области были выполнены Кулоном (С.А. Coulomb, 1776 г.) в его теории давления грунта. В теории Мора (О. Mohr, 1900 г.) в состоянии скольжения идеально

---

© Радаев Ю. Н., 2018

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 «Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности»).

Поступила 11.10.2018

сыпучего материала постоянным принималось отношение наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Именно развивая подобного рода представления и теории, Прандтль (L. Prandtl, 1921 г.) пришел к понятию обобщенного идеально пластического тела (см., например, [8]); деформация такого тела начинается и продолжается неопределенно долго, если максимальное касательное напряжение достигает предельного значения, зависящего от средней величины (полусуммы) наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Стоит заметить, что течения обобщенного идеально пластического тела в принципе являются сжимаемыми. В частности, в процессе течения среды Кулона—Мора скорость дилатации не может принимать отрицательных значений, т.е. среда либо разрыхляется, либо она остается несжимаемой.

Теории и механике сыпучих сред посвящена обширная литература. К сожалению, при их изложении исторически сформировались две различные схемы, требующие постоянного контроля при переходе от одной из них к другой. В стандартных текстах, связанных с механикой сплошных деформируемых сред и механикой деформируемого твердого тела, при анализе напряженного состояния в заданной точке нормальное напряжение отрицательно для сжимающих напряжений и положительно для растягивающих напряжений. Прямо противоположная ситуация наблюдается в „технических теориях“, также оперирующих с понятиями касательного и нормального напряжений; то же самое можно сказать, например, об известной монографии Надаи (A. Nadai) [8], 15 глава которой целиком посвящена механике сыпучих сред.

## 2. Трехмерный тензор напряжений и его асимптотические направления.

Во всех формулировках математической теории пластичности и теории сыпучих сред, как правило, используются специальные представления тензора напряжений и соответствующие формы дивергентного уравнения равновесия [5, 9]. Так, в теориях, основанных на критерии Кулона—Мора, условие начала течения представляет собой набор линейных соотношений, связывающих между собой главные нормальные напряжения, причем „промежуточное“ главное напряжение никак не влияет на это условие. Критерий Кулона—Мора, следовательно, связывает максимальное и минимальное главные напряжения. Можно показать также, что он выражается через касательное и нормальное напряжения, действующие на элементарном плоском элементе, вдоль которого осуществляется скольжение. Если все главные нормальные напряжения являются сжимающими, то применимость указанного критерия хорошо подтверждается в экспериментах с образцами горных пород и грунтов. Важными особенностями критерия Кулона—Мора выступает простота его математической формулировки, ясность его физического содержания и выраженный конвенциональный характер. Кроме этого, в механике разрушения критерий Кулона—Мора часто трактуется с точки зрения прочности твердых тел и в этом смысле выступает как один из критериев прочности.

Обозначим через  $\sigma$  трехмерный тензор напряжений Коши. Симметрия тензора напряжений обеспечивает возможность его канонического спектрального представления:

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений  $\sigma$ ;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  — главные нормальные напряжения (собственные значения тензора напряжений). Собственные векторы указывают направления главных осей напряжений.

В механике идеально пластических и обобщенных идеально пластических тел особую роль играют промежуточное главное нормальное напряжение и максимальное

(минимальное) главное нормальное напряжение. Занумеруем главные оси тензора напряжений так, чтобы для актуального напряженного состояния соответствующие главные нормальные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  расположились бы в порядке убывания

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2)$$

Здесь необходимо сразу же отметить, что включение в теорию данных неравенств значительно упрощает формулировки критериев текучести и ассоциированного закона течения. Однако оно имеет один весьма существенный недостаток: нарушается свойство симметрии уравнений и соотношений при перестановках индексов 1, 2, 3, а это не вписывается в теории изотропных тел, когда все направления в пространстве равноправны и уравнения обязаны сохранять свою форму при перестановках индексов.

Каноническое разложение (1) для тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  хорошо известно и достаточно широко используется в современной механике деформируемого твердого тела в различных вопросах, связанных с анализом напряженного состояния тела в данной точке [1]. Однако можно установить новые важные представления тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , которые отличаются от канонического (1), но тем не менее обладают чрезвычайно простой алгебраической структурой [10]. Для этого требуется ввести два новых направления в плоскости, ортогональной собственному вектору  $\mathbf{m}$ . Этот вектор соответствует „промежуточному“ главному нормальному напряжению  $\sigma_2$  (the intermediate principal stress).

С помощью алгебраического тензорного разбиения единицы

$$\mathbf{I} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, исключаем в спектральном представлении (1) тензорную диаду, образованную собственным вектором  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{I} - \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (4)$$

следовательно, для тензора напряжений получим

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right), \quad (5)$$

где полуразность крайних главных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (6)$$

есть максимальное касательное напряжение, выступающее в качестве важнейшей характеристики напряженного состояния в математических теориях пластичности.

Обозначая далее

$$g_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad g_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

формулу (5) перепишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} (g_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - g_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (7)$$

В плоскости, ортогональной собственному вектору  $\mathbf{m}$ , выполним линейное преобразование векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ , трансформировав их в новые единичные векторы  $\mathbf{l}'$ ,  $\mathbf{n}'$  согласно

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \iota)}}(\mathbf{l}' + \mathbf{n}'), \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \iota)}}(-\mathbf{l}' + \mathbf{n}'),\end{aligned}\tag{8}$$

где  $\iota$  — угол между векторами  $\mathbf{l}'$ ,  $\mathbf{n}'$ . В отличие от пары собственных  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ , директоры  $\mathbf{l}'$ ,  $\mathbf{n}'$ , вообще говоря, не ортогональны друг другу. Можно заметить, что собственный вектор  $\mathbf{l}$  всегда делит пополам угол между директорами  $\mathbf{l}'$ ,  $\mathbf{n}'$ . Если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора  $\mathbf{m}$ , то асимптотический директор  $\mathbf{l}'$  получается в результате поворота собственного вектора  $\mathbf{l}$  на угол  $\iota/2$  по ходу часовой стрелки, а асимптотический директор  $\mathbf{n}'$  — поворотом на тот же самый угол, но против хода часовой стрелки.

Оказывается, что угол  $\iota$  можно подобрать так, чтобы тензор напряжений содержал только смешанные диады, образованные новыми векторами  $\mathbf{l}'$ ,  $\mathbf{n}'$ . В этом случае директоры  $\mathbf{l}'$ ,  $\mathbf{n}'$  будут указывать асимптотические направления симметричного тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . Достаточно положить [10]

$$\cos \iota = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

или

$$\cos \iota = -\mu,\tag{9}$$

где  $\mu$  есть параметр Лоде (W. Lode)

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.\tag{10}$$

В силу своего определения абсолютное значение параметра Лоде не может превосходить единицу

$$-1 \leq \mu \leq 1,\tag{11}$$

откуда следует, что уравнение (9) всегда разрешимо относительно угла  $\iota$ .

Несложные вычисления, выполненные с привлечением (9), позволяют последовательно получить сначала

$$\frac{g_1}{1 + \cos \iota} + \frac{g_2}{1 - \cos \iota} = 4 \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}{(1 - \mu^2)(\sigma_1 - \sigma_3)^2},$$

а затем —

$$\frac{g_1}{1 + \cos \iota} + \frac{g_2}{1 - \cos \iota} = 4 \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{(1 + \mu)^2(\sigma_1 - \sigma_3)^2} = 1.$$

В итоге приходим к формуле<sup>1</sup> для тензора напряжений в смешанных диадах асимптотических директоров [10]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + \tau_{\max}(\mathbf{l}' \otimes \mathbf{n}' + \mathbf{n}' \otimes \mathbf{l}'),\tag{12}$$

или

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \text{sym}(\mathbf{l}' \otimes \mathbf{n}'),\tag{13}$$

пригодной, вообще говоря, для всех трехмерных напряженных состояний.

<sup>1</sup>Приводимая ниже формула и схема ее вывода пригодны для любого симметричного тензора второго ранга и, в частности, для приращения тензора деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Заметим, что „промежуточное“ главное напряжение  $\sigma_2$  вычисляется как

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \cos \iota \tau_{\max} \quad (14)$$

или

$$\sigma_2 = s - \cos \iota \tau_{\max}, \quad (15)$$

где

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (16)$$

есть точно „медианное“ напряжение (the mean stress).

„Крайние“ главные напряжения  $\sigma_{1,3}$  (the major and minor principal stresses) могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\sigma_{1,3} = \sigma_2 \pm \tau_{\max}(1 \mp \mu).$$

Отношение „крайних“ главных напряжений определяется согласно

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2 + \tau_{\max}(1 - \mu)}{\sigma_2 - \tau_{\max}(1 + \mu)}.$$

Уравнение равновесия с учетом данных выше представлений можно получить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \nabla \sigma_2 + \mathbf{l}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \nabla) \tau_{\max} - \tau_{\max} \sin \iota \nabla \iota + \\ + \tau_{\max}(\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l})) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\nabla$  обозначает трехмерный дифференциальный оператор Гамильтона (наблу Гамильтона).

Заменяя в полученном уравнении „промежуточное“ главное напряжение  $\sigma_2$  согласно (15), приходим к:

$$\begin{aligned} \nabla s - \cos \iota \nabla \tau_{\max} + \mathbf{l}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \\ + \tau_{\max}(\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l})) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. Предельные состояния и течения сыпучих сред. Условие Кулона—Мора.

Моделирование механического поведения идеально пластических тел в значительной степени опирается на анализ локального напряженного состояния. Нас будут интересовать трехмерные напряженные состояния в заданной точке, касательные и нормальные напряжения, действующие на двумерный плоский элемент, ориентация которого в трехмерном пространстве определяется единичным нормальным вектором  $\boldsymbol{\nu}$ . Считается, что противоположные ориентации  $\boldsymbol{\nu}$  и  $-\boldsymbol{\nu}$  определяют один и тот же плоский элемент.

Концепция внутренних напряжений подразумевает оперирование с вектором напряжений  $\mathbf{t}$ , который ассоциируется с двумерным плоским элементом и в силу этого зависит от его ориентации, т.е. от директора  $\boldsymbol{\nu}$ :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\boldsymbol{\nu}).$$

Фундаментальный результат Коши, как известно, устанавливает, что вектор напряжений  $\mathbf{t}$  линейно зависит от директора  $\boldsymbol{\nu}$ :

$$\mathbf{t}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Введем касательное и нормальное напряжения

$$t_{\perp} = t_{\perp}(\boldsymbol{\nu}) = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - t_{\parallel}^2}, \quad t_{\parallel} = t_{\parallel}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t}, \quad (19)$$

также функционально зависящие от единичного директора  $\boldsymbol{\nu}$ . Согласно только что данным определениям касательное напряжение может быть лишь неотрицательным ( $t_{\perp} \geq 0$ );  $t_{\parallel} < 0$  для сжимающих напряжений,  $t_{\parallel} > 0$  для растягивающих напряжений.<sup>2</sup>

Обозначим через  $t_{\perp}^*$ ,  $t_{\parallel}^*$  значения касательного и нормального напряжений в состоянии предельного равновесия, т.е. связанные с площадкой, вдоль которой в предельном состоянии происходит сдвиг.

Изучение картин разрушения образований из природных сыпучих сред показывает, что во всех случаях нарушение равновесия происходит в форме сдвига одной части массива относительно другой, остающейся неподвижной части. Сдвиг реализуется вдоль так называемых поверхностей скольжения, состоящих из элементарных площадок скольжения. Указанное нарушение равновесия происходит потому, что на поверхности скольжения действующие касательные напряжения превышают внутренние силы сопротивления среды деформации сдвига. Установленные, например, для грунтов по результатам испытаний образцов на сдвиг зависимости между касательной  $t_{\perp}^*$  и нормальной  $t_{\parallel}^*$  составляющими вектора напряжений, действующего на элементарной площадке образца в момент сдвига, имеют форму пологой кривой (которая имеет значительную кривизну лишь на малом начальном участке, а затем, с возрастанием нормальной составляющей напряжений, ее кривизна быстро уменьшается). Такая кривая может быть заменена прямой и, таким образом, ее уравнение будет иметь следующий вид:

$$t_{\perp}^* = c_2 - c_1 t_{\parallel}^*, \quad (20)$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  — материальные постоянные. Очевидно, что выражение в правой части (20) характеризует величину внутренних сил сопротивления среды деформации сдвига; она возрастает с увеличением величины сжимающих напряжений. Условие предельного равновесия (20) первоначально было предложено Кулоном в исследованиях о давлении грунта на подпорные стенки. Следует также принимать во внимание, что для многих типов горных пород вместо (20) на площадках скольжения наблюдается существенно нелинейная функциональная связь

$$t_{\perp}^* = F(t_{\parallel}^*). \quad (21)$$

Заметим, что зависимость внутреннего сопротивления сыпучей среды деформации сдвига от нормальной составляющей напряжений собственно и отличает ее от идеально пластической среды, подчиняющейся условию текучести Треска. Говорят также, что в сыпучей среде имеются два механизма сопротивления деформации сдвига: сцепление (характеризующее так называемое начальное сопротивление сдвигу, существующее даже при отсутствии нормальной составляющей напряжений) и внутреннее трение (происхождение которого обусловлено нормальными сжимающими напряжениями). Поэтому материальные постоянные  $c_2$ ,  $c_1$  в (20) можно называть коэффициентом сцепления (the inherent shear stress, cohesion) и коэффициентом внутреннего трения (the coefficient of internal friction) соответственно.

<sup>2</sup>В технических теориях (например, в механике грунтов) обычно используется прямо противоположное соглашение о знаке нормальных напряжений. Мы по понятным причинам не будем следовать традициям технических теорий.

Условие предельного равновесия сыпучей среды (20), выполняющееся на элементарных площадках скольжения, означает, что для всех остальных площадок должно соблюдаться условие

$$t_{\perp} \leq c_2 - c_1 t_{\parallel}. \quad (22)$$

Таким образом, вычисляя точную верхнюю границу суммы

$$t_{\perp} + c_1 t_{\parallel} \quad (23)$$

по всем возможным ориентациям в пространстве, можно определить площадки скольжения, если сама сумма (23) оказывается равной коэффициенту сцепления  $c_2$ .

Как известно, точная верхняя граница значений касательного напряжения  $t_{\perp}$  по всем возможным ориентациям в пространстве оказывается равной полуразности крайних главных напряжений (6).

Заметим, что сумма (23) проще всего вычисляется в локальном триэдре главных направлений тензора напряжений. Действительно, исходя из (19), нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= \sigma_1 \nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \sigma_2 \nu_{\langle 2 \rangle}^2 + \sigma_3 \nu_{\langle 3 \rangle}^2, \\ t_{\perp}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \nu_{\langle 1 \rangle}^2 \nu_{\langle 2 \rangle}^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \nu_{\langle 2 \rangle}^2 \nu_{\langle 3 \rangle}^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \nu_{\langle 1 \rangle}^2 \nu_{\langle 3 \rangle}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

В этих формулах через  $\nu_{\langle 1 \rangle}$ ,  $\nu_{\langle 2 \rangle}$ ,  $\nu_{\langle 3 \rangle}$  обозначены компоненты единичного директора  $\boldsymbol{\nu}$  относительно базиса  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ .

Поиск точной верхней грани суммы (23) осуществляется с учетом условия нормировки директора  $\boldsymbol{\nu}$ :

$$\nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \nu_{\langle 2 \rangle}^2 + \nu_{\langle 3 \rangle}^2 = 0.$$

Кроме того, поиск следует также ограничить физически очевидным условием

$$\nu_{\langle 2 \rangle}^2 = 0,$$

устанавливающим, что директор, указывающий на плоский элемент с наибольшим значением суммы (23), имеет нулевую проекцию на главную ось напряжений, соответствующую промежуточному главному нормальному напряжению  $\sigma_2$ . Поэтому выражения (24) еще упрощаются

$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= (\sigma_1 - \sigma_3) \nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \sigma_3, \\ t_{\perp}^2 &= (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \nu_{\langle 1 \rangle}^2 (1 - \nu_{\langle 1 \rangle}^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Сумма (23), таким образом, оказывается не зависящей от промежуточного главного нормального напряжения  $\sigma_2$ .

Наконец, ограничимся только значениями  $\nu_{\langle 1 \rangle} > 0$ , поскольку от ориентации, характеризующейся условием  $\nu_{\langle 1 \rangle} < 0$ , всегда можно перейти к противоположной (и в силу этого не отличимой от исходной) ориентации с  $\nu_{\langle 1 \rangle} > 0$ .

В результате можно быстро выписать уравнение, из которого находятся экстремальные ориентации:

$$1 - 2\nu_{\langle 1 \rangle}^2 + 2c_1 \nu_{\langle 1 \rangle} \sqrt{1 - \nu_{\langle 1 \rangle}^2} = 0. \quad (26)$$

Полученное уравнение корректно определяет ориентации, которым соответствуют экстремальные значения суммы (23), только если компонента  $\nu_{\langle 1 \rangle}$  директора  $\boldsymbol{\nu}$  удовлетворяет ограничениям

$$\frac{1}{2} < \nu_{\langle 1 \rangle}^2 < 1. \quad (27)$$

Устраняя в уравнении (26) радикал, приходим к биквадратному уравнению

$$\nu_{\langle 1 \rangle}^4 - \nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \frac{1}{4(1+c_1)} = 0. \quad (28)$$

Это уравнение позволяет найти единственное значение  $\nu_{\langle 1 \rangle}^2$ , которое удовлетворяет ограничениям (27):

$$\nu_{\langle 1 \rangle}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}$$

и затем определить в точности два *различных* пространственных направления  $\nu$ , характеризующиеся наибольшим значением суммы (23), в виде

$$\begin{aligned} \nu_{\langle 1 \rangle} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}, & \nu_{\langle 1 \rangle} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}, \\ \nu_{\langle 2 \rangle} &= 0, & \nu_{\langle 2 \rangle} &= 0, \\ \nu_{\langle 3 \rangle} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}; & \nu_{\langle 3 \rangle} &= -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Несложные вычисления показывают, что точная верхняя грань суммы (23) есть

$$\sup(t_{\perp} + c_1 t_{\parallel}) = c_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sqrt{1+c_1^2} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

и, следовательно, критерий предельного равновесия Кулона–Мора для сыпучей среды в пространстве главных напряжений имеет форму несимметричного по отношению к нумерации главных осей тензора напряжений конечного уравнения:

$$c_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sqrt{1+c_1^2} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c_2.$$

Введем вместо  $c_1, c_2$  материальные постоянные  $\gamma$  и  $c$  ( $c$  – коэффициент сцепления,  $\gamma$  – угол внутреннего трения) согласно

$$c_1 = \operatorname{tg} \gamma, \quad c_2 = c.$$

В результате получается следующая форма критерия Кулона–Мора:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \gamma - \sin \gamma \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad (30)$$

или, вводя максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  и медианное напряжение  $s$ , –

$$\tau_{\max} = c \cos \gamma - \sin \gamma s. \quad (31)$$

Площадки скольжения ортогональны директорам, компоненты которых относительно триэдра главных осей тензора напряжений приводятся ниже (см. (29))

$$\begin{aligned} \nu_{\langle 1 \rangle} &= \sqrt{\frac{1 + \sin \gamma}{2}}, & \nu_{\langle 1 \rangle} &= \sqrt{\frac{1 + \sin \gamma}{2}}, \\ \nu_{\langle 2 \rangle} &= 0, & \nu_{\langle 2 \rangle} &= 0, \\ \nu_{\langle 3 \rangle} &= \sqrt{\frac{1 - \sin \gamma}{2}}; & \nu_{\langle 3 \rangle} &= -\sqrt{\frac{1 - \sin \gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Хорошо известно, что главные нормальные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  могут быть вычислены в терминах второго инварианта девиатора тензора напряжений  $J'_2$ , параметра Лоде—Надаи  $\mu$  и гидростатического давления  $p$ :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -p + \frac{3 - \mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{J'_2}, \\ \sigma_2 &= -p + \frac{2\mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{J'_2}, \\ \sigma_3 &= -p - \frac{3 + \mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{J'_2},\end{aligned}\tag{33}$$

где

$$\begin{aligned}6J'_2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2, \\ \mu &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \\ -3p &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.\end{aligned}\tag{34}$$

С учетом данных выше уравнений критерий (30) преобразуется к следующей форме:

$$\frac{3 - \mu \sin \gamma}{\sqrt{3(3 + \mu^2)} \sin \gamma} \sqrt{J'_2} - p = c \operatorname{ctg} \gamma.\tag{35}$$

Определяя затем угол Лоде  $\vartheta$  согласно

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\mu}{\sqrt{3}} = -\frac{\cos \gamma}{\sqrt{3}},\tag{36}$$

можно утверждать, что будет справедливо равенство

$$\left[ \frac{3 - \mu \sin \gamma}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \right]^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos \vartheta - \sin \gamma \sin \vartheta},\tag{37}$$

которое, в свою очередь, позволяет сформулировать критерий (35) в следующем замечательном виде:

$$\sqrt{J'_2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos \vartheta - \sin \gamma \sin \vartheta} (p \sin \gamma + c \cos \gamma).\tag{38}$$

Стоит отметить еще одну форму критерия Кулона—Мора (30) для сыпучих сред с трением и сцеплением, приближающую его по форме к критерию текучести Треска, широко распространенному в механике идеально пластического тела

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k.\tag{39}$$

Здесь материальные постоянные  $a$  и  $k$  связаны с  $c$  и  $\gamma$  соотношениями

$$a = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}, \quad k = \frac{c \cos \gamma}{1 + \sin \gamma}.$$

Поэтому сыпучая среда Кулона—Мора с позиций теории течения идеально пластических сред определяется кусочно-линейной функцией текучести

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 - a\sigma_3,\tag{40}$$

в запись которой входят лишь „крайние“ главные напряжения и не входит промежуточное главное нормальное напряжение  $\sigma_2$ .

Если в среде отсутствует внутреннее трение ( $\gamma \rightarrow 0$ ), то  $a \rightarrow 1$ ,  $k \rightarrow c$  и критерий текучести Кулона—Мора переходит в критерий максимального касательного напряжения Треска (Н. Tresca)

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k. \quad (41)$$

Из (39) следует формулировка критерия предельного состояния идеально сыпучей среды, т.е. среды с нулевым внутренним сцеплением ( $c = 0$ ), восходящая к Морю:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = a. \quad (42)$$

Дальнейшее обобщение модели сыпучей среды Кулона—Мора было выполнено в работах Л. Прандтля. Оно получается из формы (31), если считать зависимость максимального касательного напряжения от медианного напряжения заданной с помощью неопределенно общей функции:

$$\tau_{\max} = f(s). \quad (43)$$

Надо сказать, что моделирование течений обобщенного пластического тела Прандтля лучше всего осуществляется с помощью векторного дифференциального уравнения (18), которое в качестве неизвестных содержит асимптотические директоры тензора напряжений  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$  и одну из величин  $\tau_{\max}$  или  $s$ , поскольку одна из них всегда может быть исключена на основании связывающего их уравнения (43).

#### 4. Приращения перемещений и деформаций. Мгновенно нерастяжимые директоры.

Анализ течения среды Кулона—Мора основывается на общих кинематических уравнениях механики сплошных деформируемых сред и определяющем законе, связывающем инкремент тензора деформаций с тензором напряжений. В качестве определяющего примем ассоциированный с критерием (39) закон течения.

Течение среды Кулона—Мора с точки зрения кинематики характеризуется приращением вектора перемещений  $d\mathbf{u}$  и приращением тензора (пластической) деформации (инкрементом тензора деформации)  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ . Указанные приращения связаны между собой формулами Коши:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \otimes d\mathbf{u} + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T]. \quad (44)$$

В изотропных средах можно вести речь о, по крайней мере, одном общем триэдре главных осей тензоров  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ , следовательно, спектральное представление приращения тензора деформации лучше всего взять в форме

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3, \quad (45)$$

где  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , так и для приращения тензора деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ ;  $d\varepsilon_1$ ,  $d\varepsilon_2$ ,  $d\varepsilon_3$  — главные приращения (пластической) деформации (собственные значения тензора  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ ).

Для течений, для которых второй главной оси соответствуют промежуточные главные нормальное напряжение и главное приращение деформации, мы введем особую нумерацию осей главного триэдра так, чтобы наряду с (2) выполнялись неравенства

$$d\varepsilon_1 \geq d\varepsilon_2 \geq d\varepsilon_3. \quad (46)$$

Ниже мы увидим, что для сред Кулона—Мора в силу ассоциированного закона течения упорядоченным главным нормальным напряжениям (2) соответствуют главные

приращения деформации, которые также оказываются упорядоченными так, что выполняются неравенства (46). После этого представление об асимптотических директорах можно распространить на инкремент тензора деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ , что позволяет сразу же указать его каноническую форму в асимптотических директорах  ${}^{\circ}\mathbf{l}$ ,  ${}^{\circ}\mathbf{n}$ :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}d\varepsilon_2 + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\text{sym}({}^{\circ}\mathbf{l} \otimes {}^{\circ}\mathbf{n}). \quad (47)$$

Напомним, что если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора  $\mathbf{m}$ , то асимптотический директор  ${}^{\circ}\mathbf{l}$  получается в результате поворота собственного вектора  $\mathbf{l}$  на угол  ${}^{\circ}\iota/2$  по ходу часовой стрелки, а асимптотический директор  ${}^{\circ}\mathbf{n}$  — поворотом на тот же угол против хода часовой стрелки.

Угол между асимптотическими директорами  ${}^{\circ}\mathbf{l}$ ,  ${}^{\circ}\mathbf{n}$  вычисляется, как и в случае напряжений, с помощью кинематического параметра Лоде

$$\cos {}^{\circ}\iota = -\nu, \quad (48)$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}, \quad (49)$$

причем здесь выражение справа по абсолютной величине не превышает единицу.

Учитывая каноническую форму инкремента тензора деформации (47), становится почти очевидной необходимость ввести в рассмотрение два новых направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ , которые были бы ортогональны направлениям асимптотических директоров  ${}^{\circ}\mathbf{l}$ ,  ${}^{\circ}\mathbf{n}$ . Соответствующие им директоры обозначим через  ${}^{\circ}\mathbf{l}$ ,  ${}^{\circ}\mathbf{n}$ ; при этом директор  ${}^{\circ}\mathbf{l}$  ортогонален асимптотическому директору  ${}^{\circ}\mathbf{n}$ , а директор  ${}^{\circ}\mathbf{n}$  ортогонален  ${}^{\circ}\mathbf{l}$ :

$${}^{\circ}\mathbf{n} \cdot {}^{\circ}\mathbf{l} = 0, \quad {}^{\circ}\mathbf{l} \cdot {}^{\circ}\mathbf{n} = 0. \quad (50)$$

Точнее, если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора  $\mathbf{m}$ , то директор  ${}^{\circ}\mathbf{l}$  получается в результате поворота собственного вектора  $\mathbf{l}$  в указанной плоскости на угол  $\frac{\pi - {}^{\circ}\iota}{2}$  по ходу часовой стрелки, а директор  ${}^{\circ}\mathbf{n}$  — поворотом вектора  $\mathbf{l}$  на тот же угол против хода часовой стрелки.

Принимая во внимание (47) и (50), сразу же находятся мгновенные удлинения линейных элементов, направленных вдоль второго главного направления и вдоль директоров  ${}^{\circ}\mathbf{l}$ ,  ${}^{\circ}\mathbf{n}$ ; все они оказываются равными промежуточному главному приращению деформации  $d\varepsilon_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} &= d\varepsilon_2, \\ {}^{\circ}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\circ}\mathbf{l} &= d\varepsilon_2, \\ {}^{\circ}\mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\circ}\mathbf{n} &= d\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (51)$$

Без труда вычисляются также мгновенные сдвиги в плоскостях, определяемых директорами  ${}^{\circ}\mathbf{l}$ ,  ${}^{\circ}\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$ :

$$\begin{aligned} {}^{\circ}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ {}^{\circ}\mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ {}^{\circ}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\circ}\mathbf{n} &= {}^{\circ}\mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot {}^{\circ}\mathbf{l} = -\cos {}^{\circ}\iota d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - {}^{\circ}\iota \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Из формул (51), (52), подстановкой вместо приращения тензора деформации его спектрального представления, получается следующее соотношение, позволяющее устранить второе главное приращение деформации:

$$d\varepsilon_2 = \sin^2 \frac{\nu}{2} d\varepsilon_1 + \cos^2 \frac{\nu}{2} d\varepsilon_3.$$

Обратимся к уравнениям ассоциированного закона течения [5, 9]. В случае изотропной функции текучести  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ассоциированный закон течения

$$d\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\lambda, \quad (53)$$

где неопределенный множитель  $d\lambda$  строго положителен для состояний активного пластического течения, в общем для тензоров  $\sigma$ ,  $d\varepsilon$  триэдре главных осей будет иметь вид [5, с. 45]

$$d\varepsilon_j = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda \quad (j = 1, 2, 3), \quad (54)$$

откуда с функцией текучести (40) для активных течений среды Кулона—Мора находим следующие значения для главных приращений деформации:

$$d\varepsilon_1 = d\lambda, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 = -ad\lambda \quad (d\lambda > 0). \quad (55)$$

Данные выше равенства позволяют упорядочить главные приращения деформации  $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$  в виде убывающей последовательности

$$d\varepsilon_1 > 0, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 < 0, \quad (56)$$

т.е. второй главной оси тензора  $d\varepsilon$  (а в силу изотропии также и второй главной оси тензора напряжений  $\sigma$ ) будет соответствовать промежуточное главное приращение деформации  $d\varepsilon_2 = 0$ . Таким образом, убывающей последовательности главных напряжений отвечает убывающая последовательность главных приращений деформации.

На основании (55) без труда устанавливается, что течение среды Кулона—Мора является необратимо сжимаемым:

$$\text{tr}(d\varepsilon) = (1 - a)d\lambda > 0 \quad (0 < a < 1). \quad (57)$$

Более того, дилатация (точнее, ее приращение  $\text{tr}(d\varepsilon)$ ) оказывается всегда положительной (кроме случая, когда  $a = 1$ , т.е. когда среда Кулона—Мора вырождается в идеально пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Поэтому среда Кулона—Мора разве лишь разрыхляется в процессе течения.

В силу (56) формула (47) упрощается до

$$d\varepsilon = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \text{sym}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{n}); \quad (58)$$

можно также показать, что дилатация континуума Кулона—Мора определяется соотношениями

$$\frac{\text{tr}(d\varepsilon)}{\cos \nu} = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{\cos \nu} = d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3, \quad (59)$$

откуда сразу же можно заключить, что

$$\cos \nu = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}. \quad (60)$$

Соотношения для мгновенных удлинений и сдвигов (51), (52) также упрощаются:

$$\begin{aligned}\mathbf{m} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ \mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{l} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} &= 0;\end{aligned}\tag{61}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ \mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{l} = \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right).\end{aligned}\tag{62}$$

Пользуясь вторым и третьим равенствами в (61), сразу же приходим к выводу о том что в процессе течения сред Кулона—Мора линейные элементы, перпендикулярные направлениям асимптотических директоров  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ , не претерпевают мгновенных удлинений, т.е. материальные волокна, ориентированные вдоль директоров  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ , мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. То же самое на основании первого равенства в (61) справедливо и для волокон, направленных вдоль второй главной оси тензора  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ . Следовательно, мгновенная деформация трехмерного элемента с ребрами, ориентированными вдоль директоров  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$ , представляет собой сдвиг в плоскости, ортогональной собственному вектору  $\mathbf{m}$ . Таким образом, в случае сред Кулона—Мора для векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$  оправданным будет термин „мгновенно нерастяжимые директоры“.

Если  $a \rightarrow 1$ , т.е. когда критерий Кулона—Мора сводится к критерию текучести Треска, асимптотические директоры становятся взаимно ортогональными, то же самое можно сказать и о мгновенно нерастяжимых директорах  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ , более того, асимптотические направления совпадают с направлениями мгновенно нерастяжимых волокон, течение приобретает свойство несжимаемости, и инкремент тензора деформации представляется простой формулой

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}),\tag{63}$$

на основании которой устанавливается, что плоский элемент, ортогональный промежуточной главной оси приращения тензора деформации и с ориентированными вдоль направлений, делящих точно пополам угол между двумя другими главными направлениями приращения тензора деформации, сторонами, испытывает лишь мгновенную деформацию сдвига.

Для инкремента тензора деформации  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  справедливо следующее диадное представление в терминах мгновенно нерастяжимых директоров:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} = \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}).\tag{64}$$

Действительно, в силу  $d\varepsilon_2 = 0$  для диадного представления тензора  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  необходимы только диады, образованные мгновенно нерастяжимыми директорами  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ , поэтому справедливо следующее разложение с неопределенными пока коэффициентами  $dl$ ,  $dh$ ,  $d\gamma$ :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (dl)\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + (dh)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{2}(d\gamma)\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{2}(d\gamma)\mathbf{n} \otimes \mathbf{l}.\tag{65}$$

Подсчитывая далее мгновенные удлинения и сдвиги, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{l} &= dl + \cos^2 \iota dh - \cos \iota d\gamma, \\ \mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} &= \cos^2 \iota dl + dh - \cos \iota d\gamma, \\ \mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} &= -\cos \iota (dl + dh) + \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} d\gamma. \end{aligned} \quad (66)$$

С другой стороны, те же самые величины уже были вычислены раньше (см. (61), (62)), следовательно, неопределенные коэффициенты  $dl$ ,  $dh$ ,  $d\gamma$  связываются между собой приводимыми ниже уравнениями:

$$\begin{aligned} dl + \cos^2 \iota dh - \cos \iota d\gamma &= 0, \\ \cos^2 \iota dl + dh - \cos \iota d\gamma &= 0, \\ -\cos \iota (dl + dh) + \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} d\gamma &= \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2} \sin^2 \iota. \end{aligned} \quad (67)$$

Из этой системы уравнений можно найти следующие значения для неопределенных коэффициентов  $dl$ ,  $dh$ ,  $d\gamma$ :

$$\begin{aligned} dl = dh &= \frac{\cos \iota}{\sin^2 \iota} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3), \\ d\gamma &= \frac{1 + \cos^2 \iota}{\sin^2 \iota} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3). \end{aligned} \quad (68)$$

Подставляя (68) в (65), приходим к диадному представлению (64).

В терминах приращений перемещений полная кинематическая картина сжимаемых течений сред Кулона–Мора в предельном состоянии без труда строится на основе данных представлений об асимптотических направлениях и о мгновенно нерастяжимых линейных элементах. В частности, в двумерных задачах можно достаточно просто получить соотношения для приращений перемещений  $d\mathbf{u}$  вдоль линий, касающихся мгновенно нерастяжимых директоров. В плоских течениях мгновенно нерастяжимые директоры будут одновременно указывать характеристические направления системы дифференциальных уравнений кинематики.

Рассмотрим далее вопрос о равенстве углов  $\iota$  и  $\iota$ , определяющих ориентации асимптотических директоров тензора напряжений и приращения тензора деформации соответственно. А priori мы не можем утверждать, что они равны. Равенство  $\iota = \iota$  означает, что асимптотические директоры тензора напряжений и приращения тензора деформации ориентированы одинаково и равны параметру Лоде (см. (10) и (49))

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3};$$

при этом убывающим значениям главных напряжений (2) должны соответствовать убывающие значения главных приращений деформации (46). Они связываются ассоциированным законом течения и в общем случае продемонстрировать равенство параметров Лоде не удастся. Эта важная и интересная проблема в „старых“ теориях пластичности (см., например, [6–8]), не основанных явно на ассоциированном законе течения, решалась весьма своеобразно. Так, в главе XVI монографии [7] равенство параметров Лоде (10) и (49) формулируется как „третий закон пластичности“

с указанием на подобие главных кругов Мора для напряжений и приращений деформаций.<sup>3</sup> Далее (глава XVII, с. 281) отмечается без дополнительной аргументации, что, несмотря на наблюдаемое в эксперименте отклонение, введение третьего закона пластичности является оправданным. Можно показать, что вопрос о равенстве (или отклонении друг от друга) параметров Лоде решается на основе оценки величины „промежуточного“ главного нормального напряжения.

#### 5. Исследование кинематического ограничения, накладываемого ассоциированным законом течения.

Ассоциированный закон течения (54) с функцией текучести (40) устанавливает кинематическое ограничение на второе главное приращение деформации

$$d\varepsilon_2 = 0, \quad (69)$$

которое должно выполняться для всех пространственных течений среды Кулона—Мора, находящейся на пределе текучести (39). Ясно, что при выполнении условия текучести (39) оно эквивалентно ограничению на главные напряжения

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0. \quad (70)$$

Ограничение (70) заведомо выполняется для функции текучести (40), однако такое простое выражение для  $f$  подразумевает, что уже известно, что второе главное напряжение  $\sigma_2$  является промежуточным. Пока *нет никаких* сведений о величине главного напряжения  $\sigma_2$  лучше всего при анализе ограничения (70) воспользоваться симметризованной формой функции текучести, которая никак не связана со специальной нумерацией главных осей тензора напряжений и представляет собой произведение трех функций текучести:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = h_1 h_2 h_3, \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - [g + \Gamma(\sigma_2 + \sigma_3)]^2, \\ h_2 &= (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - [g + \Gamma(\sigma_1 + \sigma_3)]^2, \\ h_3 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - [g + \Gamma(\sigma_1 + \sigma_2)]^2; \\ g &= 2c \cos \gamma, \quad \Gamma = -\sin \gamma. \end{aligned}$$

При дифференцировании симметризованной функции текучести (71) по переменной  $\sigma_2$  получается общий множитель

$$h_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - [g + \Gamma(\sigma_1 + \sigma_3)]^2,$$

<sup>3</sup>Двухтомная монография [7–8] в научной литературе по механике деформируемого твердого тела считается наиболее широкой по замыслу и вместе с тем доступной по изложению. Формулировка законов текучести в первом томе указанного сочинения не следует современной схеме, опирающейся на ассоциированный с условием пластичности закон течения. Достаточными признаются три закона (см. [7, с. 260]): 1) одна и та же ориентация в пространстве главных осей тензора напряжений и приращения тензора деформации; 2) несжимаемость пластического течения; 3) пропорциональность скорости сдвига касательным напряжениям. Наиболее уязвимым здесь является „второй закон пластичности“. Он, например, нарушается для течений сред Кулона—Мора. Теории сред Кулона—Мора целиком посвящена глава 15 второго тома монографии [8]. Условие несжимаемости течения явно включается в теорию (см. [8, с. 560]). Таким образом, законы пластичности [7, 8] оказываются несовместимыми с теорией сред Кулона—Мора, основанной на ассоциированном законе течения.

в который главное напряжение  $\sigma_2$  не входит. Однако считать ограничение (70) выполненным за счет выполнения „условия текучести“

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - [g + \Gamma(\sigma_1 + \sigma_3)]^2 = 0 \quad (72)$$

неприемлемо, поскольку (72) на самом деле условием текучести не является пока не установлены неравенства (2). Следовательно, ограничение (70) будет выполняться не в силу „условия текучести“, а в силу равенства нулю оставшегося сомножителя

$$[(\sigma_2 - \sigma_3) - \Gamma[g + \Gamma(\sigma_2 + \sigma_3)]] [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - [g + \Gamma(\sigma_1 + \sigma_2)]^2] + [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - [g + \Gamma(\sigma_2 + \sigma_3)]^2] [(\sigma_2 - \sigma_1) - \Gamma[g + \Gamma(\sigma_1 + \sigma_2)]] = 0. \quad (73)$$

Равенство (73) естественно рассматривать как уравнение для определения второго главного напряжения  $\sigma_2$  и последующего доказательства того, что оно в действительности будет промежуточным.

В результате достаточно длинной цепи алгебраических преобразований уравнение (73) можно привести к следующему виду:

$$A_3\alpha^3 + A_2\alpha^2 + A_1\alpha + A_0 = 0, \quad (74)$$

где коэффициенты кубического полинома определяются формулами

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\omega^4, \\ A_1 &= -3\zeta^2 - 4\Gamma\omega^2d, \\ A_2 &= 1 + 2\frac{2\zeta^4 - \omega^4}{l} - 2\omega^2d^2 + 4\Gamma^2d^2 - 2\Gamma d(1 - \zeta^2\omega^{-2}), \\ A_3 &= 2\Gamma d^3 - \zeta^2l^{-1} + d^2\omega^{-2}(\zeta^2 + 2\Gamma^2) + 4\Gamma\zeta^2dl^{-1}; \end{aligned}$$

$g, \Gamma, \omega^2 = 1 - \Gamma^2, \zeta^2 = 1 + \Gamma^2$  — материальные постоянные;

$$\alpha = \omega^2 \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_2}, \quad l = \omega^4 \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3}, \quad d = \frac{g}{\omega^2(\sigma_1 + \sigma_3)}.$$

Если рассматривать (74) как кубическое алгебраическое уравнение относительно переменной  $\alpha$ , то формально значение  $\alpha$  определяется в зависимости от переменных  $l$  и  $d$  ( $\alpha = \alpha(l, d)$ ) и тем самым решается вопрос о величине главного напряжения  $\sigma_2$ .

Идеально пластическое тело Кулона—Треска является предельным случаем рассматриваемой модели ( $\gamma \rightarrow 0$ ), который характеризуется следующими значениями определяющих постоянных ( $k$  — предел текучести при чистом сдвиге):

$$\Gamma = 0, \quad g = 2k, \quad \omega^2 = 1, \quad \zeta^2 = 1.$$

Для переменных  $\alpha, l$  и  $d$  в уравнении (74) при этом находятся более простые выражения

$$\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_2}, \quad l = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3}, \quad d = \frac{2k}{\sigma_1 + \sigma_3},$$

а само уравнение (74) приобретает существенно более обзримый вид

$$(d^2 - l^{-1})\alpha^3 + (1 + 2l^{-1} - 2d^2)\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0. \quad (75)$$

Это кубическое уравнение, к счастью, легко поддается решению; оно имеет три вещественных корня

$$\alpha = 2, \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Z}}{2Z}, \quad \alpha = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4Z}}{2Z}; \quad Z = \frac{4k^2 - \sigma_1\sigma_3}{(\sigma_1 + \sigma_3)^2}.$$

Первый из них (никак не связанный с величинами  $l$  и  $d$ ) соответствует промежуточному главному напряжению, равному точно медианному значению „крайних“ главных напряжений:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Таким образом, в теории Кулона—Треска кинематическое ограничение (69) удовлетворяется специальной (точно медианной) зависимостью главного напряжения  $\sigma_2$  от „крайних“ главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_3$ . Помимо всего прочего, данный результат обеспечивает дополнительный аргумент в пользу корректности трехмерной теории течения, основанной на критерии текучести Кулона—Треска. То же самое относится и к теории плоского деформированного состояния (в плане корректности вывода двумерных уравнений из трехмерной постановки): в этом случае „внеплоское“ главное напряжение  $\sigma_2$  оказывается точно медианным.

Рассмотрим далее случай идеально сыпучей среды Мора (отсутствует сцепление между зернами,  $c \rightarrow 0$ ). Уравнение (74) при этом несколько упрощается в силу  $d \rightarrow 0$  и его можно привести к виду

$$\zeta^2 \alpha^3 - [l + 2(2\zeta^4 - \omega^4)]\alpha^2 + 3\zeta^2 l \alpha - 2\omega^4 l = 0, \quad (76)$$

где

$$\alpha = \omega^2 \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_2}, \quad l = \omega^4 \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)^2}{\sigma_1 \sigma_3}, \quad \omega^2 = 1 - \Gamma^2, \quad \zeta^2 = 1 + \Gamma^2, \quad \Gamma = -\sin \gamma.$$

Уравнение (76) должно позволить определить зависимость второго главного напряжения от первого и третьего в форме зависимости:  $\alpha = \alpha(l)$ .

На комплексной плоскости рассмотрим алгебраическое кубическое уравнение<sup>4</sup>

$$e_0 \alpha^3 + e_1 \alpha^2 + e_2 \alpha + e_3 = 0. \quad (77)$$

Разделим это уравнение на коэффициент  $e_0$  и выполним подстановку

$$\alpha = \alpha' - \frac{e_1}{3e_0}.$$

В результате приходим к „неполному“ кубическому уравнению

$$\begin{aligned} \alpha'^3 + e'_2 \alpha' + e'_3 &= 0, \\ e'_2 &= \frac{e_2}{e_0} - \frac{e_1^2}{3e_0^2}, \\ e'_3 &= \frac{2e_1^3}{27e_0^3} - \frac{e_1 e_2}{3e_0^2} + \frac{e_3}{e_0}. \end{aligned} \quad (78)$$

Дискриминант неполного кубического уравнения определяется согласно

$$d = -27e_3'^2 - 4e_2'^3$$

и следующим образом вычисляется в терминах коэффициентов исходного кубического уравнения (77):

$$d = E_1^2 E_2^2 - 4E_1^3 E_3 - 27E_3^2 - 4E_2^3 + 18E_1 E_2 E_3, \quad (79)$$

<sup>4</sup>Теория кубического уравнения с необходимой полнотой изложена, например, в классическом руководстве [11, с. 211-217].

где

$$E_j = \frac{e_j}{e_0} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Формальные корни неполного кубического уравнения (78) находятся с помощью формулы Кардано в виде суммы двух кубических радикалов (в дальнейшем они будут обозначаться через  $\lambda$  и  $\mu$ )

$$\alpha' = \sqrt[3]{-\frac{e'_3}{2} + \sqrt{-\frac{d}{4 \cdot 27}}} + \sqrt[3]{-\frac{e'_3}{2} - \sqrt{-\frac{d}{4 \cdot 27}}}, \quad (80)$$

подразумевая оперирование с кубическими радикалами из комплексных чисел. Кубический радикал из комплексного числа  $z$  имеет три значения; если найдено одно  $\sqrt[3]{z} = \xi$ , то два других будут равны  $\varepsilon\xi$ ,  $\varepsilon^2\xi$ , где

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому формула Кардано (80) при всех возможных интерпретациях входящих в нее двух кубических радикалов дает девять значений, шесть из которых отбрасываются, рассматривая условие того, что произведение входящих в (80) кубических радикалов должно быть равно  $-\frac{1}{3}e'_2$ . Если в формуле (80) найдена комбинация кубических радикалов  $\alpha' = \lambda + \mu$  с  $\lambda\mu = -\frac{1}{3}e'_2$ , то сама указанная комбинация есть корень уравнения (78), а два других корня будут иметь значения  $\alpha' = \varepsilon\lambda + \varepsilon^2\mu$ ,  $\alpha' = \varepsilon^2\lambda + \varepsilon\mu$ . При отличном от нуля дискриминанте все три корня неполного кубического уравнения различны.

В том случае, когда все коэффициенты кубического уравнения (77) вещественны, по знаку дискриминанта уравнения (79) различаются следующие три ситуации:

- (1)  $d = 0$ , все корни уравнения (78) вещественны; корнями являются отношения  $\frac{3e'_3}{e'_2}$  и  $-\frac{3e'_3}{2e'_2}$  (двукратный корень);
- (2)  $d < 0$ , под знаками кубических радикалов в (80) будут находиться вещественные величины, следовательно, кубические радикалы  $\lambda$ ,  $\mu$  можно взять вещественными; один корень уравнения (78) вещественный  $\alpha' = \lambda + \mu$ , а два оставшихся корня

$$\alpha' = -\frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda - \mu), \quad \alpha' = -\frac{\lambda + \mu}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda - \mu)$$

комплексно сопряжены;

- (3)  $d > 0$ , кубические радикалы  $\lambda$ ,  $\mu$  комплексно сопряжены; пары  $\varepsilon\lambda$ ,  $\varepsilon^2\mu$  и  $\varepsilon^2\lambda$ ,  $\varepsilon\mu$  также комплексно сопряжены; все корни уравнения (78) вещественны и равны  $2\Re\lambda$ ,  $-\Re\lambda - \sqrt{3}\Im\lambda$ ,  $-\Re\lambda + \sqrt{3}\Im\lambda$ .

Все сказанное в применении к кубическому уравнению (76) позволяет найти его решения в форме (80) со значениями

$$\begin{aligned} 27\zeta^6 e'_3 &= -2[l + 2(2\zeta^4 - \omega^4)]^3 + 27\zeta^2[l + 2(2\zeta^4 - \omega^4)] - 54\zeta^4\omega^4, \\ \zeta^8 d &= 9\zeta^4[l + 2(2\zeta^4 - \omega^4)]^2 - 8\omega^4[l + 2(2\zeta^4 - \omega^4)]^3 - 108\omega^8\zeta^8 - \\ &- 36\zeta^{12} + 108\zeta^4\omega^4[l + 2(2\zeta^4 - \omega^4)]. \end{aligned}$$

## 6. Основные результаты выводы.

Предложено представление об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений и приращения тензора деформации, а также об ортогональных им направлениях (определяющих ориентацию мгновенно нерастяжимых директоров), расположенных в плоскости ортогональной главной оси приращения тензора деформации, соответствующей промежуточному главному приращению деформации.

Развита новая схема моделирования сжимаемых течений сред Кулона—Мора и обобщенных пластических тел Прандтля, основанная на представлении об асимптотических направлениях тензора напряжений и приращения тензора деформации.

В асимптотических осях получены канонические диадные представления для тензора напряжений и приращения тензора деформации.

Получены различные (симметризованный и несимметризованный) варианты представления критерия текучести Кулона—Мора в терминах главных нормальных напряжений и соответствующие формулировки ассоциированного закона течения.

Проанализированы уравнения ассоциированного закона течения, которые затем использованы при изучении кинематики необратимого течения.

В процессе течения сред Кулона—Мора материальные волокна, ориентированные вдоль ортогональных асимптотическим директорам направлений, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются.

Приращение дилатации всегда положительно (кроме случая, когда среда Кулона—Мора вырождается в идеально пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска).

Кинематическое ограничение, накладываемое на процессы течения ассоциированным законом течения, трактуется как условие, позволяющее определить величину промежуточного главного напряжения (внеплоского главного напряжения в случае плоского деформированного состояния), которое не входит в формулировку критерия Кулона—Мора.

В теории Кулона—Треска кинематическое ограничение удовлетворяется специальной (точно медианной) зависимостью главного напряжения от крайних главных напряжений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 312 с.
- [2] Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.
- [3] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
- [4] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [5] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [6] Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.
- [7] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 648 с.
- [8] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.
- [9] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 240 с.

[10] Радаев Ю.Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов// Изв. РАН. Мех. тверд тела. 2013. №5. С. 77-85.

[11] Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. М., Л.: ОНТИ, 1937. 476 с.

Y. N. Radayev

## ON THE THEORY OF THE COULOMB–MOHR MEDIA AND GENERALIZED PRANDTL PLASTIC SOLIDS

*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** Three-dimensional flows of perfectly plastic medium are considered within the framework of the Coulomb–Mohr continuum model. The model is to be used in applied problems related to limit states and flows of sands, rocks and any other kind of granular media. A generalization of the Coulomb–Mohr continuum model due to L. Prandtl is discussed. The present study is based on a notion of asymptotic directions of the stress tensor and the strain tensor increment and as well on instantaneously not elongated directors which are orthogonal to the asymptotic directions and lie in the plane normal to the intermediate principal stress axis. By making use of mechanical sense of asymptotic directions the canonical dyadic representations of the stress tensor and the strain tensor increment are obtained. The associated flow rule are discussed and applied to study of three-dimensional irreversible kinematics of the Coulomb–Mohr media. It is shown that the dilatation rate is always positive excepting the case of zero internal friction. Orientations of the instantaneously not elongated linear material elements are found. The strain tensor increment represented in three dimensions by means of the instantaneously not elongated directors is obtained. A kinematical constraint to three-dimensional flows of the Coulomb–Mohr media imposed by the associated flow rule is discussed. The constraint is to be treated as an equation to determine the intermediate principal stress not involved in the formulation of the Coulomb–Mohr limit state condition. The intermediate principal stress is proved to be the exactly median principal stress for the media with zero internal friction.

**Keywords:** Coulomb–Mohr medium, Prandtl plastic solid, principal stress, asymptotic directors, cohesion, internal friction, associated flow rule

## REFERENCES

- [1] Prager V. Vvedenie v mekhaniku sploshnyh sred. M.: Izd-vo inostr. lit-ry, 1963. 312 s. (in Russian)
- [2] Ил'юшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с. (in Russian)
- [3] Sokolovskij V.V. Teoriya plastichnosti. M.: Vyssh. shk., 1969. 608 s. (in Russian)
- [4] Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti. M.: Nauka, 1969. 420 s. (in Russian)
- [5] Ivlev D.D. Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 232 s. (in Russian)
- [6] Nadai A. Plastichnost'. Mekhanika plasticheskogo sostoyaniya veshchestva. M., L.: ONTI, 1936. 280 s. (in Russian)
- [7] Nadai A. Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel. T. 1. M.: Izd-vo inostr. lit-ry, 1954. 648 s. (in Russian)

---

*Radayev Yuri Nikolaevich*

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

- [8] Nadai A. Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel. T. 2. M.: Mir, 1969. 864 s. (in Russian)
- [9] Radaev YU.N. Prostranstvennaya zadacha matematicheskoy teorii plastichnosti. Samara: Izd-vo Samarskogo gos. universiteta, 2006. 240 s. (in Russian)
- [10] Radaev YU.N. Asimptoticheskie osi tenzorov napryazhenij i prirashcheniya deformacii v mekhanike szhimaemyh kontinuumov// Izv. RAN. Mekh. tverd tela. 2013. №5. S. 77-85. (in Russian)
- [11] Sushkevich A.K. Osnovy vysshej algebry. M., L.: ONTI, 1937. 476 s. (in Russian)

Ю. В. Немировский

## ПРЕДЕЛЬНАЯ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ГИБРИДНЫХ ФЕРМЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** На основе идеи построения и использования изохронных кривых деформирования образцов однородных материалов при длительном нагружении с учетом возможной деградации со временем свойств материалов, разработана схема прогнозирования долговечности гибридных стержней составленных из набора различных материалов. Схема использована для получения предельной долговечности гибридных ферменных конструкций из набора различных материалов.

**Ключевые слова:** гибридные стержни, гибридные ферменные конструкции, долговечность эксплуатации, длительная прочность, ползучесть, теория старения, изохронные кривые деформирования, предельно допустимые деформации, предельно допустимая долговечность, усилия, перемещения, деформации.

УДК: 539.374

**Введение.** Большинство ферменных конструкций предназначены для эксплуатации в течение длительного времени при заданном уровне внешних нагрузок и температур. Вследствии влияния случайных, неучтенных отклонений составов поликристаллических фазовых структур конструкционных металлов и сплавов, наличия дефектов и микропор, их физико-механического и химического взаимодействия при механических и тепловых нагружениях свойства образцов конструкционных материалов со временем изменяются (материалы «стареют»).

---

© Немировский Ю. В., 2018  
*Немировский Юрий Владимирович*  
e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Кабинета Министров Чувашской Республики в рамках научного проекта № 17-41-210272.

Поступила 01.10.2018

В результате при одинаковых условиях термосиловых воздействий образцы одного и того же конструкционного материала показывают в разные времена различное сопротивление. Изучению закономерностей взаимодействия полей напряжений, деформаций и температур в процессе деградации свойств материалов со временем посвящены многочисленные исследования, которые объединены в новое активно развивающееся направление в механике деформируемого твердого тела – теорию ползучести однородных тел и конструкций [1,2-12].

На сегодняшний день не существует однозначно признанной общей теории ползучести описывающей совместное взаимное влияние напряжений, деформаций, скоростей деформаций, деформаций и времени в широком диапазоне их изменений. Имеются разработки технических (инженерных, феноменологических) теорий ползучести, которые выделяют лишь некоторые из перечисленных переменных и высказаны предположения о возможных функциональных зависимостях между ними.

Из широко известных технических теорий ползучести при практических расчетах чаще всего используются три: теория старения, теория течения и теория упрочнения [2-12].

В рамках этих теорий конструкционные материалы рассматриваются как сплошные среды, а происходящие в них процессы, приводящие в конечном итоге к разрушению, описываются с помощью понятий тензоров напряжений и деформаций, векторов сил и перемещений, времени, температуры, энергии, накапливаемой или расходуемой в материале со временем в результате необратимых процессов деформирования. На основе такого подхода разрабатываются и предлагаются различные критерии кратковременной и длительной прочности, устойчивости деформационных процессов, которые затем находят практическое воплощение в расчетной практике отраслевых организаций. При этом для отраслевых организаций одним из важнейших вопросов является прогнозирование надежной долговечности конструкций при заданном режиме их эксплуатации. В последние годы эта проблема остро возникает в строительной индустрии при создании уникальных сооружений дорогостоящих объектов и при массовых застройках гражданских сооружений. Решение этой проблемы теснейшим образом связано с задачей снижения расходов конструкционных материалов при сохранении и повышении эксплуатационной надежности проектируемых объектов. Решение вопросов прогнозирования длительной прочности даже для однородных конструктивных элементов вызывает серьезные трудности [2, 3, 5-10, 13-14], как с расчетной точки зрения, так и с точки зрения получаемых для проверки теоретических расчетов с надежными экспериментальными данными, снимаемыми регулярно с испытуемых образцов в течение длительного времени (десятки и сотни тысяч часов). Поэтому при использовании теорий ползучести для прогнозирования обычно считается приемлимым вследствие ползучести достаточно большой разброс экспериментальных характеристик и предпочтение отдается тому варианту теории ползучести, который позволяет относительно малыми средствами решать большое количество разнообразных задач [2, 3, 5, 10].

Разнообразные повышенные эксплуатационные и экономические и ресурсные требования для однородных материалов уже при начальном нагружении соответствующих однородных образцов приближают их к предельным возможностям эксплуатации и следовательно делают непригодными или опасно пригодными для эксплуатации в течение длительного времени. В настоящее время достаточно интенсивно

при кратковременных нагрузениях расширяются области применения структурно-неоднородных (гибридных) конструкций, что объясняется их высокой эффективностью по сравнению с традиционными однородными системами [20, 21].

Некоторые расчеты показывают, что и при длительных нагрузениях гибридные рамные стержневые конструкции являются более эффективными, чем однородные. Это в полной мере относится и к ферменным конструкциям, в которых каждый из стержней может формироваться из набора различных конструкционных материалов и иметь различные формы поперечных сечений (рис. 1 а, б, в, г).

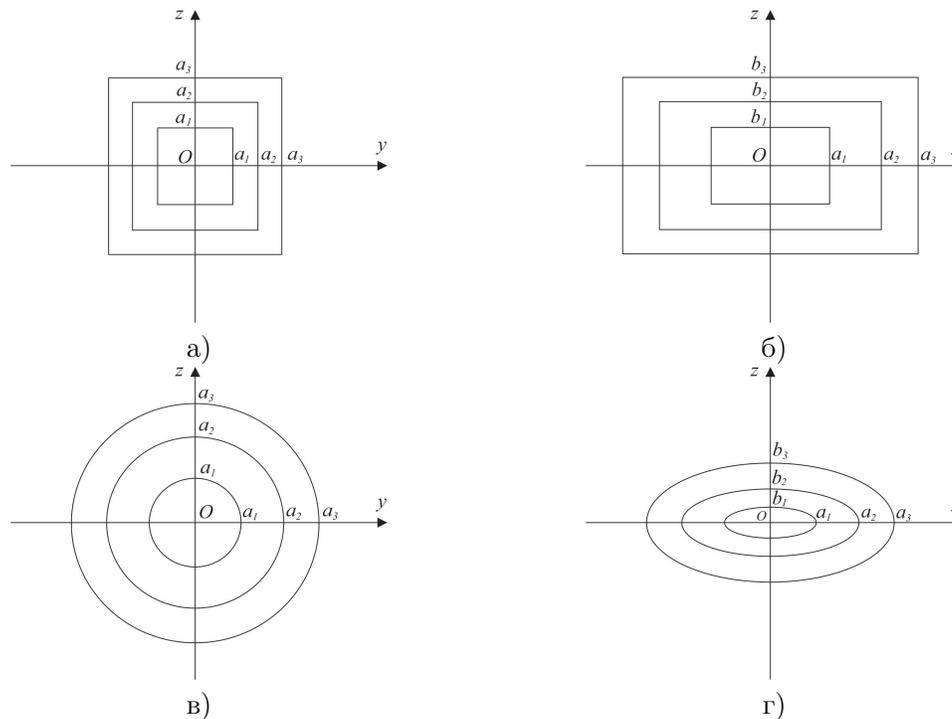


Рис. 1. Формы поперечных сечений стержней.

### 1. Однородный и гибридный ферменный стержень.

Традиционно при расчете ферменных конструкций материал каждого стержня одинаков и одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Это означает, что мгновенная диаграмма в плоскости  $\sigma \sim \varepsilon$  является нечетной функцией

$$\sigma = f(\varepsilon). \tag{1}$$

Если отбросить участок неустойчивого процесса разупрочнения из-за недостоверности экспериментальных замеров, то зависимость (1) при растяжении образца следует рассматривать на отрезке  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^+$ , где  $\varepsilon^+$  – предельно допустимая деформация при напряжении соответствующем пределу прочности  $\sigma^*$ . Здесь и далее при рассмотрении ферменных конструкций будем для простоты считать температуру комфортно-нормальной для всех материалов и незначительными температурными эффектами будем пренебрегать.

При рассмотрении длительных процессов воспользуемся теорией старения, для которой связь между напряжением  $\sigma$ , деформацией  $\varepsilon$  и временем  $t$  можно представить в форме

$$\sigma = \Phi(\varepsilon, t), \quad (2)$$

где  $t$  – параметр.

Это допущение эквивалентно предположению о существовании некоторой поверхности состояния в пространстве  $\sigma, \varepsilon, t$ . Рассекая эту поверхность плоскостями  $t = t_1, t = t_2, \dots$ , будем получать изохронные кривые деформирования

$$\sigma(t_i) = \varphi_i[\varepsilon(t_i)], \quad i = 1, 2, \dots$$

Для одинаково сопротивляющихся растяжению-сжатию материалов функции  $\varphi_i[\varepsilon(t_i)]$  должны быть нечетными. Тогда предполагая подобие их аппроксимаций для произвольного времени  $t$  можем принять, например

$$\sigma(t) = A(t)\varepsilon(t) + B(t)\varepsilon^3(t). \quad (3)$$

При этом должны выполняться условия

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} < 0,$$

$$\sigma^* = A_1 \varepsilon^* + B_1 (\varepsilon^*)^3, \quad B_1 < 0, \quad A_1 > 0.$$

Отсюда

$$\sigma^* = \frac{2}{3} A_1 \varepsilon^*, \quad B_1 = -\frac{\sigma^*}{2(\varepsilon^*)^3}. \quad (4)$$

Таким образом, основной характеристикой длительной прочности выступает для данного материала предельно допустимая деформация  $\varepsilon^*$ , которая может быть определена путем обработки изохронных кривых длительных испытаний для данного материала.

Для гибридного стержня, составленного из нескольких материалов, растягивающее усилие равно

$$N = \sum_{j=1}^{\ell} \sigma_j F_j,$$

где  $F_j$  – площадь сечения  $j$ -го фазового материала.

Если для всех фазовых материалов принять закон деформирования типа (3), считая, что коэффициенты  $A(t), B(t)$  заранее определены путем обработки изохронных кривых деформирования соответствующих материалов, то учитывая свойство совместности деформаций гибридного стержня,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_\ell = \varepsilon, \quad (5)$$

для усилия в стержне будем иметь

$$N = C\varepsilon + D\varepsilon^3, \quad (6)$$

$$C = \left( \sum_j A_j F_j \right), \quad D = \left( \sum_j B_j F_j \right), \quad C > 0, D < 0.$$

Тогда для деформации стержня получим уравнение

$$\varepsilon^3 + 3p\varepsilon + 2q = 0, \quad (7)$$

$$p = \frac{C}{3D}, \quad q = -\frac{N}{2D}, \quad p < 0, \quad q > 0.$$

Дискриминант уравнения

$$D = q^2 + p^3 = \frac{1}{4D^2} \left[ N^2 + \frac{4}{27} \frac{C^3}{D} \right]. \quad (8)$$

Действительный корень уравнения (6) равен

$$\varepsilon = U + V, \quad (9)$$

где

$$U = \left[ -q + D^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad V = \left[ -q - D^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (10)$$

Предельно допустимое состояние стержня реализуется при

$$\varepsilon = \varepsilon^* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_l^*), \quad (11)$$

и тогда предельно допустимое усилие в стержне будет равно

$$N^* = C\varepsilon^* + D(\varepsilon^*)^3. \quad (12)$$

Если при обработке изохронных диаграмм деформирования определены зависимости предельных деформаций всех фазовых материалов, то при заданном предельном усилии  $N^3$  уравнение (12) позволяет определить долговечность  $t^*$  данного стержня.

В ряде случаев переход материала диаграмм на изохронных кривых деформирования в состоянии разупрочнения может иметь явный перелом. Тогда диаграммы целесообразно аппроксимировать зависимостями

$$\sigma_i = C_i \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}, \quad C_i = \frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i^*}. \quad (13)$$

При этом для усилия в гибридном стержне будем иметь выражение

$$N = \left( \sum_i^l C_i F_i \right) \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad (14)$$

при  $0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_k^*$ , а предельно допустимое усилие будет равно

$$N = \left( \sum_i C_i F_i \right) \varepsilon_k^*, \quad (15)$$

$$\varepsilon_k^* = \min(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_l^*).$$

## 2. Плоские гибридные фермы.

Рассмотрим некоторую ферму в плоскости  $(x, y)$ , составленную из гибридных стержней, предназначенную для длительной эксплуатации. Предполагаем, что для каждого из них установлены зависимости типа (6) или (11).

Рассмотрим в декартовой системе координат две точки  $A_k(x_k, y_k)$  и  $A_m(x_m, y_m)$  соединяющие концы стержня  $A_{km}$ . Пусть радиусы-векторы этих точек относительно начала координат, связанного с одним из опорных узлов будут определяться выражениями

$$\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j}, \quad \vec{r}_m = x_m \vec{i} + y_m \vec{j}, \quad (16)$$

а после деформации – выражениями

$$\vec{R}_k = \vec{r}_k + \vec{u}_k, \quad \vec{R}_m = \vec{r}_m + \vec{u}_m, \quad \vec{u}_k = u_k \vec{i} + v_k \vec{j}, \quad \vec{u}_m = u_m \vec{i} + v_m \vec{j}, \quad (17)$$

$\vec{u}_k, \vec{u}_m$  – вектора перемещений точек  $A_k$  и  $A_m$ . Тогда для длины  $L_{km}$ , деформации  $\varepsilon_{km}$  и вектора усилия  $\vec{N}_{km}$  в этом стержне будем иметь [20, 21]

$$L_{km} = [(x_k - x_m)^2 + (y_k - y_m)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

$$\varepsilon_{km} = \frac{(\vec{u}_m - \vec{u}_k) \vec{e}_{km}}{L_{km}} = \frac{1}{L_{km}} [(u_m - u_k) \beta_{km} + (v_m - v_k) \delta_{km}],$$

$$\vec{N}_{km} = N_{km} \vec{e}_{km}, \quad \vec{e}_{km} = \beta_{km} \vec{i} + \delta_{km} \vec{j}, \quad \beta_{km} = \frac{x_m - x_k}{L_{km}}, \quad \delta_{km} = \frac{y_m - y_k}{L_{km}}. \quad (19)$$

Усилия  $N_{km}$  в соответствии с (6) или (11) связаны с деформациями зависимостями

$$N_{km} = C_{km} \varepsilon_{km} + D_{km} \varepsilon_{km}^3, \quad (20)$$

$$N_{km} = E_{km} \varepsilon_{km}^{\frac{1}{3}}. \quad (21)$$

Если в узлах с номерами  $s$  заданы внешние усилия  $\vec{P}_s(P_{xs}, P_{ys})$ , то для них должны быть выполнены уравнения равновесия

$$\sum_r \vec{N}_{rs} + \vec{P}_s = 0, \quad (22)$$

здесь точки  $A_r$  – концы стержней, сходящихся в узлах  $s$ . Что касается остальных узлов  $A_r$ , то их перемещения при деформации должны подчиняться определенным уравнениям связей или быть неподвижными. Для статически определимых ферм усилия  $N_{km}$  в стержне  $A_k A_m$ , определяемому путем решения уравнений равновесия (22). После чего из уравнений (20) или (21) можно определить деформации  $\varepsilon_{km}$  и далее, пользуясь системой уравнений (18) при заданных условиях закрепления фермы в некоторых узлах от ее смещения и вращения как твердого тела, можно вычислить перемещения  $u_k, u_m, v_k, v_m$  остальных узлов фермы.

Для статически неопределимых ферм с помощью дополнительных уравнений кинематических связей для замыкания разрешающих систем уравнений, как обычно, должны быть получены дополнительные уравнения совместности деформаций.

Предельно допустимые деформации  $\varepsilon_{km}^*$  для стержня  $A_k A_m$  определяются равенством

$$\varepsilon_{km}^* = \min_j \{(\varepsilon_j^*)_{km}\}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (23)$$

а предельно допустимое усилие в нем будет равно

$$N_{km}^* = C_{km}\varepsilon_{km}^* + D_{km}^* (\varepsilon_{km}^*)^3, \quad (24)$$

или

$$N_{km}^* = E_{km}^* (\varepsilon_{km}^*)^{\frac{1}{3}}. \quad (25)$$

Зависимости (24), (25) при фиксированных значениях узловых нагрузок позволяют определять предельные допустимые значения  $t_{km}^*$  для каждого из стержней. Тогда в качестве оценки времени  $t^*$  рассматриваемой фермы следует принимать значение

$$t^* = \min(t_{km}^*). \quad (26)$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Soderberg C. R. The interpretation of creep tests for machine design // Transactions of the ASME. 1936. Vol. 58. No 8. P. 733–743
- [2] Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А. Длительная прочность в машиностроении. Москва : Машиностроение, 1977. 248 с.
- [3] Аршакуни А.Л., Локощенко А.М., Киселевский В.Н., Шестериков С.А. и др. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник / Под общ. ред. С.А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.
- [4] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [5] Гарофало Ф. Законы ползучести и длительной прочности металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1968. 304 с.
- [6] Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
- [7] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [8] Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть // Изв. АН СССР. ОТН. 1948. №6. С. 789–800.
- [9] Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др. Расчёты на прочность в машиностроении. Т. II. Москва: МАШГИЗ, 1958. 974 с.
- [10] Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
- [11] Каблов Е. Н., Голубовский Е. Р. Жаропрочность никелевых сплавов. М.: Машиностроение, 1998. 464 с.
- [12] Агахи К. А., Кузнецов В. Н., Локощенко А. М. и др. Моделирование процесса ползучести на основе аппроксимации экспериментальных данных // Машиностроение и инж. образование. 2011. № 2. С. 52–57.
- [13] Аршакуни А. Л., Шестериков С. А. Прогнозирование длительной прочности металлических материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 3. С. 126–141
- [14] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести [Текст] // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №8. С. 26–31.
- [15] Немировский Ю. В. О времени эксплуатации и разрушения конструкций в условиях ползучести // Прикладная механика. 1970. Т.6. №3. С. 47–54

[16] Немировский Ю. В. Об определении времени допустимой эксплуатации конструкций в условиях ползучести // Динамика сплошной среды .Вып. 119. Современные проблемы механики деформируемого твердого тела: Сб. статей / РАН. Сиб. отделение. Ин-т гидродинамики. № 119. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ, 2001. С. 87–91.

[17] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Модель ползучести металлов с начальным скачком деформации и функциональными константами материала // Известия вузов. Авиационная техника. 2009. № 1. С. 20–24.

[18] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Анализ напряженно-деформированного состояния длительно нагруженных рам со слоистыми стержнями // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. Т.3. С. 27–34.

[19] Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Установление срока допустимой эксплуатации слоистых стержней в условиях ползучести // Известия вузов. Строительство. 2008. № 6. С. 19–27.

[20] Немировский Ю. В. Синтез плоских ферменных конструкций / Проблемы оптимального проектирования конструкций : Сб. докл. IV Всероссийского семинара – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2002. С. 274–281

[21] Немировский Ю. В., Мищенко А. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.

*Yu. V. Nemirovskii*

## EXTREME DURABILITY OF HYBRID FARM DESIGNS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** On the basis of the idea of construction and use of isochronous curves of deformation samples of uniform materials at long loading taking into account possible degradation with time of properties of materials, developed the scheme of forecasting of durability of hybrid cores various materials made of set. The scheme is used for obtaining extreme durability hybrid farm designs from a set of various materials.

**Keywords:** hybrid cores, hybrid farm designs, durability of operation, long durability, creep, theory of aging, isochronous curve deformations, maximum permissible deformations, maximum permissible durability, efforts of movement, deformation

## REFERENCES

[1] Soderberg C. R. The interpretation of creep tests for machine design //Transactions of the ASME. 1936. Vol. 58. No 8. P. 733–743.

[2] Gol'denblat I. I., Bazhanov V. L., Kopnov V. A. Dlitel'naya prochnost' v mashinostroenii. Moskva : Mashinostroenie, 1977. 248 s. (in Russian)

[3] Arshakuni A.L., Lokoshchenko A.M., Kiselevskij V.N., SHesterikov S.A. i dr. Zakonomernosti polzuchesti i dlitel'noj prochnosti: Spravochnik / Pod obshch. red. S.A. SHesterikova. M.: Mashinostroenie, 1983. 101 s. (in Russian)

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

- [4] Malinin N. N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti. M.: Mashinostroenie, 1975. 400 s. (in Russian)
- [5] Garofalo F. Zakony polzuchesti i dlitel'noj prochnosti metallov i splavov. M.: Metallurgiya, 1968. 304 s. (in Russian)
- [6] Kachanov L. M. Teoriya polzuchesti. M.: Fizmatgiz, 1960. 456 s. (in Russian)
- [7] Rabotnov YU. N. Polzuchest' ehlementov konstrukcij. M.: Nauka, 1966. 752 s. (in Russian)
- [8] Rabotnov YU. N. Raschet detalej mashin na polzuchest' // Izv. AN SSSR. OTN. 1948. №6. S. 789–800. (in Russian)
- [9] Ponomarev S. D., Biderman V. L., Liharev K. K. i dr. Raschyoty na prochnost' v mashinostroenii. T. II. Moskva: MASHGIZ, 1958. 974 s. (in Russian)
- [10] Lokoshchenko A. M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov. M.: Fizmatlit, 2016. 504 s. (in Russian)
- [11] Kablov E. N., Golubovskij E. R. ZHaroprochnost' nikel'nykh splavov. M.: Mashinostroenie, 1998. 464 s. (in Russian)
- [12] Agahi K. A., Kuznecov V. N., Lokoshchenko A. M. i dr. Modelirovanie processa polzuchesti na osnove approksimacii ehksperimental'nykh dannykh // Mashinostroenie i inzh. obrazovanie. 2011. № 2. S. 52–57. (in Russian)
- [13] Arshakun A. L., SHesterikov S. A. Prognozirovanie dlitel'noj prochnosti metallicheskih materialov // Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela. 1994. № 3. S. 126–141. (in Russian)
- [14] Kachanov L. M. O vremeni razrusheniya v usloviyah polzuchesti [Tekst] // Izv. AN SSSR. OTN. 1958. №8. S. 26–31. (in Russian)
- [15] Nemirovskij YU. V. O vremeni ehkspluatacii i razrusheniya konstrukcij v usloviyah polzuchesti // Prikladnaya mekhanika. 1970. T.6. №3. S. 47–54. (in Russian)
- [16] Nemirovskij YU. V. Ob opredelenii vremeni dopustimoi ehkspluatacii konstrukcij v usloviyah polzuchesti // Dinamika sploshnoj sredy .Vyp. 119. Sovremennye problemy mekhaniki deformiruемого tverdogo tela: Sb. statej / RAN. Sib. otd-nie. In-t gidrodinamiki. № 119. Novosibirsk: Izd-vo IGI, 2001. S. 87–91. (in Russian)
- [17] Mishchenko A. V., Nemirovskij YU. V. Model' polzuchesti metallov s nachal'nykh skachkom deformacii i funkcional'nymi konstantami materiala // Izvestiya vuzov. Aviacionnaya tekhnika. 2009. № 1. S. 20–24. (in Russian)
- [18] Mishchenko A. V., Nemirovskij YU. V. Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya dlitel'no nagruzhennykh ram so sloistymi sterzhnyami // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2010. T.3. S. 27–34. (in Russian)
- [19] Mishchenko A. V., Nemirovskij YU. V. Ustanovlenie sroka dopustimoi ehkspluatacii sloistykh sterzhnej v usloviyah polzuchesti // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo. 2008. № 6. S. 19–27. (in Russian)
- [20] Nemirovskij YU. V. Sintez ploskih fermennykh konstrukcij / Problemy optimal'nogo proektirovaniya konstrukcij : Sb. dokl. IV Vserossijskogo seminar – Novosibirsk: Izd-vo NGASU, 2002. S. 274–281 (in Russian)
- [21] Nemirovskij YU. V., Mishchenko A. V., Vohmyanin I. T. Racional'noe i optimal'noe proektirovanie sloistykh sterzhnevnykh sistem. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 s. (in Russian)

И. В. Злобина, К. С. Бодягина, С. П. Павлов, Н. В. Бекренев

**ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ МЕЖФАЗНОЙ ЗОНЫ  
ОТВЕРЖДЕННОГО ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО  
МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МИКРОВОЛНОВОГО  
ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЕГО ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г.  
Саратов, Россия*

**Аннотация.** Приведены результаты расчета эффективного модуля сдвига и эффективного объемного модуля упругости полимерных композиционных материалов (ПКМ), армированных волокнами с использованием метода конечных элементов. Показано, что значение указанных параметров в основном определяется неоднородностью и относительной толщиной межфазного слоя (МФС) «волокно-матрица». При этом увеличение относительной толщины МФС практически не влияет на указанные параметры в случае монолитности его структуры. Наличие дефектов в виде пор приводит к снижению как модуля сдвига, так и объемного модуля. Пористость влияет на уменьшение указанных параметров в большей степени, чем толщина МФС: увеличение относительной толщины слоя в 2 раза при пористости 25% приводит к снижению модулей упругости на (9-10)%, в тоже время при пористости 75% аналогичное увеличение толщины МФС снижение модулей упругости на 79%. Установлено, что при одном и том же значении объема дефектов (пор) уменьшение их размеров приводит к увеличению прочности МФС, выражающемся в росте модуля сдвига на (14,6-23)% в зависимости от толщины при практически неизменной величине объемного модуля. Исследование методами электронной микроскопии при увеличении  $\times 5000$  микроструктуры полимерных композиционных материалов в области МФС после их взаимодействия с СВЧ электромагнитным полем частотой 2450 МГц в течение 2 минут выявило повышение плотности структуры матрицы и межфазного слоя. Пористость в МФС уменьшилась на (45-47)% при одновременном уменьшении размеров пор на 80-83%, размеры агломератов матрицы уменьшились на 23%, а их количество возросло на 15%. Указанные факты могут способствовать улучшению адгезионного взаимодействия волокон с матрицей. Методом конечных элементов выполнены расчеты модуля сдвига и объемного модуля с учетом определенных в эксперименте изменений микроструктуры МФС, показавшие увеличение указанных параметров ПКМ после воздействия СВЧ электромагнитного поля на (14-20)%, что удовлетворительно согласуется с полученными ранее результатами по увеличению прочности ПКМ при испытаниях на изгиб – (11-16)%, срез – (13-21)% и межслоевой сдвиг – (14-15)%. Выявленное изменение микроструктуры МФС, проявляющееся в снижении его пористости и увеличении точек контактного взаимодействия за счет роста количества мелкодисперсных агломератов, может быть предложено в качестве одного из механизмов повышения прочности отвержденных полимерных композиционных материалов после воздействия СВЧ электромагнитного поля.

**Ключевые слова:** микроструктура, СВЧ электромагнитное поле, матрица, армирующее волокно, межфазная зона, поверхность, плотность, агломераты, пористость, модуль сдвига, объемный модуль, метод конечных элементов, моделирование.

УДК: 621.039.419, 620.22.419, 537.868

### Введение

Анализ научно-технической литературы, материалов конференций и выставок свидетельствует о широком применении полимерных композиционных материалов (ПКМ) на основе углеродных волокон и стеклотканей в авиационной, автомобильной, судостроительной промышленности, ракетостроении и космической технике. Без опережающего развития технологий ПКМ невозможно создание перспективных технических систем. Наиболее высокие темпы роста будут характерны для термопластичных композитов на основе углепластиков, что повлечет за собой также реорганизацию технологического обеспечения производства изделий [1, 2]. Однако, вследствие определенного закона распределения компонентов, условий формирования и отверждения композиций, полученные материалы (и изделия из них) характеризуются анизотропией свойств, в частности, при высокой прочности на растяжение-сжатие значительно хуже воспринимают сдвигающие и изгибающие нагрузки, особенно в плоскости армирования, что определяется условиями контакта волокон и матрицы. Это вызывает необходимость дополнительного усиления конструкции в некоторых опасных участках, приводя к увеличению веса. Данный факт весьма нежелателен для изделий авиационной техники, что определяет повышенные требования к механической прочности конструктивных элементов, имеющих сложные формы, сильно влияющие на распределение опасных механических и температурных напряжений. Повышение прочностных и иных свойств обеспечивается путем оптимизации технологий синтеза и модифицирования волокон, разработки новых матричных материалов, разработки новых схем армирования. Однако, эти методы весьма трудоемки и сопряжены со значительными затратами, поскольку требуют длительных исследований сложных химических процессов и разработки нового технологического оборудования, а также перестройки отлаженного технологического процесса.

---

© Злобина И. В., Бодягина К. С., Павлов С. П., Бекренев Н. В., 2018

*Злобина Ирина Владимировна*

**e-mail:** irinka\_7\_@mail.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики и деталей машин, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия.

*Бодягина Ксения Сергеевна*

**e-mail:** bodksen@mail.ru, аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия.

*Павлов Сергей Петрович*

**e-mail:** pspsar@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия.

*Бекренев Николай Валерьевич*

**e-mail:** nikolaj.bekrenev@yandex.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой технической механики и деталей машин, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Россия.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ № 17-03-00720 «Методология оптимизационного микроконструирования композиционных материалов для объектов сложной формы повышенной динамической прочности, послойно формируемых электротехнологическими методами».

Поступила 01.10.2018

### **Постановка задачи**

Для локального управляющего воздействия на структуру и прочностные свойства трехмерного или двумерного объектов из армированных волокнами ПКМ, возможно применение СВЧ электромагнитного поля. Однако, ряд научно-практических проблем применения данного метода в настоящее время остается не решенными. Проведенный анализ материалов отечественных и зарубежных научных публикаций [3-5] показывает, что наибольшее внимание в развитии исследований в области микроволновой обработки материалов уделяется поиску принципиально новых решений для применения данных технологий с целью замещения существующих методов термической обработки. Отмечается, что применение микроволновых технологий позволяет значительно улучшить качественные показатели при производстве многих видов материалов.

Исследованиями отечественных и зарубежных ученых [3-5], установлены закономерности модифицирующего влияния СВЧ электромагнитного поля на различные диэлектрические материалы, в том числе с проявлением как диэлектрического нагрева, так и нетепловых эффектов. Получены результаты повышения прочностных свойств композиционных неметаллических материалов путем микроволнового воздействия на компаунды на стадии отверждения ПКМ. Внедрение данного метода сопряжено с трудностями изменения существующих технологий синтеза компонентов и формования ПКМ, отмеченными выше.

Ранее авторами были проведены экспериментальные исследования [6-9] влияния СВЧ электромагнитного поля на прочность пултрузионного карбона и углепластика с квазиизотропной структурой. Установлено, что на оптимальных режимах воздействия, не вызывающих деструктивный нагрев объекта обработки, напряжения изгиба возрастают на 11-16%, напряжения среза – на 13-21%. При испытаниях на межслоевой сдвиг обработанные образцы выдерживают более высокие (на 14-15%) напряжения.

Очевидно, что механизмы указанного изменения прочностных характеристик могут проявляться через модифицирование структуры композиционного материала. Однако до настоящего времени мало внимания уделено количественной оценке изменения микроструктуры ПКМ в процессе СВЧ обработки после их окончательного отверждения, не рассмотрены теоретические аспекты данного процесса, что не позволяет достоверно выявить механизм отмеченных выше эффектов.

Причины появления упрочняющих эффектов в окончательно сформированном композиционном материале при воздействии СВЧ электромагнитного поля могут быть выявлены в ходе изучения микроструктуры образцов при помощи электронной микроскопии и компьютерного моделирования влияния изменений в межфазной зоне «матрица-волокно» методом конечных элементов.

Целью исследований явились определение степени влияния изменения структуры межфазного слоя (МФС) на модуль сдвига и объемный модуль упругости ПКМ путем конечно-элементного моделирования и сопоставительная количественная оценка варьирования характеристик микроструктуры отвержденных армированных углеродными волокнами композиционных материалов после их обработки в СВЧ электромагнитном поле промышленной частоты.

### **Теоретические положения**

На границе раздела матрицы и волокна композиционного материала (КМ) образуется межфазный слой (МФС) толщины  $h$  в виде дополнительной фазы. Эта фаза отличается по своим свойствам от фазы матрицы и фазы волокна (наполнителя).

Прочностные характеристики композитов в плоскости, перпендикулярной армированию волокнами, во многом определяются структурой и свойствами межфазного слоя, вследствие малой прочности волокон на изгиб и большей на несколько порядков, по сравнению с матрицей, прочностью на растяжение. То есть при сдвигающих и изгибающих нагрузках основной вклад в прочность ПКМ вносит адгезионная связь матрицы и наполнителя в области МФС. При малых поперечных размерах волокон влияние МФС на эффективные свойства композита может быть существенным. Например, для  $h/r_0 = 0,8$ , где  $r_0$  - радиус включения, межфазная объемная доля превышает 200% от объемной доли включения, так, что упругие свойства межфазного слоя доминируют над свойствами включения. Таким образом, в целом механические свойства ПКМ будут зависеть от отношения толщины МФС к размеру включения.

Основная идея расчета эффективных характеристик композиционного материала, имеющего периодическую структуру, состоит в том, что периодические поля напряжений и деформаций зависят от микроуровня задачи на периодической ячейке. Периодическую ячейку материала возможно проанализировать, используя технику асимптотической гомогенизации для усреднения сложного микроструктурного поведения упругой среды и определения макроскопических свойств композита, как например, в [10]. Для сложных микроструктур аналитическое определение напряжений и деформаций чрезвычайно трудно, поэтому часто гомогенизация проводится на основе численных методов, таких, например, как метод конечных элементов [11, 12].

Для дальнейших рассуждений сделаем следующие предположения: композит является линейно упругим, макроскопически трансверсально изотропным, как по механическим, так и тепловым параметрам. Начальные напряжения отсутствуют; волокнистый наполнитель является однородным, линейно упругим, изотропным и регулярно упакованным; матрица является однородной; линейно упругой, изотропной по механическим и тепловым параметрам.

Для композитов, состоящих из линейных упругих материалов, определяющие дифференциальные уравнения для гомогенного и микроструктурного представительного элемента состоят из линейных уравнений упругости. Рассмотрим элементарную периодическую ячейку, как составляющий анизотропный элемент ПКМ из армирующего включения и матрицы, многократно в нем повторяющийся.

В упругом режиме, макроскопическое поведение элементарной периодической ячейки из анизотропного материала можно охарактеризовать эффективным тензором напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  и тензором деформации  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  гомогенизированной среды. Они связаны между собой с помощью эффективного тензора упругости  $C_{ijkl}^e$ .

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \bar{\varepsilon}_{kl}, \quad (1)$$

где  $C_{ijkl}^e$  зависит от объемной доли наполнителя и микроструктуры элементарной ячейки.

Согласно [10] тензор эффективных упругих свойств может быть записан в виде:

$$C_{ijkl}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( C_{ijkl} - C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) dY \quad (2)$$

где  $|Y|$  обозначает площадь элементарной ячейки,  $\chi_p^{kl}$  – периодическое поле допустимых смещений для случая нагружения  $kl$  удовлетворяющее следующему интегральному уравнению на элементарной периодической ячейке с периодическими граничными условиями:

$$\int_Y C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y C_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall v \in Y. \quad (3)$$

Здесь  $v$  является кинематически допустимым произвольным полем смещения.

Задача (3) может быть решена на элементарной ячейке методом конечных элементов.

Рассмотрим двумерную элементарную периодическую ячейку симметричной микроструктуры (рис. 1а) для изотропного материала. Для плоского деформированного состояния систему уравнений можно записать следующим образом

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^e & C_{1122}^e & 0 \\ C_{1122}^e & C_{1111}^e & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

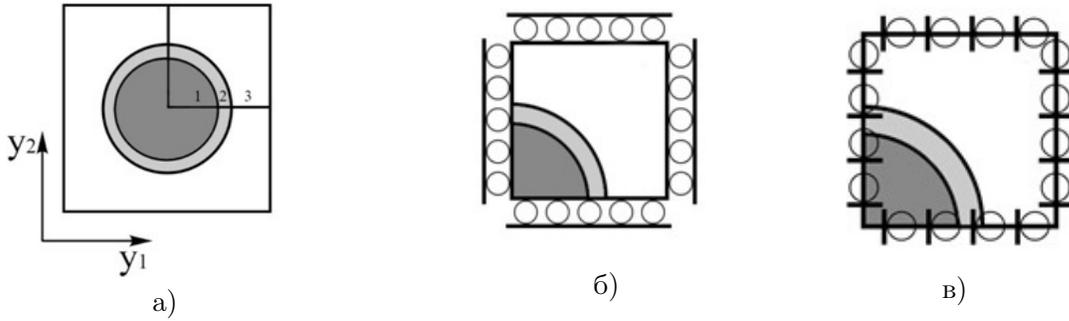


Рис. 1. Элементарная периодическая ячейка композита – (а) и граничные условия (б, в) на четверти базовой ячейки 1- включение, 2 – МФС, 3 - матрица

Для изотропного материала гомогенизированный упругий тензор  $C_{ijkl}^e$  имеет три компоненты  $C_{1111}^e$ ,  $C_{1122}^e$ ,  $C_{1212}^e$ . Если начальная деформация  $\varepsilon^0$  задается в направлении  $y_1$  ( $\varepsilon_{11}^0 = 1$ ,  $\varepsilon_{12}^0 = 0$ ,  $\varepsilon_{22}^0 = 0$ ), то из (2) следует:

$$C_{1111}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( C_{1111} - C_{1111} \varepsilon_{11}^{*(11)} - C_{1122} \varepsilon_{22}^{*(11)} \right) dY \quad (5)$$

Рассматривая начальные напряжения  $\varepsilon^0$  в направлении  $y_2$  ( $\varepsilon_{11}^0 = 0$ ,  $\varepsilon_{12}^0 = 0$ ,  $\varepsilon_{22}^0 = 1$ ) для определения  $C_{1122}^e$  имеем:

$$C_{1122}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( C_{1122} - C_{1111} \varepsilon_{11}^{*(22)} - C_{1122} \varepsilon_{22}^{*(22)} \right) dY \quad (6)$$

Если мы рассматриваем сдвиговые начальные напряжения  $\varepsilon^0$  ( $\varepsilon_{11}^0 = 0$ ,  $\varepsilon_{12}^0 = 0,5$ ,  $\varepsilon_{22}^0 = 0$ ), то:

$$C_{1212}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( C_{1212} - 2C_{1212}\epsilon_{12}^{*(12)} \right) dY \quad (7)$$

С учетом вышеизложенного, согласно (4), получаем:

$$K^e = (C_{1111}^e + C_{1122}^e) / 2, G^e = C_{1212}^e / 2 \quad (8)$$

где  $K^e$  - эффективный объемный модуль,  $G^e$  - эффективный модуль сдвига.

На характеристические поля смещений  $\chi$  необходимо наложить соответствующие периодические граничные условия. Однако в случае, когда периодическая ячейка обладает симметрией, условия периодичности можно заменить более обычными граничными условиями. Так, если ПКМ состоит из изотропных компонентов, а периодическая ячейка имеет симметрию по двум осям, то задача (3) сводится к задаче на четверти ячейки. В случае плоского деформированного состояния для четвертой части элементарной ячейки, как это показано на рис. 1, эти граничные условия [12] для характеристической функции можно записать в виде: для случая нагрузки  $i = j$  (1 или 2) на  $y_1 = 0$ ,  $y_1 = Y_1 \chi_1^{(ij)} = 0$  и на  $y_2 = 0$ ,  $y_2 = Y_2 \chi_2^{(ij)} = 0$  (рис.1б); для случая нагрузки  $ij = 12$  (или 21) на  $y_1 = 0$ ,  $y_1 = Y_1 \chi_2^{(12)} = 0$  и на  $y_2 = 0$ ,  $y_2 = Y_2 \chi_1^{(12)} = 0$  (рис.1в).

Исследование влияния характеристик МФС на эффективные модули ПКМ проводилось на элементарной периодической ячейке размером  $0,1 \times 0,1$  мм для радиуса волокна  $r_0 = 0,04$  мм при разбиении на 2500 конечных элементов. Модуль Юнга для включения принят по литературным данным:  $E_{2,;} = 230$  ГПа (углеродное волокно), для матрицы -  $E_{\text{матр}} = 2$  ГПа (эпоксидная смола).

Расчеты показали, что увеличение толщины МФС снижает эффективные характеристики МФС, если модуль Юнга МФС меньше модуля Юнга матрицы.

Было произведено исследование влияние количества дефектов в МФС при общем размере зоны дефектов (общей пористости), равном 50%. Результаты для данного случая приведены в табл. 1. Из приведенных данных можно заметить, что дробление зоны дефектов на более мелкие элементы увеличивает эффективный модуль сдвига  $G^e$ , и практически не изменяет эффективный объемный модуль  $K^e$ .

По результатам расчетов построены графики (рис. 2 и 3), анализ которых позволяет отметить следующее.

Увеличение относительной толщины МФС практически не влияет на указанные параметры в случае его монолитной структуры. Наличие дефектов в виде пор приводит к снижению, как модуля сдвига, так и объемного модуля. Пористость влияет на уменьшение указанных параметров в большей степени, чем толщина МФС: увеличение относительной толщины слоя в 2 раза при пористости 25% приводит к снижению модулей упругости на (9-10)%, в тоже время при пористости 75% и аналогичном увеличении толщины МФС, наблюдается снижение модулей упругости на 79%. Установлено, что при одном и том же значении объема дефектов (пор) уменьшение их размеров приводит к увеличению прочности МФС, выражающемся в росте модуля сдвига на (14,6-23)% в зависимости от толщины МФС при практически неизменной величине объемного модуля.

Количество дефектов в МФС		$h/r_0$					
		0,1		0,15		0,2	
		$G^e$ , ГПа	$K^e$ , ГПа	$G^e$ , ГПа	$K^e$ , ГПа	$G^e$ , ГПа	$K^e$ , ГПа
	4	1.0173	2.2251	0.8921	2.1365	0.7709	2.0415
	6	1.1162	2.1994	1.0107	2.0813	0.9034	1.9648
	8	1.1667	2.2569	1.0572	2.1276	0.9478	2.0044

Таблица 1. Эффективные модули для ПКМ с различным количеством дефектов в МФС при общем их объеме, равном 50%

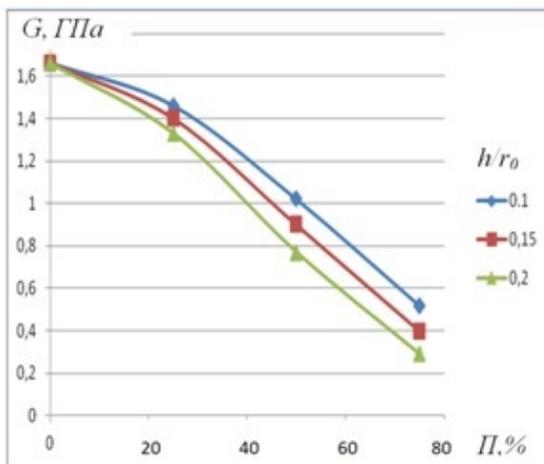


Рис. 2. Теоретическая зависимость модуля сдвига  $G$  от относительной толщины межфазного слоя  $h/r_0$  и его пористости  $P$

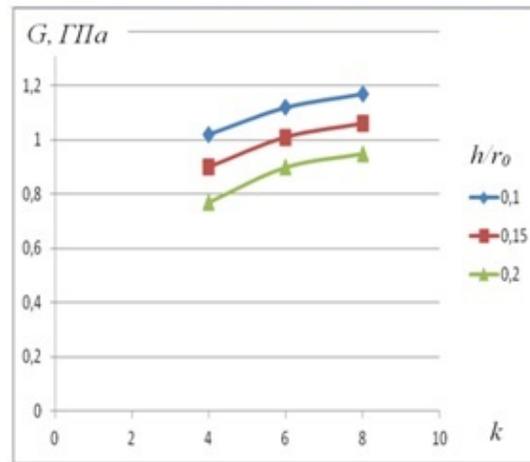


Рис. 3. Теоретическая зависимость модуля сдвига  $G$  от относительной толщины межфазного слоя  $h/r_0$  и количества контактных точек  $k$  при пористости межфазного слоя 50%

### Методика экспериментальных исследований

Для обоснования полученных ранее результатов по упрочнению в СВЧ электромагнитном поле отвержденных ПКМ [6-8] и подтверждения приведенных выше теоретических результатов нами выполнены исследования микроструктуры образцов при помощи электронной микроскопии. Исследовали образцы из отвержденного композита КМКУ-1.80.Э0,1, состоящего из матрицы на основе клеевого связующего ВК-51 и

наполнителя - углеродной ленты ЭЛУР-П-А с объемной долей наполнителя 70-75%. Использовали образцы в виде балок сечением 5 x 10 мм и длиной 70 мм. Эксперименты проводили с использованием специальной микроволновой установки «Жук-2-02» (ООО «АгроЭкоТех» г. Обнинск Калужской обл.) с излучающей антенной рупорного типа. Частота электромагнитного поля составляла 2450 МГц, мощность магнетрона – 1200 Вт. Обработку осуществляли на среднем уровне мощности при времени воздействия, обеспечивающем максимальный упрочняющий эффект [8]. Обработывали по 3 образца. Микроструктуру изучали при помощи электронного микроскопа MIRA II LMU (Tescan Ersay Holding, Чехия) в Лаборатории материалов специального назначения Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. Полученные микрофотографии транслировали в компьютерный анализатор изображений микроструктур АГПМ-6М и анализировали в программной среде Metallograph. С учетом увеличения электронного микроскопа от x5000 до x75000 стандартное поле зрения АГПМ-6М, равное 460 мкм пересчитывали с учетом переводного коэффициента. Для увеличения x5000 скорректированное поле зрения составило 40 мкм.

### Результаты и обсуждение

Анализ микроструктуры при различном увеличении позволил установить, что при максимальном увеличении (от x50000 до x75000) различия в структуре проявляются только в уменьшении размеров агломератов и повышенной рельефности поверхности волокон. При увеличении (x5000 и x10000) различия проявляются не только в части размеров элементов структуры, но и в части пористости. При увеличении x5000 также хорошо заметны различия в МФС «матрица-волокно», характеризующие монолитность композита и его «работоспособность» при воздействии поперечных нагрузок: пористость снижается с 25% у контрольного образца до 17% у обработанного, или в 1,47 раза, видно существенное увеличение контактной области адгезионного взаимодействия (рис. 4). Волокно контрольного образца практически свободно размещено в матрице, окружено кольцевой полостью. Можно выделить только 2-3 точечных контакта с общей протяженностью зоны адгезионного взаимодействия примерно на 10% поперечного сечения волокна. Волокно обработанного образца имеет зону адгезионного взаимодействия, равную 40-50% поперечного сечения. При увеличении x10000 ясно просматривается изменение пористости МФС обработанного образца за счет практического исчезновения в структуре крупных пор. В структуре МФС контрольного образца видны не только полости сложной формы, но и трещины в агломератах, вызванные релаксацией термических напряжений после отверждающей термообработки (рис. 5 и 6).

Усредненные изменения в структуре МФС обработанного в СВЧ электромагнитном поле образца приведены в табл. 2.

С учетом приведенных выше теоретических расчетов, показавших явную зависимость параметров прочности ПКМ от изменения точек контактного взаимодействия в МФС, из данных табл. 2 определено предположительное количество точек контакта агломератов с учетом изменения пористости МФС и их количества: 518 для контрольного образца и 662 для обработанного. Таким образом, ожидаемое увеличение адгезионной прочности МФС составляет для принятых условий эксперимента 1,28, или 28%.

С использованием метода конечных элементов выполнены расчеты модуля сдвига и объемного модуля с учетом определенных по результатам экспериментов параметров МФС (изменение пористости слоя и количества точек контактного взаимодействия).

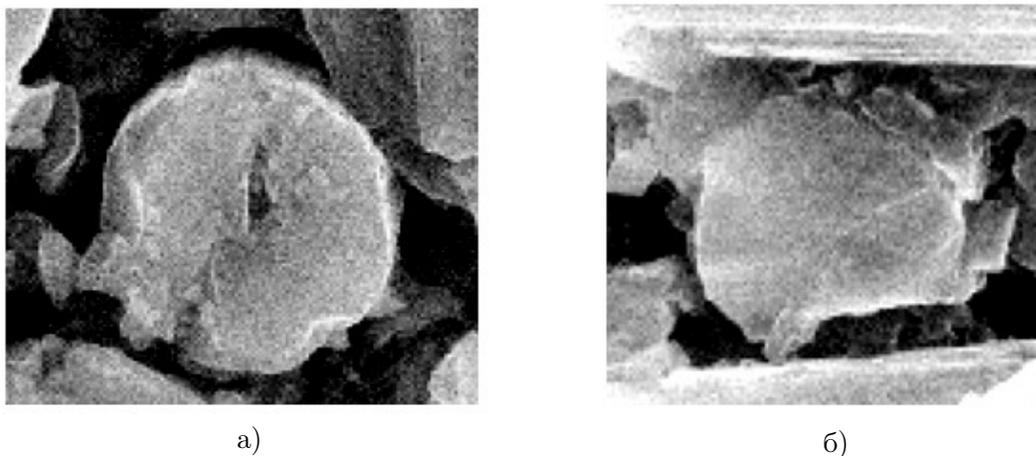


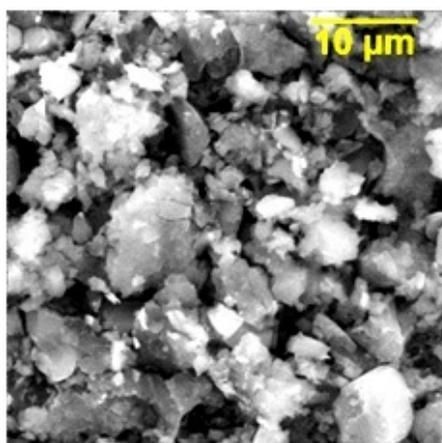
Рис. 4. Зона МФС контрольного (а) и обработанного (б) образцов

Состояние образца	Пористость, %	Средний размер агломератов, мкм	Количество агломератов в поле зрения 40x40 мкм	Дисперсия размеров агломератов, мкм <sup>2</sup>
Контрольный	25	2,1	691	6,4
Обработанный	17	1,7	797	4,3
Изменение	- 47%	- 23,5%	+ 15%	-49%

Таблица 2. Изменения в элементах микроструктуры межфазного слоя обработанного образца по сравнению с контрольным

По техническим причинам, а также с учетом того, что в эксперименте получено количество контактных точек во всем поле зрения, а не только в зоне одного волокна, рассматривалась элементарная ячейка, в которой принято до обработки 16 точек контакта, а после обработки – 20, т.е. увеличение составило 25%, что близко к усредненным экспериментальным данным (28%). Элементарные ячейки для контрольного и обработанного образцов и результаты расчетов представлены на рис. 7, расчетные зависимости – на рис. 8 и 9.

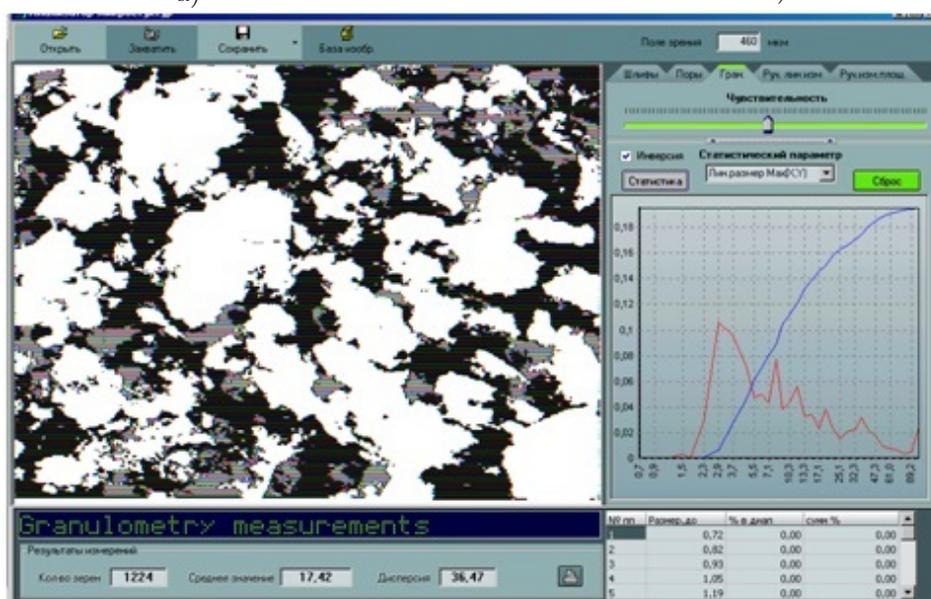
Видно, что как модуль сдвига, так и объемный модуль обработанного образца превышают аналогичные параметры контрольного образца соответственно на (20-16,7)% и (20-14)% в зависимости от толщины МФС. При этом толщина МФС в меньшей степени влияет на увеличение модуля сдвига. Также установлено, что для обработанных в СВЧ электромагнитном поле образцов ПКМ характерна большая зависимость как параметра  $G$ , так и параметра  $K$  от относительной толщины МФС. Для контрольного образца с увеличением толщины МФС с 0,1 до 0,2 исследуемые параметры снижаются соответственно на 24,2% и 13,9%, в то время, как для обработанного образца – на 28% и 20%. Данный факт нуждается в дальнейшем изучении.



а)



б)



в)

Рис. 5. Микроструктура контрольного образца при увеличении  $\times 10000$  (а), распределение агломератов по размерам (б) и размеры пор (в)

На основе проведенного анализа можно предложить следующий механизм влияния СВЧ электромагнитного поля на отвержденные армированные углеродными волокнами ПКМ. Электромагнитные поля СВЧ диапазона, при воздействии на диэлектрические материалы вызывают поляризацию их молекул, образующих диполи и выстраивающиеся вдоль силовых линий. При этом колебания поля приводят к колебаниям диполей, которые в свою очередь, через определенное число циклов могут разрываться с образованием отдельных фрагментов, кластеров и увеличивают таким образом площадь контактной поверхности. Влияя на межкомпонентные связи, в

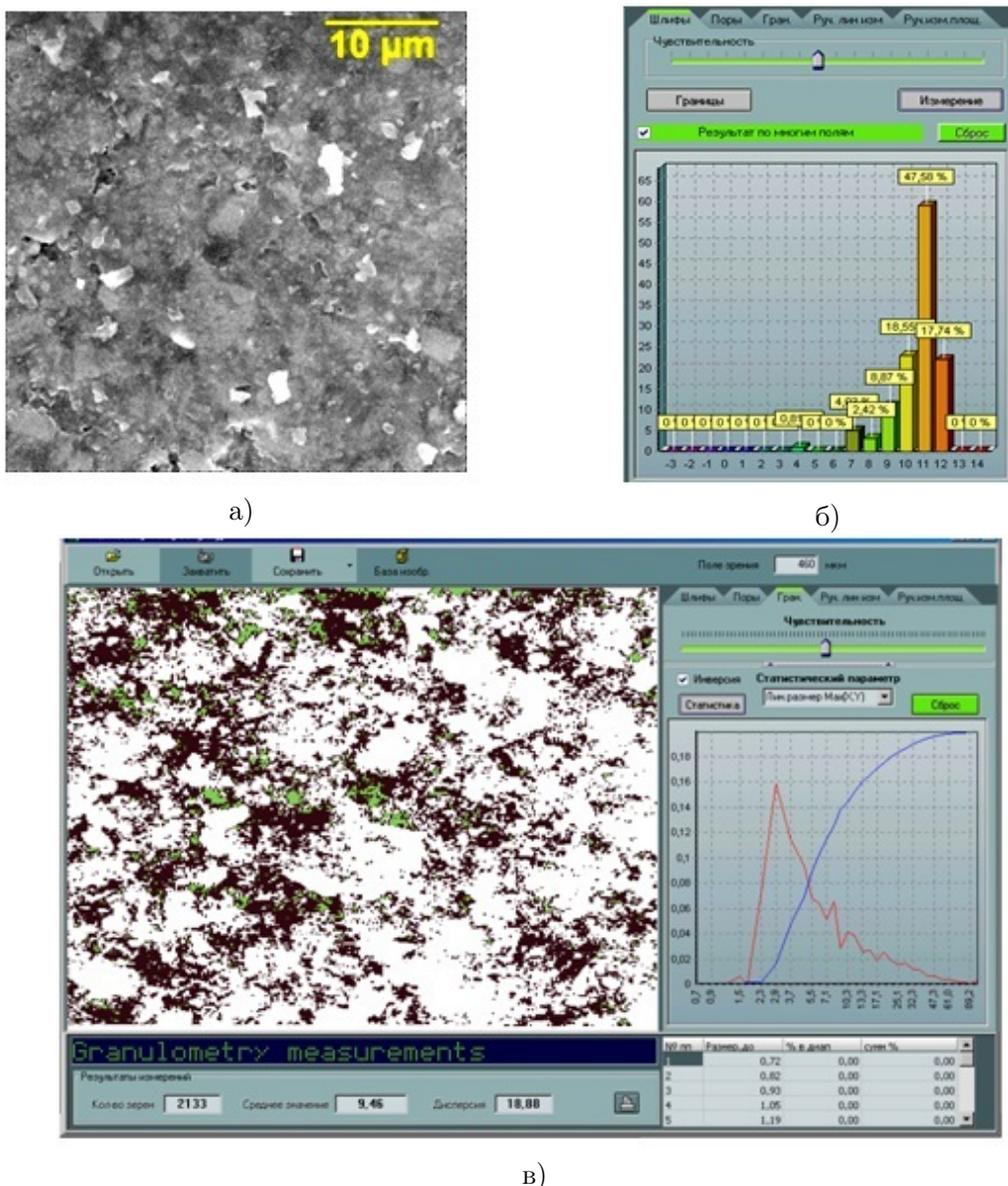


Рис. 6. Микроструктура обработанного образца при увеличении  $\times 10000$  (а), распределение агломератов по размерам (б) и размеры пор (в)

том числе на уровне нанокластеров, возможно увеличить число контактных точек в межфазном слое, а также «залечить» микродефекты, образовавшиеся при отверждении композиции, т.е. управлять свойствами готового материального объекта сложной структуры. В данном направлении целесообразно проведение дополнительных исследований для построения уточненного выявления механизмов взаимодействия СВЧ электромагнитного поля технологического диапазона параметров с неоднородными по физико-механическим, тепло- и электрофизическим свойствам материалам.

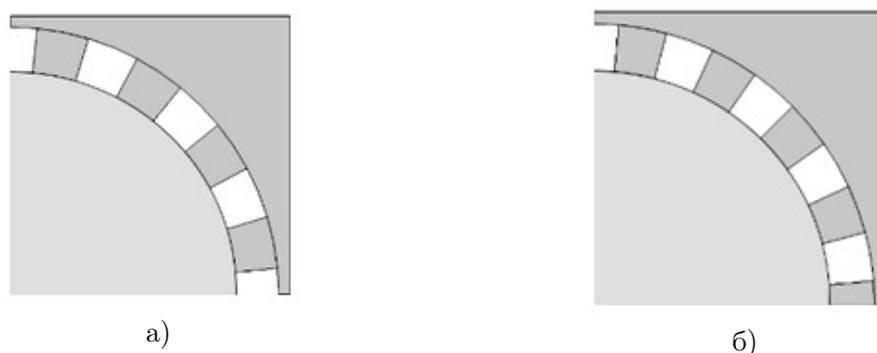


Рис. 7. Элементарная ячейка контрольного (а) и обработанного в СВЧ электромагнитном поле (б) образцов ПКМ

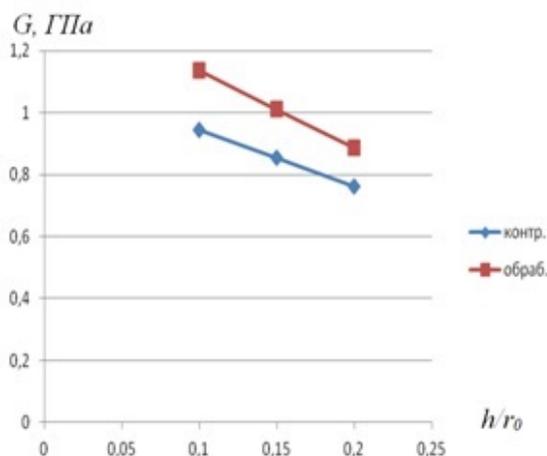


Рис. 8. Влияние СВЧ обработки на зависимость модуля сдвига  $G$  от толщины межфазного слоя  $h/r_0$

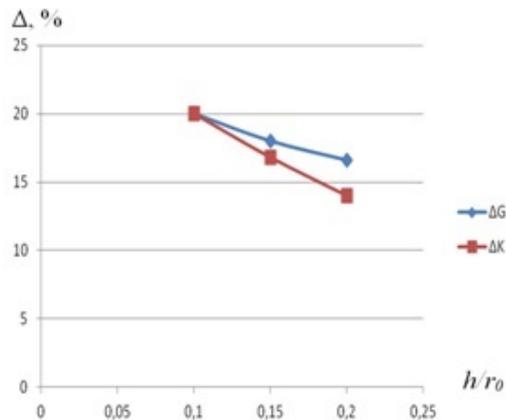


Рис. 9. Зависимость влияния СВЧ обработки на увеличение модуля сдвига  $\Delta G$  и объемного модуля  $\Delta K$  от толщины межфазного слоя  $h/r_0$

### Выводы

Выявлено значимое влияние изменений в микроструктуре межфазного слоя армированного волокнами ПКМ, произошедших в результате воздействия СВЧ электромагнитного поля, на его прочностные характеристики. На примере микроволновой обработки отвержденного армированного углеродными волокнами композиционного материала типа КМКУ-1.80.Э0,1 определено уменьшение пористости МФС на (45-47)% при одновременном уменьшении размеров пор на 80-83%, размеров агломератов матрицы - на 23%, и увеличение их количества на 15%. С использованием метода конечных элементов выполнены расчеты модуля сдвига и объемного модуля в МФС контрольного и обработанного в СВЧ электромагнитном поле образцов с учетом экспериментально выявленных изменений пористости и количества структурных элементов, определяющих число точек контактного взаимодействия в МФС

«матрица-волокно», показавшие увеличение указанных параметров соответственно на (20-16,7)% и (20-14)% с увеличением толщины МФС. Полученные результаты удовлетворительно совпадают с экспериментально установленными значениями увеличения прочности отвержденных ПКМ после обработки в СВЧ электромагнитном поле по напряжениям изгиба на (11-16)%, напряжениям среза – на (13-21)%, напряжениям межслоевого сдвига на (14-15)%.

Полученные теоретические и экспериментальные результаты могут быть положены в основу описания механизма повышения прочности отвержденных армированных волокнами ПКМ после их кратковременной обработки в СВЧ электромагнитном поле.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Каблов Е. Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // *Авиационные материалы и технологии*. 2015. №1 (34). С. 3–33.
- [2] Каблов Е. Н. *Материалы и химические технологии для авиационной техники* // *Вестник Российской академии наук*. 2012. Т. 82. №6. С. 520–530.
- [3] Архангельский Ю. С. *Справочная книга по СВЧ-электротермии: справочник*. Саратов : Научная книга, 2011. 560 с.
- [4] Коломейцев В. А., Кузьмин Ю. А., Никуйко Д. Н., Семенов А. Э. Экспериментальные исследования уровня неравномерности нагрева диэлектрических материалов и поглощенной мощности в СВЧ устройствах резонаторного типа // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2013. Т.18. №12. С. 25–31.;
- [5] Калганова С. Г. *Электротехнология нетепловой модификации полимерных материалов в СВЧ электромагнитном поле*. Дис... доктора тех.н. Саратов:Саратов. гос. тех. ун-т, 2009.
- [6] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The Influence of Microwave Electromagnetic Field on Mechanical Properties of Composite Materials // *Наукоемкие технологии*. 2016. Т. 17. № 2. С. 25–30.
- [7] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The influence of electromagnetic field microwave on physical and mechanical characteristics of CFRP (carbon fiber reinforced polymer) structural // *Solid State Phenomena*. 2016. V. 870. P. 101–106.
- [8] Zlobina I. V., Bekrenev, N. V. Muldasheva, G. K. Increasing of the endurance of polymeric construction materials with the multilevel hierarchical structure in the microwave electromagnetic field // *AIP Publishing*. 020236-1–020236-4.
- [9] Злобина И. В., Бекренев Н. В. Исследование микроструктуры конструкционных слоистых углепластиков, модифицированных путем электрофизических воздействий // *Вестник РГТУ*. 2017. № 1(40). С. 236 – 242.
- [10] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. *Осреднение процессов в периодических средах*. М.: Наука, 1984. 352 с.
- [11] Павлов С. П., Бодягина К. С. Применение метода асимптотического осреднения для расчета эффективных характеристик нанокompозитов // *Наноматериалы и нанотехнологии: проблемы и перспективы: сборник материалов IV Международной научной конференции для молодых ученых, студентов и школьников 25 февраля – 15 мая 2015 г. М: Прондо, 2015. С. 67 – 72.*
- [12] Yulu Wang *A Study on Microstructures of Homogenization for Topology Optimization*. Melbourne, Australia, 2003. 315 p.

I. V. Zlobina, K. S. Bodyagina, S. P. Pavlov, N. V. Bekrenev

**THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF THE EFFECT OF  
CHANGES IN THE PARAMETERS OF THE INTERPHASE ZONE OF THE  
CURED POLYMERIC COMPOSITE MATERIAL UNDER THE ACTION OF  
MICROWAVE RADIATION ON ITS STRENGTH CHARACTERISTICS**

*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

**Abstract.** Results of calculation of the effective module of shift and the effective volume module of elasticity of the polymeric composite materials (PCM) reinforced by fibers with use of a finite element method are given. It is shown that the value of the specified parameters generally is defined by heterogeneity and relative thickness of an interphase layer (MFS) "fiber matrix". At the same time increase in relative thickness of MFS practically doesn't influence the specified parameters in case of solidity of its structure. Existence of defects in the form of a time leads to decrease in both the shift module, and the volume module. The porosity influences reduction of the specified parameters more than MFS thickness: increase in relative thickness of a layer twice at porosity of 25% leads to decrease in modules of elasticity by (9-10) %, in too time at porosity of 75% similar increase in thickness of MFS decrease in modules of elasticity by 79%. It is established that at the same value of volume of defects (time) reduction of their sizes leads to increase in durability of MFS, expressed in growth of the module of shift by (14,6-23) % depending on thickness at almost invariable size of the volume module. The research by methods of electronic microscopy at increase h5000 microstructures of polymeric composite materials in the field of MFS after their interaction with the microwave oven by the electromagnetic field with a frequency of 2450 MHz within 2 minutes has revealed increase in density of structure of a matrix and interphase layer. The porosity in MFS has decreased by (45-47) % at simultaneous reduction of the sizes of a time by 80-83%, the sizes of agglomerates of a matrix have decreased by 23%, and their quantity has increased for 15%. The specified facts can promote improvement of adhesive interaction of fibers with a matrix. The finite element method has executed the calculations of the module of shift and the volume module taking into account the changes of a microstructure of MFS defined in an experiment which have shown increase in the specified PKM parameters after impact of the microwave oven of the electromagnetic field on (14-20) % that will well be coordinated with the results on increase in durability of PKM received earlier at tests on a bend – (11-16) %, a cut – (13-21) % and interlayered shift – (14-15) %. The revealed change of a microstructure of MFS which is shown in decrease in its porosity and increase in points of contact interaction due to growth of amount of fine agglomerates can be offered as one of mechanisms of increase in durability of the cured polymeric composite materials after influence of the microwave oven of the electromagnetic field.

**Keywords:** a microstructure, the microwave oven the electromagnetic field, a matrix reinforcing fiber, an interphase zone, a surface, density, agglomerates, porosity, the shift module, the volume module, a finite element method, modeling

---

*Zlobina Irina Vladimirovna*

e-mail: irinka\_7\_@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

*Bodyagina Kseniya Sergeevna*

e-mail: bodksen@mail.ru, Post Graduate, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

## REFERENCES

- [1] Kablov E. N. Innovacionnye razrabotki FGUP «VIAM» GNC RF po realizacii «Strategicheskikh napravlenij razvitiya materialov i tekhnologij ih pererabotki na period do 2030 goda» // Aviacionnye materialy i tekhnologii. 2015. №1 (34). S. 3–33. (in Russian)
- [2] Kablov E. N. Materialy i himicheskie tekhnologii dlya aviacionnoj tekhniki // Vestnik Rossijskoj akademii nauk. 2012. T. 82. №6. S. 520–530. (in Russian)
- [3] Arhangel'skij YU. S. Spravochnaya kniga po SVCH-ehlektrotermii: spravochnik. Saratov : Nauchnaya kniga, 2011. 560 s. (in Russian)
- [4] Kolomejcev V. A., Kuz'min YU. A., Nikujko D. N., Semenov A. EH. EHksperimental'nye issledovaniya urovnya neravnomernosti nagreva dielektricheskikh materialov i pogloshchennoj moshchnosti v SVCH ustrojstvakh rezonatornogo tipa // EHlektromagnitnye volny i ehlektronnye sistemy. 2013. T.18. №12. S. 25–31. (in Russian)
- [5] Kalganova S. G. EHlektrotekhnologiya neteplovoj modifikacii polimernyh materialov v SVCH ehlektromagnitnom pole. Dis... doktora tekhn. Saratov:Saratov. gos. tekhn. un-t, 2009. (in Russian)
- [6] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The Influence of Microwave Electromagnetic Field on Mechanical Properties of Composite Materials // Naukoemkie tekhnologii. 2016. T. 17. № 2. S. 25–30.
- [7] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. The influence of electromagnetic field microwave on physical and mechanical characteristics of CFRP (carbon fiber reinforced polymer) structural / // Solid State Phenomena. 2016. V. 870. P. 101–106.
- [8] Zlobina I. V., Bekrenev, N. V. Muldasheva, G. K. Increasing of the endurance of polymeric construction materials with the multilevel hierarchical structure in the microwave electromagnetic field // AIP Publishing. 020236-1–020236-4.
- [9] Zlobina I. V., Bekrenev N. V. Issledovanie mikrostruktury konstrukcionnyh sloistyh ugleplastikov, modifitsirovannyh putem ehlektrofizicheskikh vozdeystvij // Vestnik RGATU. 2017. № 1(40). S. 236 – 242. (in Russian)
- [10] Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednenie processov v periodicheskikh sredah. M.: Nauka, 1984. 352 s. (in Russian)
- [11] Pavlov S. P., Bodyagina K. S. Primenenie metoda asimptoticheskogo osredneniya dlya rascheta ehffektivnyh harakteristik nanokompozitov // Nanomaterialy i nanotekhnologii: problemy i perspektivy: sbornik materialov IV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii dlya molodyh uchenyh, studentov i shkol'nikov 25 fevralya – 15 maya 2015 g. M: Prondo, 2015. S. 67 – 72. (in Russian)
- [12] Yulu Wang A Study on Microstructures of Homogenization for Topology Optimization. Melbourne, Australia, 2003. 315 p.

---

*Pavlov Sergey Petrivich*

e-mail: ppsar@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

*Bekrenev Nikilay Valeryevich*

e-mail: nikolaj.bekrenev@yandex.ru, Dr. Sci. Tech., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia.

Е. А. Деревянных<sup>1</sup>, А. Н. Максимов<sup>1</sup>, Т. В. Митрофанова<sup>2</sup>

## К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ В СЛУЧАЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

<sup>1</sup> Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

<sup>2</sup> Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Основными элементами конструкций в некоторых отраслях современной техники являются однородные и неоднородные анизотропные стержни. Широкое распространение при этом в инженерной практике получают конструкции, изготовленные из композиционных материалов, обладающих анизотропией и неоднородностью. Новые композиционные материалы, созданные с использованием технологических способов, обеспечивают надежность конструкций и снижают себестоимость изделий. Актуальность статьи обусловлена тем, что многие элементы строительных машин и механизмов работают как на изгиб, так и на кручение. Работа посвящена решению некоторых задач кручения анизотропных однородных и неоднородных призматических стержней. В статье определено напряженно-деформированное состояние стержней и найдены линии разрыва напряжений. Полученные результаты могут быть применены при расчетах несущей способности конструкций и позволяют учитывать влияние анизотропии при определении предельных усилий при кручении.

**Ключевые слова:** анизотропия, кручение, предельное состояние, поле характеристик, линии разрыва, напряжение, стержень.

УДК: 539.374

Задачи кручения изотропных и анизотропных цилиндрических и призматических стержней рассмотрены в [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Рассмотрим составной прямоугольный анизотропный призматический стержень, разделенный на две области линией неоднородности  $DE$ , исходящей из вершины  $D$  (рис. 1, а). Ось  $z$  направим параллельно образующей стержня. Предположим, что стержень закручивается вокруг оси  $z$  равными и противоположными парами сил с

---

© Деревянных Е. А., Максимов А. Н., Митрофанова Т. В., 2018

*Деревянных Евгения Анатольевна*

**e-mail:** jane-evgeniya@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

*Максимов Алексей Николаевич*

**e-mail:** alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

*Митрофанова Татьяна Валерьевна*

**e-mail:** mitrofanova\_tv@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.09.2018

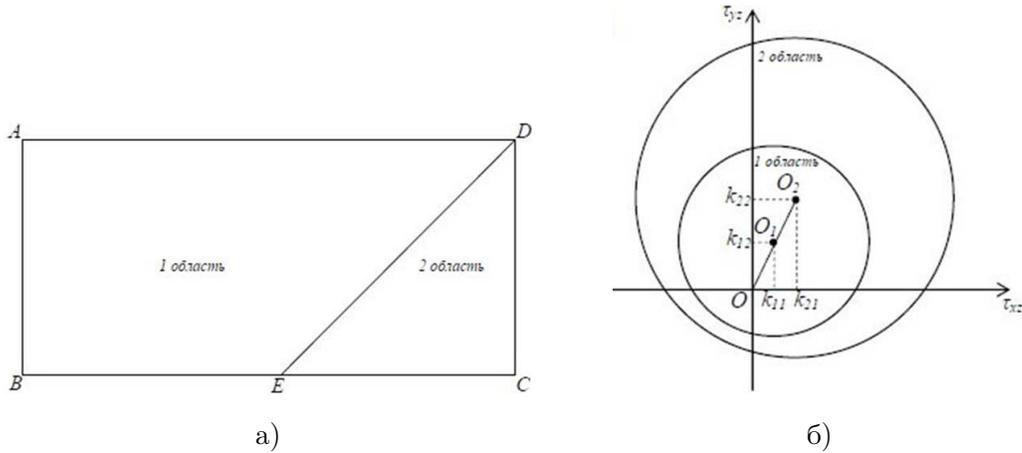


Рис. 1. Составной прямоугольный анизотропный призматический стержень, разделенный на две области линией неоднородности

моментом  $M$ . Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок. Влиянием массовых сил можно пренебречь.

Положим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  — нормальные и касательные напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям  $x, y, z$ . Условие пластичности в каждой области имеет вид

$$(\tau_{xz} - k_{i1})^2 + (\tau_{yz} - k_{i2})^2 = k_{i0}^2, \quad k_{i0}, k_{i1}, k_{i2} = \text{const}, \quad (2)$$

при этом  $k_{20} > k_{10}$ ,  $i = 1, 2$ . Отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине  $k_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ), и перейдем к безразмерным величинам. Условие (2) примет вид

$$(\tau_{xz} - k_{i1})^2 + (\tau_{yz} - k_{i2})^2 = 1, \quad (3)$$

где  $i = 1, 2$ . Положим в каждой области

$$\tau_{xz} = k_i(\theta) \cos \theta, \quad (4)$$

$$\tau_{yz} = k_i(\theta) \sin \theta, \quad (5)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad (6)$$

где  $i = 1, 2$ .

Согласно (4), (5) из (3) найдем

$$k_i(\theta) = \rho_i \cos(\theta - \mu_i) + \sqrt{1 - \rho_i^2 \sin^2(\theta - \mu_i)}, \quad k_i(\theta) > 0, \quad (7)$$

где

$$\rho_i = \sqrt{k_{i1}^2 + k_{i2}^2}, \quad \frac{k_{i1}}{\rho_i} = \cos \mu_i, \quad \frac{k_{i2}}{\rho_i} = \sin \mu_i, \quad \text{tg } \mu_i = \frac{k_{i2}}{k_{i1}}, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение равновесия при кручении имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{9}$$

Подставляя выражения (4), (5) в уравнение равновесия (9), получим

$$(k'_i \cos \theta - k_i \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k'_i \sin \theta + k_i \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

где

$$k'_i = \frac{dk}{d\theta}, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Соответствующие уравнения для определения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{k'_i \cos \theta - k_i \sin \theta} = \frac{dy}{k'_i \sin \theta + k_i \cos \theta} = \frac{d\theta}{0}, \tag{12}$$

где  $i = 1, 2$ . Из уравнения (12) следует, что характеристики уравнений (10) примут вид

$$y_i = \frac{k'_i \sin \theta + k_i \cos \theta}{k'_i \cos \theta - k_i \sin \theta} x + \Phi_i(\theta), \quad \theta = \text{const}, \tag{13}$$

где  $i = 1, 2$ . Из уравнения (13) следует, что характеристики являются прямыми линиями, вдоль которых касательные напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  постоянны.

На рис. 2 представлен случай кручения прямоугольных анизотропных стержней, разделенных на две области линией неоднородности  $DE$ , исходящей из вершины  $D$ .

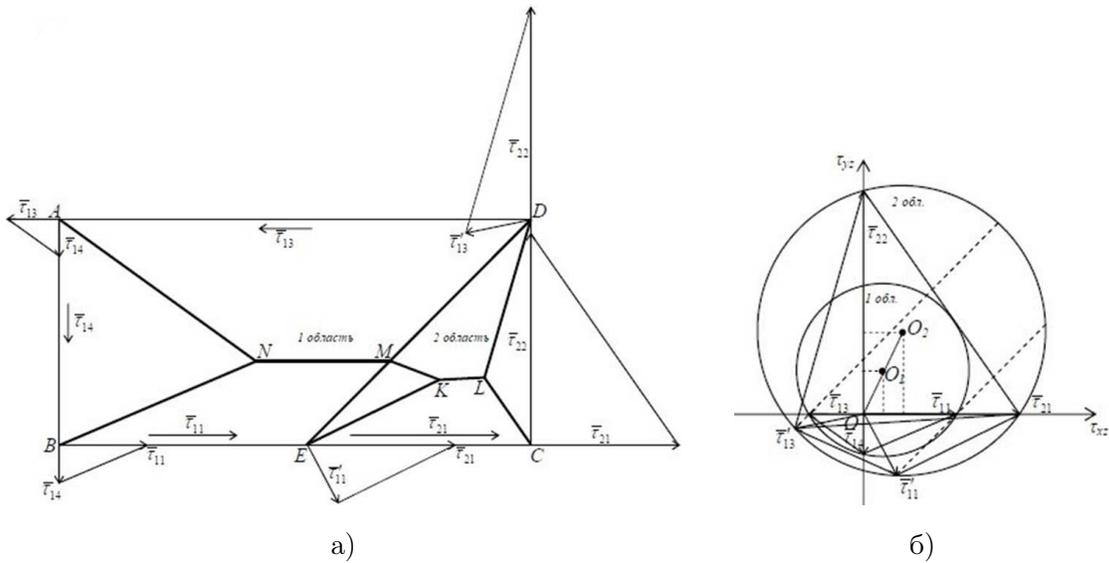


Рис. 2. Кручение прямоугольных анизотропных стержней, разделенных на две области линией неоднородности  $DE$

В каждой области определим линии разрыва напряжений.

На линии неоднородности  $DE$  должно выполняться условие сопряжения векторов касательных напряжений. Направляющий вектор линии разрыва  $AN$  первой области равен разности векторов касательных напряжений  $\bar{\tau}_{13}$  и  $\bar{\tau}_{14}$ , направляющий вектор

линии разрыва  $BN$  — разности векторов  $\bar{\tau}_{14}$  и  $\bar{\tau}_{11}$ . Линии разрыва  $AN$  и  $BN$  пересекаются в точке  $N$ . В силу сопряжения векторов касательных напряжений  $\bar{\tau}_{11}$  и  $\bar{\tau}_{13}$  имеем линию разрыва  $NM$  первой области, исходящую из точки параллельно прямой  $AD$ . Линия разрыва пересекает линию разрыва  $DE$  в точке  $M$ .

Направляющий вектор линии разрыва  $CL$  второй области равен разности векторов касательных напряжений  $\bar{\tau}_{22}$  и  $\bar{\tau}_{21}$ . В силу сопряжения векторов касательных напряжений в плоскости  $DMKL$  второй области действует вектор касательного напряжения  $\bar{\tau}'_{13}$ . Направляющий вектор линии разрыва  $DL$  равен разности векторов касательных напряжений  $\bar{\tau}'_{13}$  и  $\bar{\tau}_{22}$ . Линии разрыва напряжений  $CL$  и  $DL$  пересекаются в точке  $L$ . Линия разрыва  $KL$  исходит из точки  $L$  параллельно направляющему вектору, равному разности векторов касательных напряжений  $\bar{\tau}'_{13}$  и  $\bar{\tau}_{21}$ . В силу сопряжения векторов касательных напряжений в плоскости  $EMK$  второй области действует вектор касательного напряжения  $\bar{\tau}'_{11}$ . Направляющий вектор линии разрыва  $EK$  второй области равен разности векторов касательных напряжений  $\bar{\tau}_{21}$  и  $\bar{\tau}'_{11}$ . Линия разрыва  $MK$  исходит из точки  $M$  параллельно направляющему вектору, равному разности векторов касательных напряжений  $\bar{\tau}'_{11}$  и  $\bar{\tau}'_{13}$ . Линии разрыва  $MK$ ,  $LK$ ,  $EK$  пересекаются в точке  $K$ .

Таким образом, в каждой области найдены векторы касательных напряжений, характеристики соотношений, определяющих напряженно-деформированное состояние тела, и построены линии разрыва напряжений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Деревянных Е. А. О предельном состоянии кусочно-неоднородных анизотропных призматических стержней полигонального сечения при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1(11). С. 75–80.
- [2] Деревянных Е. А. Предельное состояние анизотропных призматических кусочно-неоднородных стержней при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 3(13). С. 72–79.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
- [4] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч. 3. С. 576–579.
- [5] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. 2011. № 4(72). С. 57–60.
- [6] Митрофанова Т. В. О предельном состоянии анизотропных призматических стержней при кручении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч. 3. С. 601–609.

*Е. А. Derevyannih<sup>1</sup>, А. N. Maksimov<sup>1</sup>, Т. V. Mitrofanova<sup>2</sup>*

## TO A QUESTION OF TORSION OF NON-UNIFORM PRISMATIC CORES IN CASE OF TRANSMITTING ANISOTROPY

<sup>1</sup>*Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia*

<sup>2</sup>*I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** Basic elements of designs in some branches of the modern equipment are uniform and non-uniform anisotropic cores. At the same time in engineering practice the designs made of the composite materials having anisotropy and heterogeneity are widely adopted. The new composite materials created with an ipolzovaniye of technological ways provide reliability of designs and reduce себестоимость products. The relevance of article is caused by the fact that many elements of construction cars and mechanisms work both for a bend, and for torsion. Work is devoted to the solution of some problems of torsion of anisotropic uniform and non-uniform prismatic cores. In article the intense deformed condition of cores is defined and lines of a rupture of tension are found. The received results can be applied when calculating of the bearing ability of designs and allow to consider influence of anisotropy when determining limit efforts at torsion.

**Keywords:** anisotropy, torsion, limit condition, field of characteristics, lines of a gap, tension, core.

### REFERENCES

- [1] Derevyannyh E. A. O predel'nom sostoyanii kusochno-neodnorodnyh anizotropnyh prizmaticheskikh sterzhnej poligonal'nogo secheniya pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2012. № 1(11). S. 75–80. (in Russian)
- [2] Derevyannyh E. A. Predel'noe sostoyanie anizotropnyh prizmaticheskikh kusochno-neodnorodnyh sterzhnej pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2012. № 3(13). S. 72–79. (in Russian)
- [3] Ivlev D. D. Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 231 c. (in Russian)
- [4] Ivlev D. D., Mironov B. G. O sootnosheniyah translyacionnoj ideal'noplasticheskoy anizotropii pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2010. № 2(8). CH. 3. S. 576–579. (in Russian)
- [5] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Deformirovannoe sostoyanie translyacionno-anizotropnyh tel pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. 2011. № 4(72). S. 57–60. (in Russian)
- [6] Mitrofanova T. V. O predel'nom sostoyanii anizotropnyh prizmaticheskikh sterzhnej pri kruchenii // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2010. № 2(8). CH. 3. S. 601–609. (in Russian)

---

*Dereviannih Evgeniya Anatolyevna*

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

*Maksimov Aleksey Nikolaevich*

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

*Mitrofanova Tatjana Valeryevna*

e-mail: mitrofanova\_tv@mail.ru, Ph. D., I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

С. Г. Жилин, Н. А. Богданова, О. Н. Комаров

## ВЛИЯНИЕ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА И СКОРОСТИ ВЫДАВЛИВАНИЯ ВОСКООБРАЗНОЙ КОМПОЗИЦИИ НА ГЕОМЕТРИЮ ДЛИННОМЕРНОЙ ПРЕССОВКИ ПРИ МУНДШТУЧНОМ ЭКСТРУДИРОВАНИИ

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

**Аннотация.** Основной проблемой при изготовлении изделий деформированием порошков, состоящих из воскообразных материалов, применяемых для получения литейных выплавляемых моделей, является отсутствие однородности физико-механических свойств получаемой прессовки, результатом которой является неравномерный упругий отклик уплотненного материала. В работе приведены результаты экспериментального определения параметров процесса получения длинномерного элемента прессовки мундштучным выдавливанием. Определено, что изменением фракционного состава уплотняемых материалов и скорости перемещения пресс-пуансона возможно регулирование конечных свойств длинномерных прессовок из ряда воскообразных материалов с целью получения прогнозируемых значений их упругого отклика. На основе экспериментальных данных предложены варианты решения проблемы упругого отклика прессовок. Получение длинномерного элемента прессовки с наиболее равномерным упругим откликом позволяет прогнозировать точность и учитывать ее размерные параметры при проектировании пресс-оснастки.

**Ключевые слова:** нагрузка, прессовка, напряженно-деформированное состояние, прессование, пористость, воскообразные материалы, размерно-геометрическая точность, упругий отклик, пресс-матрица

УДК: 621.74.045

---

© Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н., 2018

*Жилин Сергей Геннадьевич*

**e-mail:** zhilin@imim.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

*Богданова Нина Анатольевна*

**e-mail:** joyful289@inbox.ru, младший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

*Комаров Олег Николаевич*

**e-mail:** olegnikolaevitsch@ Rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00

Поступила 11.09.2018

Особенностью получения литых изделий является фазовый переход материала, формирующего тело отливки. Твердый материал, вне зависимости от его химического состава и структуры, претерпевает изменение формы в результате теплового воздействия при расплавлении и последующем охлаждении. Геометрия получаемого изделия во многом определяется параметрами этого теплового воздействия и может быть с достаточной степенью вероятности просчитана при помощи известных пакетов прикладных программ [1]. Диапазон значений температур нагрева материала выше температуры его плавления, как правило, влияет на размер открытой усадочной раковины или внутренней газовой поры, формирующейся при переходе материала из жидкого фазового состояния в твердое [2]. Такие дефекты приводят к нарушению геометрии изделия, снижению его плотности, а, следовательно, прочностных и эксплуатационных характеристик [3, с.14-15]. При проектировании технологии получения изделий литьем закладывается фактор их разнотолщинности, который определяет время охлаждения расплава в различных частях изделия и вероятность появления неоднородности структуры литого изделия. Возникающие при затвердевании отливок остаточные напряжения вызывают коробление стенок или появление трещин [4, с.22-24]. На практике задача управления процессом формирования геометрии литого изделия решается рядом способов, среди которых: регулирование температуры заливки расплава материала в форму и скорости его охлаждения, обеспечение направленного затвердевания отливки. Первый вариант не является универсальным, т.к. материалы существенно отличаются по химическому составу, структуре и физическим свойствам, что влияет на интервал температур кристаллизации и позволяет решить проблему геометрии лишь частично. Второй вариант осуществляется в процессах т.н. литья намораживанием, которое может быть реализовано, например, центробежным способом [5, с.5-6]. Охлаждение корки материала в этом случае позволяет значительно сократить сжимающие изделие напряжения, что обеспечивается его пустотелостью. Однако полностью устранить усадочные дефекты при таком способе формирования поверхности не представляется возможным.

При формировании заготовок под давлением, либо запрессовкой порошкового материала, преимущественно с нагревом последнего, реализуется возможность получения изделий без усадочных пор. Однако, наличие остаточных напряжений в теле уплотненного порошкового изделия, как правило, приводит к упругому возврату материала после снятия нагрузки и остывания прессовки.

Несколько сократить упругий отклик материала прессовки возможно в процессе «холодного» уплотнения его порошка. При таком способе влияние температурного фактора на изменение геометрии прессовки при остывании материала сводится к минимуму. Однако вероятность упругого отклика материала остается высокой. Поиск вариантов управления величиной упругого отклика материала прессовки определяет актуальность проведенных исследований, имеющих широкий спектр практического применения. Например, при получении отливок повышенной размерно-геометрической точности методом литья по выплавляемым моделям последние изготавливают «холодным прессованием» порошков воскообразных модельных составов в жестких пресс-матрицах [6, с.28]. При уплотнении порошок модельной композиции пластифицируется под действием нагрузки, межчастичного трения и трения уплотняемого материала о стенки пресс-матрицы. В результате поверхность уплотненного изделия приобретает конфигурацию формообразующей поверхности пресс-матрицы. Свободный выход заблокированного в порах уплотняемого материала и находящегося под давлением

воздуха, затрудняется. При разгрузке материала уплотненной прессовки после раскрытия формообразующих элементов пресс-матрицы появляется упругий отклик, являющийся следствием суммарной релаксации воздуха и уплотненного воскообразного материала. Таким образом, для прессовок с сопоставимым соотношением размеров длин сторон величина упругого отклика в направлении продольном приложению давления прессования составляет  $0,7 \div 1,2$  %, а в поперечном  $0,4 \div 0,5$  %. Такой способ получения выплавляемой модели, безусловно, наиболее предпочтителен в сравнении с ее изготовлением свободной заливкой материала в пресс-форму, т.к. ее размеры искажаются значительно меньше. Так, например, величина объемной усадки для ряда воскообразных материалов достигает  $8 \div 10$  % при условии, что температура их заливки незначительно превышает температуру плавления материала.

При получении выплавляемых моделей простой конфигурации прессованием порошков воскообразных композиций, в принципе, можно было бы завершить исследование, ограничившись набором экспериментальных данных, позволяющих учитывать величину упругого возврата уплотненного материала при проектировании размеров пресс-матрицы. Однако, при изготовлении комбинированных литейных моделей сложной пространственной конфигурации [7, с.8] из алюмотермитной и воскообразной смеси, на прессовку которой производят на значительно более плотный модельный блок, прогнозировать размерно-геометрические параметры получаемого изделия становится затруднительно. На прессовку воскообразного компонента в этом случае производят в зазор между формообразующей полостью пресс-матрицы и алюмотермитным блоком для получения на нем поверхности, соответствующей по размерам готовому литому изделию. Поиск наиболее предпочтительных вариантов, с точки зрения получения прессовок с низким уровнем упругого отклика, из воскообразных материалов с различными теплофизическими характеристиками и фракциями определяет актуальность проводимых исследований.

Исходя из отмеченного выше, целью настоящей работы стало исследование влияния гранулометрического состава и скорости выдавливания воскообразных композиций, отличающихся фракцией и теплофизическими свойствами, на геометрию длинномерного элемента прессовки при мундштучной экструзии.

Для реализации поставленной цели решались следующие задачи:

- определение реальных температур плавления воскообразных материалов, применяемых для получения длинномерных элементов прессовок;
- определение предельной нагрузки, необходимой для выдавливания воскообразных материалов различных фракций из мундштука при постоянной скорости перемещения пресс-пуансона;
- определение предпочтительных фракций и скорости экструдирования материалов для получения длинномерной прессовки с минимальным значением упругого отклика.

Реализации целей и задач исследования в качестве уплотняемого порошкового тела были выбраны 2 воскообразных материала, относящийся к 1 классификационной группе [8, с.119]. Первый представляет собой парафин марки Т1 (по ГОСТ 23683-89. Парафины нефтяные твердые. Технические условия). Т1 имеет плотность при свободной заливке  $0,86 \text{ г/см}^3$  с учетом распределенной пористости). Второй - ПС 50/50, представляющий собой двухкомпонентную композицию с равным содержанием парафина и стеарина (по ГОСТ 6484-96. Кислота стеариновая техническая. Технические

условия), полученную их сплавлением. В производственной практике стеарин сплавляют с парафином для улучшения его реологических характеристик, а именно пластичность и прочность. Интересным представляется факт образования эвтектического сплава ПС 50/50 с температурой плавления отличной от температур плавления ее составляющих. Температуры плавления определялись с помощью дифференциально-термического анализатора Shimadzu DTG-60H в ходе нагрева материалов со скоростью  $2^{\circ}\text{C}/\text{мин}$  и составили для Т1  $60^{\circ}\text{C}$ , для стеарина  $58^{\circ}\text{C}$ , а для сплава ПС 50/50  $52^{\circ}\text{C}$ . Материалы Т1 и легкоплавкий ПС50/50 использовались в эксперименте в виде фракций хлопьевидной формы, полученной рассевом ситовым методом с использованием сит модели 026 по ГОСТ 29234.3-91 «Пески формовочные. Метод определения среднего размера зерна и коэффициента однородности». Предварительными экспериментами установлен технологически допустимый диапазон размеров частиц воскообразного компонента, составляющий  $0,63 \div 2,5$  мм [9]. Применение фракции менее  $0,63$  мм технологически нецелесообразно ввиду незначительного количества материала, остающегося на ситах после отсева. Применение фракции материала более  $2,5$  мм не позволяет осуществить операцию заполнения протяженных поднутрений пресс-матрицы, формирующей выплавляемую модель. На рис.1,а и рис.1,б представлен внешний вид сплава ПС 50/50 фракций  $0,63$  мм и  $2,5$  мм соответственно. Отмеченные выше эвтектические свойства сплава ПС 50/50 подтверждаются не только меньшей температурой плавления относительно температур его компонентов, но и меньшей величиной усадки. На рис.1,в представлена стеклянная колба, заполненная сплавом ПС 50/50 с усадочной раковиной.



Рис. 1. Внешний вид фракций материала ПС 50/50 и усадочной раковины.

Объемную усадку сплавов на основе Т1 и стеарина определяли следующим образом: в колбу с внутренним объемом  $60 \text{ см}^3$  заливали (до верхней кромки колбы) разогретый до  $60^{\circ}\text{C}$  расплав воскообразного материала, содержащий стеарин и парафин в диапазоне  $0 \div 100\%$  по массе; колбу с расплавом охлаждали до температуры  $20^{\circ}\text{C}$  и после погружения в тарированный сосуд с водой определяли величину объемной усадки по количеству вытесненной воды. На рис.2 представлена зависимость объемной усадки воскообразного сплава с диапазоном содержания стеарина и парафина  $0 \div 100\%$  по массе.

На рис.2  $0\%$  содержания парафина соответствует  $100\%$  содержания стеарина. Из рис.2 видно, что объемная усадка эвтектического легкоплавкого материала ПС 50/50

и композиции ПС 80/20 составляет немногим более 4%. Таким образом, предположительно, равные значения упругого отклика для парафина и ПС 50/50 достигаются при различных скоростях перемещения пресс-пуансона и, следовательно, различных скоростях экструзии. Это утверждение нуждается в экспериментальной проверке

Экспериментальная часть исследования осуществлялась при помощи тестовой машины AG-Xplus фирмы SHIMADZU. Тестовая машина обеспечивает отклонение от задаваемого значения нагрузки в интервале  $0 \div 100$  кН не более 0,03% [10, с.6]. На рабочий стол машины устанавливалась пресс-матрица 1 (графическое поле рис.3), выполненная из стали, что позволяет осуществлять регистрацию нагрузки пренебрегая деформацией материала пресс-матрицы, считая ее упругим телом. Пресс-матрица имеет цилиндрическую внутреннюю поверхность с диаметром 45 мм. Донная часть пресс-матрицы снабжена крышкой 2 с мундштуком, как показано на рис.3. Конструкции крышки и мундштука позволяет обеспечить условие затрудненного выдавливания пластифицирующегося материала. Внутренний диаметр мундштука составляет 9 мм, что обеспечивает отношение площадей сечений деформируемой порошковой композиции и получаемой длинномерной прессовки 25 к 1. Такое отношение площадей гарантированно обеспечивает экструзию материала, претерпевшего нагрузку в ходе уплотнения, при котором происходит его пластификация. В пресс-матрицу помещали порошок модельной композиции 4 и при перемещении пресс-пуансона 3 осуществляли ее выдавливание из мундштука. Скорость перемещения пресс-пуансона в каждом эксперименте оставалась постоянной, но изменялась в ходе серии экспериментов в интервале значений  $0,25 \div 1,5$  мм/с.

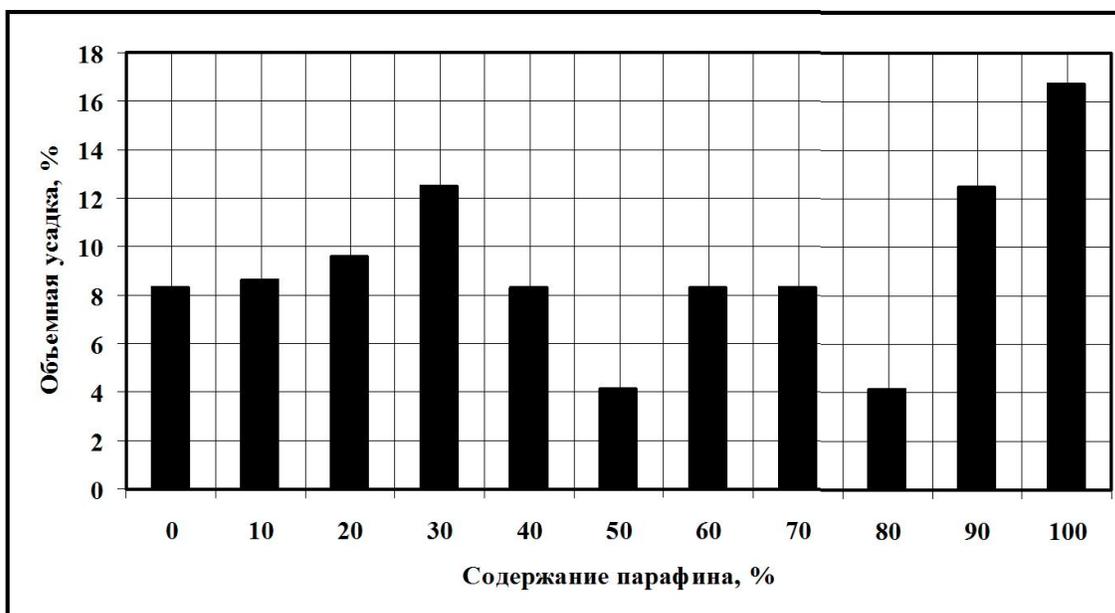


Рис. 2. Объемная усадка воскообразного сплава

В процессе получения длинномерной прессовки из воскообразного материала можно выделить следующие этапы:

- уплотнение материала в пресс-матрице, в ходе которого при перемещении пресс-пуансона происходит увеличение нагрузки;
- ламинарное истечение уплотненного материала, при котором начинается экструзия уплотненной воскообразной модельной массы из мундштука пресс-матрицы (характеризуется пиковым значением нагрузки);
- турбулентное истечение пластифицированного материала (поскольку в нашем случае скорость перемещения пресс-пуансона в каждом отдельном эксперименте не изменялась, то эта стадия не исследовалась).

Традиционное графическое отображение напряженно-деформированного состояния нагружаемого объекта в координатах «напряжение-деформация» в нашем случае использовать некорректно. При изменяющейся нагрузке (в ходе экструзии пластифицированного воскообразного материала через мундштук) и постоянной скорости перемещения пресс-пуансона корректно рассматривать систему в осях координат «нагрузка-перемещение».

В ходе предварительных экспериментов, проведенных при помощи описанного выше устройства, установлена предпочтительная скорость перемещения пресс-пуансона 0,5 мм/с при выдавливании материала Т1 фракции 0,63 мм [6, с.30-31], которая позволяет обеспечить минимальные значения упругого отклика длинномерной прессовки. Такая скорость перемещения пресс-пуансона обеспечивает фактическую скорость экструзии воскообразного материала равную 12 мм/с. На рис. 3 представлены зависимости нагрузки, возникающей на пресс-пуансоне от его перемещения при формировании длинномерной прессовки из материалов Т1 и ПС 50/50 фракций 0,63 и 2,5 мм через мундштук (диффузор).

Из рис.3 видно, что при одинаковых скоростях перемещения пресс-пуансона в процессе выдавливания воскообразных материалов, возникающие нагрузки существенно отличаются и зависят как от фракции материала, так и от его состава. Например, для модельной массы ПС 50/50 фракции 0,63 мм при скорости экструзии 12 мм/с величина нагрузки составляет 20 кН. Нагрузка, возникающая при экструзии эвтектического материала ПС 50/50 в среднем на 32 – 35 % меньше, чем в случае с Т1. При этом участки зависимостей, характеризующих изменение нагрузки от перемещения на стадии выдавливания ПС 50/50, отклоняются от параллельности оси абсцисс в большей мере, чем при выдавливании Т1. Такое падение нагрузки свидетельствует о протекании процесса плавления ПС 50/50 в ходе экструзии и неверном выборе ее скорости.

С увеличением скорости перемещения пресс-пуансона до 1,5 мм/с скорость экструзии возрастает до 36 мм/с, а значение нагрузки увеличивается более чем на 25 % и составляет 25 кН. Аналогично для других материалов. При увеличении скорости перемещения пресс-пуансона до 1,5 мм/с пластификация Т1 фракции metricconverterProductID0,63 мм0,63 мм происходит при величине нагрузки на 30% большей, чем при уплотнении со скоростью перемещения пресс-пуансона 0,5 мм/с. В случае с материалами Т1 и ПС 50/50 фракции 2,5 мм увеличение нагрузки составляет 6%, и 8% соответственно. После начала экструзии происходит незначительное падение нагрузки и выход на стационарный режим выдавливания. На этом этапе для всех исследуемых воскообразных материалов разница в величинах нагрузок, соответствующих началу пластификации и выходу на стационарный режим, не превышает 10%.

Неправильный выбор скорости перемещения пресс-пуансона и, следовательно, скорости экструзии материала, неизменно должно сопровождаться нарушением геометрии получаемой длинномерной прессовки в виде усадки материала при его остывании или упругом отклике после релаксации.

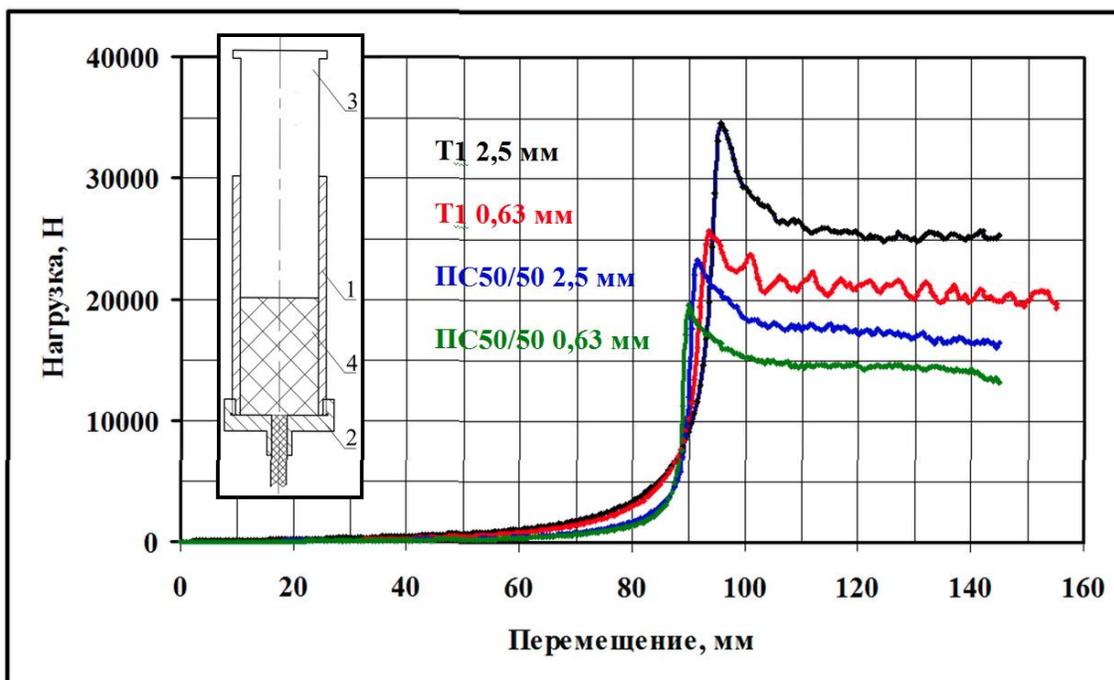


Рис. 3. Зависимость нагрузки от перемещения при скорости экструзии 12 мм/с и схема экструзии модельной композиции через мундштук: 1 – цилиндрическая пресс-матрица; 2 – крышка с мундштуком; 3 – пресс-пуансон.

Фиксация геометрических параметров осуществляли через каждые 50 мм по длине получаемой прессовки при помощи цифрового регистратора DIN 863 Vogel, обеспечивающего точность измерения 0,001 мм. Отклонение значений диаметров прессовки в местах измерений от внутреннего диаметра мундштука в положительную или отрицательную сторону позволяет регистрировать упругий отклик или усадку материала. Величину таких отклонений можно определить по формуле:

$$O = ((A_M - A_{\Pi}) / A_{\Pi}) \cdot 100\%,$$

где  $O$  – величина отклонения, %;  $A_M$  и  $A_{\Pi}$  – контролируемые размеры внутреннего диаметра мундштука и внешнего диаметра длинномерной прессовки соответственно, мм.

На рис. 4 приведены средние значения отклонений размеров длинномерных прессовок круглого сечения, сформированных при мундштучном выдавливании в зависимости от скорости экструзии, фракции и вида воскообразного материала.

Из рис.4 видно, что скорость перемещения пресс-пуансона в значительной степени влияет на значение скорости экструзии, при которой, в свою очередь, создаются различные теплофизические условия формирования длинномерной прессовки, определяющие величину отклонения ее диаметра от внутреннего размера формообразующего мундштука.

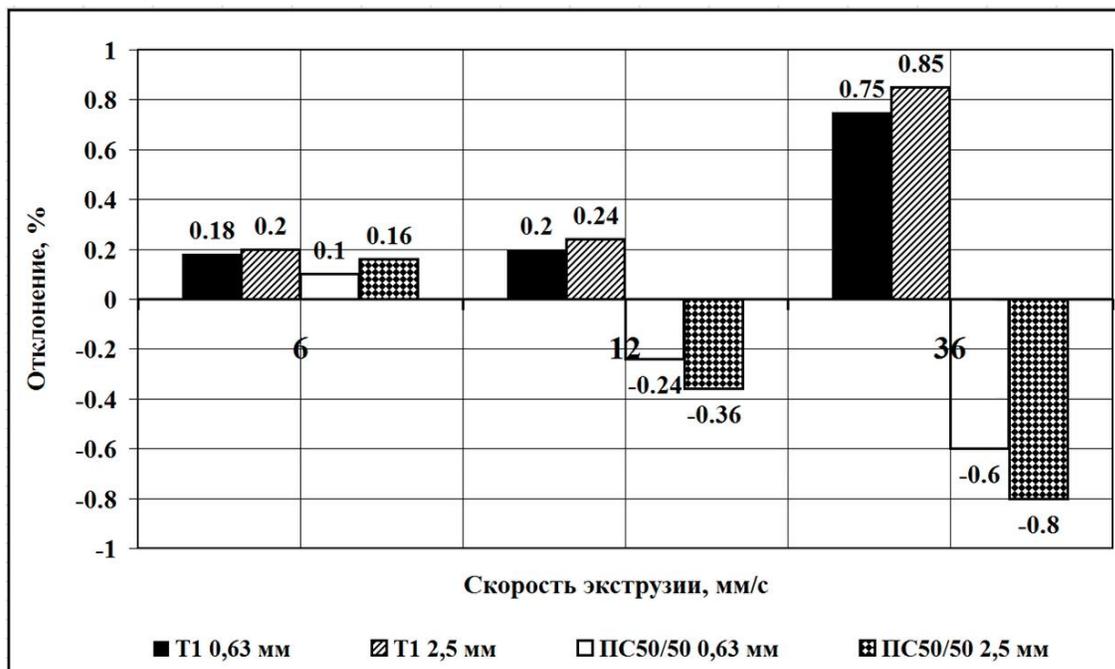


Рис. 4. Зависимость отклонений размеров длинномерной прессовки от скорости экструзии воскообразных материалов через мундштук.

Видно, что для материала T1 наиболее технологически приемлемой является скорость диффузии, соответствующая 6 мм/с. Увеличение скорости диффузии T1 приводит к значительному росту отклонения размеров прессовки от внутренних размеров мундштука, а снижение скорости существенно не влияет геометрические показатели получаемой прессовки. Для более легкоплавкого материала ПС 50/50 скорость экструзии более 6 мм/с является неприемлемой вследствие локального нагрева материала до температур, вызывающих усадочные явления в длинномерной прессовке после ее охлаждения. При получении изделий в пресс-матрицах с конструкцией, предполагающей совмещение образующих частей форм, фракция влияет на размерно-геометрические параметры и качество поверхности изделия и, безусловно, оказывает влияние на формирование теплофизических условий его получения. Однако, как видно из рис.4, фракция используемого материала, при формировании длинномерной прессовки выдавливанием, в целом, оказывает меньшее влияние, чем скорость экструзии и реологические свойства материала.

Таким образом, можно сделать вывод, что для всех исследуемых материалов с увеличением фракции выдавливаемого материала и (или) скорости перемещения пресс-пуансона нагрузка, создаваемой на нем возрастает. Для получения прогнозируемых

размеров длинномерной прессовки выдавливанием воскообразного компонента решающее значение имеет химический состав материала, определяющий теплофизические условия формирования прессовки.

Полученные в ходе исследования экспериментальные данные позволяют регулированием скорости экструзии, в зависимости от используемого модельного материала, получать в процессе его уплотнения протяженные элементы прессовок с минимальными отклонениями от формообразующих размеров мундштука, что позволит значительно повысить размерно-геометрическую точность конечных изделий.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1]. Сушко Т. И., Бучнев А. В., Турищев В. В., Пашнева Т. В. Моделирование процессов затвердевания крупногабаритной стальной корпусной отливки с совершенствованием технологии изготовления // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6. № 12. С. 44–47.

[2]. Кульбовский И. К., Карелин С. В., Попов Е. В., Туркин Д. А. Компьютерное моделирование процессов затвердевания и охлаждения массивных отливок из чугуна в литейной форме // Вестник Брянского государственного технического университета. 2008. № 2. С. 23–26.

[3]. Назаратин В. В. Технология изготовления стальных отливок ответственного назначения. М.: Машиностроение, 2006. 234 с.

[4]. Садова А. Н., Дебердеев Т. Р., Кузнецова О. Н., Стоянов О. В. Проблемы выявления и устранения возможных дефектов в процессе получения изделий из термопластов: учебное пособие. Казань : Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 2009. 123 с.

[5]. Юдин С. Б., Левин М. М., Розенфельд С. Е. Центробежное литье. М., «Машиностроение», 1972. 280 с.

[6]. Жилин С. Г., Комаров О. Н., Соснин А. А., Богданова Н. А. Влияние упругого отклика на размерно-геометрические характеристики протяженной прессовки, полученной из воскообразного материала мундштучным выдавливанием // Вестник ПНИПУ. Машиностроение. Металлургия. 2018. Т.20. №2. С. 27–34.

[7]. Жилин С. Г., Комаров О. Н., Соснин А. А., Предеин В. В. Получение литья повышенной размерной точности по комбинированным литейным моделям из алюмотермитных и воскообразных смесей // Заготовительные производства в машиностроении. 2016. №11. С. 6–11

[8]. Гаранин В. Ф., Иванов В. Н., Казеннов С. А. и др. Литье по выплавляемым моделям /под общ. ред. В.А. Озерова. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1994. 448 с.

[9]. Жилин С. Г., Комаров О. Н., Соснин А. А. Панченко Г. Л. Способ изготовления выплавляемых моделей. Патент РФ № 2632051 Способ изготовления выплавляемых моделей / Заявл. 13.05.2016; Оpubл. 02.10.2017. Бюл. №28

[10]. Жилин С. Г., Комаров О. Н., Потянихин Д. А., Соснин А. А. Экспериментальное определение параметров регрессионной зависимости Кольрауша для пористых прессовок из воскообразных порошковых композиций //Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. Вып. 2. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-2-1732>

S. G. Zhilin, N. A. Bogdanova, O. N. Komarov

## INFLUENCE OF GRANULOMETRIC COMPOSITION AND EXTRUSION RATIO OF THE WAXY MATERIALS ON THE GEOMETRY OF EXTENDED COMPACT BY EXTRUSION FORMING

*Institute of Machinery and Metallurgy of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,  
Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation*

**Abstract.** The main problem at manufacturing products by deformation of waxy powder materials used to produce investment patterns is the lack of uniformity of physical-mechanical properties of the resulting compact, which results in an uneven elastic response of the compacted material. The results of experimental determination of the parameters of the process of obtaining an extended compact by extrusion forming are given in the paper. It is determined, that change of fractional composition of materials and velocity of movement of a punch can regulate final properties of extended compact for obtaining the predicted values of their elastic response. The solution variants of problem of elastic response are proposed on the basis of experimental data. Obtaining an extended compact element with the most uniform elastic response makes it possible to predict the accuracy and take into account its dimensional parameters in the design of the press equipment.

**Keywords:** loading, compact, mode of deformation, pressing, porosity, waxy materials, dimensional-geometric accuracy, elastic response, die block

### REFERENCES

- [1]. Sushko T. I., Buchnev A. V., Turishchev V. V., Pashneva T. V. Modelirovanie processov zatverdevaniya krupnogabaritnoj stal'noj korpusnoj otlivki s sovershenstvovaniem tekhnologii izgotovleniya // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2010. T. 6. № 12. S. 44–47. (in Russian)
- [2]. Kul'bovskij I. K., Karelin S. V., Popov E. V., Turkin D. A. Komp'yuternoe modelirovanie processov zatverdevaniya i ohlazhdeniya massivnyh otlivok iz chuguna v litejnoj forme // Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2008. № 2. S. 23–26. (in Russian)
- [3]. Nazaratin V. V. Tekhnologiya izgotovleniya stal'nyh otlivok otvetstvennogo naznacheniya. M.: Mashinostroenie, 2006. 234 s. (in Russian)
- [4]. Sadova A. N., Deberdeev T. R., Kuznecova O. N., Stoyanov O. V. Problemy vyyavleniya i ustraneniya vozmozhnyh defektov v processe polucheniya izdelij iz termoplastov: uchebnoe posobie. Kazan' : Izd-vo Kazan. gos. tekhnol. un-ta, 2009. 123 s. (in Russian)
- [5]. YUdin S. B., Levin M. M., Rozenfel'd S. E. Centrobezhnoe lit'e. M., «Mashinostroenie», 1972. 280 s. (in Russian)
- [6]. Zhilin S. G., Komarov O. N., Sosnin A. A., Bogdanova N. A. Vliyanie uprugogo otklika na razmerno-geometricheskie karakteristiki protyazhennoj pressovki,

---

*Zhilin Sergey Gennadevich*, Ph. D. in Engineering Sciences, Assoc. Prof., Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Bogdanova Nina Anatolievna*, Junior Researcher. Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

*Komarov Oleg Nikolaevitsch*, Ph. D. in Engineering Sciences, Assoc. Prof., Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

poluchennoj iz voskoobraznogo materiala mundstuchnym vydavlivaniem // Vestnik PNIPU. Mashinostroenie. Metallurgiya. 2018. T.20. №2. S. 27–34. (in Russian)

[7]. ZHilin S. G., Komarov O. N., Sosnin A. A., Predein V. V. Poluchenie lit'ya povyshennoj razmernoj tochnosti po kombinirovannym litejnym modelyam iz alyumotermitnyh i voskoobraznyh smesej // Zagotovitel'nye proizvodstva v mashinostroenii. 2016. №11. S. 6–11. (in Russian)

[8]. Garanin V. F., Ivanov V. N., Kazennov S. A. i dr. Lit'e po vyplavlyaemym modelyam /pod obshch. red. V.A. Ozerova. 4-e izd., pererab. i dop. M.: Mashinostroenie, 1994. 448 s. (in Russian)

[9]. ZHilin S. G., Komarov O. N., Sosnin A. A. Panchenko G. L. Sposob izgotovleniya vyplavlyaemyh modelej. Patent RF № 2632051 Sposob izgotovleniya vyplavlyaemyh modelej / Zayavl. 13.05.2016; Opubl. 02.10.2017. Byul. №28. (in Russian)

[10]. ZHilin S. G., Komarov O. N., Potyanihin D. A., Sosnin A. A. Eksperimental'noe opredelenie parametrov regressionnoj zavisimosti Kol'rausha dlya poristyh pressovok iz voskoobraznyh poroshkovykh kompozicij //Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii. 2018. Vyp. 2. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-2-1732>. (in Russian)

А. Б. Мустафаев

## ТОРМОЖЕНИЕ РОСТА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ С ПОМОЩЬЮ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

*Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан*

**Аннотация.** Рассматриваются изменения температурного поля вблизи вершин криволинейной трещины в листовом элементе под действием внешнего неоднородного напряженного поля. Учитывается, что у криволинейной трещины имеются концевые зоны со связями между берегами (силами сцепления). Считается, что эти зоны примыкают к вершинам трещины и имеют размеры соизмеримые с размером трещины. Решение краевой задачи о равновесии криволинейной трещины со связями между берегами в концевых зонах при действии внешнего неоднородного напряженного поля, наведенного термоупругого поля напряжений и усилий в связях, препятствующих раскрытию трещины, сводится в каждом приближении к системе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром типа Коши. Из решения полученной системы уравнений находятся нормальные и касательные усилия в связях между берегами. Условие предельного равновесия криволинейной трещины с концевыми зонами формулируется на основе двухпараметрического критерия разрушения.

**Ключевые слова:** листовой элемент конструкции, криволинейная трещина, температурное поле, зоны предразрушения, силы сцепления, неоднородное напряженное поле.

УДК: 539.375

**Введение.** Значительный интерес представляет оценка влияния локальных изменений температуры вблизи вершин трещины на ее торможение в листовом элементе конструкции. Такие локальные изменения температуры листового элемента легко выполнимы технологически и способствуют замедлению или остановке роста сквозной трещины. Поэтому решение задач механики разрушения для листовых элементов конструкций с трещиной, вблизи вершин которой имеются изменения температуры, представляет теоретический и практический интерес [1-24].

**Постановка задачи.** Пусть в изотропном однородном листовом элементе, занимающем плоскость  $Oxy$ , имеется криволинейная трещина длиной  $2l = b-a$  (рис. 1). Рассмотрим задачу механики разрушения о трещине со связями между берегами в листовом элементе конструкции, полагая, что контур трещины имеет неровности –

---

© Мустафаев А. Б., 2018

*Мустафаев Азер Байрам оглы*

e-mail: azeg\_bm@list.ru, кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

Поступила 01.07.2018

малые отклонения от прямолинейной формы. Полагаем наличие у трещины концевых зон, в которых действуют непрерывно распределенные силы сцепления материала (зоны предразрушения). Считается, что размеры зон предразрушения сравнимы с длиной трещины [25]. Концевые зоны предразрушения моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале.

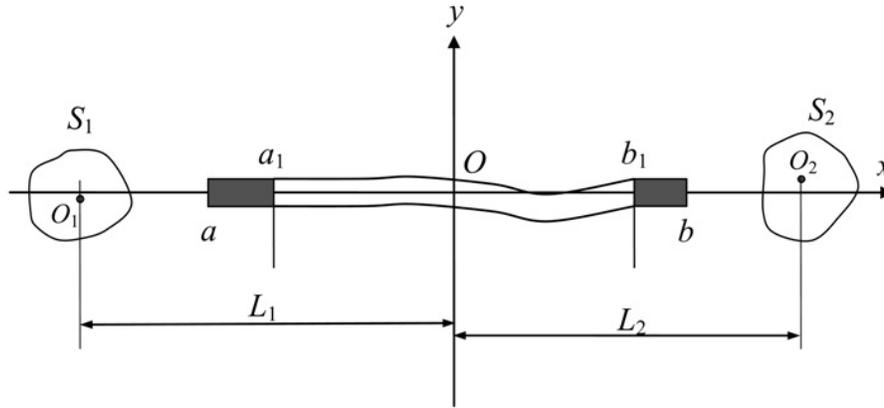


Рис. 1.

Для многих конструкционных материалов (сталей, алюминиевых сплавов и др.) в диапазоне изменения температуры до  $300 - 400^\circ\text{C}$  зависимость термоупругих характеристик слабо меняется с температурой. Таким образом, существует такой диапазон температур, в котором допущение о постоянстве характеристик материала корректно. Этот диапазон устанавливается на основании зависимости модуля упругости от температуры. Опыты [1] показывают, что при нагреве трассы пути трещины до  $70 - 100^\circ\text{C}$  наблюдается замедление и остановка роста трещины.

Пусть на бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат  $x$  и  $y$ . Берега криволинейной трещины свободны от нагрузок. Для торможения трещины на ее пути с помощью нагрева тепловым источником области  $S = S_1 + S_2$  до постоянной температуры  $T_0$  создается зоны сжимающих напряжений. Принимаем допущения: все термоупругие характеристики материала (модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ ) не зависят от температуры  $T$ ; материал листового элемента однородный и изотропный. Принято, что в момент  $t = 0$  произвольная область  $S$  на пути трещины в листовом элементе мгновенно нагревается до постоянной температуры  $T = T_0$ . Остальная часть листового элемента в начальный момент времени имеет температуру  $T = 0$ .

Выделим части трещины длиной  $d_1 = a_1 - a$  и  $d_2 = b_1 - b$  (зоны предразрушения), примыкающие к ее вершинам, в которой берега взаимодействуют. Взаимодействие берегов трещины в зонах предразрушения моделируется путем введения между берегами трещины связей (сил сцепления), имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала листового элемента.

Трещина считается близкой к прямолинейной форме, с малыми отклонениями линии трещины от прямой  $y = 0$ . Уравнение линии трещины принимается в виде  $y = f(x)$ ,

$a \leq x \leq b$ . На основании сказанного функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  являются малыми величинами.

При действии внешней силовой и тепловой нагрузок на листовый элемент в связях, соединяющих берега трещины в зонах предразрушения, появятся в общем случае нормальные  $q_y(x)$  и касательные  $q_{xy}(x)$  усилия. Следовательно, к берегам трещины в концевых зонах будут приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные  $q_y(x)$  и  $q_{xy}(x)$ , соответственно. Величины этих напряжений необходимо определить.

Граничные условия на берегах криволинейной трещины имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0 \quad \text{при} \quad y = f(x), \quad a_1 < x < b_1; \\ \sigma_n = q_y, \quad \tau_{nt} = q_{xy} \quad \text{при} \quad y = f(x), \quad a \leq x \leq a_1 \quad \text{и} \quad b_1 \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $n, t$  – натуральные координаты.

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытие берегов трещины и усилия в связях в зонах предразрушения, которое можно представить в виде

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = \Pi_y(x, \sigma)q_y(x) - i\Pi_x(x, \sigma)q_{xy}(x). \quad (2)$$

Здесь  $(v^+ - v^-)$  и  $(u^+ - u^-)$  – соответственно нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов трещины; функции  $\Pi_y(x, \sigma)$  и  $\Pi_x(x, \sigma)$  – эффективные податливости связей, зависящие от их натяжения;  $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$  – модуль вектора усилий в связях.

При постоянных значениях  $\Pi_y, \Pi_x$  имеем в (2) линейный закон деформирования связей, в общем же случае закон деформирования нелинейный и задан.

**Метод решения задачи.** С помощью принципа суперпозиции, напряженное состояние в листовом элементе конструкции с криволинейной трещиной, представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_{x_0} + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_{y_0} + \sigma_y^1, \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy_0} + \tau_{xy}^1, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  – компоненты тензора напряжений в сплошном листовом элементе, когда на бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат  $x, y$ ;  $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \tau_{xy_0}$  – решение задачи термоупругости для бездефектного листового элемента;  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  – решение задачи механики разрушения для листового элемента с криволинейной трещиной при действии неизвестных нагрузок, приложенных только на поверхности берегов трещины. Эти нагрузки определяют в процессе решения задачи.

Для компонент напряжений  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 + \sigma_y^0 = 2 \left[ \operatorname{Re} \Phi^0(z) + \overline{\Phi^0(z)} \right], \quad z = x + iy, \\ \sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 = \Phi^0(z) + \Omega^0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi^0(z)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Phi^0(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m+1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_m$ ,  $\Omega^0(z) = B_0 z^m + B_1 z^{m+1} + B_2 z^{m-2} + \dots + B_m$ .

Эти функции (4) в зависимости от значений коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) определяют напряженное состояние в листовом элементе без трещины и теплового источника.

Для нахождения компонент тензора напряжений  $\sigma_{x_0}$ ,  $\sigma_{y_0}$ ,  $\tau_{xy_0}$  решается задача термоупругости для сплошного листового элемента. Сначала, решая краевую задачу теории теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_* \Delta T, \quad T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при } t = 0, \quad (5)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $a_*$  – коэффициент температуропроводности материала листового элемента, находим распределение температуры,

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi a_*} \left[ \iint_{S_1} \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) d\xi d\eta + \iint_{S_2} \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) d\xi d\eta \right],$$

где  $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ .

Для обобщенного плоского напряженного состояния считается, что листовой элемент теплоизолирован на боковых поверхностях. Пусть нагретые со стороны каждой вершины трещины тепловым источником области  $S_1$  и  $S_2$  являются произвольными односвязными областями с центрами  $O_k(L_k, C_k)$  (рис. 1).

При определении температурного поля, для упрощения задачи, не учитывалось возмущенное температурное поле, вызванное трещиной.

Чтобы учесть потери тепла на поверхности листового элемента вместо уравнения (5) следует решать уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_* \Delta T - m^2 T,$$

где  $m^2 = \frac{2a_* \delta}{\lambda h}$ ;  $\delta$  – коэффициент теплообмена между листовым элементом и средой;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $h$  – толщина листового элемента.

Таким образом, в случае теплообмена со средой через боковые поверхности пластины, нужно полученное решение умножить на  $\exp(-m^2 t)$ .

Для термоупругого потенциала перемещений находим

$$F(x, y, t) = \frac{(1 + \nu)\alpha T_0}{4\pi} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[ \iint_S \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* \tau}\right) d\xi d\eta \right] d\tau - 2 \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta \right\},$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения листового элемента.

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  выражаются через термоупругий потенциал перемещений по известным формулам [26] и имеют вид

$$\sigma_x^0 = -\mu(1 + \nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \iint_S \frac{1}{\pi R^4} \left[ (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 + 2(y - \eta)^2 \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_* t}\right) - R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) \right] d\xi d\eta \right\},$$

$$\sigma_y^0 = -\mu(1 + \nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \iint_S \frac{1}{\pi R^4} \left[ (y - \eta)^2 - (x - \xi)^2 + 2(x - \xi)^2 \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_* t}\right) - R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) \right] d\xi d\eta \right\},$$

$$\tau_{xy}^0 = -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \frac{4(x-\xi)(y-\eta)}{R^2} \left[ 1 - \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_*t}\right) \right] d\xi d\eta,$$

где  $\mu$  – модуль сдвига материала листового элемента;  $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ .

Граничные условия (1) на берегах криволинейной трещины с концевыми зонами предразрушения на основании (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_n^1 &= -\sigma_y^0 - \sigma_{y_0}, & \tau_{nt}^1 &= -\tau_{xy}^0 - \tau_{xy_0} \\ &\text{при } y = f(x), & a_1 &< x < b_1; \\ \sigma_n^1 &= -(\sigma_y^0 + \sigma_{y_0}) + q_y, & \tau_{nt}^1 &= -(\tau_{xy}^0 + \tau_{xy_0}) + q_{xy} \\ &\text{при } y = f(x), & a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию искривленной (с малыми отклонениями от прямолинейной формы) поверхности берегов трещины. Так как функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  являются малыми величинами, функцию  $f(x)$  можно представить в виде

$$f(x) = \varepsilon H(x) \quad a \leq x \leq b,$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр.

Компоненты тензора напряжений;  $\sigma_x^1$ ,  $\sigma_y^1$ ,  $\tau_{xy}^1$  и перемещения  $u^1$ ,  $v^1$  ищем в виде разложений по малому параметру

$$\begin{aligned} \sigma_x^1 &= \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \dots, & \sigma_y^1 &= \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \dots, & \tau_{xy}^1 &= \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u^1 &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, & v^1 &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots \end{aligned}$$

Неизвестные напряжения в связях в зонах предразрушения также ищем в виде разложений по малому параметру

$$q_y = q_y^{(0)} + \varepsilon q_y^{(1)} + \dots, \quad q_{xy} = q_{xy}^{(0)} + \varepsilon q_{xy}^{(1)} + \dots$$

Значения напряжений при  $y = f(x)$  получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности  $y = 0$ . Используя метод возмущений, находим граничные условия при  $y = 0$ ,  $a \leq x \leq b$ :

в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} &= -(\sigma_y^0 + \sigma_{y_0}), & \tau_{xy}^{(0)} &= -(\tau_{xy}^0 + \tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, & a_1 \leq x \leq b_1, \\ \sigma_y^{(0)} &= q_y^0 - (\sigma_y^0 + \sigma_{y_0}), & \tau_{xy}^{(0)} &= q_{xy}^0 - (\tau_{xy}^0 + \tau_{xy_0}) \\ &\text{при } y = 0, & a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b; \end{aligned} \quad (7)$$

в первом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} &= N, & \tau_{xy}^{(1)} &= T_t & \text{при } y = 0, & a_1 \leq x \leq b_1, \\ \sigma_y^{(1)} &= q_y^1 + N, & \tau_{xy}^{(1)} &= q_{xy}^1 + T_t & \text{при } y = 0, & a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$N = 2\tau_{xy}^{(0)} \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}, \quad T_t = (\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}) \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} \quad \text{при } y = 0. \quad (9)$$

Применяя метод возмущений к уравнению (2), получим в нулевом приближении

$$\begin{aligned} (v_0^+ - v_0^-) - i(u_0^+ - u_0^-) &= \Pi_y(x, \sigma^0)q_y^0(x) - i\Pi_x(x, \sigma^0)q_{xy}^0(x), \\ \sigma^0 &= \sqrt{(q_y^0)^2 + (q_{xy}^0)^2}; \end{aligned} \quad (10)$$

в первом приближении

$$\begin{aligned} (v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) &= \Pi_y(x, \sigma^1)q_y^1(x) - i\Pi_x(x, \sigma^1)q_{xy}^1(x), \\ \sigma^1 &= \sqrt{(q_y^1)^2 + (q_{xy}^1)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следуя Н.И. Мусхелишвили [27] на основании краевых условий нулевого приближения, приходим к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами:

$$\begin{aligned} [\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^+ + [\Phi_0(x) + \Omega_0(x)]^- &= 2f_0(x), \\ [\Phi_0(x) - \Omega_0(x)]^+ - [\Phi_0(x) - \Omega_0(x)]^- &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$f_0(x) = \begin{cases} -(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) - (\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{на свободных берегах трещины,} \\ q_y^0 - iq_{xy}^0 - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) - (\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{на берегах зон предразрушения.} \end{cases}$$

Решение задачи (12) будет иметь вид [27]

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t) dt}{t-z}. \quad (13)$$

При  $z \rightarrow \infty$ ,  $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} = z + O(1/z)$ . Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу криволинейной трещины.

Для окончательного определения комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  необходимо еще найти напряжения в связях  $q_y^0(x)$  и  $q_{xy}^0(x)$ . Используя формулу Н.И. Мусхелишвили [27]

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_0 - iv_0) = \kappa \Phi_0(z) - \Omega_0(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_0'(z)}$$

и граничные значения функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ , находим на отрезке  $a \leq x \leq b$  равенство

$$2\mu i \frac{\partial}{\partial x} [(u_0^+ - iv_0^-) + i(v_0^+ - iv_0^-)] = (1 + \kappa) [\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)]. \quad (14)$$

Используя формулы Сохоцкого-Племеля [27] и учитывая формулы (13), находим

$$\Phi_0^+(z) - \Phi_0^-(z) = -\frac{i}{\pi \sqrt{(x-a)(x-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t) dt}{t-x}. \quad (15)$$

Подставляя соотношение (15) в уравнение (14) и учитывая соотношение (10) в нулевом приближении, находим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $q_y^0(x)$  и  $q_{xy}^0(x)$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}q_y^0(t)}{t-x} dt + \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}(\sigma_y^0 + \sigma_{y0})}{t-x} dt \right\} = \quad (16)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} [\Pi_y(x, \sigma^0)q_y^0(x)],$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}q_{xy}^0(t)}{t-x} dt + \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}(\tau_{xy}^0 + \tau_{xy0})}{t-x} dt \right\} = \quad (17)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} [\Pi_x(x, \sigma^0)q_{xy}^0(x)].$$

Уравнения (16) и (17) являются нелинейными интегродифференциальными уравнениями с ядром типа Коши и могут быть решены только численно. Для их решения используется коллокационная схема [28, 29] с аппроксимацией неизвестных функций.

Перейдем к алгебраизации интегродифференциальных уравнений (16) и (17). Используя квадратурные формулы Гаусса-Чебышева, все интегралы в (16) и (17) заменяются конечными суммами, а производные в правых частях уравнений конечно-разностными аппроксимациями. В результате уравнения (16), (17) сводятся каждое к конечным системам алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций, соответственно, в узловых точках:

$$\frac{2}{(1+M)\sin\theta_m} \left[ \sum_{n=1}^M q_{y,n}^0 \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m + \sum_{n=1}^M \sigma_{y,n}^* \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m \right] = \quad (18)$$

$$= \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} [\Pi_y(x_{m+1}, \sigma^0(x_{m+1}))q_y^0(x_{m+1}) - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma^0(x_{m-1}))q_y^0(x_{m-1})],$$

$$\frac{2}{(1+M)\sin\theta_m} \left[ \sum_{n=1}^M q_{xy,n}^0 \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m + \sum_{n=1}^M \tau_{xy,n}^* \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m \right] = \quad (19)$$

$$= \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} [\Pi_x(x_{m+1}, \sigma^0(x_{m+1}))q_{xy}^0(x_{m+1}) - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma^0(x_{m-1}))q_{xy}^0(x_{m-1})].$$

Здесь

$$q_{y,n}^0 = q_{y,n}^0(\tau_n), \quad q_{xy,n}^0 = q_{xy,n}^0(\tau_n), \quad \sigma_{y,n}^* = \sigma_y^0(\tau_n) + \sigma_{y0}(\tau_n),$$

$$\tau_{xy,n}^* = \tau_{xy}^0(\tau_n) + \tau_{xy0}(\tau_n), \quad x_{m+1} = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\eta_{m+1}.$$

С помощью алгебраизации вместо каждого интегродифференциального уравнения (16), (17) получаем систему из  $M_1$  алгебраических уравнений для нахождения напряжений в связях в узловых точках концевых зон предразрушения в нулевом приближении ( $M_1$  – число узловых точек, содержащихся в зонах предразрушения). Если закон деформирования связей нелинейный, для определения напряжений  $q_y^0(x)$ ,  $q_{xy}^0(x)$  используется итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений А.А. Ильюшина [30]. В частном случае линейно-упругих связей системы (18), (19) являются линейными и для их численного решения применяется метод Гаусса с выбором главного элемента.

После решения алгебраических систем (18) и (19) вычисляем коэффициенты интенсивности напряжений. Коэффициенты интенсивности напряжений в нулевом приближении представим в виде

$$K_I - iK_{II} = \left( K_I^{load} + K_I^{bond} \right) - i \left( K_{II}^{load} + K_{II}^{bond} \right). \quad (20)$$

Для левого конца трещины имеем:

$$K_I^{a_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \left\{ \int_a^b \sigma_y^0(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx + \int_a^b \sigma_{y_0}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx \right\},$$

$$K_I^{a_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^{(0)}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx,$$

$$K_{II}^{a_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \left[ \int_a^b (\tau_{xy}^0(x) + \tau_{xy_0}(x)) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx \right],$$

$$K_{II}^{a_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^{(0)}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx;$$

для правого конца трещины

$$K_I^{b_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b (\sigma_y^0(x) + \sigma_{y_0}(x)) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_I^{b_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^0(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_{II}^{b_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b (\tau_{xy}^0(x) + \tau_{xy_0}(x)) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_{II}^{b_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^0(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx.$$

После нахождения напряжений в нулевом приближении находим функции  $N$  и  $T_t$  по формулам (9).

Решение граничной задачи (8) в первом приближении аналогично решению в нулевом приближении. Получены алгебраические системы, заменяющие интегродифференциальные уравнения относительно неизвестных функций  $q_y^1(x)$  и  $q_{xy}^1(x)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+M) \sin \theta_m} \left[ \sum_{n=1}^M q_{y,n}^1 \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m + \sum_{n=1}^M N_n \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m \right] = \\ = \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} \left[ \Pi_y(x_{m+1}, \sigma^1(x_{m+1})) q_{y,m+1}^1(x_{m+1}) - \right. \\ \left. - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma^1(x_{m-1})) q_{y,m-1}^1(x_{m-1}) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+M) \sin \theta_m} \left[ \sum_{n=1}^M q_{xy,n}^1 \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m + \sum_{n=1}^M T_n \sum_{k=1}^M \sin k\theta_n \cos k\theta_m \right] = \\ = \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} \left[ \Pi_x(x_{m+1}, \sigma^1(x_{m+1})) q_{xy,m+1}^1(x_{m+1}) - \right. \\ \left. - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma^1(x_{m-1})) q_{xy,m-1}^1(x_{m-1}) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$m = 1, 2, \dots, M1, \quad q_{y,n}^1 = q_{y,n}^1(\tau_n), \quad q_{xy,n}^1 = q_{xy,n}^1(\tau_n), \\ q_{y,m+1}^1 = q_y^1(x_{m+1}), \quad q_{xy,m+1}^1 = q_{xy}^1(x_{m+1}), \quad N_n = N(\tau_n), \quad T_n = T(\tau_n).$$

После решения алгебраических систем (20) и (21) методом упругих решений А.А. Ильюшина [30] вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений в первом приближении для левого конца трещины

$$K_I^{a_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b N(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \\ K_I^{a_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^1(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \\ K_{II}^{a_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b T_t(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \\ K_{II}^{a_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^1(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx;$$

для правого конца трещины

$$K_I^{b_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b N(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \\ K_I^{b_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^1(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \\ K_{II}^{b_0,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b T_t(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \\ K_{II}^{b_0,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^1(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx.$$

Окончательно для коэффициентов интенсивности напряжений имеем соотношения

$$K_I^{load} = K_I^{a_0,load} + \varepsilon K_I^{a_1,load}, \quad K_I^{bond} = K_I^{a_0,bond} + \varepsilon K_I^{a_1,bond}, \\ K_{II}^{load} = K_{II}^{a_0,load} + \varepsilon K_{II}^{a_1,load}, \quad K_{II}^{bond} = K_{II}^{a_0,bond} + \varepsilon K_{II}^{a_1,bond}, \\ K_I + iK_{II} = \left( K_I^{load} + K_I^{bond} \right) - i \left( K_{II}^{load} + K_{II}^{bond} \right);$$

для левого конца трещины и

$$K_I^{bond} = K_I^{b_0,load} + \varepsilon K_I^{b_1,load}, \quad K_I^{load} = K_I^{b_0,load} + \varepsilon K_I^{b_1,load}, \\ K_{II}^{load} = K_{II}^{b_0,load} + \varepsilon K_{II}^{b_1,load}, \quad K_{II}^{bond} = K_{II}^{b_0,bond} + \varepsilon K_{II}^{b_1,bond}.$$

для правого конца трещины.

Для анализа предельного равновесия листового элемента ослабленного криволинейной трещиной с концевыми зонами (зонами предразрушения) при действии внешнего неоднородного напряженного поля необходим двухпараметрический критерий разрушения, первое условие которого есть условие продвижения вершины трещины, а второе – условие разрыва связей на краю концевой зоны. В качестве первого условия разрушения принят силовой критерий разрушения Ирвина. Таким образом, предельному равновесию вершины трещины соответствует выполнение условия

$$K = K_c, \quad (23)$$

Здесь  $K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  – модуль коэффициентов интенсивности напряжений при наличии связей в концевой зоне трещины;  $K_c$  – постоянная материал листового элемента.

Вторым условием разрушения принят критерий критического раскрытия берегов трещины. Полагаем, что разрыв связей на краю зоны предразрушения ( $x_* = a_1$  или  $x_* = b_1$ ) происходит при выполнении условия

$$V(x_*) = \sqrt{(u^+ - u^-)^2 + (v^+ - v^-)^2} = \delta_c, \quad (24)$$

здесь  $\delta_c$  – предельная длина связи.

**Заключение.** Совместное решение полученных уравнений (18), (19), (21)–(24) позволяет при заданной длине криволинейной трещины и характеристиках межчастичных связей установить критическую внешнюю нагрузку и размеры концевых зон предразрушения для предельно-равновесного состояния вершины трещины и края зоны предразрушения. Используя предельные значения  $K_c$  и  $\delta_c$ , которые определяются опытным путем для каждого материала листового элемента, можно выделить режимы равновесия и развития криволинейной трещины при монотонном нагружении. Если условия

$$K \geq K_c, \quad V(x_*) < \delta_c$$

выполняются, происходит продвижение кончика трещины вместе с увеличением длины зоны предразрушения без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать, как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок. Рост вершины трещины и одновременно разрыв межчастичных связей на краю концевой зоны предразрушения будет происходить если

$$K \geq K_c, \quad V(x_*) \geq \delta_c.$$

При выполнении условий

$$K < K_c, \quad V(x_*) < \delta_c$$

происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины, а размер концевой зоны предразрушения сокращается, стремясь к критическому для данного уровня нагрузок значению.

При

$$K < K_c, \quad V(x_*) \geq \delta_c,$$

положение вершины трещины и концевой зоны предразрушения не меняется.

Установлено, что температурное поле напряжений существенно замедляет рост трещины в листовом элементе и способствует повышению критических разрушающих внешних нагрузок.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Финкель, В. М. Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977. 380 с.
- [2] Беленький В. Д. Закрытие центральной трещины в круговом диске под действием температурного поля // Проблемы прочности. 1984. № 6. С. 35–38.
- [3] Potthast B., Herrmann K. P. Asymptotic analysis for temperature fields induced by dynamic crack growth in pressure-sensitive materials // Int. J. of Fracture. 2000. Vol. 106. P. 57–64.
- [4] Кадиев Р. И., Мирсалимов В. М. Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестник Даг. гос. ун-та. 2001. № 4. С. 69–73.
- [5] Fu Y.-M., Bai X.-Z., Qiao G.-Y., Hu Y.-D., Luan J.-Y. Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating // Materials Science and Technology. 2001. Vol. 17. P. 1653–1656.
- [6] Кадиев Р. И. Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестник ДНЦ РАН. 2003. № 14. С. 15–18.
- [7] Мирсалимов В. М., Кадиев Р. И. Закрытие трещины в листовом элементе под действием локального теплового поля // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 6. С. 69–75.
- [8] Kovtunen V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. Angew. Math. Mech.. 2005. Bd. 85. Fasz. 4. P. 242–251.
- [9] Мирсалимов В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 1. С. 132–151.
- [10] Qin Z, Librescu L., Hasanyan D. Joule heating and its implications on crack detection/arrest in electrically conductive circular cylindrical shells // J. of Thermal Stresses. 2007. Vol. 30. P. 623–637.
- [11] Liu T. J. C. Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2008. Vol. 49. P. 171–184.
- [12] Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // ПМТФ. 2010. Т. 51, №2. С. 148–159.
- [13] Димаки А. В., Мельников А. Г., Плешанов В. С., Сизова О. В. Теоретическое и экспериментальное исследование залечивания поверхностных трещин индукционным нагревом // Перспективные материалы. 2010. № 3. С. 77–83.
- [14] Liu T. J. C. Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // Engineering Fracture Mechanics. 2011. Vol. 78. P. 666–684.
- [15] Liu T. J. C. Fracture mechanics of steel plate under Joule heating analyzed by energy density criterion // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2011. Vol. 56. P. 154–161.
- [16] Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э. Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // Прикладная механика и техническая физика. 2013. № 6. С. 181–190.

- [17] Liu T. J. C. Compressive stresses near crack tip Induced by thermo-electric field // *Int. J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 2014. Vol. 8. P. 1799–1802.
- [18] Georgantzinou S. K., Anifantis N. K. Crack closure // *Encyclopedia of Thermal Stresses* (edit. R.V. Hetnarski). Springer Netherlands. 2014. P. 774–779.
- [19] Мир-Салим-заде М. В. Трещины со связями в перфорированной стрингерной пластине // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 5. С. 34–43.
- [20] Itou S. Thermal stresses around two upper cracks placed symmetrically about a lower crack in an infinite orthotropic plane under uniform heat flux // *J. of theoretical and applied mechanics*. 2014. Vol. 52. P. 617–628.
- [21] Мустафаев А. Б. Взаимодействие берегов искривленной трещины в изгибающейся полосе (балке) под действием теплового источника // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 4. с. 29–41.
- [22] Мирсалимов В. М., Мустафаев А. В. Решение задачи о частичном контактировании берегов щели переменной ширины под действием температурного поля. // *Физико-хим. механика материалов*. 2015. № 1. С. 86–92.
- [23] Mirsalimov V. M., Mustafayev A. V. A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // *Mechanika*. 2015. Vol. 21. P. 19–22.
- [24] Мустафаев А. Б. Замедление роста щели переменной ширины под действием температурного поля // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. Т. 58, № 1, с. 168–176.
- [25] Гаджиев В. Д., Мирсалимов В. М. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами // *Оптимальное проектирование механических систем*. Баку: Элм, 1999. С. 50–63.
- [26] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
- [27] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [28] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
- [29] Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
- [30] Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Логос, 2003. 376 с.

A.B. Mustafayev

**RETARDATION OF GROWTH OF CURVILINEAR CRACK WITH INTERFACIAL BONDS BY HEAT STRESS FIELD***Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of Azerbaijan*

**Abstract.** The changes of the temperature field near the tips of a curvilinear crack in a sheet element under the action of external non-uniform stress field are considered. It is taken into account that the curvilinear crack has end zones with interfacial bonds (cohesive tractions). It is assumed that these zones are adjacent to the crack tips and its sizes are comparable to size of the crack. The solution of the boundary problem of equilibrium of a curvilinear crack with interfacial bonds in the end zones under the action of external non-uniform stress field, induced thermoelastic stress field and tractions in the bonds, is reduced in each approximation to a system of nonlinear singular Cauchy-type equations. From the solution of the obtained equations system the normal and tangential tractions in the interfacial bonds are found. The condition of limiting equilibrium of the curvilinear crack with end zones is formulated on the basis of a two-parameter fracture criterion.

**Keywords:** sheet construction element, curvilinear crack, temperature field, prefracture zones, cohesive tractions, non-uniform stress field

**REFERENCES**

- [1] Finkel', V. M. Fizicheskie osnovy tormozheniya razrusheniya. M.: Metallurgiya, 1977. 380 s. (in Russian)
- [2] Belen'kij V. D. Zakrytie central'noj treshchiny v krugovom diske pod dejstviem temperaturnogo polya // Problemy prochnosti. 1984. № 6. S. 35–38. (in Russian)
- [3] Potthast B., Herrmann K. P. Asymptotic analysis for temperature fields induced by dynamic crack growth in pressure-sensitive materials // Int. J. of Fracture. 2000. Vol. 106. P. 57–64. (in Russian)
- [4] Kadiev R. I., Mirsalimov V. M. Vliyanie teplovogo istochnika na dinamiku rosta treshchiny // Vestnik Dag. gos. un-ta. 2001. № 4. S. 69–73. (in Russian)
- [5] Fu Y.-M., Bai X.-Z., Qiao G.-Y., Hu Y.-D., Luan J.-Y. Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating // Materials Science and Technology. 2001. Vol. 17. P. 1653–1656.
- [6] Kadiev R. I. Koehfficienty intensivnosti napryazhenij dlya plastiny, oslablennoj treshchinoj, pri vozdejstvii teplovogo istochnika // Vestnik DNC RAN. 2003. № 14. S. 15–18. (in Russian)
- [7] Mirsalimov V. M., Kadiev R. I. Zakrytie treshchiny v listovom ehlemente pod dejstviem lokal'nogo teplovogo polya // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. 2004. № 6. S. 69–75. (in Russian)
- [8] Kovtunenkov V. A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. Angew. Math. Mech.. 2005. Bd. 85. Fasz. 4. P. 242–251. (in Russian)

---

*Mustafayev Azer Bayram ogly,*

e-mail: azer\_bm@list.ru, Ph.D., doctorant, Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

- [9] Mirsalimov V. M. K resheniyu zadachi mekhaniki kontaktного razrusheniya o zarozhdenii i razvitii treshchiny so svyazyami mezhdru beregami vo vtulke frikcionnoj pary // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2007. T. 71. Vyp. 1. S. 132–151. (in Russian)
- [10] Qin Z, Librescu L., Hasanyan D. Joule heating and its implications on crack detection/arrest in electrically conductive circular cylindrical shells // J. of Thermal Stresses. 2007. Vol. 30. P. 623–637.
- [11] Liu T. J. C. Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2008. Vol. 49. P. 171–184.
- [12] Mir-Salim-zade M. V. Modelirovanie chastichnogo zakrytiya treshchin v perforirovannoj izotropnoj srede, usilennoj reguljarnoj sistemoj stringerov // PMTF. 2010. T. 51, №2. S. 148–159. (in Russian)
- [13] Dimaki A. V., Mel'nikov A. G., Pleshanov V. S., Sizova O. V. Teoreticheskoe i ehksperimental'noe issledovanie zalechivaniya poverhnostnyh treshchin indukcionnym nagrevom // Perspektivnye materialy. 2010. № 3. S. 77–83. (in Russian)
- [14] Liu T. J. C. Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // Engineering Fracture Mechanics. 2011. Vol. 78. P. 666–684.
- [15] Liu T. J. C. Fracture mechanics of steel plate under Joule heating analyzed by energy density criterion // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2011. Vol. 56. P. 154–161.
- [16] Mirsalimov V. M., Rustamov B. EH. Modelirovanie chastichnogo zakrytiya treshchinovidnoj polosti so svyazyami mezhdru beregami v izotropnoj srede // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2013. № 6. S. 181–190. (in Russian)
- [17] Liu T. J. C. Compressive stresses near crack tip Induced by thermo-electric field // Int. J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, 2014. Vol. 8. P. 1799–1802.
- [18] Georgantzinos S. K., Anifantis N. K. Crack closure // Encyclopedia of Thermal Stresses (edit. R.B. Hetnarski). Springer Netherlands. 2014. P. 774–779.
- [19] Mir-Salim-zade M. V. Treshchiny so svyazyami v perforirovannoj stringernej plastine // Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2014. № 5. S. 34–43.
- [20] Itou S. Thermal stresses around two upper cracks placed symmetrically about a lower crack in an infinite orthotropic plane under uniform heat flux // J. of theoretical and applied mechanics. 2014. Vol. 52. P. 617–628.
- [21] Mustafaev A. B. Vzaimodejstvie beregov iskrivlennoj treshchiny v izgibayushchejsya polose (balke) pod dejstviem teplovogo istochnika // Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2014. № 4. s. 29–41. (in Russian)
- [22] Mirsalimov V. M., Mustafaev A. B. Reshenie zadachi o chastichnom kontaktirovanii beregov shcheli peremennoj shiriny pod dejstviem temperaturnogo polya. // Fiziko-him. mekhanika materialov. 2015. № 1. S. 86–92. (in Russian)
- [23] Mirsalimov V. M., Mustafayev A. B. A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // Mechanika. 2015. Vol. 21. P. 19–22.
- [24] Mustafaev A. B. Zamedlenie rosta shcheli peremennoj shiriny pod dejstviem temperaturnogo polya // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2017. T. 58, № 1, s. 168–176. (in Russian)
- [25] Gadzhiev V. D., Mirsalimov V. M. Predel'no-ravnovesnoe sostoyanie detali tipa vtulki kontaktной pary pri nalichii treshchin so svyazyami mezhdru beregami //

Optimal'noe proektirovanie mekhanicheskikh sistem. Baku: EHI, 1999. S. 50–63. (in Russian)

[26] Parkus G. Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya. M.: Fizmatgiz, 1963. 252 s. (in Russian)

[27] Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 707 s. (in Russian)

[28] Panasyuk V. V., Savruk M. P., Dacyshin A. P. Raspredelenie napryazhenij okolo treshchin v plastinakh i obolochkah. Kiev: Nauk. dumka, 1976. 443 s. (in Russian)

[29] Mirsalimov V. M. Neodnomernye uprugoplasticheskie zadachi. M.: Nauka, 1987. 256 s. (in Russian)

[30] Il'yushin A. A. Plastichnost'. M.: Logos, 2003. 376 s. (in Russian)

Р. И. Непершин

## О ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ФЛАНЦА ПРИ ВЫТЯЖКЕ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва,  
Россия

**Аннотация.** Приведено аналитическое решение задачи идеально пластического течения фланца заготовки при вытяжке тонкостенной цилиндрической оболочки при плоском напряженном состоянии по Соколовскому при условии пластичности Мизеса. Решение получено в параметрической форме для напряжений с расчетами линий скольжения, радиальной скорости и изменения начальной толщины. Предельное отношение диаметра заготовки к диаметру проема матрицы, ограниченное максимальным напряжением растяжения на контуре матрицы, при условии пластичности Мизеса ниже по сравнению с условием пластичности Треска, которое используется в теории глубокой вытяжки цилиндрической оболочки.

**Ключевые слова:** идеальная пластичность, условие пластичности Мизеса, плоское напряженное состояние, глубокая вытяжка, тонкостенная цилиндрическая оболочка, радиальное течение фланца, изменение толщины, линии скольжения.

УДК: 539.374+ 621.735

**Введение.** При глубокой вытяжке тонкостенной цилиндрической оболочки с плоским дном во фланце заготовки возникает плоское напряженно-деформированное состояние, зависящее от отношения радиуса кромки фланца  $R$  к радиусу  $r_0$  проема матрицы. После небольшого начального участка упругопластического деформирования пластическая область распространяется до свободной кромки фланца [1] и начинается пластическое течение с большими деформациями при дальнейшем перемещении пуансона, которое рассчитывается по модели идеально пластического тела. При больших отношениях  $R/r_0$  на начальной стадии глубокой вытяжки на контуре проема матрицы возникают большие растягивающие напряжения  $\sigma_{r0}$ , которые приводят к локализации пластической деформации в “шейке” и разрушению металла. Предельное отношение  $R/r_0$  определяют из решения дифференциального уравнения равновесия элемента плоского фланца в полярных координатах  $r, \theta$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

с граничным условием на свободной кромке фланца

---

© Непершин Р. И., 2018

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 10.09.2018

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = -\sigma_Y, \quad r = R, \quad (2)$$

где  $\sigma_Y$  – напряжение текучести.

При условии пластичности Треска

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_Y \quad (3)$$

толщина фланца остается постоянной, и уравнение (1) с граничным условием (2) определяет распределение напряжений по радиусу фланца [2,3]

$$\sigma_r = \sigma_Y \ln(R/r), \quad \sigma_\theta = \sigma_Y [\ln(R/r) - 1]. \quad (4)$$

При  $\sigma_{r0} = \sigma_Y$  на границе  $r = r_0$  из (4) следует предельное отношение  $R/r_0 = 2.7183$ . При осесимметричной вытяжке условие пластичности Мизеса имеет вид [2]

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_Y^2. \quad (5)$$

Подстановка в (1) напряжения  $\sigma_\theta$  в зависимости от  $\sigma_r$  из (5) приводит к нелинейному дифференциальному уравнению для  $\sigma_r$ , точное решение которого неизвестно. Закон пластического течения, ассоциированный с условием пластичности Мизеса

$$de_r = c d\varepsilon_\theta, \quad c = (2\sigma_r - \sigma_\theta)/(2\sigma_\theta - \sigma_r), \quad de_\theta = dr/r \quad (6)$$

и условие пластической несжимаемости позволяют рассчитывать изменение толщины

$$dh/h = -(1 + c)de_\theta \quad (7)$$

при известном напряженном состоянии  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и радиальном перемещении материального элемента, определяющего приращение деформации  $de_\theta$ , что имеет важное практическое значение.

Для приближенной оценки деформаций, упрочнения материала и изменения толщины фланца в [4-6] напряжения вычисляются по “модифицированному” условию пластичности Треска с заменой правой части в (3) на  $m\sigma_Y$  с эмпирическим множителем  $m \approx 1.077$  для эквивалентного напряжения текучести  $\sigma_e$ , которое при условиях пластичности Треска и Мизеса отличается на множитель 1.1547. В этом случае напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  определяются формулами (4) с множителем  $m\sigma_Y$  в правой части и предельное отношение  $R/r_0$  при условии  $\sigma_{r0} \leq \sigma_Y$ ,  $r = r_0$  имеет значение  $R/r_0 = 2.5307$ , которое согласуется с экспериментальными данными глубокой вытяжки стаканов из высокопластичных металлов [7].

Моделирование нестационарных процессов глубокой вытяжки тонкостенных осесимметричных оболочек, основанное на численном решении уравнения равновесия (1) с условием пластичности Мизеса с учетом изменения толщины по уравнениям (6), (7) и упрочнения материала  $\sigma_Y(e_p)$ , где  $e_p$  – накопленная пластическая деформация, приведено в работах [8-10].

В настоящей работе приведено аналитическое решение уравнения равновесия (1) с граничным условием (2) при условии пластичности Мизеса (5) в плоском фланце с постоянной начальной толщиной для идеально пластического материала с использованием параметрического представления напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  по Соколовскому [2]

$$\sigma_r = \sigma_e \cos(\omega - \pi/6), \quad \sigma_\theta = \sigma_e \cos(\omega + \pi/6), \quad \sigma_e = 2\sigma_Y/v_3, \quad (8)$$

которое тождественно удовлетворяет условию пластичности (5). Уравнения (1) с параметрическим представлением (8) использованы в аналитическом решении [2] задачи плоского напряженного состояния при растяжении пластины с круговым отверстием при равномерном распределении давления по контуру отверстия. В интервале  $2\pi/3 \geq \omega \geq \pi/6$  уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии относятся к гиперболическому типу с неортогональными линиями скольжения [2]. При  $\omega = 2\pi/3$  выполняются граничные условия (2) на свободной кромке плоского фланца. При  $\omega = \pi/3$  из (8) следует одноосное растяжение  $\sigma_r = \sigma_Y$ ,  $\sigma_\theta = 0$ , определяющее предельное отношение  $R/r_0$  при малом изменении толщины и напряжения текучести на начальной стадии вытяжки по критерию максимального напряжения растяжения, приводящего к локальному разрушению по механизму образования “шейки”.

**Напряженное состояние фланца.** Подстановка напряжений (8) в (1) приводит к дифференциальному уравнению для переменной  $\omega$

$$\frac{d\omega}{dr} \sin(\omega - \pi/6) - \frac{\sin \omega}{r} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) разделением переменных приводится к виду удобному для интегрирования

$$2dr/r = (v\sqrt{3} - \text{ctg } \omega)d\omega. \quad (10)$$

Интегрирование левой и правой частей уравнения (10) приводит к выражению

$$\ln[r^2 \sin \omega] = v\sqrt{3}\omega + C, \quad (11)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Из уравнения (11) находим зависимость  $r(\omega)$  в виде

$$r^2 = \exp(v\sqrt{3}\omega + C) / \sin \omega. \quad (12)$$

Постоянную интегрирования  $C$  находим из граничного условия (2) и соотношений (8) при  $\sigma_r = 0$ ,  $\sigma_\theta = -\sigma_Y$ ,  $\omega = 2\pi/3$ ,  $r = R$  на свободной кромке фланца.

Из формулы (12) находим безразмерный радиус  $r/R$ , принимая радиус фланца за характерный размер

$$(r/R)^2 = \exp(v\sqrt{3}\omega - C) / \sin \omega, \quad C = 2\pi/v\sqrt{3} - \ln(v\sqrt{3}/2) = 3.7714. \quad (13)$$

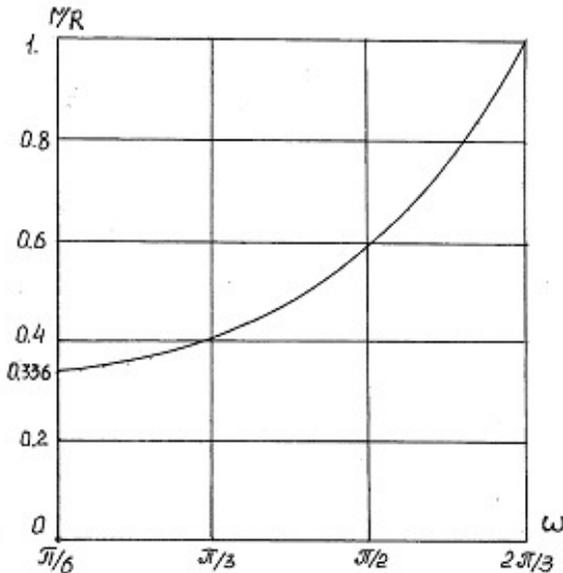
Формула (13) справедлива в интервале изменения  $\omega$ , в котором производная

$$\frac{dr}{d\omega} = \frac{\exp(\sqrt{3}\omega - C)(\sqrt{3} \sin \omega - \cos \omega)}{2r \sin^2 \omega} \quad (14)$$

положительна. Это условие выполняется в интервале  $\pi/6 \leq \omega \leq 2\pi/3$ , в котором уравнения плоского напряженного состояния относятся к гиперболическому типу [2].

Одноосное растяжение  $\sigma_r = \sigma_Y$ ,  $\sigma_\theta = 0$  на радиусе  $r_0$  находим из (8) при  $\omega = \pi/3$ . Соответствующее предельное отношение  $R/r_0 = 2.4765$ , при котором возможно пластическое разрушение стенки цилиндрической оболочки, вычисляем по формуле (13). При  $\omega = \pi/6$  имеет место двухосное растяжение  $\sigma_r = 2\sigma_Y / v\sqrt{3}$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_Y / v\sqrt{3}$ . Минимальный радиус  $r^*/R = 0.3377$ , при котором применима формула (13), определяется значением  $\omega = \pi/6$ . Распределение напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  по радиусу  $r/R$  находим по формулам (8) задавая значения  $\omega$  в интервале от  $\pi/6$  до  $2\pi/3$  и вычисляя соответствующие значения  $r/R$  по формуле (13). Результаты расчетов приведены в табл. 1. На рис. 1 и 2 показано графическое представление этих зависимостей.

$\omega$	$r/R$	$\sigma_r/\sigma_Y$	$\sigma_\theta/\sigma_Y$	$\omega$	$r/R$	$\sigma_r/\sigma_Y$	$\sigma_\theta/\sigma_Y$
0.524	0.338	1.155	0.577	1.388	0.509	0.750	-0.385
0.602	0.340	1.151	0.497	1.466	0.542	0.679	-0.470
0.681	0.345	1.140	0.414	1.545	0.578	0.603	-0.551
0.759	0.353	1.123	0.328	1.623	0.619	0.524	-0.629
0.838	0.364	1.098	0.240	1.702	0.665	0.442	-0.703
0.916	0.377	1.067	0.151	1.780	0.717	0.357	-0.773
0.995	0.392	1.029	0.060	1.859	0.775	0.270	-0.838
1.073	0.410	0.985	-0.030	1.937	0.841	0.181	-0.897
1.152	0.431	0.934	-0.121	2.016	0.915	0.091	-0.952
1.230	0.454	0.878	-0.210	2.094	1.000	0.000	-1.000
1.309	0.480	0.817	-0.299				

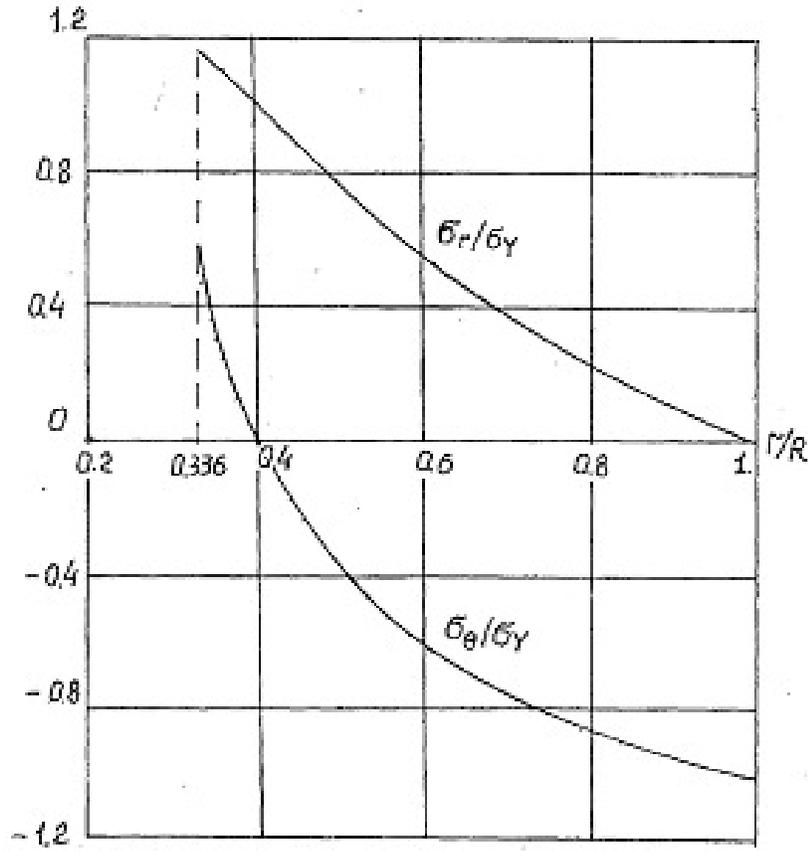
Таблица 1. Распределение напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ Рис. 1. Зависимость  $r(\omega)$ 

**Радиальное пластическое течение фланца.** Скорость  $V_r$  радиального течения материальных точек фланца находится из соотношений (6) ассоциированного закона пластического течения, записанных для скоростей деформаций в радиальном и окружном направлениях

$$dV_r/dr = cV_r/rc = (2\sigma_r - \sigma_\theta)/(2\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (15)$$

Так как коэффициент  $c$  связан с параметром  $\omega$  соотношениями (8)

$$c = \frac{\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega}{\cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega}, \quad (16)$$

Рис. 2. Распределения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ 

где  $\omega$  зависит от координаты  $r$  по формуле (13). Подстановка (16) в (15) приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dV_r}{V_r} = c(\omega) \frac{dr}{r}. \quad (17)$$

Замена переменной  $r$  на  $\omega$ , с использованием (13) и (14), приводит уравнение (17) к виду

$$2 \frac{dV_r}{V_r} = c(\omega) \frac{\sqrt{3} \sin \omega - \cos \omega}{\sin \omega} d\omega. \quad (18)$$

Подстановка (16) в (18) приводит к уравнению удобному для интегрирования

$$2 \frac{dV_r}{V_r} = \frac{3 - \operatorname{ctg}^2 \omega}{\operatorname{ctg} \omega - \sqrt{3}} d\omega. \quad (19)$$

Из уравнения (19) находим зависимость  $V_r$  ( $\omega$ ) при заданной скорости  $V_0$  на радиусе  $r_0$ , который определяется значением  $\omega_0$  по формуле (13)

$$\left( \frac{V_r}{V_0} \right)^2 = \exp \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{3 - \operatorname{ctg}^2 \omega}{\operatorname{ctg} \omega - \sqrt{3}} d\omega. \quad (20)$$

Зависимость  $V_r(r)$  вычисляется с использованием формулы (13). Правую часть уравнения (20) находим численным интегрированием.

Изменение начальной толщины фланца  $h_0$  находим по уравнению (7) при заданном малом перемещении  $V_0 dt$  точек фланца на радиусе  $r_0$  с учетом отрицательного направления скорости  $V_r$  с использованием формул (13), (16), (20)

$$dh/h_0 = (1 + c)V_r dt/r. \quad (21)$$

В табл. 2 и на рис. 3 приведены распределения скорости  $V_r/V_0$  и изменения толщины  $dh/h_0$  по радиусу фланца, вычисленные по уравнениям (20) и (21) при  $\omega_0 = \pi/3$ ,  $r_0 = 0.4038$ ,  $dt = 0.1$  при одноосном растяжении  $\sigma_r = \sigma_Y$ ,  $\sigma_\theta = 0$  на радиусе  $r_0$ . Скорость  $V_r/V_0$  снижается нелинейно от проема матрицы к свободной кромке фланца до значения 0.4099 при  $r/R = 1$ . При  $\omega = \pi/2$ ,  $r/R = 0.5913$  имеет место плоская деформация без изменения толщины вследствие равенств  $\sigma_r = -\sigma_\theta$  и  $c = -1$  в уравнениях (15), (16) и (21). При  $r/R > 0.5913$  начальная толщина фланца незначительно увеличивается и близка к постоянному значению. При  $r/R < 0.5913$  происходит быстрое уменьшение толщины, которая переходит в стенку оболочки вблизи закругленной кромки пуансона при его малом осевом перемещении. Этим можно объяснить известное на практике [1,7] локальное уменьшение толщины в виде “шейки” при глубокой вытяжке тонкостенной оболочки с плоским дном.

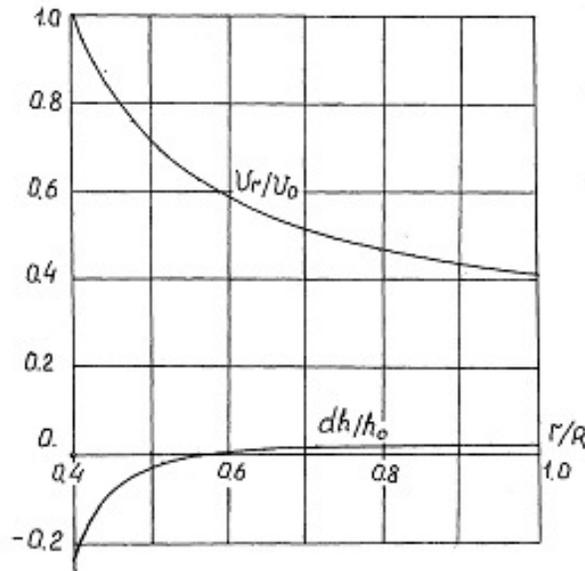


Рис. 3. Распределения скорости  $V_r$  и изменение толщины  $dh$

**Линии скольжения.** Дифференциальные уравнения линий скольжения  $\xi$ ,  $\eta$  на плоскости  $x, y$  при плоском напряженном состоянии и условии пластичности Мизеса в интервале  $\pi/6 \leq \omega \leq 2\pi/3$  имеют вид [2]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \psi) \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \quad \text{для } \eta, \quad (22)$$

$\omega$	$r/R$	$V_r/V_0$	$dh/h_0$	$\omega$	$r/R$	$V_r/V_0$	$dh/h_0$
1.047	0.404	1.000	-0.248	1.623	0.619	0.570	0.005
1.100	0.416	0.943	-0.189	1.676	0.649	0.546	0.010
1.152	0.430	0.891	-0.143	1.728	0.682	0.524	0.013
1.204	0.446	0.843	-0.108	1.780	0.717	0.504	0.015
1.257	0.462	0.799	-0.080	1.833	0.755	0.485	0.017
1.309	0.480	0.758	-0.058	1.885	0.796	0.467	0.018
1.361	0.499	0.720	-0.040	1.937	0.841	0.451	0.019
1.414	0.519	0.685	-0.027	1.990	0.889	0.436	0.020
1.466	0.542	0.653	-0.016	2.042	0.942	0.423	0.020
1.518	0.565	0.623	-0.007	2.094	1.000	0.410	0.020
1.571	0.591	0.596	0.000				

Таблица 2. Распределение скорости  $V_r$  и изменение толщины  $dh$ 

где  $\varphi$  – угол наклона напряжения  $\sigma_1$  к оси  $x$ ,  $\psi$  – угол наклона касательной к линиям скольжения к направлению  $\sigma_1$ . Угол  $\psi$  связан с параметром  $\omega$  соотношением

$$\operatorname{ctg} \omega = -v_3 \cos 2\psi. \quad (23)$$

Вдоль линий скольжения выполняются интегральные соотношения

$$\varphi - \lambda = \operatorname{const} \quad \text{вдоль} \quad \xi, \quad \varphi + \lambda = \operatorname{const} \quad \text{вдоль} \quad \eta, \quad (24)$$

где переменная  $\lambda$  определяется углом  $\psi$  по формуле

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg}^3 \psi, \quad (25)$$

и угол  $\psi$  связан с  $\omega$  соотношением (23). В рассматриваемой задаче радиального пластического течения радиус-вектор  $r$  определяется параметром  $\omega$  по формуле (13), и направление главного напряжения  $\sigma_1$  совпадает с направлением  $r$  при  $\varphi = \theta$ .

Линии скольжения с соотношениями (24) находим решением задачи Коши от свободной кромки фланца  $r = R$ , где  $\sigma_1 = 0$ ,  $\omega = 2\pi/3$  и переменные  $\psi$  и  $\lambda$  определяются формулами (23) и (25)

$$\varphi = \theta, \quad \lambda = 0.3398, \quad \psi = 0.6155, \quad r = R. \quad (26)$$

Значения  $\lambda$  и  $\varphi$  в точке пересечения линий скольжения  $\xi$  и  $\eta$  находим из соотношений (24)

$$\lambda = S(\lambda_1 + \lambda_2 + \varphi_2 - -\varphi_1), \quad \varphi = S(\lambda_2 - -\lambda_1 + \varphi_1 + \varphi_2), \quad (27)$$

где  $\lambda_1$ ,  $\varphi_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\varphi_2$  – известные значения (26) на границе  $r = R$  на линиях скольжения  $\xi$  и  $\eta$  соответственно. Затем по формулам (25), (23) находим  $\psi$ ,  $\omega$  и по формуле (13) – радиус-вектор  $r$  точки пересечения линий скольжения. Декартовы координаты точки  $(r, \varphi)$  определяются формулами  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . На рис. 4 показана сетка линий скольжения, вычисленная на секторе фланца  $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ ,  $0.5 \leq r/R \leq 1$  с отображением координат  $x$ ,  $y$  узловых точек в виде пикселей на экране монитора.

На границе  $r/R = 1$  заданы узловые точки с равномерным шагом по углу  $\varphi$ . От границы  $r/R = 1$  решается задача Коши по приведенным выше уравнениям. На границе  $\varphi = 0$  линии скольжения находятся решением смешанной задачи с использованием

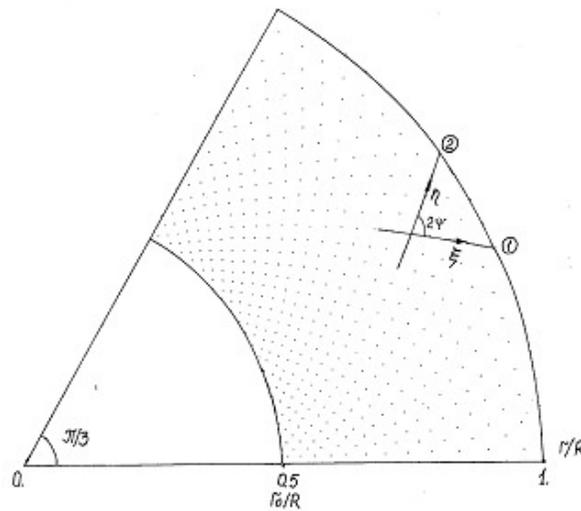


Рис. 4. Линии скольжения на секторе фланца  $0.5 \leq r/R \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/3$

второго соотношения (24) для  $\eta$  линии скольжения, из которого следует  $\lambda = \lambda_2 + \varphi_2$ ,  $\varphi = 0$ . На границе  $\varphi = \pi/3$  точки сетки линий скольжения находятся из решения смешанной задачи с использованием первого соотношения (24) для  $\xi$  линии скольжения, из которого следует  $\lambda = \lambda_1 - \varphi_1 + \pi/3$ ,  $\varphi = \pi/3$ . По значениям  $\lambda$  на границах  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/3$  находятся значения  $\psi$ ,  $\omega$ ,  $r$  и координаты  $x$ ,  $y$  по приведенным выше формулам. Линии скольжения ограничены неравенством  $r \geq r_0$  на границе  $r_0 = 0.5$ , где  $\omega = 1.362$ ,  $\psi = 0.8467$ .

Угол  $2\psi$  между направлениями  $\xi$  и  $\eta$  линий скольжения вдоль радиуса  $r$  уменьшается от 1.6934 при  $r_0 = 0.5$  до 1.2309 при  $r = 1$ . Линии скольжения ортогональны при  $r_0 = 0.5913$ , где  $\omega = \pi/2$  и  $\sigma_r = -\sigma_\theta$ . При  $r_0 = 0.3377$ , где  $\omega = \pi/6$ ,  $\psi = \pi/2$ , линии скольжения ортогональны к радиусу  $r$  и противоположно направлены.

**Заключение.** Приведено аналитическое решение задачи идеально пластического течения фланца при плоском напряженном состоянии при вытяжке тонкостенной цилиндрической оболочки при условии пластичности Мизеса в параметрической форме по Соколовскому. По ассоциированному закону пластического течения вычислена радиальная скорость пластического течения и изменение начальной толщины фланца заготовки при глубокой вытяжке. Вычислены линии скольжения на плоском фланце.

Предельное отношение начального диаметра заготовки к диаметру проема матрицы по условию разрушения металла в стенке оболочки по механизму образования “шейки” при условии пластичности Мизеса ниже по сравнению с условием пластичности Треска, которое используется в теории глубокой вытяжки цилиндрической оболочки с плоским дном.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
- [2] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

- [3] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.
- [4] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [5] Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. М: Машиностроение, 1977. 278 с.
- [6] Аверкиев Ю. А., Аверкиев А. Ю. Технология холодной штамповки. М.: Машиностроение, 1989. 304 с.
- [7] Романовский В. П. Справочник по холодной штамповке. Л.: Машиностроение, 1979. 520 с.
- [8] Непершин Р. И. Вытяжка тонкостенной конической оболочки из плоской заготовки // 2010. МТТ. № 1. С. 139–153.
- [9] Непершин Р. И. Глубокая вытяжка тонкостенной полусферы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 74–84.
- [10] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU “STANKIN”, 2016. 310 p.

R. I. Nepershin

## ON THE PLASTIC FLOW OF THE FLANGE DURING THIN-WALLED CYLINDER SHELL DRAWING WITH MISES YIELD CRITERION

*Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia*

**Abstract.** Analytical solution of the flange ideal plastic flow during thin-walled cylinder shell drawing is presented. Plane stress theory with Mises yield criterion, developed by Sokolovskii, is used. The plastic stress state is given in the parameter form solution, followed by calculations of the radial velocity, the initial thickness variation and slip lines on the workpiece flange. The limit relation of the workpiece diameter to the matrix diameter, constrained by maximal tension stress on the matrix contour, in the case of Mises yield criterion is lower compared with the cylinder shell deep drawing theory based on Tresca yield criterion.

**Keywords:** ideal plasticity, Mises yield criterion, plane stress theory, deep drawing, thin-walled cylinder shell, flange radial flow, thickness variation, slip lines.

### REFERENCES

- [1] Dzhonson U., Mellor P. Teoriya plastichnosti dlya inzhenerov. M: Mashinostroyeniye, 1979. 567 s. (in Russian)
- [2] Sokolovskiy V. V. Teoriya plastichnosti. M.: Vysshaya shkola, 1969. C. 608. (in Russian)
- [3] Tomlenov A. D. Teoriya plasticheskogo deformirovaniya metallov. M.: Metallurgiya, 1972. 408 s. (in Russian)
- [4] Khill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Gostekhizdat, 1956. 407 s. (in Russian)
- [5] Popov Ye. A. Osnovy teorii listovoy shtampovki. M: Mashinostroyeniye, 1977. 278 s. (in Russian)
- [6] Averkiyev YU. A., Averkiyev A.YU. Tekhnologiya kholodnoy shtampovki. M.: Mashinostroyeniye, 1989. 304 s. (in Russian)
- [7] Romanovskiy V. P. Spravochnik po kholodnoy shtampovke. L.: Mashinostroyeniye, 1979. 520 s. (in Russian)
- [8] Nepershin R. I. Vytyazhka tonkostennoy konicheskoy obolochki iz ploskoy zagotovki // MTT. 2010. № 1. S. 139-153. (in Russian)
- [9] Nepershin R. I. Glubokaya vytyazhka tonkostennoy polusfery // Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin. 2014. № 1. S. 74–84. (in Russian)
- [10] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU “STANKIN”, 2016. 310 p.

---

*Nepershin Rostislav Ivanovich*,  
e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

С. О. Фоминых<sup>1</sup>

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ И АНИЗОТРОПИИ ПО МИЗЕСУ–ХИЛЛУ

<sup>1</sup> Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Рассматривается двуслойная толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего давления. Предполагается, что материал, обладающий свойствами анизотропии по Хиллу, примыкает к внутренней части трубы (первый слой), второй слой обладает свойствами трансляционной анизотропии. Определено напряженное состояние трубы в пластической области.

**Ключевые слова:** анизотропия, трансляционная анизотропия, труба, напряжение, пластичность.

УДК: 539.374

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам

$$\alpha = \frac{a}{\rho_s^0}, \quad c = \frac{c}{\rho_s^0}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_s^0},$$

где  $\rho_s^0$  — радиус упругопластической границы в исходном нулевом приближении,  $\rho$  — текущий радиус.

В первой, внутренней области I  $a < \rho < c$  (рис. 1) имеет место условие пластичности

$$A \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) + B \tau_{xy}^2 = K_1^2, \quad A, B, K_1 - \text{const.} \quad (1)$$

Во внешней области II  $c < \rho < b$  условие пластичности примем в виде

$$\left( \frac{\sigma_x^{(p)} - \sigma_y^{(p)}}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy}^{(p)} - k_3)^2 = K_2^2, \quad k_1, k_2, k_3, K_2 - \text{const.}, \quad (2)$$

где  $\sigma_x^{(p)}$ ,  $\sigma_y^{(p)}$ ,  $\tau_{xy}^{(p)}$  — компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Будем считать компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к некоторой величине  $k_0$ .

© Фоминых С. О., 2018

Фоминых Светлана Олеговна

e-mail: ermakovaso@gambler.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.09.2018

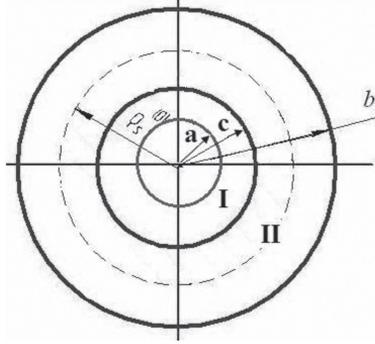


Рис. 1.

Согласно (1), (2) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат  $x, y$ .

Связь между напряжениями в декартовой системе координат  $x, y$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (3)$$

Из (1), (2), (3) получим условия пластичности в полярных координатах: в первой, внутренней области I

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right)^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta\right] + (\tau_{\rho\theta}^p)^2 \left[\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\theta\right] + \\ + \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2}\right) \tau_{\rho\theta}^p [A-B] \sin 4\theta - K_1^2 = 0;\end{aligned}\quad (4)$$

во внешней области II

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2}\right) + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2}\right) \cos(2\theta + \mu) - \\ - 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} R \sin(2\theta + \mu) + R^2 - 1 = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2} = k_3^2, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin \mu.$$

Решение будем искать в виде разложения по малому безразмерному параметру  $\delta$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)}.\quad (6)$$

Предположим

$$A = 1 + d_1 \delta, \quad B = 1 - d_1 \delta, \quad 0 \leq d_1 \leq 1.\quad (7)$$

В нулевом исходном осесимметричном состоянии положим

$$\sigma_\rho^{(0)} = \sigma_\rho^{(0)}(\rho), \quad \sigma_\theta^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)}(\rho), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \quad (8)$$

В исходном нулевом приближении согласно (4), (8) имеет место

$$\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = \pm 2K_1.$$

При растяжении пластины

$$\sigma_\theta^{(0)} > \sigma_\rho^{(0)}, \quad \sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} = -2K_1. \quad (9)$$

Для определения компонент напряжений во внутренней пластической области в нулевом приближении используем уравнение равновесия в полярной системе координат

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)p}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{\rho} = 0. \quad (10)$$

Из (9), (10) получим

$$\sigma_\rho^{(0)} = 2K_1 \ln \rho + C_1, \quad \sigma_\theta^{(0)} = 2K_1(1 + \ln \rho) + C_1. \quad (11)$$

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление  $p$ :

$$\sigma_\rho^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -p, \quad \sigma = \frac{a}{\rho_s}. \quad (12)$$

Напряжения в первой, внутренней области I имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2K_1 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2K_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha}\right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \quad (13)$$

В исходном нулевом приближении во внешней пластической области согласно (5), (10) имеет место

$$\sigma_\rho^{(0)} = 2K_2 \ln \rho + C_2, \quad \sigma_\theta^{(0)} = 2K_2(1 + \ln \rho) + C_2. \quad (14)$$

Условия сопряжения компонент напряжений на границе имеют вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=c} = \sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=c}. \quad (15)$$

Напряжения во внешней пластической области II имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \ln \frac{\rho}{c}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{c}\right). \quad (16)$$

Из (4) во внутренней зоне в первом приближении имеет место

$$\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p} = d_1 K_1 \cos 4\theta. \quad (17)$$

Решение неоднородного уравнения (17) представимо в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Частным решением неоднородного уравнения является:

$$\sigma_{\rho_1}^{(I)} = \frac{7}{8} K_1 \cos 4\theta, \quad \sigma_{\theta_1}^{(I)} = -\frac{1}{8} K_1 \cos 4\theta, \quad \tau_{\rho\theta_1}^{(I)} = -\frac{1}{4} K_1 \sin 4\theta. \quad (18)$$

Общее решение в первом приближении согласно (1) и (18) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} = & \frac{1}{\rho} [(C_{41}(-15) + \sqrt{15}C_{42}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \\ & + (-\sqrt{15}C_{41} + C_{42}(-15)) \sin(\sqrt{15} \ln \rho)] \cos 4\theta + \frac{7}{8} K_1 \cos 4\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= \frac{1}{\rho} [(C_{41}(-15) + \sqrt{15}C_{42}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \\
&+ (-\sqrt{15}C_{41} + C_{42}(-15)) \sin(\sqrt{15} \ln \rho)] \cos 4\theta - \frac{1}{8} K_1 \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= \frac{1}{\rho} [4\sqrt{15} \{C_{42} \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - C_{41} \sin(\sqrt{15} \ln \rho)\} \sin 4\theta] - \frac{1}{4} K_1 \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{19}$$

В первом приближении граничные условия согласно [1] имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha.
\end{aligned} \tag{20}$$

Согласно (19), (20) получим

$$\begin{aligned}
C_{41} &= \frac{\alpha}{240} K_1 (\cos(\sqrt{15} \ln \alpha) - \sqrt{15} \sin(\sqrt{15} \ln \alpha)), \\
C_{42} &= \frac{\alpha}{240} K_1 (\sqrt{15} \cos(\sqrt{15} \ln \alpha) + \sin(\sqrt{15} \ln \alpha)).
\end{aligned}$$

Результирующие напряжения во внутренней пластической области имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= K_1 \left[ -\frac{\alpha}{\sqrt{15}\rho} \sin \left( \sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= K_1 \left[ -\frac{\alpha}{\sqrt{15}\rho} \sin \left( \sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= K_1 \left[ \frac{\alpha}{4\sqrt{15}\rho} \left\{ \sqrt{15} \cos \left( \sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sin \left( \sqrt{15} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{21}$$

Во внешней области

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{3}{\rho} (C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{\rho} (C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \left. \right\} \cos 2\theta + \\
&+ \left\{ -\frac{3}{\rho} (C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{\rho} (C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \left. \right\} \sin 2\theta + R' \cos(2\theta + \mu), \\
\sigma_{\theta}^{(I)p} &= \left\{ -\frac{3}{\rho} (C_{11} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{\rho} (C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \left. \right\} \cos 2\theta + \\
&+ \left\{ -\frac{3}{\rho} (C_{21} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{\rho} (C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \left. \right\} \sin 2\theta - R' \cos(2\theta + \mu),
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} (C_{12} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{11} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \right\} \sin 2\theta - \\ & - 2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\rho} (C_{22} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) - C_{21} \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \right\} \cos 2\theta - R' \sin(2\theta + \mu), \end{aligned}$$

где  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  — некоторые постоянные.

Условия сопряжения компонент напряжений на границе имеют вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(I)p}|_{\rho=c} = \sigma_{\rho_2}^{(I)p}|_{\rho=c}. \quad (23)$$

Из (23) определим коэффициенты  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$ :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{R'c}{2} \cos \mu \left( \cos(\sqrt{3} \ln c) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3} \ln c) \right), \\ C_{12} &= \frac{R'c}{2} \cos \mu \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{3} \ln c) + \sin(\sqrt{3} \ln c) \right), \\ C_{21} &= \frac{R'c}{2} \sin \mu \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3} \ln c) - \cos(\sqrt{3} \ln c) \right), \\ C_{22} &= -\frac{R'c}{2} \sin \mu \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{3} \ln c) + \sin(\sqrt{3} \ln c) \right). \end{aligned}$$

Результирующие напряжения в пластической области во второй зоне имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= -R' \left[ \frac{c}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &+ K_1 \left[ -\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left( \sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= -R' \left[ \frac{c}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) + 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &+ K_1 \left[ -\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left( \sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= R' \left[ \frac{c}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu) + \\ &+ K_1 \left[ \frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left( \sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left( \sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической области полностью определено.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Фоминых С. О. Упругоидеальнопластическое состояние анизотропной трубы // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Ч. 3. С. 623–627.

S. O. Fominykh<sup>1</sup>

**DETERMINATION OF THE STRESS STATE IN THE PLASTIC REGION  
OF A THICK-WALLED PIPE UNDER THE CONDITION OF PLASTICITY  
OF TRANSLATIONAL ANISOTROPY AND MISES–HILL ANISOTROPY**

<sup>1</sup>*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** A two-layer thick-walled pipe under the action of internal pressure is considered. It is assumed that a material with Hill anisotropy properties is adjacent to the inside of the pipe (the first layer), the second layer has the properties of translational anisotropy. The stress state of the pipe in the plastic region is determined.

**Keywords:** anisotropy, transmitting anisotropy, a pipe, pressure, plasticity.

**REFERENCES**

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. *Metod vozmuchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela*. M.: Nauka, 1978. 208 s. (in Russia)
- [2] Fominykh S. O. Uprugoidealnoplasticheskoe sostojanie anizotropnoj trubyy // *Vestnik ChGPU im. I. Ja. Jakovleva*. Serija: *Mehanika predelnogo sostojanija*. 2010. № 2(8). Ch. 3. S. 623–627. (in Russia)

---

*Fominykh Svetlana Olegovna*

e-mail: [ermakovaso@rambler.ru](mailto:ermakovaso@rambler.ru), Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Russia

Л. А. Максимова, Е. Г. Гоник, М. А. Смоленцева

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЕРЕКРЫТИЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ГАЗОБЕТОННЫХ ПАЗОГРЕБНЕВЫХ БЛОКОВ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** В работе исследуется напряженно-деформированное состояние перекрытия, состоящее из пазогребневых блоков. Было выполнено компьютерное моделирование перекрытия в двух вариантах. Линейный расчет сделан в программном комплексе “Лира-САПР”. Определены максимальные вертикальные перемещения конструкции сборно-монолитного перекрытия.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние (НДС), пазогребневые блоки, надежность, прочность, звукоизоляция, теплоэффективность, экономическая эффективность, сборно-монолитное перекрытие, линейный расчет конструкции, газобетонные блоки Aeroc Classic, геометрическая нелинейность, ползучесть бетона.

УДК: 692.522.3

### Введение.

Надежность, прочность, звукоизоляция, теплоэффективность, экономическая эффективность - наиболее важные критерии выбора перекрытия здания. Уменьшение расхода строительных материалов при сохранении несущей способности конструкций обеспечивает существенный экономический эффект. На сегодняшний день оптимальным вариантом перекрытия является сборно-монолитное перекрытие в здании. Данный тип перекрытия может быть выполнен без использования специальной техники, а по своим свойствам (несущей способности, жесткости, звукоизоляции, теплоэффективности) отвечает всем нормативным требованиям. Сборно-монолитное перекрытие представляет конструкцию несущих балок и различных типов легких заполнителей.

---

© Максимова Л. А., Гоник Е. Г., Смоленцева М. А., 2018

*Максимова Людмила Анатольевна*

**e-mail:** maximova\_ng@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительных конструкций, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия,

*Гоник Екатерина Григорьевна*

**e-mail:** katu.gonik@mail.ru, старший преподаватель кафедры строительных конструкций, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия,

*Смоленцова Мария Александровна*

**e-mail:** maximova\_ng@mail.ru, магистрант строительного факультета, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Поступила 14.10.2018

На мировом рынке используют перекрытия нескольких компаний. Наиболее известные в России и Европе: “Teriva”, “Porotherm”, “Rectolight”, “YTONG”, “Марко” и другие [1-6]

Для исследования было выбрано проектируемое перекрытие при реконструкции существующего жилого здания, заключающейся в надстройке 2 этажей. Для определения общих принципов армирования сборно-монолитного перекрытия необходимо понять характер его работы посредством анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) с помощью современных программных комплексов.

На данный момент методика расчета сборно-монолитных плит в нормативной литературе до конца не сформирована. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании конечных конструкций сборно-монолитных перекрытий с элементами применения газобетонных блоков. Методика позволяет получить расчетную модель, приближенную к реальным условиям работы конструкции.

#### Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС).

Перекрытие смоделировано в двух вариантах. Нагрузки на перекрытия заданы согласно [7].

Первый вариант – линейный расчет конструкции сборно-монолитного перекрытия, представляющего собой часто - ребристое монолитное перекрытие, пространство между ребрами которого заполнено блоками из газобетона. В этом случае ребра перекрытия представляют собой монолитные железобетонные балки размерами 125x250мм (h) из бетона В25 и арматуры А400 d10, d20мм. Заполнение пространства между балками пространства запроектировано газобетонными блоками Аерос Classic 250 D500 размером 625x250x250 рис.1

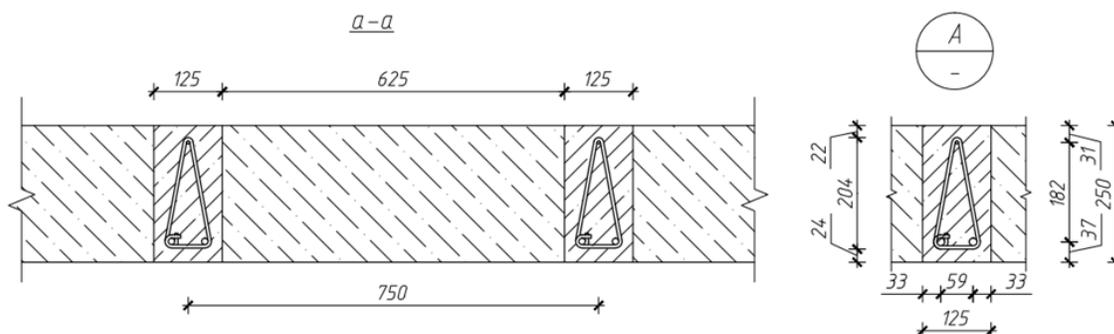


Рис. 1. 1 вариант устройства сборно-монолитного перекрытия.

Максимальные вертикальные перемещения конструкции сборно-монолитного перекрытия по результатам линейного расчета в программном комплексе “Ли́ра-САПР” составил 12мм.

Второй вариант - разрабатывается схема сборно-монолитного перекрытия с армированной набетонкой и задаются характеристики материалов для нелинейного расчета с учетом ползучести бетона. Во втором случае перекрытие представляет собой часто - ребристое монолитное перекрытие, пространство между ребрами которого заполнено газобетонными блоками. Ребра представляют собой монолитные железобетонные балки размерами 125x250мм (h) из бетона В25 и арматуры А400 d10, d20мм. Заполнение

пространства запроектировано газобетонными блоками Аерос Classic 250 D500 размером 625x250x250 и слоем набетонки в верхней плоскости перекрытия из бетона В25 толщиной 40мм, армированного сеткой из арматуры А400 d10 с ячейкой 100x100мм рис.2.

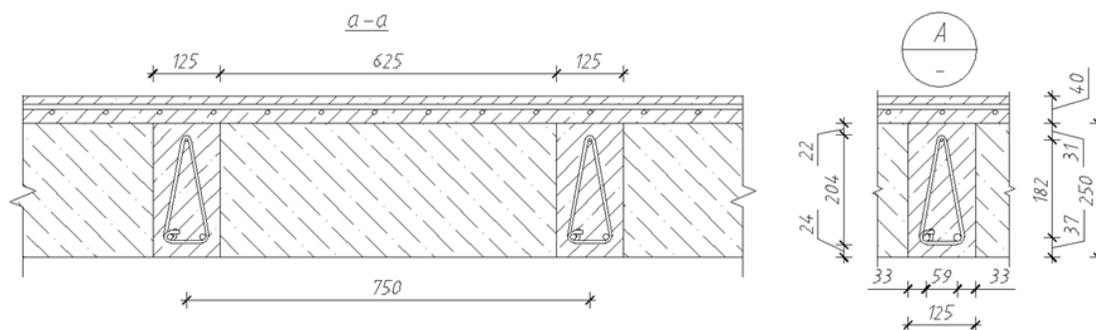


Рис. 2. 2 вариант устройства сборно-монолитного перекрытия.

Максимальные вертикальные перемещения конструкции сборно-монолитного перекрытия по результатам линейного расчета в программном комплексе “Лира-САПР” составили 27мм.

Для расчета в программном комплексе “Лира-САПР” была выбрана следующая расчетная схема рис.3.

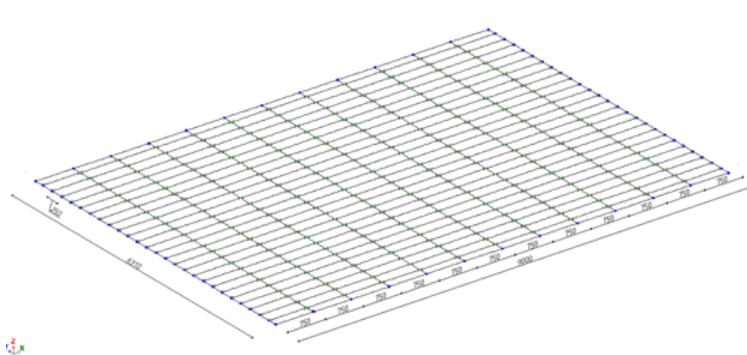


Рис. 3. Расчетная схема перекрытия.

### Выводы.

По результатам исследования было выявлено, что оптимальным вариантом моделирования и расчета сборно-монолитного перекрытия в программных комплексах является расчет с учетом геометрической нелинейности и учетом ползучести бетона, позволяющие определить большие перемещения конструкций с неизменяемой формой, что приближает расчетные параметры к реальным условиям работы конструкции.

Анализируя напряженно-деформированное состояние сборно-монолитного перекрытия с применением газобетонных блоков в программном комплексе “ЛИРА-САПР”

можно сделать вывод, что при проектировании данного перекрытия рекомендуется устройство армированной набетонки для снижения деформации и увеличения несущей способности[8]. Значения внутренних силовых факторов при 1 варианте представлены в таблице 1, при 2 варианте в таблице 2.

Усилия, перемещения в стержнях модели перекрытия	Перекрытие с использованием газобетонных блоков (линейный расчет)
Максимальное балки по оси Z	12мм
Изгибающий момент в $M_y$	1,39 т*м
Изгибающий момент в $M_x$	0,472 т*м
Перерезывающая сила в $Q_z$	3,42т

Таблица 1.

Усилия, перемещения в модели сборно-монолитного перекрытия	Перекрытие с газобетонных пазогребневых блоков и набетонки (нелинейный расчет)
Максимальное балки по оси Z	26,85мм
Изгибающий момент в $M_y$	1,47 т*м
Изгибающий момент в $M_x$	0,33 т*м
Изгибающий момент в $M_z$	0,28 т*м
Перерезывающая сила в $Q_z$	2,83т
Перерезывающая сила в плоскости $Q_y$	2,39т
сила N	3,57т

Таблица 2.

Перемещения по вертикали для 1 варианта перекрытия рис.4 и для 2 варианта находятся в пределах нормы [7].

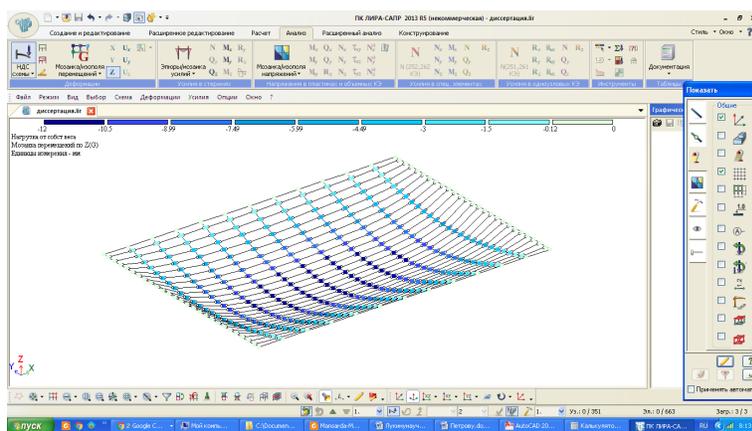


Рис. 4. Мозаика/изополя перемещений “Z” для 1 варианта перекрытия.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Цай Т. Н. Строительные конструкции. Железобетонные конструкции. Санкт-Петербург: Изд-во Лань, 2012.
- [2] Сагадеев Р. А. Строительство монолитных и сборно-монолитных зданий. Учебное пособие. М.: Изд-во ГАСИС, 2005.
- [3] Пинскер В. А., Вылегжанин В. П., Почтенко А. Г. Сборно-монолитные перекрытия из ячеистобетонных блоков // Ячеистые бетоны в современном строительстве. Сборник докладов. Выпуск 4. Санкт-Петербург НП «Межрегиональная Северо-Западная палата», Центр ячеистых бетонов, 2007. С. 14–16.
- [4] Паращенко Н. А., Горшков А. С., Ватин Н. И. Частично-ребристые сборно-монолитные перекрытия с ячеистыми блоками // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. С. 50–68.
- [5] Пушкарев Б. А., Кореньков П. А. Сборно-монолитные железобетонные конструкции, сферы применения и особенности расчета // Строительство и техногенная безопасность. 2013. № 46. С. 30–35.
- [6] Богачёва С. В. Особенности расчета сборно-монолитных перекрытий каркасных зданий с несъемной железобетонной опалубкой [Текст] // Технические науки: проблемы и перспективы: материалы IV Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, июль 2016 г.). СПб.: Свое издательство, 2016. С. 74–77.
- [7] СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\*. М.: ГУП НИИЖБ, 2011. 95 с.
- [8] СП 63.13330.2017. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М.: ГУП НИИЖБ, 2012. 161 с.

*L. A. Maksimova, E. G. Gonik, M. A. Smolenceva*

**INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE CEILING, CONSISTING OF CONCRETE, GYPSUM PARTITION BLOCKS**

*I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** In this paper, the stress-strain state of the overlap, consisting of pazogrebnevyh blocks. Computer simulation of the overlap in two variants was performed. Linear calculation is made in the "Lira-CAD" software package. The maximum vertical displacements of the precast-monolithic slab structure are determined.

**Keywords:** stress-strain state (SSS), pazogrebnevye blocks, reliability, strength, sound insulation, thermal efficiency, economic efficiency, precast-monolithic slab, linear design calculation, Aeroc Classic aerated concrete blocks, geometric nonlinearity, creep of concrete.

## REFERENCES

---

*Maksimova Lyudmila Anatolyevna,*  
e-mail: maximova\_ng@mail.ru, Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia,  
*Gonik Ekaterina Grigoryevna,*  
e-mail: katya.gonik@mail.ru, Senior lecturer, I. N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia,  
*Smolenceva Mariya Aleksandrovna,*

[1] Сај Т. Н. Строitel'nye konstrukcii. Zhelezobetonnye konstrukcii. Sankt-Peterburg: Izd-vo Lan', 2012.

[2] Sagadeev R. A. Stroitel'stvo monolitnyh i sborno-monolitnyh zdaniy. Uchebnoe posobie. M.: Izd-vo GASIS, 2005.

[3] Pinsker V. A., Vylegzhanin V. P., Pochtenko A. G. Sborno-monolitnye perekrytiya iz yacheistobetonnyh blokov // YAcheistyie betony v sovremennom stroitel'stve. Sbornik dokladov. Vypusk 4. Sankt-Peterburg NP "Mezhregional'naya Severo-Zapadnaya palata", Centr yacheistyh betonov, 2007. S. 14–16.

[4] Parashchenko N. A., Gorshkov A. S., Vatin N. I. CHastichno-rebristyie sborno-monolitnye perekrytiya s yacheistymi blokami // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2011. N 6. C. 50–68.

[5] Pushkarev B. A., Koren'kov P. A. Sborno-monolitnye zhelezobetonnye konstrukcii, sfery primeneniya i osobennosti rascheta // Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost'. 2013. N 46. C. 30–35.

[6] Bogachyova S. V. Osobennosti rascheta sborno-monolitnyh perekrytij karkasnyh zdaniy s nes'emnoj zhelezobetonnoj opalubkoj [Tekst] // Tekhnicheskie nauki: problemy i perspektivy: materialy IV Mezhdunar. nauch. konf. (g. Sankt-Peterburg, iyul' 2016 g.). SPb.: Svoe izdatel'stvo, 2016. S. 74–77.

[7] SP 20.13330.2016 Nagruzki i vozdejstviya. Aktualizirovannaya redakciya SNIp 2.01.07-85\*. M.:GUP NIIZHB, 2011. 95 s.

[8] SP 63.13330.2017. Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii. Osnovnye polozheniya. Aktualizirovannaya redakciya SNIp 52-01-2003. M.:GUP NIIZHB, 2012. 161 s.

Р. И. Непершин

## О ВДАВЛИВАНИИ ЦИЛИНДРА В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

**Аннотация.** Представлено моделирование вдавливания цилиндра в идеально пластическое полупространство при плоской деформации с учётом контактного трения по Прандтлю. Численным интегрированием дифференциальных уравнений теории плоского пластического течения рассчитываются линии скольжения, годограф скоростей и диссипативная функция. Вычисляется криволинейная форма свободной границы пластической области, определяемая условием пластической несжимаемости в зависимости от глубины вдавливания цилиндра. Моделирование удовлетворяет полной системе уравнений теории плоской деформации при условии пластичности Мизеса с положительными значениями диссипативной функции в пластической области.

**Ключевые слова:** идеально пластическое полупространство, вдавливание цилиндра, плоская деформация, контактное трение, линии скольжения, годограф скоростей, диссипативная функция.

УДК: 539.374

**Введение.** Контактная задача теории идеальной пластичности о вдавливании жесткого цилиндра с учетом контактного трения имеет важное практическое значение для оценки несущей способности пластического полупространства. При малой глубине вдавливания цилиндра граница контакта с пластической областью близка к плоской. В этом случае предельное давление  $q = 2k(1 + \pi/2)$ ,  $k = \sigma_Y/\sqrt{3}$ ,  $\sigma_Y$  – напряжение текучести определяется решением Прандтля для плоского штампа [1-3] при отсутствии скольжения на границе контакта с образованием центральной жесткой зоны независимой от контактного трения. В случае идеально гладкого плоского штампа Хилла [1] возможно скольжение по всей границе контакта без образования центральной жесткой зоны, в котором граничные условия для напряжений и давление  $q$  совпадают с решением Прандтля. В [4] показано, что для плоского штампа при постоянном давлении  $q$  возможны решения с переменной центральной жесткой зоной, изменяющейся от нуля при скольжении по всей границе контакта для штампа Хилла, до максимальной величины при отсутствии скольжения на границе контакта для штампа Прандтля.

---

© Непершин Р. И., 2018

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 10.10.2018

В [2,5] приведены решения о начальном пластическом течении полупространства при давлении цилиндра в круговой лунке с построением линий скольжения для прямолинейной границы полупространства. В этих решениях в области однородного пластического сжатия около границы полупространства из годографа скоростей следует положительное значение главной скорости деформации  $\varepsilon_2$  и отрицательное значение диссипативной функции в этой области. Эти решения дают статическую нижнюю оценку давления на цилиндр, соответствующую граничным условиям для напряжений.

В настоящей работе вдавливание жесткого цилиндра в идеально пластическое полупространство моделируется численным решением дифференциальных уравнений теории плоского пластического течения [2,3]. Вычисляются линии скольжения и годограф скоростей с учетом контактного трения по Прандтлю и криволинейная граница «напльва» материала, вытесняемого цилиндром, определяемая условием пластической несжимаемости.

Параметром нагружения принимается угол контакта цилиндра с пластической областью. Криволинейная граница пластической области рассчитывается по степенной функции для угла наклона касательной, равного нулю при переходе к границе полупространства. Используются алгоритмы численного решения уравнений теории плоского пластического течения [6] для линий скольжения и годографа скоростей с контролем знака диссипативной функции. Центральная жесткая зона и граница скольжения зависят от контактного трения вследствие криволинейной границы контакта пластической области с цилиндром, в отличие от задачи вдавливания плоского штампа. Диссипативная функция положительна во всей пластической области. При отсутствии контактного трения центральная жесткая область не образуется. Скольжение происходит по всей границе контакта, с разрывом скорости вдоль жесткопластической границы по аналогии с гладким плоским штампом Хилла. При малом угле контакта и малом коэффициенте трения центральная жесткая область распространяется по всей границе контакта. Линии скольжения и годограф скоростей приближаются к решению Прандтля для плоского штампа вследствие малой кривизны свободной границы пластической области.

**Основные уравнения.** На рис.1 показаны линии скольжения в пластической области на плоскости  $x, y$ , нормальной к оси цилиндра справа от плоскости симметрии  $x = 0$ . При вдавливании цилиндра с радиусом  $R$  и длиной оси  $L \gg R$  пластическая область увеличивается от нуля до области, ограниченной границей контакта  $OA$  и свободной границей  $AB$ . При наличии контактного трения в окрестности линии симметрии образуется центральная жесткая область без скольжения на границе контакта  $OE$ . Жесткопластическая граница  $BCDG$  смещается по оси  $y$  на расстояние  $-y_G$ .

Цилиндр считаем неподвижным, полупространство перемещающимся со скоростью  $V = 1$  по оси  $y$ , дугу контакта  $R\alpha_A$  принимаем за единицу длины. Границу контакта  $OA$  задаем в параметрической форме в зависимости от угла наклона касательной  $\alpha$  к оси  $x$

$$x = R \sin \alpha, \quad y = R(1 - \cos \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A, \quad R = 1/\alpha_A. \quad (1)$$

Угол дуги контакта  $\alpha_A$  принимаем за параметр нагружения при вдавливании цилиндра на глубину  $h$ . Величина  $h$  определяется условием сохранения объема вытесняемого цилиндром с образованием «напльва» материала над границей полупространства  $y = h$ . Свободная граница пластической области  $AB$  – гладкая выпуклая кривая с углом наклона касательной  $\beta$  к оси  $x$ , определяемая дифференциальным уравнением

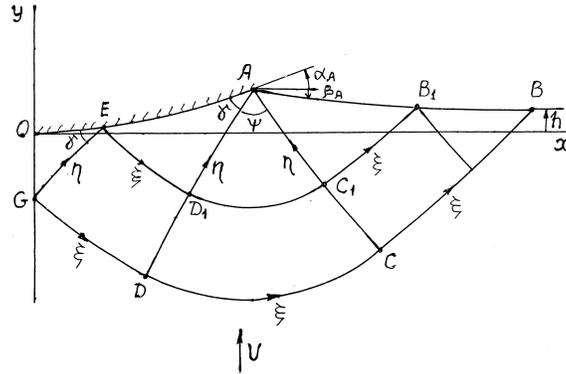


Рис. 1. Вдавливание цилиндра в идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения.

$$dy/dx = \operatorname{tg} \beta. \quad (2)$$

Угол  $\beta$  определяется степенной функцией в зависимости от координаты  $x$

$$\beta(x) = \beta_A [\zeta^m - 1], \quad \zeta = (x - x_A)/(x_B - x_A), \quad x_A < x < x_B, \quad (3)$$

при  $\beta = -\beta_A$  в точке  $A$  и  $\beta = 0$  в точке  $B$ . Параметр  $m$  позволяет изменять кривизну границы  $AB$ . Угол  $\beta_A$  зависит от граничных условий на границе контакта, которые приведены ниже, и от глубины вдавливания  $h$ . Координата  $x_B$  точки  $B$  является неизвестным параметром задачи, определяющим границы пластической области.

За единицу напряжения принимаем удвоенную пластическую постоянную  $2k = 2\sigma_Y/\sqrt{3}$  при условии пластичности Мизеса, где  $\sigma_Y$  – напряжение текучести при одноосном растяжении-сжатии. Контактное трение на границе скольжения  $EA$  задаем по Прандтлю безразмерным коэффициентом  $0 < \mu < 1/2$ . Гиперболические дифференциальные уравнения равновесия для напряжений и для скорости перемещений при плоской деформации идеально пластического тела [1-4] приводятся к линиям скольжения  $\xi, \eta$  с соотношениями Генки и Гейрингер

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \sigma - \varphi = \operatorname{const}, \quad dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{для } \xi, \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi, \quad \sigma + \varphi = \operatorname{const}, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{для } \eta, \quad (5)$$

где  $\varphi$  – угол наклона касательной к линии скольжения  $\xi$  к оси  $x$ ;  $\sigma$  – среднее напряжение;  $V_\xi, V_\eta$  – проекции вектора скорости на линии скольжения  $\xi$  и  $\eta$ . Нормальные и касательные напряжения вдоль линий скольжения равны  $\sigma$  и  $k = 1/2$ . Компоненты напряжения в координатах  $x, y$  определяются формулами

$$\sigma_x = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (6)$$

Проекция вектора скорости в координатах  $x, y$  связаны с  $V_\xi$  и  $V_\eta$  соотношениями

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi, \quad (7)$$

$$V_\xi = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_\eta = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi. \quad (8)$$

Несущая способность жесткой области полупространства проверяется продолжением линий скольжения ниже границы  $BCDG$  аналогично с задачей о вдавливании плоского штампа [7]. Совместность поля напряжений и скоростей перемещений определяется условием неотрицательности диссипативной функции [3]. На свободной границе  $AB$ , которая совпадает с направлением главного напряжения  $\sigma_2 = -1$  при  $\sigma_1 = 0$ , диссипативная неотрицательна если скорость деформации  $\varepsilon_2 \leq 0$  на границе  $AB$ . Условие неотрицательности диссипативной функции в пластической области выражается неравенством для максимальной скорости сдвига в ортогональных криволинейных координатах  $\xi, \eta$  [7]

$$\Gamma = \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} - V_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} + V_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \geq 0, \quad (9)$$

так как скорости перемещений  $V_\xi, V_\eta$  вычисляются вдоль линий скольжения по уравнениям Гейрингер в (4) и (5).

**Граничные условия.** На границе скольжения  $EA$  принимаем касательное напряжение трения  $\mu$  по Прандтлю, которое определяет угол наклона  $\gamma$  линии скольжения  $\eta$  к касательной в точках контактной границы. В координатах  $x_1, y_1$ , направленных по касательной и нормали к границе скольжения, касательное напряжение равно  $-\mu$  и угол наклона  $\varphi_1$  линии скольжения  $\xi$  к оси  $x_1$  равен  $\gamma - \pi/2$ . Из третьего уравнения (6) при  $\varphi_1 = \gamma - \pi/2$  и  $\tau_{x_1 y_1} = -\mu$  находим угол  $\gamma$ , и в точках границы скольжения, определяемых углом наклона касательной  $\alpha$  в соотношениях (1), находим угол наклона  $\varphi$  линий скольжения  $\xi$  к оси  $x$

$$\varphi = \gamma + \alpha - \pi/2, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu), \quad 0 \leq \mu < \frac{1}{2} \quad \text{на } EA. \quad (10)$$

На свободной границе  $AB$ , определяемой численным интегрированием уравнения (2) при известной функции  $\beta(x)$ , находим  $\sigma$  и  $\varphi$  из условия одноосного сжатия  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1$

$$\sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \beta + \frac{\pi}{4} \quad \text{на } AB, \quad (11)$$

так как линии скольжения  $\eta$  и  $\xi$  наклонены к нормали этой границы под углами  $\pm\pi/4$ .

Сингулярная точка  $A$  является вырожденной  $\xi$  линией скольжения, в которой  $\eta$  линии скольжения образуют центрированный веер с углом  $\psi$ , связанным с углами  $\alpha_A, \beta_A$  и  $\gamma$  соотношением

$$\psi = \frac{3\pi}{4} - (\alpha_A + \beta_A + \gamma). \quad (12)$$

Переменные  $\sigma$  и  $\varphi$  изменяются в точке  $A$  от свободной границы  $AB$  до границы контакта  $EA$  по второму соотношению (4)

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2} + \theta\right), \quad \varphi = \beta_A + \frac{\pi}{4} - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \psi. \quad (13)$$

Линии скольжения в области  $ABC$  находим решением задачи Коши для дифференциальных уравнений (4) и (5) с соотношениями Генки и граничными условиями (11). В области  $ACD$  линии скольжения находим решением задачи Гурса с известными значениями  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $\eta$  линии скольжения  $AC$  и на вырожденной  $\xi$  линии скольжения в точке  $A$ . В области  $AD_1E$  линии скольжения находим решением задачи смешанного типа с известными значениями  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $\eta$  линии скольжения  $AD_1$  с граничными условиями (10). В области  $EGDD_1$  линии скольжения находим решением задачи Гурса при известных значениях  $\sigma$  и  $\varphi$  на линиях скольжения  $ED_1$  и  $DD_1$ . В точке  $G$  должны выполняться два условия симметрии на оси  $y$  при  $\tau_{xy} = 0$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad x = 0. \quad (14)$$

Так как линии скольжения  $ED_1$  и  $DD_1$ , определяющие точку  $G$  при решении задачи Гурса, вычисляются от участков  $AB_1$  и  $BB_1$  свободной границы  $AB$ , то координаты  $x_{B_1}$  и  $x_B$  точек  $B_1$  и  $B$  границы  $AB$  являются двумя параметрами задачи, при которых выполняются условия (14). Третьим параметром, определяющим линии скольжения в пластической области, выбираем угол  $\psi$ . Угол  $\beta_A$  в точке  $A$  свободной границы  $AB$  находится из уравнения (12) при известных значениях  $\psi$ ,  $\alpha_A$  и  $\gamma$ . В случае идеально гладкого цилиндра ( $\mu = 0$ ) центральная жесткая зона не образуется. Точки  $G$  и  $E$  совпадают с началом координат. Граница скольжения  $EA$  совпадает со всей границей контакта  $OA$ . В этом случае линии скольжения определяются двумя параметрами  $\psi$  и  $x_B$ .

Глубина вдавливания цилиндра  $h = y_B$  и угол контакта  $\alpha_A$  связаны условием равенства объемов материала, выдавливаемого цилиндром, и наплыва над горизонтальной границей полупространства, которое приводит к уравнению

$$\cos \alpha_A + 2\alpha_A[h - I\alpha_A/\sin \alpha_A] = 1, \quad I = \int_A^B (y - h) dx. \quad (15)$$

Два условия (14) и уравнение (15) используются для вычисления трех параметров  $\psi$ ,  $x_{B_1}$  и  $x_B$ , определяющих линии скольжения с центральной жесткой зоной  $OEG$ , зависящей от контактного трения  $\mu$ . В случае идеально гладкого цилиндра параметры  $\psi$  и  $x_B$  определяются уравнением (15) и условием  $x = 0$  в точке  $O$  на жесткопластической границе  $O-B$ .

Скорости перемещений вычисляются по уравнениям Гейрингер с использованием кинематических граничных условий на жесткопластических границах  $B-G$ ,  $EG$  и на контактной границе скольжения  $EA$ . При движении жесткой области полупространства относительно неподвижной жесткой зоны  $OEG$  в точке  $G$  возникают разрывы скорости  $[V]_\xi = [V]_\eta = 1/\sqrt{2}$  вдоль  $\xi$  и  $\eta$  линий скольжения  $B-G$  и  $EG$ , которые определяют скорости пластической области на жесткопластических границах при  $\mu > 0$

$$V_\xi = \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на } B-G, \quad (16)$$

$$V_\xi = 0, \quad V_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{на } EG. \quad (17)$$

Равенство нулю нормальной скорости на границе  $AE$  приводит к соотношению

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } EA. \quad (18)$$

Разрыв скорости  $[V]_\eta = 1/\sqrt{2}$  вдоль  $\eta$  линии скольжения  $EG$  приводит к разрыву скорости  $[V]_\xi = 1/\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$  в точке  $E$  вдоль  $\xi$  линии скольжения  $E-B_1$  вследствие условия (18). При пересечении этой линии скорости  $V_\eta$  непрерывны, а скорости  $V_\xi$  изменяются скачком

$$V_\xi^+ = V_\xi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \gamma \quad \text{на } E - B_1, \quad (19)$$

где  $V_\xi^-$  и  $V_\xi^+$  – скорости  $V_\xi$  ниже и выше линии скольжения  $E-B_1$ . В случае идеально гладкого цилиндра возникает один разрыв скорости в точке  $O$ , равный  $\sqrt{2}$ , который остается постоянным вдоль жесткопластической границы  $O-B$ . Граничное условие (16) при  $\mu = 0$  заменяется соотношениями

$$V_\xi = \sin \varphi + \sqrt{2}, \quad V_\eta = \cos \varphi \quad \text{на } O - B, \quad (20)$$

и равенством  $V_\xi = V_\eta$  на границе  $OA$  в уравнении (18) вследствие равенства  $\gamma = \pi/4$ .

**Численное решение.** Решение уравнений (4) и (5) с приведенными граничными условиями выполняется численным методом. Расчеты автоматизированы программой на ФОРТРАНе с использованием циклических процедур решения задач Коши, Гурса и смешанного типа, и конечно-разностной аппроксимации уравнений теории плоской деформации, приведенными в [6,7] для регулярных узлов сетки линий скольжения.

При решении задачи смешанного типа в области  $EAD_1$  используем конечно-разностную аппроксимацию дифференциального уравнения (4) для  $\xi$  линий скольжения и условие (10) для угла  $\varphi$  на границе скольжения  $EA$  при  $\mu > 0$  или на границе  $OA$  при  $\mu = 0$

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi), \quad \varphi = \gamma + \alpha - \pi/2, \quad (21)$$

где нижним индексом  $_1$  обозначены известные значения переменных в ближайшем к границе скольжения узле  $\xi$  линии скольжения. Подстановка в (21) координат  $x, y$  из (1) и угла  $\varphi$  из (10) приводит к тригонометрическому уравнению для угла  $\alpha$  на границе скольжения, которое после преобразований принимает вид

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha + c = 0, \quad (22)$$

где

$$a = \alpha_A(a_2 y_1 + a_1 x_1) - a_2, \quad b = 1 - a_1 + \alpha_A(a_1 y_1 - a_2 x_1), \quad c = a_2 - \alpha_A x_1, \\ a_1 = \sin(\varphi_1 + \gamma), \quad a_2 = -\cos(\varphi_1 + \gamma).$$

Уравнение (22) приводится к квадратному уравнению для  $\sin \alpha$ , из которого находим

$$\sin \alpha = - \left( a \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + bc \right) (a^2 + b^2)^{-1}. \quad (23)$$

Затем по формулам (1) находим координаты точки на границе скольжения, по граничному условию (10) – угол  $\varphi$ , и по соотношению Генки вдоль  $\xi$  линии скольжения – среднее напряжение  $\sigma$

$$\sigma = \sigma_1 + \varphi - \varphi_1, \quad (24)$$

где  $\sigma_1$  и  $\varphi_1$  – известные значения  $\sigma$  и  $\varphi$  в ближайшей к границе скольжения точке  $\xi$  линии скольжения.

При вычислении сетки линий скольжения используется переменный массив числовых данных **KSI** в узловых точках  $\xi$  линий скольжения, используемый в циклических алгоритмах решения краевых задач Коши, Гурса и смешанного типа [6,7]. Входными данными вычислительной программы являются контактное трение  $\mu$ , угол контакта  $\alpha_A$ , угловой шаг  $\Delta\varphi$  веера линий скольжения в точке  $A$ , число точек  $N$  на свободной границе  $AB$  и начальные значения параметров  $\psi$ ,  $x_{B1}$ ,  $x_B$ . Граничные условия (14) выполняются варьированием параметров  $x_{B1}, x_B$  с точностью  $10^{-3}$ . Уравнение (15) решается варьированием параметра  $\psi$  с точностью  $10^{-6}$  и определяет глубину вдавливания цилиндра  $h$  и угол  $\beta_A$  в зависимости от  $\mu$  и  $\alpha_A$ . После вычисления сетки линий находим распределение давления  $p$  на контактной границе скольжения  $EA$

$$p = -\sigma + \frac{1}{2} \sin 2\gamma, \quad (25)$$

и жесткопластические границы  $EG$  и  $G-B$ . Среднее давление  $q$  на проекцию площади контакта на границу полупространства и погонную нагрузку  $Q$  по оси цилиндра находим численным интегрированием распределения нормального  $\sigma$  и касательного  $\tau = 1/2$  напряжений на жесткопластической границе  $G-B$

$$q = -(\alpha_A / \sin \alpha_A) \int_G^B (\sigma \cos \varphi + 1/2 \sin \varphi) ds, \quad Q = 2q \sin \alpha_A. \quad (26)$$

Для вычисления скоростей перемещений используются массивы **KSI** и **ETA** значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  на жесткопластических границах  $G-B$  и  $EG$  и массив **EA** значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  на границе скольжения  $EA$ . По этим данным вычисляется сетка линий скольжения с расчётами скоростей по уравнениям Гейрингер и проверкой неравенства (9) для диссипативной функции в регулярных узлах сетки линий скольжения и неравенства  $\varepsilon_2 \leq 0$  на границе  $AB$ .

В области, ограниченной линиями скольжения  $B-G$  и  $E-B_1$ , решается задача Гурса для уравнений Гейрингер с граничными условиями (16) и (17) при  $\mu > 0$  и определением скоростей на отрезке  $BB_1$  свободной границы  $AB$ . В области  $EAD_1$  решается задача смешанного типа с учётом разрыва скорости (19) на линии скольжения  $E-B_1$ . Скорости  $V_\xi$  и  $V_\eta$  в точках границы скольжения вычисляются с использованием граничного условия (18) и уравнения Гейрингер вдоль  $\eta$  линии скольжения, аппроксимируемого конечными разностями

$$V_\eta - V_{\eta 2} + \frac{1}{2}(V_\xi + V_{\xi 2})\Delta\varphi_2 = 0, \quad \Delta\varphi_2 = \varphi - \varphi_2, \quad (27)$$

где нижним индексом  $2$  обозначены известные значения  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  и  $\varphi$  в точке  $2$  на  $\eta$  линии скольжения ближайшей к границе  $EA$  с известным углом  $\varphi$  в точке границы  $EA$ . Из уравнений (18) и (27) находим скорости в точках границы  $EA$

$$V_\eta = (V_{\eta 2} - \frac{1}{2}V_{\xi 2}\Delta\varphi_2)/(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma \Delta\varphi_2), \quad V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \gamma. \quad (28)$$

В области  $AD_1C_1B_1$  решается задача Гурса, с известными значениями  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  на линии скольжения  $AD_1$  и разрывом скорости (19) на линии скольжения  $D_1C_1B_1$ . В результате находим скорости в сингулярной точке  $A$  и на отрезке  $AB_1$  свободной границы  $AB$ .

При  $\mu = 0$  скорости в области  $ODA$  находим решением задачи смешанного типа с граничными условиями (20) на  $OD$  и  $V_\xi = V_\eta$  на  $OA$  с использованием уравнений (27) и (28) при  $\gamma = \pi/4$ . Затем в области  $ADCB$  решается задача Гурса с известными значениями  $V_\xi, V_\eta$  на линиях скольжения  $DA$  и  $DCB$  с определением скоростей в сингулярной точке  $A$  и на свободной границе  $AB$ .

Неравенство  $\varepsilon_2 \leq 0$  на границе  $AB$  проверяется по изменению скоростей  $V_1$  и  $V_2$  по направлениям главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  вдоль границы  $AB$ , совпадающей с направлением главного напряжения  $\sigma_2$

$$V_1 = (V_\xi + V_\eta)/\sqrt{2}, \quad V_2 = (V_\eta - V_\xi)/\sqrt{2}, \quad (29)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta V_2}{\Delta s} + \tilde{V}_1 \Delta\beta, \quad \tilde{V}_1 = \frac{1}{2}(V_{11} + V_{12}), \quad (30)$$

где  $\Delta V_2$  – разность скоростей  $V_2$ ,  $\tilde{V}_1$  – средняя скорость  $V_1$ ,  $\Delta s$  – длина дуги,  $\Delta\beta$  – изменение угла наклона касательной между точками 1 и 2 вдоль границы  $AB$ .

В приводимых ниже расчетах представлены сетки линий скольжения, выводимые на экран монитора графическими процедурами ФОРТРАНа с распределениями давления на границе скольжения и годографы скоростей на плоскости  $V_x, V_y$ , вычисляемые по уравнениям (7).

**Численные результаты.** Ниже приведены результаты расчета вдавливания цилиндра в зависимости от угла контакта  $\alpha_A$  и контактного трения  $\mu$ . Линии скольжения и годографы скоростей, удовлетворяющие условию положительности диссипативной функции в пластической области, вычислены при  $m = 0.8$  в уравнении (3). Сетки линий скольжения вычислены с числом точек  $N = 26$  на границе  $AB$  и угловым шагом  $\Delta\varphi = 0.025$  веера линий скольжения в сингулярной точке  $A$ .

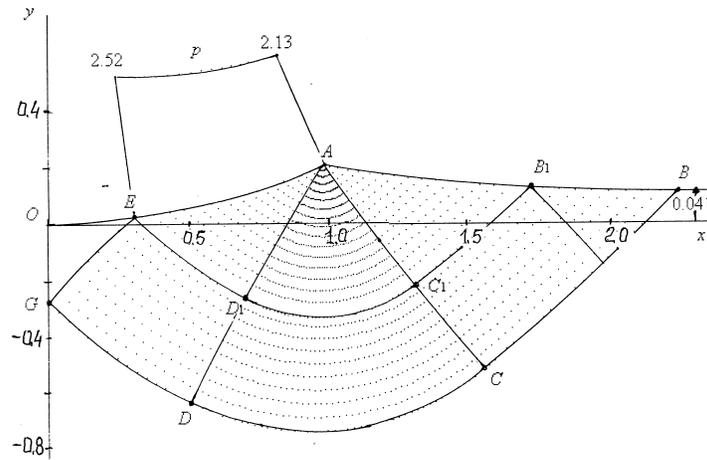


Рис. 2. Линии скольжения и распределение контактного давления при  $\mu = 0.15, \alpha_A = 0.4, \beta_A = 0.170, \psi = 1.153$ .

На рис. 2 показаны линии скольжения и распределение контактного давления для угла  $\alpha_A = 0.4$  при  $\mu = 0.15$ . Параметры  $\psi = 1.153, \beta_A = 0.170, x_B = 2.221$  и  $x_{B1} =$

1.706 определяют границу  $AB$ , среднее давление  $q = 2.437$ , погонную нагрузку  $Q = 1.898$  и глубину вдавливания цилиндра  $h = 0.041$ . Несмотря на невысокий коэффициент трения на границе  $OE$  образуется значительная жесткая зона с углом контакта  $\alpha_E = 0.122$  в точке  $E$ , занимающая более 30% полной дуги контакта с углом  $\alpha_A = 0.4$ . Кривизна жесткопластической границы  $GE$  незначительна при изменении угла  $\varphi$  от  $-0.785$  в точке  $G$  до  $-0.816$  в точке  $E$ . Вследствие кривизны границы контакта и свободной границы пластической области граница  $OE$  центральной жесткой зоны зависит от  $\mu$ , приближаясь к нулю при  $\mu \rightarrow 0$  и к точке  $A$  при увеличении  $\mu$ .

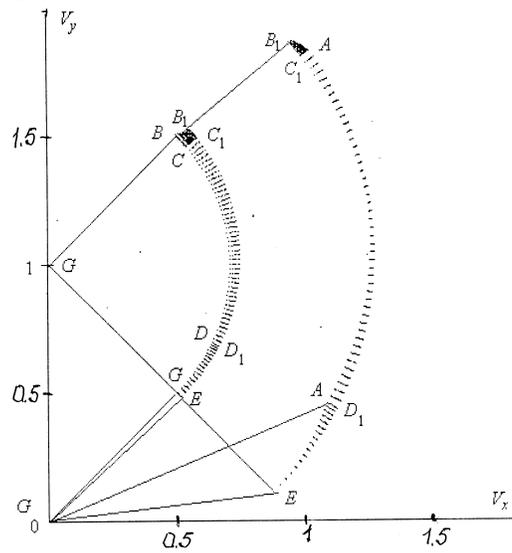


Рис. 3. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 2.

На рис. 3 показан годограф скоростей для линий скольжения на рис. 2. Жесткопластические границы  $G-B$  и  $GE$  отображаются на годографе дугами окружностей с центром в точке  $V_y = 1, V_x = 0$  и радиусами  $[V]_\xi = [V]_\eta = 1/\sqrt{2}$ , с центральным углом  $\pi/2$  для  $G-B$  и  $0.03$  для  $GE$ . Пластическая область  $GEB_1B$  отображается на годографе узким сегментом, определяемым дугами окружностей  $G-B$  и  $GE$ . В области  $BB_1C_1C$  скорости меняются незначительно вследствие малой кривизны линий скольжения. Разрыв скорости  $[V]_\xi = 1/\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$  вдоль  $\xi$  линии скольжения  $E-B_1$  приводит к смещению по нормали точек этой линии на годографе скоростей. Область  $AED_1$  отображается на годографе узким криволинейным треугольником при малом изменении скоростей вдоль  $\eta$  линий скольжения, имеющих малую кривизну. В области  $AC_1D_1$  происходит наибольшее изменение скоростей вдоль  $\xi$  линий скольжения с сингулярной точкой  $A$ . В области  $AB_1C_1$  скорости изменяются незначительно вследствие малой кривизны свободной границы и линий скольжения  $\xi$  и  $\eta$ . В регулярных узлах сетки линий скольжения и на линиях разрыва скоростей скорость сдвига  $\Gamma$  положительна. На границе  $AB$ , где  $\sigma_2 = -1$ , скорость деформации  $\varepsilon_2$  отрицательна. Диссипативная функция положительна во всей пластической области.

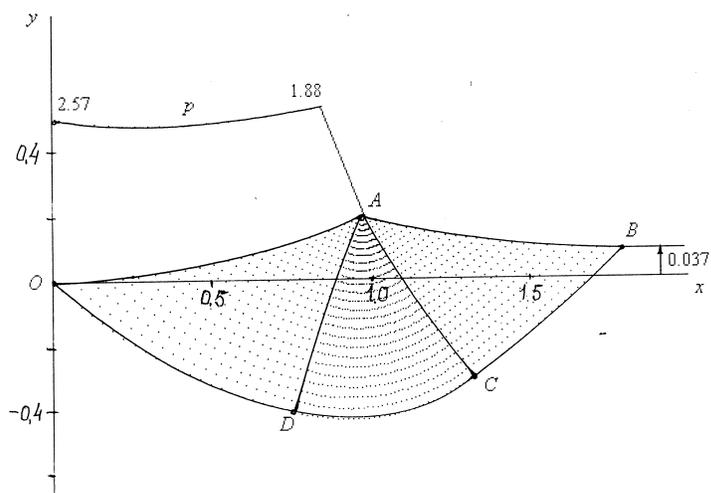


Рис. 4. Линии скольжения и распределение контактного давления при  $\mu = 0$ ,  $\alpha_A = 0.4$ ,  $\beta_A = 0.287$ ,  $\psi = 0.884$ .

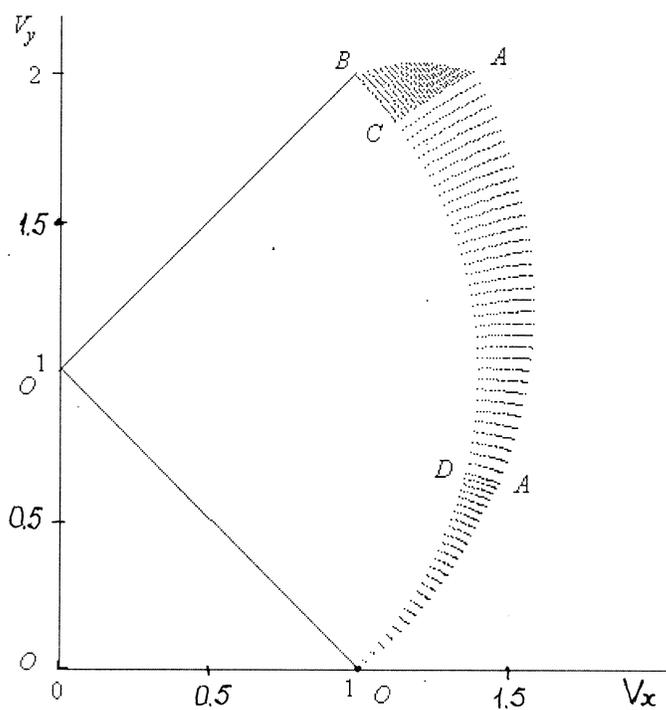


Рис. 5. Голограф скоростей для линий скольжения на рис. 4.

Таблица 1. Координаты границы  $AB$  при  $\mu = 0.15$  и  $\alpha_A = 0.4$  ( $AB_0$ ),  $\alpha_A = 0.41$  ( $AB_1$ ) и смещенной границы  $AB$  при  $\Delta h = 2.26 \times 10^{-3}$  ( $AB_C$ ).

$AB_0$		$AB_1$		$AB_C$	
$x/R$	$y/R$	$x/R$	$y/R$	$x/R$	$y/R$
0.4049	0.0764	0.4077	0.0813	0.4072	0.0805
0.4317	0.0722	0.4343	0.0770	0.4340	0.0764
0.4638	0.0677	0.4663	0.0722	0.4661	0.0719
0.4993	0.0632	0.5016	0.0675	0.5015	0.0674
0.5375	0.0589	0.5396	0.0629	0.5397	0.0631
0.5778	0.0549	0.5798	0.0587	0.5800	0.0591
0.6201	0.0513	0.6219	0.0549	0.6222	0.0555
0.6640	0.0482	0.6656	0.0515	0.6661	0.0524
0.6991	0.0461	0.7005	0.0493	0.7008	0.0499
0.7564	0.0435	0.7574	0.0463	0.7576	0.0469
0.8043	0.0420	0.8052	0.0446	0.8055	0.0455
0.8534	0.0412	0.8542	0.0436	0.8545	0.0446

На рис. 4 и 5 показаны линии скольжения и годограф скоростей для идеально гладкого цилиндра при  $\mu = 0$  и  $\alpha_A = 0.4$ . В этом случае центральная жесткая область отсутствует. Точки  $G$  и  $E$  совпадают с началом координат  $O$ . Давление  $q = 2.25$  и глубина вдавливания  $h = 0.037$  снижаются по сравнению с  $\mu = 0.15$  на рис. 2. Разрыв скорости вдоль жесткопластической границы  $O-B$ , равный  $\sqrt{2}$ , отображается на годографе скоростей на рис. 5 дугой окружности аналогично гладкому плоскому штампу Хилла. Но вследствие криволинейной границы контакта  $OA$  поле скоростей в контактной области  $OAD$  и в области  $ABC$  со свободной границей  $AB$  неоднородно по сравнению с плоским гладким штампом. Диссипативная функция в пластической области положительна при  $\varepsilon_2 < 0$  на границе  $AB$ .

Изменение скорости границы  $AB$  при малом приращении угла контакта  $\Delta\alpha_A$  позволяет вычислить смещение этой границы по приращению  $\Delta h$  глубины вдавливания, которое пропорционально приращению времени  $\Delta t$ . Сравнение координат границы  $AB$  для угла  $\alpha_A = 0.41$  с координатами смещенной границы  $AB$  для угла  $\alpha_A = 0.4$ , рассчитанными по среднему вектору скорости между точками начальной и смещенной границами

$$AB_C = AB_0 + V_c \Delta h,$$

показано в табл. 1 для  $\mu = 0.15$  и в табл. 2 для  $\mu = 0$ . Средние квадратические отклонения смещенной границы от расчетной при  $\alpha_A = 0.41$ , равные  $2.22 \times 10^{-3}$  при  $\mu = 0.15$  и  $2.14 \times 10^{-3}$  при  $\mu = 0$  на порядок ниже средних значений координаты  $y/R$  границы  $AB$  при  $\alpha_A = 0.41$ .

Расчеты свободной границы  $AB$  по уравнениям (2) и (3) с тремя параметрами  $m$ ,  $\beta_A$  и  $x_B$  приводят к удовлетворительному моделированию нестационарного процесса вдавливания цилиндра в идеально пластическое полупространство при численном интегрировании дифференциальных уравнений теории плоской деформации и выполнении условия неотрицательности диссипативной функции в пластической области.

Таблица 2. Координаты границы  $AB$  при  $\mu = 0$  и  $\alpha_A = 0.4$  ( $AB_0$ ),  $\alpha_A = 0.41$  ( $AB_1$  и смещенной границы  $AB$  при  $\Delta h = 1.87 \times 10^{-3}$  ( $AB_C$ ))

$AB_0$		$AB_1$		$AB_C$	
$x/R$	$y/R$	$x/R$	$y/R$	$x/R$	$y/R$
0.4009	0.0757	0.4045	0.0811	0.4034	0.0795
0.4186	0.0711	0.4221	0.0763	0.4211	0.0748
0.4398	0.0660	0.4430	0.0710	0.4423	0.0698
0.4633	0.0610	0.4663	0.0657	0.4657	0.0648
0.4884	0.0562	0.4912	0.0606	0.4908	0.0600
0.5151	0.0518	0.5176	0.0559	0.5174	0.0556
0.5430	0.0479	0.5452	0.0517	0.5452	0.0517
0.5719	0.0444	0.5739	0.0479	0.5741	0.0483
0.6019	0.0416	0.6036	0.0448	0.6040	0.0454
0.6326	0.0394	0.6342	0.0423	0.6347	0.0432
0.6643	0.0379	0.6656	0.0404	0.6663	0.0417
0.6966	0.0371	0.6977	0.0393	0.6986	0.0409

Сравнение линий скольжения на рис. 2 и 4 и численных значений координат границы  $AB$  в табл. 1 и 2 показывает уменьшение пластической области и давления на цилиндр при снижении трения.

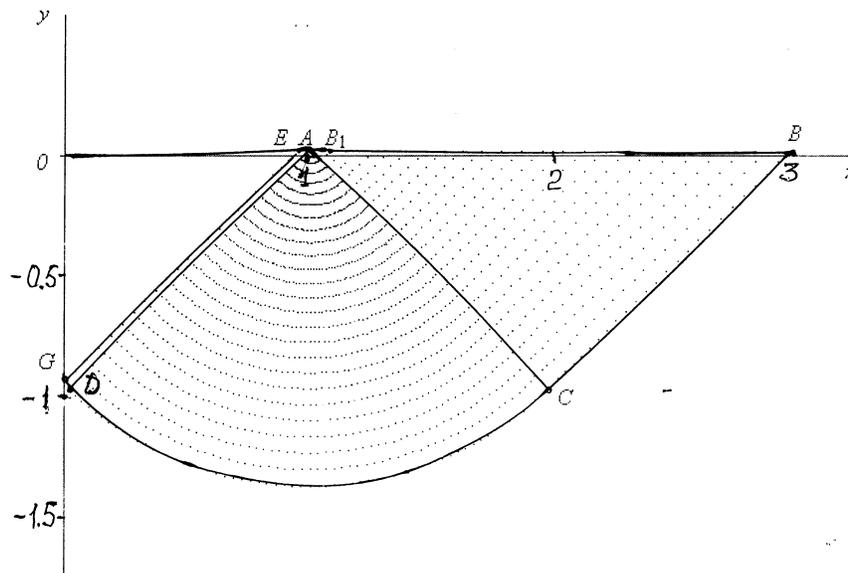


Рис. 6. Линии скольжения при  $\mu = 0.03$ ,  $\alpha_A = 0.03$ ,  $\beta_A = 0.0058$ ,  $\psi = 1.565$ .

С увеличением трения центральная жесткая область увеличивается. Граница скольжения  $EA$  уменьшается. Точка  $E$  и линия разрыва скорости  $E-B_1$  приближаются к

сингулярной точке  $A$ . При уменьшении угла  $\alpha_A$  предельное значение  $\mu$ , при котором центральная жесткая область распространяется на всю границу контакта  $OA$ , уменьшается. На рис. 6 и 7 показаны линии скольжения и годограф скоростей для  $\mu = 0.03$  и  $\alpha_A = 0.03$ , когда граница контакта приближается к плоскому штампу с малым трением. В этом случае граница  $AB$  почти прямолинейна при  $\beta_A = 0.0058$ ,  $\psi = 1.565$ ,  $q = 2.574$  и  $h = 0.0003$ . Коэффициент трения  $\mu = 0.03$  приводит к образованию жесткой зоны на границе штампа по Прандтлю. Жесткопластическая граница  $GE$  с углом  $\varphi_E = -0.787$  в точке  $E$  близка к прямой. Точка  $E$  с углом контакта  $\alpha_E = 0.0285$  почти совпадает с точкой  $A$ . Годограф скоростей, за исключением малой окрестности точки  $A$ , обусловленной кривизной контактной границы, совпадает с решением Прандтля.

Таблица 3. Вдавливание цилиндра в идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения. ( $ABC$ )

$\mu$	$\psi$	$-\beta_A$	$\alpha_E$	$x_B/R$	$-y_G/R$	$h/R$	$q$
$\alpha_A = 0.1$							
0.00	1.411	0.060	0.000	0.195	0.000	0.0002	2.493
0.10	1.546	0.025	0.089	0.285	0.084	0.0003	2.557
$\alpha_A = 0.2$							
0.00	1.244	0.127	0.000	0.380	0.000	0.0010	2.416
0.10	1.396	0.076	0.082	0.472	0.076	0.0021	2.492
0.15	1.462	0.061	0.131	0.522	0.119	0.0023	2.529
0.20	1.526	0.051	0.182	0.566	0.160	0.0023	2.544
$\alpha_A = 0.3$							
0.00	1.068	0.203	0.000	0.554	0.000	0.0064	2.332
0.10	1.238	0.135	0.079	0.657	0.074	0.0070	2.439
0.15	1.311	0.112	0.126	0.709	0.114	0.0072	2.480
0.20	1.379	0.098	0.175	0.755	0.153	0.0074	2.504
0.25	1.447	0.086	0.228	0.800	0.192	0.0076	2.527
0.30	1.515	0.078	0.285	0.842	0.231	0.0078	2.533
$\alpha_A = 0.4$							
0.00	0.884	0.287	0.000	0.714	0.000	0.0148	2.250
0.10	1.072	0.199	0.076	0.827	0.070	0.0160	2.371
0.15	1.153	0.170	0.122	0.888	0.112	0.0164	2.437
0.20	1.226	0.151	0.170	0.934	0.147	0.0169	2.452
0.25	1.300	0.133	0.223	0.990	0.189	0.0174	2.500
0.30	1.372	0.121	0.280	1.034	0.227	0.0177	2.510
$\alpha_A = 0.5$							
0.00	0.692	0.379	0.000	0.863	0.000	0.0283	2.171
0.10	0.922	0.249	0.101	1.022	0.099	0.0309	2.317
0.15	0.994	0.229	0.123	1.059	0.114	0.0315	2.372
0.20	1.069	0.208	0.167	1.106	0.145	0.0321	2.402
0.25	1.147	0.186	0.220	1.164	0.185	0.0328	2.443
0.30	1.224	0.168	0.275	1.217	0.223	0.0335	2.480
$\alpha_A = 0.6$							
0.00	0.489	0.482	0.000	0.995	0.000	0.0475	2.088
0.10	0.746	0.325	0.098	1.167	0.095	0.0517	2.243

0.15	0.823	0.300	0.119	1.208	0.108	0.0526	2.305
0.20	0.904	0.273	0.166	1.259	0.140	0.0537	2.328
0.25	0.987	0.246	0.216	1.319	0.177	0.0550	2.374
0.30	1.071	0.222	0.271	1.380	0.217	0.0563	2.423
$\alpha_A = 0.7$							
0.00	0.276	0.595	0.000	1.112	0.000	0.0731	2.005
0.10	0.569	0.402	0.098	1.306	0.097	0.0797	2.181
0.15	0.657	0.366	0.116	1.359	0.111	0.0815	2.265
0.20	0.739	0.338	0.164	1.408	0.139	0.0830	2.281
0.25	0.829	0.304	0.214	1.476	0.177	0.0849	2.336
0.30	0.918	0.275	0.229	1.544	0.217	0.0868	2.391
$\alpha_A = 0.8$							
0.00	0.048	0.723	0.000	1.210	0.000	0.1050	1.918
0.10	0.343	0.529	0.075	1.378	0.063	0.1129	2.079
0.15	0.462	0.461	0.117	1.462	0.099	0.1167	2.155
0.20	0.569	0.407	0.162	1.542	0.137	0.1201	2.230
0.25	0.669	0.364	0.212	1.622	0.178	0.1233	2.298
0.30	0.762	0.331	0.265	1.693	0.215	0.1259	2.356

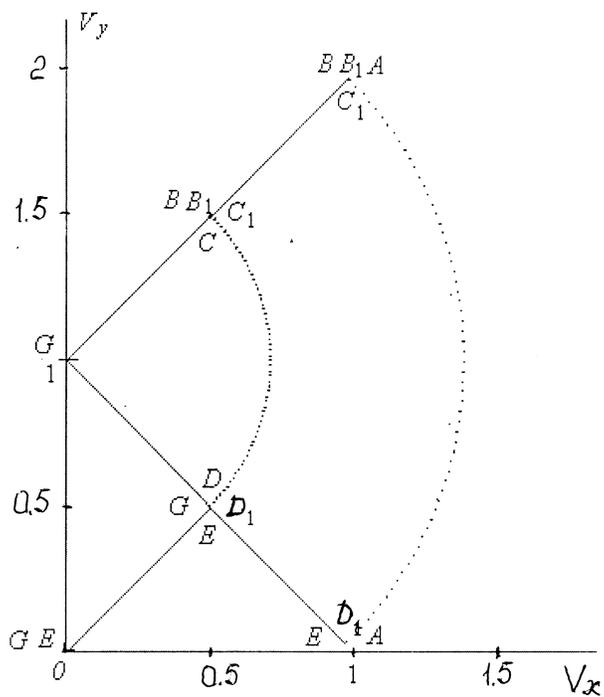


Рис. 7. Годограф скоростей для линий скольжения на рис. 6.

В табл. 3 приведены углы  $\psi$ ,  $\beta_A$ ,  $\alpha_E$ , координаты точек  $B$  и  $G$ , определяющие пластическую область, глубина вдавливания  $h/R$  и давление  $q$  в зависимости от  $\mu$  и  $\alpha_A$ . Центральная жесткая зона почти совпадает со всей границей контакта при  $\{\alpha_A = 0.1, \mu = 0.1\}$ ,  $\{\alpha_A = 0.2, \mu = 0.2\}$  и  $\{\alpha_A = 0.3, \mu = 0.3\}$ . Углы  $\beta_A$  и кривизна границы  $AB$  пластической области малы. При углах  $\alpha_A \geq 0.4$  на границе контакта сохраняется значительная зона скольжения. Кривизна границы  $AB$  и глубина вдавливания увеличиваются. Снижение трения приводит к снижению углов  $\psi$  и давления  $q$ , и к увеличению углов  $\beta_A$  и кривизны границы  $AB$ . При  $\mu = 0$  и  $\alpha_A > 0.8$  угол  $\psi \rightarrow 0$ . Вер  $\eta$  линий скольжения вырождается в одну линию. При увеличении трения снижение угла  $\psi$  при увеличении угла  $\alpha_A$  уменьшается.

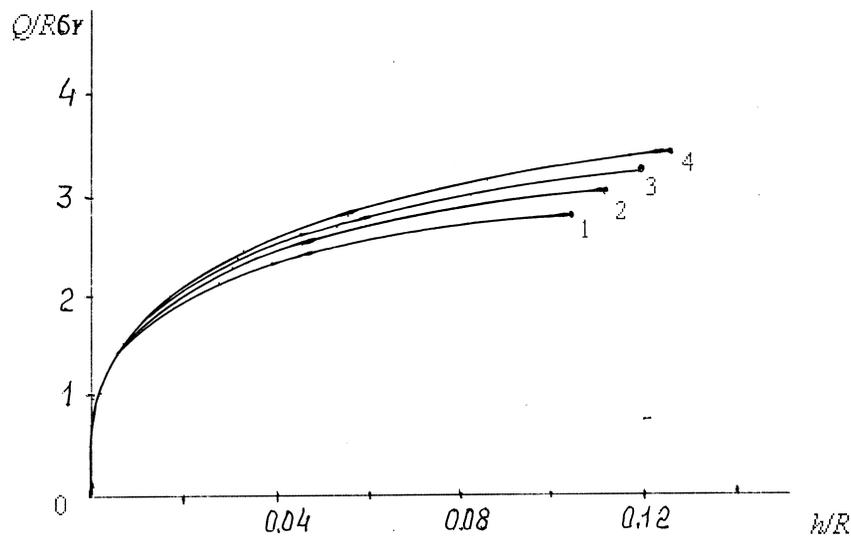


Рис. 8. Зависимости погонной нагрузки на цилиндр  $Q/R\sigma_Y$  от  $h/R$ . 1— $\mu = 0.0$ , 2— $\mu = 0.1$ , 3— $\mu = 0.2$ , 4— $\mu = 0.3$ .

Зависимости погонной нагрузки на цилиндр  $Q/R\sigma_Y$  от глубины вдавливания  $h/R$  и коэффициента трения  $\mu$  показаны на рис. 8. При малых углах  $\alpha_A$  нагрузка быстро увеличивается вследствие малых значений  $h/R$ . С увеличением  $\alpha_A$  возрастание нагрузки замедляется вследствие снижения давления  $q$  и быстрого увеличения  $h/R$ . На рис. 9 и 10 показаны границы пластической области при вдавливании цилиндра для углов  $\alpha_A \geq 0.2$  при  $\mu = 0.2$  и  $\mu = 0$ . При увеличении угла контакта  $\alpha_A$  пластическая область расширяется, но центральная жесткая зона при  $\mu = 0.2$  увеличивается незначительно. В случае гладкого цилиндра пластическая область уменьшается, а кривизна свободной границы  $AB$  увеличивается.

**Заключение.** Приведено моделирование вдавливания жесткого цилиндра в идеально пластическое полупространство с криволинейной границей пластической области с учетом контактного трения по Прандтлю. Численным интегрированием гиперболических уравнений теории плоской деформации вычислены линии скольжения и годографы скоростей пластического течения, при которых диссипативная функция

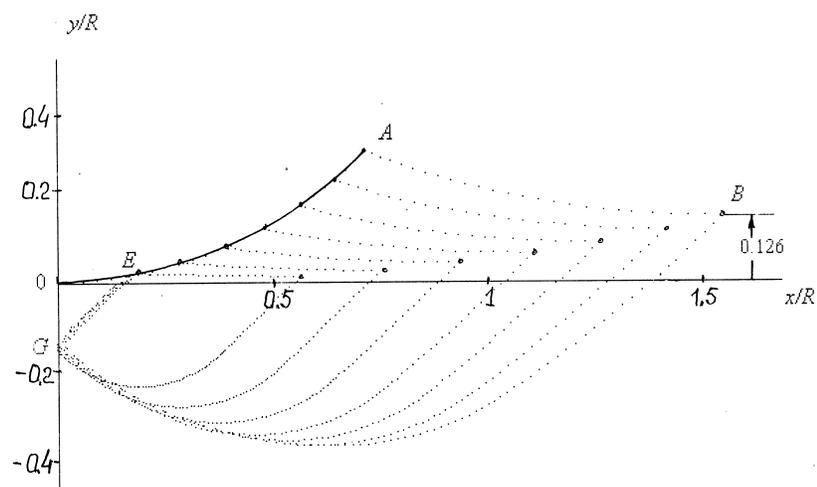


Рис. 9. Границы пластической области при  $\mu = 0.2$  для углов границы контакта цилиндра  $\alpha_d = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ .

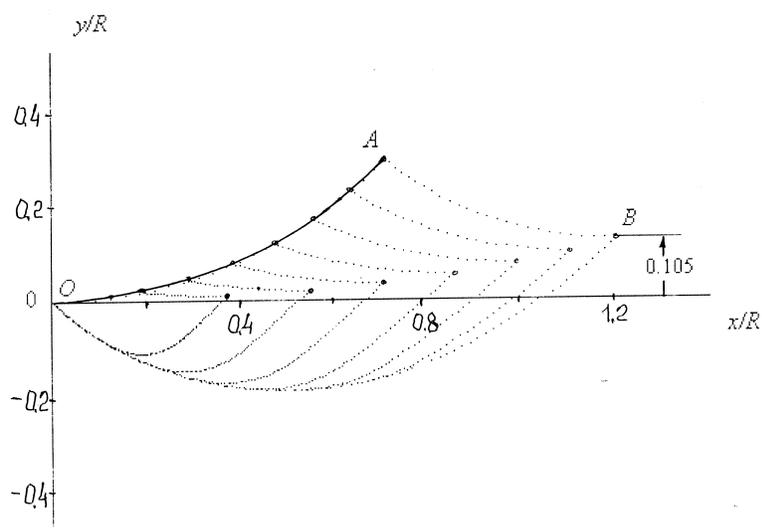


Рис. 10. Границы пластической области при  $\mu = 0$  для углов границы контакта цилиндра  $\alpha_d = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ .

пластического течения положительна во всей пластической области. Получены зависимости предельного давления, формы пластической области с образованием центральной жесткой зоны и глубины вдавливания от коэффициента трения и угла контакта цилиндра с пластической областью. При малых углах контакта и отсутствии

трения решение приближается к давлению плоского штампа Хилла. При малых углах контакта и малом трении решение приближается к давлению плоского штампа Прандтля.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
- [2] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
- [4] Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956.
- [5] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Metallurgiya, 1972. 408 с.
- [6] Nepershin R.I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.
- [7] Druyanov B.A., Nepershin R.I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 406 p.

*R. I. Nepershin*

### ON THE IDEAL PLASTIC HALF-SPACE INDENTATION BY THE WITH CONTACT FRICTION CONSIDERATION

*Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia*

**Abstract.** Numerical simulation of the plane strain ideal plastic half-space indentation by the rigid cylinder with Prandtl's contact friction consideration is presented. The slip lines, velocities on the hodograph plane with positive dissipative function are defined by numerical calculation of differential equations of the plane strain plastic flow theory. Curved form of the stress free boundary of the plastic region, which is function of the cylinder indentation depth, is defined by the plastic incompressibility condition. The numerical simulation satisfies the full equations system of the plane strain ideal plastic theory with Mises yield criterion and positive dissipative function in the plastic region.

**Keywords:** ideal plastic half-space, cylinder indentation, plane strain theory, contact friction, slip lines, velocities hodograph, dissipative function.

### REFERENCES

- [1] Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Gostekhizdat, 1956. 407 s.
- [2] Sokolovskij V. V. Teoriya plastichnosti. M.: Vysshaya shkola, 1969. 608 s.
- [3] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: FIZMATLIT, 2001. 704 s.
- [4] Prager V., Hodzh F. Teoriya ideal'no plasticheskikh tel. M.: IL, 1956.
- [5] Tomlenov A. D. Teoriya plasticheskogo deformirovaniya metallov. M.: Metallurgiya, 1972. 408 s.

---

*Nepershin Rostislav Ivanovich* ,  
 e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

[6] Nepershin R.I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.

[7] Druyanov B.A., Nepershin R.I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 406 p.

М. В. Петров, Т. Г. Федорова, Е. Г. Гоник, Н. Г. Пфаненштиль

## СПОСОБ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ, ЗАПОЛНЕННЫХ СЫПУЧИМ МАТЕРИАЛОМ

*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия  
Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Казань,  
Россия*

**Аннотация.** Проведены эксперименты по исследованию потери устойчивости пустых и заполненных сыпучими материалами цилиндрических образцов при изгибе. Образцы были изготовлены по физическому и геометрическому подобию с большегабаритными автоцистернами для перевозки сыпучих материалов. По данным экспериментов были выполнены расчеты по определению критических нагрузок и напряжений. В статье даны результаты приближенного метода расчета оболочек на устойчивость при изгибе при разных граничных условиях.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, критическая сила, устойчивость, критическое напряжение.

УДК: 539.374.3

### Введение.

---

© Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г., Пфаненштиль Н. Г., 2018

*Петров Михаил Васильевич*

e-mail: gimmaretrova20@gmail.com, доктор технических наук, доцент кафедры строительных конструкций, профессор, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

*Федорова Татьяна Георгиевна*

e-mail: tanusha2884@mail.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

*Гоник Екатерина Григорьевна*

e-mail: katty.gonik@mail.ru, старший преподаватель кафедры строительных конструкций, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

*Пфаненштиль Надежда Георгиевна*

e-mail: pfedorova83@mail.ru, кандидат исторических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных наук, Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, г. Казань, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-38-60051

Поступила 16.09.2018

Для транспортировки жидких и сыпучих материалов (муки, комбикорма, цемента, воды и т.д.) используют различные автоцистерны. Устойчивость пустых тонкостенных оболочек экспериментально и теоретически исследована в работах Вольмира А.С., Даревского В.М., Ильгамова М.А., Коноплева Ю.Г. [1-4], а устойчивость, заполненных сыпучим материалом тонкостенных оболочек исследовано в работах [5-10]. Задача исследования потери устойчивости тонкостенных оболочек является трехмерной, физически и геометрически нелинейной. Она решена численно в наших предыдущих работах [5-10]. На рис. 1 показана подъемная автоцистерна. Емкость диаметром 2,5 м с одного конца поднимается для разгрузки. При этом она изгибается, на середине длины может потерять устойчивость. Такие автоцистерны часто подвергаются смятию при транспортировке, поэтому расчет на устойчивость при изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, является весьма актуальной задачей, необходимой для производства. В данной работе проводится сравнительный анализ экспериментальных данных с аналитическим расчетом предложенной модели.



Рис. 1. Автоцистерна для транспортировки жидких и сыпучих материалов

### Расчетные соотношения.

Для расчета критического напряжения  $\sigma_{cr}$  пустых оболочек, согласно [1] применим зависимость:

$$\sigma'_{cr} = \kappa(l)E \frac{h}{R}, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости материала оболочки;  $h$  – толщина стенки;  $R$  – радиус образца. Коэффициент  $\kappa(L)$  принимает значения 0,3 – для оболочек средней длины, 0,22 – для более длинных оболочек.

Для пустого образца по формуле (1) были рассчитаны критические напряжения, данные внесены в таблицу 1. (первой серии опытов).

В заполненных сыпучим материалом оболочках на  $\sigma_{cr}$  влияют весовая нагрузка и противодействие сыпучего материала образованию вмятин.

Напряжение от весовой нагрузки определяем согласно зависимости[11]:

$$\sigma_1 = \frac{M}{W}, \quad M = \frac{ql^2}{2}, \quad (2)$$

где  $q$  – равномерно распределенная весовая нагрузка на оболочку,  $M$  – изгибающий момент в поперечном сечении в месте потери устойчивости от весовой нагрузки.

Сыпучий материал создает давление на внутреннюю поверхность оболочки в зоне образования вмятины равное [12]:

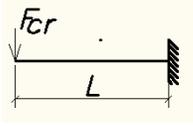
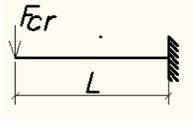
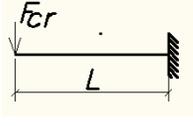
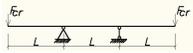
№ серии опытов	Размеры образцов, мм	отношение L/R	Схема нагружения	Критическая нагрузка $F_{cr}$ , кН			
				Пустые		Загрузка 90%	
				Экспер.	Числен. расчет	Экспер.	Числен. расчет
1	$R=32,8$ $h=0,1$ $l=135$	4,1		0,153	0,16	0,215	0,223
2	$R=32,8$ $h=0,1$ $l=270$	8,2		0,06	0,063	0,07	0,075
3	$R=41,65$ $h=0,12$ $l=165$	4		0,262	0,269	0,341	0,349
4	$R=32,8$ $h=0,1$ $l=145$	4,4		0,14		0,144	

Таблица 1.

$$P = \rho g H, \quad (3)$$

где  $\rho$  – насыпная плотность,  $H$  – высота сыпучего материала,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

Считая, до потери устойчивости напряженное состояние безмоментным, противодействующая нагрузка создает меридиональное напряжение в оболочке[11]:

$$\sigma_2 = \frac{PD}{4h} = \frac{PR}{2h} = \frac{\rho g HR}{2h}. \quad (4)$$

Потеря устойчивости происходит в упругой зоне, тогда критическое напряжение равно:

$$\sigma_{cr} = \sigma'_{cr} + \sigma_1 + \sigma_2 = k(l)E \frac{h}{R} + \frac{M}{W} + \frac{\rho g HR}{2h}, \quad (5)$$

**Обоснование формулы (5) на модельных образцах.**

Для возможного использования формулы (5) сравним результаты проведенных экспериментов и численных расчетов [5-10], (таблица 2). В таблице 1 приведены геометрические размеры, граничные условия и схемы нагружения, критические нагрузки. Материал образцов алюминиевый сплав 3004 в состоянии Н19.

В таблице 2 критические напряжения для пустых и заполненных железным порошком на 90% объема образцов.

№ серии опытов	Критическое напряжение $\sigma_{cr}$ , МПа					
	Пустые		Загрузка 90%			
	Опытные	Числен. расчет	Опытные	Числен. расчет	Расчет по формуле 5	Расхождение опытного и по формуле 5
1	45...60	63,5	85,4	88,5	69,3	18,8%
2		50	55,6	59,3	56,63	1,8%
3	57,5	68	86	88	66,8	22,3%
4	64		64,7		68,6	6%

Таблица 2.

Для определения критического напряжения выполнены эксперименты на консольно закрепленных образцах первой серии (таблица 1), загруженных на 90% объема медным порошком и речным песком. С каждым типом порошка испытывались по 8-10 образцов. Результаты приведены в таблице 3.

тип порошка	плотность $\rho$ , г/см <sup>3</sup>	критическая нагрузка $F_{cr}$ , кН	критическое напряжение опытное $\sigma_{cr}$ , МПа	по формуле (5) $\sigma_{cr}$ , МПа	расхождение $\sigma_{cr}$ , %
железный	2,62	0,215	85,4	69,3	18,8
медный	3,54	0,198	78	70,38	9,7
речной песок	1,52	0,163	64,7	66,9	3,4

Таблица 3.

Результаты расчетов показывают, что критическое напряжение можно рассчитывать для оболочек, заполненных различными сыпучими материалами.

На основе вышеприведенных решений проанализируем формулу (5), влияние сыпучего заполнителя на величину критического напряжения таблица 4.

#### Обоснование формулы (5) на натуральных образцах.

Используя условия подобия, рассчитаем несущую способность изготавливаемых на производстве автоцистерн. Критические нагрузки для модели и натуре связаны соотношением 1.18[13]:

$$F_{cr} = \frac{F'_{cr}}{\mu \cdot \alpha_3^2 \cdot \left(\frac{\alpha_1 \cdot \alpha_3}{\alpha_2^2}\right)^{1/4}}, \quad (6)$$

№ серии опытов, вид заполнителя	критическое напряжение пустых оболочек $\sigma'_{cr}$	напряжение от весовой нагрузки $\sigma_1$	меридиональное напряжение в оболочке $\sigma_2$	критическое напряжение $\sigma_{cr}$	$\frac{\sigma'_{cr}}{\sigma_{cr}}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_{cr}}$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_{cr}}$
1, жел. пор.	64	2,56	2,75	69,3	0,92	0,04	0,04
2, жел. пор.	47	9,1	0,5	56,6	0,83	0,16	0,01
1, мед. пор.	64	2,68	3,7	70,38	0,91	0,04	0,05
1, реч. песок	64	1,3	1,6	66,9	0,96	0,02	0,02

Таблица 4.

где  $F'_{cr}$  – критическая поперечная сила модели;  $F_{cr}$  – критическая поперечная сила натуры.

Коэффициенты подобия:

$$\mu = \frac{E'}{E}, \alpha_1 = \frac{R'}{R}, \alpha_2 = \frac{l'}{l}, \alpha_3 = \frac{h'}{h}. \quad (7)$$

Параметры с штрихом относятся к модели.

Критический изгибающий момент равен:

$$M_{cr} = \sigma_{cr} \cdot W \quad (8)$$

По-другому:

$$M_{cr} = F_{cr} \cdot l + \frac{ql^2}{2}, \quad \text{отсюда} \quad F_{cr} = \frac{M_{ск} - \frac{ql^2}{2}}{l}. \quad (9)$$

По вышеприведенным формулам были рассчитаны критические нагрузки для стальных цистерн заводских размеров. Данные приведены в таблице 5.

Можно написать условие устойчивости тонкостенных цилиндрических цистерн, загруженных сыпучим материалом:

$$\sigma = k(l)E \frac{h}{R} + \frac{M}{W} + \rho g H \frac{R}{2h} \leq \frac{\sigma_{cr}}{n}. \quad (10)$$

Пользуясь условием устойчивости (10) можно подсчитать критическую длину цистерны или другие размеры, если известно будет  $\sigma_{cr}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n$ .

#### Выводы.

Расчеты показывают, что приближенная формула (5) справедлива для оболочек с различными граничными условиями и различными геометрическими размерами.

Расхождение значений критических напряжений составило 1,8–22,3%.

Выполненные расчеты на устойчивость подъемной автоцистерны подтверждают условие устойчивости (10).

№	размеры цистерны	вид сыпучего материала	значение критического напряжения по ф-ле 5, МПа	значение критической силы		погрешность. %
				по формуле 9, МН	по формуле 6, МН	
1	$R = 1,2\text{м}$ $h = 5 \cdot 10^{-3}\text{м}$ $l = 4,5\text{м}$	медный порошок на 90 % объема	427	1,79	1,69	5,9
2	$R = 0,5\text{м}$ $h = 2 \cdot 10^{-3}\text{м}$ $l = 2\text{м}$	железный порошок на 90 % объема	145,4	0,0955	0,0935	2,1

Таблица 5.

Критическое напряжение можно посчитать по формуле (5) для оболочек различных геометрических размеров.

Критический изгибающий момент подсчитывается по формуле (8).

Критическая поперечная сила подсчитывается по формуле (9).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
- [2] Даревский В. М. Устойчивость консольной цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой с кручением и внутренним давлением // Расчет пространственных конструкций. 1959. Вып. 5. С. 431–449.
- [3] Ильгамов М. А. Экспериментальное исследование устойчивости консольно закрепленной цилиндрической оболочки под действием поперечной силы и внутреннего давления // Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та. 1964. Вып. 2. С. 186–191.
- [4] Коноплев Ю. Г. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки под действием произвольного числа локальных осевых сил // Исследования по теории пластин и оболочек. 1970. №6-7. С. 481–484.
- [5] Баженов В. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Шошин Д. В. Численный анализ деформирования, потери устойчивости и закритического поведения большегабаритных емкостей для автомобильной транспортировки сыпучих грузов // Проблемы прочности и пластичности. 2008. №70. С.89–97.
- [6] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V. and Fedorova T. G. Stability and supercritical behavior of large-size tankers for transportation of loose goods // Journal of machinery manufacture and reliability. 2015. Vol.44, №5. P. 422–427.
- [7] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Stability and supercritical behavior of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol.28, P. 16–20.
- [8] Баженов В. Г., Гоник Е. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г., Фролова И. А. Экспериментальное и теоретическое исследование упругопластического

выпучивания цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, под действием поперечной силы // Ученые записки казанского университета. Серия: физико-математические науки. Казань: 2017.

[9] Гоник Е. Г., Кибец А. И., Петров М. В., Федорова Т. Г., Фролова И. А. Влияние аппроксимации диаграммы деформирования на критические нагрузки при поперечном изгибе цилиндрической оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т.79, №2. С. 169–181.

[10] Федорова Т. Г., Гоник Е. Г., Петров М. В. Влияние заполнения тонкостенных оболочек различными сыпучими материалами на устойчивость при изгибе // В сборнике: Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС 2017, Алушта). 2017. С. 332–334.

[11] Моссаковский В. И., Маневич Л. И., Мильцын А. М. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Киев Наукова думка. 1977. 141 с.

M. V. Petrov, T. G. Fedorova, E. G. Gonik, N. G. Pfanenshti

**METHOD OF APPROXIMATE CALCULATION ON STABILITY FOR  
CROSS-BENDING OF THIN-WALL CYLINDRICAL SHELLS OF MIDDLE  
LENGTH FILLED WITH LOOSE MATERIAL**

*I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

*Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia*

**Abstract.** experiments have been carried out to study the buckling of empty cylindrical specimens filled with bulk materials during bending. The samples were made in physical and geometric similarity with large-sized tankers for the transport of bulk materials. According to the experimental data, calculations were performed to determine the critical loads and stresses. The article presents the results of the approximate method of calculation of shells for bending stability under different boundary conditions.

**Keywords:** cylindrical shell, critical force, stability, critical stress.

**REFERENCES**

- [1] Vol'mir A. S. Ustojchivost' deformiruemyh sistem. M.: Nauka, 1967. 984 s. (in Russian).
- [2] Darevskij V. M. Ustojchivost' konsol'noj cilindricheskoj obolochki pri izgibe poperechnoj siloj s krucheniem i vnutrennim davleniem // Raschet prostranstvennyh konstrukcij. 1959. Vyp. 5. S. 431–449. (in Russian).
- [3] Il'gamov M. A. EHksperimental'noe issledovanie ustojchivosti konsol'no zakreplenoj cilindricheskoj obolochki pod dejstviem poperechnoj sily i vnutrennego davleniya // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. Izd-vo Kazanskogo un-ta. 1964. Vyp. 2. S. 186–191. (in Russian).
- [4] Konoplev YU. G. EHksperimental'noe issledovanie ustojchivosti cilindricheskoj obolochki pod dejstviem proizvol'nogo chisla lokal'nyh osevyh sil // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek. 1970. №6-7. S. 481–484. (in Russian).
- [5] Bazhenov V. G., Kibec A. I., Petrov M. V., SHoshin D. V. CHislennyj analiz deformirovaniya, poteri ustojchivosti i zakriticheskogo povedeniya bol'shegabaritnyh emkostej dlya avtomobil'noj transportirovki sypuchih грузов // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2008. №70. S.89–97. (in Russian).

---

*Petrov Mikhail Vasilyevich*

e-mail: rimmapetrova20@gmail.com, Dr. Sci. Tech., Professor, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

*Fedorova Tatyana Georgievna*

e-mail: tanusha2884@mail.ru, Ph.D., Senior lecturer, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

*Gonik Ekaterina Grigoryevna*

e-mail: katya.gonik@mail.ru, Senior Lecturer, I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

*Pfanenshtil Nadezhda Georgievna*

e-mail: nfeodorova83@mail.ru, Ph.D., , Assoc. Prof., Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia.

[6] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V. and Fedorova T. G. Stability and supercritical behavior of large-size tankers for transportation of loose goods // Journal of machinery manufacture and reliability. 2015. Vol.44, №5. P. 422–427. (in Russian).

[7] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Stability and supercritical behavior of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol.28, P. 16–20. (in Russian).

[8] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibec A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Экспериментальное и теоретическое исследование упругопластического выпучивания цилиндрических оболочек, заполненных сypучим материалом, под действием поперечной силы // Ученые записки казанского университета. Серия: физико-математические науки. Kazan': 2017. (in Russian).

[9] Gonik E. G., Kibec A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Влияние аппроксимации диаграммы деформирования на критические нагрузки при поперечном изгибе цилиндрической оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т.79, №2. С. 169–181. (in Russian).

[10] Fedorova T. G., Gonik E. G., Petrov M. V. Влияние заполнения тонкостенных оболочек различными сypучими материалами на устойчивость при изгибе // В сборнике: Материалы НКХ Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (VMSPPS 2017, Alushta). 2017. С. 332–334. (in Russian).

[11] Mossakovskij V. I., Manevich L. I., Mil'cyn A. M. Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. Kiev Naukova dumka. 1977. 141 s. (in Russian).

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет леса, г. Мытищи-5 Московской области, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (ekc\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (rektorat@chgpu.edu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорохин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига, Латвия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате `wmf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Радаев Ю. Н.</i> К теории неплотно связанных сред Кулона-Мора и обобщенных пластических тел Прандтля .....	3
<i>Немировский Ю. В.</i> Предельная долговечность гибридных ферменных конструкций .....	25
<i>Злобина И. В., Бодягина К. С., Павлов С. П., Бекренев Н. В.</i> Теоретико-экспериментальное исследование влияния изменений параметров межфазной зоны отвержденного полимерного композиционного материала под действием микро-волнового излучения на его прочностные характеристики .....	34
<i>Деревянных Е. А., Максимов А. Н., Митрофанова Т. В.</i> К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней в случае трансляционной анизотропии .....	49
<i>Жилин С. Г., Богданова Н. А., Комаров О. Н.</i> Влияние гранулометрического состава и скорости выдавливания воскообразной композиции на геометрию длинномерной прессовки при мундштучном экструдировании .....	54
<i>Мустафаев А. Б.</i> Торможение роста криволинейной трещины со связями между берегами с помощью теплового поля напряжений .....	65
<i>Непершин Р. И.</i> О пластическом течении фланца при вытяжке тонкостенной цилиндрической оболочки при условии пластичности Мизеса .....	80
<i>Фоминых С. О.</i> Определение напряженного состояния в пластической области толстостенной трубы при условии пластичности трансляционной анизотропии и анизотропии по Мизесу–Хиллу .....	90
<i>Максимова Л. А., Гоник Е. Г., Смоленцева М. А.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния перекрытия, состоящего из газобетонных пазогребневых блоков .....	96
<i>Непершин Р. И.</i> О вдавливании цилиндра в идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения .....	102
<i>Петров М. В., Федорова Т. Г., Гоник Е. Г., Пфаненштиль Н. Г.</i> Способ приближенного расчета на устойчивость при поперечном изгибе тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины, заполненных сыпучим материалом .....	120
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	129
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	132
СОДЕРЖАНИЕ .....	134

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2018. № 4 (38)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 24.12.2018. Выход в свет 28.12.2018.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e. Усл. печ. л. 16,9.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском отделе Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38