

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 1(43)
январь – март 2020 г.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко

Ответственные секретари: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

Заместитель ответственного секретаря: С. В. Матвеев

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции и издательства: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1184

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2020

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**BULLETIN
OF THE YAKOVLEV CHUVASH STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY
SERIES: MECHANICS OF LIMIT STATE**

**Scientific journal
№ 1(43)
January – March 2020**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhurov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media “Roskomnadzor”
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue “Press of Russia”
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko

Executive Secretary: S. V. Tikhonov, E. V. Murashkin

Associate Secretary: S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, G. K. Mikhailov, Yu. V. Nemorovskii,
R. I. Nepershin, V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov,
A. N. Sporihin, A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1184

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

Б. Г. Миронов¹, Ю. Б. Миронов²

КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ИДЕАЛЬНОГО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

¹Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

²Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано кручение неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала. Получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния стержня при линеаризованном условии пластичности. Определено предельное состояние призматического стержня при кручении, найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: неоднородный цилиндрический стержень, идеальный жесткопластический материал, поле характеристик, предельное состояние, линии разрыва напряжений.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.001

УДК: 539.374

Введение. Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней довольно часто встречается в инженерной практике, особенно в машиностроении. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала изложена в работах [1]–[2]. В [3] исследованы общие соотношения теории кручения анизотропных стержней. Переход к случаю стержня из неоднородного материала приводит к определенным трудностям: задачу в общем случае невозможно проинтегрировать. Отдельные случаи кручения неоднородных и составных стержней рассмотрены в работах [4, 5, 6]. В [7] исследовано кручение неоднородного идеальнопластического стержня при произвольном условии пластичности.

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2020

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 05.02.2020

Основные результаты. Соотношения теории кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала могут быть записаны в виде:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y);$$

— уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

— условие пластичности:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k; \quad (3)$$

— соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz}}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad (4)$$

где σ_{ij} — компоненты напряжения; ε_{ij} — компоненты скорости деформации; $k = k(x, y)$.

Условие пластичности (3) в плоскости τ_{xz} , τ_{yz} представляет окружность радиуса k (рис. 1) с центром в начале координат.

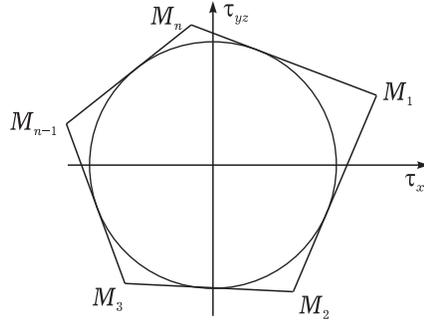


Рис. 1.

Предположим, что окружность условия текучести (3) заменена замкнутой ломаной $M_1M_2M_3\dots M_nM_1$ (см. рис. 1):

$$A_i \tau_{xz} + B_i \tau_{yz} = k, \quad (5)$$

где $A_i, B_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Условие (5) представляет на некотором отрезке линеаризованное условие пластичности (3).

Дифференцируя уравнение (5) по переменной y , получим

$$A_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + B_i \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y}. \quad (6)$$

С учетом (2) из уравнения (6) имеем

$$A_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - B_i \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что прямые

$$A_i x + B_i y = C_{i1} \quad (C_{i1} = \text{const}) \quad (8)$$

являются характеристиками. Из (5) и (8) следует, что характеристики и линии текучести параллельны. Вдоль характеристик (8) имеют место соотношения для компонент напряжения

$$A_i \tau_{xz} = K, \quad B_i \tau_{yz} = k - K, \quad (9)$$

где

$$K = \int \frac{\partial k}{\partial y}(\alpha, y) dy, \quad \alpha = \frac{1}{A_i}(C_{i1} - B_i y). \quad (10)$$

Аналогично дифференцируя уравнение (5) по переменной x , с учетом (2) получим, что вдоль характеристик справедливы следующие соотношения для компонент напряжения:

$$B_i \tau_{yz} = \bar{K}, \quad A_i \tau_{xz} = k - \bar{K}, \quad (11)$$

где

$$\bar{K} = \int \frac{\partial k}{\partial x}(x, \beta) dx, \quad \beta = \frac{1}{B_i}(C_{i1} - A_i x). \quad (12)$$

Рассматривая условие (5) в качестве пластического потенциала, получим вместо (4) соотношение

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{A_i} = \frac{\varepsilon_{yz}}{B_i}. \quad (13)$$

Интегрируя соотношение (13) и часть соотношений (4) и учитывая, что в начальный момент закручивания компоненты деформации e_{ij} равны 0, получим

$$\frac{e_{xz}}{A_i} = \frac{e_{yz}}{B_i}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0. \quad (14)$$

Из (14) следует

$$B_i e_{xz} - A_i e_{yz} = 0. \quad (15)$$

Предположим, что компоненты перемещения u, v, w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y), \quad (16)$$

где θ — крутка, w — депланация.

Выражая компоненты деформации через компоненты перемещения, из (15), (16) получим

$$-B_i \frac{\partial w}{\partial x} + A_i \frac{\partial w}{\partial y} = \theta(A_i x + B_i y). \quad (17)$$

Отсюда получим, что прямые (8) являются характеристиками соотношения (17). Вдоль характеристик (8) справедливы соотношения

$$B_i w + \theta C_{i1} x = C_{i2} \quad \text{или} \quad A_i w - \theta C_{i1} y = C_{i3}, \quad (18)$$

где $C_{i2}, C_{i3} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Для дальнейшего необходимы не столько выражения для депланации, сколько выражения для компонент деформации.

Дифференцируя соотношение (17) по переменной x , получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + A_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \theta A_i. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что вдоль характеристик (8) справедливы соотношения

$$B_i \frac{\partial w}{\partial x} + \theta A_i x = C_{i4} \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y = C_{i5}, \quad (20)$$

где $C_{i4}, C_{i5} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Аналогично дифференцируя соотношение (17) по переменной y , получим уравнение

$$-B_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + A_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \theta B_i. \quad (21)$$

Из уравнения (21) следует, что вдоль характеристик (8) справедливы соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta x = C_{i6} \quad \text{или} \quad A_i \frac{\partial w}{\partial y} - \theta B_i y = C_{i7}, \quad (22)$$

где $C_{i6}, C_{i7} = \text{const}$ вдоль характеристики.

Используя второе соотношение (20) и первое соотношение (22) получим, что вдоль характеристик (8) справедливы соотношения

$$e_{xz} - \theta y = \frac{1}{2} C_{i5}, \quad e_{yz} + \theta x = \frac{1}{2} C_{i6}. \quad (23)$$

Следует отметить, что из соотношений (23), (15), (8) вытекает

$$A_i C_{i6} - B_i C_{i5} = 2\theta C_{i1}. \quad (24)$$

Рассмотрим кручение стержня прямоугольного сечения $m_1 m_2 m_3 m_4$ со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 2а). На контуре сечения вектор касательного напряжения $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ параллелен контуру.

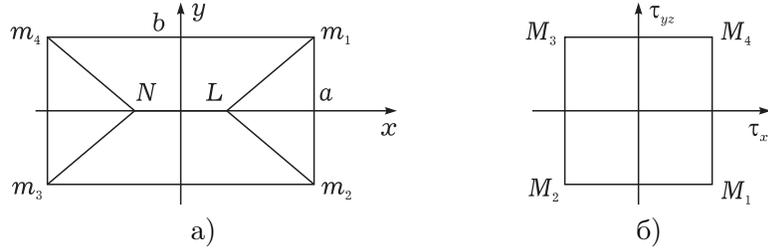


Рис. 2.

В случае изотропного идеального жесткопластического материала характеристики направлены перпендикулярно к контуру. В рассматриваемом случае характеристики (11) фиксированы, поэтому для данного контура сечения стержня всегда можно выбрать линейризованное условие пластичности (5) таким образом, чтобы характеристики оставались перпендикулярными к контуру. Для этого A_i, B_i в условии (5) необходимо выбрать так, чтобы вектор $\vec{n}_i = (A_i, B_i)$ был параллелен отрезку $m_i m_{i+1}$ контура (рис. 2б). Здесь мы имеем четыре семейства характеристик:

$$A_1 x + B_1 y = C_{11}, \quad (25)$$

$$A_2 x + B_2 y = C_{21}, \quad (26)$$

$$A_3 x + B_3 y = C_{31}, \quad (27)$$

$$A_4 x + B_4 y = C_{41}. \quad (28)$$

Для того, чтобы характеристики (25) были ортогональны отрезку $m_1 m_2$ контура сечения стержня, следует положить $A_1 = 0, B_1 = -1$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\tau_{yz} = -k. \quad (29)$$

Характеристики (25) запишутся в виде

$$y = C_{11}. \quad (30)$$

Из (9) и (24) следует

$$C_{15} = 2\theta C_{11}, \quad K = 0. \quad (31)$$

Тогда из (29) и (2) имеем

$$\tau_{yz} = -k, \quad \tau_{xz} = 0. \quad (32)$$

Для того, чтобы характеристики (26) были ортогональны отрезку m_2m_3 контура сечения стержня, следует положить $A_2 = -1$, $B_2 = 0$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\tau_{xz} = -k. \quad (33)$$

Характеристики (26) запишутся в виде

$$x = C_{21}. \quad (34)$$

Из (11) и (24) следует

$$C_{26} = -2\theta C_{21}, \quad \bar{K} = 0. \quad (35)$$

Тогда из (33) и (2) имеем

$$\tau_{xz} = -k, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (36)$$

Для того, чтобы характеристики (27) были ортогональны отрезку m_3m_4 контура сечения стержня, следует положить $A_1 = 0$, $B_1 = 1$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\tau_{yz} = k. \quad (37)$$

Характеристики (27) запишутся в виде

$$y = C_{31}. \quad (38)$$

Из (9) и (24) следует

$$C_{35} = -2\theta C_{31}, \quad K = 0. \quad (39)$$

Тогда из (37) и (2) имеем

$$\tau_{yz} = k, \quad \tau_{xz} = 0. \quad (40)$$

Для того, чтобы характеристики (28) были ортогональны отрезку m_4m_1 контура сечения стержня, следует положить $A_1 = 1$, $B_1 = 0$. Условие пластичности (5) принимает вид

$$\tau_{xz} = k. \quad (41)$$

Характеристики (25) запишутся в виде

$$x = C_{41}. \quad (42)$$

Из (11) и (24) следует

$$C_{46} = 2\theta C_{41}, \quad \bar{K} = 0. \quad (43)$$

Тогда из (41) и (2) имеем

$$\tau_{xz} = k, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (44)$$

Особо следует остановиться на линиях разрыва напряжений (линии m_1L , m_2L , m_3N , m_4N , NL на рис. 2а), которые возникают в случае, когда через данную точку сечения проходят две и более характеристики. Линии разрыва напряжений являются следом исчезающих жестких областей. На них всегда выполняются соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (45)$$

m_1L есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_1 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (30) и (42). Согласно (23) из (45) следует, что на m_1L справедливы соотношения

$$C_{15} = C_{45}, \quad C_{16} = C_{46}. \quad (46)$$

Из (32) и (44) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_1L :

$$-x + y = b - a. \quad (47)$$

m_2L есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_2 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (30) и (34). Согласно (23) из (45) следует, что на m_2L справедливы соотношения

$$C_{15} = C_{25}, \quad C_{16} = C_{26}. \quad (48)$$

Из (32) и (36) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_2L :

$$x + y = -b + a. \quad (49)$$

m_3N есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_3 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (38) и (34). Согласно (23) из (45) следует, что на m_3N справедливы соотношения

$$C_{35} = C_{25}, \quad C_{36} = C_{26}. \quad (50)$$

Из (40) и (36) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_3N :

$$-x + y = -b + a. \quad (51)$$

m_4N есть линия разрыва напряжений, выходящая из вершины m_4 контура сечения стержня и образованная за счет пересечения семейства характеристик (38) и (42). Согласно (23) из (45) следует, что на m_4N справедливы соотношения

$$C_{35} = C_{45}, \quad C_{36} = C_{46}. \quad (52)$$

Из (40) и (44) имеем уравнение линии разрыва напряжений m_4N :

$$x + y = b - a. \quad (53)$$

NL есть линия разрыва напряжений, образованная за счет пересечения семейства характеристик (34) и (42). Согласно (23) из (45) следует, что на NL справедливы соотношения

$$C_{25} = C_{45}, \quad C_{26} = C_{46}. \quad (54)$$

Из (36) и (44) имеем уравнение линии разрыва напряжений NL :

$$y = 0. \quad (55)$$

Заключение. Таким образом, в работе:

- получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния неоднородного идеального жесткопластического стержня при кручении для линеаризованного условия пластичности, найдены характеристики основных соотношений;
- исследовано предельное состояние неоднородного идеального жесткопластического стержня с прямоугольным сечением: построено поле характеристик основных соотношений, найдены соотношения вдоль характеристик и линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [2] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [3] Миронов Б. Г., Деревянных Е. А. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2012. № 4(76). С. 108–112.
- [4] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.
- [5] Mironov V., Mironov Y. Torsion of anisotropic and non-uniform cylindrical rods with elliptical section // MATEC Web of Conferences. 2018. 04037.
- [6] Mironov V. G., Mironov Y. B. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 012009.
- [7] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.

B. G. Mironov¹, Yu. B. Mironov²

TORSION OF INHOMOGENEOUS RODS MADE OF AN IDEAL RIGID PLASTIC MATERIAL UNDER A LINEARIZED PLASTICITY CONDITION

¹*Russian University of transport, Moscow, Russia*

²*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. The torsion of inhomogeneous rods made of an ideal rigid-plastic material is studied. Integrals are obtained that determine the stress and strain States of the rod under the linearized plasticity condition. The limit state of the prismatic rod during torsion is determined, and the stress break lines are found.

Keywords: a nonuniform cylindrical rod, the perfect rigid-plastic material, the field characteristics, limiting condition, line of gap voltages.

REFERENCES

- [1] Sokolovskij V. V. Theory of plasticity. Moscow: Higher school, 1969. 608 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Science, 1966. 232 p. (in Russian).
- [3] Prager V., Hoge F. G. Theory of ideally plastic bodies. Moscow: IL, 1956. 398 p. (in Russian).
- [4] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [5] Mironov B. G., Derevjannyh E. A. General relations of the torsion theory of anisotropic rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. 2012. no. 4(76). P. 108–112. (in Russian).
- [6] Olshak V., Ryhlevskiy Y., Urbanovskiy B. Theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [7] Mironov B. G. On the theory of torsion of inhomogeneous rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 4(22). P. 236–240. (in Russian).
- [8] Mironov B., Mironov Y. Torsion of anisotropic and non-uniform cylindrical rods with elliptical section // MATEC Web of Conferences. 2018. 04037.
- [9] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 012009.

Boris Gurjevich Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Yuri Borisovich Mironov, Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.

Ю. В. Немировский

О ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИЗГИБАНИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. Исследованы возможные предельно допустимые состояния слоистых полиметаллических стержней постоянного сечения при воздействии произвольно расположенных в пролете сосредоточенных нагрузок. Рассматриваются три возможных предельных состояния: первое (предельно упругое), второе (состояние предразрушения) и третье (состояние разрушения). Сформулированы условия их реализации, определены соответствующие уровни предельных нагрузок и намечены пути управления параметрами нагружающих устройств для обеспечения благоприятных процессов деформирования.

Ключевые слова: равносопротивляемость, трехточечный изгиб, предельные состояния, нормальные, касательные напряжения, сосредоточенные нагрузки, управляющие механические и геометрические параметры.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.002

УДК: 624.072:539.4

Введение. Гибридные конструкционные балочные элементы находят широкое использование в виде технических изделий при проектировании ответственных индустриальных объектов (мостов, надземных и подземных продуктопроводов, временных и постоянных переправ и эстакадных сооружений транспортных путей), а также при создании надежных и экономичных изделий новой авиакосмической, судостроительной, машиностроительной техники. При этом естественно появляются многочисленные вопросы об экономической эффективности новых создаваемых объектов, надёжности при кратковременных и длительных сроках эксплуатации, ремонтпригодности, оперативности и простоты контрольных проверок текущего состояния, возможностях

© Немировский Ю. В., 2020

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyu@mail.ru, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск; профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-01-00038.

Поступила 10.02.2020

управления предразрушающим аварийным состоянием соответствующих элементов при подходе к критическим уровням эксплуатации.

Для конструкций из однородных материалов (преимущественно металлической природы) многие возникающие при проектировании новых изделий вопросы были успешно разрешены путем разработки закономерностей теории пластичности, вязкоупругости, ползучести, надежности, оптимального проектирования и численных методов решения возникающих задач деформирования в течение 1940–1980 г. Полученные в этот период результаты активно обсуждались на многочисленных семинарах, конференциях и съездах как в нашей стране, так и за рубежом, нашли отражения в многочисленных обзорных статьях, монографиях и, в частности, в [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], и послужили хорошей основой для разработки многих эффективных и относительно недорогих технологий создания гибридных композитных конструкций из практически любых фазовых наборов конструкционных материалов. Казалось бы, что активно развиваемые средства новых информационных технологий в сочетании с развитием возможных новых типов разнообразных композитных проектов должны были привести к созданию многочисленных эффективных инженерных проектов. Однако за последние годы здесь не удается наблюдать серьезных успехов. Этого можно было ожидать с самого начала, поскольку мы не выработали с самого начала правил лицензирования создаваемых проектов. В общем случае создания гибридных конструкций без четких требований к отбору материалов, топологии их расположения, допустимых режимов реализации выбранного способа их объединения и критериев распада, ожидаемых возможных случайных и закономерных изменений температурно-климатических, физико-химических процессов в ходе технологического режима создания проекта и деформирования в требуемых режимах эксплуатации мы попадаем в ситуацию, когда «всё влияет на всё», и никакой прогноз поведения создаваемого проекта не будет возможен. Поэтому здесь, действуя шаг за шагом, необходимо последовательно вырабатывать принципы отбора главных влияющих факторов, с упором на некоторые простые математические модели прогнозирования и возможные экспериментальной проверки для адекватных модельных образцов.

Данная статья посвящена разработке такого подхода для анализов процессов деформирования, достижения и управления предельно допустимыми уровнями предразрушения слоистых полиметаллических балок в условиях двух-, трех- и четырехточечных изгибов сосредоточенными нагрузками. Такие нагружения обычно используют для однородных стержней с целью оценки пригодности выбираемого материала для достижения в этих условиях требуемой несущей способности или податливости. Решение таких задач позволяет использовать результаты расчета (или испытания) однородного стержня в виде эталона при выработке путей и средств улучшения проектов гибридных полиметаллических стержней.

1. Модель трёхточечного изгиба полиметаллического стержня. Будем рассматривать слоистые полиметаллические стержни (балки) одинаковой длины \bar{L} с постоянными поперечными сечениями различной геометрической формы двойной симметрии (рис. 1).

Если $2(\bar{H}_0 \times \bar{\Delta}_0)$ — характерная площадь рассматриваемых сечений, то в дальнейшем удобно использовать безразмерные величины

$$h_j = \frac{\bar{h}_j}{\bar{H}_0}, \quad \delta_i = \frac{\bar{\delta}_i}{\bar{H}_0}, \quad \Delta_i = \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}_0}, \quad z = \frac{\bar{z}}{\bar{H}_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{\Delta}_0}, \quad l = \frac{\bar{l}}{\bar{L}},$$

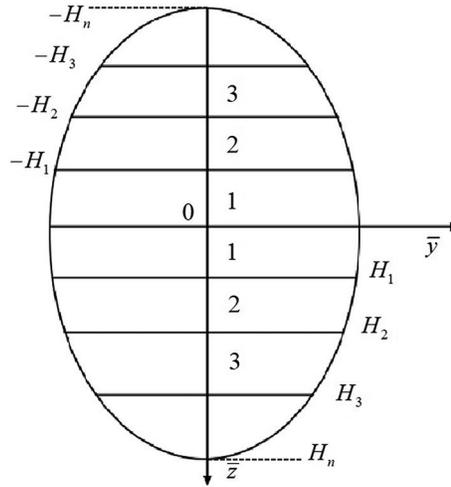


Рис. 1. Форма поперечного сечения

где $\bar{\delta}_i$ — толщина i -го слоя, $2\bar{\Delta}_i(\bar{z})$ — ширина i -го слоя. Выберем систему $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ декартовых координат с осью \bar{x} , направленной вдоль стержня и проходящей через центр симметрии стержня. Рассмотрим опертую по краям $x = 0, x = 1$ балку под действием сосредоточенной нагрузки P , приложенной в точке $x = l < 1$. В этом случае для безразмерных перерезывающих сил $Q_1(x), Q_2(x)$ и изгибающих моментов $M_1(x), M_2(x)$ на участках $0 \leq x \leq l$ и $l \leq x \leq 1$ будем иметь уравнения

$$\frac{dQ_1}{dx} = 0, \quad \frac{dM_1}{dx} = Q_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.1)$$

$$\frac{dQ_2}{dx} = 0, \quad \frac{dM_2}{dx} = Q_2(x), \quad l \leq x \leq 1, \quad (1.2)$$

граничные условия

$$Q_1(0) = Q_1^*, \quad M_1(0) = M_1^*, \quad Q_2(1) = Q_2^*, \quad M_2(1) = M_2^* \quad (1.3)$$

и условия сопряжения при $x = l$:

$$Q_1(l) - Q_2(l) = -P, \quad M_1(l) = M_2(l) = M(l), \quad (1.4)$$

где $Q_i = \bar{Q}_i/\bar{Q}_0, M_i = \bar{M}_i/\bar{M}_0, P = \bar{P}/\bar{Q}_0, \bar{Q}_0 = \bar{M}_0/\bar{L}; \bar{M}_0, \bar{Q}_0$ — параметры обезразмеривания; M_i^* и Q_i^* — заданные параметры управления на опорах. Из (1.2)–(1.4) получим распределение в балке перерезывающих сил и изгибающих моментов

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= Q_1^*, \quad M_1(x) = M_1^* + Q_1^*x, \quad 0 \leq x \leq l, \\ Q_2(x) &= Q_2^*, \quad M_2(x) = M_2^* + Q_2^*(x - 1), \quad l \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

и зависимости между параметрами действующих нагрузок:

$$Q_1^* = M_2^* - M_1^* - P(l - 1), \quad Q_2^* = M_2^* - M_1^* - Pl. \quad (1.6)$$

Для металлических материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, связь между напряжениями $\bar{\sigma}$ и деформированиями $\bar{\varepsilon}$ можно аппроксимировать зависимостью

$$\bar{\sigma} = \bar{A}\bar{\varepsilon} + \bar{B}\bar{\varepsilon}^3, \quad 0 \leq \bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}^{**}, \quad \bar{\varepsilon}^{**} > \bar{\varepsilon}^*, \quad (1.7)$$

где ε^* — предельная деформация предразрушения, соответствующая минимальному значению секущего модуля деформирования материала на её возрастающем участке диаграммы $\sigma \sqcup \varepsilon$ данного материала,

$$\bar{\sigma} = \bar{E}\varepsilon^*, \quad (\varepsilon^* < \varepsilon^{**}) \quad (1.8)$$

и \bar{A} , $\bar{\sigma}^*$, $\bar{\varepsilon}^{**}$ — модуль Юнга, предел прочности и деформация разрушения данного материала. Учитывая, что для данной аппроксимации должны выполняться соотношения

$$\bar{\sigma}^* = \bar{A}\varepsilon^* + \bar{B}(\varepsilon^*)^3, \quad \bar{A} + \bar{B}\varepsilon^{**} = 0, \quad \left. \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} = \bar{A} + 3\bar{B}(\varepsilon^*)^2 = 0, \quad (1.9)$$

будем иметь в итоге

$$\bar{B} = -\frac{\bar{A}}{3(\varepsilon^*)^2}, \quad \bar{E}^* = \frac{2}{3}\bar{A}, \quad \varepsilon^* = \frac{3\bar{\sigma}^*}{2\bar{A}}, \quad \varepsilon^{**} = \sqrt{3}\varepsilon^*. \quad (1.10)$$

В соответствие с кинематическими гипотезами Кирхгофа для рассматриваемых слоистых полиметаллических стержней деформация $\varepsilon(x, z)$ связана с безразмерным прогибом $U(x)$ следующим выражением:

$$\varepsilon(x, z) = z\kappa(x), \quad \kappa(x) = -\frac{\bar{H}_0}{\bar{L}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (1.11)$$

Для безразмерных напряжений в i -м слое будем иметь выражения

$$\sigma_j(x, z) = A_j z \kappa(x) + B_j z^3 [\kappa(x)]^3, \quad (1.12)$$

где $\sigma_j = \bar{\sigma}_j / \bar{\sigma}^0$, $A_j = \bar{A}_j / \bar{\sigma}^0$, $B_j = \bar{B}_j / \bar{\sigma}^0$; $\bar{\sigma}^0$ — обезразмеривающий параметр.

Для безразмерного изгибающего момента $M(x)$ общее выражение

$$M(x) = 4 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \sigma_j(x, z) \Delta_j(z) z dz, \quad M(x) = \frac{\bar{M}(x)}{\bar{\sigma}^0 (H^0)^2},$$

при учете зависимостей (1.11), (1.12) может быть записано в форме

$$M(x) = D\kappa(x) + F[\kappa(x)]^3, \quad (1.13)$$

в которой коэффициенты D и F для конкретных случаев содержат полную информацию о форме поперечных сечений, геометрических и соответствующих механических параметрах материалов и топологии их расположения по слоям. В областях $0 \leq x \leq l$ и $l \leq x \leq 1$ выражения (1.13) будут иметь вид

$$\begin{aligned} M_1(x) &= D\kappa_1(x) + F[\kappa_1(x)]^3, \quad 0 \leq x \leq l, \\ M_2(x) &= D\kappa_2(x) + F[\kappa_2(x)]^3, \quad l \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\kappa_1(x) = -\frac{d^2 U_1}{dx^2}, \quad \kappa_2(x) = -\frac{d^2 U_2}{dx^2}. \quad (1.15)$$

При $F = 0$ эти формулы будут соответствовать предельно упругим состояниям рассматриваемых полиметаллических балок (первое предельное состояние). При $F \neq 0$ реализуется второе предельное состояние (состояние предразрушения), когда в нескольких слоях будет достигнута деформация ε_m^* , либо третье предельное состояние (состояние разрушения), когда хотя бы в одном слое будет достигнуто соответствующее значение деформации разрушения ε^{**} .

В общем случае деформирования получим

$$(D + 3F\kappa_\alpha^2) \frac{d\kappa_\alpha}{dx} = Q_\alpha^*, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.16)$$

Следовательно, при $F = 0$ (первое предельно допустимое состояние) будем иметь

$$\frac{d\kappa_1}{dx} = \frac{Q_1^*}{D}, \quad 0 \leq x \leq l; \quad \frac{d\kappa_2}{dx} = \frac{Q_2^*}{D}, \quad l \leq x \leq 1. \quad (1.17)$$

При $F \neq 0$ для функций $\kappa_1(x)$ и $\kappa_2(x)$ будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} \kappa_1^3 - \frac{1}{r^2} \kappa_1(x) + \frac{M_1^* + Q_1^* x}{Dr^2} &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ \kappa_2^3 - \frac{1}{r^2} \kappa_2(x) + \frac{M_2^* + Q_2^*(x-1)}{Dr^2} &= 0, \quad l \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $r^2 = -F/D > 0$. Тогда, определяя действительные корни по формулам Виета [12], решение уравнений (1.18) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_1}{dx^2} &= -\Phi_1(x, Q_1^*, M_1^*), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \frac{d^2 U_2}{dx^2} &= -\Phi_2(x, Q_2^*, M_2^*), \quad l \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

При деформировании в упругих состояниях функции Φ_1 и Φ_2 определяются выражениями

$$\Phi_1 = \frac{M_1^* + Q_1^* x}{D}, \quad \Phi_2 = \frac{M_2^* + Q_2^*(x-1)}{D}. \quad (1.20)$$

Для определения прогибов $U_1(x)$ и $U_2(x)$ проинтегрируем выражения (1.20) дважды при использовании граничных условий

$$U_1(0) = U_1^0, \quad U_2(1) = U_2^0, \quad \Theta_1(l) = \Theta_2(l) = 0, \quad \Theta_1(x) = \frac{dU_1}{dx}, \quad \Theta_2(x) = \frac{dU_2}{dx}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \Theta_1(x) &= \Theta_1^0 - \int_l^x \Phi_1(x) dx, \quad \Theta_2(x) = \Theta_2^1 - \int_l^x \Phi_2(x) dx, \\ U_1(x) &= U_1^0 + \Theta_1^0 x - \int_0^x \left[\int_l^x \Phi_1(x) dx \right] dx, \\ U_2(x) &= U_2^1 + \Theta_2^1(x-1) - \int_1^x \left[\int_l^x \Phi_2(x) dx \right] dx \end{aligned} \quad (1.21)$$

и прогиб под нагрузкой

$$V_1 = U_1(l) = U_1^0 + \Theta_1^0 l - \int_0^l \left[\int_l^x \Phi_1(x) dx \right] dx. \quad (1.22)$$

В случае упругого состояния будем иметь

$$\begin{aligned}\Theta_1(x) &= \Theta_1^0 + \frac{x}{2D}(2M_1^* + Q_1^*x), \quad \Theta_1^0 = -\frac{l}{2D}(2M_1^* + Q_1^*l), \\ U_1(x) &= U_1^0 + \Theta_1^0 + \frac{l^2}{2D} \left(M_1^* + \frac{l}{3}Q_1^* \right).\end{aligned}\tag{1.23}$$

При этом параметры действующих нагрузок связаны зависимостями (1.6) при стандартных кинематических требованиях закрепления опорного узла (например, свободный поворот не проседающей опоры), величины $U_1^0 = 0$ и M_1^* считаются заданными, а соответствующие характеристики, обеспечивающие механическую работу узла, Θ_1^0 , Q_1^* являются искомыми). Для обеспечения регулирования напряженно-деформированным состоянием конструкции в дополнение к системе уравнений (1.6), (1.21)–(1.23) необходимо дополнить законами конечных регуляторов, связывающие величины Q_i^* , M_i^* , $i = 1, 2$, с соответствующими кинематическими параметрами u_1^0 , u_1^1 , Θ_1^0 , Θ_1^1 (например, упругое проседание опор, закон упругого сопротивления поворотам конечных механизмов закрепления).

Нормальные напряжения $\sigma_{j\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, в областях $0 \leq x \leq l$ и $l \leq x \leq 1$ в j -м слое рассматриваемых полиметаллических стержней будут определяться по формулам

$$\sigma_{j1} = [A_j\Phi_1(x)]z + [B_j\Phi_1^3(x)]z^3\tag{1.24}$$

при $0 \leq x \leq l$, $h_{j-1} \leq z \leq z_j$;

$$\sigma_{j2} = [A_j\Phi_2(x)]z + [B_j\Phi_2^3(x)]z^3\tag{1.25}$$

при $l \leq x \leq 1$, $h_{j-1} \leq z \leq z_j$.

Из уравнения равновесия в осевом направлении элементарной полоски единичной толщины j -го слоя в направлении оси z будем иметь [13]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{j\alpha}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_{j\alpha}}{\partial x} = -\Psi_{j\alpha}(z, x), \quad \Psi_{j\alpha} = \frac{d\Phi_\alpha}{dx}[A_jz + 3\Phi_\alpha^2 B_jz^3], \\ \alpha &= 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad h_{j-1} \leq z \leq h_j.\end{aligned}$$

Интегрируя это выражение по z от h_j до z , получим

$$\tau_{j\alpha}(z, x) = \tau_{j\alpha}(h_j) + \int_{h_j}^z \Psi_{j\alpha}(z, x) dz = V_{j\alpha}(z, x),\tag{1.27}$$

тогда для перерезывающей силы Q_α^* получим выражение

$$Q_\alpha^* = 4 \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} [V_{j\alpha}(z, x) + r_{j\alpha}(h_j)\Delta_j(z)] dz.\tag{1.28}$$

Для сохранения упругого состояния в левой части ($0 \leq x \leq l$) j -го слоя ($h_{j-1} \leq z \leq h_j$) рассматриваемого полиметаллического стержня, должно быть выполнено требование

$$\sigma_{j1}^2 + 3\tau_{j1}^2 \leq (A_j\varepsilon_j^0)^2, \quad \varepsilon_j^0 = \frac{\sigma_j^0}{A_j},\tag{1.29}$$

где

$$\sigma_{j1} = \frac{A_j}{D}(M_1^* + Q_1^*x)z, \quad \tau_{j1} = \tau_{j1}(h_j) + \frac{A_j}{2D}Q_1^*(h_j^2 - z^2), \quad h_{j-1} \leq z \leq h_j.\tag{1.30}$$

При подстановке выражений (1.30) в неравенства (1.29) можно после преобразований привести к виду

$$E_{j1}(x)y^2 + F_{j1}(x)y + J_{j1}(x) \leq 1, \quad y = z^2, \quad h_{j-1} \leq z \leq h_j, \quad (1.31)$$

в котором функции E_{j1} , F_{j1} , J_{j1} содержат всю необходимую информацию о геометрических и физических параметрах и топологии слоев рассматриваемого полиметаллического стержня. Дополняя к неравенствам (1.31) соотношения (1.6), получим классическую задачу определения предельно допустимых уровней нагрузок предельно упругих состояний и управлением, необходимым его деформированием при первом предельном состоянии [12].

Случаи второго и третьего предельных состояний требуют отдельного анализа ввиду громоздкости аналитических преобразований.

2. Предельно допустимые состояния. Первое предельное состояние (предельно упругое состояние) реализуется, когда $F = 0$ и $B_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$, и, скажем, в некотором i -м слое достигается предельно упругое состояние. Это означает, что

$$|\varepsilon_j(z)| < \varepsilon_j^0, \quad \varepsilon_i(h_i) = \varepsilon_i^0 = \frac{\sigma_{0i}}{A_i} \quad (2.1)$$

при $j \neq i$, $h_{j-1} \leq z \leq h_j$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$|\varepsilon_i(h_i)| = \varepsilon_i^0, \quad |\kappa_{i\alpha}| = \frac{\varepsilon_i^0}{h_i} < \frac{\varepsilon_j^0}{h_j}, \quad (2.2)$$

тогда

$$\sigma_i(z, x) = A_i z \kappa_i(x) = \frac{A_i z \varepsilon_i^0}{h_i} \text{sign} \kappa_i, \quad \sigma_j(z) = A_j z \kappa_j(x) = \frac{A_j z \varepsilon_i^0}{h_j} \text{sign} \kappa_i, \quad (2.3)$$

$$\kappa_1(l) = \frac{M(l)}{D} = \frac{\varepsilon_i^0}{h_i}.$$

Так как

$$M(l) = M_1^* + Q_1^* l = P(1-l)l - [M_1^*(1-l) + M_2^* l], \quad (2.4)$$

то для предельной нагрузки P_i^0 получим выражение

$$P_i^*(1-l)l = D \frac{\varepsilon_i^0}{h_i} - [M_2^* l + M_1^*(1-l)]. \quad (2.5)$$

Если при той же нагрузке P_i^0 одновременно будет достигнуто предельное упругое состояние в k -м слое, то будет выполнено равенство

$$P_i^0(1-l)l = D \frac{\varepsilon_k^0}{h_k} - [M_2^* l + M_1^*(1-l)]. \quad (2.6)$$

Для получения единообразных и относительно простых приближенных решений задач первого, второго и третьего предельных состояний гибридных полиметаллических стержней введем, прежде всего, для каждого конкретного материала понятие энергетически эквивалентного по критически допустимым состояниям искусственного материала. Это означает, что искусственный материал при одинаковых воздействиях к моменту достижения рассматриваемых предельно допустимых деформаций будет достигать одинаковых уровней энергии внутреннего сопротивления деформирования, что и исходный материал.

Пусть, например, диаграмма деформирования исходного материала соответствует закону кубической параболы:

$$\sigma = A\varepsilon + B\varepsilon^3, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^{**}, \quad \varepsilon^{**} = \sqrt{3}\varepsilon^*, \quad \sigma_0 = A\varepsilon_0, \quad \sigma^* = E^*\varepsilon^*, \quad (2.7)$$

где σ_0, σ^*, A — пределы упругости, прочности и модуль упругости; E^* — секущий модуль материала при деформации ε^* предразрушения; ε_0 — предельная упругая деформация; ε^{**} — деформация разрушения. Тогда для данного материала энергии первого, второго и третьего допустимых состояний будут равны соответственно

$$W_0 = \frac{A(\varepsilon_0)^2}{2} \left[1 + \frac{B}{6(\varepsilon^*)^2} \right], \quad W^* = \frac{15(\sigma^*)^2}{16A}, \quad (2.8)$$

$$W^{**} = \frac{A(\varepsilon^{**})^2}{2} \left[1 + \frac{B}{6A} \left(\frac{\varepsilon^{**}}{\varepsilon^*} \right)^2 \right], \quad \varepsilon^* = \frac{3\sigma^*}{2A}, \quad \varepsilon^{**} = \sqrt{3}\varepsilon^*, \quad B = -\frac{A}{3(\varepsilon^*)^2}.$$

Если ввести на отрезке $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^{**}$ в качестве приближения билинейную диаграмму с линией раздела $\varepsilon = \varepsilon^*$ и параметрами $\tilde{\sigma}^*, \tilde{\varepsilon}', \tilde{\varepsilon}'', \tilde{\sigma}', \tilde{\sigma}''$ (рис. 2), то для нее закон

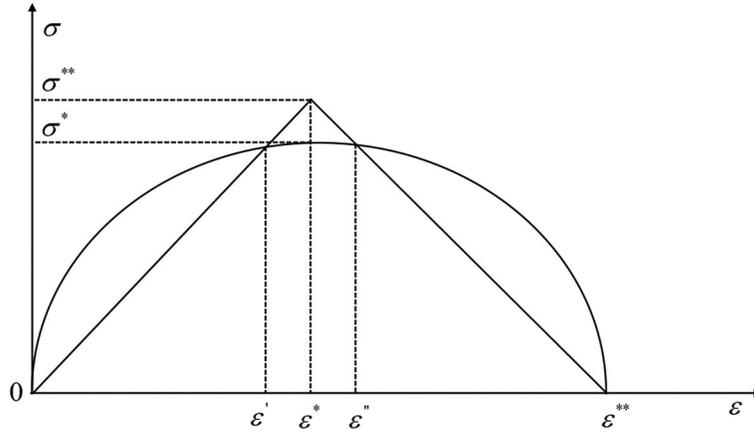


Рис. 2. Исходная и билинейная диаграммы деформирования

деформирования будет иметь вид

$$\tilde{\sigma} = p_1\varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*; \quad \sigma = p_2\varepsilon + p_3, \quad \varepsilon^* \leq \varepsilon \leq \varepsilon^{**}, \quad (2.9)$$

и энергии второго и третьего допустимых предельных состояний будут равны

$$\tilde{W}^* = \frac{\sigma^*\varepsilon^*}{2}, \quad \tilde{W}^{**} = \frac{1}{2}p_1(\varepsilon^*)^2 + \frac{1}{2}p_2[(\varepsilon^{**})^2 - (\varepsilon^*)^2] + p_3(\varepsilon^{**} - \varepsilon^*). \quad (2.10)$$

Тогда из условий $\tilde{W}^* = \tilde{W}^*$, $W^{**} = \tilde{W}^{**}$ и рис. 2 для параметров билинейной диаграммы получим выражения

$$\tilde{\sigma}^* = \frac{5}{4}\sigma^*, \quad \sigma' = \frac{\tilde{\sigma}^*}{\varepsilon^*}\varepsilon', \quad (\varepsilon')^2 = -\frac{A}{B} \left(1 - \frac{\tilde{\sigma}^*}{\varepsilon^*} \right), \quad (2.11)$$

$$\varepsilon^{**} = \frac{B(\varepsilon^{**} - \varepsilon^*)}{\sigma^*}(\varepsilon'')^2 + \left[\frac{A(\varepsilon^{**} - \varepsilon^*)^4}{\sigma^*} + 1 \right] \varepsilon''.$$

При построении приближенной процедуры определения допустимых предельных состояний предразрушения и разрушения для полиметаллических конструкций будем заменять материалы всех слоев соответствующими энергетически эквивалентными слоями. То есть для j -го слоя полиметаллического стержня при рассмотрении состояния предразрушения будем использовать законы деформирования

$$\tilde{\sigma}_j(x, z) = p_{1j}\varepsilon(x, z), \quad (2.12)$$

который для слоистого стержня определяет связь изгибающим моментом M композитного стержня и изменением его кривизны $\kappa(x)$:

$$M(x) = \tilde{D}_1\kappa(x), \quad \tilde{D}_1 = \sum_{j=1}^n p_{1j} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \Delta_j(z) z^2 dz. \quad (2.13)$$

Этот закон с точностью до обозначений соответствует закону деформирования эквивалентного упругого стержня. Таким образом, процедура анализа состояния предразрушения будет подобна процедуре анализа предельно допустимого упругого состояния.

Аналогичным образом при анализе предельно допустимого состояния разрушения при использовании закона деформирования в форме (2.9) для изгибающего момента рассматриваемого полиметаллического стержня получим зависимость

$$M(x) = \tilde{M}_2^0 + \tilde{D}_2\kappa, \quad \tilde{D}_2 = \sum_{j=1}^n p_{2j} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \Delta_j(z) z^2 dz, \quad (2.14)$$

$$M_2^0 = \left[\sum_{j=1}^n p_{3j} \int_{h_{j-1}}^{h_j} \Delta_j(z) dz \right] \text{sign}\kappa,$$

соответствующую модифицированному изгибу предварительно напряженного состояния стержня. И поэтому решение задачи в этом случае можно свести к решению предыдущей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дерibas А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1972. 182 с.
- [2] Король В. К., Гилденгорн М. С. Основы производства многослойных материалов. Москва: Металлургия, 1978. 237 с.
- [3] Матченко Н. М., Трещев А. А. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие уравнения. Тула: ТулГУ, 2000. 179 с.
- [4] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование конструкций // Библиографический указатель за 1948–1974 гг. Ч. 1–2. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СОАН СССР, 1975. 472 с.
- [5] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных классических конструкций // Механика. Проблемы динамики упруго-пластических сред. Москва: Мир, 1975. Вып. 5. С. 155–247.
- [6] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука. 248 с.
- [7] Гудьер Дж. Н., Хордж Ф. Г. Упругость и пластичность. Москва: Иностранная литература, 1960. 191 с.
- [8] Немировский Ю. В. Об оценках веса пластических оптимальных конструкций // Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1968. № 4. С. 159–162.

-
- [9] Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Оценка и критерий оптимального проектирования жестко-пластических элементов конструкций минимального объема // Известия вузов. Строительство. 1966. № 3. С. 16–25.
- [10] Немировский Ю. В. Эквивалентные по предельному состоянию однородные и композитные балки // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельно состояния. 2014. № 2(20). С. 78–84.
- [11] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельно состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
- [12] Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. Москва: Физматлит, 1966. 870 с.
- [13] Ильющин А. А., Ленский В. С. Сопrotивление материалов. Москва: Физматгиз, 1959. 371 с.

Yu. V. Nemirovsky

ABOUT EXTREMELY ALLOWABLE DEFORMATIONS OF POLYMETALLIC RODS DURING BENDING BY FOCUSED LOADS*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Khristianovich SB RAS, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

Abstract. Possible maximum permissible states of layered polymetallic rods of constant cross section under the influence of concentrated loads arbitrarily located in the span are studied. Three possible limiting states are considered: the first (extremely elastic), the second (pre-fracture state) and the third (fracture state). The conditions for their implementation are formulated, the corresponding levels of ultimate loads are determined, and ways to control the parameters of loading devices to ensure favorable deformation processes are outlined.

Keywords: equidistance, three-point bending, limiting states, normal, shear stresses, concentrated loads, controlling mechanical and geometric parameters.

REFERENCES

- [1] Deribas A. A. Physics of hardening and explosion welding. Novosibirsk: Nauka, 1972. 182 p. (in Russian).
- [2] King V. K., Gildengorn M. S. Basics of the production of multilayer metals. Moscow: Metallurgy, 1978. 237 p. (in Russian).
- [3] Matchenko N. M., Treschev A. A. The theory of deformation of materials with different resistance. Defining equations. Tula: TulSU, 2000. 179 p. (in Russian).
- [4] Mazalov V. N., Nemirovsky Y. V. Optimal design of structures // Bibliographic index for 1948–1974. Parts 1–2. Novosibirsk: Institute of Hydrodynamics of the USSR Academy of Sciences, 1975. 472 p. (in Russian).
- [5] Mazalov V. N., Nemirovsky Y. V. Dynamics of thin-walled classical structures // Mechanics. Problems of the dynamics of elastic-plastic media. No. 5. Moscow: Mir, 1975. P. 155–247. (in Russian).
- [6] Komarov K. L., Nemirovsky Y. V. Dynamics of rigid-plastic structural elements. Novosibirsk: Nauka. 248 p. (in Russian).
- [7] Goodyear J. N., Chorge F. G. Elasticity and plasticity. Moscow: Foreign Literature, 1960. 191 p. (in Russian).
- [8] Nemirovsky Y. V. On estimates of the weight of optimal plastic structures // Engineering Journal. Solid Mechanics. 1968. no. 4. P. 159–162. (in Russian).
- [9] Nemirovsky Y. V., Vohmyanin I. T. Evaluation and criterion for the optimal design of rigid-plastic structural elements of minimal volume // University News. Construction. 1966. no. 3. P. 16–25. (in Russian).
- [10] Nemirovsky Y. V. Homogeneous and composite beams equivalent in the limiting state // Bulletin of ChSPU them. AND I. Yakovleva. Series: Mechanics of the Ultimate State. 2014. no. 2(20). P. 78–84. (in Russian).
- [11] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of ChSPU them. AND I. Yakovleva. Series: Mechanics of the Ultimate State. 2018. no. 3(37). P. 26–37. (in Russian).
- [12] Vygodsky M. Y. Handbook of Higher Mathematics. Moscow: Fizmatlit, 1966. 870 p. (in Russian).
- [13] Akhiezer N. I. Lectures on the calculus of variations. Moscow: GITTL, 1955. 248 p. (in Russian).
- [14] Ilyushin A. A., Lensky V. S. Resistance of materials. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 371 p. (in Russian).

Yuri Vladimirovich Nemirovsky, Dr. Sci. Phys. & Math., Chief Researcher, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. A. Khristianovich SB RAS, Novosibirsk; Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

А. Ю. Добрышкин, О. Е. Сысоев, Е. О. Сысоев, Лин Тхет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАЗОМКНУТОЙ ОБОЛОЧКИ С МАЛОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ, ПРИ ШАРНИРНОМ ОПИРАНИИ, МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. В работе приводится уточненная математическая модель вынужденных колебаний разомкнутой оболочки с малой присоединенной массой при шарнирном опирании. Шарнирное опирание рассмотрено как наиболее часто используемое. Уравнения составлены в линейной постановке, решались асимптотическими методами, с помощью аппроксимации Паде. Проведены экспериментальные исследования, для этого изготовлены испытательный стенд, образцы, разработана программа экспериментов. Выполненное сравнение теоретических и экспериментальных данных составляет менее 5%, что говорит о высокой надежности уточненной математической модели. Полученные зависимости частоты колебаний оболочки и параметра волнообразования позволяют производить расчеты разомкнутых тонкостенных цилиндрических оболочек при параметре волнообразования больше 0,3, при проектировании таких конструкций.

Ключевые слова: разомкнутая тонкостенная цилиндрическая оболочка, собственные колебания, присоединенная масса.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.003

УДК: 692.45

Тонкостенные конструкции разомкнутых цилиндрических оболочек представляют обширный класс объектов, используемых в машиностроительной, строительной,

© Добрышкин А. Ю., Сысоев О. Е., Сысоев Е. О., Лин Тхет, 2020

Добрышкин Артем Юрьевич

e-mail: wwartem21@mail.ru, старший преподаватель, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Сысоев Олег Евгеньевич

e-mail: fks@knastu.ru, доктор технических наук, профессор, декан, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Сысоев Евгений Олегович

e-mail: jonprochta@mail.ru, кандидат экономических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Лин Тхет

e-mail: Lin1234@mail.ru, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 24.01.2020

ракетно-космической, нефтяной и других отраслях. Такие объекты имеют различные конфигурации и иногда наибольшую кривизну разомкнутой оболочки. Зачастую трудно выбрать, согласно какой теории проводить расчет разомкнутых оболочек — изогнутых пластин. Эксплуатация таких конструкций подразумевает значительные динамические нагрузки, усиливающиеся наличием различных изгибных форм колебаний, которые зачастую сложно определить. Как следствие, появляются значительные внутренние динамические напряжения, а также присутствуют резонансные процессы, приводящие к потере устойчивости, прочности и надежности аппаратов, машин и конструкций. Данное обстоятельство заставляет многих ученых, инженеров, конструкторов, проектировщиков заниматься проблемами динамики оболочечных систем различных типов и конфигураций. Подобного рода задачи носят нелинейный характер, а их решение позволяет очень точно описать колебательные процессы, что позволяет эффективнее использовать несущую способность конструкций, сводя эффект наличия различных изгибных форм внутренних колебаний к минимуму, либо использовать их для увеличения несущей способности.

Широкое использование оболочек в строительстве и машиностроении обусловлено простотой изготовления и высокой эффективностью, с точки зрения прочности и оптимальной геометрической формы оболочек. Возникновение вынужденных колебаний от интенсивных динамических нагрузок при эксплуатации таких конструкций не ограничивает эксплуатацию разомкнутых оболочек, лежащих на упругом основании. Явления данного рода зачастую сопровождаются влиянием присоединенной массы к оболочке. Данное обстоятельство изучено не полностью, а эксплуатация разомкнутых оболочек продолжается. Поэтому иногда происходят разрушения, несмотря на большие запасы прочности ($K_z = 1,4$ по снеговой нагрузке, $K_z = 1,1$ по ветровой нагрузке), что вызывает повышенный интерес к анализу динамики тонких разомкнутых оболочек [1, 2, 3, 4].

В настоящее время нет точного описания механизма колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу. При проектировании конструкций в соответствии с нормативными требованиями современных сводов правил, технических регламентов и других руководящих документов для проектирования оболочечных конструкций случаются аварии, так как при эксплуатации объектов не запланированы мероприятия, препятствующие колебаниям конструкций, возникшим в результате наличия присоединенной массы.

Для исследования влияния присоединенной массы на колебания разомкнутой цилиндрической тонкостенной оболочки в лаборатории строительных конструкций КнАГУ проведены экспериментальные исследования, цель которых — определить частотные характеристики этого процесса. Опытный образец, находящийся в испытательном стенде с малой присоединенной массой (рис. 1), подвергался действию кратковременной нагрузки для возбуждения вынужденных колебаний.

В результате исследования вынужденных колебаний тонкой прямоугольной в плане разомкнутой оболочки, с двух сторон опирающейся на упругое основание, получены уравнения колебаний оболочки, отражающие зависимость влияния присоединенной массы на численные характеристики собственных частот колебаний оболочки. Колебания с умеренными амплитудами вынужденных колебаний были разложены согласно уравнениям [5, 6]

$$D_1 \bar{W}_{xxxx} + 2D_3 \bar{W}_{xxyy} + D_2 \bar{W}_{yyyy} + \rho \bar{W}_n + C \bar{W} = 0.$$

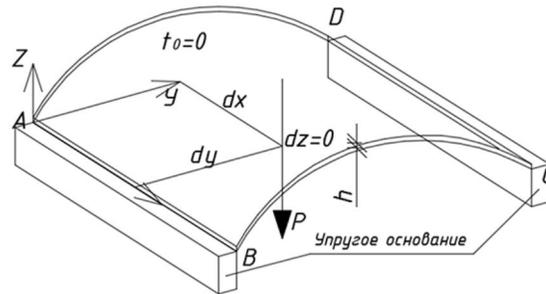


Рис. 1. Образец оболочки

Дискретная нелинейная модель колебаний тонкой оболочки, заземленной по краям, полученная при проведении исследований, исследовалась с применением метода многих масштабов.

Образец представляет собой разомкнутую оболочку, прямоугольную в плане, из оцинкованной стали Ст0. Геометрические характеристики объекта: $L = 890$ мм, $B = 370$ мм, $H = 0,4$ мм. Схема проведения эксперимента изображена на рис. 2.

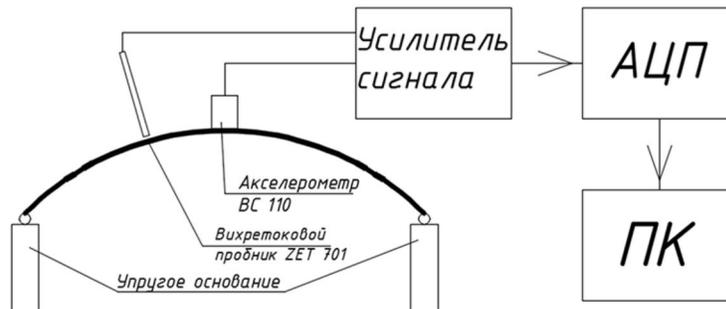


Рис. 2. Блок-схема экспериментальной установки

Модель оболочки закрепляется в стальном стенде. Данный стенд имеет форму столика, изготовленного из равнополочных уголков, в местах касания оболочки выполнено керамическое покрытие специально для проведения данного эксперимента. Граничные условия максимально приближены к реальным [7, 8, 9, 10]. Присоединенную массу представляет акселерометр ВС110, расположенный на образце согласно рис. 2. Акселерометр ВС110 измеряет частоту колебаний с максимальной точностью. Акселерометр ВС110 передаёт показания на усилитель сигнала, который, усиливая сигнал, передаёт далее на аналого-цифровой преобразователь, далее на персональный компьютер. Вихретоковой пробник ZET 701 расположен максимально близко к оболочке, но не касается её, передаёт показания на программное обеспечение “Z-lab”, где вместе с данными колебаний отражается зависимости одних параметров от других в режиме реального времени. Нагревательный элемент создаёт градиент температур.

Эксперимент направлен на изучение собственных колебаний пластины в “покое” и выявление зависимостей вынужденных и собственных колебаний от влияния присоединенной массы или системы масс. Вынужденные колебания, переходя в собственные колебания, задавались с помощью удара испытательным молотком АУ03 [11, 12, 13, 14, ?]. Также присутствовал бесконтактный датчик измерения колебаний пластины, не отображенный на схеме. Данный датчик является проверяющим, служит для проверки и отбраковки ошибочных данных показаний акселерометра ВС110.

Рассмотрим математическую модель собственных колебаний ортотропной прямоугольной изогнутой пластины ($-a/2 \leq \bar{x} \leq a/2$, $-b/2 \leq \bar{y} \leq b/2$) [?, ?, ?, ?, ?, ?] со свободными краями, лежащей на упругом основании Винклера–Фусса.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания ортотропной пластины, выглядит следующим образом:

$$D_1 \bar{W}_{xxxx} + 2D_3 \bar{W}_{xxyy} + D_2 \bar{W}_{yyyy} + \rho \bar{W}_n + C \bar{W} = 0,$$

где

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_3 = D_1 \nu_2 + \frac{G h^3}{6};$$

C — коэффициент постели; D_1 , D_2 — цилиндрические жесткости в направлении осей \bar{x} и \bar{y} ; D_3 — крутильная жесткость; E_1 , E_2 — модуль упругости в направлении осей \bar{x} и \bar{y} ; G — модуль сдвига; ν_1 , ν_2 — коэффициенты Пуассона в направлениях \bar{x} и \bar{y} .

После разделения временных и пространственных переменных ($W = W(x, y)T(t)$) и обезразмеривания дифференциальное уравнение примет следующий вид:

$$W_{xxxx} + 2\alpha_3 W_{xxyy} + \alpha_2 W_{yyyy} - \lambda W = 0,$$

где $\alpha_2 = D_2/D_1$, $\alpha_3 = D_3/D_1$, $\lambda = b^4(\bar{m}\theta^2 - c)/D_1$.

Добавим к дифференциальному уравнению граничные условия:

$$W_{xxx} + (2 - \nu_1)W_{yyx} = 0, \quad (1 - \varepsilon)W_x \pm k\varepsilon(W_{xx} + \nu_1 W_{yy}) = 0 \quad \text{при } x = \pm 0,5k;$$

$$W_{yyy} + (2 - \nu_2)W_{xxy} = 0, \quad (1 - \varepsilon)W_y \pm \varepsilon(W_{yy} + \nu_2 W_{xx}) = 0 \quad \text{при } y = \pm 0,5.$$

Собственное число и собственную форму представляем в виде рекурсивной формулировки теории возмущений (РТВ) [?, ?, ?, ?]. Подставляя эти ряды в дифференциальное уравнение и граничные условия и расщепляя по степеням ε , получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$W_{0xxx} + 2\alpha_3 W_{0xxyy} + \alpha_2 W_{0yyyy} - \lambda_0 W_0 = 0,$$

$$W_{0x} = 0, \quad W_{0xxx} = 0 \quad \text{при } x = \pm 0,5k, \quad W_{0y} = 0, \quad W_{0yyy} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0,5,$$

$$W_{jxxxx} + 2\alpha_3 W_{jxxyy} + \alpha_2 W_{jyyyy} - \lambda_0 W_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i},$$

$$W_{jxxx} + (2 - \nu_1)W_{jyyx} = 0, \quad W_{jx} = \varepsilon k \sum_{i=0}^{j-1} (W_{ixx} + \nu_1 W_{iyy}) \quad \text{при } x = \pm 0,5k,$$

$$W_{jyyy} + (2 - \nu_2)W_{jxxy} = 0, \quad W_{jy} = \varepsilon \sum_{i=0}^{j-1} (W_{iyy} + \nu_2 W_{ixx}) \quad \text{при } y = \pm 0,5.$$

В нулевом приближении:

$$\lambda_0 = \pi^4 \left[\frac{m^4}{k^4} + 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} + \alpha_2 n^4 \right],$$

$$W_0 = X_0 Y_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi m}{k} x, \quad n, m = 3, 5, 7, \dots \\ \frac{\pi m}{k} \\ \cos \frac{\pi m}{k} x, \quad n, m = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}.$$

Построение дальнейших приближений подробно рассмотрим для центрально симметричных форм колебаний. При этом $n, m = 3, 5, 7, \dots$. Краевая задача первого приближения такова:

$$W_{1xxxx} + 2\alpha_3 W_{1xxyy} + \alpha_2 W_{1yyyy} - \lambda_0 W_1 = \lambda_2 \sin \pi n y \sin \frac{\pi m}{k} x;$$

$$W_{1xxx} + (2 - \nu_1) W_{1yyx} = 0,$$

$$W_{1x} = \pm k^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \pi n y \quad \text{при } x = \pm 0, 5k;$$

$$W_{1yyy} + (2 - \nu_2) W_{1xxy} = 0,$$

$$W_{1y} = \pm \pi^2 \left(n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{\pi m}{k} x \quad \text{при } y = \pm 0, 5.$$

Решение краевой задачи ищем в виде

$$W_1 = X_1(x) \sin \pi n y + Y_1(y) \sin \pi \frac{m}{k} x, \quad \lambda_1 = \lambda_{1x} + \lambda_{1y}.$$

Подставляя выражения в дифференциальное уравнение и граничные условия, имеем две одномерные задачи:

$$X_1^{IV}(x) + 2\alpha_3 \pi^2 n^2 X_1^{II}(x) - \pi^4 \left[\frac{m^4}{k^4} + 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} \right] X_1(x) = \lambda_{1x} \sin \frac{\pi m}{k};$$

$$X_1^I(x) = \pm k n^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при } x = \pm 0, 5k;$$

$$X_1^{III}(x) - \pi^2 n^2 (2 - \nu_1) X_1^I(x) = 0;$$

$$Y_1^{IV}(y) + 2\alpha_3 \pi^2 Y_1^{II}(y) - \pi^4 \left[2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} + n^4 \right] Y_1(y) = \lambda_{1y} \sin \pi n y;$$

$$Y_1^I(y) = \pm \pi^2 \left(n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при } y = \pm 0, 5;$$

$$Y_1^I(y) - \pi^2 \frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2) Y_1^I(y) = 0.$$

После построения условий разрешимости приводим окончательные выражения:

$$\lambda_{1x} = 4\pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) \left[n^2 (2 - \nu_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right],$$

$$\lambda_{1y} = 4\pi^4 \left(n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left[\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right].$$

Теперь находим первую поправку к собственной форме W_1 :

$$\begin{aligned}
W_1 = & \frac{\pi \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right)}{\left(\frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)} \left[\frac{k \left\{ \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(-1)^{\frac{m}{2}}} \right\} \left(n^2(2 - \nu_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{2\beta_2 \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_2 k}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \beta_2 k} \right\}} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \pi \beta_2 x}{\operatorname{ch} \pi \beta_2 x} \right\} - \right. \\
& \left. - (-1)^m \frac{k}{m} \left(n^2(2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right) x \left\{ \frac{\cos \frac{\pi m}{k} x}{\sin \frac{\pi m}{k} x} \right\} \right] \left\{ \frac{\sin \pi n y}{\cos \pi n y} \right\} + \\
& + \frac{\pi \left(n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \left[\frac{\left\{ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}} \right\} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2) n^2 \right)}{2\beta_1 \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \beta_1} \right\}} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \pi \beta_1 y}{\operatorname{ch} \pi \beta_1 y} \right\} - \right. \\
& \left. - (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) y \left\{ \frac{\cos \pi n y}{\sin \pi n y} \right\} \right] \left\{ \frac{\sin \frac{\pi m}{k} x}{\cos \frac{\pi m}{k} x} \right\}, \\
& \left. \left\{ \begin{array}{l} n, m = 1, 3, 5, \dots \\ n, m = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}. \right.
\end{aligned}$$

Рассматривая второе приближение, определяем:

$$\begin{aligned}
\lambda_{2x} = & 4\pi^4 \left[n^2(2 - \nu_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right] \left\{ \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) - \left\{ \frac{\left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right)}{\left(\frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)} \right\} \times \right. \\
& \times \left[\frac{\pi k}{2} \left(n^2(2 - \nu_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \operatorname{cth}^{(-1)^m} \frac{\pi}{2} \beta_2 - 2 \left(n^2(2 - \nu_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right) \right] - \\
& - 2\nu_1 \frac{\left(n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) - \frac{\left(n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \times \\
& \times \left[\frac{\left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_1) + n^2 \right) \left(\frac{m^2}{k^2} (1 - 2\nu_1 \alpha_3) - n^2 \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left. + \frac{1}{2n^2} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) \right] \right\} - \\
& - \frac{\lambda_1}{2} \frac{\left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \left\{ k \frac{\left(n^2 (2 - \nu_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left(\frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 2\alpha_3) - n^2 \right) \right\} \Bigg\}; \\
& \left(\lambda_{2y}; \frac{m^2}{k^2}; n^2; \nu_1; \nu_2; \beta_1 \right) \rightarrow \left(\lambda_{2x}; \frac{m^2}{k^2}; n^2; \nu_1; \nu_2; \beta_2 \right).
\end{aligned}$$

В изотропном случае ($D_1 = D_2 = D_3 = D$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$) выражения для λ и W примут вид:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \pi^4 \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 - 4\pi^4 (1 + \nu) \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right) \varepsilon + (\lambda_{2x} + \lambda_{2y}) \varepsilon^2 + \dots; \\
W &= \left\{ \frac{\sin \pi n y \sin \frac{\pi m}{k} x}{\cos \pi n y \cos \frac{\pi m}{k} x} \right\} + \\
&+ \frac{\pi}{\left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)} \left\{ \frac{k \left\{ \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(-1)^{\frac{m}{2}}} \right\} \left(n^2 (2 - \nu) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{2\beta_2 \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_2 k}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \beta_2 k} \right\}} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \pi \beta_2 x}{\operatorname{ch} \pi \beta_2 x} \right\} + \right. \\
&+ \left. (-1)^m \frac{k}{m} \left(\nu n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right) x \left\{ \frac{\cos \frac{\pi m}{k} x}{\sin \frac{\pi m}{k} x} \right\} \right\} \left\{ \frac{\sin \pi n y}{\cos \pi n y} \right\} + \\
&+ \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right) \left[\frac{\left\{ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}} \right\} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu) + n^2 \right)}{\left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \beta_1} \right\}} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \pi \beta_1 y}{\operatorname{ch} \pi \beta_1 y} \right\} + \right. \\
&+ \left. (-1)^n \frac{1}{n} \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) y \left\{ \frac{\cos \pi n y}{\sin \pi n y} \right\} \right] \left\{ \frac{\sin \frac{\pi m}{k} x}{\cos \frac{\pi m}{k} x} \right\} \varepsilon + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{2x} = & 8\pi^4(1 + \nu) \left(\nu n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right) \left[\frac{k \left(n^2(2 - \nu) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{2 \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)} - \frac{m^2}{k^2} \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) \right] - \\
 & - 4\pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right)^2 + 8\pi^4 \frac{\left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right)}{\left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)} \left\{ \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) \times \right. \\
 & \times \left[\frac{k \left(n^2(2 - \nu) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{2\beta_2} \operatorname{cth} \frac{\pi\beta_2 k}{2} + 2 \left(\nu n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right) \right] + \\
 & + 2\nu \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) + \nu \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) \times \\
 & \times \left[\frac{\left(\frac{m^2}{k^2}(2 - \nu) + n^2 \right) \left(\frac{m^2}{k^2}(1 - 2\nu) + n^2 \right)}{\left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)} + \frac{\left(\nu n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right) \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right)}{2n^2} \right] \left. \right\}; \\
 & \left(\lambda_{2y}; \frac{m^2}{k^2}; n^2; \beta_2 \right) \rightarrow \left(\lambda_{2x}; \frac{m^2}{k^2}; n^2; \beta_1 \right).
 \end{aligned}$$

Проведем сравнение результатов первого собственного числа колебаний свободной квадратной изотропной пластины с другими методами определения колебаний (рис. 3).

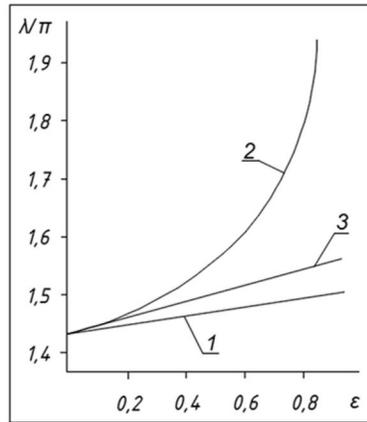


Рис. 3. Первое собственное число для квадратной в плане разомкнутой оболочки на упругом основании: 1 — данные, полученные с помощью рекурсивной формулировки теории возмущений; 2 — данные, полученные с помощью аппроксимации Паде; 3 — экспериментальные данные

Аппроксимации Паде отрезка ряда имеет вид

$$\lambda_{\left[\frac{1}{1}\right]}(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1\varepsilon}{1 + b_1\varepsilon}.$$

Первое собственное число задачи при $\nu = 1/6$, полученное при помощи аппроксимации Паде, равно $\lambda = (1,100\pi)^4$. Для $\nu = 0,3$ аппроксимация Паде дает $\lambda = (1,1198\pi)^4$. Нулевое приближение рекурсивной формулировки теории возмущений и аппроксимации Паде при $\varepsilon = 1$ соответственно дают верхнюю и нижнюю оценки собственных чисел задачи.

Вывод. Полученная модель имеет более лучшее совпадение с экспериментальными данными для разомкнутых тонкостенных цилиндрических оболочек с присоединенной массой при шарнирном опирании, когда значение параметра волнообразования больше 0,3, и может использоваться конструкторами при проектировании разомкнутых оболочечных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Москва, Ленинград: Гостехиздат, 1949. 784 с.
- [2] Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наукова думка, 1984. 220 с.
- [3] Антуфьев Б. А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций: монография. Москва: Изд-во МАИ, 2011. 176 с.
- [4] Гемпел К. А. Справочник по редким металлам: пер. с англ. Москва: Мир, 1965. 946 с.
- [5] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Naing N. S. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved Plate Carried to the Associated Masses System // In: International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety (ICCATS 2017), 21-22 September 2017, Chelyabinsk, Russian Federation. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 262. 012055 doi:10.1088/1757-899X/262/1/012055.
- [6] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Влияние присоединенной массы на вынужденные колебания разомкнутых оболочек // Ученые записки КнАГТУ. 2016. № 3. С. 110–116.
- [7] Современные испытательные стенды для бесконтактного исследования свободных колебаний замкнутых и разомкнутых цилиндрических оболочек / О. Е. Сысоев, А. Ю. Добрышкин, С. Н. Нейн [и др.] // Ученые записки КнАГТУ. 2017. № 1. С. 110–118.
- [8] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Влияние присоединенной массы и температурного сдвига на собственные колебания тонких пластин (мембран) // Ученые записки КнАГТУ. 2017. № 2. С. 105–111.
- [9] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Влияние величины присоединенной массы на вынужденные колебания разомкнутых оболочек из алюминиевого сплава Д19 // Ученые записки КнАГТУ. 2017. № 4. С. 100–106.
- [10] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98.
- [11] Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell / Z. Wang, Q. Han, D. H. Nash et al. // Thin-Walled Structures. 2017. no. 119. P. 438–446.
- [12] Research of the influence of the location of the joint mass on the forced vibration of a thin-contained extended shell / A. Y. Dobryshkin, O. E. Sysoev, S. N. Nain et al. // International scientific conference “Far East Con”.
- [13] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Baenhaev A. V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell // Materials Science Forum. 2019. Vol. 945. P. 885–892.

- [14] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y. Natural vibration of a thin desing with an added mass as the vibrations of a cylindrical shell and curved batten // *Jornal of Heilongjiang university of science and technology*. 2018. Vol. 28, no. 1. P. 75–78.
- [15] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Curved plate carried to the associated masses system // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017. p. 262.
- [16] Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method / Y. Qu, Y. Chen, X. Long et al. // *Applied Acoustics*. 2013. Vol. 74, no. 3. P. 425–439.
- [17] Qu Y., Hua H., Meng G. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 307–321.
- [18] Xing Y., Liu B., Xu T. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 75. P. 178–188.
- [19] Free and forced vibration of ring-stiffened conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions / M. Chen, K. Xie, W. Jia et al. // *Ocean Engineering*. 2015. Vol. 108. P. 241–256.
- [20] The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary / H. Li, M. Zhu, Z. Xu et al. // *Shock and Vibration*. 2016. Vol. 2016. Article ID 4709257, 15 pages.
- [21] Foster N., Fernández-Galiano L. Norman Foster in the 21st Century. AV Monografias. S.L.: Artes Gráficas Palermo, 2013.
- [22] Eliseev V. V., Moskalets A. A., Oborin E. A. One-dimensional models in turbine blades dynamics // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2016. Vol. 9. P. 93–104.
- [23] Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models. Berlin: Humboldt University, 2014. 34 p. (SFB 649 Discussion Paper; 2014-010).
- [24] Белосточный Г. Н., Мылцина О. А. Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // *Труды МАИ*. 2015. № 82. http://mai.ru/upload/iblock/31c/belostochnyy_mytsina-rus.pdf.
- [25] Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя / Е. Л. Кузнецова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков [и др.] // *Труды МАИ*. 2013. № 71. <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621> (дата публикации 26.12.2013).

A. Yu. Dobryshkin, O. E. Sysoev, E. O. Sysoev, Lin Thet

SIMULATION OF FORCED OSCILLATIONS OF AN OPEN SHELL WITH A SMALL ATTACHED MASS, WITH A HINGE SUPPORT, BY THE METHOD OF PADE APPROXIMATION

Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The paper presents a refined mathematical model of forced oscillations of an open shell with a small attached mass at a hinge support. Hinge support is considered as the most frequently used. The equations are composed in a linear formulation, solved by asymptotic methods, using Pade approximations. Experimental studies were carried out, a test stand and samples were made for this purpose, and a program of experiments was developed. Comparison of theoretical and experimental data it is less than 5%, which indicates a high reliability of the refined mathematical model. The obtained dependences of the shell oscillation frequency and the wave formation parameter make it possible to calculate the open-ended thin-walled cylindrical shells with a wave formation parameter greater than 0.3, when designing such structures.

Keywords: open thin-walled cylindrical shell, natural vibrations, attached mass.

REFERENCES

- [1] Vlasov V. Z. General theory of shells and its application in engineering. Moscow, Leningrad: Gostehizdat, 1949. 784 p. (in Russian).
- [2] Kubenko V. D., Kovalchuk P. S., Krasnopol'skaja T. S. Nonlinear interaction of forms of bending vibrations of cylindrical shells. Kiev: Naukova dumka, 1984. 220 p. (in Russian).
- [3] Antufjev B. A. Vibrations of inhomogeneous thin-walled structures: monograph. Moscow: Izd-vo MAI, 2011. 176 p. (in Russian).
- [4] Hempel K. A. Handbook of rare metals: transl. Moscow: Mir, 1965. 946 p. (in Russian).
- [5] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Nonlinear Oscillations of Elastic Curved Plate Carried to the Associated Masses System // In: International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety (ICCATS 2017), 21-22 September 2017, Chelyabinsk, Russian Federation. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 262. 012055 doi:10.1088/1757-899X/262/1/012055.
- [6] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Effect of the attached mass on forced oscillations of open shells // Scientific notes of KnAGTU. 2016. no. 3. P. 110–116. (in Russian).
- [7] Modern test benches for non-contact study of free oscillations of closed and open cylindrical shells / O. E. Sysoev, A. Y. Dobryshkin, S. N. Nain et al. // Scientific notes of KnAGTU. 2017. no. 1. P. 110–118. (in Russian).
- [8] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. The effect of the attached mass and temperature shift on the natural oscillations of thin plates (membranes) // Scientific notes of KnAGTU. 2017. no. 2. P. 105–111. (in Russian).

Dobryshkin Artem Yurjevich, Senior Lecturer, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Sysoev Oleg Evgenyevich, Doctor of Engineering, Professor, Dean, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Sysoev Evgeniy Olegovich, Candidate of economic Sciences, Associate Professor, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Lin Thet, Post-graduate student, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

- [9] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. The effect of the attached mass on the forced oscillations of open shells made of aluminum alloy D19 // Scientific notes of KnAGTU. 2017. no. 4. P. 100–106. (in Russian).
- [10] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Analytical and experimental study of free oscillations of open shells made of D19 alloy bearing a system of attached masses // Works of MAI. 2018. no. 98. (in Russian).
- [11] Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell / Z. Wang, Q. Han, D. H. Nash et al. // Thin-Walled Structures. 2017. no. 119. P. 438–446.
- [12] Research of the influence of the location of the joint mass on the forced vibration of a thin-contained extended shell / A. Y. Dobryshkin, O. E. Sysoev, S. N. Nain et al. // International scientific conference “Far East Con”.
- [13] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Baenhaev A. V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell // Materials Science Forum. 2019. Vol. 945. P. 885–892.
- [14] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y. Natural vibration of a thin desing with an added mass as the vibrations of a cylindrical shell and curved batten // Journal of Heilongjiang university of science and technology. 2018. Vol. 28, no. 1. P. 75–78.
- [15] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nain S. N. Curved plate carried to the associated masses system // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. p. 262.
- [16] Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method / Y. Qu, Y. Chen, X. Long et al. // Applied Acoustics. 2013. Vol. 74, no. 3. P. 425–439.
- [17] Qu Y., Hua H., Meng G. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // Composite Structures. 2013. Vol. 95. P. 307–321.
- [18] Xing Y., Liu B., Xu T. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences. 2013. Vol. 75. P. 178–188.
- [19] Free and forced vibration of ring-stiffened conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions / M. Chen, K. Xie, W. Jia et al. // Ocean Engineering. 2015. Vol. 108. P. 241–256.
- [20] The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary / H. Li, M. Zhu, Z. Xu et al. // Shock and Vibration. 2016. Vol. 2016. Article ID 4709257, 15 pages.
- [21] Foster N., Fernández-Galiano L. Norman Foster in the 21st Century. AV Monografias. S.L.: Artes Gráficas Palermo, 2013.
- [22] Eliseev V. V., Moskalets A. A., Oborin E. A. One-dimensional models in turbine blades dynamics // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2016. Vol. 9. P. 93–104.
- [23] Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models. Berlin: Humboldt University, 2014. 34 p. (SFB 649 Discussion Paper; 2014-010).
- [24] Belostochnyj G. N., Myltsina O. A. Static and dynamic behavior of flat shells under the influence of rapid temperature-force effects // Works MAI. 2015. no. 82. http://mai.ru/upload/iblock/31c/belostochnyy_myltsina-rus.pdf. (in Russian).
- [25] Effect of non-stationary distributed load on the surface of the elastic layer / E. L. Kuznetsova, D. V. Tarlakovskij, G. V. Fedotenkov et al. // Works MAI. 2013. no. 71. <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621> (date of publication 26.12.2013). (in Russian).

М. В. Поликарпов, В. Б. Пеньков

СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ СИЛОВЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В МЕТОДЕ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Данная статья посвящена развитию метода граничных состояний на класс задач механики твердого деформируемого тела, включающих сингулярности физического характера. Сформировано множество специальных решений, соответствующих сосредоточенным силовым воздействиям на поверхности гладкого трехмерного тела. Каждое специальное решение включено в базисы пространств внутренних и граничных состояний. В качестве примеров эффективности использования специальных решений методом граничных состояний построены напряжённо-деформированные состояния тел шарообразной формы под воздействием сосредоточенных сил.

Ключевые слова: сосредоточенная сила, эластостатика, сингулярность, трехмерные задачи, шар, метод граничных состояний.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.004

УДК: 539.3

Введение

Сосредоточенная сила представляет собой идеализацию локально сконцентрированного в малой области поверхностного усилия значительной величины. Этот подход согласуется с принципом Сен-Венана, постулирующим индифферентность индивидуальной формы приложенной нагрузки по отношению к удаленной точке наблюдения: требуется, чтобы главные величины, характеризующие механическое воздействие (главный вектор, момент) имели соответствующие значения. Этот же подход позволяет при проведении вычислений заменять сосредоточенный фактор эквивалентным по действию распределенным. Сосредоточенная сила является сингулярностью физического характера.

© Поликарпов М. В., Пеньков В. Б., 2020

Поликарпов Максим Владимирович

e-mail: messiah142@gmail.com, аспирант, младший научный сотрудник, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Пеньков Виктор Борисович

e-mail: vbrenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90065.

Поступила 18.01.2020

Впервые задача о сосредоточенной силе, действующей на границу полуплоскости, была решена профессором Буссинеском Ж. В. в 1885 году. По условиям задачи необходимо было определить значения вертикальных и касательных напряжений в точке, расположенной на площадке, параллельной плоскости, ограничивающей массив от действия сосредоточенной силы [18].

Мухелишвили Н. И. для обобщенно плоского напряженного состояния формирует функции, соответствующие действию сосредоточенной силы, приложенной в начале координат к неограниченному телу средствами комплексного представления [9].

В трехмерном случае задача о воздействии сосредоточенной силы в точке неограниченного пространства впервые была изучена Томсоном В. (Кельвином) в мемуаре 1848 году [7]. В [13] рассматривается задача о воздействии сосредоточенной силы в изотропной неограниченной упругой среде. Метод решения задач о сосредоточенных воздействиях по поверхности шара и шарового слоя описан в монографии Лурье А. И. [6], акцент сделан именно на сферический характер границ тела.

Плоские задачи о напряженно-деформированном состоянии при наличии сосредоточенных сил рассматривались в статьях [2, 12]. Ряд работ посвящен механике разрушения под действием сосредоточенных силовых факторов [3, 4, 5, 17]. В рамках динамики сосредоточенные силы и нагрузки исследовались в работах [1, 14]. Учет сосредоточенной силы средствами метода конечных элементов рассматривался в статье [8].

При организации метода граничных состояний (МГС) задачи о сосредоточенной силе рассмотрены ранее [15, 16], но только для класса плоских задач механики твердого деформируемого тела.

Основные положения метода граничных состояний

МГС основан на понятии состояния среды, под которым понимается частное решение определяющих уравнений среды безотносительно к условиям, поставленным на границе тела [10]. Определяющие соотношения в математической модели однородного эластостатического тела представлены в тензорно-индексной форме записи

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{tt} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \\ \sigma_{ij,j} + X_i &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где u_i , X_i — компоненты векторов перемещения и объемных сил, σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, δ_{ij} — символ Кронекера, λ , μ — параметры Ламе. При фиксированных значениях λ , μ совокупность соотношений (1) сводится к системе уравнений Ламе

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = 0.$$

Их общее решение построено Папковичем и Нейбером и для ограниченного односвязного тела представляется в форме Аржаных – Слободянского (случай отсутствия объемных сил)

$$u_i = 4(1 - \nu) B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,i},\tag{2}$$

где B_i — компонента произвольного гармонического вектора. Общее решения (2) служит эффективным средством формирования базиса пространства состояний для тела, в котором отсутствуют сингулярные факторы [10].

Понятие состояния среды трансформируется в понятия внутреннего ξ и граничного γ состояний, если речь заходит о конкретном теле V , имеющем границу ∂V

$$\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}, \quad \gamma = \{u_i|_{\partial V}, p_i\},$$

где $p_i = \sigma_{ij}|_{\partial V} n_j$.

Совокупность всех возможных состояний $\xi \longleftrightarrow \gamma$ образует изоморфные гильбертовы пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний со скалярными произведениями

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\Xi} = \int_V \sigma_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \partial V, \quad (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_{\Gamma} = \int_{\partial V} p_i^{(k)} u_i^{(m)} \partial S,$$

которые равны между собой в силу принципа возможных перемещений

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\Xi} = (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_{\Gamma}.$$

После ортогонализации атрибуты результирующих внутреннего и граничного состояний представляются рядами Фурье по элементам ортонормированных базисов

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}. \quad (3)$$

$$u_i|_{\partial V} = \sum_k c_k u_i^{(k)}|_{\partial V}, \quad p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)}. \quad (4)$$

Формирование специального решения

Учет сингулярности обеспечивается благодаря использованию специальных решений при организации МГС, а именно формированием счетных базисов с их непосредственным включением для пространств внутренних и граничных состояний.

Перемещение "точки наблюдения" M в неограниченной упругой среде под действием сосредоточенной в "точке истока" Q силы P определяется с помощью тензора Кельвина – Соммильяна формулой [7]

$$\mathbf{u}(M, Q) = \hat{U}(M, Q) \cdot \mathbf{P},$$

$$\hat{U} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R} \left[(3-4\nu) \hat{E} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right], \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_Q, \quad R = |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_Q|.$$

Специальное решение для единичной силы сосредоточенной в точке с координатами $(0, 0, -1)$ и при $\mu = 1$, $\nu = \frac{1}{4}$ имеет форму

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (1 + \varepsilon + z)^2},$$

$$\mathbf{R}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & x(1 + \varepsilon + z) \\ xy & y^2 & y(1 + \varepsilon + z) \\ x(1 + \varepsilon + z) & y(1 + \varepsilon + z) & (1 + \varepsilon + z)^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{U} = \frac{1}{R^{3/2}} \begin{pmatrix} x^2 + 2R^2 & xy & x(1 + \varepsilon + z) \\ xy & y^2 + 2R^2 & y(1 + \varepsilon + z) \\ x(1 + \varepsilon + z) & y(1 + \varepsilon + z) & R^2 \left(2 + \frac{(1 + \varepsilon + z)^2}{R^2} \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}(M, Q) = \frac{1}{R^{3/2}} \begin{pmatrix} -x(1 + \varepsilon + z) \\ -y(1 + \varepsilon + z) \\ -R^2 \left(2 + \frac{(1 + \varepsilon + z)^2}{R^2} \right) \end{pmatrix}.$$

Точка, находящаяся под воздействием сосредоточенной силы, смещена от границы тела на малую величину ε . Это вынужденная, но допустимая мера, поскольку: 1) на удалении от центра воздействия на расстояние, многократно превышающем ε картина деформирования идентична идеализированной согласно принципу Сен-Венана; 2) смещение центра воздействия на ε от границы тела позволяет гарантированно вычислять пространственные и поверхностными интегралами, скрытые в скалярных произведениях, численными средствами.

Формирование искоемых компонент тензоров напряжений и деформаций выполняется в соответствии с соотношениями (1).

Сосредоточенные силовые воздействия на поверхности гладкого тела

Поверхность ∂V трехмерного тела с гладкими границами покрыта n локальными "пятнами" S_k габаритного диаметра 2ε каждое, в центре которых сосредоточены силы \mathbf{p}_k (рис. 1). Каждый вектор \mathbf{p}_k заменен его приближенным представлением в форме вектора пространственных многочлена 4-го порядка, обеспечивающих нулевое значение гладкого "полипа" на границах пятна и гладкость его перехода к нулевому уровню напряжений $\mathbf{p}_k = 0$, $x \in S_0 = \partial V \setminus \bigcap_{k=1}^n S_k$,

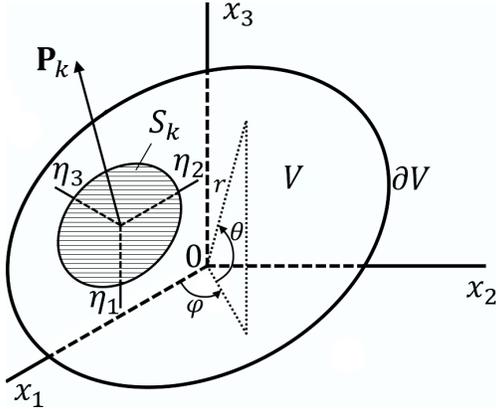


Рис. 1. Локализация пятна S_k

$$\mathbf{P}_k = \int_{S_k} \mathbf{p}_k(\eta) dS_\eta,$$

$$\mathbf{p}_k = p_j^k(\eta), \quad \eta = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\},$$

$$p_j^k(\eta) = p_j^{0k} \left(\frac{3}{\varepsilon^2 \pi} - \frac{6r^2}{\varepsilon^4 \pi} + \frac{3r^4}{\varepsilon^6 \pi} \right),$$

$$r^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad \eta \in S_k,$$

где p_j^{0k} — максимальное значение усилия на пятне k в направлении оси j .

Кроме смягченных сосредоточенных воздействий будем полагать заданной по всей границе ∂V функцию $\mathbf{p}_0(\mathbf{x})$, имеющую непрерывный гладкий характер. Таким образом граничные условия первой основной задачи (по классификации Н. И. Мусхелишвили [9]) имеют вид

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{p}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_k(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{S}_k \\ \mathbf{p}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{S}_0 \end{cases}.$$

По всей границе ∂V вектор $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ представляет собой гладкую непрерывную функцию.

Как известно [11], решение первой основной задачи средствами МГС сводится к вычислению коэффициентов Фурье через ортонормированный базис $\{\gamma^{(l)}\}$ пространства граничных состояний Γ и последующему восстановлению актуальных внутренних и граничных состояний через ряды Фурье (3)-(4).

$$c_k = (\gamma, \gamma^{(l)}) = \int_{\partial V} p_i u_i^{(l)} dS \quad (5)$$

где p_i — компоненты поверхностных усилий, $u_i^{(l)}$ — перемещение вдоль оси X_i из ортонормированного базиса пространства граничных состояний Γ .

Реально вместо полного базиса используется его усеченный вариант с $l \in [1, N]$. В силу особенности граничных условий, близких к сингулярным для обеспечения точности можно не назначать чрезмерно высокое значение, для N , но ввести в исходный базис специальные элементы "схватывающие" эти особенности. Порядок ряда N при этом снижается кардинально. Введенные решения имеют право наполнять базис, поскольку:

- (1) они линейно-независимы: никакой конечный набор ограниченных в ограниченной области, охватывающей все особые точки, не может дать бесконечных значений в этих точках;
- (2) их введение в исходный регулярный отрезок базиса не отражается на требованиях его полноты.

Шар, уравновешенный системой сосредоточенных сил

В качестве конкретных примеров эффективности использования "специальных" решений для преодоления сингулярностей физического характера рассмотрены две задачи о шаре (рис. 2), покоящимся под воздействием сжимающих сосредоточенных сил, направленных вдоль координатных осей x, y, z .

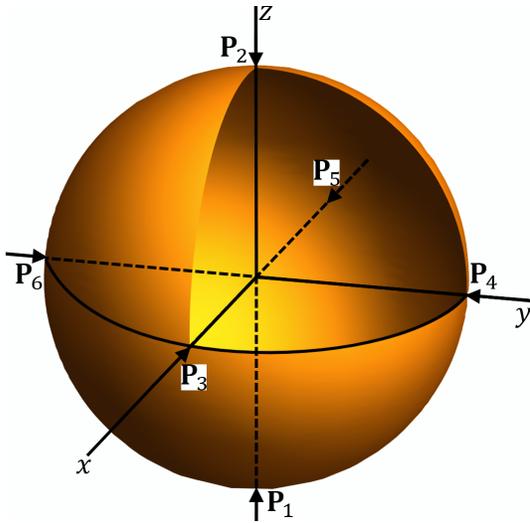


Рис. 2. Шар

Используется сферическая система координат. Пятна S_k сконцентрированы вокруг точек пересечения координатных осей с поверхностью шара.

При расчетах выполнялось обезразмеривание посредством масштабов μ, R и принималось $R = 1, \varepsilon = 1/100$. Параметр нагрузки задавался равным μ (при любом другом значении результирующие поля напряжений и усилий меняются пропорционально).

В случае первой основной задачи коэффициенты Фурье разложения искомого состояния по ортонормированному базису $\{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(k)}, \dots\} \in \Xi$ пространства внутренних состояний Ξ вычисляются в соответствии с определением скалярного произведения по границе тела (5).

Система коэффициентов Фурье подчинена неравенству Бесселя (левая часть неравенства Бесселя, которая соотносит коэффициенты Фурье с евклидовой нормой раскладываемого элемента)

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \leq \|\xi\|_{\Xi}^2 = \|\gamma\|_{\Gamma}^2, \quad (6)$$

где n — размерность усечённого базиса.

На рис. 3а графически представлены коэффициенты Фурье, где по горизонтальной оси указан номер коэффициента, а по вертикальной оси значение этого коэффициента.

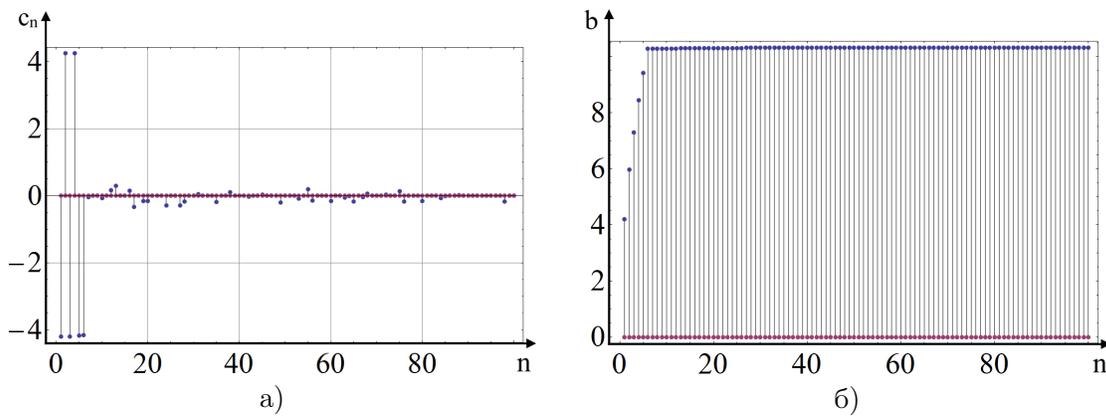


Рис. 3. а) коэффициенты Фурье, б) насыщение суммы Бесселя

Достоверность полученных результатов можно характеризовать фактом насыщения суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя (6)), представленной на рис. 3б, где по горизонтальной оси указано количество просуммированных коэффициентов, а по вертикальной оси сумма квадратов значений этих коэффициентов.

Результаты свидетельствуют о том, что полученное решение является сходящимся, так как при увеличении числа элементов в базисе значение коэффициентов Фурье уменьшается. Данный факт является одним из косвенных показателей, характеризующим качество решения.

Результаты решения задачи в графической форме

Характеристики, которые отвечают за напряженно-деформированное состояние имеют форму громоздких аналитических выражений; из-за их визуальной необозримости они здесь не приведены. Для краткости на рис. 4 представлены изолинии напряжений, построенные в сечении $x + y + z = 0$ для случая с двумя заданными сосредоточенными силами на полюсах шара.

На рисунках более светлые слои отвечают большему уровню напряжений (нулевой уровень представлен фоном за пределами тела). На изолиниях отражено увеличение напряжения по мере приближения к областям с сингулярностью.

На рис. 5 представлены изолинии напряжений, построенные в сечении $x + y + z = 0$ для случая с шестью заданными сосредоточенными силами.

Заключение

Основные выводы по проделанной работе:

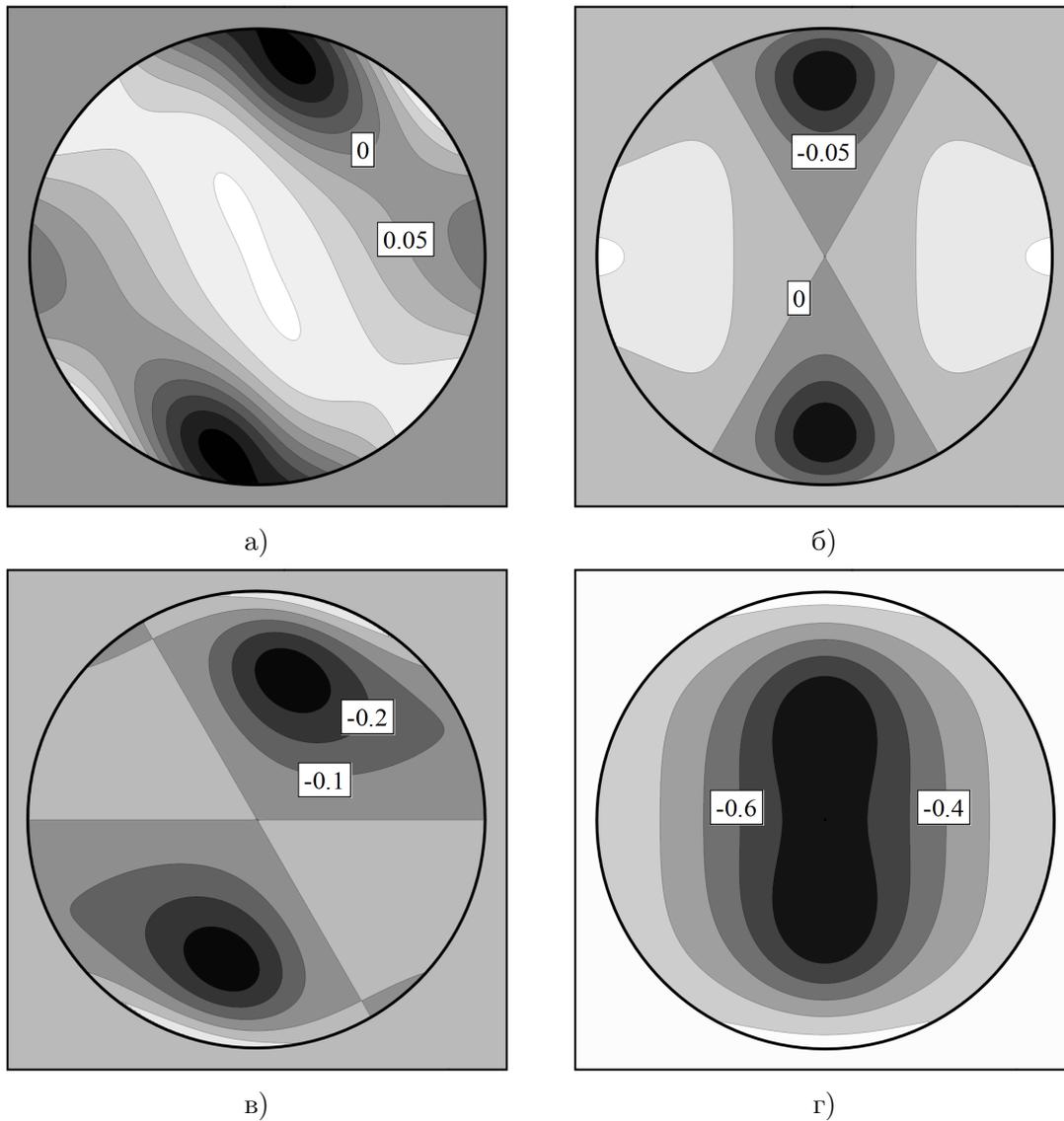


Рис. 4. Изолинии при двух сосредоточенных вдоль оси z сил а) σ_{xx} , б) σ_{xy} , в) σ_{xz} , г) σ_{zz}

- (1) Разработана основанная на МГС методика численно-аналитического построения НДС трехмерного тела произвольной формы, нагруженного системой сосредоточенных сил;
- (2) Средствами МГС выполнены решения двух задач о сжатие шара сосредоточенными встречно ориентированными силами;
- (3) Методика может быть распространена на тела произвольной формы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Журавков М. А., Круподеров А. В. О динамическом воздействии сосредоточенной силы в упругом изотропном пространстве со сферической полостью // Весті нацыянальнай акадэміі навук беларусі. Серыя фізика-тэхнічных навук. 2010. № 3. С. 44–50.

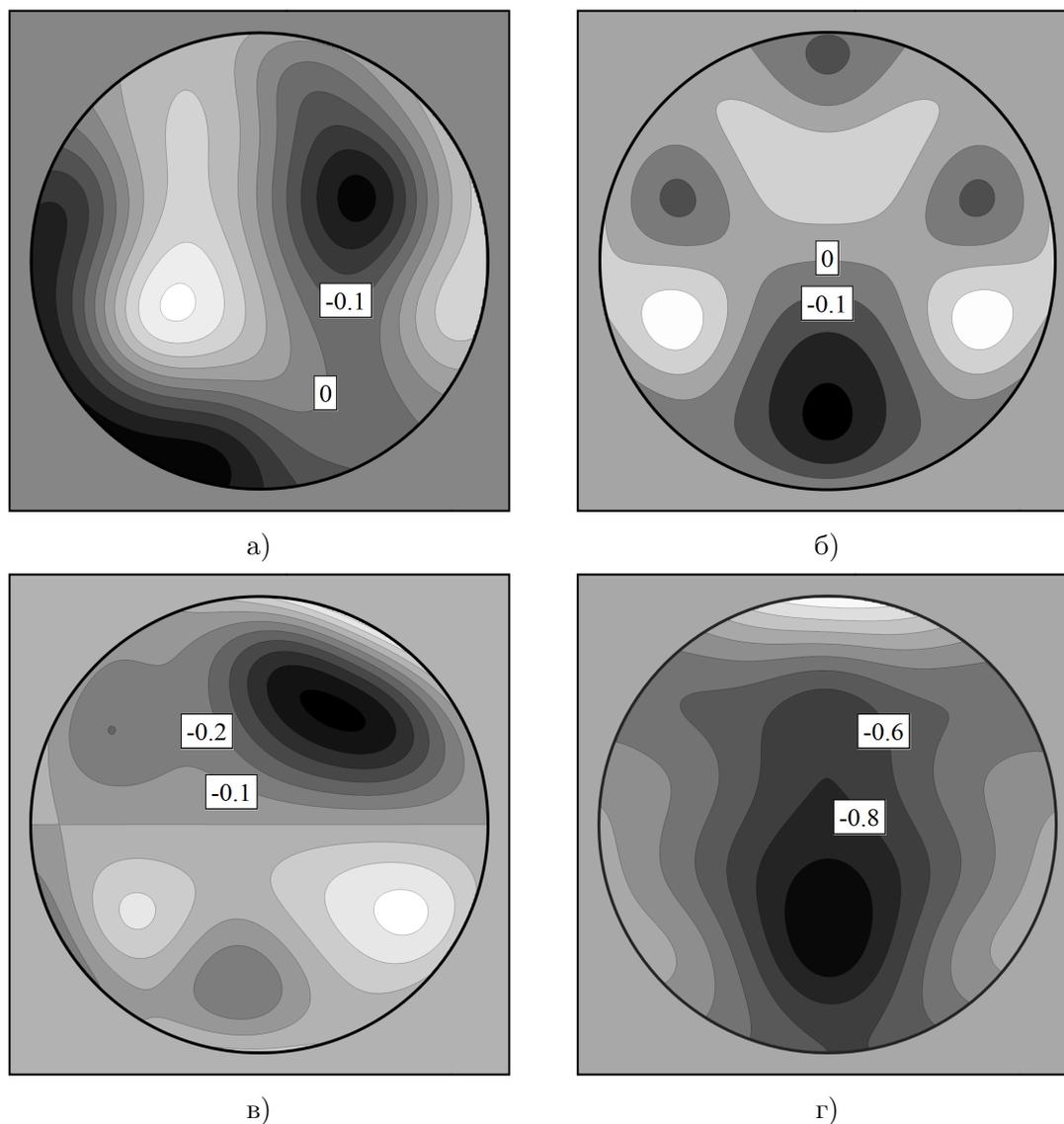


Рис. 5. Изолинии при шести сосредоточенных вдоль координатных осей сил а) σ_{xx} , б) σ_{xy} , в) σ_{xz} , г) σ_{zz}

- [2] Колганов Ю. А. Исследование механизмов разрушения в композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2009. № 5(226). С. 18–28.
- [3] Кундрат Н. М. Исследование механизмов разрушения в композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2000. № 3. С. 333–342.
- [4] Кундрат Н. М. Отслоение жесткого включения в упругопластической матрице при растяжении сосредоточенными силами // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2001. № 1. С. 107–113.
- [5] Кундрат Н. М. Предельное равновесие композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2000. № 1. С. 104–112.

- [6] Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1955. 492 с.
- [7] Лурье А. И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 940 с.
- [8] Мартыанова А. Е. Применение МКЭ при исследовании воздействия сосредоточенной нормальной силы на упругую полуплоскость // Вестник астраханского государственного технического университета. 2006. № 2(31). С. 15–20.
- [9] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с.
- [10] Пеньков В. Б., Пеньков В. В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. Владивосток: Дальневосточный математический журнал, 2001.
- [11] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH and Co., 2012. 108 с.
- [12] Пронина Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 2. С. 104–114.
- [13] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва: Наука, 1979. 744 с.
- [14] Романов В. Г. Асимптотическое разложение решения системы уравнений упругости с сосредоточенной импульсной силой // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. № 3(35). С. 102–118.
- [15] Рязанцева Е. А., Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. Метод граничных состояний: сосредоточенные силы // доклады Межрегиональной конференции памяти А.Н. Кабелькова. Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет, 2011. С. 126–130.
- [16] Рязанцева Е. А. Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера. Дис. / Рязанцева Елена Анатольевна. – Тула: Механика деформируемого твердого тела, 2015. 101 с.
- [17] Ярдухин А. К. Аналитическое решение задачи взаимодействия межфазной трещины с отслоившимся межфазным включением при наличии сосредоточенных сил // Вестник самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. 2003. № 19. С. 107–110.
- [18] Boussinesq M. J. Application des Potentiels a l'Etude l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Paris: Gauthier – Villars, 1885. 721 p.

M. V. Polikarpov, V. B. Penkov

CONCENTRATED FORCE EFFECTS IN THE METHOD OF BOUNDARY STATE

Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

Abstract. This article is devoted to the development of the method of boundary states into a class of problems of mechanics of a solid deformable body, including singularities of a physical nature. Many special solutions have been formed corresponding to concentrated force actions on the surface of a smooth three-dimensional body. Each special solution is included in the bases of spaces of internal and boundary states. As examples of the effectiveness of using special solutions using the boundary state method, stress-strain states of spherical bodies are constructed under the influence of concentrated forces.

Keywords: concentrated force, elastostatics, singularity, three-dimensional problems, orb, the method of boundary state.

REFERENCES

- [1] Zhuravkov M. A., Krupoderov A. V. On the dynamic action of a concentrated force in an elastic isotropic space with a spherical cavity // Conduct of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Technical Sciences. 2010. № 3. C. 44–50. (in Russian).
- [2] Kolganov Y. A. The study of fracture mechanisms in a composition with rigid inclusion under tension by concentrated forces // Structural mechanics and structural analysis. 2009. № 5(226). C. 18–28. (in Russian).
- [3] Kundrat N. M. The study of fracture mechanisms in a composition with rigid inclusion under tension by concentrated forces // Mechanics of Composite Materials and Structures. 2000. № 3. C. 333–342. (in Russian).
- [4] Kundrat N. M. Delamination of hard inclusion in an elastoplastic matrix under tension by concentrated forces // Mechanics of Composite Materials and Structures. 2001. № 1. C. 107–113. (in Russian).
- [5] Kundrat N. M. Ultimate balance of a composition with rigid inclusion under tension by concentrated forces // Mechanics of Composite Materials and Structures. 2000. № 1. C. 104–112. (in Russian).
- [6] Lurie A. I. Spatial problems of elasticity theory. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 492 c. (in Russian).
- [7] Lurie A. I. The theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1970. 940 c. (in Russian).
- [8] Martyanova A. E. The use of FEM in studying the effect of a concentrated normal force on an elastic half-plane // Bulletin of the Astrakhan State Technical University. 2006. № 2(31). C. 15–20. (in Russian).
- [9] Mushelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1966. 708 c. (in Russian).
- [10] Penkov V. B., Penkov V. V. The method of boundary state for solving linear mechanics problems. Vladivostok: Far Eastern Mathematical Journal, 2001. (in Russian).
- [11] Penkov V. B., Satalkina L. V. The method of boundary states with perturbations: inhomogeneous and nonlinear problems of the theory of elasticity and thermoelasticity. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH and Co., 2012. 108 c. (in Russian).

Polikarpov Maxim Vladimirovich

e-mail: messiah142@gmail.com, graduate student, research assistant, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

Penkov Viktor Borisovich

e-mail: vbpenkov@mail.ru, Dr. Sci. Phys. and Math, Professor, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.

- [12] Pronina Y. G. Concentrated forces and moments in an elastic half-plane with a hole // Bulletin of St. Petersburg University. Applied Mathematics. Computer science. Management processes. 2009. № 2. С. 104–114. (in Russian).
- [13] Rabotnov Y. N. Mechanics of a deformable solid. Moscow: Nauka, 1979. 744 с. (in Russian).
- [14] Romanov V. G. Asymptotic expansion of the solution of a system of elasticity equations with concentrated impulsive force // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2008. № 3(35). С. 102–118. (in Russian).
- [15] Ryazantseva E. A., Penkov V. B., Satalkina L. V. The method of boundary state: concentrated forces // reports of the Interregional conference in memory of A. N. Kabelkova. Novocherkassk: South Russian State Polytechnic University, 2011. С. 126–130. (in Russian).
- [16] Ryazantseva E. A. The method of boundary states in problems of the theory of elasticity with singularities of a physical and geometric nature. Dis. Ryazantseva Elena Anatolyevna. - Tula: Mechanics of a deformable solid, 2015. 101 с. (in Russian).
- [17] Yardukhin A. K. An analytical solution to the problem of the interaction of an interphase crack with a peeled interphase inclusion in the presence of concentrated forces // Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physics and Mathematics. 2003. № 19. С. 107–110. (in Russian).
- [18] Boussinesq M. J. Application des Potentiels a l'Etude l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Paris: Gauthier – Villars, 1885. 721 p. (in French).

В. Н. Орлов, Р. В. Разакова

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрен класс нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью шестой степени. Доказана теорема существования и единственности решения в области аналитичности. Построено аналитическое приближенное решение. Предложен вариант оптимизации априорных оценок с помощью апостериорных. Проведен численный эксперимент.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, область аналитичности, априорные оценки, аналитическое приближенное решение, подвижная особая точка.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.005

УДК: 517.95:515.172.22

Введение. Отметим некоторые публикации, которые подтверждают наличие прикладного характера нелинейных дифференциальных уравнений в механике вязкой несжимаемой жидкости [1, 2] и описания автотельного решения уравнения пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления (плоскопараллельное течение в слое смещения) [3, 4], в области устойчивости установившегося свободного падения авторотирующего тяжелого тела в сопротивляющейся среде [5]. В работах [6]–[7] даются приложения нелинейных дифференциальных уравнения различных порядков в решении задач физики и строительной механики. В [8]–[9] рассматриваются строительные конструкции консольного типа. В работе [16] рассматривается задача для конструкций из эластичной балки, математическая модель, которая представляется неявным дифференциальным уравнением (1) с краевыми условиями (2):

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad (1)$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad u(0) = u'(0) = u'(1) = 0. \quad (2)$$

© Орлов В. Н., Разакова Р. В., 2020

Орлов Виктор Николаевич

e-mail: orlovvn@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Разакова Рио-Рита Вадимовна

e-mail: chernova_riorita@mail.ru, магистр, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 10.01.2020

В случае, если указанная функция $f(t, u(t))$ уравнения (1) является линейной относительно искомой функции, тогда трудностей в решении не возникает, т.к. имеется возможность использовать классический метод решения поставленной задачи. Если неявная функция оказывается нелинейной относительно искомой функции, тогда для решения указанной задачи в работе [7] применяемый метод верхних и нижних границ не может быть реализован, так как вызывает ряд вопросов: 1) какова связь между методом верхних и нижних границ с подвижными особыми точками? 2) гарантирует ли метод верхних и нижних границ отсутствие подвижных особых точек? 3) предложенный в работе [7] метод дает лишь доказательство факта существования решения задачи (1)–(2) без указания области.

В настоящей работе предлагается другой вариант решения уравнения (1) в области аналитичности, являющийся модификацией классической теоремы Коши. Предлагаемая технология позволяет доказать не только существование и единственность решения, а также получить область, где работает эта теорема, и построить структуру аналитического приближенного решения рассматриваемой задачи. Указанная технология успешно применяется для ряда нелинейных дифференциальных уравнений в работах [10]–[11]. В настоящей работе дано развитие указанного метода для рассматриваемого класса нелинейного дифференциального уравнения, а также осуществляется построение приближенного решения в области аналитичности, получены априорные оценки погрешности.

Результаты исследования и их обсуждение. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_0(x)y^6 + a_1(x)y^5 + a_2(x)y^4 + a_3(x)y^3 + a_4(x)y^2 + a_5(x)y^1 + a_6(x), \quad (3)$$

которое с помощью замены переменной

$$y = \sqrt[6]{\frac{1}{A}} z(x) - \frac{a_1}{6a_0} \quad (4)$$

приводится к нормальной форме

$$z''' = z^6 + r(x), \quad (5)$$

при условиях

$$\begin{cases} A = \text{const} \neq 0, \\ a_2(x) = 0, \quad a_3(x) = 0, \quad a_4(x) = 0, \quad a_5(x) = 0, \quad r(x) = -\frac{5a_1^6}{6^6 a_0^5} + a_6. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^6 + r(x), \quad (7)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2. \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть

1) $r(x) \in C^\infty$ в области $|x - x_0| < \rho_1$, $0 < \rho_1 = \text{const}$;

2) $\exists M_n : \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \leq M_n$, $M_n = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (9)

Тогда существует единственное решение задачи Коши (7)–(8) в виде

$$y(x) = \sum_0^\infty C_n (x - x_0)^n, \quad (10)$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$, где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}} \right\}, \quad M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup \frac{r^n(x_0)}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. На основании условий теоремы следует

$$r(x) = \sum_0^{\infty} B_n(x - x_0)^n. \quad (11)$$

Подставляем (10), (11) в (7) и получаем:

$$\sum_0^{\infty} C_n n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3} = \sum_0^{\infty} C_n^{***} (x-x_0)^n + \sum_0^{\infty} B_n (x-x_0)^n, \quad (12)$$

$$\sum_0^{\infty} C_n^* = \sum_0^n C_i C_{n-i}, \quad \sum_0^{\infty} C_n^{**} = \sum_0^n C_i^* C_{n-i}^*, \quad \sum_0^{\infty} C_n^{***} = \sum_0^{\infty} C_i^* \sum_0^{\infty} C_{n-i}^{**},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Из соотношения (12) следует рекуррентное выражение для однозначного определения коэффициентов C_n :

$$C_n(n(n-1)(n-2)) = C_{n-3}^{***} + B_{n-3}, \quad (13)$$

$$C_3 = \frac{1}{6}(C_0^6 + B_0), \quad C_4 = \frac{1}{24}(C_0^6 + B_0), \quad C_5 = \frac{1}{60}(15C_0^4 C_1^2 + 6C_0^5 C_2 + B_2),$$

$$C_6 = \frac{1}{120}(30C_0^4 C_1 C_2 + 18C_0^3 C_1^3 + 6C_0^5 C_3 + B_3) \leq \frac{1}{2}(M+1)^6, \dots,$$

C_0, C_1, C_2 — из начальных условий. Выражения получены с помощью программного комплекса MAPLE. На основе полученных выражений для коэффициентов строим гипотезу оценок этих коэффициентов C_n :

$$|C_{3k}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)}, \quad |C_{3k+1}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)},$$

$$|C_{3k+2}| \leq \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)}.$$

Проиллюстрируем доказательство оценок в случае $n = 3k$:

$$|C_{3k+3}| \leq \frac{(M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}. \quad (14)$$

Из (13) следует

$$\begin{aligned} |C_{n+1}| &= \left| \frac{C_{n-2}^{***} + B_{n-2}}{n(n+1)(n-1)} \right| \Rightarrow |C_{3k+3}| = \left| \frac{C_{3k-2}^{***} + B_{3k-2}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left(\sum_{i=0}^{3k+1} C_{3k+1-i}^{**} C_i^* + B_{3k-2} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} C_{3k+1-i-j}^* C_j^* \right) C_i^* + B_{3k-2} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} C_{3k+1-i-j-l} C_l \right) C_j^* \right) C_i^* + B_{3k-2} \right| = \\
&= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times \\
&\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} C_{3k+1-i-j-l} C_l \left(\sum_{l=1}^{l-j} C_l C_{j-l} \right) \right) \sum_{m=1}^i C_m C_{i-m} \right) + B_{3k-2} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times \\
&\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} \frac{(M+1)^{5k+1-i-j-l}}{(3k+1)3k(3k-1)l^*(l-1)^*(l-2)^*} \frac{(M+1)^l}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \frac{(M+1)^j}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \times \right. \\
&\times \left. \sum_{m=0}^i C_{i-m} C_m + B_{3m-2} \right| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\frac{(M+1)^{5k+1-i}}{1} \times \right. \right. \right. \\
&\times \left. \left. \sum_{l=0}^{3k+1-i-j} \frac{1}{(3k+1-i-j-l)^*(3k+1-i-j-l-1)^*(3k+1-i-j-l-2)^*l^*(l-1)^*(l-2)^*} \right) \times \right. \\
&\times \left. \frac{1}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \sum_{m=0}^i C_{i-m} C_m + B_{3m-2} \right| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times \\
&\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \frac{(M+1)^{5k+1-i-j}}{1} \frac{3k+1-i-j+1}{(3k+1-i-j)^*(3k+1-i-j-1)^*(3k+1-i-j-2)^*2} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. \frac{(M+1)^j}{j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \sum_{m=0}^i C_{i-m} C_m + B_{3m-2} \right| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times \\
&\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \left((M+1)^{5k+1-i} \sum_{j=0}^{3k+1-i} \frac{1}{(3k+1-i-j-1)^*(3k+1-i-j-1)^*j^*(j-1)^*(j-2)^*} \right) \times \right. \\
&\times \left. \sum_{k=0}^i C_{i-k} C_k + B_{3k-2} \right| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times \\
&\times \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} (M+1)^{5k+1-i} \frac{3k+1-i+1}{(3k+1-i)(3k+1-i-2)2} \right) \sum_{k=0}^i C_{i-k} C_k + B_{3k-2} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \times \\
&\times \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \frac{(M+1)^{5k+1-i}}{3k+1-i} \left(\sum_{k=0}^i \frac{(M+1)^k (M+1)^{i-k+1}}{k^*(k-1)^*(k-2)^*(i-k)(i-k-1)(i-k-2)(i-2)} \right) + B_{3k-2} \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| \sum_{i=0}^{3k+1} \frac{(M+1)^{5k+2}}{(3k+1-i-2)^*(i-1)^*(i-2)^*} + B_{3k-2} \right| \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^{5k+2}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} + M \leq \frac{(M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} i^* &= \begin{cases} 1, & i=0, \\ i, & i=1, 2, 3, \dots, \end{cases} & (i-1)^* &= \begin{cases} 1, & i=1, \\ (i-1), & i=0, 2, 3, \dots, \end{cases} \\ l^* &= \begin{cases} 1, & l=0, \\ l, & l=1, 2, 3, \dots, \end{cases} & (l-1)^* &= \begin{cases} 1, & l=1, \\ (l-1), & l=0, 2, 3, \dots, \end{cases} \\ k^* &= \begin{cases} 1, & k=0, \\ k, & k=1, 2, 3, \dots, \end{cases} & (k-1)^* &= \begin{cases} 1, & k=1, \\ (k-1), & k=0, 2, 3, \dots, \end{cases} \\ j^* &= \begin{cases} 1, & j=0, \\ j, & j=1, 2, 3, \dots, \end{cases} & (j-1)^* &= \begin{cases} 1, & j=1, \\ (j-1), & j=0, 2, 3, \dots, \end{cases} \\ (3k+1-i-j-l)^* &= \begin{cases} 1, & l=3k+1-i-j, \\ 3k+1-i-j-l, & l \neq 3k+1-i-j, \end{cases} \\ (3k+1-i-2)^* &= \begin{cases} 1, & i=3k+1, \\ 3k+1-i-2, & i \neq 3k+1, \end{cases} \\ (3k+1-i-l-1)^* &= \begin{cases} 1, & l=3k-i-j, \\ 3k+1-i-j-l-1, & l \neq 3k-i-j, \end{cases} \\ (3k+1-i-l-2)^* &= \begin{cases} 1, & l=3k+1-i-j, \\ 3k+1-i-j-l-2, & l \neq 3k+1-i-j, \end{cases} \\ (3k+1-i-j)^* &= \begin{cases} 1, & j=3k+1-i, \\ 3k+1-i-j, & j \neq 3k+1-i, \end{cases} \\ (3k+1-i-j-1)^* &= \begin{cases} 1, & j=3k-i, \\ 3k+1-i-j-1, & j \neq 3k-i, \end{cases} \\ (3k+1-i-j-2)^* &= \begin{cases} 1, & j=3k+1-i, \\ 3k+1-i-j-2, & j \neq 3k+1-i. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично доказываем оценки для вариантов $n=3k+1$, $n=3k+2$.

Рассмотрим мажорирующий ряд для ряда (13):

$$\sum_0^{\infty} V_n(x-x_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k}(x-x_0)^{3k} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2}. \quad (15)$$

Для каждого ряда правой части соотношения (15) получаем область сходимости и выражение $|x-x_0| \leq 1/\sqrt[3]{(M+1)^5}$. Окончательно для ряда (10) получаем область сходимости, где $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1/\sqrt[3]{(M+1)^5}\}$. \square

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение

$$y_N(x) = \sum_0^N C_n(x-x_0)^n. \quad (16)$$

Теорема 2. Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для аналитического приближенного решения (16) задачи (7)–(8) в области $|x - x_0| < \rho_2$ справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x) \leq \frac{M(M+1)^{\frac{5(N+1)}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{1 - M(M+1)|x - x_0|^3} \times \left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|x - x_0|}{N(N+1)(N+2)} + \frac{|x - x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)} \right)$$

в случае $N + 1 = 3k$,

$$\Delta y_N(x) \leq \frac{M(M+1)^{\frac{5N}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{1 - M(M+1)|x - x_0|^3} \times \left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)} + \frac{|x - x_0|}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|x - x_0|^2}{N(N+1)(N+2)} \right)$$

в случае $N + 1 = 3k + 1$, а для варианта $N + 1 = 3k + 2$ оценка имеет вид

$$\Delta y_N(x) \leq \frac{M(M+1)^{\frac{5(N-1)}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{1 - M(M+1)|x - x_0|^3} \times \left(\frac{1}{(N-1)(N-2)(N-3)} + \frac{|x - x_0|}{N(N-1)(N-2)} + \frac{|x - x_0|^2}{N(N-1)(N+1)} \right),$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}} \right\}, \quad 0 < \rho_2 = \text{const},$$

$$M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Докажем теорему для случая $N + 1 = 3k$. Применяя классический подход, с учетом оценок для C_n имеем:

$$\begin{aligned} \Delta y_N(x) &= |y(x) - y_N(x)| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_{3k} (x - x_0)^{3k} \right| + \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_{3k+1} (x - x_0)^{3k+1} \right| + \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_{3k+2} (x - x_0)^{3k+2} \right| \leq \\ &\leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k-2)} |x - x_0|^{3k} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k+1)} |x - x_0|^{3k+1} + \\ &\quad + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k+1)(3k+2)} |x - x_0|^{3k+2} \leq \\ &\leq \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k-2)} |x - x_0|^{3k} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + M(M+1)^{5k} |x - x_0|^{3k}) + \\ &\quad + \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k+1)} |x - x_0|^{3k+1} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + M(M+1)^{5k} |x - x_0|^{3k}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k+1)(3k+2)} |x-x_0|^{3k+2} \sum_{k=1}^{\infty} (1+M(M+1)^{5k} |x-x_0|^{3k}) = \\
 & = \frac{(M+1)^{5k}}{1-M(M+1)|x-x_0|^{3k}} |x-x_0|^{3k} \times \\
 & \times \left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)} + \frac{|x-x_0|}{3k(3k-1)(3k+1)} + \frac{|x-x_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)} \right) = \\
 & = \frac{(M+1)^{\frac{5(N+1)}{3}} |x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3} \times \\
 & \times \left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|x-x_0|}{N(N+1)(N+2)} + \frac{|x-x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)} \right)
 \end{aligned}$$

при $N = 3$. Аналогичным образом получаем структуры оценок для вариантов $N + 1 = 3k + 1$, $N + 1 = 3k + 2$ в области $|x - x_0| < \rho_2$, где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}} \right\}, \quad M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ □

Пример. Рассмотрим задачу Коши (7)–(8), $x_0 = 0$, $y(x_0) = y_0 = 0,5$, $y'(x_0) = y_1 = 1$, $y''(x_0) = y_2 = 1$, $r(x) = 0$. По исходным данным $M = 1$, в структуре приближенного решения $N = 5$, радиус $\rho_2 = 0,50876$, $x_1 = 1,4$; $x_1 \in |x - x_0| < \rho_2$. Числовые характеристики аналитического приближенного решения рассматриваемого примера представлены в табл. 1, где $y_5(x_1)$ — приближенное решение; $\Delta y_5(x_1)$ — апостериорная оценка; Δ_1 — априорная оценка. Для $\Delta_1 = 0,005$ по теореме 2 определяем $N = 16$.

x_1	$y_5(x_1)$	$\Delta y_5(x_1)$	Δ_1
1,4	0,980	0,069895	0,005

Таблица 1. Числовые характеристики аналитического приближенного решения

Слагаемые с $N = 6$ по 16 в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$, следовательно, приближенное решение $y_5(x_1)$ имеет погрешность $\varepsilon = 0,005$.

Заключение. В настоящей работе дается развитие метода аналитического приближенного решения для рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений. Проведенный численный эксперимент подтверждает теоретические результаты. Апостериорная оценка погрешности аналитического приближенного решения позволяет оптимизировать априорную оценку погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Москва, Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 470 с.
- [2] Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. Москва: Изд-во “НАУКА”. Гл. редакция физ.-мат. лит., 1970.
- [3] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: пер. с нем. Г. А. Вольперта / под ред. В. С. Авдеевского, В. Я. Лихущина. Москва: Изд-во иностр. лит., 1956. 528 с.

-
- [4] Дышко А. Л., Конохова Н. Б., Суков А. И. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 7. С. 1158–1178.
- [5] Привалов В. А., Самсонов В. А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58, № 2. С. 37–48.
- [6] Самодуров А. А. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 1. С. 9–10.
- [7] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514.
- [8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS) // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 456 (2018) 012122 IOP Publishing. 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
- [9] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425 (2020) 012129 IOP Publishing. 2020. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
- [10] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 365. 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
- [11] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области (WoS) // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. DOI: 10.14498/vsgtu1727 (<http://mi.mathnet.ru/vsgtu1727>).

V. N. Orlov, R. V. Razakova

**AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE ONE CLASS THIRD ORDER
NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN THE ANALYTICITY DOMAIN**

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. There is a class of third-order nonlinear differential equations with polynomial right part of the sixth degree considered in the paper. The existence and uniqueness theorem of a solution in the domain of analyticity is proved by authors. There is an analytical approximate solution which was constructed by V. Orlov and R. Razakova. A variant of optimization of a priori estimates using posterior ones is proposed by authors. A numerical experiment is carried out too.

Keywords: nonlinear differential equation, domain of analytic, a priori estimates, approximate analytical solution, moving singular point.

REFERENCES

- [1] Lyapunov A. M. The general task of the movement stability. Moscow, Leningrad: Gosudarstvennoye izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. 470 p. (in Russian).
- [2] Barbashin E. A. Lyapunov functions. Moscow: Izdatel'stvo "NAUKA". Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1970. (in Russian).
- [3] Schlichting G. Theory of the boundary layer: per. s nem. G. A. Vol'perta / Ed. by V. S. Avduyevskij, V. Y. Likhushin. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1956. 528 p. (in Russian).
- [4] Dyshko A. L., Konyukhova N. B., Sukov A. I. About the singular problem for a nonlinear ordinary differential equation of the third order arising in hydrodynamics // Zhurnal vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika. 2007. Vol. 47, no. 7. P. 1158–1178. (in Russian).
- [5] Privalov V. A., Samsonov V. A. Comparison of stability properties of two autorotation modes // Izv. RAN. PMM. 1994. Vol. 58, no. 2. P. 37–48. (in Russian).
- [6] Samodurov A. A. An ordinary method for determining the delay time of a supersonic bosonic avalanche // Dokl. AN BSSR. 1985. Vol. 29, no. 1. P. 9–10. (in Russian).
- [7] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS) // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 456 (2018) 012122 IOP Publishing. 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
- [8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019). 2019. Vol. 97, 03031. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031>.
- [9] Orlov V. N. Features of mathematical modelling in the analysis of console-type structures // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019). 2019. Vol. 97, 03036. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703036>.
- [10] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425 (2020) 012127 IOP Publishing. 2020. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012127.
- [11] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) // Modelling and Methods

Viktor Nikolaevich Orlov, Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Razakova Rio-Rita Vadimovna, magister, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

- of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425 (2020) 012129 IOP Publishing, 2020. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
- [12] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // *Internat. J. Solids Structures*. 1977. no. 13. P. 93–104.
- [13] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // *Proc. Symp. Moving Boundary Problems* / Ed. by D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. New York: 1978. P. 129–145.
- [14] Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization // *Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp.* Tennessee: 1974. P. 1–14.
- [15] Axford R. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // *Los Alamos Report*. 1970. (LA-4514, UC-34).
- [16] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. no. 56. P. 2507–2514.
- [17] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 365. 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
- [18] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity (Scopus) / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Estestv. nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]*. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
- [19] Orlov V. N., Iv B. B. The existence theorem for the solution of one class of fourth-order nonlinear differential equations with polynomial right-hand side of the second degree in the neighborhood of a movable singular point // *Vestnik Bashkirskogo universiteta*. 2018. Vol. 23, no. 4. P. 980–986. (in Russian).
- [20] Matveev N. M. *Ordinary differential equations*. SPb.: Spetsial'naya literatura, 1996. 37 p. (in Russian).
- [21] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Investigation of the approximate solution of the second Penleve equation // *Differentsial'nyye uravneniya*. 1989. Vol. 25, no. 10. P. 1829–1832. (in Russian).
- [22] Orlov V. N. Exact boundaries for the approximate solution of the Abel differential equation in the vicinity of the approximate value of a moving singular point in the complex domain // *Vestnik Chuvashskogo gos. ped. un-ta im. I. YA. Yakovleva. Ser.: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2010. no. 2(8). P. 399–405. (in Russian).
- [23] Orlov V. N., Leont'yeva T. Y. On the expansion of the domain for an approximate analytical solution of a class of second-order nonlinear differential equations in the complex domain (WoS) // *Vestn. Sam. Gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2020. Vol. 24, no. 1. (in Russian) DOI: 10.14498/vsgtu1727 (<http://mi.mathnet.ru/vsgtu1727>).

А. Н. Плотников, М. Ю. Иванов, О. С. Яковлева

ЖЕСТКОСТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ МОНИТОРИНГЕ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы, связанные с соотношением жесткостей горизонтальных и вертикальных элементов высотных зданий. Из учета принципов работы несущих систем таких зданий определены характерные точки перелома кривой упругой вертикальной линии. Проанализирована возможность применения керамзитобетона в перекрытиях с точки зрения влияния их жесткости на деформации всей системы. Для различных конструктивных систем выполнен расчет перемещений от ветровой статической нагрузки с учетом пульсационной составляющей ветровой нагрузки, а также сопоставление компьютерного и ручного расчета. Определены места расположения датчиков автоматического мониторинга.

Ключевые слова: деформация, усилия, жесткость, перемещение, прогиб, перекрытие, бетон, керамзитобетон.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.006

УДК: 624.07:69.032.22:531.79

В последнее время отмечается разнообразие конструктивных систем в строительстве, которое сопровождается повышением сложности и высоты строящихся зданий и сооружений, при этом должны быть обеспечены требования механической безопасности. Общая устойчивость и пространственная жесткость здания зависят от взаимного расположения конструктивных элементов, их прочности и податливости узловых соединений. Сосредоточение большой массы высотного здания приходится на малую часть поверхности основания, что сказывается на чувствительности таких зданий к неравномерным осадкам. В связи с этим возникает вопрос об уменьшении массы зданий [1]. Одним из путей решения проблемы является применение керамзитобетона в перекрытиях [2].

© Плотников А. Н., Иванов М. Ю., Яковлева О. С., 2020

Плотников Алексей Николаевич

e-mail: plotnikovan2010@yandex.ru, кандидат технических наук, доцент, декан, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Иванов Михаил Юрьевич

e-mail: mischa0315@mail.ru, ассистент, аспирант, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Яковлева Ольга Станиславовна

e-mail: konstrukt9@yandex.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.01.2020

Во многих научных работах отмечается, что работа различных конструктивных систем высотных зданий имеет общие математические закономерности, которые определяют их деформации, в том числе и от ветровой статической нагрузки [3].

В процессе эксплуатации изменяется состояние зданий: как правило, есть тенденция к ограничению работоспособности и снижению надежности [4, 5]. На практике изменение жесткостных параметров горизонтальных и вертикальных элементов можно проследить с помощью автоматического постоянного мониторинга, ориентированного на применение различных измерительных устройств — инклинометров, тензодатчиков, акселерометров. Эти датчики фиксируют как статические, так и динамические воздействия [6]. Исходя из анализа координатного положения экстремумов функции деформаций вертикальной оси здания, при которых происходит сохранение горизонтальной плоскости перекрытий, определяются основные характерные точки перелома [7].

Жесткость элементов и податливость сопряжений определяют распределение внутренних усилий и их перераспределение при внешних воздействиях. Все эти параметры зависят от их напряженно-деформированного состояния, характеристик используемых материалов и условий эксплуатации [8].

Из-за податливости многочисленных швов и узлов сопряжения элементов жесткость дисков перекрытий и покрытия существенно снижается по сравнению с расчетным идеализированным сплошным монолитным перекрытием. Это снижение допускается учитывать путем введения пониженного значения начального модуля упругости бетона при постоянном соотношении между приведенными модулями сдвига и упругости и коэффициентами податливости.

Изменение податливости дисков перекрытия влияет на перераспределение усилий между вертикальными элементами (рис. 1). Чем жестче диск и его сопряжения с вертикальными элементами, тем меньшую разность горизонтальных смещений он допускает, а при абсолютно жестких дисках все точки вертикальных конструкций в уровне перекрытий имели бы одинаковые горизонтальные смещения.

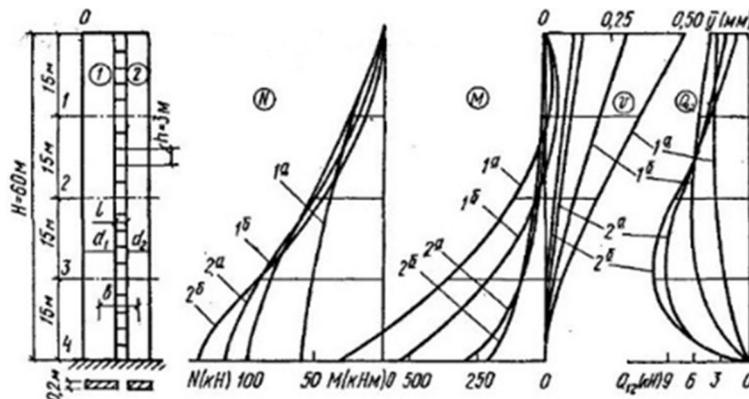


Рис. 1. Распределение деформаций и усилий по высоте здания: эпюры продольных сил N , изгибающих моментов M , поперечных сил Q , прогиб v связевой системы при соотношениях приведенных жесткостных характеристик между отдельными вертикальными элементами

Деформации зависят от соотношения жесткости вертикальных и горизонтальных элементов каркаса (рис. 2). Характерные точки перелома находятся через 1/4 высоты здания [8].

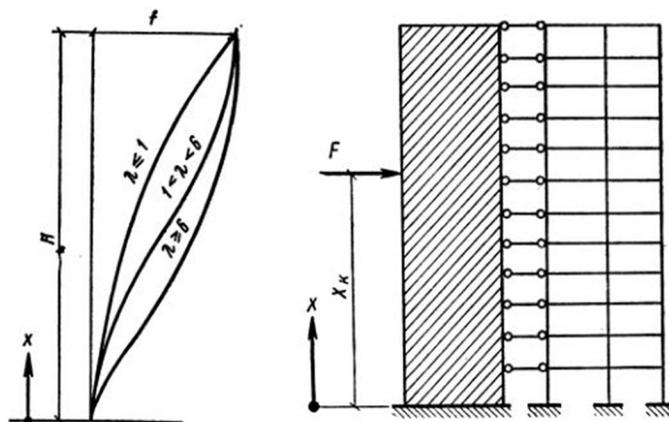


Рис. 2. Распределение деформаций по высоте здания в зависимости от жесткости вертикальных элементов (λ — характеристика жесткости вертикальных диафрагменных элементов (ядра), при значении менее 1 — более жесткие вертикальные элементы, более 6 — более гибкие)

В здании перекрытия являются связями сдвига, обладающие реальной жесткостью и зависящие от конструктивного исполнения. Они препятствуют свободному изгибу вертикальных элементов жесткости. В связи с этим линия деформаций вертикальных элементов жесткости становится S-образной, т.е. имеет две кривизны в плоскости, в пространстве, соответственно, четыре (рис. 3).

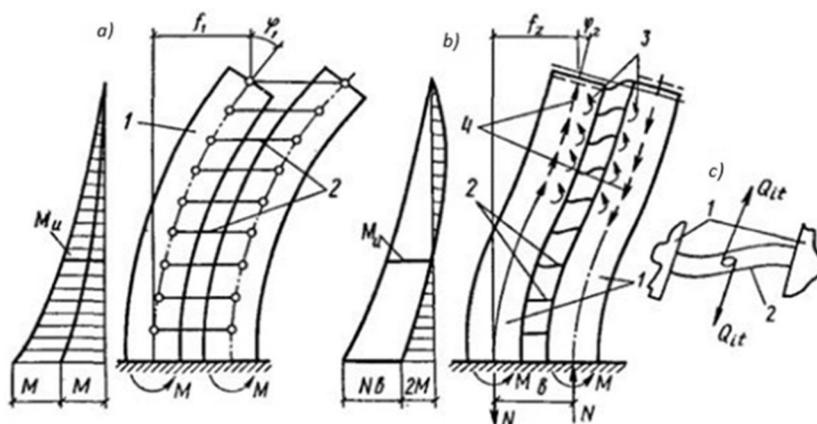


Рис. 3. Схема работы связей сдвига: *a* — шарнирных (крайне теоретических); *b* — реальных (с промежуточной жесткостью); *c* — деталь деформирования связи (перекрытия) (1 — столбы (диафрагмы, ядра жесткости); 2 — связи (перекрытия); 3 — изгибающие моменты; 4 — поперечные силы Q_i , передаваемые на столбы жесткости)

Основные формулы для определения прогибов получены П. Ф. Дроздовым [7].

Горизонтальное перемещение (прогиб) в любом сечении несущей системы или конструкции в принятой системе координат равно

$$v(x) = \int_x^H \alpha dx = v_s(x) + \frac{nB_a}{\lambda^2 B_u \sum B} \times \\ \times \left\{ q \left[\operatorname{ch} \lambda H - \operatorname{ch} \lambda x + \beta (\operatorname{sh} \lambda H - \operatorname{sh} \lambda x) + (1-a) \left(1 - \frac{x}{H} \right) \right] \lambda^{-2} + \right. \\ \left. + M_h(H) - M_h(x) \right\}, \quad (1)$$

где $v_s(x)$ — прогиб в сечении x несущей системы или конструкции с абсолютно жесткими перемычками или ригелями, равный для нагрузки, распределенной по закону трапеции,

$$v_s(x) = -\frac{qH^4}{120B_u} \left[4a + 11 + (a-1) \left(\frac{x}{H} \right)^5 + 5 \left(\frac{x}{H} \right)^4 - 5(3+a) \frac{x}{H} \right]; \quad (2)$$

M_h — изгибающий момент при трапециевидной эпюре горизонтальной нагрузки:

$$M_h = -\frac{(a+2)qH^2}{6}. \quad (3)$$

Находим первую производную линии прогибов, дифференцируя (1) и подставляя (2) и (3):

$$v'(x) = \frac{H^4 q}{120B_u} \left[\frac{20x^3}{H^4} - \frac{5a+15}{H} + \frac{5x^4(a-1)}{H^5} \right] - \frac{B_a n}{\sum B \cdot B_u \lambda^2} \times \\ \times \left[\frac{q \left[\operatorname{ch} \lambda x - \operatorname{ch} \lambda H + \beta (\operatorname{sh} \lambda x - \operatorname{sh} \lambda H) - (a-1) \left(\frac{x}{H} - 1 \right) \right]}{\lambda^2} - \right. \\ \left. - \frac{qx^2(a+2)}{6} + \frac{H^2 q(a+2)}{6} \right]. \quad (4)$$

Находим координаты экстремумов линии прогибов, приравнивая функцию производной к нулю:

$$v'(x) = 0. \quad (5)$$

На основе этих формул был выполнен ручной расчет горизонтальных перемещений конструкции для различных конструктивных систем зданий, которые были смоделированы в программных комплексах Лира САПР и SCAD [9]. Расчетные модели всех зданий представлены на рис. 4.

Для прослеживания влияния изменений жесткостных параметров горизонтальных и вертикальных элементов сравним деформации зданий от ветровой статической нагрузки с применением в плитах перекрытия обычного тяжелого бетона и керамзитобетона [10, 11, 12]. Результаты расчета представлены в табл. 1, 2 и на рис. 5–10.

При сопоставлении прогибов вертикальных осей зданий плит перекрытий из тяжелого бетона В30 и керамзитобетона В30 при компьютерном расчете отличаются на 0,002 доли, т.е. на 2%, при ручном расчете — до 3 раз, а при сопоставлении прогибов вертикальных осей зданий в уровне перекрытий при ручном и компьютерном расчетах перемещения отличаются, по некоторым схемам, до 10 раз. Компьютерные расчетные

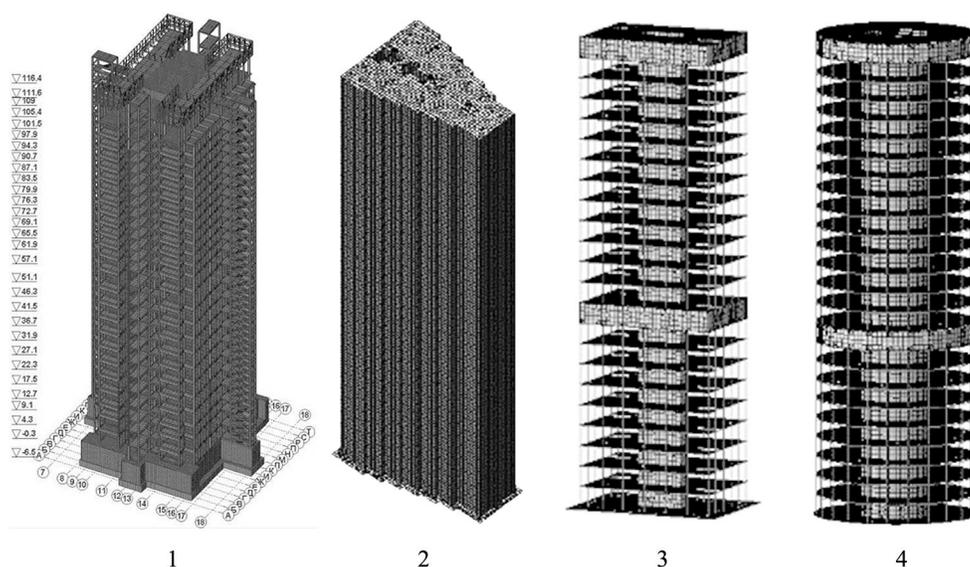


Рис. 4. Расчетные модели в ПК SCAD и Лира САПР: *здание 1* — с рамно-связевым каркасом, с монолитным железобетонным ядром жесткости; высота 118,75 м; 26 этажей; размещение: г. Москва, пр. Вернадского, стр. 10; датчики размещены на 1, 7, 13, 20, 26 этажах; *здание 2* — с перекрестно-стеновой конструктивной системой; высота 136,81 м; 44 этажа; размещение: Московская обл., г. Красногорск, Павшино; датчики размещены на 1, 11, 22, 33, 44 этажах; *здание 3* — коробчато-ствольной конструктивной системы с аутригерными этажами; высота 103,5 м; 23 этажа; проектируемое здание; датчики размещены на 1, 6, 12, 18, 23 этажах; *здание 4* — оболочковой конструктивной системы с аутригерными этажами; высота 100 м; 25 этажей; проектируемое здание; датчики размещены на 1, 6, 12, 18, 25 этажах.

Таблица 1. Результаты расчета перемещений v_x для бетона В30

Сечение	x/H	Рамно-связевый каркас		Перекрестно-стеновая система		Коробчато-ствольная система		Оболочковая система	
		ручн.	комп.	ручн.	комп.	ручн.	комп.	ручн.	комп.
0	0	0,012	0,030	0,136	0,004	0,323	0,044	0,250	0,017
1	1/4	0,008	0,025	0,105	0,003	0,249	0,034	0,181	0,011
2	1/2	0,004	0,017	0,072	0,002	0,170	0,021	0,125	0,006
3	3/4	0,001	0,009	0,022	0,001	0,083	0,009	0,065	0,002
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0

модели были построены по традиционным методам — без связей конечной переменной жесткости между перекрытиями и вертикальными элементами конструкции.

По данным П. Ф. Дроздова прослеживается снижение жесткости связей при эксплуатации зданий. Во всех случаях деформации зависят от соотношения жесткости вертикальных и горизонтальных элементов каркаса. Компьютерный расчет наглядно показывает точки экстремумов по высоте здания, когда происходит наклон касательной к линии изгиба. По результатам расчетной модели определено, что линия деформаций здания по вертикали имеет нелинейный характер, что полностью соответствует общей

Таблица 2. Результаты расчета перемещений v_x для керамзитобетона В30

Сечение	x/H	Рамно-связевый каркас		Перекрестно-стенная система		Коробчато-ствольная система		Оболочковая система	
		ручн.	комп.	ручн.	комп.	ручн.	комп.	ручн.	комп.
0	0	0,013	0,030	0,420	0,0048	0,923	0,046	0,663	0,018
1	1/4	0,009	0,025	0,320	0,0031	0,701	0,036	0,505	0,012
2	1/2	0,005	0,017	0,214	0,0017	0,461	0,022	0,343	0,007
3	3/4	0,001	0,009	0,085	0,0006	0,179	0,009	0,176	0,002
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0

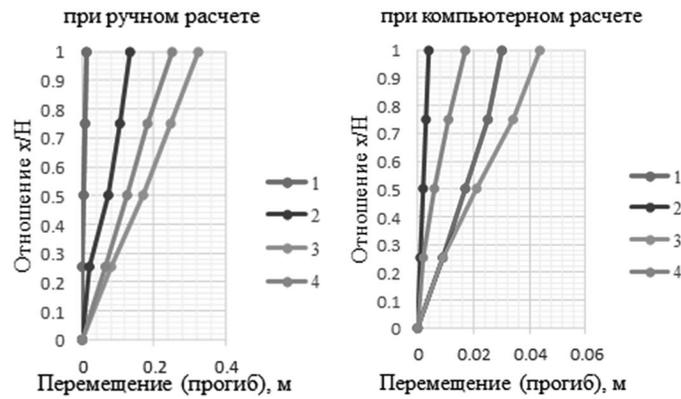


Рис. 5. Сопоставление графиков прогибов бетона В30

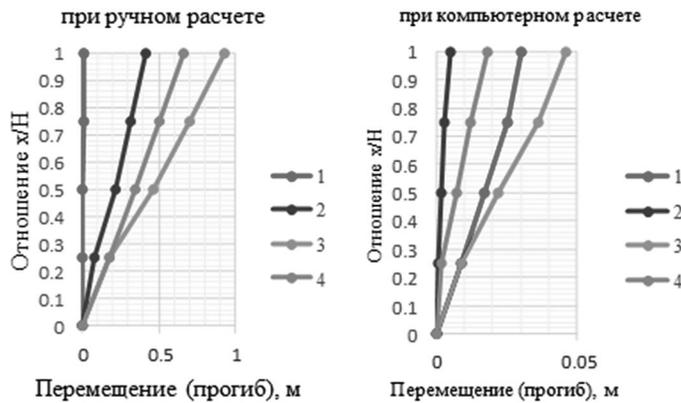


Рис. 6. Сопоставление графиков прогибов керамзитобетона В30

теории расчета высотных зданий с каркасом связевого типа. Это хорошо согласуется с общей теорией связевых каркасов с ядром жесткости. При данном соотношении жесткости вертикальных и горизонтальных элементов каркаса характерные точки

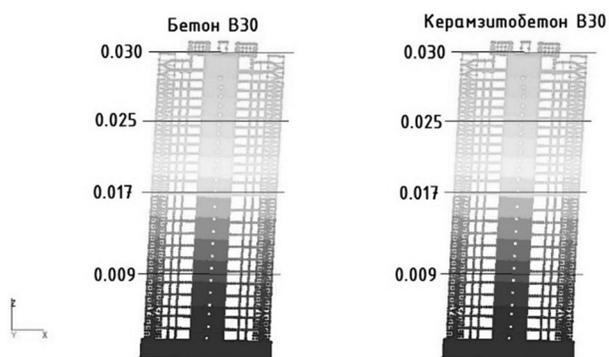


Рис. 7. Сопоставление перемещений от ветровой статической нагрузки для рамно-связевого каркаса

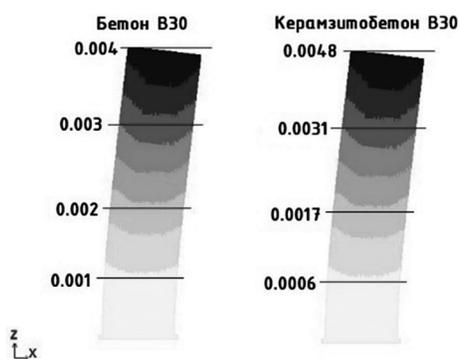


Рис. 8. Сопоставление перемещений от ветровой статической нагрузки для перекрестно-стенной системы

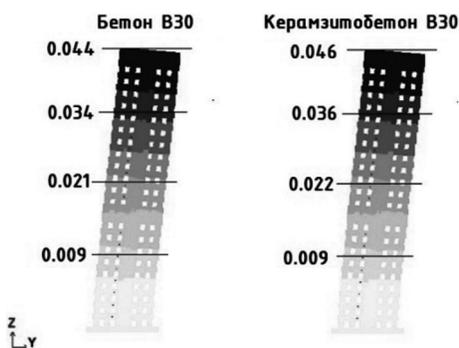


Рис. 9. Сопоставление перемещений от ветровой статической нагрузки для коробчато-ствольной системы

перелома находятся через $1/4$ высоты здания, при крайних соотношениях жесткости (более жесткие перекрытия) эти точки могут смещаться несколько ниже.

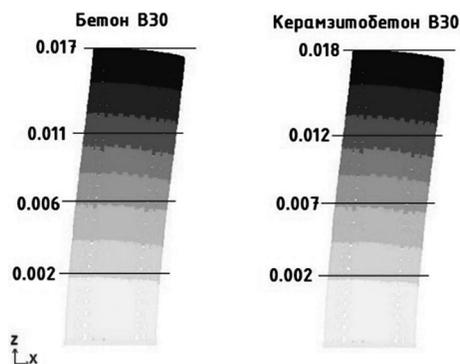


Рис. 10. Сопоставление перемещений от ветровой статической нагрузки для оболочковой системы

Для регистрации влияния жесткостных параметров применены различные измерительные устройства — инклинометры, тензометры, акселерометры.

Отклонения от вертикали регистрируют в колоннах под перекрытиями для предотвращения крена (допустимые значения $1/500 H$). Для измерения крена здания минимальное количество инклинометров составило 5 на каждой отметке, которые расположены через каждую $1/4$ высоты здания. Расстановка приборов производится на ядре жесткости и по углам здания.

Для измерения частоты, амплитуды и ускорений движения элементов конструкций с учетом затухания волны рекомендуются зоны, расположенные через каждые $1/4$ его высоты. Минимальное количество акселерометров для измерения ускорения здания, расположенных на $1/4$ и $1/2$ высоты здания, составило по одному акселерометру, а для $3/4$ и 1 принято 3.

Максимальные усилия в колоннах, в стенах, в ядре жесткости возникают в пределах нижнего этажа. Вследствие этого тензометры располагаются на первых этажах. Минимальное количество тензометров для измерения деформаций составляет 12, по углам зданий 8, а на ядре жесткости 4.

Из общей теории расчета высотных зданий и компьютерной расчетной модели характерные точки перелома находятся через $1/4$ высоты здания. Изменение соотношения жесткостных параметров вертикальных и горизонтальных элементов каркаса влияет на различные деформации здания в целом. При определении вертикальных перемещений следует обратить внимание на жесткостные параметры, которые определяют общую устойчивость и пространственную неизменяемость.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Плотников А. Н., Иванов М. Ю., Порфирьева Е. Н. Информативность систем мониторинга высотных зданий из принципа минимизации количества датчиков // Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: мат. IV Междунар. (X Всеросс.) конф. НАСКР-2018. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2018. С. 267–277.
- [2] Порфирьева Е. Н., Иванов М. Ю., Плотников А. Н. Методы предельного равновесия и главных напряжений для опертых по контуру перекрытий из конструкционного керамзитобетона // Строительство — формирование среды жизнедеятельности: сб. мат. семинара “Молодежные инновации” XXI Междунар. научн. конф. 2018. С. 276–282.

- [3] Иванов М. Ю., Порфирьева Е. Н., Плотников А. Н. Необходимые зоны контроля параметров высотных зданий, определяемые из характера кривизны упругой линии вертикальных элементов // Юность Большой Волги: сб. статей лауреатов XX Межрегион. конф.-фестиваля научн. творчества учащейся молодежи. 2018. С. 111–114.
- [4] Николаева А. Г., Яковлева О. С. Анализ влияния последовательности нагружения на напряженно-деформированное состояние элементов каркасов многоэтажных зданий // Управление ассортиментом, качеством и конкурентоспособностью в глобальной экономике: сб. статей VIII Междунар. заочной науч.-практ. конф. (30 марта 2017 г.). Чебоксары: ЧКИ РУК, 2016. С. 131–134.
- [5] Иванова Н. В., Николаева А. Г. Влияние процента армирования на НДС элементов рамных каркасов многоэтажных зданий при расчете с учетом возведения // Современные вопросы механики сплошных сред — 2017: сб. статей по мат. конф. (круглого стола) с междунар. участием. Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т, 2017. С. 38–42.
- [6] Тамразян А. Г., Мехрализадех Б. А. Частота свободных колебаний многоэтажных зданий при расчете на прогрессирующее обрушение в нелинейной динамической постановке учетом времени локального повреждения // Современные проблемы расчета и проектирования железобетонных конструкций многоэтажных зданий: сб. докл. Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения П. Ф. Дроздова. Москва: МГСУ, 2013. С. 235–245.
- [7] Дроздов П. Ф. Конструирование и расчет несущих систем многоэтажных зданий и их элементов: учебное пособие для вузов: 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Стройиздат, 1977. 223 с.
- [8] Дроздов П. Ф. [и др.]. Проектирование и расчет многоэтажных гражданских зданий и их элементов: учебное пособие для вузов / под ред. П. Ф. Дроздова. Москва: Стройиздат, 1986. 351 с.
- [9] Алмазов В. О., Климов А. Н. Сопоставление данных системы мониторинга высотных зданий с расчетом в программном комплексе // Современные проблемы расчета и проектирования железобетонных конструкций многоэтажных зданий: сб. докл. Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения П. Ф. Дроздова. Москва: МГСУ, 2013. С. 38–44.
- [10] Иванов М. Ю., Порфирьева Е. Н., Плотников А. Н. Методы предельного равновесия и главных напряжений для опертых по контуру плит перекрытий // Инженерные кадры — будущее инновационной экономики России. 2017. № 5. С. 36–37.
- [11] Иванов М. Ю., Порфирьева Е. Н., Плотников А. Н. Испытание нагружением плит перекрытия из керамзитобетона, опертой по контуру // Научному прогрессу — творчество молодых. 2017. № 4. С. 24–26.
- [12] Плотников А. Н., Гафиятуллин Н. А., Васильев П. А. Несущая способность наружных стеновых панелей из конструкционного керамзитобетона со стальной и композитной арматурой // Жилищное строительство. 2017. № 3. С. 52–57.

A. N. Plotnikov, M. Yu. Ivanov, O. S. Yakovleva

RIGID ALTITUDE BUILDING PARAMETERS AND THEIR DETERMINATION DURING MONITORING

Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. The article discusses issues related to the ratio of the stiffnesses of horizontal and vertical elements of high-rise buildings. Based on the principles of operation of the load-bearing systems of such buildings, the characteristic fracture points of the elastic vertical line curve are determined. The possibility of using expanded clay in floors is analyzed from the point of view of the influence of their rigidity on the deformation of the entire system. For various structural systems, displacements from the static wind load were calculated taking into account the pulsating component of the wind load, as well as a comparison of computer and manual calculations. The locations of automatic monitoring sensors are determined.

Keywords: deformation, effort, rigidity, displacement, deflection, overlap, concrete, expanded clay.

REFERENCES

- [1] Plotnikov A. N., Ivanov M. Y., Porfiryeva E. N. Informativeness of high-rise buildings monitoring systems from the principle of minimizing the number of sensors // New in architecture, design of building structures and reconstruction: materials of the IV International (X All-Russian) NASKR-2018 Conference. Cheboksary: Publishing house of Chuvash. University, 2018. P. 267–277. (in Russian).
- [2] Porfiryeva E. N., Ivanov M. Y., Plotnikov A. N. Methods of ultimate equilibrium and principal stresses for floor-supported ceilings made of structural expanded clay concrete floors // Construction — shaping the living environment of the XXI International Scientific Conference: collection of materials from the seminar “Youth Innovations”. 2018. P. 276–282. (in Russian).
- [3] Ivanov M. Y., Porfiryeva E. N., Plotnikov A. N. Necessary zones for controlling the parameters of high-rise buildings, determined from the nature of the curvature of the elastic line of vertical elements // Bolga Volga Youth: Collection of articles by winners of the 20th Interregional Conference and Festival of Scientific Creativity of Students. 2018. P. 111–114. (in Russian).
- [4] Nikolaeva A. G., Yakovleva O. S. Analysis of the effect of loading sequences on the stress-strain state of frame elements of multi-storey buildings // Assortment, quality and competitiveness management in the global economy: Sat. Articles VIII Int. correspondence scientific and practical conf. (March 30, 2017). Cheboksary: ChKI RUK, 2016. P. 131–134. (in Russian).
- [5] Ivanova N. V., Nikolaeva A. G. The influence of the percentage of reinforcement on the VAT of the frame elements of multi-storey buildings in the calculation taking into account the construction // Modern issues in the mechanics of continuous media — 2017: Sat. Art. by mat. conf. (round table) with Int. participation. Cheboksary: Chuvash State University, 2017. P. 38–42. (in Russian).
- [6] Tamrazyan A. G., Mehralizadeh B. A. The frequency of free vibrations of multi-storey buildings when calculating for progressive collapse in a nonlinear dynamic setting taking into account the local damage time // Modern problems of calculation and design of reinforced concrete structures of multi-storey buildings: Sat. doc. Int. scientific Conf. 100th anniversary of the birth of P.F. Drozdova. Moscow: MGSU, 2013. P. 235–245. (in Russian).

Plotnikov Alexey Nikolaevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Dean, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Ivanov Mikhail Yuryevich, Assistant, Postgraduate Student, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Yakovleva Olga Stanislavovna, Senior Lecturer, Chuvash State University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

-
- [7] Drozdov P. F. Design and calculation of load-bearing systems of multi-storey buildings and their elements: a textbook for universities: 2nd ed., revised. and add. Moscow: Stroyizdat, 1977. 223 p. (in Russian).
- [8] Drozdov P. F. [et al]. Design and calculation of multi-story civil buildings and their elements: a textbook for universities / Ed. by P. F. Drozdov. Moscow: Stroyizdat, 1986. 351 p. (in Russian).
- [9] Almazov V. O., Klimov A. N. Comparison of the data of the monitoring system of high-rise buildings with the calculation in the software package // Modern problems of calculation and design of reinforced concrete structures of multi-storey buildings: Sat. doc. Int. scientific conf. 100th anniversary of the birth of P. F. Drozdova. Moscow: MGSU, 2013. P. 38–44. (in Russian).
- [10] Ivanov M. Y., Porfiryeva E. N., Plotnikov A. N. Methods of extreme equilibrium and principal stresses for floor slabs supported along the contour // Engineering personnel — the future of the innovative Russian economy. 2017. no. 5. P. 36–37. (in Russian).
- [11] Ivanov M. Y., Porfiryeva E. N., Plotnikov A. N. Loading test of floor slabs made of expanded clay concrete, supported along the contour // Scientific progress — creativity of young people. 2017. no. 4. P. 24–26. (in Russian).
- [12] Plotnikov A. N., Gafiyatulin N. A., Vasiliev P. A. Bearing capacity of exterior wall panels of structural expanded clay with steel and composite reinforcement // Housing construction. 2017. no. 3. P. 52–57. (in Russian).

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО СДВИГА

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия

Аннотация. В статье рассмотрены уравнения анизотропной теории пластического течения в пространственном случае. На основе группы непрерывных преобразований, допускаемой системой, построено инвариантное решение. В случае однородного напряженного состояния найдено новое поле скоростей. Это поле имеет функциональный произвол.

Ключевые слова: упругопластическая задача, сложный сдвиг, законы сохранения.

DOI: 10.37972/chgru.2020.43.1.007

УДК: 539.374

Введение. В работе решена упругопластическая задача о напряженном состоянии в условиях сложного сдвига в теле ослабленном отверстием, ограниченном кусочно гладким контуром. В статье приведены законы сохранения, которые позволили свести вычисления компонент тензора напряжений к криволинейному интегралу по контуру отверстия. Законы сохранения позволили найти границу между упругой и пластической областями.

Постановка задачи. Напряженное состояние сложного сдвига возникает в цилиндрическом теле бесконечной длины под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянным вдоль образующих [1]. При этом при достаточно большой нагрузке в теле возникают как упругие, так и пластические зоны. Как и в любой задаче подобного рода возникает необходимость в нахождении заранее неизвестной границы, разделяющей упругую и пластическую зоны. Отыскание такой границы не простая задача, но специфика упругопластических задач о сложном сдвиге состоит в том, что решение подобных задач проще, чем решение аналогичных упругих задач. По-видимому, впервые этот факт отметил Г.П. Черепанов [1].

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., 2020

Сенашов Сергей Иванович

e-mail: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Савостьянова Ирина Леонидовна

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 20.01.2020

Упругопластическим задачам о сложном сдвиге (антиплоской деформации) посвящена обширная литература, ее обзор можно увидеть, например, в [1]. Во всех статьях, в которых решаются задачи о сложном сдвиге, существенно используют представление напряжений и смещений в упругой зоне в комплексном виде. В предлагаемой работе решены задачи о сложном сдвиге решена с помощью законов сохранения.

1. Основные соотношения. Поля смещений и напряжений в рассматриваемом случае таковы [1]:

$$\begin{aligned} u = v = 0, w = w(x, y), \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau^1(x, y), \tau_{yz} = \tau^2(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора смещения, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений, x, y, z – декартовы координаты, ось z направлена параллельно образующей.

В упругой зоне имеют место соотношения

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0 \text{ (уравнение равновесия)}, \quad (2)$$

$$\tau^1 = G \frac{\partial w}{\partial x}, \tau^2 = G \frac{\partial w}{\partial y} \text{ (закон Гука)}. \quad (3)$$

Здесь G – постоянная, называемая модулем сдвига.

Из (2), (3) следуют соотношения в упругой зоне

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial y} = \frac{\partial \tau^2}{\partial x}. \quad (5)$$

Из (2) и (5) следует, что τ^1, τ^2 удовлетворяют уравнениям Коши-Римана

$$F_1 = \frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0, F_2 = \frac{\partial \tau^1}{\partial y} - \frac{\partial \tau^2}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

В пластической области имеет место соотношение (2), а также

$$(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2 \text{ (условие текучести)}. \quad (7)$$

$$\tau^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \tau^1 \frac{\partial w}{\partial y} \text{ (закон Генки)}. \quad (8)$$

Здесь k – постоянная, равная пределу текучести при чистом сдвиге.

На границе упругой и пластической областей предполагается непрерывными напряжения и смещения.

2. Законы сохранения. Законом сохранения для системы уравнений (6) назовем соотношение вида

$$\frac{\partial A(x, y, \tau^1, \tau^2)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, \tau^1, \tau^2)}{\partial y} = \omega^1 F_1 + \omega^2 F_2, \quad (9)$$

где $\omega^i = \omega^i(x, y, \tau^1, \tau^2)$ – некоторые функции одновременно не равные тождественно нулю.

Замечание. С более общим определением законов сохранения и их использованием в механике деформируемого твердого тела можно ознакомиться, например, в [2–4]. Для тех целей, которые поставлены в статье, вполне подойдет упрощенная формулировка

в виде (9).

В случае (9), величины A, B называются компонентами сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты A, B имеют следующий вид

$$A = \alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau^1 + \beta^2 \tau^2 + \gamma^2, \quad (10)$$

где $\alpha^i = \alpha^i(x, y), \beta^i = \beta^i(x, y), \gamma^i = \gamma^i(x, y)$ – некоторые гладкие функции, подлежащие определению.

Подставим (10) в (9), в результате получаем

$$\begin{aligned} & \alpha_x^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau_x^1 + \beta_x^1 \tau^2 + \beta^1 \tau_x^2 + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 \tau^1 + \alpha^2 \tau_y^1 + \beta_y^2 \tau^2 + \beta^2 \tau_y^2 + \gamma_y^2 = \\ & = \omega^1 (\tau_x^1 + \tau_y^2) + \omega^2 (\tau_y^1 - \tau_x^2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где индекс внизу означает производную по соответствующей переменной.

Из (11) получаем

$$\alpha^1 = \omega^1, \beta^1 = -\omega^2, \alpha^2 = \omega^2, \beta^2 = \omega^1, \alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0. \quad (12)$$

Из (12), исключая ω^i получаем

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0. \quad (13)$$

В силу соотношений (12) компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = \alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1, B = -\beta^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau^2 + \gamma^2. \quad (14)$$

Поскольку правая часть (9) равна нулю, то по формуле Грина получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial S} A dy - B dx = \\ & = \int_{\partial S} (\alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1) dy - (-\beta^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau^2 + \gamma^2) dx = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Где S – область, ∂S – ее кусочно гладкая граница. Все функции, входящие в (15), предполагаются гладкими.

3. Упруго пластическая задача для произвольного отверстия в случае, когда пластическая область охватывает все отверстие. Пусть C – кусочно гладкий контур; к нему приложена нагрузка

$$l^1 \tau^1 + l^2 \tau^2 = \tau_n, |\tau_n| \leq k, \quad (16)$$

где (l^1, l^2) – компоненты вектора нормали к контуру C . Контур пластической области L полностью охватывает отверстие C . (см. рисунок 1.) В этом случае на контуре C , кроме условия (16) выполняется и условие текучести (7). Таким образом на C имеют место два условия:

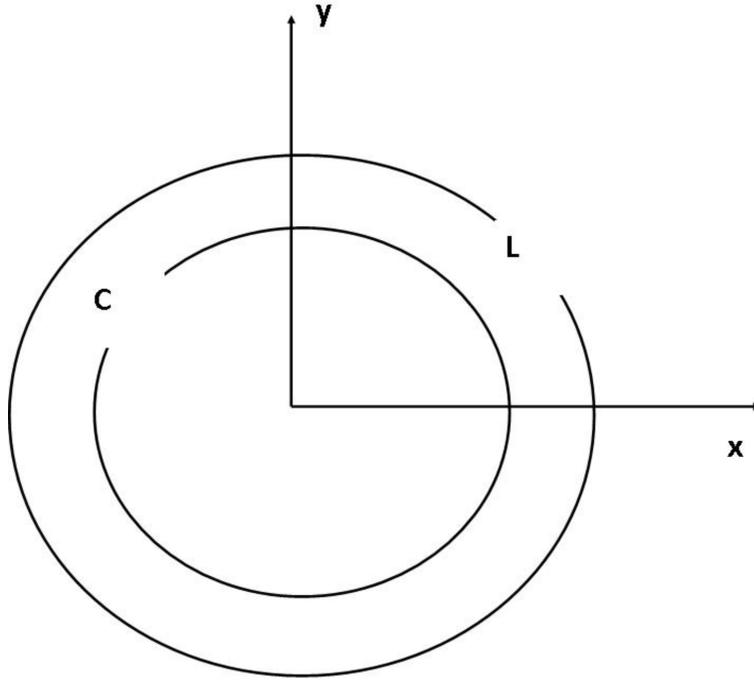
$$l^1 \tau^1 + l^2 \tau^2 = \tau_n, (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2. \quad (17)$$

Из условий (17) находим компоненты тензора напряжений на контуре C :

$$\tau^1 = \tau_n \pm l^2 \sqrt{k^2 - \tau_n^2}, \tau^2 = \tau_n l^2 \mp l^1 \sqrt{k^2 - \tau_n^2}. \quad (18)$$

В дальнейшем, для определенности в формулах (18) будем выбирать верхний знак.

4. Использование законов сохранения для нахождения компонент тензора напряжений в области. Пусть точка $M(x_m, y_m)$ лежит вне контура C . Построим окружность радиуса ε с центром в точке M . Имеем $\varepsilon : (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = \varepsilon^2$. Пусть D прямая соединяющая точку M с контуром C . Получаем замкнутый контур, состоящий из окружности ε , прямой D и контура C . (см. рисунок 2).

Рис. 11. Контур пластической области L полностью охватывает отверстие C

Из (15) получаем

$$\oint_C A dy - B dx + \int_{D^+} A dy - B dx + \int_{D^-} A dy - B dx + \int_{\varepsilon} A dy - B dx = 0. \quad (19)$$

Сумма второго и третьего слагаемых в (19) равна нулю, поскольку интегралы вычисляются в разных направлениях. Окончательно из (19) имеем

$$\int_C A dy - B dx = - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx. \quad (20)$$

Преобразуем правую часть уравнения (20), введя параметризацию $x = \varepsilon \cos t, y = \varepsilon \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. В результате имеем

$$\oint_{\varepsilon} A dy - B dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A \cos t + B \sin t) dt. \quad (21)$$

Пусть в (15)

$$\alpha^1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \beta^1 = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (22)$$

Тогда из (21) получаем

$$\int_{\varepsilon} A_1 dy - B_1 dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A_1 \cos t + B_1 \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tau^1 dt = 2\pi \tau^1(x_m, y_m). \quad (23)$$

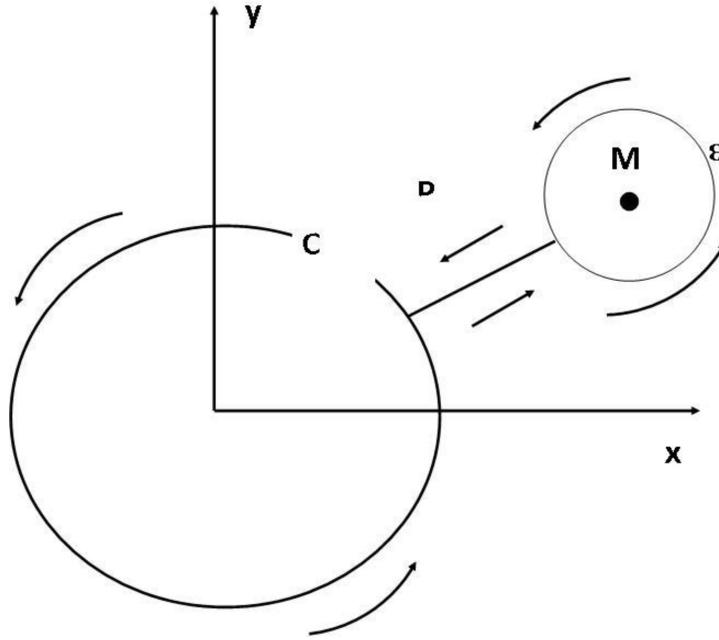


Рис. 12. Замкнутый контур, состоящий из окружности ε , прямой D и контура C

Последнее равенство в (23) получено с использованием теоремы о среднем при ε стремящемся к нулю. Пусть в (15)

$$\alpha^1 = \frac{y}{x^2 + y^2}, \beta^1 = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (24)$$

Тогда из (21) получаем

$$\oint_{\varepsilon} A_2 dy - B_2 dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A_2 \cos t + B_2 \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tau^2 dt = 2\pi \tau^2(x_m, y_m). \quad (25)$$

Последнее равенство в (25) получено с использованием теоремы о среднем при ε стремящемся к нулю.

Из формулы (20), а также из (23) и (25) получаем

$$\oint_C A_1 dy - B_1 dx = -2\pi \tau^1(x_m, y_m), \oint_C A_2 dy - B_2 dx = -2\pi \tau^2(x_m, y_m). \quad (26)$$

Формулы (26) дают возможность найти компоненты тензора напряжений в любой точке x_m, y_m вне контура C . Это позволяет установить границу между упругой и пластической областями. Если выполнено условие пластичности $(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2$ в точке x_m, y_m , то эта точка принадлежит пластической области; если в точке выполнено условие $(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 < k^2$, то – упругой. *Замечание.* Установленные выше формулы позволяют решать упруго пластические задачи, даже если пластический контур не полностью охватывает контур C , лишь бы на контуре C было выполнено условие пластичности (7).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 239 с.
- [2] Senashov S.I., Vinogradov A.M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity.// Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V.3(2). pp. 415–439.
- [3] Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Наука, 2001. 192 с.
- [4] Сенашов С.И., Гомонова О.В., Яхно А.Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т., 2012. 139 с.

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

ELASTIC-PLASTIC PROBLEM UNDER COMPLEX SHEAR CONDITIONS

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. We considered the equations of the anisotropic theory of plastic flow in the spatial case in this study. We have constructed an invariant solution based on the group of continuous transformations allowed by the system. In the case of a homogeneous stress state, a new velocity field is found. This field has a functional arbitrary value.

Keywords: the elastic-plastic problem, complex shift, the laws of conservation.

REFERENCES

- [1] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 239 p. (in Russian)
- [2] Senashov S. I., A. M. Vinogradov, Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // The Proc. Edinburgh Math. Soc. 1988. V. 3(2). pp. 415-439.
- [3] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk: Izd.Nauka, 2001. 192 p. (in Russian)
- [4] Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. Mathematical questions of two-dimensional equations of ideal plasticity. Krasnoyarsk: Izd. SibSAU, 2012. 139 p. (in Russian)

Senashov Sergei Ivanovich

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

Savostyanova Irina Leonidovna

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

В. Н. Алексеев

К ВОПРОСУ О ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В УПРУГИХ СРЕДАХ

Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается задача о распространении цилиндрической волны сжатия в упругой среде. Получены значения радиальных смещений точек среды и радиальных напряжений. Указаны асимптотические оценки полученных решений для поля смещений в среде на больших расстояниях от источников волны, а также статистическое распределение смещений среды.

Ключевые слова: упругая среда, потенциал, цилиндрические волны, радиальные напряжения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.008

УДК: 550.34

Инженерное оборудование местности в ряде случаев может потребовать проведения буровзрывных работ. Зарядами, используемыми при этом, могут быть, в частности, удлинённые цилиндрические заряды, устанавливаемые в искусственных полостях (шпурах, скважинах), заранее подготовленных в разрабатываемой среде. Такие технологии используют при проведении работ в твердых и скальных породах, мерзлых грунтах и т.п. При этом, как правило, актуальным является исследование волновых процессов, возникающих в природной грунтовой среде, при взрыве в ней упомянутых зарядов. Последнее, в свою очередь, основывается на анализе аналитических решений соответствующих задач, одной из которых является задача в следующей постановке.

Пусть в упругой среде, заполняющей полупространство $Z > 0$, имеется цилиндрическая полость (каверна), ось симметрии которой ортогональна плоскости $Z = 0$ среды. К стенкам каверны приложено равномерно распределённое по её длине нормальное давление, изменяющееся во времени по заданному закону. Требуется определить волновое движение, возникающее во внешней относительно каверной области.

Поставленная задача обладает осевой симметрией; её решение будем искать в цилиндрической системе координат, ось OZ которой совмещена с продольной осью каверны.

© Алексеев В. Н., 2020

Алексеев Владимир Николаевич

e-mail: alekseevvn17@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

Поступила 28.02.2020

Движение среды может быть описано потенциалом $\varphi(r, t)$, который является функцией расстояния r точек среды от продольной оси каверны и времени t , отсчитываемого от момента приложения давления к стенке каверны. В рассматриваемом случае цилиндрической симметрии задачи функция $\varphi(r, t)$ должна удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где a — скорость продольной волны в упругой среде. Задача заключается в отыскании такой функции $\varphi(r, t)$, которая удовлетворяет волновому уравнению (1) и граничному условию на поверхности каверны

$$\sigma_r(r_0, t) = P_0 f(t), \quad (2)$$

где σ_r — радиальное напряжение; r_0 — радиус каверны; P_0 — константы; $f(t)$ — закон изменения во времени давления на внутренней поверхности каверны. Кроме того, необходимо учесть требование, состоящее в том, что исследуемый динамический процесс в среде представляет собой расходящуюся волну.

Будем искать решение задачи для случая гармонического режима, когда

$$f(t) = e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Полагая

$$\varphi(r, t) = \Phi(r)T(t) \quad (4)$$

и разделяя в уравнении (1) переменные, будем иметь

$$\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{1}{r} \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = K, \quad (5)$$

где K — произвольная постоянная. Приняв $K = -\omega^2/a^2$, получаем

$$T'' + \omega^2 T = 0, \quad (6)$$

$$\Phi'' + \frac{1}{r} \Phi' + \frac{\omega^2}{a^2} \Phi = 0. \quad (7)$$

Частным решением уравнения (6) является

$$T(t) = e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Заменой

$$\rho = \frac{\omega}{a} r \quad (9)$$

уравнение (7) сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho} + \Phi = 0. \quad (10)$$

Его частными независимыми решениями являются функции Ханкеля нулевого порядка первого и второго рода $H_0^{(1)}(\rho)$ и $H_0^{(2)}(\rho)$ соответственно [1, 2], через которые выражается общее решение уравнения (10):

$$\Phi(r) = AH_0^{(2)}(\rho) + BH_0^{(1)}(\rho), \quad (11)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Как известно [3], функции Ханкеля m -го порядка первого и второго рода определяют бегущие цилиндрические волны и при больших значениях аргумента ρ аппроксимируются приближенными выражениями вида

$$H_m^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i(\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}m)}, \quad H_m^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i(\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}m)}. \quad (12)$$

При временной зависимости вида $e^{i\omega t}$, которая имеет место в рассматриваемой задаче, цилиндрической волне, распространяющейся от поверхности каверны на бесконечность, соответствует функция Ханкеля нулевого порядка второго рода $H_0^{(2)}(\rho)$. Поэтому в выражении (11) следует принять $B = 0$, то есть

$$\Phi(r) = AH_0^{(2)}(\rho). \quad (13)$$

Таким образом, согласно (4), (8) и (13) окончательно для значения потенциала получаем

$$\varphi(\rho, t) = AH_0^{(2)}(\rho)e^{i\omega t}. \quad (14)$$

Значение константы A в (14) определяется согласно граничному условию (2):

$$\sigma_r = -\frac{\lambda}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad (15)$$

где λ и μ — коэффициент Ламэ.

Вычислим предварительно значение радиальной составляющей U_r перемещений точек среды, содержащейся в выражении (15). Так как

$$U_r = \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial r}, \quad (16)$$

то согласно (14) будем иметь

$$U_r = Ae^{i\omega t} \frac{d}{d\rho} H_0^{(2)}(\rho) \frac{d\rho}{dr}. \quad (17)$$

Согласно свойству функции Ханкеля [4]

$$\frac{d}{d\rho} H_0^{(2)}(\rho) = -H_1^{(2)}(\rho), \quad (18)$$

поэтому в силу (17) и значения (9) для величины ρ получаем

$$U_r = -A \frac{\omega}{a} H_1^{(2)}(\rho) e^{i\omega t}. \quad (19)$$

Вычислим теперь производную:

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} = -A \frac{\omega}{a} e^{i\omega t} \frac{d}{d\rho} H_1^{(2)}(\rho) \frac{d\rho}{dr}. \quad (20)$$

Согласно свойству функции Ханкеля [4]

$$\frac{d}{d\rho} H_1^{(2)}(\rho) = H_0^{(2)}(\rho) - \frac{1}{\rho} H_1^{(2)}(\rho) \quad (21)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} = -A \frac{\omega^2}{a^2} \left[H_0^{(2)}(\rho) - \frac{1}{\rho} H_1^{(2)}(\rho) \right] e^{i\omega t}. \quad (22)$$

Теперь, согласно (14), (15), (22), для значения радиального напряжения σ_r получаем

$$\sigma_r = -A \frac{\omega^2}{a^2} \left[(\lambda + 2\mu) H_0^{(2)}(\rho) - \frac{2\mu}{\rho} H_1^{(2)}(\rho) \right] e^{i\omega t}. \quad (23)$$

Возвращаясь к граничному условию (2), для значения A находим

$$A = - \frac{P_0 \rho_0 a^2}{(\lambda + 2\mu) \omega^2 \left[\rho_0 H_0^{(2)}(\rho_0) - 2\gamma^2 H_1^{(2)}(\rho_0) \right]}, \quad (24)$$

где обозначены

$$\gamma^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \rho_0 = \frac{\omega}{a} r_0. \quad (25)$$

В силу (19) и (25) для значений радиальных смещений точек упругой среды получаем

$$U_r(r, t) = \frac{r_0 P_0}{\lambda + 2\mu} \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) e^{i\omega t}}{\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) - 2\gamma^2 H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}. \quad (26)$$

Используя при больших значениях аргументов ($\omega r/a > \omega r_0/a \gg 1$) асимптотические выражения (12) функций Ханкеля, для радиальных смещений точек упругой среды будем иметь

$$U_r(r, t) = \frac{P_0}{\lambda + 2\mu} \frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{r_0}{r}} e^{i\omega\left(t - \frac{r-r_0}{a}\right)}. \quad (27)$$

Для малых значений аргументов, используя разложения функций Ханкеля [4],

$$H_0^{(2)}(\rho) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{\rho}{2} + \dots, \quad H_1^{(2)}(\rho) = \frac{2i}{\pi} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{2} \ln \frac{\rho}{2} + \dots \right) \quad (28)$$

и сохраняя их главные члены, в предельном случае при $\omega \rightarrow 0$ можно получить статическое распределение смещений среды:

$$U_r(r, t)_{\text{стат}} = \frac{P_0 r_0}{2\mu} \left(\frac{r_0}{r} \right). \quad (29)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Паргон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. Москва: Наука, 1981. 668 с.
- [2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Москва: Мир, 1977. 622 с.
- [3] Агрест М. М., Максимов М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. Москва: Академиздат, 1965. 351 с.
- [4] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. Москва: Наука, 1968. 832 с.

V. N. Alekseyev

ON THE QUESTION OF CYLINDRICAL WAVES IN ELASTIC MEDIA

Russian University of transport, Moscow, Russia

Abstract. The problem of propagation of a cylindrical compression wave in an elastic medium is considered. The values of radial displacements of medium points and radial stresses are obtained. Asymptotic estimates of the obtained solutions for the displacement field in the medium at large distances from the wave sources are given, as well as the statistical distribution of the displacement of the medium.

Keywords: elastic medium, potential, cylindrical waves, radial stresses.

REFERENCES

- [1] Parton V. Z., Perlin P. I. Methods of mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1981. 668 p. (in Russian).
- [2] Whitham J. Linear and nonlinear waves. Moscow: Mir, 1977. 622 p. (in Russian).
- [3] Agrest M. M., Maksimov M. Z. Theory of incomplete cylindrical functions and their applications. Moscow: Akademizdat, 1965. 351 p. (in Russian).
- [4] Reference for special functions with formulas, graphs, and tables. Moscow: Nauka, 1968. 832 p. (in Russian).
- [5] Nikiforov A. F., Uvarov V. B. Special functions of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1978. 319 p. (in Russian).

Vladimir Nikolajevich Alekseyev, Candidate of technical Sciences, Associate Professor, Russian University of transport, Moscow, Russia.

Н. И. Петров

РАСТЯЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ В ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматривается растяжение бесконечно длинного цилиндрического стержня переменного сечения. Используются результаты решения линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций [1-7] в случае осесимметричной задачи. Предполагается, что в начальном состоянии имеет место простое растяжение.

Ключевые слова: растяжение, перемещение, деформация, напряжение, граничные условия, линеаризация, функция Бесселя.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.009

УДК: 539.375

Компоненты перемещения тензора деформаций и тензора напряжений в первом приближении выражаются через функции Бесселя нулевого и первого порядка [7]

$$\begin{aligned}u'_r &= -\nu [\bar{C}I_1(\mu r) + CI_1(\bar{\mu}r)] \cos \nu z, & u'_z &= [\bar{C}\mu I_0(\mu r) + C\bar{\mu}I_0(\bar{\mu}r)] \sin \nu z, \\e'_r &= \frac{\nu}{r} \{ \bar{C}I_1(\mu r) + CI_1(\bar{\mu}r) - r [\bar{C}\mu I_0(\mu r) + C\bar{\mu}I_0(\bar{\mu}r)] \} \cos \nu z, \\e'_\theta &= -\nu r [\bar{C}I_1(\mu r) + CI_1(\bar{\mu}r)] \cos \nu z, & e'_z &= \nu [\bar{C}\mu I_0(\mu r) + C\bar{\mu}I_0(\bar{\mu}r)] \cos \nu z, \\e'_{rz} &= \frac{\nu^2}{2} [(1 - e^{i\alpha}) \bar{C}\mu I_1(\mu r) + (1 - e^{-i\alpha}) CI_1(\bar{\mu}r)] \sin \nu z, \\ \sigma'_r &= \frac{\nu}{r} \{ 2B [\bar{C}I_1(\mu r) + CI_1(\bar{\mu}r)] - r [(3A + Be^{i\alpha}) \bar{C}\mu I_0(\mu r) + \\ & \quad (3A + Be^{-i\alpha}) C\bar{\mu}I_0(\bar{\mu}r)] \} \cos \nu z, \\ \sigma'_\theta &= \frac{\nu}{r} \{ -2B [\bar{C}I_1(\mu r) + CI_1(\bar{\mu}r)] + [(2B - 3A) - Be^{i\alpha}] \bar{C}\mu r I_0(\mu r) + \\ & \quad + [(2B - 3A) - Be^{-i\alpha}] C\bar{\mu}r I_0(\bar{\mu}r) \} \cos \nu z,\end{aligned}$$

© Петров Н. И., 2020
Петров Николай Ильич
e-mail: ni.petrov46@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 23.02.2020

$$\begin{aligned}\sigma'_z &= \nu B \left[(1 - e^{i\alpha}) \bar{C} \mu I_0(\mu r) + (1 - e^{-i\alpha}) C \bar{\mu} I_0(\bar{\mu} r) \right] \cos \nu z, \\ \tau'_{rz} &= \nu^2 B \left[(1 - e^{i\alpha}) \bar{C} I_1(\mu r) + (1 - e^{-i\alpha}) C I_1(\bar{\mu} r) \right] \sin \nu z.\end{aligned}\quad (1)$$

Рассмотрим растяжение бесконечно длинного цилиндрического стержня переменного сечения. Уравнение поверхности стержня представим в виде

$$r = a + \delta f(z), \quad (2)$$

где $a = const$, δ - малый параметр ($\delta \ll 1$).

Цилиндр растягивается вдоль оси z , боковая поверхность свободна от напряжений. Граничные условия на поверхности запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r \cos(nr) + \tau_{rz} \cos(nz) &= 0, \\ \tau_{rz} \cos(nr) + \sigma_z \cos(nz) &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где n - нормаль к поверхности, σ_r , σ_z , τ_{rz} - компоненты напряжений в цилиндрической системе координат $r\theta z$.

Смещение точек цилиндра происходит в меридиальных плоскостях, положим

$$u_r = u_r(r, z), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = u_z(r, z), \quad (4)$$

где u_r , u_θ , u_z - компоненты перемещения вдоль осей $r\theta z$.

Линеаризированные граничные условия (24) имеют вид

$$\sigma'_r = 0, \quad \tau'_{rz} - \sigma'_z \frac{df}{dz} = 0, \quad r = a \quad (5)$$

Удовлетворим выражения (22) условиями (26)

$$2B [\bar{C} I_1(\mu a) + C I_1(\bar{\mu} a)] - a [(3A + B e^{i\alpha}) \bar{C} \mu I_0(\mu a) + (3A + B e^{-i\alpha}) C \bar{\mu} I_0(\bar{\mu} a)] = 0,$$

$$2B \bar{C} I_1(\mu a) + 2B C I_1(\bar{\mu} a) - (3A + B e^{i\alpha}) \bar{C} \mu a I_0(\mu a) - (3A + B e^{-i\alpha}) C \bar{\mu} a I_0(\bar{\mu} a) = 0.$$

Из первого условия найдем

$$\bar{C} = \frac{(3A + B e^{-i\alpha}) \bar{\mu} a I_0(\bar{\mu} a) - 2B I_1(\bar{\mu} a)}{2B I_1(\mu a) - (3A + B e^{i\alpha}) \mu a I_0(\mu a)} C \quad (6)$$

Тогда из второго условия находим

$$\begin{aligned}f &= \frac{CB\nu \cos \nu z}{\sigma_z^0} \left\{ \frac{(1 - e^{i\alpha}) [(3A + B e^{-i\alpha}) \bar{\mu} a I_0(\bar{\mu} a) - 2B I_1(\bar{\mu} a)] I_1(\mu a) +}{2B I_1(\mu a) - (3A + B e^{i\alpha}) \mu a I_0(\mu a)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - e^{-i\alpha}) [2B I_1(\mu a) - (3A + B e^{i\alpha}) \mu a I_0(\mu a)] I_1(\bar{\mu} a)}{2B I_1(\mu a) - (3A + B e^{i\alpha}) \mu a I_0(\mu a)} \right\} \quad (7)\end{aligned}$$

Положив $f = A \cos z$, $A = const$, искомое решение определим из выражений (1), где значение коэффициента C находится из соотношения (8), а коэффициента \bar{C} из соотношения (7).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Москва: Гостехиздат, 1948. 376 с.
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [4] Ивлев Д. Д., Михайлова М. В., Петров Н. И. О полиномиальных решениях линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах // Известия ИТА ЧР. 1996-1997. № 3(4)-2(7). С. 64–69.
- [5] Петров Н. И. Полиномиальное решение линеаризованных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций // Известия ИТА ЧР. 1996-1997. № 3(4)-2(7). С. 70–71.
- [6] Петров Н. И. Решение линеаризованных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций в полиномах // Фундаментальные и прикладные исследования в области естественных и технических наук. Труды международной научно-практической конференции. Белгород: Агентство перспективных научных исследований (АПНИ), 2018.
- [7] Петров Н. И. О решении линеаризованных уравнений теории малых упругопластических деформаций в случае осесимметричной задачи // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева. 2019. № 3(14). С. 61–66.

N. I. Petrov

**STRETCHING OF A CYLINDRICAL ROD OF VARIABLE CROSS-SECTION IN
THE THEORY OF SMALL ELASTIC-PLASTIC**

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. We considers the stretching of an infinitely long cylindrical rod of variable cross-section. The results of solving the linearized equations of the theory of small elastic-plastic deformations [1-7] in the case of an axisymmetric problem are used. It is assumed that a simple stretch occurs in the initial state.

Keywords: stretching, displacement, deformation, stress, boundary conditions, linearization, Bessel function.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian).
- [3] Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [4] Ivlev D. D., Mikhailova M. V., Petrov N. I. On Polynomial soluthions of the linearized equatons of the theory of small elastoplastic strains in polar coordinates // *Izvestia ITA ChR*. 1996-1997. no. 3 (4)- 2 (7). P. 64–69. (in Russian).
- [5] Petrov N. I. Polynomial soluthions of the linearized equatons of linearized problems of an axisymmetric state in the theory of small elastoplastic deformations // *Izvestia ITA ChR*. 1996-1997. no. 3 (4)- 2 (7). P. 70–71. (in Russian).
- [6] Petrov N. I. The solution of linearized problems of an axisymmetric state in the theory of small elastoplastic deformations in polynomials // *Materials of the international scientific-practical conference "Fundamental and Applied Research in the Field of Natural and Technical Sciences"*. Belgorod: Agency for Advanced Research (APNI), 2018. (in Russian).
- [7] Petrov N. I. On the solution of linearized equations of the theory of small elastoplastic deformations in the case of an axisymmetric problem // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*. 2019. no. 3 (14). P. 61–66. (in Russian).

С. О. Фоминых, Г. Е. Чекмарев

О ВЛИЯНИИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ АНИЗОТРОПИИ НА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ТРУБЫ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе изучается упругопластическое состояние трубы, содержащей три слоя, каждый из которых обладает индивидуальными свойствами анизотропии. Труба находится под действием внутреннего давления.

Ключевые слова: анизотропия, трансляционная анизотропия, труба, напряжение, пластичность.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.010

УДК: 539.374

1. Постановка задачи. Рассмотрим толстостенную трубу, состоящую из трех слоев. Материал, обладающий свойствами анизотропии по Хиллу, примыкает к внутренней части трубы. Следующий слой характеризует трансляционная анизотропия. Замыкает конструкцию слой, характеризующийся анизотропией по Хиллу. Таким образом, имеется чередование анизотропных материалов с разными характеристиками. Величины a и d являются внутренним и внешним радиусами трубы соответственно, величины c и b определяют границы слоев трубы (рис. 1).

Перейдем к безразмерным координатам:

$$\alpha = \frac{a}{\rho_s^0}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_s^0}, \quad c = \frac{c}{\rho_s^0}, \quad d = \frac{d}{\rho_s^0},$$

где ρ_s^0 — радиус упругопластической зоны в исходном нулевом приближении в третьем слое.

© Фоминых С. О., Чекмарев Г. Е., 2020

Фоминых Светлана Олеговна

e-mail: ermakovaso@gambler.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Чекмарев Георгий Евгеньевич

e-mail: chekmarevge@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

Поступила 15.02.2020

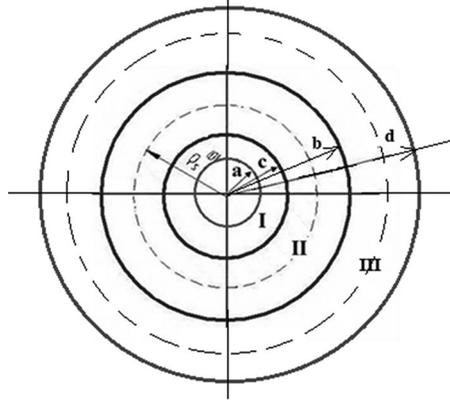


Рис. 1.

В первой, внутренней области I $a < \rho < c$ (рис. 1) имеет место условие пластичности

$$A \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \tau_{xy}^2 = K_1^2, \quad A, B, K_1 = \text{const}, \quad (1)$$

где ρ — текущий радиус.

В средней области II $c < \rho < b$ условие пластичности примет в виде

$$\left(\frac{\sigma_x^{(p)} - \sigma_y^{(p)}}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy}^{(p)} - k_3)^2 = K_2^2, \quad k_1, k_2, k_3, K_2 = \text{const}. \quad (2)$$

Во внешней области III $b < \rho < d$ имеет место условие пластичности

$$A \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + B \tau_{xy}^2 = K_3^2, \quad A, B, K_3 = \text{const}, \quad (3)$$

где $\sigma_x^{(p)}$, $\sigma_y^{(p)}$, $\tau_{xy}^{(p)}$ — компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Будем считать компоненты напряжений безразмерными, отнесенными к некоторой величине k_0 .

Согласно (1)–(3) анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат x , y . Связь между напряжениями в декартовой системе координат x , y и напряжениями в полярной системе координат ρ , θ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Из формул (1)–(4) могут быть получены условия пластичности в полярных координатах:

— в первой, внутренней области I они примут вид

$$\left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + (\tau_{\rho\theta}^p)^2 \left[\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] +$$

$$+ \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \tau_{\rho\theta}^p [A - B] \sin 4\theta - K_1^2 = 0; \quad (5)$$

— в средней области II —

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2 - 2R \left(\frac{\sigma_\rho^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{2} \right) \cos(2\theta + \mu) - \\ & - 2\tau_{\rho\theta}^{(p)} R \sin(2\theta + \mu) + R^2 - K_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$R = \sqrt{\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{R} = \sin \mu;$$

— во внешней области III —

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 \left[\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + (\tau_{\rho\theta}^p)^2 \left[\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 4\theta \right] + \\ & + \left(\frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{2} \right) \tau_{\rho\theta}^p [A - B] \sin 4\theta - K_3^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Неизвестные напряжения ищем в виде разложения в ряд по малому безразмерному параметру δ при условии, что напряжения на границах разложены в ряд Фурье [1].

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p :

$$\sigma_\rho^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = -p, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_0^s}.$$

Поскольку в работах [2, 3, 4, 5] подробно исследовано напряженное состояние двухслойной трубы и определены все характеристики, то для трубы, состоящей из трех слоев, нам следует акцентировать внимание на области III. Поэтому необходимо определить компоненты тензора, характеризующего напряженное состояние как в пластической, так и в упругой зонах, и изменение границы раздела упругой и пластической зон для области III.

2. Решение задачи. В нулевом приближении напряжения в областях I и II полностью определены в [2], в области III в исходном нулевом приближении во внешней пластической области имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_\rho^{(0)} = 2K_3 \ln \rho + C_3, \quad \sigma_\theta^{(0)} = 2K_3(1 + \ln \rho) + C_3. \quad (8)$$

Компоненты тензора напряжений на границе раздела областей II и III удовлетворяют условиям сопряжения

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=b} = \sigma_{\rho_3}^{(0)p} \Big|_{\rho=b}. \quad (9)$$

Напряжения во внешней пластической области III имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)p} &= -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \ln \frac{b}{c} + 2K_3 \ln \frac{\rho}{b}, \\ \sigma_\theta^{(0)p} &= -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \ln \frac{b}{c} + 2K_3 \left(1 + \ln \frac{\rho}{b} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$\sigma_\rho^{(0)e} = A - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + \frac{B}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (11)$$

Условия сопряжения компонент тензора напряжений на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} \Big|_{\rho=2} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} \Big|_{\rho=2} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=2}. \quad (12)$$

Исходя из граничного условия $\sigma_{\rho}^{(0)e} = 0$ при $\rho = d$, получим, что

$$0 = A - \frac{B}{d^2}. \quad (13)$$

Согласно (10)–(13)

$$A = -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \ln \frac{b}{c} + K_3 \left(1 + 2 \ln \frac{2}{b} \right), \quad B = 4K_3. \quad (14)$$

Напряжения во внешней области II имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(0)e} &= -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \ln \frac{b}{c} + K_3 \left(1 + 2 \ln \frac{2}{b} - \frac{4}{\rho^2} \right), \\ \sigma_{\theta}^{(0)e} &= -p + 2K_1 \ln \frac{c}{\alpha} + 2K_2 \ln \frac{b}{c} + K_3 \left(1 + 2 \ln \frac{2}{b} + \frac{4}{\rho^2} \right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Результирующие напряжения в областях I и II полностью определены в [2], поэтому нас будут интересовать только напряжения в пластической области во второй зоне. Они представлены в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) + 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu) + \\ &\quad + K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Общее решение во внешней зоне в первом приближении согласно [3] и формулам (14)–(16) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)p} &= \frac{1}{\rho} \left[(C_{41}(-15) + \sqrt{15}C_{42}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \right. \\ &\quad \left. + (-\sqrt{15}C_{41} + C_{42}(-15)) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right] \cos 4\theta + \frac{7}{8}K_3 \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(1)p} &= \frac{1}{\rho} \left[(C_{41}(-15) + \sqrt{15}C_{42}) \cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \right. \\ &\quad \left. + (-\sqrt{15}C_{41} + C_{42}(-15)) \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right] \cos 4\theta - \frac{1}{8}K_3 \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= \frac{1}{\rho} \left[4\sqrt{15} \{ C_{42} \cos(\sqrt{15} \ln \rho) - C_{41} \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \} \sin 4\theta \right] - \frac{1}{4}K_3 \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Из условия сопряжения, которым обладают компоненты тензора напряжений на границе,

$$\sigma_{\rho_2}^{(1)p} \Big|_{\rho=b} = \sigma_{\rho_3}^{(1)p} \Big|_{\rho=b}. \quad (18)$$

Можем определить коэффициенты C_{41} , C_{42} . Они имеют вид

$$C_{41} = \frac{K_3 b}{16} \left(\cos(\sqrt{15} \ln b) - \frac{1}{\sqrt{15}} \sin(\sqrt{15} \ln b) \right),$$

$$C_{42} = \frac{K_3 b}{16} \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \cos(\sqrt{15} \ln b) + \sin(\sqrt{15} \ln b) \right).$$

Таким образом, на основании формул (13)–(18) получим выражения для компонент результирующего тензора напряжений в пластической области в третьей зоне:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15} c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta - \\ &\quad - \frac{K_3 b}{8\rho} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{b} \right) \right) \cos 4\theta + \frac{7}{8} K_3 \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) + 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15} c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta - \\ &\quad - \frac{K_3 b}{8\rho} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{b} \right) \right) \cos 4\theta - \frac{1}{8} K_3 \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= R' \left[\frac{c}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{c} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu) + \\ &\quad + K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15} c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta + \\ &\quad + \frac{\sqrt{15} K_3 b}{4\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{b} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{\rho}{b} \right) \right) \sin 4\theta - \frac{1}{4} K_3 \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

На границе пластической зоны, в случае, когда $\rho = 2$, из (19) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15} c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] \cos 4\theta - \\ &\quad - \frac{K_3 b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) \cos 4\theta + \frac{7}{8} K_3 \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(1)p} &= -R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) + 1 \right] \cos(2\theta + \mu) + \\ &\quad + K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15} c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \frac{1}{8} \right] \cos 4\theta - \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{K_3 b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) \cos 4\theta - \frac{1}{8} K_3 \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(1)p} = & R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu) + \\
& + K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] \sin 4\theta + \\
& + \frac{\sqrt{15} K_3 b}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) \sin 4\theta - \frac{1}{4} K_3 \sin 4\theta.
\end{aligned}$$

Преобразуем соотношения (20) к виду

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho}^{(1)p} &= a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta + a_4'' \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(1)p} &= a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta + b_4''' \sin 4\theta,
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
a_2'' &= -R' \cos \mu \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right], \\
b_2'' &= R' \sin \mu \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right], \\
a_4'' &= K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] - \\
& - \frac{K_3 b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) + \frac{7}{8} K_3, \\
a_2''' &= R' \sin \mu \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right], \\
b_2''' &= R' \cos \mu \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right], \\
b_4''' &= K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] + \\
& + \frac{\sqrt{15} K_3 b}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) - \frac{1}{4} K_3.
\end{aligned}$$

Поскольку внешняя часть трубы свободна от усилий, то, когда $\rho = d$, имеет место

$$\sigma_{\rho}^{(1)e} = \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = 0. \tag{22}$$

Компоненты напряжения $\sigma_{\rho}^{(1)}$, $\tau_{\rho\theta}^{(1)}$ равны между собой на границе пластической зоны в случае, когда $\rho = 2$:

$$\sigma_{\rho}^{(1)p} = \sigma_{\rho}^{(1)e}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)p} = \tau_{\rho\theta}^{(1)e}. \tag{23}$$

Из условий (22), (23) согласно (20) могут быть определены компоненты тензора напряжения в упругой области. В нашем случае они полностью совпадают с теми, которые, приведены в [1] (гл. 1, §9, группа формул (VI) и (VIII)).

1. Положим, что на границе упругопластической области имеет место (21) при

$$a_2'' = -R' \cos \mu \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right],$$

$$b_2'' = R' \sin \mu \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right],$$

$$b_2''' = a_4''' = a_2''' = b_4''' = 0,$$

тогда напряжения будут определяться

$$\sigma_\rho^{(1)e} = \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu),$$

$$\sigma_\theta^{(1)e} = -\frac{1}{\rho^4} R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \quad (24)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(1)e} = \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu).$$

2. Положим, что на границе упругопластической области имеет место (21) при

$$a_2''' = R' \sin \mu \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right],$$

$$b_2''' = R' \cos \mu \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right],$$

$$a_2'' = b_2'' = a_4'' = b_4'' = 0,$$

тогда напряжения будут определяться

$$\sigma_\rho^{(1)e} = \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu),$$

$$\sigma_\theta^{(1)e} = -\frac{2}{\rho^4} R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \mu), \quad (25)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(1)e} = \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) R' \left[\frac{c}{2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \mu).$$

3. Положим, что на границе упругопластической области имеет место (21) при

$$a_4'' = K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] -$$

$$- \frac{K_3 b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) + \frac{7}{8} K_3,$$

$$b_4''' = K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{15} K_3 b}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) - \frac{1}{4} K_3,$$

$$a_2'' = b_2'' = a_2''' = b_2''' = 0,$$

тогда напряжения будут определяться

$$\sigma_\rho^{(1)e} = \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{K_3 b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) + \frac{7}{8} K_3 \right\} \cos 4\theta,$$

$$\sigma_\theta^{(1)e} = \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{K_3 b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) + \frac{7}{8} K_3 \left. \right\} \cos 4\theta, \quad (26) \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{15} K_3 b}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) - \frac{1}{4} K_3 \right\} \sin 4\theta.
\end{aligned}$$

Результирующие напряжения в упругой области определяются как сумма напряжений (24)–(26):

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{(I)e} = & R' \left\{ \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{\sqrt{3}c}{2} \left(\sqrt{3} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) - 3 \right) - \right. \\
& \left. - \frac{2}{\rho^2} \left(c \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - 2 \right) \right\} \cos(2\theta + \mu) + \\
& + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{K_3 b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) + \frac{7}{8} K_3 \right\} \cos 4\theta, \\
\sigma_\theta^{(I)e} = & \frac{3}{\rho^4} R' \left(\frac{c}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) + 1 \right) \cos(2\theta + \mu) + \\
& + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + \frac{7}{8} \right] - \right. \quad (27) \\
& \left. - \frac{K_3 b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) + \frac{7}{8} K_3 \right\} \cos 4\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & -R' \left[\frac{c}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\rho^4} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) - \left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \right] \sin(2\theta + \mu) + \\
& + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \left\{ K_1 \left[\frac{\alpha}{4\sqrt{15}c} \left\{ \sqrt{15} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{4} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{15} K_3 b}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) - \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) - \frac{1}{4} K_3 \right\} \sin 4\theta.
\end{aligned}$$

Из (10), (15) получим

$$\left. \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho} \right|_{\rho=2} = K_3, \quad \left. \frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} \right|_{\rho=2} = -K_3,$$

тогда для определения границы раздела упругопластической области в первом приближении будем иметь

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}} = \frac{1}{2K_3}(\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \rho_s^{(I)} = \frac{1}{2K_3} & \left\{ R' \left(\frac{c}{2} \left(\frac{17\sqrt{3}}{16} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) + \frac{13}{16} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{2}{c} \right) \right) + \right. \\ & \left. + 1 \frac{3}{16} \right) \cos(2\theta + \mu) + \frac{1}{32} \left\{ K_1 \left[\frac{33\alpha}{\sqrt{15}c} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{c}{\alpha} \right) + 3 \frac{1}{8} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{33K_3b}{16} \left(7 \cos \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) + \sqrt{15} \sin \left(\sqrt{15} \ln \frac{2}{b} \right) \right) + 3 \frac{1}{8} K_3 \right\} \cos 4\theta \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической (19) и упругой (27) областях полностью определено, изменение границы раздела упругой и пластической областей определяется из соотношения (28).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Фоминых С. О. Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 201–216.
- [3] Леденев А. П. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из анизотропного идеальнопластического материала // Вестник ЧПГУ им. И. Я. Яковлева. 2006. № 2(49). С. 16–21.
- [4] Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии // ПММ. 1959. № 6.
- [5] Иванова С. В. Упругопластическое состояние толстой плиты из анизотропного сжимаемого материала, ослабленной отверстием под действием растягивающих усилий // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2(66). С. 46–56.

S. O. Fominykh, G. E. Chekmarev

**ON THE EFFECT OF VARIOUS TYPES OF ANISOTROPY
ON THE ELASTOPLASTIC STATE OF A THREE-LAYER PIPE**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. In this work, we study the elastoplastic state of a pipe containing three layers, each of which has individual anisotropy properties. The pipe is under internal pressure.

Keywords: anisotropy, transmitting anisotropy, a pipe, pressure, plasticity.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. The perturbation method in the theory of elastoplastic body. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (In Russian).
- [2] Fominykh S. O. Elastic-plastic state of a thick-walled pipe in the interaction of various types of plastic anisotropy // Bulletin of the ChGPU named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2011. no. 1(9). P. 201–216. (In Russian).
- [3] Ledenev A. P. On the elastic-plastic state of a thick-walled pipe made of an anisotropic ideal-plastic material // Bulletin of the ChGPU named after I. Ya. Yakovlev. 2006. no. 2(49). P. 16–21. (In Russian).
- [4] Ivlev D. D. On the theory of ideal plastic anisotropy // PMM. 1959. no. 6. (In Russian).
- [5] Ivanova S. V. Elastic-plastic state of a thick plate made of anisotropic compressible material weakened by a hole under the action of tensile forces // Bulletin of the ChGPU named after I. Ya. Yakovlev. 2010. no. 2(66). P. 46–56. (In Russian).

Fominykh Svetlana Olegovna, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary; Russia.

Chekmarev George Evgenievich, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary; Russia.

В. Н. Орлов, М. В. Гасанов

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО
ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СЕДЬМОЙ
СТЕПЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ**

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей статье дано развитие варианта доказательства теоремы существования и единственности решения рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений, характерной особенностью которых является наличие подвижных особых точек. Представленное доказательство позволяет построить аналитическое приближенное решение, получить его априорные оценки. Апостериорная оценка позволяет оптимизировать априорную оценку. Теоретический материал протестирован с помощью численного эксперимента.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки, аналитическое приближенное решение, априорная оценка погрешности.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.011

УДК: 539.374

Нелинейные дифференциальные уравнения имеют широкое применение в разных областях науки и техники, а именно: исследование процесса теплопередачи в случае нелинейного уравнения при установившемся режиме [1], теория эволюционных процессов [2, 3, 4], теория устойчивости элементов строительных сооружений и анализ живучести (жизнестойкости) зданий [5, 6, 7], градостроительства [8, 9, 10, 11, 12, 13], исследование волновых процессов в колебаниях балки [14]. В частности, в работе [14] рассматривается задача о существовании и единственности решения для уравнения третьего порядка в неявном виде

$$f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

$$u(0) = u'(0) = u'(1) = 0, \quad (2)$$

© Орлов В. Н., Гасанов М. В., 2020
Орлов Виктор Николаевич
e-mail: OrlovVN@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.
Гасанов Магомедюсуф Владимирович
e-mail: vonasag6991@mail.ru, магистр, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 20.01.2020

где используется метод нижних и верхних решений. Неявная структура уравнения (1) предполагает как линейный, так и нелинейный случаи уравнений. В нелинейном случае метод, предлагаемый в работе [14], может быть реализован, но для этого необходимо иметь верхние и нижние решения, а это непростая задача. Сложность обуславливается тем, что в данной работе [14] не обсуждается специфика нелинейного дифференциального уравнения, связанная с наличием подвижной особой точки.

В данной работе развивается технология модификации метода мажорант, предложенная в работах [15, 16], успешно реализуемая для других классов уравнений [17].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$Y''' = a_7(x)Y^7 + a_6(x)Y^6 + a_5(x)Y^5 + a_4(x)Y^4 + a_3(x)Y^3 + a_2(x)Y^2 + a_1(x)Y + a_0(x), \quad (3)$$

которое с помощью замены переменной

$$Y = Cu(x) - \frac{C^6 a_6(x)}{7} \quad (4)$$

приводится к нормальной форме

$$u'''(x) = u^7(x) + r(x), \quad (5)$$

при этом

$$\begin{cases} a_7(x) = \frac{1}{C^6}, & a_5(x) = \frac{3C^6 a_6^2(x)}{7}, & a_4(x) = \frac{5C^{12} a_6^3(x)}{49}, \\ a_3(x) = \frac{5C^{18} a_6^4(x)}{343}, & a_2(x) = \frac{3C^{24} a_6^5(x)}{2401}, & a_1(x) = \frac{C^{30} a_6^6(x)}{16807}, \\ r(x) = -\frac{C^{36} a_6^7(x)}{7^7} + \frac{C^6 a_6'''(x)}{7} + a_0(x). \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$Y''' = Y^7 + r(x), \quad (7)$$

$$Y(x_0) = y_0, \quad Y'(x_0) = y_1, \quad Y''(x_0) = y_2. \quad (8)$$

Теорема 3. Пусть

1) x^* — подвижная особая точка решения задачи Коши (7)–(8);

2) $r(x) \in C^\infty$ в области $|x^* - x| < \rho_1$, где $0 < \rho_1 = \text{const}$;

3) $\exists M_n : \frac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!} \leq M_n$, $M_n = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

тогда существует единственное решение задачи Коши (7)–(8), представимое в виде

$$Y(x) = (x^* - x)^{-\frac{1}{2}} \sum_0^\infty C_n (x^* - x)^{\frac{n}{2}}, \quad (9)$$

в области

$$|x^* - x| < \rho_2, \quad (10)$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{(M+1)^4} \right\}, \quad M = \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Строим решение уравнения (7) в окрестности подвижной особой точки в виде

$$Y(x) = (x^* - x)^\rho \sum_0^\infty C_n (x^* - x)^n, \quad C_0 \neq 0. \quad (11)$$

По условию теоремы $r(x)$ раскладывается в ряд

$$r(x) = \sum_0^\infty A_n (x^* - x)^n. \quad (12)$$

Подставив (11) и (12) в уравнение (7), получаем

$$\begin{aligned} & - \sum_0^\infty C_n (x^* - x)^{n+\rho-3} (n+\rho)(n+\rho-1)(n+p-2) = \\ & = (x-x^*)^{7\rho} \sum_0^\infty C_n^{****} (x^* - x)^n + \sum_0^\infty A_n (x^* - x)^n, \end{aligned}$$

где

$$C_n^{****} = \sum_{i=0}^n C_i C_j^{***}, \quad C_n^{***} = \sum_{i=0}^n C_i^* C_j^{**}, \quad C_n^{**} = \sum_{i=0}^n C_i^* C_j^*, \quad C_n^* = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}.$$

Из последнего соотношения следует необходимость выполнения следующих условий:

- 1) $n + \rho - 3 = n + 7\rho$;
 - 2) $-(n-1)(n-3)(n-5)C_n = 8 \left(C_n^{****} + A_{\frac{n-7}{2}} \right)$ при $n = 2k + 1$, $k = 3, 4, \dots$;
 - 3) $-(n-1)(n-3)(n-5)C_n = 8C_n^{***}$ при $n = 2k$, $k = 0, 1, \dots$
- и при $n = 1, 3, 5$.

Из первого равенства следует что $\rho = -1/2$. Второе и третье равенство представляют собой рекуррентные соотношения, с помощью которых можно однозначно определить все коэффициенты C_n :

$$C_0 = \pm \sqrt[6]{\frac{15}{8}}, \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0,$$

$$C_7 = -\frac{8A_0}{153}, \quad C_8 = 0, \quad C_9 = -\frac{8A_1}{297}, \quad \dots$$

В силу однозначности коэффициентов C_n следует единственность формального решения. Выражения коэффициентов C_n были получены с помощью математического пакета Maple.

Анализ выражения коэффициентов C_n предполагает структуру оценок для коэффициентов C_n :

$$\begin{aligned} |C_{3k}| & \leq \frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k-1)(3k-3)(3k-5)} = E_{3k}, \\ |C_{3k+1}| & \leq \frac{8M(M+1)^{6k}}{3k(3k-2)(3k-4)} = E_{3k+1}, \\ |C_{3k+2}| & \leq \frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k+1)(3k-1)(3k-3)} = E_{3k+2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$M = \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Методом математической индукции докажем справедливость оценок (14). Ограничимся случаем оценки C_{3k} . Положим $k = 2q + 1$, $q = 0, 1, 2, \dots$. Тогда с учетом (13) и (14) имеем

$$\begin{aligned} |C_{3k+3}| &= \left| \frac{8}{(3k+2)3k(3k-2)} \left(C_{3k+3}^{****} + A_{\frac{3k-4}{2}} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{(3k+2)3k(3k-2)} \left(\sum_{i=0}^k C_i \left(\sum_{j=0}^{k-i} C_j^* \left(\sum_{l=0}^{k-i-j} C_l^* \left(\sum_{m=0}^{k-i-j-l} C_m C_{k-i-j-l-m} \right) \right) \right) + A_{\frac{3k-4}{2}} \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{8}{(3k+2)3k(3k-2)} \left(\sum_{i=0}^k \frac{M(M+1)^{6i}}{(3i+2)3i^*(3i-2)} \left(\sum_{j=0}^{k-i} \frac{M(M+1)^{6j}}{(3j+2)3j^*(3j-2)} \times \right. \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{l=0}^{k-i-j} \frac{M(M+1)^{6l}}{(3l+2)3l^*(3l-2)} \left(\sum_{m=0}^{k-i-j-l} \frac{M(M+1)^{6m}}{(3m+2)3m^*(3m-2)} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. \frac{M(M+1)^{6(k-i-j-l-m)}}{(3(k-i-j-l-m)+2)3(k-i-j-l-m)^*(3(k-i-j-l-m)-2)} \right) \right) \right) + M \right) \leq \\ &\leq \frac{8M^5(M+1)^{6k}}{(3k+2)3k(3k-2)} \sum_{i=0}^k \frac{1}{(3i+2)3i^*(3i-2)} \left(\sum_{j=0}^{k-i} \frac{1}{(3j+2)3j^*(3j-2)} \times \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{l=0}^{k-i-j} \frac{1}{(3l+2)3l^*(3l-2)} \left(\sum_{m=0}^{k-i-j-l} \frac{1}{(3m+2)3m^*(3m-2)} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. \frac{1}{(3(k-i-j-l-m)+2)3(k-i-j-l-m)^*(3(k-i-j-l-m)-2)} \right) \right) \right) + M \leq \\ &\leq \frac{8M^5(M+1)^{6k}}{(3k+2)3k(3k-2)} + M \leq \frac{8M(M+1)^{6k+6}}{(3k+2)3k(3k-2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} i^* &= \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0, \\ i, & \text{если } i \neq 0, \end{cases} & j^* &= \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, \\ j, & \text{если } j \neq 0, \end{cases} & l^* &= \begin{cases} 1, & \text{если } l = 0, \\ l, & \text{если } l \neq 0, \end{cases} \\ m^* &= \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ m, & \text{если } m \neq 0, \end{cases} \\ (k-i-j-l-m)^* &= \begin{cases} 1, & \text{если } m = k-i-j-l, \\ (k-i-j-l-m), & \text{если } m \neq k-i-j-l. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости оценок для остальных случаев C_{3k+1} и C_{3k+2} .

Рассмотрим ряд

$$\sum_1^{\infty} E_n(x^* - x)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (15)$$

который в силу (14) является мажорирующим для ряда

$$\sum_1^{\infty} C_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (16)$$

В силу закономерности коэффициентов рядов (15) и (16) представим ряд (15) в виде

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} E_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} &= \sum_1^{\infty} E_{3k} (x^* - x)^{\frac{3k-1}{2}} + \\ &+ \sum_1^{\infty} E_{3k+1} (x^* - x)^{\frac{3k}{2}} + \sum_1^{\infty} E_{3k+2} (x^* - x)^{\frac{3k+1}{2}}. \end{aligned}$$

Для каждого ряда в правой части последнего равенства, с учетом оценок (14), по признаку Даламбера имеем область сходимости

$$|x^* - x| < \left(\frac{1}{(M+1)^6} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{(M+1)^4}. \quad (17)$$

Таким образом, получаем область сходимости правильной части ряда (11):

$$|x^* - x| < \rho_2,$$

где $\rho_2 = \min \{ \rho_1, 1/(M+1)^4 \}$. \square

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение в виде

$$Y_N(x) = (x^* - x)^{-\frac{1}{2}} \sum_0^N C_n (x^* - x)^{\frac{n}{2}}. \quad (18)$$

Теорема 4. Пусть выполняются пункты 2 и 3 теоремы 1 и x^* является подвижной особой точкой решения задачи (7)–(8), тогда для аналитического приближенного решения (18) в области

$$|x^* - x| < \rho_2, \quad (19)$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta Y_N(x) = |Y(x) - Y_N(x)| = \Delta, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1 - (M+1)^6 |x^* - x|^{\frac{3}{2}}} |x^* - x|^{\frac{N}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^* - x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^* - x|}{(N+2)N(N-2)} \right) \end{aligned}$$

в случае $N+1 = 3k$,

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{8M(M+1)^{2N}}{1 - (M+1)^6 |x^* - x|^{\frac{3}{2}}} |x^* - x|^{\frac{N}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^* - x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^* - x|}{(N+2)N(N-2)} \right) \end{aligned}$$

для варианта $N + 1 = 3k + 1$, и

$$\Delta \leq \frac{8M(M+1)^{2(N-1)}}{1 - (M+1)^6 |x^* - x|^{\frac{3}{2}}} |x^* - x|^{\frac{N}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^* - x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^* - x|}{(N+2)N(N-2)} \right)$$

для $N + 1 = 3k + 2$, где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{(M+1)^4} \right\}, \quad M = \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(x^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad N > 5.$$

Доказательство. Докажем теорему с учетом случая $N + 1 = 3k$. Распишем $\Delta Y_N(x)$:

$$\Delta Y_N(x) = |Y(x) - Y_N(x)| =$$

$$= \left| \sum_0^{\infty} C_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_0^N C_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} \right| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} \right|.$$

Учитывая закономерность в оценках коэффициентов C_n , из теоремы 1 получаем:

$$\Delta Y_N(x) = \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} \right| \leq \sum_{N+1}^{\infty} |C_n| \cdot |x^* - x|^{\frac{n-1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{N+1}^{\infty} E_{3k} |x^* - x|^{\frac{3k-1}{2}} + \sum_{N+1}^{\infty} E_{3k+1} |x^* - x|^{\frac{3k}{2}} + \sum_{N+1}^{\infty} E_{3k+2} |x^* - x|^{\frac{3k+1}{2}} =$$

$$= \sum_{N+1}^{\infty} \frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k-1)(3k-3)(3k-5)} |x^* - x|^{\frac{3k-1}{2}} +$$

$$+ \sum_{N+1}^{\infty} \frac{8M(M+1)^{6k}}{3k(3k-2)(3k-4)} |x^* - x|^{\frac{3k}{2}} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{8M(M+1)^{6k}}{(3k+1)(3k-1)(3k-3)} |x^* - x|^{\frac{3k+1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{8M(M+1)^{6k}}{1 - (M+1)^6 |x^* - x|^{\frac{3}{2}}} |x^* - x|^{\frac{3k-1}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(3k-1)(3k-3)(3k-5)} + \frac{|x^* - x|^{\frac{1}{2}}}{3k(3k-2)(3k-4)} + \frac{|x^* - x|}{(3k+1)(3k-1)(3k-3)} \right) =$$

$$= \frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1 - (M+1)^6 |x^* - x|^{\frac{3}{2}}} |x^* - x|^{\frac{N}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|x^* - x|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \frac{|x^* - x|}{(N+2)N(N-2)} \right).$$

Аналогичным образом получаем выражения для Δ в случаях $N + 1 = 3k + 1$, $N + 1 = 3k + 2$. Полученные оценки в соответствии с условиями теоремы справедливы в области (19). \square

Пример. Рассмотрим задачу Коши (7)–(8), где $r(x) \equiv 0$, $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 1$, $Y''(0) = 1$, $x^* = 0,9295$. Результаты расчетов для задачи Коши (7)–(8) представлены в

табл. 1, в которой $Y_8(x_1)$ — аналитически приближенное решение (17); Δ_1 — априорная оценка; Δ_2 — апостериорная оценка.

Таблица 1. Числовые характеристики аналитически приближенного решения

x_1	$Y_8(x_1)$	Δ_1	Δ_2
0,9	6,457	0,04	0,007

Для $\Delta_2 = 0,007$ по теореме 2 определяем $N = 15$. Слагаемые с 9 по 15 в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon = 0,007$, следовательно, в структуре аналитически приближенного решения можно ограничиться $N = 8$, при котором решение $Y_8(x_1)$ будет иметь погрешность $\varepsilon = 0,007$.

Вывод. В работе доказана теорема существования и единственности решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки, получены оценки для коэффициентов разложения в ряд. На основании доказанной теоремы построено аналитическое приближенное решение в окрестности подвижной особой точки, получена априорная оценка погрешности. Применение апостериорной оценки позволяет оптимизировать априорную оценку. Результаты протестированы с помощью численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Axford R. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. (LA-4514, UC-34).
- [2] Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. Vol. 61, no. 1 (July). P. 31–53. DOI: <https://doi.org/10.1002/sapm197961131>.
- [3] Ablowitz M. I. Exact linearization of a Painleve transcendent // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, no. 20. P. 1103–1106. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.1103.
- [4] Грамак В. И. О решении второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 753–763.
- [5] Kovalchuk O. A. Simulation of the State of the Rod Elements of the Building Construction // Procedia Engineering. 2016. Vol. 153, no. 2. P. 304–309. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.120.
- [6] Ковальчук О. А. Устойчивость стержневых элементов строительных конструкций // Журнал ПГС. 2014. № 11. С. 53–54.
- [7] Ковальчук О. А. О расчете зданий с ядрами жесткости // Естественные и технические науки. 2015. № 3(81). С. 238–240.
- [8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures (WoS) // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
- [9] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity (Scopus) / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
- [10] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS) // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. 012122 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
- [11] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. 2019. Vol. 97. 03031, XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031>.
- [12] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) // Modelling and Methods of Structural

- Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. 012127 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012127.
- [13] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. 012129 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
- [14] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514. DOI: 10.1016/j.camwa.2008.05.021.
- [15] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. Москва: МПГУ, 2013. 174 с.
- [16] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 4(35). С. 23–32.
- [17] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестник Самарского гос. техн. университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. С. 23–32. DOI: 10.14498/vsgtu1727.

V. N. Orlov, M. V. Gasanov

**EXISTENCE THEOREM FOR A SOLUTION OF A CLASS OF THIRD ORDER
NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL RIGHT
HAND SIDE OF THE SEVENTH DEGREE IN A VICINITY OF A MOVABLE
SINGULAR POINT**

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. This article gives the development of a version of the proof of the existence and uniqueness theorem for the solution of the class of nonlinear differential equations under consideration whose characteristic feature is the presence of movable singular points. The presented proof allows us to construct an analytical approximate solution and obtain its a priori estimates. A posteriori estimation allows to optimize a priori estimation. The theoretical material is tested using a numerical experiment.

Keywords: nonlinear differential equations, method Koshe, majorant method, moving singular point, analytically approximate solution, a priori error estimate.

REFERENCES

- [1] Axford R. A. Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. (LA-4514, UC-34).
- [2] Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. Vol. 61, no. 1 (July). P. 31–53. DOI: <https://doi.org/10.1002/sapm197961131>.
- [3] Ablowitz M. I. Exact linearization of a Painleve transcendent // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, no. 20. P. 1103–1106. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.1103.
- [4] Gromak V. I. On the solution of the second Painlevé equation // Differ. Equations. 1982. Vol. 18, no. 5. P. 753–763. (In Russian).

Viktor Nikolaevich Orlov, Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Gasanov Magomedysuf Vladimirovich, magister, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

-
- [5] Kovalchuk O. A. Simulation of the State of the Rod Elements of the Building Construction // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 153, no. 2. P. 304–309. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.120.
- [6] Kovalchuk O. A. Stability of rod elements of building structures // *Bulletin of the PGS*. 2014. no. 11. (In Russian).
- [7] Kovalchuk O. A. On the calculation of buildings with rigid cores // *Natural and technical Sciences*. 2015. no. 3(81). P. 238–240. (In Russian).
- [8] Orlov V. N. Method of approximate solution of the first and second differential equations of Penlevé and Abel. Moscow: MPSU, 2013. 174 p. (In Russian).
- [9] Orlov V. N. Investigation of an approximate solution of the Abel differential equation in the vicinity of a moving singular point // *Bulletin of the Bauman Moscow state technical University. Series: Natural Sciences*. 2009. no. 4(35). P. 23–32. (In Russian).
- [10] Orlov V. N., Leontieva T. Y. On the expansion of the domain for an analytical approximate solution of a class of second-order nonlinear differential equations in the complex domain // *Bulletin of the Samara State. tech. University. Ser. Phys.-mat. science*. 2020. Vol. 24. P. 23–32. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1727.
- [11] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures (WoS) // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 365. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
- [12] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity (Scopus) / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]*. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
- [13] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points (WoS) // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 456. 012122 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
- [14] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // *E3S Web Conf*. 2019. Vol. 97. 03031, XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031>.
- [15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) // *Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics*. 2020. 012127 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012127.
- [16] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) // *Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics*. 2020. 012129 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
- [17] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. no. 56. P. 2507–2514. DOI: 10.1016/j.camwa.2008.05.021.

Р. И. Непершин

ПЛАСТИЧЕСКОЕ СДАВЛИВАНИЕ ЦИЛИНДРА ПЛОСКИМИ ШТАМПАМИ

*Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,
г. Москва, Россия*

Аннотация. Приведено численное моделирование пластического сдавливания цилиндра плоскими штампами по нормали к его оси на основе теории плоской деформации жестко-пластического тела. Рассматриваются начальная пластическая деформация с выдавливанием материала на свободную поверхность цилиндра, переходящая в пластическое деформирование высокой заготовки и пластического слоя с конечным отношением длины контакта к толщине. Используются линии скольжения и скорости пластического течения по Прандтлю при изменении формы деформируемого сечения цилиндра с учетом контактного трения при сдавливании пластического слоя. Моделирование представляет практический интерес для оценки предельной нагрузки при контактной деформации цилиндра плоскими штампами и деформировании заготовки при ковке плоскими бойками.

Ключевые слова: сдавливание цилиндра, плоский штамп, идеальная пластичность, плоская деформация, линии скольжения, контактное давление, скорости течения, контактное трение, предельная нагрузка, ковка плоскими бойками.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.012

УДК: 539.374

Введение. Анализ пластического деформирования цилиндра при сдавливании плоскими штампами по нормали к его оси при плоской деформации представляет практический интерес для оценки предельной нагрузки при контактном пластическом течении и для моделирования формоизменения цилиндрической заготовки при ковке плоскими бойками [1, 2, 3]. В работах о давлении плоского штампа на срез выпуклой заготовки при плоской деформации [1, 2] рассчитывались линии скольжения и напряженное состояние решением задачи Коши от выпуклого криволинейного контура, задачи Гурса с вырожденной сингулярной точкой и задачи смешанного типа на границе штампа без рассмотрения поля скоростей. Поле скоростей с кинематическими граничными условиями на границе штампа и на жесткопластической границе показывает отрицательные значения диссипативной функции пластического течения

© Непершин Р. И., 2020

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin_r_i@rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, г. Москва, Россия.

Поступила 01.02.2020

в области задачи Коши с выпуклой свободной границей и в области смешанной задачи на границе контакта пластической области со штампом. Решение задачи с выпуклой пластической областью, удовлетворяющее условию пластичности и граничным условиям для напряжений, является статически возможным, и на основании экстремальных теорем идеальной пластичности [4] приводит к нижней оценке предельной нагрузки.

В задачах о вдавлении жесткого клина и выпуклого штампа с выпуклой границей полупространства [5, 6, 7] сегмент свободной жесткой области ограничен прямолинейной свободной границей задачи Коши, что приводит к полному решению для напряжений и скоростей при неотрицательной диссипативной функции в пластической области. Аналогичная ситуация имеет место при сдавливании заготовки плоскими бойками с конечным отношением длины контакта к толщине, при свободных выдавливаемых концах с криволинейной границей, которые связаны с прямолинейной боковой границей пластической области [8], что приводит к полному решению для напряжений и скоростей при плоской деформации.

В настоящей работе представлено численное моделирование трех стадий сдавливания жесткопластического цилиндра плоскими штампами при плоской деформации.

На первой стадии рассматривается нестационарный процесс вдавливания плоского штампа с образованием сегмента свободной жесткой области с криволинейной границей над прямолинейной границей пластической области. Граница свободной жесткой области вычисляется численным методом с использованием поля линий скольжения и годографа скоростей по Прандтлю для полупространства с криволинейной границей [5, 6, 7].

Вторая стадия сдавливания моделируется пластическим течением с отношением толщины плоского участка заготовки к длине границы контакта больше единицы с использованием линий скольжения и годографа скоростей по Прандтлю. Начало второй стадии определяется равенством контактного давления на второй стадии с давлением в конце первой стадии, после которого давление на штамп снижается по сравнению с первой стадией. Пластическая область возникает в центральной части заготовки между штампами при горизонтальном смещении жестких зон без изменения формы внешней границы.

На третьей стадии происходит пластическое течение с уменьшением толщины заготовки и увеличением длины границы контакта и давления на штампы, которое моделируется линиями скольжения и годографом скоростей при конечном отношении длины границы контакта к толщине заготовки больше единицы [2, 3, 8].

Линии скольжения ξ , η и скорости V_ξ , V_η на второй и третьей стадиях выполнены с использованием численных процедур [9] решения дифференциальных уравнений плоской деформации жесткопластического тела [10]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \text{ для } \xi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi \text{ для } \eta \quad (1)$$

с дифференциальными соотношениями Генки и Гейрингер

$$d\sigma - d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta, \quad (2)$$

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta, \quad (3)$$

где φ — угол наклона касательной к линии скольжения ξ с осью x ; σ — безразмерное среднее напряжение, отнесенное к удвоенной пластической постоянной $2k = 1$. Напряжения и скорости пластического течения в декартовых координатах при известных

значениях σ , φ , V_ξ , V_η определяются формулами

$$\sigma_x = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad (4)$$

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi. \quad (5)$$

Формулы (5) используются для отображения сетки линий скольжения на плоскость годографа скоростей V_x , V_y .

Приводимые ниже расчеты деформируемой формы сечения цилиндра, линий скольжения и годографов скоростей автоматизированы программами на ФОРТРАНе с графическими процедурами вывода результатов расчета на экран монитора [11].

Первая стадия деформирования цилиндра. На рис. 1 показаны линии скольжения и годограф скоростей в пластической области по Прандтлю на первой стадии деформирования цилиндра плоскими штампами. Радиус цилиндра принимаем за единицу длины. Вследствие симметрии рассматриваем сечение цилиндра в первом квадранте декартовых координат x , y с центром O .

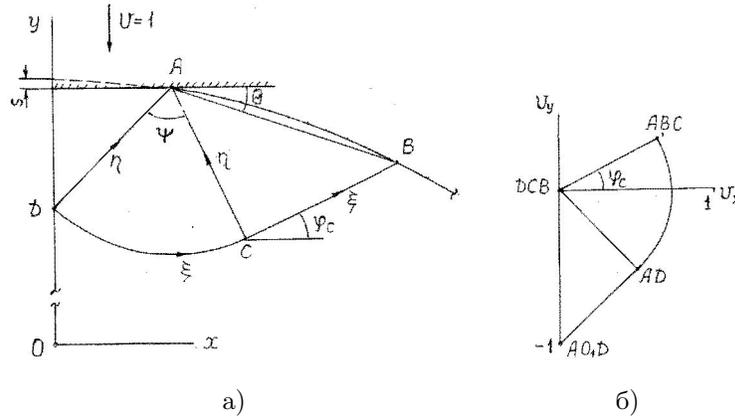


Рис. 1. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на первой стадии пластического сдавливания цилиндра

Уравнение недеформированной круговой границы цилиндра представим в параметрической форме:

$$x = \sin \alpha, \quad y = \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad (6)$$

где α — угол между нормалью в точке границы сечения и осью y .

При перемещении s штампа относительно начальной точки контакта при $\alpha = 0$ образуется граница контакта с полудлиной a и происходит выдавливание материала с криволинейной внешней границей AB при расширении пластической области $ABCD$ по Прандтлю (рис. 1а). На границе контакта образуется жесткая область ADO_1 , перемещающаяся со скоростью штампа $V_y = -1$. Прямолинейная граница AB длиной $2a$ с углом наклона θ определяет однородное напряженное состояние $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma = -0,5$ в области ABC . Угол ψ вера η линий скольжения в точке A и угол φ наклона ξ линий скольжения в области ABC определяются формулами

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} - \theta. \quad (7)$$

Давление q_1 на штамп находим из первого уравнения (2) для ξ линии скольжения CD при $\varphi = \pi/4 - \theta$, $\sigma = -0,5$ в точке C и из второго уравнения (4) находим $q_1 = -\sigma y$:

$$q_1 = 1 + \frac{\pi}{2} - \theta. \quad (8)$$

Годограф скоростей (рис. 1б) определяется двумя разрывами скорости $[V] = 1/\sqrt{2}$ в точке D вдоль η и ξ линий скольжения и ортогональным отображением на плоскости годографа круговой линии скольжения CD на рис. 1а дугой окружности с радиусом $1/\sqrt{2}$ с центральным углом ψ . Область ABC вместе с контуром AB свободного жесткого сегмента скользит вдоль жесткопластической границы BC со скоростью $1/\sqrt{2}$ с углом наклона $\varphi = \pi/4 - \theta$:

$$V_x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)/\sqrt{2}, \quad V_y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)/\sqrt{2}. \quad (9)$$

Скорости (9) определяют смещение криволинейного контура AB при вдавливании штампа.

Полудлина границы контакта a при перемещении штампа s определяется точкой A пересечения прямой $y = 1 - s$ с контуром AB . Координаты точки B жесткой области цилиндра определяются уравнениями (6) и связаны с s , a и углом θ уравнениями

$$a(1 + 2 \cos \theta) = \sin \alpha, \quad H - 2a \sin \theta = \cos \alpha, \quad H = 1 - s. \quad (10)$$

Исключение θ из (10) приводит к квадратному уравнению для $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{aH}{a^2 + H^2} \left[c + \sqrt{1 + \frac{H^2}{a^2}(1 - c^2)} \right], \quad c = \frac{1 + H^2 - 3a^2}{2H}. \quad (11)$$

При известных значениях s и a из уравнения (11) находим угол α , определяющий координаты точки B , из уравнений (10) находим угол θ , по уравнениям (8) и (9) находим давление q_1 и смещения координат точек контура AB при малом перемещении штампа Δs :

$$\Delta x = \Delta s V_x, \quad \Delta y = \Delta s V_y. \quad (12)$$

При $s \rightarrow 0$ пластическая область стягивается в точку контакта $y = 1$, $x = 0$ при $a, \alpha, \theta \rightarrow 0$ и $q_1 \rightarrow 1 + \pi/2$ — давление плоского штампа Прандтля на пластическое полупространство с горизонтальной границей.

В модели Прандтля пластическая область не зависит от контактного трения вследствие отсутствия пластического скольжения на границе штампа. Для пластического полупространства с горизонтальной границей возможна модель Хилла, при пластическом скольжении по границе идеально гладкого штампа с контактным давлением $1 + \pi/2$. В этой модели длина свободной границы AB равна полудлине штампа a . Для гладкого штампа по Хиллу в случае круговой границы полупространства можно вычислить угол наклона θ границы AB , который будет меньше угла θ для штампа Прандтля и приводит к большей величине контактного давления q_1 . Поэтому в настоящей работе используется модель Прандтля, приводящая к меньшей предельной нагрузке при сдавливании цилиндра.

Криволинейный контур AB , параметры пластической области a , α , θ и давление q_1 вычисляем по следующему алгоритму:

1) начальную пластическую область при вдавливании штампа $s_0 \ll 1$ определяем для круговой границы AB вследствие малой площади, выдавливаемой через свободную границу цилиндра;

2) начальную полудлину границы контакта штампа определяем точкой пересечения с круговой границей $a_0 = \alpha_0$ при заданном значении $\alpha_0 \ll 1$ и $s_0 = 1 - \cos \alpha_0$;

3) находим угол $a = 3\alpha_0$, определяющий точку B , из уравнения (11) при $\sin a = a$ и $H = 1$;

4) находим угол $\theta = 2\alpha_0$ из второго уравнения (10) при $\cos \theta = \cos 3\alpha_0$ и $\sin \theta = \theta$;

5) находим значение $q_1 = 1 + \pi/2 - 2\alpha_0$ из уравнения (8);

6) задаем приращение перемещения штампа $\Delta s = k s_0$, $k < 1$;

7) вычисляем перемещение точки A и полудлину границы контакта a при $s = s_0 + \Delta s$ по первым уравнениям (9) и (12):

$$a = a_0 + \Delta s \cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2};$$

8) вычисляем координаты первой смещенной точки B по уравнениям (9) и (12):

$$x_1 = \sin a + \Delta s \cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2}, \quad y_1 = \cos \alpha + \Delta s \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2};$$

9) вычисляем новый угол α по уравнению (11) для новых значений a , $H = 1 - s$ и координаты x , y точки B на недеформированной границе цилиндра;

10) из второго уравнения (10) находим угол θ и из уравнения (8) — давление q_1 на границе контакта с полудлиной a .

В результате вычислений при первом смещении Δs границы штампа от начального значения s_0 получаем три точки криволинейного контура AB и расширение пластической области с увеличенной полудлиной контакта a . При дальнейшем увеличении s с шагом Δs от предыдущего значения s_0 полудлина контакта a определяется координатой x_A точки пересечения линии $y_A = H = 1 - (s_0 + \Delta s)$ с контуром AB , которая вычисляется линейной интерполяцией между точками контура i и $i + 1$ и смещением по оси x :

$$x_A = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)(H - y_i)}{y_{i+1} - y_i} \quad \text{при} \quad y_{i+1} \leq H \leq y_i, \quad (13)$$

$$a = x_A + \Delta s \cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) / \sqrt{2} \quad (14)$$

с использованием известного угла θ_0 для линий скольжения при перемещении s_0 . Затем выполняются расчеты значений α , θ , q_1 для смещенной границы контакта по значениям a и H ; вычисляются координаты смещенных точек контура AB :

$$x_i = x_{i0} + \Delta s \cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2}, \quad y_i = y_{i0} + \Delta s \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) / \sqrt{2}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (15)$$

включая точку B с номером N . Расчеты криволинейного контура AB , деформированной формы сечения цилиндра в контактной области и давления q_1 выполняются до перехода ко второй стадии сдавливания цилиндра, определяемого неравенством $q_1 \leq q_2$, где q_2 — давление на штамп на второй стадии деформирования цилиндра по Прандтлю, снижающееся при уменьшении отношения H/a .

В табл. 1 приведены координаты точек криволинейного контура AB для начальной полудлины границы контакта $a = 0,05$ при $s_0 = 1,25 \cdot 10^{-3}$ при конечных значениях, вычисленные с шагом $\Delta s = 0,625 \cdot 10^{-3}$. На рис. 2 сплошной линией показана деформированная форма сечения в конце первой стадии сдавливания цилиндра с плоской границей контакта и криволинейным контуром AB . Начальный круговой контур сечения цилиндра показан штриховой линией. По условию пластической несжимаемости

Таблица 1. Контур AB на первой стадии сдвливания цилиндра: $s = 8,748 \cdot 10^{-3}$, $a = 0,155$, $H = 0,991$

x	y	x	y	x	y
0,188	0,986	0,266	0,966	0,357	0,935
0,206	0,982	0,287	0,960	0,384	0,924
0,226	0,977	0,309	0,953	0,416	0,910
0,245	0,972	0,332	0,945	0,449	0,893

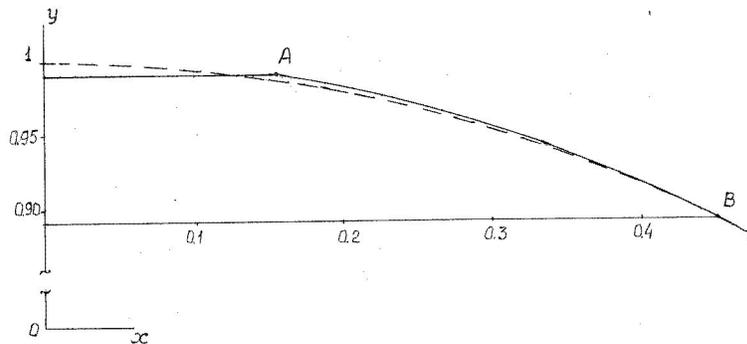


Рис. 2. Деформированная (сплошная линия) и начальная (пунктир) формы сечения при сдвливании цилиндра в конце первой стадии: $s = 8,75 \cdot 10^{-3}$, $a = 0,155$

площадь сегмента круга над границей контакта равна площади, ограниченной контуром круга и смещенного контура AB с отрезком границы контакта от пересечения с контуром круга до точки A . Смещенная площадь растянута на большой дуге начальной окружности с быстрым снижением расстояния между контуром AB и контуром круга при приближении к точке B на границе с жесткой областью. Касательная к контуру AB практически совпадает с касательной к недеформированному кругу в точке B .

В табл. 2 и на рис. 3 показано расчетное смещение контура AB по нормали к круговому контуру цилиндра в зависимости от угла α

$$f(\alpha) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1, \quad \alpha = \arctg \frac{x}{y}, \quad (16)$$

включая отрезок границы контакта от точки пересечения с круговым контуром цилиндра до точки A (рис. 1а).

В табл. 3 приведены расчетные значения полудлины границы контакта a , отношения H/a , контактного давления q_1 и погонной силы $P = 2aq_1$ на первой стадии сдвливания цилиндра в зависимости от перемещения штампов s . На рис. 4 показаны графики функций $q_1(s)$ и $P(s)$. Давление q_1 снижается до 2,25 при $s = 8,75 \cdot 10^{-3}$ и $H/a = 6,393$. При дальнейшем увеличении s и снижении отношения H/a пластическая область образуется в средней части сечения между плоскими штампами при давлении $q_2 < q_1$ и переходе ко второй стадии сдвливания цилиндра.

Вторая стадия деформирования цилиндра. На второй стадии происходит пластическая деформация цилиндра между штампами при $H/a > 1$ при снижении контактного давления по сравнению с первой стадией. Пластическое течение на второй

Таблица 2. Смещение контура AB по нормали к окружности на первой стадии сдавливания цилиндра

$f \times 10^{-3}$	α	$f \times 10^{-3}$	α	$f \times 10^{-3}$	α
0,000	0,132	3,332	0,188	1,627	0,316
0,620	0,137	3,065	0,207	1,318	0,338
1,260	0,142	2,792	0,227	1,001	0,365
1,921	0,146	2,511	0,247	0,677	0,394
2,603	0,151	2,223	0,268	0,344	0,428
3,306	0,155	1,928	0,290	0,000	0,466

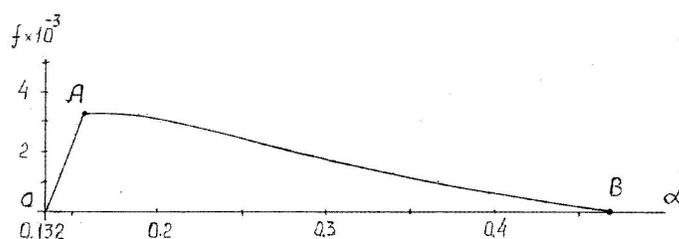


Рис. 3. Смещение контура свободной границы AB по нормали к поверхности цилиндра в зависимости от угла α в конце первой стадии сдавливания цилиндра

Таблица 3. Зависимости a , H/a , q_1 и P от s на первой стадии сдавливания цилиндра

$s \times 10^{-3}$	a	H/a	q_1	P
0,000	0,000	∞	2,571	0,000
0,450	0,030	33,3	2,511	0,150
0,900	0,042	23,4	2,485	0,212
1,250	0,050	20,0	2,471	0,247
1,875	0,062	16,2	2,447	0,312
2,500	0,068	14,7	2,436	0,331
3,124	0,075	13,4	2,424	0,362
3,749	0,081	12,2	2,410	0,393
4,374	0,089	11,2	2,396	0,414
5,000	0,096	10,4	2,380	0,457
5,624	0,104	9,58	2,364	0,491
6,249	0,112	8,87	2,346	0,526
6,874	0,121	8,21	2,326	0,563
7,498	0,131	7,58	2,304	0,603
8,123	0,142	6,97	2,278	0,649
8,748	0,155	6,39	2,250	0,698

стадии определяется полем линий скольжения Прандтля без скольжения материала в треугольной области однородного напряженного состояния на границах контакта со штампами. Линии скольжения определяются центрированным веером с углом ψ в сингулярной точке A на границе контакта и условием $\varphi = -\pi/4$ на линии симметрии с отношением H/a , зависящим от ψ .

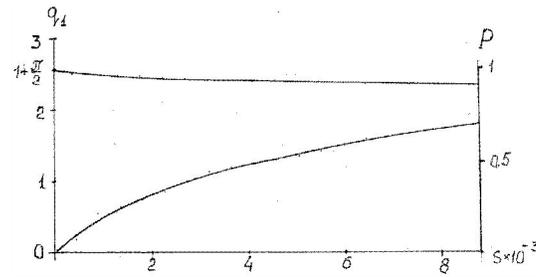


Рис. 4. Зависимости контактного давления q_1 и погонной силы P от перемещения штампа s на первой стадии сдвигания цилиндра

На рис. 5а показаны линии скольжения в координатах x_1, y_1 с началом в центре контакта с верхним штампом и полудлиной границы контакта a , принятой за единицу, для $\psi = 0,5236$ и $H = 2,441$. Статическое равновесие жесткой области при равенстве нулю горизонтальной силы определяется интегрированием напряжений по η линии скольжения $O-A$:

$$\int_0^A \left(\sigma \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) ds_\eta = 0. \quad (17)$$

Подстановка в (17) $\sigma = \sigma_0 - (\varphi - \pi/4)$ и соотношений $ds_\eta \cos \varphi = dy$, $ds_\eta \sin \varphi = -dx$ вдоль η линии скольжения приводит к уравнению для среднего напряжения σ_0 в

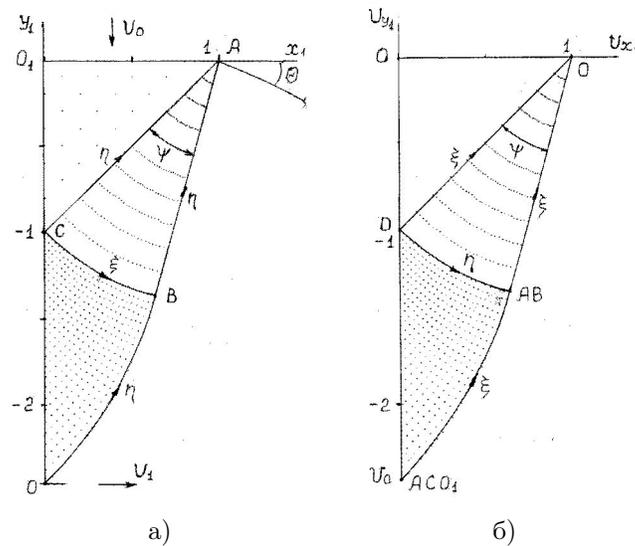


Рис. 5. Линии скольжения (а) и голограф скоростей (б) по Прандтлю на второй стадии сдвигания цилиндра

точке O :

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{4} + \left[\int_O^A \varphi dy - \frac{1}{2} \right] / H. \quad (18)$$

Среднее напряжение в точке C находим по соотношениям (2) вдоль линий скольжения OB и BC и из второго уравнения (4) находим давление q_2 на штампы:

$$\sigma_C = \sigma_0 - 2\psi, \quad q_2 = \frac{1}{2} + 2\psi - \sigma_0. \quad (19)$$

Равенство (17) выполняется при изменении знака подинтегральной функции вдоль линии скольжения $O-A$, что приводит к положительным значениям σ_0 с напряжениями растяжения σ_1 в центре сечения деформируемого цилиндра [3, 12]. Несущая способность клина жесткой области с вершиной в точке A приводит к неравенству

$$q_2 < 1 + \frac{\pi}{2} - \theta, \quad (20)$$

где θ — угол наклона касательной к оси x_1 свободной границы в точке A . При $\theta = 0$ из (15) следует ограничение давления плоского штампа на толстую заготовку по Прандтлю при отношении $H/a = 8,74$ [3, 8, 12].

При построении годографа скоростей для линий скольжения Прандтля (рис. 5б) используем условие пластической несжимаемости $V_1 = V_0 a / H$, где V_1 — скорость горизонтального перемещения жесткой области при вертикальной скорости штампа V_0 . Разрыв скорости $[V] = \sqrt{2}V_1$ в точке O (рис. 5а), направленный по касательной к η линии скольжения $O-A$, определяет отображение линии скольжения $O-A$ дугой окружности с центральным углом ψ . Скорости в области OBC отображаются на плоскости годографа криволинейными линиями скольжения, совпадающими с полем линий скольжения на рис. 5а. Диссипативная функция в области ACO_1 равна нулю и положительна в области с криволинейными линиями скольжения.

В табл. 4 приведены значения q_2 , $\sigma_1 = \sigma_0 + 1/2$ в центре сечения цилиндра и отношение H/a в зависимости от угла веера ψ в сингулярной точке A (рис. 5а), вычисленные для поля линий скольжения Прандтля. В вычислительной программе табличная функция $q_2(H/a)$ вводится файлом в исходные данные и используется в алгоритме расчета первой стадии при контроле неравенства $q_2 < q_1$ и на второй стадии при изменении отношения H/a . Если $H/a > 8,311$, то принимаем $q_2 = 1 + \pi/2$, иначе

Таблица 4. Зависимости H/a , q_2 , σ_1 от ψ на второй стадии сдавливания цилиндра для линий скольжения Прандтля

ψ	H/a	q_2	σ_1	ψ	H/a	q_2	σ_1
0,087	1,183	1,014	0,161	0,786	3,646	1,667	0,904
0,175	1,383	1,050	0,299	0,873	4,164	1,791	0,955
0,262	1,606	1,104	0,420	0,960	4,757	1,921	0,999
0,349	1,853	1,172	0,527	1,048	5,438	2,057	1,038
0,437	2,130	1,252	0,621	1,135	6,221	2,199	1,071
0,524	2,441	1,342	0,705	1,222	7,123	2,346	1,098
0,611	2,793	1,442	0,780	1,309	8,165	2,498	1,121
0,698	3,192	1,551	0,846	1,350	8,331	2,571	1,130

значение q_2 находим линейной интерполяцией в интервале $z_1 \leq z \leq z_2$, где $z = H/a$, $z_1 = (H/a)_i$, $z_2 = (H/a)_{i+1}$:

$$q_2 = f_1 + \frac{(f_2 - f_1)(z - z_1)}{z_2 - z_1}, \quad f_1 = q_{2i}, \quad f_2 = q_{2,i+1}. \quad (21)$$

Изменение формы сечения цилиндра на второй стадии сдвливания при перемещении штампа s происходит вследствие горизонтального перемещения u жесткой зоны справа от жесткопластической границы $O-A$. Условие пластической несжимаемости для скоростей перемещения штампа и жесткой области приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{ds} = \frac{x_A(s) + u}{1 - s}, \quad (22)$$

где $x_A(s) + u = a$ — полудлина переменной границы контакта, определяемая координатой точки пересечения границы контакта с внешним контуром жесткой зоны и перемещением жесткой зоны, и $1 - s = H$ — полутолщина плоского участка сечения между штампами. Начальными условиями для интегрирования уравнения (22) являются известные значения a_0 , H_0 и s_0 при $u = 0$ в конце первой стадии сдвливания цилиндра.

При переходе от первой стадии ко второй внешний контур жесткой зоны состоит из смещенного контура AB в виде табличной функции, представленной в табл. 1, и дуги окружности, определяемой уравнениями (6) при $\alpha_B \leq \alpha \leq \pi/2$, где α_B — известный угол, определяющий точку B в конце первой стадии (табл. 2). Значения $x_A(s)$ вычисляем по формуле (13) при $H = 1 - s$ с использованием табличной функции границы AB .

Уравнение (22) в интервале $s_0 < s < 1 - y_B$ интегрируем численным методом с малым приращением Δs для средних значениях a/H в правой части при $u_0 = 0$:

$$\Delta u = \Delta s \frac{a_0 + x_A(s_0)}{H_0 + H - \Delta s}, \quad a = x_A(s_0) + \Delta u, \quad u = u_0 + \Delta u. \quad (23)$$

Свободный контур жесткой области смещается на величину u по горизонтальной оси после каждого приращения Δu . На следующем шаге Δs смещенный контур жесткой области и перемещение u принимаются за начальные значения при расчетах по формулам (23).

При $s > 1 - y_B$ площадь сечения выше границы контакта переходит в пластическую область. Свободная граница жесткой зоны остается круговой с постоянным радиусом, равным единице, и смещается по оси x . На этом отрезке значений s переменные a и u определяются формулами, следующими из условия сохранения безразмерной площади сечения $\pi/4$ при круговой границе жесткой области:

$$u = \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\beta - \sin \beta \cos \beta) \right] / \sin \beta, \quad a = u + \cos \beta, \quad \beta = \arcsin H, \quad H = 1 - s. \quad (24)$$

На рис. 6 показаны профили сечения цилиндра для отношений $H/a = 6,39; 1,53$ и $1,01$. В табл. 5 приведены значения a , H/a , u , q_2 и погонной силы $P = 2aq_2$ в зависимости от s , ограниченные неравенством $H/a > 1$, при нарушении которого происходит переход к третьей стадии сдвливания цилиндра. Расчеты выполнены с шагом $\Delta s = 0,01$. Для снижения размера таблицы данные приведены с шагом $\Delta s = 0,02$.

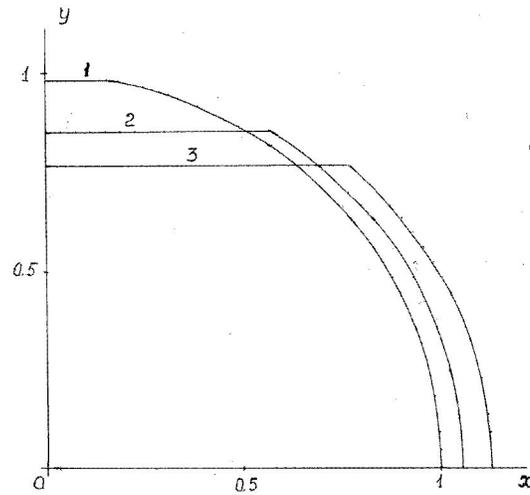


Рис. 6. Формы сечения цилиндра при сдавливании на второй стадии: 1 — переход от первой стадии ко второй, $q_1 = q_2 = 2,25$, $a = 0,155$, $H/a = 6,39$; 2 — $q_2 = 1,13$, $a = 0,563$, $H/a = 1,53$; 3 — $q_2 = 1,001$, $a = 0,576$, $H/a = 1,01$

Таблица 5. Зависимости u , a , H/a , q_2 и P от s на второй стадии сдавливания цилиндра для линий скольжения Прандтля

s	u	a	H/a	q_2	P
0,009	0,002	0,155	6,393	2,250	0,698
0,029	0,004	0,252	3,849	1,716	0,866
0,049	0,010	0,323	2,940	1,482	0,959
0,069	0,018	0,384	2,423	1,337	1,028
0,089	0,027	0,439	2,074	1,236	1,086
0,109	0,037	0,490	1,817	1,162	1,140
0,129	0,049	0,540	1,615	1,106	1,194
0,149	0,062	0,586	1,452	1,067	1,251
0,169	0,076	0,632	1,316	1,038	1,312
0,189	0,092	0,677	1,199	1,017	1,376
0,209	0,110	0,721	1,097	1,007	1,453
0,229	1,288	0,765	1,008	1,001	1,531

Третья стадия деформирования цилиндра. На третьей стадии происходит пластическая деформация между штампами при $a/h > 1$, зависящая от контактного трения по Прандтлю $0 \leq \mu \leq 0,5$, где h — полутолщина пластического слоя.

При $\mu = 0$ пластическое течение в области $x = a$, $0 \leq y \leq h$, происходит при однородном напряженном и деформированном состоянии $\sigma_x = \sigma_1 = 0$, $\sigma_y = \sigma_2 = -1$, $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = 1/h$, $\gamma_{xy} = 0$ и линейном изменении скоростей $V_x = x/h$, $V_y = -y/h$. Сегмент жесткой области с круговой границей при $x > a$ перемещается со скоростью $V_x = a/h$. Полутолщина границы контакта a и перемещение u жесткой области вычисляются по формулам (24). Толщина h пластического слоя и угол β круговой границы

уменьшаются. Длина контакта и погонная сила увеличиваются при постоянном давлении $q_3 = 1$.

При $\mu > 0$ пластическое течение определяется линиями скольжения, построенными от области однородного напряженного состояния со свободной границей $x = a$. На рис. 7а показаны линии скольжения, вычисленные при $\mu = 0,25$ и $a/h = 6,25$ от свободной границы AB , с областью ABC однородного напряженного состояния $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma = -0,5$. Контактное трение определяет угол $\gamma = \frac{1}{2} \arccos 2\mu$ наклона η линий скольжения к границе штампа $y = h$. Угол веера η линий скольжения в точке A и угол γ связаны соотношением $\psi = \pi/4 - \gamma$. На линии симметрии $y = 0$ угол наклона ξ линий скольжения $\varphi = -\pi/4$. Линии скольжения вычисляются от централизованного веера ACE численным решением последовательности задач Гурса и смешанного типа на границах $y = 0$ и $y = h$ для уравнений (1), (2) с использованием численных процедур [9]. Веер прямолинейных линий скольжения с центром A порождает области однородного напряженного состояния AEF , HMN на границе штампа и DGL , PRQ на линии симметрии $y = 0$, соединенные отрезками прямолинейных линий скольжения с областями неоднородного напряженного состояния. Линия скольжения OTS является жесткопластической границей.

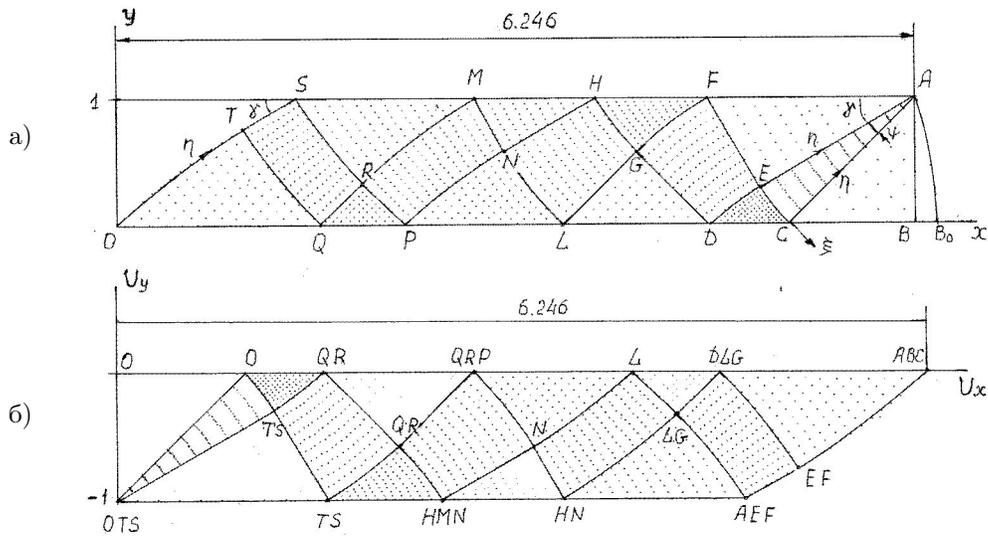


Рис. 7. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на третьей стадии сдвигания цилиндра: $\mu = 0,25$, $a/h = 6,25$

Годограф скоростей, показанный на рис. 7б, определяется разрывом скорости $[V] = \sqrt{2}$ вдоль границы OTS , который затем распространяется вдоль линий скольжения SRP , PNH , HGD и DEA с учетом непрерывности нормальной скорости $V_y = -1$ на границе $y = h$ и $V_y = 0$ на границе $y = 0$. Области однородного напряженного состояния на годографе скоростей обозначены точками с тремя символами; постоянные скорости на прямолинейных отрезках линий скольжения обозначены точками с двумя символами. Годограф скоростей на рис. 7б получается поворотом линий скольжения

на рис. 7а на угол π против хода часовой стрелки. В случае $a/h \gg 1$ и $\mu > 0$ линии скольжения и годограф скоростей стремятся к решению Прандтля для тонкого пластического слоя [2, 3, 8, 10] при $q_3 = 1 + \frac{1}{3}\mu(a/h)$.

Линии скольжения и годограф скоростей, показанные на рис. 7 для отношения $a/h = 6,25$, включают также линии скольжения и скорости для отношений $1 < a/h < 6,25$ при смещении начала координат O вдоль оси x до точки C . Если начало координат находится на отрезке CD при $1 < a/h < 1,65$, то жесткопластическая граница проходит внутри веера с углом ψ до точки A . Жесткая область распространяется по всей границе контакта при $\mu \leq 0,25$. При $a/h > 1,65$ и $\mu = 0,25$ на границе контакта появляются отрезки пластического скольжения, возрастающие до точки S при $a/h = 6,25$.

Если начало координат находится на отрезках OQ , PL и DC , то разрывы скорости вдоль линий скольжения выходят в точку A , и круговой сегмент свободной жесткой области перемещается со скоростью $V_x = a/h$ без изменения формы внешней границы. При $\mu \rightarrow 0,5$, $\gamma \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow \pi/4$ разрывы скорости в пластической области стремятся к нулю; кривизна круговой границы жесткой области не изменяется при непрерывном увеличении отношения a/h . В этих случаях переменные a , u и угол β , определяющие форму деформированного сечения с круговой границей жесткой области, вычисляются по формулам (24).

На рис. 8 показаны линии скольжения Прандтля для $\mu = 0,5$ при отсутствии скольжения по всей границе контакта при отношении $a/h = 3,642$. Это поле линий скольжения содержит предельные значения $1 < a/h < 3,642$, зависящие от $\mu = \frac{1}{2} \sin 2\psi$, $0 < \psi < \pi/4$ при отсутствии скольжения на границе контакта. В табл. 6 приведены значения u , a , a/h , среднего давления q_3 и погонной силы P в зависимости от s , рассчитанные для линий скольжения Прандтля при сохранении круговой границы жесткой области при $x > a$.

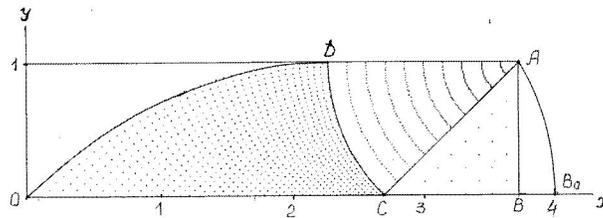


Рис. 8. Линии скольжения Прандтля на третьей стадии сдавливания цилиндра без скольжения на границе контакта: $\psi = \pi/4$, $\mu = 0,5$, $a/h = 3,64$

При отношениях a/h , превышающих предельные значения для коэффициентов трения μ , приведенных в табл. 6, возникают области с однородным напряженным состоянием на линии симметрии и на контактной границе. На рис. 9а показаны линии скольжения при $\mu = 0,25$ и $a/h = 2,760$ с границей скольжения AF и областями ADF и EGO однородного напряженного состоянием. Годограф скоростей (рис. 9б) определяется криволинейными линиями скольжения в области CDE , веером прямых линий скольжения в области ACD и разрывами скорости $\sqrt{2}$ вдоль линии скольжения OGF и $\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$ вдоль линий скольжения FDC и CA . Линии скольжения и годограф скоростей совпадают при отношениях $a/h = 1,605$ и $a/h = 2,760$.

Таблица 6. Зависимости u , a , h/a , q_3 и P от s и μ на третьей стадии сдавливания цилиндра для линий скольжения Прандтля

s	μ	u	a	a/h	q_3	P
0,255	0,052	0,157	0,825	1,108	1,005	1,658
0,280	0,104	0,186	0,879	1,221	1,019	1,793
0,304	0,154	0,216	0,934	1,341	1,041	1,945
0,327	0,203	0,249	0,989	1,469	1,069	2,114
0,350	0,250	0,284	1,044	1,605	1,103	2,303
0,372	0,294	0,321	1,099	1,750	1,143	2,512
0,394	0,334	0,360	1,155	1,905	1,186	2,741
0,414	0,371	0,402	1,213	2,071	1,234	2,993
0,435	0,404	0,446	1,271	2,249	1,286	3,269
0,455	0,433	0,492	1,330	2,440	1,342	3,570
0,474	0,457	0,541	1,392	2,645	1,401	3,898
0,493	0,475	0,593	1,454	2,867	1,463	4,255
0,511	0,489	0,647	1,519	3,105	1,528	4,642
0,528	0,497	0,704	1,586	3,363	1,596	5,061
0,546	0,500	0,764	1,655	3,642	1,666	5,516

Скорость области ABC при $a/h = 1,605$ равна $V_0 = 1,605$, и при $a/h = 2,760$ равна $V_1 = V_0 + 2 \operatorname{tg} \gamma = 2,760$. При этом область ABC и жесткая зона с границей AB перемещаются без изменения внешней границы жесткой зоны.

При отношениях $1,605 < a/h < 2,760$ разрывы скорости проходят через область ABC и примыкающую к ней жесткую область, изменяя ее внешнюю границу. На рис. 9а показаны точки F_1, F_0, F_2 на границе скольжения AF , определяющие линии скольжения при смещении начала координат O в точки O_1, O_0, O_2 . На годографе скоростей эти точки совпадают с отображениями областей однородного напряженного состояния ADF и EGO , так как для линий скольжения при отношениях $1,605 < a/h < 2,760$ годограф скоростей не изменяется. При увеличении отношения a/h от начального значения 1,605 длина скольжения l на границе контакта и отношение a/h увеличиваются до предельных значений

$$L_1 = \frac{\sqrt{2}h}{\cos \gamma}, \quad a/h = (a/h)_0 + 2 \operatorname{tg} \gamma, \quad (25)$$

где $(a/h)_0 = 1,605$ и $\gamma = 0,5236$ при $\mu = 0,25$.

При $0 < l < L_1$ разрывы скорости $\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$ вдоль ξ линий скольжения в точках границы контакта, ограниченных длиной l , проходят через область AB_0C (рис. 9а) и изменяют форму границы AB_0 жесткой области. При $0 < l < L_0$, где L_0 определяет точку F_0 и ξ линию скольжения, проходящую в точку B_0 границы AB_0 жесткой зоны

$$L_0 = \frac{\sqrt{2}h + a - x_{B_0}}{2 \cos \gamma}, \quad (26)$$

где x_{B_0} — координата x точки B_0 , разрыв скорости выходит на границу жесткой области AB_0 . Линия скольжения $F_1C_1B_1$ с разрывом скорости непрерывно смещается от точки A до линии скольжения $F_0C_0B_0$, разделяя область AB_0C на две зоны, перемещающиеся с различными скоростями. Область ниже линии разрыва, включая точку C , перемещается вдоль оси x со скоростью V_0 ; область выше линии разрыва,

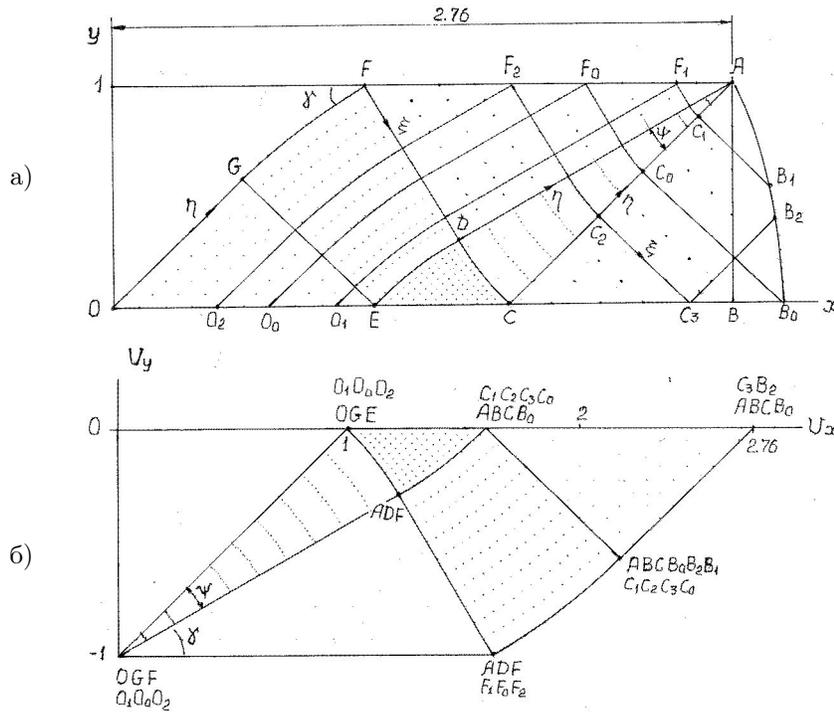


Рис. 9. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на третьей стадии сдавливания цилиндра при $\psi = 0,2618$, $\mu = 0,25$, $a/h = 2,76$ с границей скольжения AF

включая точку A , скользит относительно нижней области по линии разрыва с вектором скорости

$$V_x = V_0 + \operatorname{tg} \gamma, \quad V_y = -\operatorname{tg} \gamma. \quad (27)$$

При увеличении длины скольжения в интервале $L_0 < l < L_1$ разрыв скорости $\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$ вдоль ξ линии скольжения $F_2C_2C_3$ пересекает ось x при $x < x_{B_0}$ и переходит на η линию скольжения C_3B_2 с точкой B_2 на границе AB_0 . На этом интервале изменения l область AB_0C разделяется двумя линиями разрыва скорости C_2C_3 и C_2B_2 на три зоны с различными скоростями. Область ниже линии C_2C_3 , включая точку C , перемещается вдоль оси x со скоростью V_0 ; область выше линии C_2C_3 и слева от линии C_3B_2 , включая границу AB_2 , скользит по границе C_2C_3 с вектором скорости (27); область справа от линии C_3B_2 , включая границу B_0B_2 , перемещается по оси x со скоростью

$$V_1 = V_0 + 2 \operatorname{tg} \gamma. \quad (28)$$

При $l \rightarrow L_1$ линия скольжения C_3B_2 приближается к линии скольжения AC с разрывом скорости $\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma$, точка B_2 приближается к точке A и граница жесткой области перемещается по оси x со скоростью (28).

Длина скольжения l и a/h связаны с перемещением штампа $s > s_0$, где s_0 — предельное значение, при котором сохраняется поле линий скольжения Прандтля при заданном коэффициенте трения μ в табл. 6. Отношение $(a/h)_0$ и $l = 0$ при $s = s_0$, соответствующие этому значению μ , являются начальными условиями для функции $l(s)$

и изменения границы AB_0 вследствие разрывов скорости в жесткой области, зависящих от l . Примем $h_0 = 1$ при $s = s_0$ за характерный размер, тогда безразмерное значение $a_0 = V_0$ представляет начальную скорость перемещения жесткой области с границей AB_0 по оси x .

При малом перемещении Δs граница штампа $h = h_0 - \Delta s$ пересекает линию скольжения AD и границу AB_0 (рис. 9а). При перемещении Δs точка пересечения границы штампа $y = h$, $x = x(h)$ с границей AB_0 смещается вектором скорости (27) на $\Delta x = \Delta s(V_0 + \operatorname{tg} \gamma)$, $\Delta y = -\Delta s \operatorname{tg} \gamma$, где $\gamma = \pi/4 - \psi < \pi/4$. Смещенная точка остается на границе штампа, так как $\Delta s > |\Delta y|$. В результате перемещения Δs полудлина a границы контакта увеличивается:

$$a = x(h) + \Delta s(V_0 + \operatorname{tg} \gamma) \quad (29)$$

и около смещенной точки A появляется малая длина скольжения на границе контакта

$$\Delta l = \Delta s(V_0 + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma) + x(h) - a_0. \quad (30)$$

Уравнения (29) и (30) показывают, что отношение a/h и длина скольжения l зависят от перемещения s и от уравнения границы AB_0 , которое зависит от l вследствие перемещения линий разрыва скоростей в жесткой области.

Численное моделирование изменения границы жесткой области AB_0 , отношения a/h и длины скольжения l в зависимости от s выполнено по следующему алгоритму программы на ФОРТРАНе:

- 1) из табл. 6 по значению μ находим s_0 , u , a_0 , $(a/h)_0$ для радиуса цилиндра $R = 1$;
- 2) принимаем h_0 за единицу длины и находим $a_0 = (a/h)_0$, $V_0 = a_0$, $u = u/h_0$, $R = 1/h_0$;
- 3) вычисляем углы $\gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu)$, $\psi = \pi/4 - \gamma$, $\alpha = \arcsin(1/R)$;
- 4) начальную круговую границу AB_0 жесткой области представляем в табличном виде с шагом по углу $\Delta\alpha = a/(N-1)$, $x_i = u + R \cos \alpha_i$, $y_i = R \sin \alpha_i$, $\alpha_i = (i-1)\Delta\alpha$, $i = 1, 2, \dots, N$;
- 5) задаем шаг Δs и начальные значения $s_0 = 0$, $a = a_0$, $h_0 = 1$, $l_0 = 0$, $J = 1$;
- 6) вычисляем $s = s_0 + \Delta s$, $h = h_0 - \Delta s$ и координаты $x_A = x_{i+1} + (x_i - x_{i+1})(h - y_{i+1})/(y_i - y_{i+1})$ точки A в интервале $y_i \leq h \leq y_{i+1}$ и $N = i + 1$, если $i + 1 < N$;
- 7) вычисляем L_1 , L_0 , a , Δl по формулам (25), (26), (29), (30), $l = l_0 + \Delta l$, $x_N = a$, $y_N = h$;
- 8) вычисляем координаты точки пересечения C линий разрыва скорости с границей AB_0 жесткой области по средним значениям $\tilde{l} = \frac{1}{2}(l+l_0)$, $\tilde{a} = \frac{1}{2}(a+a_0)$: если $l < L_0$, то $x_0 = \tilde{a}$, $y_0 = h - \sqrt{2}\tilde{l} \cos \gamma$, $ID = 1$, иначе $x_0 = \tilde{l} + h - \sqrt{2}\tilde{l} \cos \gamma$, $y_0 = 0$, $ID = 2$; если $ID = 1$, то $y_C = (x_0 + y_0 - x_i + ky_i)/(1+k)$; если $ID = 2$, то $y_C = (y_0 - x_0 + x_i - ky_i)/(1-k)$, $x_C = x_i + k(y_C - y_i)$; $y_i \leq y_C \leq y_{i+1}$, $k = (x_{i+1} - x_i)/(y_{i+1} - y_i)$;
- 9) вычисляем координаты границы AB_0 : если $y_i < y_C$, то $x_i = x_{i0} + \Delta x$, $y_i = y_{i0}$, если $ID = 1$, то $\Delta x = \Delta s V_0$, если $ID = 2$, то $\Delta x = \Delta s(V_0 + 2 \operatorname{tg} \gamma)$; если $y_i > y_C$, то $x_i = x_{i0} + \Delta s(V_0 + \operatorname{tg} \gamma)$, $y_i = y_{i0} - \Delta s \operatorname{tg} \gamma$, $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$; x_{i0} , y_{i0} — координаты границы AB_0 при $s = s_0$;
- 10) запись в файл J , N , s , h , a , l и координат границы AB_0 ;
- 11) вывод на экран монитора контура сечения с границей AB_0 при заданном номере J ;
- 12) если $l < L_1$, то $s_0 = s$, $h_0 = h$, $a_0 = a$, $l_0 = l$, $J = J + 1$; переход на п. 6;
- 13) выход из программы.

При малых коэффициентах трения μ предельное отношение a/h , при котором скопление на границе контакта отсутствует, уменьшается. Дальнейшее сдавливание цилиндра происходит с возрастанием длины скольжения на большом участке границы контакта до предельного значения L_1 с возрастанием отношения a/h вследствие увеличения угла γ в уравнениях (25). Это приводит к изменению границы жесткой области AB_0 на большом участке перемещения штампа вследствие увеличения отношения a/h .

На рис. 10 показано изменение формы круговой границы цилиндра от начального отношения $a/h = 1,341$ при $\mu = 0,15$, $\gamma = 0,5236$, $\psi = 0,1571$ для линий скольжения по Прандтлю при отсутствии скольжения на границе контакта до конечного отношения $a/h = 3,041$, ограниченного предельным скольжением $L_1 = 1,187$. Расчеты выполнены для табличной функции границы AB_0 с начальным числом точек $N = 31$, $\Delta s = 0,01$ с числом шагов $J = 31$ с выводом на экран координат границы AB_0 через один шаг. Численные значения координат границы AB_0 с точностью до четырех значащих цифр, выводимые в файл на каждом шаге, занимают более 23 килобайт и не приводятся для сокращения объема статьи.

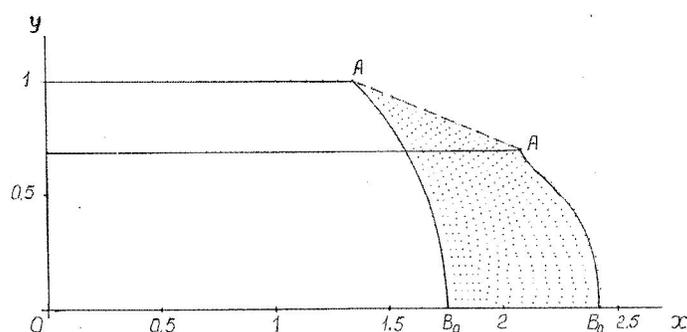


Рис. 10. Изменение формы свободной круговой границы при сдавливании цилиндра на третьей стадии от $a/h = 1,341$ до $3,041$ при $\mu = 0,15$ и скольжении $L_1 = 1,187$ на границе контакта

Из рис. 10 видно, что примерно на $1/3$ перемещения s в начале сдавливания смещаемая граница жесткой области близка к начальной круговой форме. При дальнейшем перемещении штампа происходит быстрое выпучивание границы AB_0 на участке скольжения $l > L_0$ вследствие высокой скорости жесткой области справа от линии разрыва C_3B_2 (рис. 9а) вдоль оси x . При конечном отношении a/h большая часть границы AB_0 , за исключением малого участка около границы контакта, близка к круговой, но при уменьшении радиуса кривизны до $0,6$ относительно радиуса недеформированного сечения цилиндра.

В программе расчета внешней границы жесткой области при сжатии сечения плоскими штампами от начального отношения a/h для линий скольжения по Прандтлю предусмотрено введение в исходные данные начальной границы жесткой области различной формы. На практике обычно принимают прямолинейную вертикальную границу AB , свободную от внешних напряжений, без примыкающей к ней жесткой области без нагрузки. На рис. 11 показан пример расчета в случае прямолинейной начальной границы AB при сдавливании пластического слоя с начальным отношением

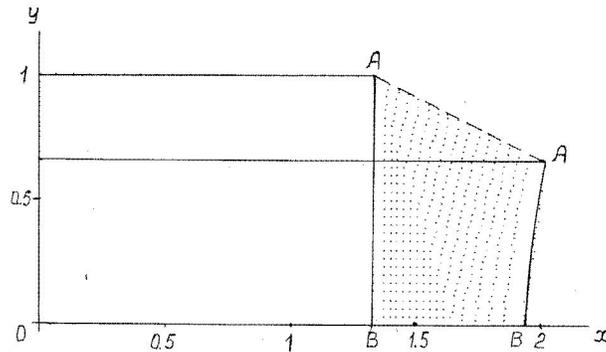


Рис. 11. Изменение свободной вертикальной границы при сдвливании пластического слоя от $a/h = 1,341$ до $3,085$ при $\mu = 0,15$ и скольжении $L_1 = 1,154$ на границе контакта

$a/h = 1,341$ при $\mu = 0,15$ для поля линий скольжения по Прандтлю, как и в случае круговой границы на рис. 10.

В случае прямолинейной начальной границы AB конечное отношение $a/h = 3,085$ ограничено предельным скольжением $L_1 = 1,154$. При этом на большей части сдвливания выполняется неравенство $l < L_0$ при более высокой скорости жесткой области выше линии разрыва C_0B_0 на рис. 9а, что приводит к вогнутому профилю границы AB . При конечном отношении a/h вогнутость профиля уменьшается вследствие ускоренного движения нижней части жесткой области при $l > L_0$.

Появление вогнутой свободной границы заготовки при осадке с малым отношением a/h при смазке на границе контакта известно из практики. Вогнутость свободной границы пластической области изменяет граничные условия для линий скольжения, приводит к снижению контактного давления и увеличению кривизны вогнутой поверхности с вероятностью образования технологического дефекта. Поэтому расчеты, показанные на рис. 11 для прямолинейной границы AB , качественно показывают причину появления вогнутости вследствие выхода линий разрыва скорости на свободную боковую границу при осадке заготовок плоскими штампами. Теоретический анализ нестационарного процесса осадки с изменением вогнутой свободной границы методом линий скольжения требует дальнейших исследований.

Заключение. На основе теории плоской деформации идеально пластического тела выполнено численное моделирование сдвливания цилиндра плоскими штампами, от контактного давления штампа на пластическое полупространство с круговой границей до сдвливания пластического слоя с конечным отношением длины контакта к толщине.

На начальной стадии контактного деформирования используется линии скольжения для штампа Прандтля без скольжения на границе контакта, которое дает снижение предельного давления по сравнению с давлением на полупространство с горизонтальной границей. На этой стадии вычисляется выдавливание материала на границу цилиндра в виде узкого серповидного наплыва плавно переходящего на цилиндрическую поверхность жесткой области.

На второй стадии рассматривается сдвливание цилиндра при пластической области между границами штампов. Используются линии скольжения Прандтля для

высокой заготовки с отношением высоты к длине границы контакта H/a больше единицы. Переход от первой стадии ко второй происходит при отношении контактного давления к напряжению текучести $q/\sigma_Y = 2,25$ при $H/a = 6,39$. На второй стадии кривизна круговой границы жесткой области не изменяется при ее горизонтальном смещении с уменьшением отношения H/a до единицы.

Третья стадия переходит в задачу деформирования пластического слоя с конечным отношением длины контакта к толщине a/h больше единицы. Предельное отношение a/h при отсутствии скольжения на границе контакта определяется линиями скольжения Прандтля второй стадии с поворотом вертикальной оси на угол $\pi/2$ и зависит от контактного трения μ . В этом случае круговая форма жесткой области остается неизменной при сдавливании и смещается по горизонтальной оси, также как на второй стадии.

При увеличении отношения a/h выше предельного значения по Прандтлю при заданном коэффициенте μ появляется скольжение на границе контакта с областью однородного напряженного состояния. В этом случае линии разрыва скоростей выходят на внешнюю границу жесткой области, непрерывно перемещаются при сдавливании пластического слоя и изменяют форму границы жесткой области. При уменьшении μ предельное отношение a/h по Прандтлю уменьшается, а длина границы скольжения и изменение формы границы жесткой области увеличиваются. Кривизна начальной круговой границы увеличивается с увеличением сдавливания слоя.

В случае вертикальной свободной границы пластического слоя при отсутствии внешней жесткой зоны с выпуклой границей, разрывы скорости, выходящие на свободную границу в области однородного напряженного состояния, при малых значениях μ приводят к образованию вогнутой свободной границы. Сдавливание пластического слоя с образованием вогнутой свободной границы может привести к технологическому дефекту формы заготовки. Проблема анализа процесса сдавливания пластического слоя с образованием вогнутой свободной границы вследствие разрывов скоростей остается открытой.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности: 1-е изд. Москва: АН СССР, 1946.
- [2] Соколовский В. В. Теория пластичности: 3-е изд. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [3] Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. Москва: Металлургия, 1972. 408 с.
- [4] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [5] Быковцев Г. И., Хромов А. М. Плоская деформация идеальных жестко-пластических тел с учетом изменения границы // Изв. АН СССР, МТТ. 1979. № 2. С. 71–78.
- [6] Быковцев Г. И., Хромов А. М. Плоская задача о вдавливании жесткого штампа в идеальное жестко-пластическое полупространство // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 6. С. 47–52.
- [7] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [8] Хилл Р. Математическая теория пластичности. Москва: ГИИТЛ. 408 с.
- [9] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [10] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [11] Соловьев П. В. FORTRAN для персонального компьютера (Справочное пособие). Москва: Арист, 1991. 223 с.
- [12] Druyanov V. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 426 p.

R. I. Nepershin

CYLINDER PLASTIC COMPRESSION BY THE FLAT DIES

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Computer simulation of the rigid-plastic cylinder compression by the flat dies is presented using plane strain ideal plastic theory. Initial contact plastic deformation with material lip forming on the free cylinder surface, followed by the high workpiece and the plastic layer with finite contact length to thickness relation plastic deformation are considered. Prandtl's slip lines and velocity fields are used for the cylinder section form predictions and plastic layer compression with contact friction consideration. Computer simulation can be used for the limit load estimation with cylinder contact plastic flow, compressed by the flat rigid dies, and cylinder workpiece forging by the flat dies.

Keywords: cylinder plastic compression, flat dies, ideal plasticity, plane strain, slip lines, velocities, contact pressure, contact friction, limit load, forging by flat dies.

REFERENCES

- [1] Sokolovskii V. V. The Theory of Plasticity: first ed. Moscow: AN USSR, 1946. (In Russian).
- [2] Sokolovskii V. V. The Theory of Plasticity: third ed. Moscow: Vyshaya shkola, 1969. 608 p. (In Russian).
- [3] Tomlenov D. Theory of the Metals Plastic Deformation. Moscow: Metallurgia, 1972. 408 p. (In Russian).
- [4] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Nauka, 1966. 232 p. (In Russian).
- [5] Bykovtsev G. I., Chromov A. M. Plane strain deformation of ideal rigid-plastic solid with the boundary change // Izvestiya AN USSR, MTT. 1979. no. 2. P. 71–78. (In Russian).
- [6] Bykovtsev G. I., Chromov A. M. Plane strain problem of the rigid die indentation into the ideal rigid-plastic half space // Izvestiya AN USSR, MTT. 1981. no. 6. P. 47–52. (In Russian).
- [7] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (In Russian).
- [8] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1985. 408 p.
- [9] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [10] Ishlinskii A. Y., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (In Russian).
- [11] Solov'ev P. V. FORTRAN for personal computer (handbook). Moscow: Arist, 1991. 223 p. (In Russian).
- [12] Druyanov B. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 426 p.

Nepershin Rostislav Ivanovich, Doctor of Eng. Sci., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

Е. О. Сысоев, К. К. Кахоров, О. Е. Сысоев, Е. В. Журавлева

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАЗОМКНУТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Тонкостенные цилиндрические оболочки, выполненные из железобетона, широко используется в качестве покрытий зданий и сооружений. Тонкостенные оболочки могут перекрывать большие пролёты и создавать большие закрытые помещения без дополнительных опор, обладают оптимальной формой и хорошими технико-экономическими показателями.

В настоящее время при проектировании зданий и сооружений не производятся специальные расчёты на возникновение резонансных явлений, отсутствуют расчетные модели и недостаточно экспериментальных данных. При этом тонкостенные оболочки очень чувствительны к внешним воздействиям (ветровые и снеговые нагрузки), вызывающие вынужденные колебания, которые приводят к разрушению конструкции. К примеру, в 2004 г. трагедия в «Трансвааль-парке» г. Москва унесла жизни 28 человек, более 100 получили ранения; в 2010 г. на стадионе в Миннесоте (США) обрушилась одна из секций крыши, завалив трибуну; в 2015 г. авария строящегося резервуара на нефтезаводе в г. Комсомольске-на-Амуре, возникшая из-за колебаний от ветровых нагрузок; в 2015 г. кровля крытого катка (с. Верх-Ирмень Новосибирской обл.) не выдержала совместных ветровых и снеговых нагрузок; в 2017 г. произошёл обвал крыши школы в п. Мурино; в 2018 г. деформации крыши строящегося катка г. Истра носили катастрофический характер.

Целью теоретических расчетов и проведения экспериментов с железобетонными оболочками с разными модулями упругости заключается в обеспечении надежности при эксплуатации здания и сооружения и исключения аварийных ситуаций, возникающих при резонансных явлениях свободных колебаний оболочек от воздействия внешних сил (нагрузок). В статье приведены результаты экспериментальных исследований по определению спектров вынужденных и свободных колебания, частот и форм колебаний разомкнутых оболочек от внешних воздействий. Рассматривается теоретический расчёт разомкнутой оболочки на основе уравнений теории пологих тонкостенных оболочек с использованием метода Бубнова–Галеркина, с помощью которого определены влияние параметров оболочки на процессы свободного колебания. Получены данные зависимости спектра колебаний от класса бетона — из этих результатов можно сделать вывод, что с увеличением класса бетона уменьшаются средние показатели частот колебания, а первоначальные показатели частот колебаний почти затухают.

Ключевые слова: разомкнутая цилиндрическая железобетонная оболочка, колебания, частота, спектр, модуль упругости.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.013

УДК: 692.45

На сегодняшний день строительство зданий и сооружений требует от инженеров, строителей и архитекторов новый подход к своим решениям, чтобы проектируемые здания и сооружения выглядели зрелищными и тем самым изменить облик городского строительства и архитектуры. Одним из решений является использования тонкостенных цилиндрических оболочек в качестве покрытия. Использование пространственных покрытий из тонкостенных оболочек позволяет перекрыть большие пространства без промежуточных опор (колонн). Это свойство весьма ценно для строительства зданий с большими пролетами с гибкой технологией, таких как спортивные комплексы, крытые рынки, выставочные павильоны, вокзалы, цирки и здания других назначений.

Тонкостенные оболочки требуют меньшего расхода строительных материалов по сравнению с плоскостными конструкциями, что способствует уменьшению веса покрытий и повышению экономических показателей.

При эксплуатации зданий и сооружений оболочечного типа они подвергаются статическим и динамическим воздействиям от снеговых, ветровых, вибрационных и сосредоточенных нагрузок. Сосредоточенными нагрузками или присоединёнными массами могут быть спутниковые антенны, вентиляционное оборудование, водяные и солнечные коллекторы и др., они вызывают вынужденные колебания оболочек, что значительно влияет на амплитуду и частоты свободных колебаний.

Задачей исследования является определение напряжённо-деформированного состояния и экспериментальное подтверждение теоретических данных на свободное или вынужденное колебания тонкостенной разомкнутой железобетонной оболочки. Исследуемая модель — шарнирно-опёртая по длине оболочки, которая, как правило, широко встречается на практике. В основе решения поставленных задач лежит теория перемещения оболочки, компоненты которой могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1 &= K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \sigma \frac{\omega}{R} \right), & N_2 &= K \left(\frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{\omega}{R} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ N_{12} &= K \frac{1 - \sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \theta^2} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \theta^2} + \sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right), & M_{12} &= -D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \omega}{R \partial x \partial \theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

© Сысоев Е. О., Кахоров К. К., Сысоев О. Е., Журавлева Е. В., 2020

Сысоев Евгений Олегович

e-mail: cia@knastu.ru, кандидат экономических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Кахоров Комилджон Кахорович

e-mail: comil07@mail.ru, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Сысоев Олег Евгеньевич

e-mail: fks@knastu.ru, доктор технических наук, профессор, декан, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Журавлева Екатерина Викторовна

e-mail: fks@knastu.ru, магистр, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Поступила 12.02.2020

$$Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{R\partial\theta} = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{R^2 \partial x \partial \theta^2} \right),$$

$$Q_2 = \frac{\partial M_2}{R\partial\theta} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{R^3 \partial \theta^3} + \frac{\partial^3 \omega}{R \partial x^2 \partial \theta} \right),$$

где

$$K = \frac{Eh}{1 - \mu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad k = \frac{12D}{h^2}, \quad (2)$$

где соответственно E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; M_1 , M_2 , M_{12} — изгибающие моменты и момент скручивания.

Изгибающие моменты являются основными показателями для конструирования любой строительной конструкции. И тому подтверждением является общее уравнение колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки, с помощью которого (двух дифференциальных уравнений) можно описать малые изгибные колебания.

На основании общего уравнения колебаний оболочки (пластины) получена и подтверждена экспериментально дискретная нелинейная модель колебаний пологой оболочки, несущей систему присоединенных масс, с двумя степенями свободы.

Рассматривается тонкостенная цилиндрическая оболочка прямоугольной формы радиусом R , толщиной δ и присоединённой массой P , высотой h (рис. 1). С исполь-

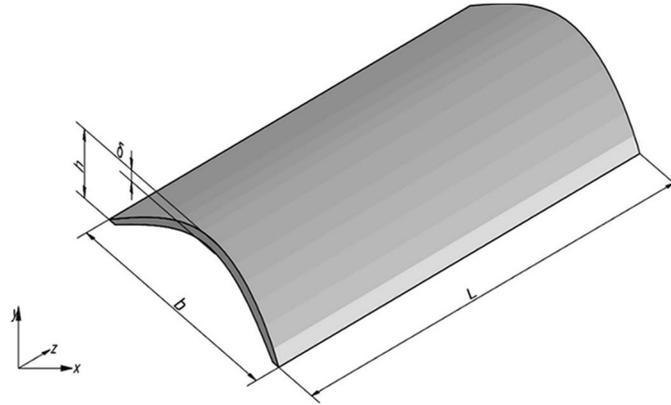


Рис. 1. Разомкнутая цилиндрическая оболочка

зованием математического модели получим величины колебаний оболочки в момент резонанса. Подобный опыт исследования колебаний оболочек рассматривался и в работах [5, 9] с использованием уравнений движения теории пологих оболочек и пластин:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3)$$

В уравнении (3) ∇ — бигармонический оператор Лапласа, который для упругих пластин равен $\Delta^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $w(x, y, t)$ — динамический прогиб; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений в срединной поверхности; ρ — плотность материала; t — время; $\delta(x, y)$ — функция Дирака. Для удовлетворения условий периодичности и тангенциальных условий нужно определить функцию напряжений в срединной поверхности конструкций при $N_1 = T = 0$, которая равна следующему уравнению:

$$\Phi(x, y, t) = [\Phi_1(t) \sin \beta y + \Phi_2(t) \cos \beta y + \Phi_3(t)] \sin \alpha x, \quad (4)$$

где

$$\Phi_1(t) = \frac{E\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} f_1(t), \quad \Phi_2(t) = \frac{E\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} f_2(t), \quad \Phi_3(t) = \frac{E}{R\alpha^2} f_3(t).$$

Функции напряжений в срединной поверхности конструкции приводят к динамическим уравнениям, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + f_1\omega_n^2 + \frac{4M_c}{M_{so} - M_c} [\ddot{f}_1 \sin^2 \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 \sin^2 \beta y_0 + \ddot{f}_3 \sin \beta y_0] \sin^2 \alpha x &= 0, \\ \ddot{f}_2 + f_2\omega_n^2 + \frac{4M_c}{M_{so} - M_c} [\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos^2 \beta y_0 + \ddot{f}_3 \cos \beta y_0] \sin^2 \alpha x &= 0, \\ f_3 + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 f_3 + \frac{2M_c}{M_{so} - M_c} [\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_3] \sin^2 \alpha x &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнений (5) нужно определить квадраты безразмерных частот изгибных и радиальных колебаний оболочки:

$$\omega_n^2 = \frac{\varepsilon(1 + \theta^2)^2}{12(1 - \mu^2)}, \quad p^2 = 1 + \frac{\varepsilon\theta^2}{12(1 - \mu^2)};$$

отсюда $\varepsilon = (n^2 h/R)^2$ и $\theta = \pi R/(nl)$ — параметры оболочки, являются основными показателями при динамическом воздействии. Параметры волнообразования зависят от характеристик относительной толщины и длины оболочки.

Величины диапазона частот колебаний, которые были определены из собственных колебаний в программном обеспечении семейства LIRA SAPR в зависимости от параметров оболочки (в 10 раз больше, чем экспериментальная) и разных классов бетона, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Форма колебаний	Класс бетона В	Модуль упругости бетона E , МПа	Допустимое напряжение $\bar{\sigma}$	Частота колебаний, Гц	
				LIRA SAPR	аналитическим методом
	35	$3,52 \cdot 10^4$	19,5	0,618	0,603
	30	$3,25 \cdot 10^4$	17,0	0,646	0,635
	20	$2,75 \cdot 10^4$	11,5	0,712	0,694
	15	$2,35 \cdot 10^4$	8,5	0,769	0,750

Также составлен график частот колебаний в зависимости от класса бетона В (рис. 2).

Теоретический расчет колебаний оболочек в программном обеспечении LIRA SAPR произведен для определения собственных колебаний разомкнутой оболочки при разных классах бетона, результаты которых приведены в табл. 1. Каждый теоретический расчет требует практической (экспериментальной) проверки. Для подтверждения теоретических расчетов были проведены исследования на влияние присоединённой массы на свободные и вынужденные колебания тонкостенных железобетонных оболочек на базе лаборатории ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет». Для проведения испытаний был изготовлен специальный стенд, на котором испытывали опытные образцы из композиционного (железобетонного) материала (рис. 3).

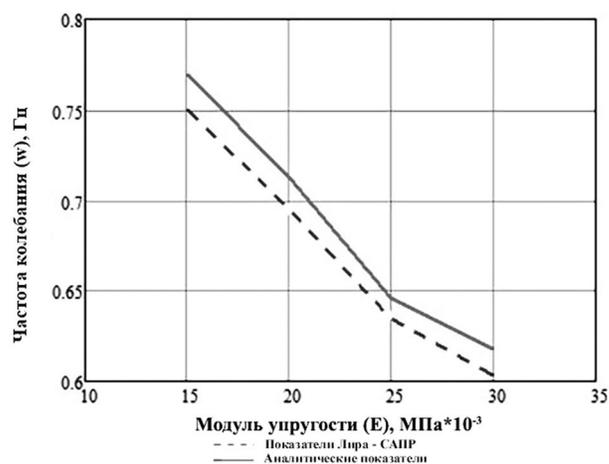


Рис. 2. График зависимости частоты колебаний от модуля упругости

Экспериментальные исследования были проведены с тонкостенными цилиндрическими оболочками из композиционного материала (железобетон) со следующими параметрами: $R = 200$, $b = 400$, $L = 800$, $h = 90$, $\delta = 15$ мм. Схема образца представлена на рис. 4. С помощью стенда можно вычислить граничные условия, приближённые к расчётной модели. В стенде закреплён датчик измерения частоты вынужденных или свободных колебаний (рис. 5). Датчик выполняет роль присоединённой массы,

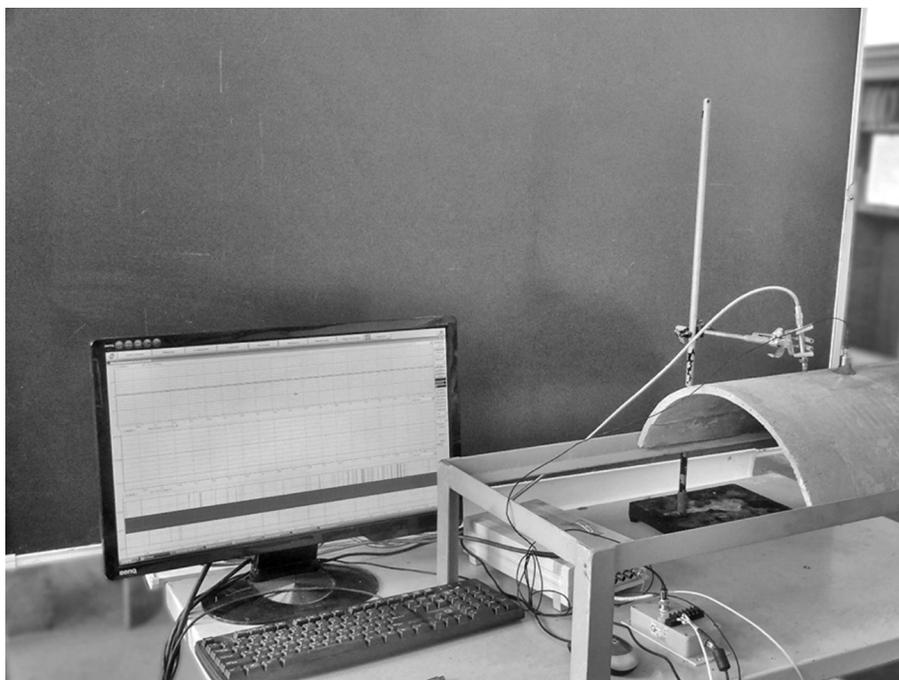


Рис. 3. Фотография проведения эксперимента с железобетонными оболочками

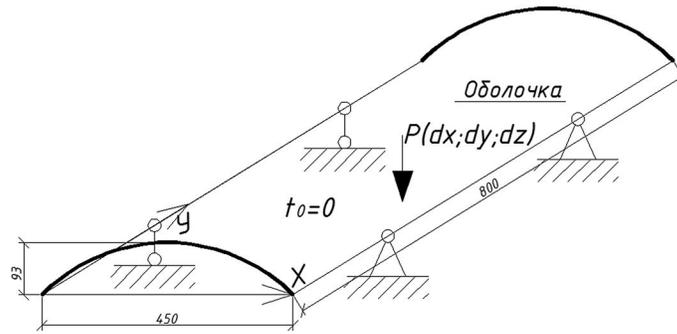


Рис. 4. Схема образца и приложенная нагрузка

т.к. датчик придает дополнительный вес оболочке. Акселерометр является ключевым датчиком, с помощью которого сигнал передается в приёмник анализатора спектра колебаний. Полученные данные анализируются с помощью семейство лабораторных программ Z-LAB.

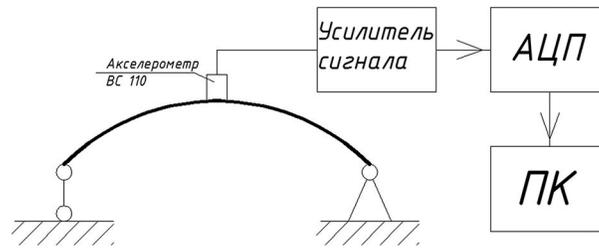


Рис. 5. Схема экспериментальной установки

Вынужденные колебания оболочки получали путём взаимодействия испытательно-го молотка с оболочкой (стук), что дает нам схему работы, которая часто встречается в эксплуатируемых зданиях. Сигнал-информация о колебаниях оболочки принимается датчиками типа ВС 110, которые также выполняли роль присоединённой массы.

В результате исследования колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек были получены экспериментальные данные с разными классами бетона (рис. 6), что позволяет нам анализировать, как влияет класс бетона на процесс колебаний оболочки. Стоит отметить, что величина расхождения полученных данных составляет 1,5%, что доказывает о достаточной точности проведения эксперимента и полученных данных в целом.

После проведённых экспериментов с оболочками с разными модулями упругости можно сделать следующие выводы:

- из анализов вынужденных колебаний разомкнутых оболочек можно увидеть, что с ростом модуля упругости (класса бетона) в диапазоне низких и больших частот от 10 до 460 Гц колебания почти затухают, также значительно уменьшаются колебания в среднем диапазоне от 460 Гц до 6,40 кГц;

- из полученных результатов видно, что границы низких и высших частот являются отрезком негативной работы конструкции, в которых с увеличением класса бетона

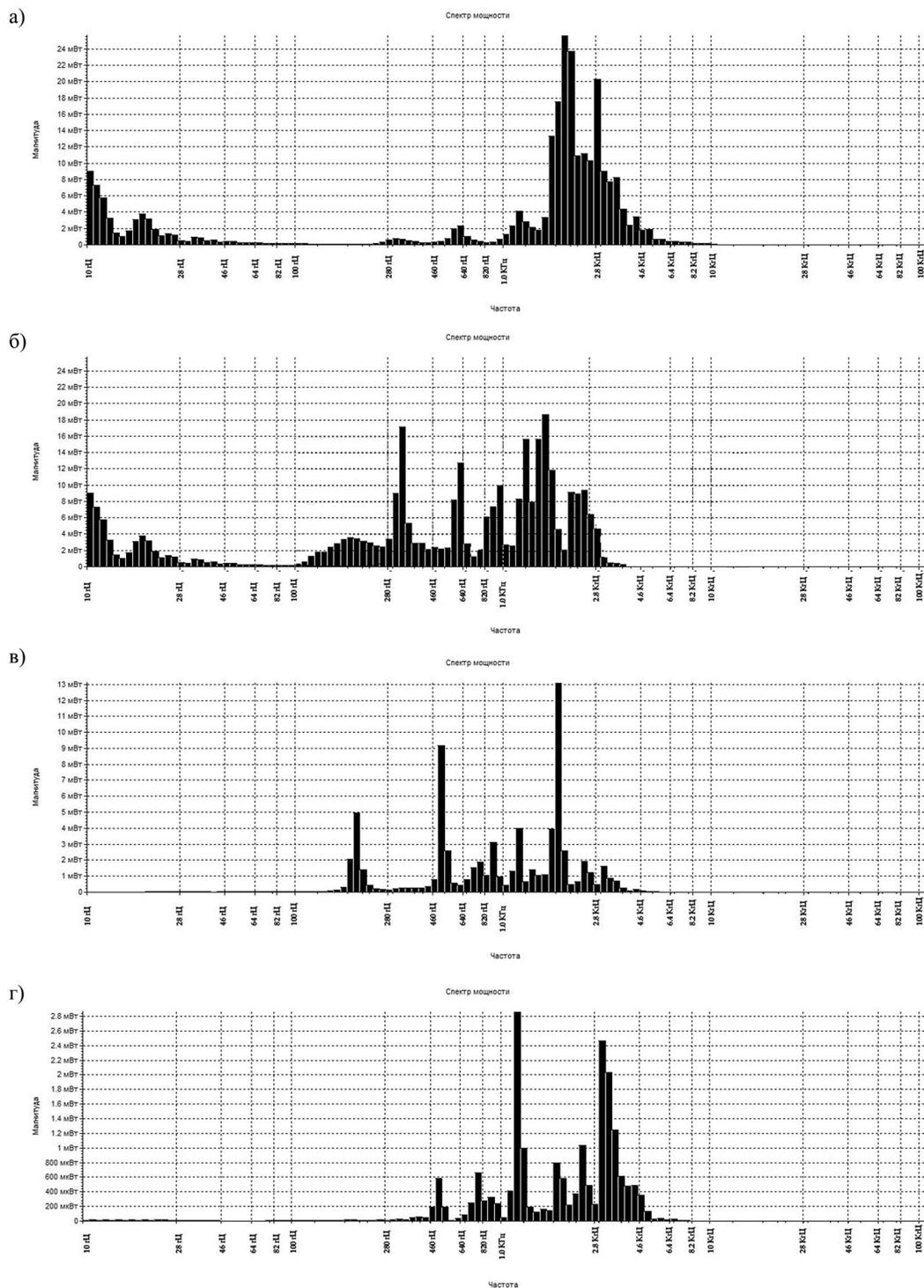


Рис. 6. Диаграммы частотных спектров вынужденных колебаний разомкнутой оболочки: а) V15; б) V20; в) V30; г) V35

уменьшаются их колебательные показатели, что способствует устойчивости конструкции во время эксплуатации.

Полученные результаты расчёта тонкостенной разомкнутой оболочки с разными модулями упругости в ПО LIRA SAPR 2013, приведенные в табл. 1, способствуют достоверности результатов проведенных экспериментов — с ростом значения модуля упругости уменьшаются показатели свободных и вынужденных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Байков В. Н., Хайпе Эрхард, Рауэ Эрих. Проектирование железобетонных тонкостенных пространственных конструкций. Москва: Стройиздат, 1990. 232 с.
- [2] Антуфьев Б. А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций: монография. Москва: Изд-во МАИ, 2011. 176 с.
- [3] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1949. 784 с.
- [4] Дзюба В. А., Глушкова Ю. С. Применение составной функции диаграммы сжатого бетона для деформационной оценки конструкций // Ученые записки КнАГТУ. 2014. № II-2. С. 109–114.
- [5] Современные испытательные стенды для бесконтактного исследования свободных колебаний замкнутых и разомкнутых цилиндрических оболочек / О. Е. Сысоев, А. Ю. Добрышкин, К. К. Кахоров [и др.] // Ученые записки КнАГТУ. 2017. № 1. С. 110–118.
- [6] Сысоев О. Е., Кохоров К. К. Факторы, влияющие на разрушение зданий оболочечного типа // Региональные аспекты развития науки и образования в области архитектуры, строительства, землеустройства и кадастров в начале III тысячелетия: мат. Междунар. науч.-практ. конф. / под ред. О. Е. Сысоева. 2017. С. 55–60.
- [7] Сысоев О. Е., Кахоров К. К., Сысоев Е. О. Теоретический расчет колебаний тонкостенных железобетонных оболочек с разными модулями упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1(39).
- [8] Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн С. Н. Влияние присоединенной массы на вынужденные колебания разомкнутых оболочек // Ученые записки КнАГТУ. 2016. № 3. С. 110–116.
- [9] Qahorov K. Q., Sysoev Y. O., Dobryshkin A. Y. The influence of the reinforcement ratio on oscillations of thin-walled concrete shells with different elastic modulus // Materials Science Forum 945 MSF. P. 299–304.

O. Ye. Sysoev, K. Q. Qahorov, Ye. O. Sysoev, E. V. Zhuravlyova

EXAMINATION OF FREE AND FORCED OSCILLATIONS OF OPEN THIN-WALL REINFORCED CONCRETE SHELLS

Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. Thin-walled cylindrical shells made of reinforced concrete are widely used as coatings of buildings and structures. Thin-walled shells can cover large flights and create more closure of the room without additional supports, with optimal shape and good techno-economic indicators. At present, the design of buildings and structures does not make special calculations for the occurrence of resonance phenomena, absence of design models and insufficient experimental data. At the same time thin-walled shells are very sensitive to external effects (wind and snow loads) causing forced fluctuations, which lead to the destruction of the structure. For example in 2004 tragedy in Transvaal Park in Moscow killed 28 people, more than 100 were injured; in 2010, a roof section collapsed at a stadium in Minnesota, United States, collapsing the podium; in 2015, an accident at the Komsomolsk-on-Amur oil plant under construction caused by fluctuations from wind loads; in 2015, (Top-Irmen of Novosibirsk region) roof of the covered rink failed to withstand joint wind and snow loads; in 2017, the roof of a school in Murino village collapsed; in 2018, the deformation of the roof of the Istra rink under construction was catastrophic. The purpose of theoretical calculations and carrying out experiments with reinforced concrete shells with different modules of elasticity is to ensure reliability during operation of the building and structure, and to avoid accidents, arising resonance phenomena of free oscillations of shells due to external forces (loads).

The article presents the results of experimental studies on determination of spectra, forced and free oscillations of reinforced concrete shell with different modules of elasticity. The whole, carrying out research of reinforced concrete shells is determination of frequencies and form of oscillation of open shells due to external effects. The paper considers the theoretical calculation of the open shell based on the equations of the theory of shallow thin-walled shells, using the Bubnov–Galerkin method, by which we determine how the parameters of the shell affect the processes of free oscillation.

After the studies, the data of the vibration spectrum dependence on the concrete class are obtained, with the help of these results it can be concluded that as the concrete class increases, the average values of the oscillation frequencies decrease, and the initial values of the oscillation frequencies almost fade.

Keywords: open cylindrical reinforced concrete shell, vibrations, frequency, spectrum, modulus of elasticity.

Sysoev Oleg Evgenyevich, Doctor of Engineering, Professor, Dean, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Qahorov Komiljon Qahorovich, graduate student, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Sysoev Evgeniy Olegovich, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

Zhuravlyova Ekaterina Victorovna, Undergraduate, Komsomolsk-on-Amur of State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

REFERENCES

- [1] Baykov V. N., Hyip E., Raue E. Design of reinforced concrete thin-walled spatial structures. Moscow: Stroyizdat, 1990. 232 p. (in Russian).
- [2] Antuf'ev B. A. Vibrations of inhomogeneous thin-walled structures: monograph. Moscow: Publishing house MAI, 2011. 176 p. (in Russian).
- [3] Vlasov V. Z. General theory of shells and its applications in engineering. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 784 p. (in Russian).
- [4] Dzuba V. A., Glushkova Y. S. Application of a composite function diagram of compressed concrete for the deformation estimation of structures // Scientific notes of KnASTU. 2014. no. II-2. P. 109–114. (in Russian).
- [5] Modern test stands for noncontact study of free oscillations of closed and open cylindrical shells / O. E. Sysoev, A. Dobryshkin, K. Q. Qahorov et al. // Scientific notes of KnASTU. 2017. no. 1. P. 110–118. (in Russian).
- [6] Sysoev O. E., Qahorov K. Q. The factors influencing destruction of buildings of shell type // Regional aspects of development of science and education in the field of architecture, construction, land management and cadastres at the beginning of III Millennium: Materials of the International Conf. / Ed. by O. E. Sysoev. 2017. P. 55–60. (in Russian).
- [7] Sysoev O. Y., Qahorov K. Q., Sysoev Y. O. Theoretical calculation of vibrations of thin-wall // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2019. no. 1(39). (in Russian).
- [8] Sysoev O. E., Dobryshkin A. Y., Nyain S. Influence of connected mass on forced oscillations of open shells // Scientists of note KnASTU. 2016. no. 3. P. 110–116. (in Russian).
- [9] Qahorov K. Q., Sysoev Y. O., Dobryshkin A. Y. The influence of the reinforcement ratio on oscillations of thin-walled concrete shells with different elastic modulus // Materials Science Forum 945 MSF. P. 299–304.

С. А. Горшков, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин

О ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СРЕДЕ OPENFOAM

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН г. Владивосток, Россия

Институт прикладной математики ДВО РАН г. Владивосток, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН г. Москва, Россия

Аннотация. В работе предлагается реализация алгоритма расчета процесса необратимого деформирования материала в рамках теории температурных напряжений с учетом зависимости предела текучести от температуры в среде численного моделирования OpenFOAM. Рассмотрен пример решения трехмерной задачи о необратимом деформировании полого упругопластического цилиндра, подверженного нестационарному тепловому воздействию. Исследовано влияние скорости изменения теплового поля на формирование напряженно-деформированного состояния материала.

Ключевые слова: температурное напряжение, идеальная пластичность, теплопроводность, термоупругость, OpenFOAM, метод конечных объемов

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.014

УДК: 539.374

1. Введение. Можно отметить по обширной литературе нарастающий интерес к функционально-градиентным материалам, конструкциям и покрытиям, посвященной их свойствам, методам исследования и расчета, а также технологиям изготовления [1, 2, 3]. В указанных монографиях зачастую исследуются упругие материалы, что

© Горшков С. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. 2020

Горшков Сергей Александрович

e-mail: aseberg93@ya.ru, инженер, лаборатория механики необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

Дац Евгений Павлович

e-mail: dats@dvo.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты (№ 18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666, № 20-01-00147).

Поступила 25.02.2020

ограничивает классы используемых в технологической практике структур. Зависимость свойств предполагается от одной координаты, не учитывается возможность изменения свойств с течением времени. Анализ аддитивных технологий производства функционально-градиентных материалов не основан на современных методах механики аддитивных технологий и процессов роста, что может привести к принципиальным ошибкам.

Расчет напряженно-деформированного состояния упругопластического материала в условиях быстро изменяющегося температурного поля на сегодняшний день является одной из трудоемких задач численного моделирования. Известно, что нестационарный температурный градиент приводит к возникновению неустановившихся температурных напряжений, следствием которых может являться возникновение и развитие областей необратимого деформирования, в которых накопленные пластические деформации существенным образом влияют на распределение остаточных напряжений и перемещений в материале после остывания.

На сегодняшний день получены аналитические и численно-аналитические решения одномерных задач термоупругопластичности, в которых используются свойства симметрии температурного поля в таких объектах как цилиндры, диски, сферы. Показано, что даже в одномерной постановке развитие процесса пластического течения в одной области материала может одновременно сопровождаться возникновением процесса разгрузки с накопленными деформациями в другой области [4, 5, 6]. Необходимость отслеживания положения границ пластического течения и разгрузки при нестационарном тепловом воздействии даже в одномерном случае заставляет искать способы численного решения уравнений, определяющих условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластических границах [7, 8, 9, 10, 11, 12]. В представленной работе показаны результаты численного моделирования трехмерной задачи о неравномерном нестационарном нагреве упругопластического цилиндра. В качестве среды расчета используется пакет OpenFOAM, основанный на использовании метода контрольных объемов при решении систем дифференциальных уравнений в частных производных. Алгоритм численного расчета напряженно-деформированного состояния упругопластического материала [13] дополнен с учетом термопластических свойств материала [14, 15]. С использованием параллельных вычислений в среде OpenFOAM получены решения для тензоров температурных напряжений и деформаций в декартовой и цилиндрической системах координат.

2. Определяющие модельные соотношения и основные уравнения. Воспользуемся моделью малых упруго-пластических деформаций [7], в которой тензор малых деформаций \mathbf{d} состоит из термоупругой (обратимой) \mathbf{e} и пластической (необратимой) \mathbf{p} составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla) \quad (1)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений в трехмерной декартовой системе координат, ∇ — оператор Гамильтона.

Предполагается, что материал находится в состоянии термоупругопластического равновесия:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши. Зависимость между тензором напряжений и упругими компонентами тензора деформаций определена законом Дюамеля-Неймана:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{e} + [\lambda\text{tr}(\mathbf{e}) - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)]\mathbf{I}. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{I} — единичный тензор; $\text{tr}(\mathbf{e})$ — след тензора упругих деформаций; $(T - T_0)$ — разница между текущей и начальной температурой в точке среды; λ, μ — параметры Ламе; α — коэффициент линейного теплового расширения.

Температурное поле в исследуемом материале определяется решением уравнением теплопроводности:

$$\rho c_p \partial_t T = \nabla \cdot (\eta \nabla T) \quad (4)$$

где ρ — плотность, c_p — теплоемкость, η — теплопроводность материала, ∂_t — производная по временной координате. При $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ система соотношений (1)–(4) вместе с заданными граничными условиями определяет термоупругое равновесие материала.

Начало процесса необратимого деформирования материала свяжем с выполнением условия пластичности Мизеса:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} - \frac{8}{3}k^2(T) = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор тензора напряжений, $k(T)$ — предел текучести при чистом сдвиге, значение которого в каждой точке среды зависит от текущей температуры и не зависит от напряженного состояния материала (идеальная пластичность).

3. Алгоритм расчета необратимых деформаций. Рассмотрим алгоритм расчета компонент вектора перемещений и тензора температурных напряжений с учетом пластических свойств материала.

Уравнения теории пластического течения и определяющие соотношения удобно использовать в скоростях искомых величин. С точки зрения численной реализации в среде OpenFOAM, скорости заменяются на приращения переменных — разницу между текущим значением, и значением, вычисленным на предыдущем временном. Здесь и далее символом Δ будем обозначать приращение величины. Нижними индексами n и $n-1$, обозначаются значения, вычисляемые на текущем временном шаге и известные значения, вычисленные на предыдущем временном шаге соответственно.

Алгоритм расчета:

Шаг 1. В начале каждого n -цикла вычислений при помощи численного решения уравнения теплопроводности (4), записанного в приращениях, рассчитывается поле приращений температуры ΔT_n и определяется распределение температуры на текущем временном шаге: $T_n = \Delta T_n + T_{n-1}$.

Шаг 2. По известному полю приращений температуры производится расчет приращений вектора перемещений $\Delta \mathbf{u}_n$ и полных деформаций $\Delta \mathbf{d}_n$ путем решения системы уравнений равновесия (2), в которых значения приращений компонент тензора необратимых деформаций $\Delta \mathbf{p}_{n-1}$ — значения, вычисленные на предыдущем временном шаге:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \mu [\nabla \otimes (\Delta \mathbf{u}_n) + (\Delta \mathbf{u}_{n-1}) \otimes \nabla - 2\Delta \mathbf{p}_{n-1}] + \\ & + \nabla \cdot \lambda \mathbf{I} \{ \text{tr}[\nabla \otimes (\Delta \mathbf{u}_{n-1})] - \text{tr}(\Delta \mathbf{p}_{n-1}) \} - \alpha(3\lambda + 2\mu)\nabla(\Delta T_n) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Шаг 3. Производится вычисление компонент вектора перемещений и тензора деформаций на текущем временном шаге: $\mathbf{u}_n = \Delta \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{d}_n = \Delta \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_{n-1}$.

Шаг 4. Производится расчет приращений *возможных* напряжений $\Delta\sigma^*$ в предположении отсутствия процесса необратимого деформирования. Здесь и далее индексом (*) обозначается *возможное* значение искомой величины, которое в процессе реализации алгоритма используется в качестве промежуточного или конечного результата на текущем временном шаге:

$$\Delta\sigma^* = 2\mu\Delta\mathbf{d}_n + [\lambda\text{tr}(\Delta\mathbf{d}_n) - \alpha(3\lambda + 2\mu)\Delta T_n]\mathbf{I} \quad (7)$$

Шаг 5. Вычисляются *возможные* напряжения $\sigma^* = \Delta\sigma^* + \sigma_{n-1}$.

Шаг 6. Выполняется проверка условия пластичности в каждой ячейке, соответствующей контрольному объему:

Шаг 6.1 Если $F(\sigma^*) < 0$ (отсутствие пластического течения в данной точке среды), то для соответствующих ячеек выполняется запись компонент напряжений и пластических деформаций

$$\sigma_n = \sigma^*, \quad \Delta\mathbf{p}_n = 0, \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1} \quad (8)$$

Шаг 6.2 Если $F(\sigma^*) < 0$, то для заданных ячеек реализуется алгоритм “радиального возврата” (radial return) [13] вектора напряжений на поверхность текучести. Компоненты тензора напряжений вычисляются при помощи корректировки девиатора *возможных* напряжений, полученных на шаге 5. Умножение девиаторной части на корректирующий множитель m приводит к выполнению условия пластичности (5).

$$\sigma_n = \frac{1}{3}\text{tr}(\sigma^*)\mathbf{I} + m\tau^*, \quad m = \sqrt{\frac{3k^2(T_n)}{8(\tau^* : \tau^*)}} \quad (9)$$

Шаг 6.3 Последовательно вычисляются приращения напряжений, упругих и пластических деформаций.

$$\Delta\sigma_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}, \quad \Delta\mathbf{e}_n = \frac{\text{tr}(\Delta\sigma_n)\mathbf{I}}{3(3\lambda + 2\mu)} + \frac{1}{2\mu}\Delta\tau_n + \alpha\Delta T \quad (10)$$

$$\Delta\mathbf{p}_n = \Delta\mathbf{d}_n - \Delta\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{p}_n = \Delta\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{n-1} \quad (11)$$

Шаг 7. Значения $\Delta\mathbf{p}_n$ используются для вычисления вектора перемещений на следующем временном шаге.

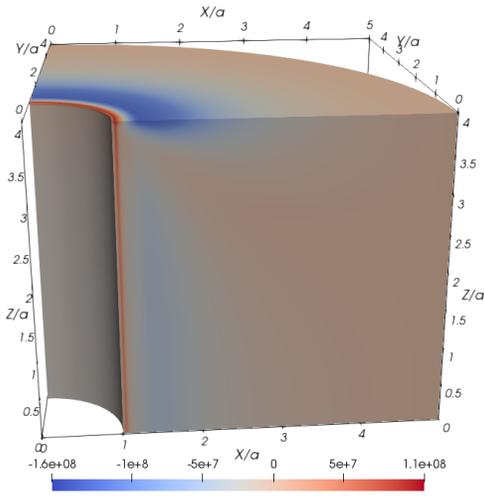
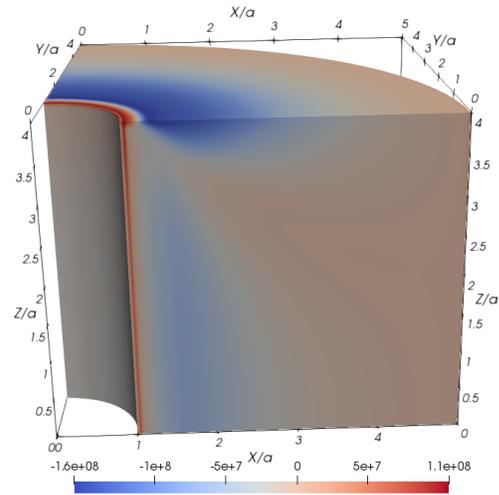
4. Граничные условия

Граничные условия в задачах термопластичности, как правило, бывают двух видов — заданные нулевые перемещения (условие фиксированной поверхности) и заданные нулевые напряжения (условие свободно расширяющейся поверхности). Чтобы исключить влияние внешнего воздействия на формирование напряженно-деформированного состояния материала при неравномерном тепловом расширении, будем полагать, что границы исследуемого объекта свободны от нагрузок и на внешних поверхностях граничных контрольных объемов заданы условия свободного теплового расширения:

$$d\sigma \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (12)$$

где \mathbf{N} — вектор нормали внешней поверхности граничного контрольного объема.

С точки зрения численной реализации, граничные условия (12) представляют из себя систему трех уравнений, содержащих приращения перемещений и их производных в каждой ячейке, соответствующей контрольному объему на границе тела. В среде

Рис. 1. Напряжение σ_{rr}^{cyl} , $t = 60$.Рис. 2. Напряжение σ_{rr}^{cyl} , $t = 120$.

OpenFOAM такие граничные условия реализованы при помощи задания градиента искомых величин на поверхности. Выражая градиент перемещений из условия (12), получим:

$$\nabla \Delta \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{N} = (2\mu \Delta \mathbf{p}_{n-1} - \lambda \text{tr}(\Delta \mathbf{e}_{n-1}) + \alpha(3\lambda + 2\mu)\Delta T_n) \cdot \frac{\mathbf{N}}{2\mu} \quad (13)$$

Данные уравнения решаются на втором шаге алгоритма совместно с системой уравнений равновесия.

При численном исследовании задач важную роль играют искусственные граничные условия, которые связаны с симметрией напряженно деформированного состояния. Использование свойств симметрии постановки краевой задачи позволяет существенно уменьшить расчетную область и, очевидно, время расчета. Эти условия следуют из инвариантности системы уравнений относительно простых преобразований, переводящих искусственные границы (например, плоскости симметрии) в себя [16]. Для цилиндра со свободными боковыми поверхностями, центр оси которого совпадает с центром декартовой системы координат, удобно рассчитывать его одну восьмую часть ($X > 0, Y > 0, Z > 0$), полагая, что координатные плоскости служат плоскостями симметрии. В таком случае для проекций цилиндра на данные плоскости справедливы условия симметрии:

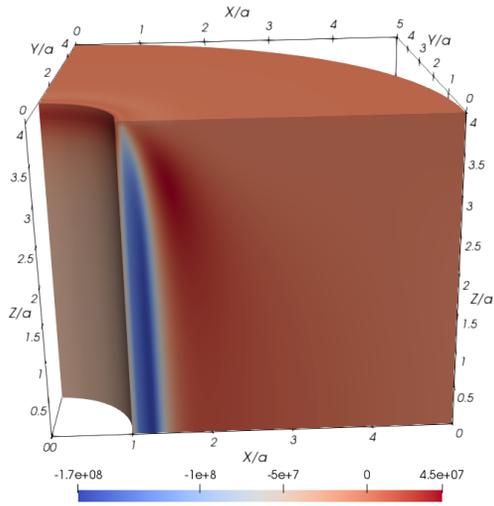
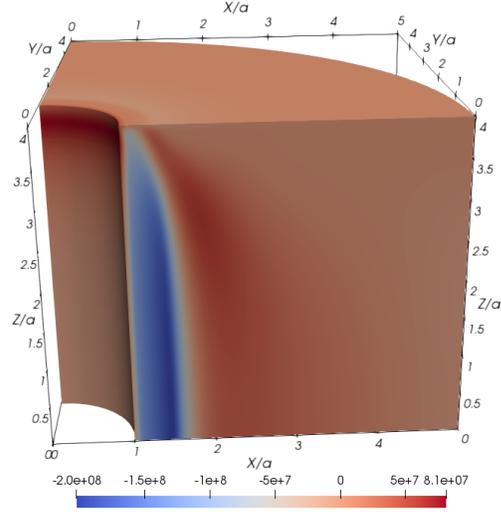
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{M} = 0, \quad (14)$$

где \mathbf{M} — вектор нормали к плоскости симметрии.

В среде OpenFOAM данные условия являются стандартными и реализуются стандартной процедурой “SYMMETRY”. Решатель описанного выше алгоритма, в среде доступен по ссылке [17].

5. Расчет температурных напряжений полого упругопластического цилиндра в условиях нестационарного температурного градиента.

Рассмотрим полый упругопластический цилиндр длины L с внутренним и внешним радиусами $a < r < b$, поверхности которого свободно расширяются при нагреве (12).

Рис. 3. Напряжение σ_{zz}^{cyl} , $t = 60$.Рис. 4. Напряжение σ_{zz}^{cyl} , $t = 120$.

Пусть торцевые поверхности и внешняя поверхность теплоизолированы, а температура внутренней поверхности равномерно увеличивается с течением времени. Предполагается, что скорость изменения температуры достаточна для создания температурного градиента, вызывающего необратимое деформирование материала. Известно что в общем случае неравномерный тепловой градиент в свободно расширяющемся цилиндре может приводить к возникновению пластического течения на внутренней и внешней поверхности в различные моменты времени. Ограничимся случаем, когда пластическое течение возникнет только на внутренней поверхности цилиндра.

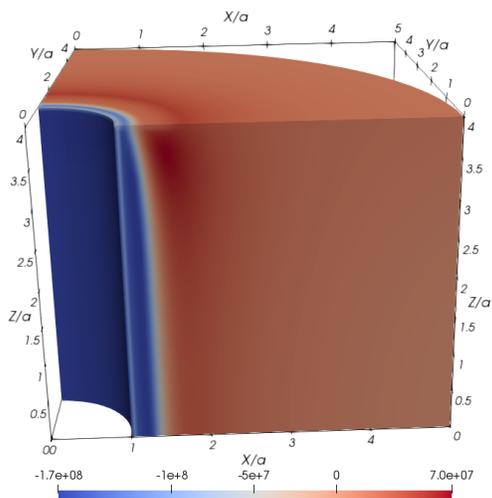
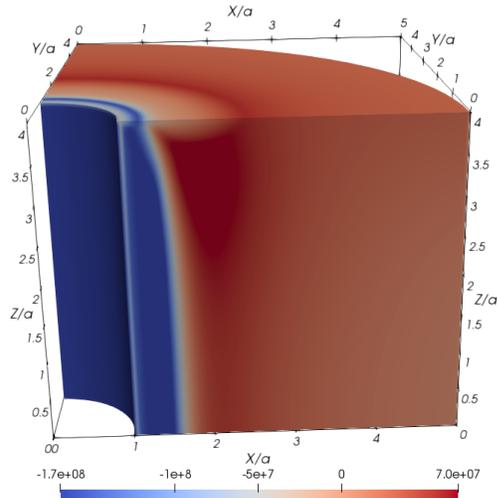
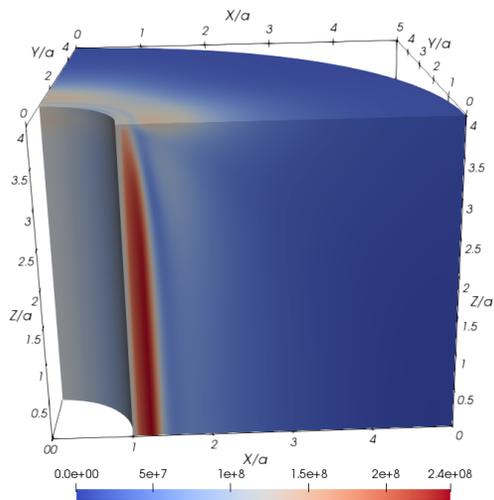
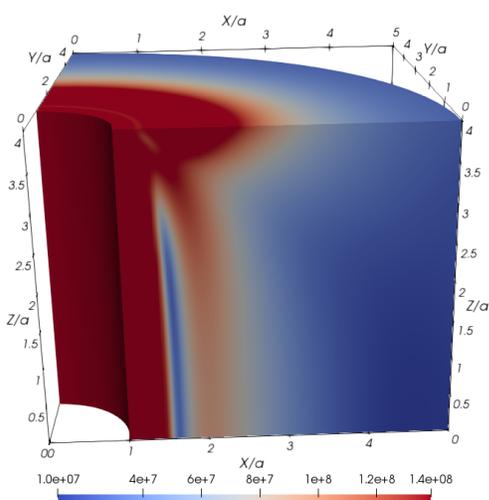
Отметим, что среда OpenFOAM производит расчет только в декартовой системе координат. Для построения тензора напряжений в цилиндрических координатах использовались известные формулы перехода [18]:

$$\sigma_{ij}^{\text{cyl}} = \mathbf{A} \cdot \sigma_{ij} \cdot \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 1 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

где σ_{ij}^{cyl} и σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в цилиндрической (r, φ, z) и декартовой (x, y, z) системе координат соответственно.

Для проверки сходимости решения была проведена серия численных экспериментов с заданной пространственной сеткой и различным значением шага по времени $\Delta t = 1, 2, 4, 8$ секунд. Было установлено, что максимальное различие в значениях модуля вектора перемещений для временным шагов 4 и 8 секунд составило 8.5%. Различие в значениях $|u|$ для временных шагов 1 и 2 секунды составило 0.08%. Далее в расчетах, представленных в статье, использована пространственная сетка $100 \times 100 \times 100$ с шагом по времени в 1 секунду и с соответствующем изменением температуры внутренней поверхности на заданное количество градусов.

Начальная температура цилиндра $T_0 = 300$ К. $L = 0.08$ м, $a = 0.01$ м, $b = 0.05$ м, $k = \text{const} = 8 \cdot 10^8$ Па, $\eta = 4 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\lambda = 91 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 42 \cdot 10^9$ Па. Использовались параллельные вычисления на двадцати процессорах. Было произведено разбиение на равные по длине домены вдоль оси Z . Физическое время расчета 1000000 ячеек за 100

Рис. 5. Напряжение σ_{φ}^{cyl} , $t = 60$.Рис. 6. Напряжение σ_{φ}^{cyl} , $t = 120$.Рис. 7. Эквивалентное напряжение, $t = 60$.Рис. 8. Эквивалентное напряжение, $t = 120$.

временных шагов составило от 20 до 30 минут в зависимости от размеров областей необратимого деформирования на финальном шаге в каждом случае.

В рамках рассматриваемой постановки задачи при расчетах были выявлены особенности формирования зон пластического течения в зависимости от скорости нагрева внутренней поверхности. В частности, было показано, что при нагреве внутренней поверхности со скоростями из промежутка $2 < \partial_t T < 4$ K/s в окрестности внутренней поверхности формируется область течения, положение которой в радиальном направлении достигает максимума на плоскости симметрии, перпендикулярной оси Z ($Z = 0$).

Так же был исследован диапазон скоростей $5 < \dot{T} < 12$ K/s, при котором при развитии процесса необратимого деформирования на внутренней поверхности появляются зоны пластического течения на торцевых поверхностях. Возникновение таких зон (Рис. 5–8) замедляет продвижение упругопластической границы в радиальном направлении от внутреннего радиуса к внешнему. При $\dot{T} > 12$ K/s появляется третья зона течения на внешней поверхности. Интенсивность процесса необратимого деформирования вблизи торцевых поверхностей пропорционально температурному градиенту в радиальном направлении и зависит от длины цилиндра.

На Рис. 1–8 представлены распределения температурных напряжений, рассчитанных при различных временных параметрах. Максимальные значения эквивалентного напряжения соответствуют зоне необратимого деформирования.

5. Заключение.

Проведено численное моделирование процесса необратимого деформирования полого упругопластического цилиндра, подверженного неравномерному нестационарному тепловому воздействию. Алгоритм расчета реализован в среде OpenFOAM. Исследованы особенности формирования нестационарных полей температурных напряжений в рамках трехмерной постановки. Показано, что учет свободного теплового расширения на торцевых поверхностях цилиндра существенным образом влияет на формирование полей температурных напряжений и необратимых деформаций в условиях высоких нестационарных тепловых градиентов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Akinlabi ET, Akinlabi SA. Effect of heat input on the properties of dissimilar friction stir welds of aluminium and copper // American Journal of Materials Science. 2012. Т. 2, № 5. С. 147–152.
- [2] Scanning velocity influence on microstructure, microhardness and wear resistance performance of laser deposited Ti6Al4V/TiC composite / RM Mahamood, ET Akinlabi, M Shukla [и др.] // Materials & design. 2013. Т. 50. С. 656–666.
- [3] Mahamood RM, Akinlabi ET. Functionally graded materials. Springer, 2017.
- [4] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упругопластического шара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4. С. 250–264.
- [5] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [6] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2018. Vol. 2235. P. 811–814.
- [7] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // Journal of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [8] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // Procedia Manufacturing. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [9] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // Procedia Engineering. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [10] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // IAENG International Journal of Applied Mathematics. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.
- [11] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stresses of Hollow Cylinder under Unsteady Thermal Action // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2015. Vol. 2218. P. 1043–1046.

-
- [12] Dats E., Murashkin E. On Unsteady Heat Effect in Centre of the Elastic-Plastic Disk // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2016. Vol. 2223. P. 69–72.
- [13] Tang T. Implementation of solid body stress analysis in OpenFOAM. A course at Chalmers University of Technology, 2013.
- [14] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // Mechanics of Solids. 2014. Mar. T. 49, № 2. С. 218–224. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654414020113>.
- [15] Горшков С. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Расчет плоского поля температурных напряжений в условиях пластического течения и разгрузки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3. С. 169–175.
- [16] Садовская О. В. Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 173. С. 891–896.
- [17] <https://github.com/aceberg9/myspace/tree/master/tpFoam>.
- [18] Bower A. Applied Mechanics of Solids. Taylor & Francis, 2009.

S. A. Gorshkov, E. P. Dats, E. V. Murashkin

AN APPROACH OF SIMULATION OF THE PROCESSES OF TEMPERATURE STRESSES FORMATION BY OPENFOAM

Institute of Automatics and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Using the OpenFOAM numerical simulation environment, an algorithm for calculating the process of irreversible material deformation is implemented within the framework of the theory of temperature stresses, taking into account the connectedness of the temperature fields and plastic deformations. The three-dimensional problem of the irreversible deformation of an elastoplastic cylinder subjected to an unsteady thermal gradient is solved. The influence of the rate of change of the thermal field on the formation of the stress-strain state of the material is investigated.

Keywords: thermal stress, ideal plasticity, yield, heat conduction, thermoelasticity

REFERENCES

- [1] Akinlabi ET, Akinlabi SA. Effect of heat input on the properties of dissimilar friction stir welds of aluminium and copper // American Journal of Materials Science. 2012. T. 2, № 5. С. 147–152.
- [2] Scanning velocity influence on microstructure, microhardness and wear resistance performance of laser deposited Ti6Al4V/TiC composite / RM Mahamood, ET Akinlabi, M Shukla [и др.] // Materials & design. 2013. T. 50. С. 656–666.
- [3] Mahamood RM, Akinlabi ET. Functionally graded materials. Springer, 2017.
- [4] Dats E.P., Mokrin S.N., Murashkin E.V. Calculation of accumulated residual deformation in the process of "heating-cooling" of an elastoplastic ball // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit State Mechanics. 2012. № 4. С. 250–264.
- [5] Murashkin E., Dats E. Applications of Multi-Physics Modelling for Simulations of Thermo-Elastic-Plastic Materials // Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Corfu Island, Greece, 24 - 27 Aug, 2017: Conference Publishing Services of IEEE, 2018. P. 76–80.
- [6] Murashkin E., Dats E. Thermal Residual Stresses Computing in Elastic-Plastic Ball with Rigid Inclusion under Heat Treatments // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2018. Vol. 2235. P. 811–814.

Gorshkov Sergei Aleksandrovich

e-mail: aceberg93@ya.ru, Engineer, Institute of Automatics and Control Processes of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Dats Evgeniy Pavlovich

e-mail: dats@dvo.ru, PhD, Researcher, Institute of Applied Mathematics of FEB RAS, Vladivostok, Russia

Murashkin Evgenii Valerievich

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state registration number AAAA-A20-120011690132-4) and RFBR projects (18-01-00844, 20-01-00666), and financial support of the SA (NRF) / RUSSIA (RFBR) joint science and technology research collaboration (project No. RUSA180527335500/19-51-60001)

-
- [7] Murashkin E. V., Dats E. P., Klindukhov V. V. Numerical Analysis of the Elastic-Plastic Boundaries in the Thermal Stresses Theory Frameworks // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2017. Vol. 937. p. 012060.
- [8] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 427–434.
- [9] Dats E., Stadnik N., Murashkin E. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 891–896.
- [10] Murashkin E., Dats E. Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoelasticity // *IAENG International Journal of Applied Mathematics*. 2017. Vol. 47. P. 261 – 264.
- [11] Dats E., Mokrin S., Murashkin E. Calculation of the Residual Stresses of Hollow Cylinder under Unsteady Thermal Action // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2015. Vol. 2218. P. 1043–1046.
- [12] Dats E., Murashkin E. On Unsteady Heat Effect in Centre of the Elastic-Plastic Disk // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2016. Vol. 2223. P. 69–72.
- [13] Tang T. Implementation of solid body stress analysis in OpenFOAM. A course at Chalmers University of Technology, 2013.
- [14] Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions // *Mechanics of Solids*. 2014. Mar. T. 49, № 2. C. 218–224. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654414020113>.
- [15] Gorshkov S. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Calculation of a flat field of temperature stresses under conditions of plastic flow and unloading // *Bulletin of the I.Ya. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit State Mechanics*. 2014. № 3. C. 169–175.
- [16] Sadovskaya O. V. Numerical solution of spatial dynamic problems of the moment theory of elasticity with boundary conditions of symmetry // *J. calc. mat. and mat. physical*. 2017. T. 173. C. 891–896.
- [17] <https://github.com/aceberg9/myspace/tree/master/tpFoam>.
- [18] Bower A. *Applied Mechanics of Solids*. Taylor & Francis, 2009.

М. Ф. Аноп, Е. В. Мурашкин

О РАСЧЕТЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ НАГРУЖАЮЩЕГО УСИЛИЯ В УСЛОВИЯХ МЕДЛЕННОГО КРИПА В ОКРЕСТНОСТИ ОДИНОЧНОГО МИКРОДЕФЕКТА

Библиотека академии наук РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматривается проблема расчета величин оптимального нагружающего усилия при деформировании материала в условиях медленного крипа. Решение краевой задачи строится в рамках модели больших упругоползучих деформаций. Полученное численное решение используется для поиска оптимального процесса нагружения необходимого для достижения заданного размера одиночного микродефекта. Поиск оптимального решения проводится на множестве полиномов сетепни 5 методе полного перебора. Полученное решение анализируется графически и сравнивается с ранее полученными результатами.

Ключевые слова: медленный крип, микродефект, остаточное напряжение, большие деформации, целевая функция, полный перебор

DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.015

УДК: 539.374

1. Предварительные замечания.

Современная технологическая практика активно использует методы обработки конструкционных материалов и метаматериалов давлением в условиях медленного крипа при повышенных температурах рабочей среды [1, 2, 3]. Полученные в результате такой обработки материалы обладают функционально-градиентными свойствами, а возникающие в изделии остаточные технологические напряжения требуют особой точности

© Анов М. Ф., Мурашкин Е. В. 2020

Аноп Максим Федорович

e-mail: manop@dvo.ru, младший научный сотрудник, Библиотека академии наук РАН, г. Санкт-Петербург, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 18-01-00844, № 19-51-60001.

Поступила 25.02.2020

расчетов и адекватности подходов математического моделирования. Зачастую исследования проводятся в рамках теории упругости, что ограничивает классы используемых в технологической практике структур, материалов и физикохимических процессов. Анализ аддитивных технологий производства функционально-градиентных материалов не основан на современных методах механики аддитивных технологий и процессов роста, что может привести к принципиальным ошибкам. Развитие идей современной механики наращиваемых тел обсуждаются в публикациях [4, 5, 6]. Отметим, что медленный крип (ползучесть) материалов при повышенных температурах не описывается линейными теориями.

При моделировании поведения материалов на этапе установившейся ползучести можно трактовать его как нелинейно вязкое. Однако, использование существующих нелинейных моделей затруднено отсутствием соответствующего математического аппарата. Особенно это характерно для стадии неустановившейся ползучести. В теории идеальной пластичности некоторый прогресс был достигнут на основе использования кусочно-линейных потенциалов скоростей деформаций. Д.Д. Ивлевым и Г.И. Быковцевым было замечено [7], что таким же способом может быть построена теория упругости и динамика вязкой жидкости. Г.И. Быковцевым [8] была указана подобная возможность для моделирования необратимого моделирования материалов.

В качестве математической модели примем модель больших упругопластических деформаций подробно изложенную в серии публикаций [9, 10, 11], приняв обозначения принятые в них. Указанная модель была обобщена на случай учета свойств медленного крипа [12, 13]. В работах [14, 15, 16] были получены решения ряда краевых задач разрабатываемой теории. По результатам численных экспериментов были сформулированы оптимизационные задачи и получены результаты методами Монте-Карло и роя пчел [17, 18]. В настоящей работе проведен поиск оптимального решения методом полного перебора и сравним результаты с ранее полученными.

2. Постановка оптимизационной задачи. Формальная постановка оптимизационной задачи для рассматриваемой краевой можно сформулировать следующим образом: найти минимальные внешние нагрузки, которые нужно симметрично прикладывать к поверхности тела так, чтобы в конечный момент времени размер микропоры в центре имел заданное значение. Математически это можно записать следующим образом. Рассмотрим функционал

$$J(\varphi(\cdot)) = \max P(\varphi(\cdot)) = \int_{s(\cdot)}^{R(\cdot)} \frac{\Sigma(e_{rr}, e_{\theta\theta})}{r} dr.$$

И следующую оптимизационную задачу $J(\varphi(\cdot)) \rightarrow \inf$, при условии, что функция, определяющая параметры процесса деформирования материала

$$f(t) = 269 \cdot 10^{-7} \left(1 - \exp \left(\int_0^t \left(\sum_{i=2}^5 \alpha_i \tau^i \right)^2 d\tau \right) \right)$$

Определяется полиномом пятой степени с неизвестными коэффициентами, принадлежащими интервалу $\alpha_i \in [-2; 2]$. То есть, по сути, требуется найти набор коэффициентов α_i , доставляющих минимум заданному функционалу.

Таким образом поставленную задачу можно рассматривать как пример задачи дискретной оптимизации. Целевая функция вычисляется численно и это накладывает

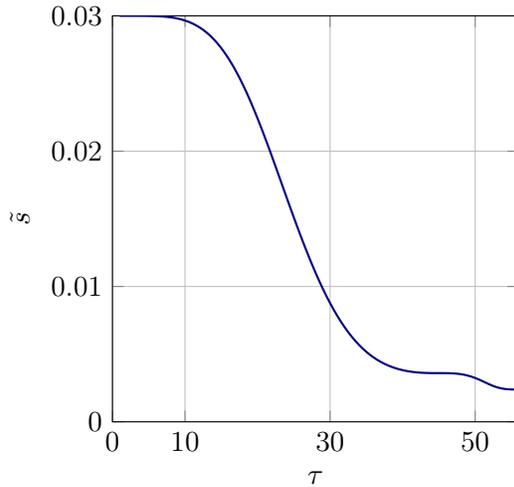


Рис. 1. Оптимальный радиус

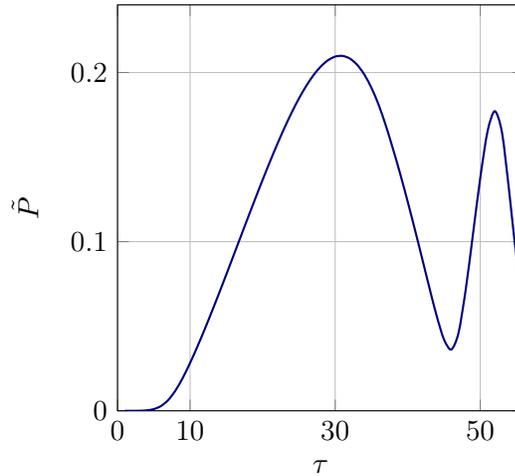


Рис. 2. Оптимальное давление

серьезные ограничения на выбор оптимизационного метода – невозможно использование методов порядка выше нулевого.

Представим множество допустимых решений задачи

$$\Omega = \{(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) | \alpha_i \in [-2; 2]\}.$$

в виде конечного множества: 5-мерного куба в пространстве коэффициентов α , разбитого на равномерные интервалы сеткой с выбранным шагом h . От размера шага сетки и зависит точность метода и количество проверяемых элементов.

3. Ход решения поставленной задачи. Для решения поставленной оптимизационной задачи воспользуемся наиболее простым и универсальным алгоритмом перебора (brute force algorithm). Данный метод является наиболее простым для реализации и гарантирующим с определенной точностью, что будет найден наилучший результат.

При его использовании определяется значение целевой функции для всех возможных наборов коэффициентов полинома на заданной сетке. До последнего времени их широкому использованию мешала их вычислительная сложность. Появление многоядерных процессоров и ускорителей позволяет снизить остроту этой проблемы и расширить область применения алгоритмов перебора. Вычислительный процесс строится довольно просто.

Алгоритм поиска решения оптимизационной задачи:

Шаг 1. Генерация набора коэффициентов полинома – узел построенной сетки.

Шаг 2. Вычисление значения целевой функции и проверка на оптимальность.

Эти шаги повторяются, пока не будут перебраны все возможные комбинации значений коэффициентов полинома.

На рисунках 1-2 показаны, найденные в результате полного перебора, оптимальные значения нагружающего усилия и размеров микрополости.

На рисунке 3 приведен график сходимости метода полного перебора. Примерно через 1500 итераций метод сошелся к оптимальному значению целевой функции 0.20961.

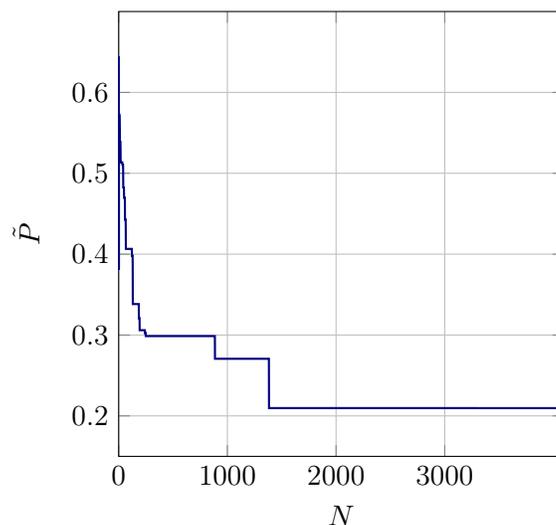


Рис. 3. Сходимость метода полного перебора

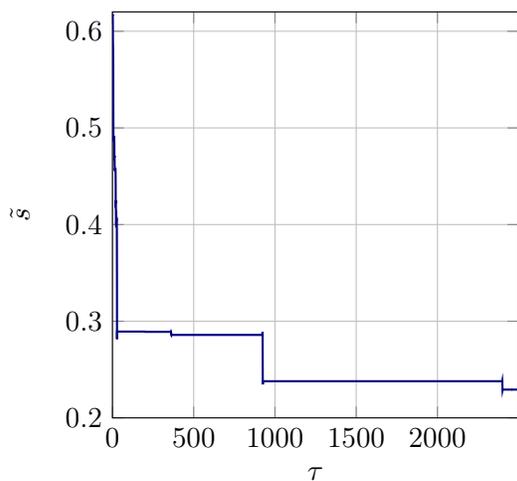


Рис. 4. Оптимальный радиус

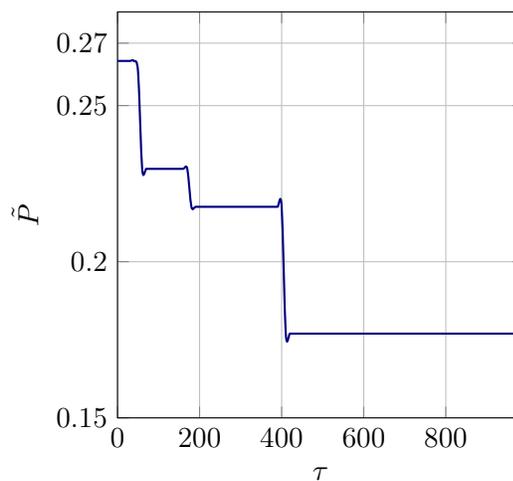


Рис. 5. Сходимость метода роя пчел

Анализ полученных результатов. На рисунках 4, 5 представлены графики сходимости методов случайного поиска и роя пчел, использовавшиеся для нахождения оптимального решения ранее [?].

Как видно из графиков методы случайного поиска, к которым можно отнести и метод роя пчел обладают большей вычислительной эффективностью и сходятся к оптимальному решению за меньшее число итераций. Однако, рассмотренный вариант решения оптимизационной задачи все же обладает рядом достоинств, и его использование для решения данной задачи обосновано. Достоинства метода полного перебора в

том, что он позволяет гарантированно найти глобальный экстремум с заданной точностью. Недостаток оптимизационного алгоритма – высокая вычислительная трудность, растущая экспоненциально в зависимости от выбора шага сетки и количества искомым оптимальных коэффициентов полинома.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Akinlabi E.T., Akinlabi S.A. Effect of heat input on the properties of dissimilar friction stir welds of aluminium and copper // *American Journal of Materials Science*. 2012. Т. 2, № 5. С. 147–152.
- [2] Scanning velocity influence on microstructure, microhardness and wear resistance performance of laser deposited Ti6Al4V/TiC composite / R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, M. Shukla [и др.] // *Materials & design*. 2013. Т. 50. С. 656–666.
- [3] Mahamood R.M., Akinlabi E.T. *Functionally graded materials*. Springer, 2017.
- [4] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in asymmetric theories of mechanics of growing solids // *Izv. Ros. Akad. Nauk Mekh. Tv. Tela*. 2019. № 6. С. 38–46.
- [5] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a class of constitutive equations on a growing surface // *Vestn. ChGPU I.Ya. Yakovleva. Ser. Lim. St. Mech*. 2019. № 3(41). С. 11–29.
- [6] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci*. Т. 23.
- [7] Быковцев Г. И. Ивлев Д. Д. *Теория пластичности*. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [8] Быковцев Г.И. Общие свойства уравнений нелинейной теории упругости при кусочно-линейных потенциалах // *Прикладная математика и механика*. 1996. Т. 6, № 3. С. 505–515.
- [9] Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // *Докл. АН СССР*. Т. 311. 1990. С. 59–62.
- [10] Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // *Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук*. 2006. № 4.
- [11] Буренин А. А. Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
- [12] Vazhin A.A., Murashkin E.V. Creep and stress relaxation in the vicinity of a micropore under the conditions of hydrostatic loading and unloading // *Doklady Physics / Springer*. Т. 57. 2012. С. 294–296.
- [13] Vazhin A.A., Burenin A.A., Murashkin E.V. Simulation of the process of the accumulation of large irreversible deformations under plastic flow and creep conditions // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Т. 80, № 2. С. 182–189.
- [14] Мурашкин Е.В. Расчет параметров нагружения полого шара в условиях больших упругоползучих деформаций // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2014. Т. 14, № 1.
- [15] Аноп М.Ф., Балашникова А.В., Мурашкин Е.В. О методах расчета оптимальных остаточных напряжений в окрестности дефекта сплошности в модели больших упругоползучих деформаций // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2015. № 4. С. 125–133.
- [16] Anop M., Murashkin E. On the pressure calculation by the zero-order optimization method for the elastocreep material with microdefect // *Topical problems of continuum mechanics*. 2015. С. 422–426.
- [17] The Methods for Optimum Pressure Computing in Elastic-Creep Microdefect Materials / M. Anop, E. Murashkin, V. Mikhailichuk [и др.] // *Transactions on Engineering Technologies*. Springer, 2016. С. 83–94.
- [18] Anop M., Murashkin E., Polonik M. On Zero-Order Optimization in Problem of the Pressure Computing in Finite Elastic-Creep Deformations // *Key Engineering Materials / Trans Tech Publ*. Т. 685. 2016. С. 300–304.

M. F. Anop, E. V. Murashkin

ON THE CALCULATION OF THE OPTIMAL VALUE OF THE LOADING FORCE IN THE CONDITIONS OF A SLOW CREEP IN THE VICINITY OF A SINGLE MICRODEFECT

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.*

Abstract. In the paper the problem of calculating of the optimal loading pressure during material deformation under creep is considered. The solution of the boundary-value problem is constructed within the frameworks of the model of large elastic-creep deformations. The obtained numerical solution is used to find the optimal loading process necessary to achieve a given size of a single microdefect. The search for the optimal solution is carried out on the set of 5–order polynomials by a brute-force search. The resulting solution is analyzed graphically and compared with previously obtained results.

Keywords: creep, microdefect, residual stress, large deformations, objective function, exhaustive search

REFERENCES

- [1] Akinlabi E., Akinlabi S. Effect of heat input on the properties of dissimilar friction stir welds of aluminium and copper // American Journal of Materials Science. 2012. Vol. 2, no. 5. P. 147–152.
- [2] Scanning velocity influence on microstructure, microhardness and wear resistance performance of laser deposited Ti6Al4V/TiC composite / R. Mahamood, E. Akinlabi, M. Shukla et al. // Materials & design. 2013. Vol. 50. P. 656–666.
- [3] Mahamood R., Akinlabi E. Functionally graded materials. Springer, 2017.
- [4] Murashkin E., Radayev Y. On a differential constraint in asymmetric theories of mechanics of growing solids // Izv. Ros. Akad. Nauk Mekh. Tv. Tela. 2019. no. 6. P. 38–46.
- [5] Murashkin E., Radayev Y. On a class of constitutive equations on a growing surface // Vestn. ChGPU I.Ya. Yakovleva. Ser. Lim. St. Mech. 2019. no. 3(41). P. 11–29.
- [6] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. T. 23.
- [7] Bykovtsev G.I. I. D. Plasticity theory. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p.
- [8] Bykovtsev G. General properties of equations of the nonlinear theory of elasticity at piecewise linear potentials // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1996. Vol. 6, no. 3. P. 505–515.
- [9] Bykovtsev G., Shitikov A. Finite deformations of elastoplastic media // Doc. USSR Academy of Sciences. Vol. 311. 1990. P. 59–62.
- [10] Kovtanyuk L., Shitikov A. On the theory of large elastoplastic deformations of materials with allowance for temperature and rheological effects // Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences. 2006. no. 4.

Maxim F. Anop, Researcher, The Library of the Russian Academy of Sciences, Birzhevaya liniya, 1, Saint-Petersburg, 199034, Russian Federation.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state registration number AAAA-A20-120011690132-4) and RFBR projects (18-01-00844, 20-01-00666), and financial support of the SA (NRF) / RUSSIA (RFBR) joint science and technology research collaboration (project No. RUSA180527335500/19-51-60001)

-
- [11] Burenin A.A. K. L. Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p.
 - [12] Bazhin A., Burenin A., Murashkin E. Simulation of the process of the accumulation of large irreversible deformations under plastic flow and creep conditions // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2016. Vol. 80, no. 2. P. 182–189.
 - [13] Bazhin A., Murashkin E. Creep and stress relaxation in the vicinity of a micropore under the conditions of hydrostatic loading and unloading // Doklady Physics / Springer. Vol. 57. 2012. P. 294–296.
 - [14] Murashkin E. Calculation of the loading parameters of a hollow ball under conditions of large elastic creeping deformations // News of the Saratov University. New series. Series Mathematics. Mechanics. Computer science. 2014. Vol. 14, no. 1.
 - [15] Anop M., Balashnikova A., Murashkin E. On methods for calculating optimal residual stresses in the vicinity of a continuity defect in a model of large elastic creeping strains // Bulletin of the I.Ya Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Limit Mechanics. 2015. no. 4. P. 125–133.
 - [16] Anop M., Murashkin E. On the pressure calculation by the zero-order optimization method for the elastocreep material with microdefect // Topical problems of continuum mechanics. 2015. P. 422–426.
 - [17] The Methods for Optimum Pressure Computing in Elastic-Creep Microdefect Materials / M. Anop, E. Murashkin, V. Mikhailichuk et al. // Transactions on Engineering Technologies. Springer, 2016. P. 83–94.
 - [18] Anop M., Murashkin E., Polonik M. On Zero-Order Optimization in Problem of the Pressure Computing in Finite Elastic-Creep Deformations // Key Engineering Materials / Trans Tech Publ. Vol. 685. 2016. P. 300–304.

**ИНФОРМАЦИЯ О ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ СЕМИНАРАХ
В ИНСТИТУТЕ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО РАН
СЕМИНАР ПО МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ИМ. Л.А. ГАЛИНА¹
под руководством академика И.Г. Горячевой и профессора Ю.Н. Радаева**

30 ноября 2018 г.,
заседание 763

Заседание посвящено научному наследию выдающегося российского ученого механика и математика, доктора физико–математических наук, профессора, иностранного члена Национальной академии наук Республики Армения Александра Владимировича Манжирова.

А.В. Манжиров — один из крупнейших отечественных ученых в области механики и прикладной математики. Им были заложены фундаментальные основы математической теории наращиваемых тел, позволяющей эффективно исследовать чрезвычайно широкий круг весьма сложных технологических и природных аддитивных процессов. Он входил в число признанных в нашей стране и за рубежом ведущих специалистов по механике контактного взаимодействия. Фундаментальную математическую ценность имеют достижения А.В. Манжирова в теории смешанных интегральных уравнений. Эти достижения позволили также впервые исследовать целый ряд актуальных проблем контакта и износа тел с сильно неоднородными свойствами и со сложной геометрической структурой поверхности.

¹Информация предоставлена ученым секретарем семинара Д.А. Паршиным.

30 ноября 2018 г.,
заседание 763

Д.А. Паршин

МЕХАНИКА РАСТУЩИХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.26.20.001

Аннотация. В докладе рассматриваются вопросы поверхностного роста деформируемых твердых тел. Обсуждаются развитые профессором А.В. Манжировым базовые подходы к описанию механического поведения таких тел, опирающиеся на особую кинематику их деформирования. Эти подходы позволяют с единых позиций адекватно описывать разнообразные процессы аддитивного формирования твердых тел с учетом специфики деформационных процессов, протекающих вблизи границы их роста при ее вступлении во взаимодействие со вновь присоединяемым материалом, а также с учетом специфической внутренней геометрии растущего тела, порождаемой конкретной реализуемой программой его наращивания. Приводятся данные А.В. Манжировым формулировки неклассических начально-краевых задач для исследования закономерностей эволюции напряженно-деформированного состояния кусочно-непрерывно наращиваемых тел, формируемых из материалов, проявляющих изменяющиеся с возрастом реологические механические свойства. Описываются разработанные им методы решения таких задач. Применение построенной А.В. Манжировым теории иллюстрируется на конкретных примерах моделирования различных аддитивных процессов. Наглядно демонстрируется множество интересных механических эффектов, присущих только растущим деформируемым телам и обнаруженных благодаря предложенным моделям.

30 ноября 2018 г.,
заседание 763

К.Е. Казаков

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ТРИБОЛОГИИ

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлунского РАН, г. Москва, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.12.85.002

Аннотация. В докладе рассказывается о теории смешанных интегральных уравнений и специальном методе их решения, разработанном профессором А.В. Манжировым, а также о соответствующих приложениях в контактной механике и трибологии. При помощи обобщенного проекционного метода А.В. Манжирова решения смешанных интегральных уравнений и их систем были впервые изучены проблемы контакта и износа для вязкоупругих стареющих тел с неоднородными и шероховатыми упругими покрытиями во всех возможных вариантах постановки. Названный метод позволяет строить аналитические решения плоских и осесимметричных задач как одиночного, так и множественного контакта. Модификация этого метода для случаев, когда в исходных уравнениях содержатся быстро изменяющиеся функции, дает возможность эффективно исследовать контактные задачи и задачи износа для поверхностно-модифицированных сильно неоднородных тел, а также точно учитывать в таких задачах сложную реальную форму контактирующих поверхностей. Проводится анализ зависимостей, получаемых при решении задач указанных типов. Приводятся наглядные иллюстрации, убедительно показывающие преимущества используемого подхода. Полученные результаты позволяют сделать качественные и количественные выводы о характере контакта рассматриваемых тел и особенностях сложных эволюционных процессов, протекающих при их контактном взаимодействии и износе.

14 декабря 2018 г.,
заседание 764

Ю.Н. Радаев

ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕПЛОТНО СВЯЗАННЫХ СРЕД С ВНУТРЕННИМ ТРЕНИЕМ И СЦЕПЛЕНИЕМ

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.74.89.003

Аннотация. Рассматриваются трехмерные течения идеально пластических сред, подчиняющихся критерию текучести Кулона–Мора, и обобщенных пластических тел Прандтля. С прикладной точки зрения речь идет о моделировании состояний и достаточно медленных процессов движения сыпучих неплотно связанных сред. Основой математического моделирования выступает представление об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений и приращения тензора деформации, а также об ортогональных им направлениях (определяющих ориентацию мгновенно нерастяжимых директоров), расположенных в плоскости, ортогональной главной оси приращения тензора деформации, соответствующей промежуточному главному приращению деформации. В асимптотических осях получены канонические диадные представления для тензора напряжений и приращения тензора деформации и с их помощью — новые формы трехмерных уравнений равновесия. Обсуждаются различные (симметризованный и несимметризованный) варианты представления критерия текучести Кулона–Мора в терминах главных нормальных напряжений и соответствующие формулировки ассоциированного закона течения. Проанализированы уравнения ассоциированного закона течения, которые затем используются при изучении кинематики необратимого течения. Показано, что приращение дилатации всегда положительно (кроме случая, когда среда Кулона–Мора вырождается в идеально пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Установлено, что в процессе течения сред Кулона–Мора материальные волокна, ориентированные вдоль ортогональных асимптотическим директорам направлений, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. Получено диадное представление приращения тензора деформации в терминах мгновенно нерастяжимых директоров. Рассматривается кинематическое ограничение, которое накладывает ассоциированный закон на течения сред Кулона–Мора. Указанное ограничение трактуется как условие, позволяющее определить величину промежуточного главного напряжения, которое не входит в формулировку критерия Кулона–Мора. Показано, что при отсутствии внутреннего трения в среде промежуточное главное напряжение является точно медианным.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00844.

21 декабря 2018 г.,
заседание 765

Б.Д. Аннин

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ГОРНЫХ ПОРОД

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.35.32.004

Аннотация. Доклад посвящен развитию аналитических и численных методов решения неоднородных упругопластических задач с приложениями в механике твердого тела и горных пород. Аналитические решения продолжают исследования Л.А. Галина по упругопластическому кручению стержней и решению плоской упругопластической задачи. Рассмотрен алгоритм численного решения двумерных плоских и осесимметричных контактных задач упругопластического деформирования однородных плит, составных пакетов и многослойных плит. Общий метод решения упругопластических задач основан на численной реализации вариационных неравенств. Приводятся результаты по исследованию некоторых задач взрывной штамповки и косоугольного соударения пластин, типичного для процесса сварки взрывом. Основным интересом в данной задаче является эффект волнообразования, который состоит в том, что на поверхности контакта соударяющихся пластин наблюдаются волны синусоидальной формы. В результате численных расчетов показано, что имеет место аналогия между динамической потерей устойчивости продольно сжатого стержня по схеме Лаврентьева–Ишлинского и поведением поверхностного слоя в окрестностях точки контакта соударяющихся пластин. Рассмотрена задача формообразования крыловой панели самолета SSJ-100. Предложенные определяющие соотношения связи скоростей деформаций установившейся ползучести с напряжениями описывают установившуюся трансверсально-изотропную ползучесть с различными характеристиками на растяжение и сжатие. Компьютерное моделирование рассмотренных процессов формообразования заключается в последовательном решении методом конечных элементов трехмерных квазистатических задач упругопластического деформирования, релаксации и разгрузки с учетом больших перемещений и углов поворота, анизотропии и разнородности материала, а также с определением граничных условий по заданным остаточным перемещениям. Предложенный итерационный процесс позволил определить искомые граничные перемещения. Приведенные результаты моделирования могут быть использованы при расчете штамповой оснастки, определении технологичности панели, контроле появления брака в процессе формообразования.

18 января 2019 г.,
заседание 766

Д.С. Лисовенко

**АУКСЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ,
КРИСТАЛЛОВ, СЛОИСТЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
КОМПОЗИТОВ**

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.80.87.005

Аннотация. В докладе приведен обзор работ по структурам и свойствам материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона. Представлены исследования отрицательного коэффициента Пуассона в кристаллических телах. Выявлено свыше 450 кристаллических ауксетиков среди 2000 кристаллов, экспериментальные данные о которых собраны в энциклопедическом справочнике Ландолт-Бернштейна (том 29а). Установлены классификационные схемы для ауксетиков из кубических и гексагональных кристаллов и условия для поиска кристаллических ауксетиков и ауксетиков в среднем. Выявлены ауксетики среди новых фуллеритов и углеродных алмазоподобных материалов. В рамках теории упругости анизотропного тела впервые применена модель трубки с цилиндрической анизотропией для описания механических свойств нано/микротрубок. Для задач растяжения и кручения в рамках подхода Сен-Венана получены выражения для модуля Юнга, коэффициента Пуассона и крутильной жесткости для нано/микротрубок из монокристаллов различных кристаллических систем. Показано, что более 1000 нано/микротрубок проявляют ауксетические свойства. Впервые установлен линейный прямой и обратный эффект Пойнтинга для хиральных нано/микротрубок.

В рамках теории упругости анизотропного тела проанализированы эффективные упругие характеристики двухслойных слоистых композитов, состоящих из кубических и гексагональных кристаллов, при растяжении. Показано, что для таких композитов нарушается правило смесей, а эффективный модуль Юнга и коэффициент Пуассона могут даже превосходить модули Юнга и коэффициенты Пуассона исходных кристаллов. Проведено исследование эффективных упругих свойств трехслойных пластин, состоящих из кубических кристаллов, при растяжении и изгибе. Проведен сравнительный анализ поверхностных волн Релея и Лява для изотропных материалов с положительным и отрицательным коэффициентом Пуассона.

15 февраля 2019 г.,
заседание 767

М.В. Шитикова

**НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГИХ
АУКСЕТИКОВ**

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.17.34.006

Abstract. Nowadays material engineers are looking for the methods rising operating characteristics of traditional materials via creating the structures possessing essential abnormal deformational features. Materials with negative Poisson's ratios which are capable to extend (contract) in the direction perpendicular to the direction of their extension (contraction) belong to such abnormal materials and they are called "auxetics". There are a lot of papers devoted to auxetic materials, however, the majority of them are dealing with the internal structure of auxetics, experimental determination of Poisson's ratios, as well as with the description of features of different auxetics. The papers discussing the mathematical models describing the behavior of viscoelastic auxetics are rare, and there are practically no studies devoted to the solution of boundary-value dynamic problems with such materials. Two viscoelastic models are studied for the cases when the shear and bulk operators are set in terms of the simplest fractional derivative Kelvin–Voigt and Maxwell models. Using the algebra of dimensionless Rabotnov fractional operators it is shown that materials described by such models are viscoelastic auxetics, because Poisson's ratios of such materials are time-dependent operators which could take on both positive and negative magnitudes. It has been found that if the shear and bulk operators of the material are governed by the fractional derivative Kelvin–Voigt model, then such a material, being at the initial moment the auxetic, loses with time its auxetic properties and becomes the ordinary material with a positive Poisson's ratio. But when the shear and bulk operators of the material are determined by the fractional derivative Maxwell model, then at the initial moment such a material possesses the positive magnitude of the Poisson's ratio, and with time it loses conventional properties and become an auxetic material with the negative magnitudes of the Poisson's ratio.

22 марта 2019 г.,
заседание 768

В.П. Радченко, М.Н. Саушкин

ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ И РЕЛАКСАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВСЛЕДСТВИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ В ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.68.88.007

Аннотация. В докладе рассматриваются задачи реконструкции остаточных напряжений и пластических деформаций после процедур технологического поверхностно пластического упрочнения гладких цилиндрических и плоских деталей, сводящиеся к динамическим или квазистатическим контактными задачам. Разработан метод решения обратных краевых задач такого типа с использованием частично известной экспериментальной информации о распределении одной и/или двух компонент тензора остаточных напряжений. Введен феноменологический параметр анизотропии поверхностного упрочнения, позволяющий описать принципиально разное распределение остаточных напряжений в случаях изотропного (гидро- и пневмодробеструйная обработка микрошариками, механическое ультразвуковое упрочнение и др.) и неизотропного (обкатка роликом, алмазное выглаживание, дорнование и др.) упрочнения. Приводятся результаты обстоятельной экспериментальной проверки результатов моделирования. Предложены подходы для обобщения методик на упрочненные детали сложной формы (лопатки газотурбинного двигателя, круговой концентратор диска). Разработан метод расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) в мелких надрезах цилиндрических деталей (полукруговые и V-образные надрезы) после опережающего поверхностно пластического деформирования. Исследовано влияние анизотропии упрочнения на формирование НДС в одиночных концентраторах и периодических системах концентраторов. Разработан метод решения краевых задач релаксации остаточных напряжений с начальным НДС (после упрочнения) в условиях высокотемпературной ползучести для полых и сплошных цилиндрических поверхностно упрочненных деталей при сложном квазистатическом температурно-силовом напряжении: термоэкспозиция (температурная выдержка при отсутствии внешних сил), осевое растяжение, кручение, внутреннее давление и их комбинации. Адекватность метода иллюстрируется большим объемом сравнительного анализа расчетных и экспериментальных данных. Обсуждаются вопросы влияния режимов упрочнения, температурных выдержек и ползучести на кинетику микроструктуры материала и физико-механических параметров (микротвердость, шероховатость) упрочненных цилиндрических и плоских деталей из различных сталей и сплавов. Экспериментально установлено повышение значений микротвердости для всех типов упрочненных образцов по сравнению с неупрочненными, а испытания на ползучесть приводят к уменьшению значений микротвердости в упрочненных образцах вплоть до исходного состояния для неупрочненных образцов, что связывается с релаксацией остаточных напряжений. Проводится анализ теоретических и экспериментальных результатов при решении указанных типов задач.

26 апреля 2019 г.,
заседание 769

А.А. Буренин

**БОЛЬШИЕ НЕОБРАТИМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ МАТЕРИАЛОВ В
УСЛОВИЯХ ИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА ЗА СЧЕТ
ПОЛЗУЧЕСТИ И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ**

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.16.40.008

Аннотация. Предлагается математическая модель больших деформаций материалов, обладающих упругими, вязкими и пластическими свойствами. Необратимые деформации не разделяются на пластические деформации и деформации ползучести и отличны при этом только механизмом их производства. Определения обратимых и необратимых деформаций задаются формулированием для таких составляющих полных деформаций соответствующих дифференциальных уравнений их изменения (переноса). При росте нагружающих усилий необратимые деформации первоначально накапливаются за счет процесса ползучести, а при выходе напряженных состояний на поверхность нагружения меняется механизм их производства с вязкого (ползучесть) на пластический. Упругопластические границы оказываются местом смены механизмов производства необратимых деформаций с вязкого на пластический или наоборот. Непрерывность в росте необратимых деформаций обеспечивается соответствующим выбором закона ползучести и пластического потенциала (условия пластичности). Рассмотрены простейшие краевые задачи в рамках данной модели, где указаны подходы в подобном выборе.

07 июня 2019 г.,
заседание 770

F. dell'Isola

**SYNTHESIS OF METAMATERIALS: NEW EXPERIMENTAL AND
THEORETICAL CHALLENGES**

*International Research Center of University of L'Aquila (MMoCS),
Italy Sapienza University of Rome, Italy*

УДК:539.374

DOI:10.37972/chgpu.2020.56.75.009

Abstract. Modern 3D-printing technology allows for the construction of complex microstructures. Therefore the problem of designing novel metamaterials became important for applications. We discuss the concept of synthesis of exotic metamaterials having a specific behavior and we show some theoretical and experimental results. We believe to be close to the design of metamaterials remaining elastic under large deformations.

27 сентября 2019 г.,
заседание 771

С.В. Головин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ ТРАНСПОРТА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgru.2020.86.43.010

Аннотация. Гидроразрывом пласта (ГРП) называется процесс инициации и развития трещины в горной породе под действием нагнетаемой под высоким давлением жидкости. Примерами возникновения гидроразрыва являются естественные геологические процессы (вулканические трещины, вызванные потоками магмы), а также искусственные технологические воздействия, применяемые при стимуляции добычи углеводородов. Помимо методов классической теории хрупкого разрушения, моделирование трещин гидроразрыва включает описание течения вязкой жидкости внутри трещины с одновременным раскрытием и удлинением трещины, обмена жидкостью между трещиной и пороупругим пластом, влияния порового давления на напряжения в пласте, транспорта многокомпонентных жидкостей по трещине и других факторов. В докладе предложены математические модели физических процессов, происходящих при гидроразрыве пласта. Предметом моделирования являются: 1) динамика развития трещины гидроразрыва с учетом влияния порового давления в пласте, критериев разрушения горной породы, неоднородности сжимающего горного давления и физических характеристик породы; 2) перенос многокомпонентных жидкостей по трещине гидроразрыва и в скважине и их влияние на динамику раскрытия трещины; 3) определение физических параметров пласта и характеристик трещины на основе анализа нестационарных волновых процессов; 4) экспериментальные установки для моделирования переноса пропанта в щели ГРП и раскрытия трещины ГРП в упругих материалах. Разработанные модели имеют обобщение для описания гемодинамики сосудов головного мозга, позволяющее дать качественное объяснение наблюдаемому фазовому сдвигу между волнами скорости и давления в сосудах. Помимо этого, обсуждаются вопросы налаживания системного взаимодействия с крупными промышленными партнерами на примере организации научно-образовательного центра «Газпромнефть–НГУ».

25 октября 2019 г.,
заседание 772

G. Royer Carfagni

**REDUCTIO AD UNUM PHASE-FIELD APPROACH TO FRACTURE,
DAMAGE AND PLASTICITY**

University of Parma, Italy

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.58.82.011

Abstract. Phase-field models have been successfully used to predict crack propagations through the minimization of an energy functional, establishing an energetic competition between elastic release (bulk term) and material damage (surface term). The matching conditions at the interfaces are substituted by the evolution of an auxiliary (phase) field, which is unitary for the sound phase and null for the damaged phase. Here, two generalizations of this approach are presented. In the first one, the bulk term of the energy is modified to represent that, when the material microstructure is loosened and damaged, peculiar inelastic (structured) deformations may occur in the representative volume element at the price of surface energy consumption. This approach unifies various theories of failure because, by simply varying the admissible class of structured deformations, different-in-type responses can be captured, incorporating the peculiarities of cleavage, deviatoric, combined cleavage-deviatoric and “masonry-like” fractures. Remarkably, this latter formulation rigorously avoid material overlapping in the cracked zones. The model is numerically implemented using a standard finite-element discretization and adopts an alternate minimization algorithm, adding an inequality constraint to impose crack irreversibility (fixed crack model). Numerical experiments for some paradigmatic examples are presented and compared for various possible versions of the model. In the second proposal, the surface energy term is modified to account for cohesive stresses bridging the crack lips. This is a particular type of Dugdale–Barenblatt cohesive-crack that can interpret the response of a perfectly plastic body, for which inelastic deformations are associated with displacement jumps along slip surfaces at constant yielding stress. The flow is driven by the transformation of elastic strain energy into inelastic work, once that an energetic barrier for slip activation has been overcome. The resulting deformation is structured since it involves supplementary kinematical variables (the plastic slips), governed by an evolution law. We show that the glide surfaces diffuse in bands, whose width depends upon a material length-scale parameter: as this goes to zero, the energy functional Gamma-converges to a free-discontinuity problem, set in the space of SBV functions. The distinction of the elastic strain energy into spherical and deviatoric parts can also be used to incorporate in the model the idea of von Mises plasticity and isochoric plastic strain. Numerical experiments provide solutions with striking similarities with the classical slip-line field theory of plasticity, but the proposed model is much richer because, accounting for elastic deformations, it can describe the nucleation, propagation and widening of slip bands.

6 декабря 2019 г.,
заседание 773

Ю.А. Баймова, Р.Р. Мулюков

**МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УГЛЕРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ
РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ**

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа, Россия

УДК: 539.374

DOI: 110.37972/chgru.2020.65.68.012

Аннотация. Доклад посвящен исследованию устойчивости, изучению упругих свойств и деформационного поведения углеродных материалов различной размерности. Рассмотрены механические свойства графена: его область устойчивости в пространстве плоской деформации, посткритическое поведение и структурные особенности при различных типах нагружения. Среди рассмотренных структур также скомканый графен (материал, состоящий из смятых чешуек графена, связанных силами Ван-дер-Ваальса), системы нанотрубок и фуллерит. Представлено исследование их деформационного поведения методом молекулярной динамики с использованием реалистичного межатомного потенциала.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Лисовенко Дмитрий Сергеевич (lisovenk@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спориных Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трецев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Мионов Б. Г., Мионов Ю. Б.</i> Кручение неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала при линеаризованном условии пластичности	3
<i>Немировский Ю. В.</i> О предельно допустимых деформациях полиметаллических стержней при изгибании сосредоточенными нагрузками	11
<i>Добрышкин А. Ю., Сысоев О. Е., Сысоев Е. О., Лин Тхет</i> Моделирование вынужденных колебаний разомкнутой оболочки с малой присоединенной массой, при шарнирном опирании, методом аппроксимации Паде	22
<i>Поликарпов М. В., Пеньков В. Б.</i> Сосредоточенные силовые воздействия в методе граничных состояний	34
<i>Орлов В. Н., Разакова Р. В.</i> Приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка в области аналитичности	45
<i>Плотников А. Н., Иванов М. Ю., Яковлева О. С.</i> Жесткостные параметры высотных зданий и их определение при мониторинге	55
<i>Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.</i> Упругопластическая задача в условиях сложного сдвига	66
<i>Алексеев В. Н.</i> К вопросу о цилиндрических волнах в упругих средах	73
<i>Петров Н. И.</i> Растяжение цилиндрического стержня переменного сечения в теории малых упругопластических деформаций	78
<i>Фоминых С. О., Чекмарев Г. Е.</i> О влиянии различных видов анизотропии на упругопластическое состояние трехслойной трубы	82
<i>Орлов В. Н., Гасанов М. В.</i> Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки	92
<i>Непершин Р. И.</i> Пластическое сдавливание цилиндра плоскими штампами	101
<i>Сысоев Е. О., Кажоров К. К., Сысоев О. Е., Журавлева Е. В.</i> Исследование свободных и вынужденных колебаний разомкнутых тонкостенных железобетонных оболочек	121
<i>Горшков С. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В.</i> О подходе к моделированию процессов формирования температурных напряжений в среде OpenFOAM	131
<i>Аноп М. Ф., Мурашкин Е. В.</i> О расчете оптимального значения нагружающего усилия в условиях медленного крипа в окрестности одиночного микродефекта	142

Информация о постоянно действующих семинарах в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН	149
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	161
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	164
СОДЕРЖАНИЕ	166

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2020. № 1 (43)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 24.03.2020. Выход в свет 27.03.2020.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 21.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38