

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА  
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**

**Научный журнал  
№ 2(44)  
апрель – июнь 2020 г.**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”  
**Основатели серии:** Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций

(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Приглашенные редакторы:** Д. С. Лисовенко, Е. И. Шифрин

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко

**Ответственные секретари:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин

**Заместитель ответственного секретаря:** С. В. Матвеев

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Г. К. Михайлов, Ю. В. Немировский,  
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,  
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-  
лоруссия)

**Адрес редакции и издательства:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1184

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2020

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK  
OF THE YAKOVLEV CHUVASH STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY  
SERIES: MECHANICS OF LIMIT STATE**

**Scientific journal**

**№ 2(44)**

**April – June 2020**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University  
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,  
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007

Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications  
Information Technology, and Mass Media “Roskomnadzor”  
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue “Press of Russia”  
(reg. No. 13109).

**Editor-in-chief:** B. G. Mironov

**Guest Editors:** D. S. Lisovenko, E. I. Shifrin

**Executive Editor:** Yu. N. Radayev

**Associate Editor:** N. M. Matchenko

**Executive Secretary:** S. V. Tikhonov, E. V. Murashkin

**Associate Secretary:** S. V. Matveev

**Editorial Board:** V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,  
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,  
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,  
L. A. Maksimova, A. A. Markin, G. K. Mikhailov, Yu. V. Nemorovskii,  
R. I. Nepershin, V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov,  
A. N. Sporihin, A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

**International Council:** V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1184

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** <http://limit21.ru>





Д. С. Лисовенко, Н. М. Осипенко, А. В. Ченцов, Е. И. Шифрин

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ В РАБОТАХ Р.В. ГОЛЬДШТЕЙНА

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Статья посвящена член-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации Р.В. Гольдштейну. В настоящей библиографической заметке приводятся биографические сведения об этом крупном ученом, который хорошо известен в России и за рубежом. Представлены сведения о его вкладе в развитие механики деформирования и разрушения.

**Ключевые слова:** механика разрушения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.001

УДК: 539.374

### 1. Введение

Р.В. Гольдштейн (1940–2017 гг.) — выдающийся российский ученый, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат Государственной премии РФ в области науки — ученый широкого профиля в области механики деформируемого твердого тела и ее приложений в технике и технологии. Ему принадлежит ряд фундаментальных результатов в теории упругости, механике прочности и разрушения, механике контактного взаимодействия, нано-, микро- и мезомеханике материалов, механике льда и ледяного покрова.

---

© Лисовенко Д. С., Осипенко Н. М., Ченцов А. В., Шифрин Е. И., 2020

*Лисовенко Дмитрий Сергеевич*

**e-mail:** lisovenk@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, зав. лабораторией, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Осипенко Николай Михайлович*

**e-mail:** osipnm@mail.ru, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Ченцов Александр Викторович*

**e-mail:** chentsov@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Шифрин Ефим Ильич*

**e-mail:** shifrin@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, зав. лабораторией, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Поступила 20.03.2020

Р.В. Гольдштейн родился 7 мая 1940 г. в городе Москве. Интерес к математике и механике проявился у Р.В. Гольдштейна в школьные годы. Этому способствовали занятия в математическом кружке при МГУ им. М.В. Ломоносова. Руководила кружком группа студентов механико-математического факультета во главе с В.И. Арнольдом.

Р.В. Гольдштейн окончил с отличием в 1962 г. механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова (с 3-го курса получал стипендию им. Н.Е. Жуковского). После окончания в 1965 г. аспирантуры в Институте механики АН СССР был приглашен во вновь созданный Институт проблем механики АН СССР (ныне — Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН), где и проработал более 50 лет (с 1988 г. руководителем созданной им Лабораторией механики прочности и разрушения материалов и конструкций). Его кандидатская диссертация была посвящена исследованию поверхностных волн и связанных с ними резонансных явлений в упругих телах (научные руководители — Г.И. Баренблатт и Р.Л. Салганик), докторская диссертация — развитию механики разрушения крупногабаритных конструкций.

Р.В. Гольдштейн и его коллеги успешно применяли результаты своих фундаментальных исследований для решения прикладных задач. Непосредственное участие в интерпретации натуральных наблюдений и результатов экспериментов при постановке задач и широта охвата проблем механики в работах Р.В. Гольдштейна позволили ему с коллегами получить значимые результаты при решении задач, относящихся к промышленности, транспорту и медицине.

К такой деятельности, в частности, относится участие в экспедиции на ледоколах в составе группы сотрудников ИПМех РАН в 1981 г., вызванной назревшими вопросами механики ледяного покрова при организации зимней навигации по Северному морскому пути. На основе анализа проведенных наблюдений и экспериментов было предложено объяснение явлений, вызванных напряженным состоянием зимнего ледяного покрова при движении ледокола, разработаны основы методики моделирования этих явлений. Они также были полезны при решении крупномасштабных задач механики разрушения ледяного покрова при взаимодействии с ледоколом и сооружениями на шельфе арктических морей в условиях сжатия льдов, что нашло отражение в ряде публикаций, патентов и нормативных документов. Другой пример относится к постановке и анализу результатов полномасштабного эксперимента, моделирующего механику начальной фазы Чернобыльской аварии, проведенного с группой сотрудников под эгидой МАГАТЭ, что позволило уточнить причины и сценарий развития разрушения реактора.

Работы Р.В. Гольдштейна получили широкое международное признание, он был избран почетным членом (1993 г.) и почетным Вице-Президентом (2011 г.) Международного Конгресса по разрушению, почетным членом (2010 г.), членом Исполнительного Комитета Европейского общества по прочности конструкций (1996–2012 гг.), действительным членом (2009 г.) и членом Научного Комитета Отделения инженерных наук (2010–2013 гг.) Европейской Академии наук, членом Европейской Академии наук и искусств (2011 г.), действительным членом Американской Ассоциации содействия развитию науки (2012 г.), членом Исполнительного Комитета Американского Общества по экспериментальной механике (2014 г.). Заслуги Р.В. Гольдштейна в области механики разрушения, на Международных Конференциях по Разрушению (ICF) были отмечены золотыми медалями Гриффитса (2013 г.) и Ирвина (2017 г.) и избранием в руководящие органы ICF.

Р.В. Гольдштейн был ответственным секретарем редколлегии журнала "Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела", членом редколлегии журналов "Вычислительная механика сплошных сред", "Физическая мезомеханика", "Деформация и разрушение материалов", "Письма о материалах", международных журналов "Int. J. of Fracture", "Fatigue and Fracture of Eng. Materials and Structures". В качестве научного редактора он подготовил более 20 книг и специальных выпусков международных журналов.

Большое внимание Р.В. Гольдштейн уделял подготовке молодых ученых, будучи более 30 лет профессором (по совместительству) в "МАТИ"- Российском государственном технологическом университете им. К.Э. Циолковского (с 2015 г. присоединен к Московскому авиационному институту (НИУ)), был руководителем филиала кафедры "Физика" при ИПМех РАН и руководителем от ИПМех РАН Научно-образовательного Центра "Механика и ее приложения в технике и технологии". Им создана одна из ведущих научных школ РФ в области механики прочности и разрушения. 19 его учеников стали кандидатами наук и 5 — докторами наук. Ниже приведен краткий обзор работ Р.В. Гольдштейна по основным обозначенным направлениям и их приложениям.

## 2. Динамическая теория упругости

Исследованы и объяснены резонансные явления, связанные с переходом через рэлеевскую скорость в задачах о движении нагрузок и штампов по границе упругого полупространства (полуплоскости), а также при распространении трещин хрупкого разрушения.

Суть резонансных явлений поясним на примере стационарного движения со скоростью  $V$  нормальной нагрузки по границе полуплоскости.

Решение задачи показывает, что если скорость стационарного движения нагрузки совпадает со скоростью распространения поверхностной волны Рэлея ( $v = c_R$ ), то напряжения и смещения в любой точке полупространства становятся бесконечными. При переходе через рэлеевскую скорость меняются знаки напряжений и смещений во всех точках полупространства. В частности, при дорэлеевской скорости ( $v < c_R$ ) поверхность полуплоскости прогибается под нагрузкой, а на сверхрэлеевских  $c_R < v < c_2$  ( $c_2$  - скорость поперечных волн, картина обратная и поверхность выпучивается под нагрузкой).

Для того, чтобы разобраться в причинах и механизмах описанных явлений была решена аналитически нестационарная задача о движении с постоянной скоростью нагрузки, приложенной к границе полуплоскости в некоторый момент времени  $t = 0$ , и рассмотрен процесс установления стационарного решения [1]. Анализ показал, что при рэлеевской скорости движения нагрузки напряжения в окрестности, движущейся вместе с нагрузкой, возрастают пропорциональные времени  $t$ . Следовательно, движение в окрестности нагрузки никогда не станет установившимся, что и отражает факт несуществования стационарного решения при рэлеевской скорости перемещения нагрузки.

Ситуация вполне аналогична резонансу в обычной колебательной системе с одной степенью свободы. Нарастание амплитуды напряжений пропорционально времени связано с совпадением скорости движения источника возмущений со скоростью распространения собственных волн упругого полупространства - поверхностных волн Рэлея.

Изменение знака смещений при переходе через рэлеевскую скорость в стационарном решении аналогично сдвигу фазы колебаний на  $180^\circ$  по отношению к фазе возмущающей силы при переходе через резонансную частоту в системе с одной степенью свободы. Качественное объяснение смены знака смещений в следующем. При сверхрэлеевской скорости движения нагрузки ее передний край догоняет вызванное им же в предыдущий момент поднятие поверхности впереди нагрузки.

Скорость поверхностных волн оказывается критической - теоретически предельной скоростью распространения трещины в изотропной однородной упругой среде. Этот факт был установлен рядом исследователей в конце 50-х — начале 60-х годов (Е. Yoffe, Г.И. Баренблатт и Г.П. Черепанов, J.W. Craggs).

Более сложные проявления резонансных эффектов связаны с распространением трещин в кусочно-однородных телах по границам соединения упругих материалов с различными упругими свойствами [2, 3]. В этом случае есть несколько критических скоростей, совпадающих со скоростями поверхностных волн, которые могут распространяться вдоль границ соединения материалов при различных условиях их контакта. Один из таких типов волн был найден в [3] - это поверхностные волны в телах, когда на линии соединения отсутствует взаимное проскальзывание тел, но возможно их взаимное смещение по нормали к границе (односторонние ограничения). Интересно, что при движении трещины по границе полностью соединенных тел (на границе непрерывны и напряжения, и смещения) критическими оказываются как скорости поверхностных волн Стоунли, отвечающих этому типу граничных условий, так и поверхностных волн, соответствующих упомянутому типу граничных условий и граничным условиям налегания с возможным проскальзыванием, а также скорости рэлеевских волн для каждого из соединенных материалов.

### **3. Механика хрупкого и квазихрупкого разрушения**

#### **3.1. Методы построения условий хрупкого и квазихрупкого разрушения элементов конструкций с трещинами при статических и медленно меняющихся нагрузках**

В [4] получены оценки коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва. Доказано, что в точке касания контуров двух плоских трещин коэффициент интенсивности объемлемой трещины не превосходит коэффициента интенсивности напряжений объемлющей ее трещины. Этот результат в ряде случаев помогает оценить степень опасности трещиноподобного дефекта, имеющего в плане произвольную, достаточно сложную форму, не прибегая к решению соответствующей задачи теории упругости, а используя известный набор решений. В частности, можно использовать аналитические решения для трещин канонической формы и форм, получающихся из канонических путем преобразования инверсии [5]. Этот результат в дальнейшем был обобщен на класс псевдодифференциальных уравнений порядка не выше второго [6]. Помимо локальных характеристик решения, таких как коэффициенты интенсивности напряжений, при анализе напряженного состояния упругих тел с трещинами большую роль играют и некоторые интегральные характеристики. Например, компоненты объема трещины входят в выражение для дальнего поля. Кроме того, они важны в случаях, когда имеется приток газа или жидкости в трещину. Оценкам интегральных характеристик решения как для трещин нормального, так и произвольного разрыва посвящены работы [7–10]. Совокупность результатов по оценкам локальных и интегральных характеристик решения задач о трещинах вошла в монографию [11].

Разработаны численно-аналитические методы граничных интегральных уравнений и граничных функционалов для решения пространственных задач теории упругости о трещинах (в том числе и с учетом возможного взаимодействия поверхностей трещин, а также расположения трещин на границах раздела в кусочно-однородных телах) [12–18].

Построены интегральные уравнения задачи об упругом включении и получены аналитические решения в случае включения канонической формы, в том числе, когда в нем происходят фазовые превращения [19, 20]. Было выполнено несколько работ по идентификации полостей или включений шаровой формы с помощью переопределенных данных на внешней границе упругого тела [21, 22].

### **3.2. Модели и методы расчета хрупкого и квазихрупкого разрушения материалов с учетом их структуры, в частности, пористой, слоистой, волокнистой**

Разработаны модели и методы расчета хрупкого и квазихрупкого разрушения материалов с учетом их структуры, в частности, пористой, слоистой, волокнистой.

Развиты модели упорядоченного разрушения, в рамках которых описан ряд закономерностей формирования иерархии упорядоченных систем трещин и трещиноподобных дефектов, в том числе формирования эшелонов трещин (систем параллельных трещин, центры которых расположены на некоторой прямой или кривой) в пористой среде при сжатии [23, 24], в конструкционных сталях при наводороживании [25, 26], в слоистой среде при растяжении и сдвиге [27].

Разработаны модели и методы расчета зарождения и развития трещин-отслоений по границам соединения в слоистых элементах конструкций, получающих все большее распространение в технике.

Развит метод решения осесимметричных задач о трещинах на границах соединения в слоистой среде [13]. Численное моделирование, выполненное для среды, состоящей из двух полупространств, соединенных промежуточным упругим слоем, позволило обнаружить эффект, присущий именно слоистой среде: в случае, когда слой из мало-сжимаемого материала находится между много более жесткими средами, существует диапазон размеров трещин, в котором их развитие происходит устойчиво. Показано, что существует резкая зависимость между толщиной слоев композиционного материала и величиной критического размера трещины. Эту зависимость можно учесть при подборе толщин слоев в композитах.

В последнее время весьма актуальны проблемы оценки условий возникновения и развития отслоений тонких покрытий. В связи с этим был выполнен [18] асимптотический анализ пространственной задачи о трещине-отслоении в двухслойной упругой пластине. В результате удалось сформулировать инженерный метод моделирования отслоений покрытия как пластинок со специальными условиями закрепления, что существенно упрощает расчеты критических параметров отслоений.

Разработана модель трещины на границе соединения, учитывающая наличие нелинейно деформируемых связей в промежуточном адгезионном слое [28, 29]. Модель позволяет описывать как стадию зарождения дефекта, так и стадию его роста.

В модели не используется предположение о малости концевых областей трещин, где действуют связи, в сравнении с длиной трещины, поэтому модель применима и для описания коротких трещин. Выполненные расчеты для соединений полимер-полимер позволили получить зависимость адгезионной трещиностойкости от индекса полимеризации (длины полимерных молекул) [30].

Выполнено моделирование формирования структур разрушения в условиях многоосного сжатия, в том числе с большой долей всестороннего сжатия, когда образуются трещиноподобные вытянутые поперек оси максимального сжатия дефекты-трещины сжатия, рост которых сопровождается сопряженными процессами компактирования материала в концевой области трещины сжатия и выносом его в полости трещины [31–33].

Проведены экспериментальные исследования и моделирование формирования и эволюции эшелона трещин отрыва в окрестности магистрального продольного сдвига при хрупком разрушении. Показано, что развитие структур разрушения при продольном сдвиге происходит посредством иерархического изменения характерного масштаба процесса-многократного перехода к более крупным элементам структуры разрушения (когда из исходного эшелона выделяется периодическая система трещин большего размера, а также происходит периодическое слияние этих трещин в процессе их роста с образованием более крупных — формируется эшелон следующего масштаба) [34, 35]. Влияние взаимодействия процессов деформирования и разрушения, происходящих в различных масштабах, на формирование упорядоченных систем нарушений рассмотрено в работе [36].

### **3.3. Критерии искривления траектории трещины**

Разработаны критерии и выполнено моделирование искривления траекторий роста трещин при хрупком и квазихрупком разрушении. Предложен критерий искривления и роста трещины произвольного разрыва в изотропном теле, когда на ее контуре отличны от нуля коэффициенты интенсивности напряжений, связанных с отрывом, с поперечным и продольным сдвигами [37]. Методом внешних и внутренних разложений дано обоснование критерия локальной симметрии при искривлении трещин в отсутствие продольного сдвига и предложено обобщение этого критерия для ситуации общего положения, когда наряду с отрывом имеются поперечный и продольный сдвиг. Выполнено численное моделирование методом сингулярных интегральных уравнений траекторий криволинейных трещин в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния [38]. Изучено влияние упругой анизотропии материала на искривление трещины, моделируемой тонким эллиптическим отверстием, в условиях одно- и двухосного нагружения и получены условия ее искривления [39–42]. Закономерности преломления траектории трещины при пересечении ею границы раздела (поверхности, где имеет место трение) исследованы экспериментально [43] и теоретически [44]. Построена модель процесса и получены оценки параметров геометрии комбинированного отрывно-сдвигового разрушения, согласующиеся с данными эксперимента, а также найдены условия его инициирования и развития.

### **4. Механика пластического разрушения**

Разработаны методы оценки и моделирования условий пластического разрушения при статическом нагружении элементов конструкций с трещинами.

Развит полуэмпирический способ описания пластического разрушения при статическом нагружении конструкционных материалов типа сталей низкой и средней прочности. Его основу составляют методика косвенного определения трещиностойкости по результатам испытаний малых образцов с трещиной и методика построения условий роста трещин в крупногабаритных конструкциях в результате натуральных экспериментов и моделирования. Обе методики опираются на соображения подобия и используют резкую температурную зависимость прочностных свойств и трещиностойкости указанных материалов [45, 46].

Оказывается, что условия разрушения крупногабаритной конструкции из стали низкой и средней прочности (например, сосуда давления) можно смоделировать, проводя испытание его геометрически подобной уменьшенной модели при соответственно пониженной температуре.

Для построения численно-аналитических оценок условий пластического разрушения развит метод верхней и нижней оценок, опирающийся на установленный вариационный принцип в теории жесткопластических течений с образованием трещин отрыва [47].

Исследования в области механики разрушения позволили предложить структурно-континуальный подход для описания катастрофического разрушения иерархических сложных технических систем [48]. В рамках подхода разработан принцип распределения защитных ресурсов по структурным уровням системы с целью предотвращения ее катастрофического разрушения [49].

### **5. Механика льда и ледяного покрова**

Развит подход к описанию разрушения льда и ледяного покрова, в том числе при взаимодействии с ледоколами и ледостойкими конструкциями [50, 51]. Сформулирована модель формирования тороса при сжатии ледяного покрова и введена качественная мера сопротивления материала развитию тороса – торосостойкость. Дана классификация по параметрам механики разрушения основных форм разрушения ледяного покрова ледоколом с учетом ледового сжатия, позволяющая рассчитывать ледовое сопротивление. Предложены тактические приемы работы ледоколов в сжатых льдах, включая приемы проводки судов и освобождения их от ледового сжатия. В качестве примера можно отметить, что ледокол может освободить судно от ледового сжатия, сделав определенный дугообразный канал, отходящий от судна.

Разработаны модели формирования наблюдаемых по данным космического мониторинга крупномасштабных структур ледяного покрова [52].

Выполнены (2003–2015 гг.) моделирование и расчеты ледовых нагрузок на ледостойкие конструкции для глубоководных районов континентального шельфа. Предложены модели процессов разрушения крупногабаритных ледовых массивов при взаимодействии с инженерными сооружениями. Модели учитывают возможности инициирования в ледовых массивах магистральных разрывов и контактного разрушения льда при большой площади контакта [53]. Модель контактного разрушения предусматривает возможность перемещения очага локального разрушения по поверхности контакта, наблюдаемого в экспериментах в условиях опытового ледового бассейна. Разработаны критерии подобия для физического моделирования природных процессов разрушения льда в зоне контактного взаимодействия с учетом механических и физических процессов различной природы (движения твердого тела в жидкости, разрушения льда, экструзии частиц разрушенного льда в области контакта) [54]. Разработана модель процесса развития берегового навала льдов на мелководье. Предложен механизм и сформулированы критерии реализации навала.

Предсказано теоретически существование краевых волн, распространяющихся вдоль кромки ледяного покрова и экспоненциально затухающих в поперечном направлении вдоль его поверхности [55, 56]. Подобные волны были впоследствии обнаружены экспериментально в ходе полевых исследований американскими учеными.

### **6. Результаты по нано- и микромеханике, нано- и микроэлектронике**

С начала 1990х годов Р.В. Гольдштейном вместе с учениками и коллегами получен ряд фундаментальных результатов в области нано- и микромеханики и прочности

материалов и изделий. В первую очередь, эти исследования были направлены на решение проблем обеспечения прочности и долговечности изделий микро- и субмикроэлектроники. Разработаны модели и выполнено моделирование процессов деградации многоуровневых межсоединений (проводящих дорожек) изделий микро- и субмикроэлектроники вследствие действия механических нагрузок и электромиграции [57]. Получены оценки долговечности межсоединений. Для изделий масштаба чипа, изготовленных по методу перевернутого кристалла, осуществлено моделирование условий разрушения при термомеханическом нагружении [58]. Результаты этих исследований подытожены в обзорной работе [59]. Выполнено моделирование условий, приводящих к формированию упрочненных геттерированных зон в пластинах-подложках кремния. Выполнено моделирование эволюции морфологии поверхности SiGe квантовых точек на подложке Si (001) при осаждении покрывающего слоя кремния при различных температурах роста [60–62]. На основе анализа напряженно-деформированного состояния получены условия перехода квантовая точка-квантовое кольцо. Результаты моделирования использованы для качественного объяснения явлений, наблюдаемых экспериментально при гетероэпитаксиальном росте: трансформация квантовых точек в квантовые кольца, образование вертикальных массивов, так называемых, нанолинз. Выполнено моделирование механического поведения современных металл-оксид-полупроводник полевых транзисторов, имеющих кремний-германиевый исток/сток и канал и выращенных на подложках различных ориентаций. Выполнено моделирование роста кислородосодержащих преципитатов в кристаллах кремния [63]. Предложен энергетический критерий потери сферичности преципитатами в процессе их роста. Показано, что процесс потери сферичности как когерентными, так и некогерентными преципитатами управляется единым безразмерным комплексом. Предложена модель процесса химико-механического полирования – одного из основных технологических процессов современной нано- и микроэлектроники [64, 65]. Модель учитывает сопряженные процессы диффузии активной рабочей жидкости в поверхностный слой и механического воздействия полировальника и частиц, содержащихся в рабочей жидкости на характеристики полирования. Получены соотношения, обобщающие эмпирический закон Престона и выражающие взаимосвязь скорости полирования и механической нагрузки с учетом перечисленных факторов. Выполнен анализ химико-механического полирования вольфрама с учетом зарождения и развития очагов осаждения окисной пленки. Показано, что скоростное полирование связано с удалением указанных очагов, что подтверждается сравнением с известными экспериментальными данными.

Начиная с 2003 г. выполнен ряд работ по моделированию прочности и процессов разрушения наноматериалов и наноструктурных объектов [66, 67]. Разработаны дискретно-континуальные механические модели деформирования нанотрубок, систем нанотрубок, графеновых плоскостей и их совокупностей. Предложены алгоритмы, реализованные в виде программ, для моделирования процессов деформирования и образования дефектов структуры нанотрубок. Исследованы задачи изгиба и потери устойчивости при изгибе на моделях однослойных нанотрубок и системы слоев гексагональной структуры. Разработаны схемы и прототипы устройств для проведения механических испытаний нано- и микромасштабных образцов. Выполнено моделирование испытаний нанотрубок на разрыв и определены предельные деформации. Разработан метод оценки влияния промежуточного слоя, образующегося вокруг наночастиц в нанокompозите, на эффективные деформационные характеристики этого

композита [68]. Предложена обобщенная модель атомистической трещины и найдены условия применимости континуального подхода теории трещин для описания условий роста трещин наномасштаба [69, 70]. Этот цикл работ подытожен в работе [71].

Предложено кинетическое уравнение, описывающее эволюцию размера зерна материала в процессах интенсивной пластической деформации, приводящих, в частности, к получению наномасштабной структуры; при этом учтена зависимость скорости изменения размера зерна от скорости вращения бесконечно малого объема материала относительно главных осей тензора напряжений [72]. Выполнен сравнительный анализ поведения жесткопластических решений в окрестности поверхностей максимального трения и в процессе равноканальной экструзии. Определена мера вращения элементарных материальных объемов относительно главных осей тензора напряжений, входящая в предложенное кинетическое уравнение для размера зерна и показано, что эта мера принимает одно и то же численное значение в двух рассмотренных процессах. Эти результаты составляют основу для развития метода предсказания формирования слоя интенсивных пластических деформаций в окрестности поверхностей трения в процессах обработки материалов давлением. Предложен подход к описанию влияния масштабного фактора на толщину пограничного слоя с сильно измененными свойствами вблизи поверхностей контакта рабочего тела и инструмента (поверхностей трения) [73, 74]. Подход опирается на предположение о том, что толщина пограничного слоя определяется скоростью деформаций и расстоянием, пройденным материальной точкой вдоль поверхности трения.

Выполнены исследования эффектов поверхностной упругости и поверхностных остаточных напряжений при деформировании различных тел с наноструктурными элементами [75, 76]. С учетом поверхностной упругости и поверхностных остаточных напряжений дано обобщение аналитического решения задачи о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, при однородных собственных деформациях внутри включения и заданных напряжениях вдали от него (обобщенная задача Эшелби). Выявлен масштабный эффект на нанометровых масштабах (зависимость деформаций от диаметра включений). Показано, что при определенных условиях (для ряда кубических кристаллов) влияние остаточных напряжений превосходит эффект поверхностной упругости. Выполнено дискретно-континуальное моделирование композитов с нанонаполнителями. Разработана модель трехфазного композита с упругой анизотропией.

Группа под руководством и при участии Р.В. Гольдштейна и В.А. Городцова, Д.С. Лисовенко выполнила исследования по механике материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков), весьма перспективных для использования в технике и медицине [77–81]. В частности, среди кристаллов различных сингоний выделены кристаллы, обладающие ауксетическими свойствами. Изучены эффекты, проявляющиеся при деформировании нано- и микротрубок из таких материалов. Показано, что ауксетичность может сохраняться и исчезать при сворачивании ауксетика в трубку. Возможно и появление ауксетичности у трубки из неауксетика. Выявлены линейный прямой и обратный эффекты Пойнтинга, имеющие место для нано- и микротрубок из кубических, тетрагональных и орторомбических кристаллов (кручение трубок сопровождается их растяжением (сжатием) и обратно – кручение сопровождается растяжением трубок).

## 7. Основные прикладные результаты

Результаты фундаментальных исследований успешно применены для решения прикладных задач. Начиная с 1960-х годов Р.В. Гольдштейн принимал участие, а с 1975 г. по 1990 г. являлся и научным руководителем от ИПМех РАН комплексной работы, выполнявшейся в области специальной техники по решению Директивных органов. В результате этих исследований разработаны и утверждены в 1989 г. соответствующими ведомствами нормы дефектности для ответственных изделий из композитных полимерных материалов.

Другое направление прикладных исследований - разработка методов оценки ресурса и безопасности оборудования для транспортировки, подготовки и переработки углеводородного сырья, содержащего сероводород (научный рук. работ со стороны ИПМех РАН). Эти работы проводятся с 1976 г. совместно с предприятиями Минхимнефтемаша СССР, Мингазпрома СССР (ныне ПАО ОАО «ГАЗПРОМ»). В результате этих работ создан «Временный регламент технического освидетельствования трубопроводов и оборудования установок комплексной подготовки газа Оренбургского газоконденсатного месторождения».

В 2013–2015 гг. в работах совместных с ФГУП ЦАГИ предложена (совместно с Е.И. Шифриным и П.С. Шушпанниковым) методика оценки остаточной прочности панели из углерод-углеродного композита при наличии в ней ударных повреждений.

С 2003 г. под руководством Р.В. Гольдштейна и при его непосредственном участии в интересах ОАО «ГАЗПРОМ» (ныне ПАО «ГАЗПРОМ») проводятся работы по моделированию и расчету ледовых нагрузок на ледостойкие конструкции применительно к освоению месторождений углеводородного сырья в зоне шельфа Арктических морей. Разработанный в совместных исследованиях с ООО «Газпром ВНИИГАЗ» расчетный случай возможного поворота заякоренных ледостойких платформ при взаимодействии с ледовым полем сейчас нашел отражение в подготовленном ООО «Газпром ВНИИГАЗ» Проекте Стандарта по расчету ледовых нагрузок на ледостойкие конструкции в зоне Арктического шельфа.

С 2003 г. совместно с сотрудниками проведены работы по биомедицинской механике в тесном контакте с МНТК «Микрохирургия глаза». В частности, совместно с сотрудниками МНТК разработана и в 1986 г. защищена авторским свидетельством конструкция опорных элементов интракапсулярного искусственного хрусталика глаза. Многие годы хрусталик с опорными элементами предложенной конструкции успешно используется в оперативной практике.

## 8. Заключение

Научные работы Р.В. Гольдштейна внесли существенный вклад развитие механики деформирования и разрушения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гольдштейн Р. В. Волны Релея и резонансные явления в упругих телах // ПММ. 1965. Т. 29, № 3. С. 516–525.
- [2] Гольдштейн Р. В. О стационарном движении трещины по прямолинейной границе соединения двух упругих материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 5. С. 93–102.
- [3] Гольдштейн Р. В. О поверхностных волнах в соединенных упругих материалах и их связи с распространением трещин // ПММ. 1967. Т. 31, № 3. С. 468–475.
- [4] Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 59–64.
- [5] Goldstein R. V. Three-dimensional elasticity problems related to cracks: exact solution by inversion transformation // Theoretical and applied fracture mechanics. 1986. Т. 5, № 3. С. 143–149.

- [6] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Теоремы сравнения для некоторого класса псевдодифференциальных уравнений и их приложения // Доклады АН СССР. 1982. Т. 262, № 5. С. 1113–1116.
- [7] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоскими трещинами нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 68–79.
- [8] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Некоторые энергетические методы построения оценок в пространственных задачах теории упругости о плоских трещинах произвольного разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 61–76.
- [9] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Плоская трещина произвольного разрыва в ограниченном упругом теле // ПММ. 1982. № 3. С. 472–481.
- [10] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Оценки и приближенные формулы в задаче теории упругости о плоской трещине нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 120–127.
- [11] Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Качественные методы в механике сплошных сред. Москва: Наука, 1989. 224 с.
- [12] Гольдштейн Р. В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 111–126.
- [13] Вайншельбаум В. М., Гольдштейн Р. В. Осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 130–143.
- [14] Гольдштейн Р. В., Спектор А. А. Вариационный метод исследования пространственных смешанных задач о плоском разрезе в упругой среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей // ПММ. 1983. Т. 47, № 2. С. 276–285.
- [15] Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Равновесие полостей и трещин-разрезов с областями налегания и раскрытия в упругой среде // ПММ. 1986. Т. 50, № 5. С. 826–834.
- [16] Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 141–148.
- [17] Бирюков А. П., Гольдштейн Р. В., Григорьев А. Г. Осесимметричная задача об отслаивании при наличии ограничений на смещения // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 100–108.
- [18] Гольдштейн Р. В., Коновалов М. Б. асимптотический анализ пространственной задачи о трещине-расслоении в двухслойной пластине // Изв. АН. МТТ. 1996. № 3. С. 62–71.
- [19] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Интегральные уравнения задачи об упругом включении. Полное аналитическое решение задачи об эллиптическом включении // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 50–76.
- [20] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Напряженное состояние в упругом пространстве, определяемое фазовыми превращениями во включении // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 48–64.
- [21] Goldstein R. V., Shifrin E. I., Shushpannikov P. S. Application of invariant integrals to the problems of defect identification // Int. J. Fract. 2007. Vol. 147, no. 1–4. P. 45–54.
- [22] Goldstein R. V., Shifrin E. I., Shushpannikov P. S. Application of invariant integrals to elastostatic inverse problems // Comptes Rendus Mecanique. 2008. Т. 336, № 1-2. С. 108–117.
- [23] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Разрушение и формирование структуры // Доклады АН СССР. 1978. Т. 240, № 4. С. 829–832.
- [24] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Структуры в процессах разрушения // Изв. АН. МТТ. 1999. № 5. С. 49–71.
- [25] Гольдштейн Р. В., Морозова Т. М., Павловский Б. Р. Модель возникновения структур разрушения в сталях при наводороживании // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 131–138.
- [26] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Модель разрушения трубопроводной стали при наводороживании // Физ.-хим. мех. мат. 1996. № 3. С. 25–33.
- [27] Гольдштейн Р. В., Капцов А. В. Формирование структур разрушения слабо взаимодействующими трещинами // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 173–182.
- [28] Goldstein R. V., Perelmuter M. N. Modeling of bonding at the interface crack // Int. J. Fract. 1999. Vol. 99, no. 1–2. P. 53–79.
- [29] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. О кинетике формирования и роста трещин на границе соединения материалов // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 32–49.

- [30] Гольдштейн Р. В., Бакиров В. Ф. Модель трещины - расслоения с областями пластического течения и разупрочнения вблизи вершины на границе соединения двух материалов. Москва: Институт проблем механики РАН. Препринт № 638, 1999. 38 с.
- [31] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. О модели разрушения структурированной среды в условиях сжатия // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 6. С. 86–97.
- [32] Goldstein R. V., Osipenko N. M. About brittle fracture in the vicinity of filled pores // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2010. Vol. 22. P. 555–569.
- [33] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Структуры разрушения в условиях интенсивного сжатия. В сб.: Проблемы механики деформированного твердого тела и горных пород. Москва: Физматлит, 2006. С. 152–166.
- [34] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Поэтапное развитие структуры разрушения в окрестности фронта трещины продольного сдвига // ДАН. 2012. Т. 445, № 2. С. 164–167.
- [35] Goldstein R. V., Osipenko N. M. Development of multiple ordered fracture in an elastic homogeneous, structured and layered medium // FFEMS. 2014. Vol. 37, no. 12. P. 1292–1305.
- [36] Goldstein R. V. Scale interaction and ordering effects at fracture // Procedia IUTAM. 2014. Vol. 10, no. 1–2. P. 180–192.
- [37] Goldstein R. V., Salganik R. L. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks // Int. J. Fract. 1974. Vol. 10, no. 4. P. 507–523.
- [38] Гольдштейн Р. В., Савова Л. Н. Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 69–78.
- [39] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. О возможной неустойчивости прямолинейного пути трещины в ортотропной плоскости в условиях одноосного нормального растяжения // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 33–45.
- [40] Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. О возможности искривления трещины нормального разрыва в анизотропной плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 173 – 184.
- [41] Goldstein R. V., Shifrin E. I. Dependence of a crack growth path on the elastic moduli of an anisotropic solid // Int. J. Fract. 2008. Vol. 150, no. 1-2. P. 157–180.
- [42] Goldstein R. V., Shifrin E. I. Conditions for Mode I crack deviation in orthotropic plane subjected to biaxial loading // International Journal of Engineering Science. 2012. № 5. С. 36–47.
- [43] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Иницирование разрушения на контакте при сдвиге // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 4. С. 72–79.
- [44] Goldstein R. V., Galybin A. N., Ustinov K. B. Fracture development on a weak interface near a wedge // J. Mech. Mater. Struct. 2015. Vol. 10, no. 3. P. 265–282.
- [45] Goldstein R. V., Vainshelbaum V. M. Material scale length as a measure of fracture toughness in fracture mechanics of plastic materials // Int. J. Fract. 1978. Vol. 14, no. 2. P. 185–201.
- [46] Температурная зависимость трещиностойкости стали 15ХСНД и некоторые особенности ее разрушения / Р. В. Гольдштейн, Б. М. Овсянников, Н. И. Волгина [и др.] // Проблемы прочности. 1982. № 1. С. 79–83.
- [47] Гольдштейн Р. В., Александров С. Е. О вариационном принципе в теории жесткопластических течений с образованием разрывов // ДАН. 1995. Т. 342, № 4. С. 484–486.
- [48] Гольдштейн Р. В. О структурно-континуальном подходе в механике катастрофического разрушения сложных технических систем // ДАН. 1993. Т. 330, № 1. С. 45–47.
- [49] Гольдштейн Р. В., Онищенко Д. А. Принцип избирательности масштабов защиты иерархических технических систем для предотвращения их катастрофического разрушения // ДАН. 1996. Т. 346, № 2. С. 185–187.
- [50] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Механика разрушения и некоторые вопросы разрушения льда // «Механика и физика льда». Серия «Прочность и вязко-упругопластичность». Москва: Наука, 1983. С. 65–94.
- [51] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. О локализованном хрупком разрушении тонких тел с трещиноподобными дефектами при сжатии со стеснением // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 158–167.
- [52] Goldstein R. V., Osipenko N. M., Lepparanta M. Classification of large-scale sea-ice structures based on remote sensing imagery // Int. J. Fract. 2000. Vol. 36, no. 1–2. P. 95–109.

- [53] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. О модели разрушения льда при большой площади контакта // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 137–153.
- [54] Goldstein R. V., Osipenko N. M. Fracture mechanics in modeling of icebreaking capability of ship // J. Cold Regions Eng. 1993. Vol. 7, no. 2. P. 33–44.
- [55] Гольдштейн Р. В., Марченко А. В., Семенов А. Ю. Краевые волны в жидкости под упругой пластиной с трещиной // ДАН. 1994. Т. 339, № 3. С. 331–334.
- [56] Goldstein R. V., Marchenko A. V. Edge waves in the fluid beneath an elastic sheet with linear nonhomogeneity // Surfaces waves in anisotropic and laminated bodies and defects detection / Ed. by R. V. Goldstein, G. A. Maugin. Dordrecht: Springer Netherlands, 2005. P. 143–157.
- [57] Modeling electromigration and the void nucleation in thin-film interconnects of integrated circuits / R. V. Goldstein, M. E. Sarychev, D. B. Shirabaikin et al. // Int. J. Fract. 2001. Vol. 109, no. 1. P. 91–121.
- [58] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Модель разрушения соединительного элемента при термодинамических нагрузках (пример анализа) // Труды ФТИАН. 2001. Т. 17. С. 97–107.
- [59] Валиев К. А., Гольдштейн Р. В., Махвиладзе Т. М. Некоторые вопросы прочности и разрушения компонент микро- и субмикронэлектроники // Труды ФТИАН. 2005. Т. 18. С. 379–397.
- [60] SiGe quantum rings by ultra-high vacuum chemical vapor deposition / C.-H. Lee, C. M. Lin, C. W. Liu et al. // ECS Transactions. 2008. Vol. 16, no. 10. P. 799–805.
- [61] Strain relaxation during formation of Ge nanolens stacks / H. T. Chang, W. Y. Chen, R. V. Goldstein et al. // Electrochem. Solid-State Lett. 2010. Vol. 13, no. 5. P. K43–K45.
- [62] A compact analytic model of the strain field induced by through silicon vias / S.-R. Jan, T.-P. Chou, C.-Y. Yeh et al. // TED. 2012. Vol. 59, no. 3. P. 777–782.
- [63] Экспериментально-теоретическое исследование процесса формирования системы кислородосодержащий преципитат – дислокационные петли в кремнии / Р. В. Гольдштейн, М. В. Меженный, М. Г. Мильвидский [и др.] // ФТТ. 2010. Т. 53, № 3. С. 493–503.
- [64] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Химико-механическое полирование. Модель локального взаимодействия // Вестник ПГТУ. Механика. 2011. № 3. С. 43–57.
- [65] Goldstein R. V., Osipenko N. M. Some mechanical models of chemical-mechanical polishing processes // Key Engineering Materials. 2013. Vol. 528. P. 33–44.
- [66] Гольдштейн Р. В., Ченцов А. В. Дискретно-континуальная модель нанотрубки // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 4. С. 57–74.
- [67] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М., Ченцов А. В. К определению прочности наноразмерных объектов // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 164–181.
- [68] Гольдштейн Р. В., Устинов К. Б. Учет влияния промежуточной фазы на эффективные свойства дисперсных композитов // Математические модели и методы механики сплошных сред: Сборник научных трудов к 60-летию А.А. Буренина. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2007.
- [69] Гольдштейн Р. В., Шаталов Г. А. Хрупкое разрушение в одномерной модели атомистической трещины // Изв. АН. МТТ. 2003. № 3. С. 135–147.
- [70] Гольдштейн Р. В., Шаталов Г. А. Моделирование процессов разрушения в рамках обобщенной модели атомистической трещины нормального отрыва // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 4. С. 151–164.
- [71] Гольдштейн Р. В., Морозов Н. Ф. Механика деформирования и разрушения наноматериалов и нанотехнологии // Физ. мезомеханика. 2007. Т. 10, № 5. С. 17–30.
- [72] Goldstein R. V., Alexandrov S. E. A new evolution equation for average grain size in processes of severe plastic deformation // J. Eng. Math. 2013. Vol. 78, no. 1. P. 67–81.
- [73] Гольдштейн Р. В., Александров С. Е. О подобии эволюции размера зерна вблизи поверхностей трения и в процессе равноканальной экструзии // ДАН. 2007. Т. 450, № 2. С. 162–165.
- [74] Гольдштейн Р. В., Александров С. Е. К построению определяющих уравнений в тонком слое материала вблизи поверхностей трения в процессах обработки материалов давлением // ДАН. 2015. Т. 460, № 3. С. 283–285.
- [75] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Ustinov K. B. On the modeling of surface and interface elastic effects in case of eigenstrains // Surface Effects and Solid Mechanics, Advanced Structured Materials. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2013. Vol. 30. P. 167–180.
- [76] Моделирование изменения механических свойств полиуретановых эластомеров при модифицировании углеродными нанотрубками / Э. Р. Бадамшина, Р. В. Гольдштейн, Ю. А. Ольхов [и др.] // Физ. Мезомеханика. 2012. Т. 15, № 3. С. 5–10.

- [77] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Об отрицательности коэффициента Пуассона для анизотропных материалов // ДАН. 2009. Т. 429, № 5. С. 614–616.
- [78] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Ауксетическая механика кристаллических материалов // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 43–62.
- [79] Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко [и др.] // Физ. Мезомех. 2013. Т. 16, № 6. С. 13–31.
- [80] Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Эффект Пойнтинга для цилиндрически-анизотропных нано/микротрубок // Физ. Мезомех. 2016. Т. 19, № 1. С. 5–14.
- [81] Auxeticity in nano/microtubes produced from orthorhombic crystals / R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko et al. // Smart Mater. Struct. 2016. Vol. 25, no. 5. p. 054006.

*D. S. Lisovenko, N. M. Osipenko, A. V. Chentsov, E. I. Shifrin*

**MECHANICS OF DEFORMATION AND FRACTURE IN PAPERS BY R. V. GOLDSTEIN**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper is devoted to corresponding member of RAS, PhD, professor, honored scientist of Russian Federation R. V. Goldstein. In this bibliographic note the information about this worldwide well-known scientist is given. Information on his contribution to the development of deformation and fracture mechanics is given.

**Keywords:** fracture mechanics.

---

*Lisovenko Dmitry Sergeevich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of Laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Osipenko Nikolai Mikhailovich*, Cand. Techn. Sci., Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Chentsov Alexander Viktorovich*, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia, Россия.

*Shifrin Efim Ilyich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of Laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

И. М. Лебедев, Е. И. Шифрин

## ОБНАРУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВЕННЫХ ТРЕЩИН В БАЛКЕ С ПОМОЩЬЮ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается задача обнаружения множественных, поперечных трещин в стержне с помощью собственных частот поперечных колебаний. В недавней статье авторов доказано, что любое количество трещин однозначно восстанавливается по трем спектрам, отвечающим трем различным типам краевых условий. В статье также предложен алгоритм идентификации повреждений, вносимых трещинами. Помимо этого, высказано предположение, что для однозначной идентификации трещиноподобных дефектов на самом деле достаточно знать два спектра. Для проверки этого предположения разработана модификация предложенного ранее численного алгоритма. Рассмотрены численные примеры. Полученные результаты дают основание полагать, что высказанное предположение справедливо.

**Ключевые слова:** балка, трещины, поперечные колебания, собственные частоты, обратная задача, численный алгоритм

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.002

УДК: 539.3

### Введение

Задача рассматривается в рамках широко распространенной модели, в которой поперечные трещины при поперечных колебаниях стержня моделируются невесомыми пружинами, работающими на поворот [1-4]. В работе [5] доказано, что любое конечное число трещин однозначно определяется по трем спектрам, отвечающим трем типам краевых условий. Результат получен сведением исходной задачи к обратной спектральной задаче для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка на отрезке. Это позволило воспользоваться известными результатами [6-9].

---

© Лебедев И. М., Шифрин Е. И., 2020

*Лебедев Иван Михайлович*

e-mail: lebedivanm@gmail.com, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

*Шифрин Ефим Ильич*

e-mail: shifrin@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания № госрегистрации АААА-А20-120011690132-4 и при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00100)

Поступила 20.03.2019

Поскольку в результате сведения задачи к дифференциальному уравнению четвертого порядка получилось уравнение частного вида, содержащее лишь одну неизвестную функцию, можно предположить, что в действительности верен более сильный результат и все трещины можно идентифицировать с помощью лишь двух спектров. В представленной статье данная гипотеза проверяется на численных примерах.

### Математическая формулировка задачи

Рассмотрим балку длины  $l$ , занимающую интервал  $0 < x < l$ . Площадь сечения  $S$  балки предполагается постоянной. Предполагается, что пружины, моделирующие поперечные трещины, расположены в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Амплитуды поперечного перемещения оси балки при поперечных колебаниях на интервале  $x_{j-1} < x < x_j$  обозначим  $y_j(x)$ , где  $j = 1, 2, \dots, n+1$ . Уравнение гармонических поперечных колебаний на интервале  $x_{j-1} < x < x_j$  имеет следующий вид

$$y_j^{(4)}(x) = \lambda y_j(x), \quad \lambda = \omega^2 \rho S / EI, \quad (j = 1, 2, \dots, n+1), \quad x_{j-1} < x < x_j \quad (1)$$

где  $E$  - модуль Юнга,  $I$  - момент инерции поперечного сечения,  $\rho$  - плотность материала,  $\omega$  - собственная частота, верхний индекс (4) обозначает производную четвертого порядка.

Условия сопряжения в местах расположения пружин имеют вид

$$y_j(x_j) = y_{j+1}(x_j), \quad y_j''(x_j) = y_{j+1}''(x_j), \quad y_j'''(x_j) = y_{j+1}'''(x_j) \quad (2)$$

$$y'_{j+1}(x_j) - y'_j(x_j) = \Delta_j = c_j y_j''(x_j), \quad c_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

где  $c_j$  податливость  $j$ -ой пружинки.

Рассмотрим четыре типа условий на концах стержня. Во всех случаях предполагается, что правый конец свободен ( $y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0$ ). Случаю защемления левого конца соответствуют условия

$$y_1(0) = y_1'(0) = 0 \quad (4)$$

Условие шарнирного опирания левого конца имеет вид

$$y_1(0) = y_1''(0) = 0 \quad (5)$$

Условие, приводящее к несамосопряженной задаче на собственные значения

$$y_1(0) = y_1'''(0) = 0 \quad (6)$$

Случаю скользящей заделки соответствуют краевые условия

$$y_1'(0) = y_1'''(0) = 0 \quad (7)$$

Собственные значения, определяемые уравнениями (1), (2), (3) и краевыми условиями, при которых правый конец стержня свободен, а условия на левом конце удовлетворяют соотношениям (4), (5), (6) и (7) обозначим  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$  и  $\sigma_i$ , соответственно. Требуется определить положения пружин (трещин)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и их податливости  $c_i$  по указанным собственным значениям.

В [5], с помощью техники, развитой в [10,11], задача сведена к уравнению

$$w^{(4)}(x) = \lambda \left[ 1 + \sum_{j=1}^4 c_j \delta(x - x_j) \right] w(x) \quad (8)$$

Здесь  $\delta(x - x_i)$  - дельта-функция, сосредоточенная в точке  $x_i$ , и для функции  $w(x)$  выполнены следующие краевые условия:  $w(l) = w'(l) = 0$ , а на левом конце условия (4), (5), (6) и (7) переходят в краевые условия  $w''(0) = w'''(0) = 0$ ,  $w(0) = w''(0) = 0$ ,  $w'(0) = w'''(0) = 0$  и  $w'(0) = w'''(0) = 0$  соответственно.

В [6-8] рассмотрено уравнение более общего вида

$$[r(x)w''(x)]'' = \lambda m(x)w(x) \quad (9)$$

где  $m(x)$  и  $w(x)$  регулярные, но неизвестные функции. Доказано, что эти функции однозначно восстанавливаются по трем спектрам  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$ . Хотя функция  $m(x)$ , определяемая уравнением (8) является сингулярной, доказательство, приведенное в [6-8] полностью проходит и для этого случая. Вместе с тем, уравнение (8) содержит только одну неизвестную функцию, что дает основание полагать, что для ее восстановления достаточно знать только два спектра. Это предположение мы проверим численно с помощью алгоритмов, разработанных в [5,12].

#### Численный алгоритм идентификации трещин

Для реализации численного алгоритма немного переформулируем рассматриваемую задачу в соответствии с подходом, развитым в [5,12]. Предположим, что трещины снижают локальную жесткость балки, но не влияют на ее плотность. Тогда, вместо уравнений (1), (2), (3) следует рассмотреть уравнение поперечных колебаний балки с переменным модулем Юнга  $E^*(x)$

$$(p(x)u''(x))'' = \lambda u(x), \quad p(x) = E^*(x)/E \quad (10)$$

С помощью конечно-элементной модели балки и кусочно-постоянной аппроксимации функции  $p(x)$  прямая задача сводится к следующей задаче на собственные значения

$$\left( \mathbf{K}_q(\mathbf{p}) - \lambda^{(q)} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}_q = 0, \quad (q = 1, 2, 3) \quad (11)$$

где индекс  $q$  указывает на тип краевых условий,  $\mathbf{K}_q$  - матрица жесткости, отвечающая данному типу краевых условий,  $\mathbf{M}$  - матрица масс,  $\lambda^{(q)}$  - соответствующие собственные значения,  $\mathbf{d}_q$  - собственные векторы,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$  - вектор относительных жесткостей элементов,  $p_j = E_j^*/E$ ,  $0 < p_j \leq 1$ .

Используемый в [5] алгоритм заключался в решении последовательности оптимизационных задач. Предполагалось, что в результате проведения экспериментов оказались известны собственные значения поперечных колебаний балки  $\tilde{\lambda}_k^{(q)}$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $q = 1, 2, 3$ , соответствующие трем типам краевых условий. Для определения компонент вектора  $\mathbf{p}$  рассматривалась последовательность минимизационных задач с целевыми функциями, использующими различное количество известных собственных значений  $N$

$$F_N(\mathbf{p}) = \sum_{q=1}^3 \sum_{k=1}^N \left( \frac{\lambda_k^{(q)}(\mathbf{p}) - \tilde{\lambda}_k^{(q)}}{\tilde{\lambda}_k^{(q)}} \right)^2 \quad (12)$$

Для поиска минимума введенных целевых функций использовался оптимизационный алгоритм Левенберга-Марквардта [13]. В качестве начального приближения выбирался вектор  $\mathbf{p} = (1, \dots, 1)$ , соответствующий неповрежденной балке. Элементы,

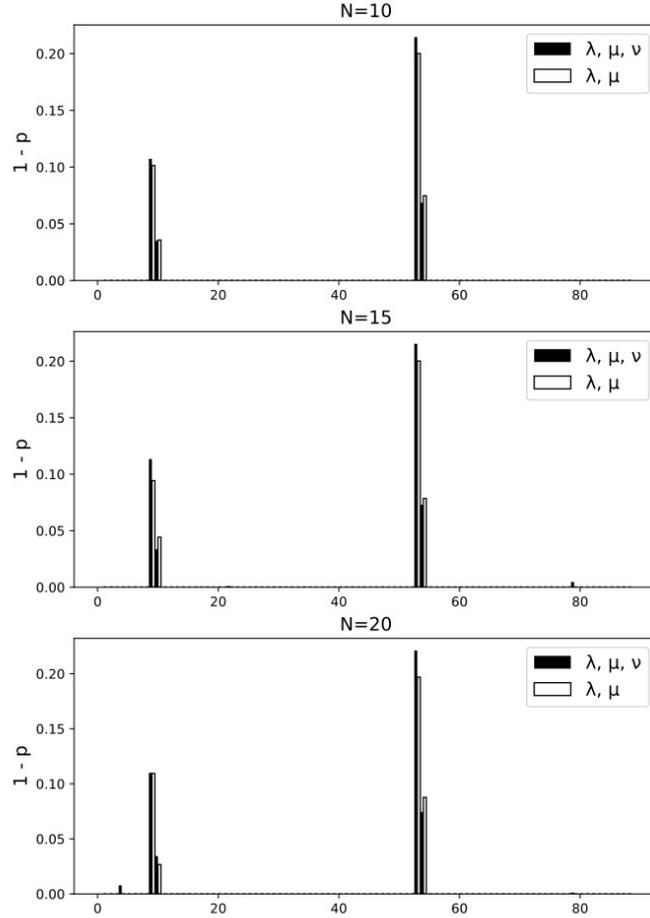


Рис. 1 Сравнение решений, полученных при использовании трех и двух спектров для восстановления двух трещин.

для которых  $p_i < 1$ , признаются поврежденными. Для уточнения локализации дефектов нужно рассматривать более мелкие разбиения отрезка, занимаемого балкой. При этом, участки стержня, признанные неповрежденными при грубом разбиении, считаются неповрежденными и в дальнейшем.

Для проверки нашего предположения о том, что достаточно знать лишь два спектра воспользуемся аналогичным алгоритмом с той разницей, что в целевых функциях будет использовано только два спектра

$$F_N(\mathbf{p}) = \sum_{q=1}^2 \sum_{k=1}^N \left( \frac{\lambda_k^{(q)}(\mathbf{p}) - \tilde{\lambda}_k^{(q)}}{\tilde{\lambda}_k^{(q)}} \right)^2 \quad (13)$$

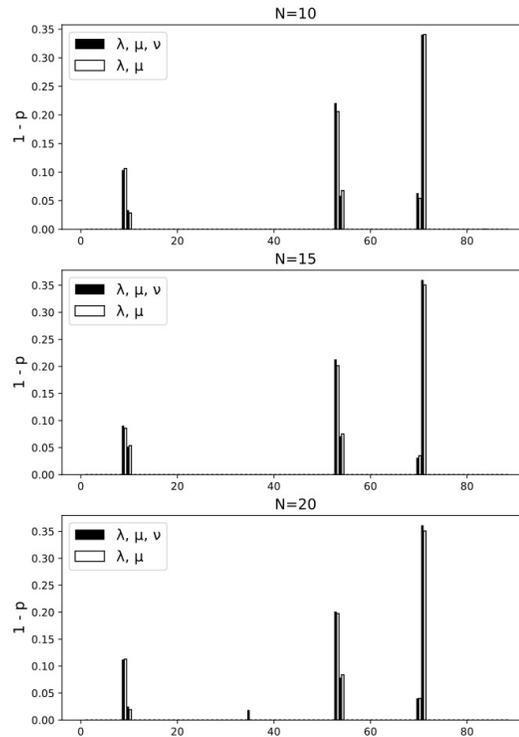


Рис. 2 Сравнение решений, полученных при использовании трех и двух спектров для восстановления трех трещин.

В численных примерах сравним результаты, получаемые с помощью трех и двух спектров.

**Численные примеры**

Рассмотрим балку длины  $l = 1\text{м}$  квадратного сечения со стороной  $h = 0.02\text{м}$ , модуль Юнга материала  $E = 2.1 \times 10^{11}\text{Н/м}^2$ , плотность материала  $\rho = 7800\text{кг/м}^3$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . Во всех рассмотренных примерах стержень, путем последовательного измельчения разбиения, в итоге был разбит на 88 элементов. Сперва рассмотрим задачу идентификации двух открытых, поперечных, односторонних трещин. Первая трещина относительной длины  $s_1 = a_1/h = 0.1$  расположена в точке  $x_1 = 0.1\text{м}$ , вторая трещина расположена в точке  $x_2 = 0.6\text{м}$  и имеет относительную длину  $s_2 = 0.15$ . Здесь  $a_i$  - длины трещин. Используя метод, предложенный в [10], были получены собственные значения, соответствующие поврежденному стержню  $\lambda_i, \tilde{\mu}_i$  и  $\tilde{\nu}_i$ , которые являются входными данными для описанного алгоритма. На Рис.1 приведено сравнение результатов, полученных при использовании двух спектров  $\tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i$  и всех трех рассматриваемых спектров. По оси  $x$  отложены номера элементов, а по оси  $y$  величины, соответствующие податливостям элементов. Элементы занумерованы слева направо. Черные вертикальные полосы соответствуют результатам, полученным с

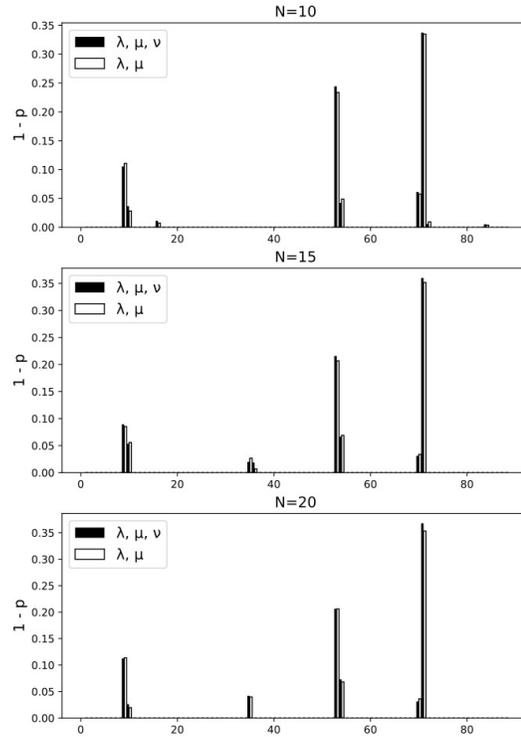


Рис. 3 Сравнение решений, полученных при использовании трех и двух спектров для восстановления четырех трещин.

помощью всех трех спектров. Светлые вертикальные полосы соответствуют результатам, полученным с помощью двух спектров  $\tilde{\lambda}_i$  и  $\tilde{\mu}_i$ . Величины  $N$  соответствуют количеству используемых собственных значений при построении целевых функций. Из рисунка видно, что результаты, полученные с помощью собственных значений, отвечающих двум типам краевых условий, хорошо соответствуют результатам, полученным с помощью собственных значений, отвечающих всем трем типам краевых условий, которые, как было показано в [5], хорошо соответствуют искомым повреждениям.

В следующем примере добавим к имеющимся трещинам еще одну трещину, расположенную в точке  $x_3 = 0.8\text{м}$  и имеющую относительную длину  $s_3 = 0.2$ . Результаты восстановления показаны на Рис.2. Из рисунка видно, что результаты, полученные с помощью трех и двух спектров хорошо согласуются как друг с другом, так и с рассматриваемыми повреждениями.

Добавим, наконец, еще одну трещину размером  $s_4 = 0.05$  в точку  $x_4 = 0.4\text{м}$ . На Рис.3 показаны результаты восстановления четырех трещин. Видно, что здесь также результаты хорошо согласуются друг с другом и с рассматриваемыми повреждениями.

#### Выводы

Рассмотрено несколько численных примеров, результаты которых подтверждают высказанную раньше гипотезу о том, что знания двух спектров, отвечающих двум различным типам краевых условий, достаточно для однозначного восстановления любого конечного числа поперечных трещин в стержне. Примеры приведены для спектров с условиями на концах: свободно опертый – свободный и защемленный – свободный. Для выбора именно этих двух условий имеются определенные основания, однако, численно проверялись и другие пары спектров с условиями на концах: скользящий – свободный и свободно опертый – свободный, а также защемленный – свободный и скользящий – свободный. Хотя полученные результаты также были удовлетворительными, но несколько хуже представленных здесь.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Dimarogonas A. Vibration of cracked structures: a state of the art review. No. 55. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996. 831-857 p.
- [2] N.T. Khiem L. T. A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies. No. 333. *Journal of Sound and Vibration*, 2014. 4084-4103 p.
- [3] L. Rubio J. Fernandez-Saez A. M. Identification of two cracks with different severity in beams and rods from minimal frequency data. No. 22(13). *Journal of Vibration and Control*, 2016. 3102-3117 p.
- [4] J. Fernandez-Saez A. Morassi M. P. L. R. Unique determination of a single crack in a uniform simply supported beam in bending vibration. No. 371. *Journal of Sound and Vibration*, 2016. 94-109 p.
- [5] И.М. Лебедев Е.И. Шифрин. Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний. № 4. *Изв. РАН. МТТ*, 2020.
- [6] Barcilon V. Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. No. 304. *Phil. Trans. R. Soc. Lond*, 1982. 211-251 p.
- [7] Barcilon V. Sufficient conditions for the solution of the inverse problem for a vibrating beam. No. 3. *Inverse Problems*, 1987. 181-193 p.
- [8] Gladwell G. The inverse problem for the vibrating beam. No. A393. *Proc. R. Soc. Lond*, 1984. 277-295 p.
- [9] Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 608 с.
- [10] E.I. Shifrin R. R. Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. No. 222. *Journal of Sound and Vibration*, 1999. 409-423 p.
- [11] Shifrin E. Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // *Mechanical Systems and Signal Processing*. No. 70-71. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016. 613-624 p.
- [12] И.М. Лебедев Е.И. Шифрин. Решение обратной спектральной задачи для стержня, ослабленного поперечными трещинами, с помощью оптимизационного алгоритма Левенберга-Марквардта. № 4. *Изв. РАН. МТТ*, 2019. 8-26 с.
- [13] Lourakis M. A brief description of the Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar. No. 4(1). *Foundation of Research and Technology*, 2005. 1-6 p.

*I.M. Lebedev, E.I. Shifrin*

## DETECTION OF MULTIPLE CRACKS IN A BEAM BY MEANS NATURAL FREQUENCIES OF TRANSVERSE VIBRATIONS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russian Federation*

**Abstract.** A problem of detection of multiple transverse cracks in a beam by means of natural frequencies of transverse vibrations is considered. It is proved in the recent paper of the authors that an arbitrary number of cracks can be uniquely determined by three spectra corresponding to three types of the end conditions. An algorithm of reconstruction the damages corresponding the cracks is also developed. In addition, it was assumed that the cracks can be detected using only two spectra. To verify this supposition a modification of the previously developed algorithm is proposed. Numerical examples are considered. The obtained results confirm the assumption.

**Keywords:** beam, cracks, transverse vibration, natural frequencies, inverse problem, numerical algorithm.

### REFERENCES

- [1] Dimarogonas A. Vibration of cracked structures: a state of the art review. No. 55. Engineering Fracture Mechanics, 1996. 831-857 p.
- [2] N.T. Khiem L. T. A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies. No. 333. Journal of Sound and Vibration, 2014. 4084-4103 p.
- [3] L. Rubio J. Fernandez-Saez A. M. Identification of two cracks with different severity in beams and rods from minimal frequency data. No. 22(13). Journal of Vibration and Control, 2016. 3102-3117 p.
- [4] J. Fernandez-Saez A. Morassi M. P. L. R. Unique determination of a single crack in a uniform simply supported beam in bending vibration. No. 371. Journal of Sound and Vibration, 2016. 94-109 p.
- [5] I.M. Lebedev E. S. Identification of transverse cracks in beam using natural frequencies of transverse vibrations. No. 4. Mechanics of Solids, 2020.
- [6] Barcion V. Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. No. 304. Phil. Trans. R. Soc. Lond, 1982. 211-251 p.
- [7] Barcion V. Sufficient conditions for the solution of the inverse problem for a vibrating beam. No. 3. Inverse Problems, 1987. 181-193 p.
- [8] Gladwell G. The inverse problem for the vibrating beam. No. A393. Proc. R. Soc. Lond, 1984. 277-295 p.
- [9] Gladwell G. Inverse Problems in Vibration. London: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [10] E.I. Shifrin R. R. Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. No. 222. Journal of Sound and Vibration, 1999. 409-423 p.
- [11] Shifrin E. Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // Mechanical Systems and Signal Processing. No. 70-71. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016. 613-624 p.
- [12] I.M. Lebedev E.I. Shifrin. Solution of the inverse spectral problem for a rod weakened by transverse cracks by the Levenberg-Marquardt optimization algorithm. № 54(6). Mechanics of Solids, 2019. 857-872 c.
- [13] Lourakis M. A brief description of the Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar. No. 4(1). Foundation of Research and Technology, 2005. 1-6 p.

---

*Lebedev Ivan M.*

**e-mail:** lebedivanm@gmail.com, junior researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, address: 101, bl. 1, Vernadskii avenue, Moscow, 119526, Russia.

*Shifrin Efim I.*

**e-mail:** prosto@ipmnet.ru, doctor of technical sciences, assistant professor, leading researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, address: 101, bl. 1, Vernadskii avenue, Moscow, 119526, Russia.

Ю. Н. Радаев

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ ЧЕТЫРЬМЯ ВИНТОВЫМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье рассматриваются дифференциальные уравнения для потенциалов, обеспечивающие выполнение связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости в случае гармонической зависимости поля перемещений и микровращений от времени. Предложена альтернативная схема расщепления связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для потенциалов на несвязанные уравнения первого порядка. Она основана на пропорциональности с разными масштабными факторами вихревых составляющих перемещений и микровращений одному вихревому винтовому полю. Найдено представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов, обеспечивающее выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости. В результате проблема нахождения вихревых составляющих перемещений и микровращений сводится к решению четырех несвязанных между собой векторных винтовых дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Полученные результаты могут быть использованы в прикладных задачах механики, связанных с распространением гармонических (монохроматических) волн перемещений и микровращений вдоль длинных волноводов.

**Ключевые слова:** микрополярная теория упругости, вектор перемещения, вектор микро-вращения, связанный, векторный потенциал, вихревая часть, винтовое уравнение, винтовое поле, уравнение Гельмгольца

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.003

УДК: 539.374

---

© Радаев Ю. Н., 2020

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 01.05.2020

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Микрополярная теория упругости, впервые предложенная в классическом сочинении [1], выступает как естественное обобщение теории упругости, хорошо известной и как инженерная, и как физическая наука [2]. Микрополярная теория упругости предолжила свой рецепт преодоления трудностей, с которыми столкнулась теория упругости, пытаясь, например, объяснить поведение зернистых сред или картину распространения высокочастотных акустических волн через поликристаллические структуры. Уравнения микрополярной теории упругости достаточно хорошо известны [3, 4]. Их вывод, основанный на принципе виртуальных перемещений, имеется в статье [5].

Целью представляемой работы является исследование связанной системы векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории изотропного упругого тела в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени. Их изучение и преобразование с помощью динамических потенциалов (безвихревых и вихревых) приводит к различным системам векторных дифференциальных уравнений (как связанным, так и не связанным). С теоретической и прикладной точек зрения наиболее интересны только те, которые обеспечивают переход от связанных уравнений к несвязанным. Родственные проблемы и постановки задач возникают также в прикладных задачах связанной термоупругости и особенно в вопросах распространения гармонических волн в *гиперболических* термоупругих средах [6].

В представляемой работе, которая по- существу представляет собой обобщение методов и результатов [7], развивается альтернативная схема расщепления основной связанной системы векторных дифференциальных уравнений гармонической микрополярной теории упругости на несвязанные уравнения. Последние будут иметь форму винтовых уравнений. Ниже приводятся минимально необходимые сведения, касающиеся таких уравнений (см., например, [9]).

Векторное поле  $\Upsilon$  в трехмерном пространстве называется винтовым (screw field), если оно удовлетворяет следующему соотношению:

$$\Upsilon \times (\nabla \times \Upsilon) = \mathbf{0},$$

т.е. вихрь векторного поля оказывается коллинеарным направлению самого поля

$$\nabla \times \Upsilon = A\Upsilon,$$

где множитель  $A$  характеризуется термином аномальность (abnormality) поля. В том случае, когда множитель  $A$  есть постоянная величина:

1) все кратные (повторные) вихри векторного поля  $\Upsilon$

$$\nabla \times \Upsilon, \quad \nabla \times (\nabla \times \Upsilon), \quad \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \Upsilon)), \dots$$

также будут винтовыми полями, причем с той же самой аномальностью  $A$ ;

2) поле  $\Upsilon$  будет удовлетворять векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Upsilon + A^2 \Upsilon = \mathbf{0};$$

3) винтовое поле  $\Upsilon$  с постоянной аномальностью  $A$  всегда представимо в форме

$$\Upsilon = A(\nabla h) \times \mathbf{d} + A^2 h \mathbf{d} + (\mathbf{d} \cdot \nabla) \nabla h,$$

где  $\mathbf{d}$  — постоянный единичный директор в трехмерном пространстве,  $h$  — некоторое скалярное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$\Delta h + A^2 h = 0.$$

2. Дифференциальные уравнения линейной теории микрополярной упругости в терминах перемещений и микровращений. Система связанных векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории упругости имеет вид [5]:

$$\begin{cases} G[(1 + c_1)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2c_1 \nabla \times \boldsymbol{\phi}] = \rho \partial_t \cdot \partial_t \mathbf{u}, \\ GL^2[(1 + c_2)\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi}] - 2Gc_1(2\boldsymbol{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{I} \partial_t \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi}. \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность;  $\mathfrak{I}$  — коэффициент микроинерции;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения;  $\boldsymbol{\phi}$  — вектор микровращения;  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $L$  — характерная длина микрополярной теории упругости;  $c_1, c_2, c_3$  — физически безразмерные определяющие постоянные;  $\nabla$  — трехмерный оператор Гамильтона;  $\partial_t$  — частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных.

Приведенная выше система векторных дифференциальных уравнений с частными производными (1) представляется наиболее приемлемой с физической точки зрения. Однако в современной литературе она не получила широкого распространения, поскольку оптимальным считается другой набор определяющих постоянных. По этой причине введем новые определяющие постоянные  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \varepsilon$  согласно

$$\begin{aligned} G = \mu, \quad \frac{2\nu}{1 - 2\nu} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad GL^2 = \gamma, \\ c_1 = \frac{\alpha}{\mu}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad c_3 = \frac{\beta}{2\gamma}. \end{aligned}$$

Заметим, что они систематически используются в монографиях [3, 4] и множестве других публикаций, посвященных линейной микрополярной теории упругости изотропного тела. В результате система связанных уравнений линейной микрополярной теории упругости (1) преобразуется к следующей форме:

$$\begin{cases} (\mu + \alpha)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (\mu - \alpha + \lambda)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\phi} = \rho \partial_t \cdot \partial_t \mathbf{u}, \\ (\gamma + \varepsilon)\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} + (\gamma - \varepsilon + \beta)\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} - 2\alpha(2\boldsymbol{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{I} \partial_t \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi}; \end{cases} \quad (2)$$

или также

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\phi} = \rho \partial_t \cdot \partial_t \mathbf{u}, \\ (\beta + 2\gamma)\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} - (\gamma + \varepsilon)\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) - 2\alpha(2\boldsymbol{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) = \mathfrak{I} \partial_t \cdot \partial_t \boldsymbol{\phi}. \end{cases} \quad (3)$$

Векторное дифференциальное уравнение (3) будет рассматриваться в областях трехмерного пространства, обладающих свойством поверхностной односвязности: любая замкнутая поверхность, целиком расположенная в области может быть стянута в точку, не выходя за границу области. Такое требование совершенно необходимо для того, чтобы любое безвихревое векторное поле имело бы потенциал, а любое векторное поле с нулевой расходимостью оказывалось бы вихревым, т.е. имело бы векторный потенциал.

Зависимость от времени предполагается гармонической, т.е. физические поля представляются как произведения комплексных амплитуд (за которыми мы сохраним те же обозначения, что и для самих полей) на комплексную гармоническую экспоненту  $e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  — циклическая частота.

3. Потенциалы перемещений и микровращений. Связанные уравнения для потенциалов. Воспользуемся разложениями Гельмгольца для векторов перемещений и микровращений

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \\ \phi &= \nabla\Sigma + \nabla \times \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных потенциалов  $\Phi$ ,  $\Sigma$  и векторных потенциалов  $\Psi$ ,  $\mathbf{H}$ .

К ним можно присоединять (а можно и не присоединять) различные калибровочные условия. В частности, стандартными принято считать условия, фиксирующие нулевую расходимость векторных потенциалов

$$\nabla \cdot \Psi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Подстановка разложений (1) в систему дифференциальных уравнений (3) позволяет получить уравнения для скалярных и векторных потенциалов.

Дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов  $\Phi$ ,  $\Sigma$  не связаны между собой и поэтому рассматриваются как два независимых уравнения

$$\begin{aligned} \Delta\Phi - \frac{1}{c_{\parallel}^2}(\partial.)^2\Phi &= 0, \\ \Delta\Sigma - \frac{1}{\mu c_{\parallel}^2}(\partial.)^2\Sigma - \frac{\Omega^2}{\mu c_{\parallel}^2}\Sigma &= 0. \end{aligned}$$

Здесь постоянные  $c_{\parallel}^2$ ,  $\mu c_{\parallel}^2$  и  $\Omega^2$  выражаются в терминах определяющих постоянных согласно

$$c_{\parallel}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \mu c_{\parallel}^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{J}}, \quad \Omega^2 = \frac{4\alpha}{\mathfrak{J}}.$$

Для векторных потенциалов  $\Psi$ ,  $\mathbf{H}$  получаются два связанных между собой векторных дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\perp} \Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ \mathcal{B}_{\perp} \mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2\mu c_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3)$$

где были введены постоянные

$$d_{\perp}^2 = \frac{\backslash c_{\perp}^2}{\mu c_{\perp}^2}, \quad \backslash c_{\perp}^2 = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \mu c_{\perp}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad \mu c_{\perp}^2 = \frac{\gamma + \epsilon}{\mathfrak{J}}; \quad (4)$$

и, кроме того, — два дифференциальных оператора второго порядка

$$\mathcal{A}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{\mu c_{\perp}^2}(\partial.)^2, \quad \mathcal{B}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{\mu c_{\perp}^2}(\partial.)^2 - \frac{\Omega^2}{\mu c_{\perp}^2}. \quad (5)$$

Система (3) сохраняет свой вид независимо от использования того или иного условия калибровки. В частности, можно вообще отказаться от калибровочных условий (2).

Исследование связанных уравнений для векторных потенциалов перемещений и микровращений вызывает значительные трудности и поэтому мы сосредоточимся

именно на этих уравнениях. Начнем с того, что дифференциальные операторы  $\mathcal{A}_\perp$  и  $\mathcal{B}_\perp$  в условиях гармонической зависимости от времени сводятся к

$$\mathcal{A}_\perp = \Delta + \frac{\omega^2}{\mathbb{c}_\perp^2}, \quad \mathcal{B}_\perp = \Delta + \frac{\omega^2}{\mathbb{c}_\perp^2} - \frac{\Omega^2}{\mathbb{c}_\perp^2}. \quad (6)$$

В рамках настоящего исследования удобно ввести следующие две постоянные

$$\alpha_\perp^2 = \frac{\omega^2}{\mathbb{c}_\perp^2}, \quad \beta_\perp^2 = \text{Abs} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\mathbb{c}_\perp^2}$$

и привести операторы  $\mathcal{A}_\perp$  и  $\mathcal{B}_\perp$  к следующему виду:

$$\mathcal{A}_\perp = \Delta + \alpha_\perp^2, \quad \mathcal{B}_\perp = \Delta \pm \beta_\perp^2, \quad (7)$$

где выбор того или иного знака в выражении для  $\mathcal{B}_\perp$  зависит от величины циклической частоты

$$\omega^2 - \Omega^2 \geq 0.$$

В итоге в гармоническом случае связанная система уравнений для потенциалов приобретает вид

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\Psi + 2d_\perp^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta \pm \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2\mathbb{c}_\perp^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (8)$$

Ограничимся исследованием высокочастотных гармонических волн, когда циклическая частота  $\omega$  оказывается выше порогового значения, определяемого постоянной  $\Omega$ . Тогда последняя система уравнений приводится к

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\Psi + 2d_\perp^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2\mathbb{c}_\perp^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}; \end{cases} \quad (9)$$

с целью сокращения записи введем обозначение

$$g_\perp^2 = \frac{\Omega^2}{\mathbb{c}_\perp^2} d_\perp^2,$$

после чего окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\Psi + 2d_\perp^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \frac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (10)$$

Внимательный анализ проведенных рассуждений показывает, что связанная система уравнений для потенциалов (10) получается также и в несколько иной форме (и снова без учета калибровки потенциалов):

$$\begin{cases} -\nabla \times (\nabla \times \Psi) + \alpha_\perp^2 \Psi + 2d_\perp^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \beta_\perp^2 \mathbf{H} + \frac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \nabla \times \Psi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (11)$$

4. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений винтовыми векторными полями. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений с помощью винтовых векторных полей решает главную задачу настоящего исследования: переход от связанной системы дифференциальных уравнений (11) к несвязанным уравнениям, что в конечном итоге должно позволить найти аналитические подходы к решению прикладных задач механики микрополярных континуумов.

Достижение этой цели начинается с рассмотрения вихревых составляющих перемещений и микровращений как одного и того же вихревого векторного поля  $\Upsilon$ , но с различными масштабными факторами:

$$\begin{cases} \nabla \times \Psi = a\Upsilon, \\ \nabla \times \mathbf{H} = b\Upsilon; \end{cases} \quad (1)$$

при этом буде выполнено *естественное* калибровочное условие

$$\nabla \cdot \Upsilon = 0.$$

Подстановка (1) в систему векторных дифференциальных уравнений (11) позволяет получить следующую систему уравнений относительно поля  $\Upsilon$ :

$$\begin{cases} -a\nabla \times (\nabla \times \Upsilon) + \alpha_{\perp}^2 a\Upsilon + 2d_{\perp}^2 b\nabla \times \Upsilon = \mathbf{0}, \\ -b\nabla \times (\nabla \times \Upsilon) + \beta_{\perp}^2 b\Upsilon + \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} a\nabla \times \Upsilon = \mathbf{0}. \end{cases}$$

В левой части первого из уравнений приведенной выше системы добавим и отнимем одно и то же слагаемое ( $c$  — некоторая постоянная)

$$c\nabla \times \Upsilon;$$

то же самое выполним и со вторым уравнением и слагаемым ( $d$  — некоторая постоянная)

$$d\nabla \times \Upsilon.$$

После ряда преобразований убеждаемся в том, что, если положить

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2d_{\perp}^2 b}{a\alpha_{\perp}^2}, \quad \frac{b}{d} = \frac{d + (2d_{\perp}^2)^{-1} g_{\perp}^2 a}{b\beta_{\perp}^2},$$

то связанные уравнения для потенциалов будут удовлетворяться, когда

$$\begin{cases} -c\nabla \times \Upsilon + a\alpha_{\perp}^2 \Upsilon = \mathbf{0}, \\ -d\nabla \times \Upsilon + b\beta_{\perp}^2 \Upsilon = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Получить одно независимое уравнение для определения векторного поля  $\Upsilon$  удастся, если принять, что

$$\frac{c}{d} = \frac{\alpha_{\perp}^2 a}{\beta_{\perp}^2 b};$$

тогда оказывается достаточной выполнимость следующего *винтового* уравнения

$$-\nabla \times \Upsilon + p\alpha_{\perp}^2 \Upsilon = \mathbf{0}, \quad (2)$$

где  $p$  представляет собой отношение

$$p = \frac{a}{c}.$$

Обратимся далее к нахождению постоянных. Всего их четыре:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Из них можно образовать три независимых отношения:

$$p = \frac{a}{c}, \quad q = \frac{b}{c}, \quad s = \frac{d}{c}.$$

Для указанных отношений из предыдущих рассуждений получаются ровно три независимых уравнения

$$\begin{cases} p^2 \alpha_{\perp}^2 = 1 + 2qd_{\perp}^2, \\ q^2 \beta_{\perp}^2 = s^2 + ps \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2}, \\ ps \frac{\alpha_{\perp}^2}{\beta_{\perp}^2} = q. \end{cases}$$

Из данной выше системы уравнений можно определить постоянную  $q$ , получив сначала квадратное уравнение

$$2d_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2 q^2 + (\alpha_{\perp}^2 - \beta_{\perp}^2 - g_{\perp}^2)q - \frac{g_{\perp}^2}{2d_{\perp}^2} = 0,$$

из которого находятся два различных вещественных значения для  $q$ :

$$4d_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2 q = \beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 - \alpha_{\perp}^2)^2 + 4g_{\perp}^2 \alpha_{\perp}^2}.$$

Для постоянной  $p$  также получаются два различных вещественных значения согласно

$$2\alpha_{\perp}^4 p^2 = \beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2 \pm \sqrt{(\beta_{\perp}^2 + g_{\perp}^2 + \alpha_{\perp}^2)^2 - 4\alpha_{\perp}^2 \beta_{\perp}^2}.$$

Начиная с этого момента, введем два значения  $p_1$ ,  $p_2$ , которые соответствуют положительному и отрицательному знакам в приведенной только что формуле, и введем также два значения  $K_1$ ,  $K_2$ , положив

$$\alpha_{\perp}^4 p_{1,2}^2 = K_{2,1}^2, \quad \alpha_{\perp}^2 p_1 = \mp K_2, \quad \alpha_{\perp}^2 p_2 = \mp K_1.$$

Заметим, что волновые числа  $K_1$ ,  $K_2$  в силу своего определения упорядочены согласно

$$K_2 > K_1 > 0.$$

Таким образом, всего для параметра  $p$  имеется *четыре* различных вещественных значения

$$\mp K_1, \quad \mp K_2;$$

в результате векторное поле  $\Upsilon$  должно удовлетворять одному из *четырёх* винтовых уравнений

$$-\nabla \times \Upsilon \mp K_{2,1} \Upsilon = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где знаки  $\mp$  и индексы 1, 2 между собой никак не согласованы.

Таким образом, имеется ровно четыре независимых поля<sup>1</sup>

$$\Upsilon_{\frac{2}{-}}, \quad \Upsilon_{\frac{2}{+}}, \quad \Upsilon_{\frac{1}{-}}, \quad \Upsilon_{\frac{1}{+}},$$

которые должны быть интегралами несвязанных векторных уравнений (3) и линейные комбинации которых будут определять вихревые части векторов перемещений и

<sup>1</sup>Приводимые ниже обозначения для четырех различных вариантов векторного поля  $\Upsilon$  согласованы с четырьмя уравнениями (3), выписанными в сокращенной форме.

микровращений в соответствии с (1). При этом следует учитывать, что однозначно определяется лишь отношение  $b/a$  и, поскольку

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p},$$

то отношение  $b/a$  имеет четыре различных значения, которые без труда находятся из данных выше формул.

Полнота рассматриваемых в работе представлений гармонических полей перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторных полей может быть установлена известными (и сравнительно простыми) методами, изложение которых заинтересованный читатель обнаружит в статье [7].

Полученные в работе результаты нацелены на их использование в прикладных задачах, связанных с распространением гармонических (монохроматических) волн перемещений и микровращений вдоль длинных цилиндрических волноводов и в этом смысле выступают как дальнейшее развитие методов и результатов, содержащихся в книге [6].

#### 5. Заключение.

1. Исследуется система связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости в терминах перемещений и микровращений в случае гармонической зависимости физических полей от времени (монохроматические волны перемещений и микровращений).
2. Получены несвязанные уравнения для скалярных и связанные уравнения векторных потенциалов, задающих поля перемещений и микровращений в соответствии с представлением Ламе, выполнение которых обеспечивает выполнение векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости.
3. Развита альтернативная схема расщепления связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для потенциалов на несвязанные уравнения, основанная на пропорциональности вихревых составляющих перемещений и микровращений одному вихревому винтовому полю.
4. Проблема нахождения вихревых составляющих перемещений и микровращений сведена к решению четырех несвязанных между собой векторных винтовых дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными.
5. Получено представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов, обеспечивающее выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости.
6. Полнота рассматриваемых в работе представлений гармонических полей перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторных полей может быть установлена известными (и достаточно простыми) методами.
7. Результаты настоящей работы могут быть использованы в прикладных задачах, связанных с распространением гармонических (монохроматических) волн перемещений и микровращений вдоль длинных волноводов.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
- [2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.
- [3] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
- [4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [5] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.
- [6] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
- [7] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. №2. 2021. (в печати)
- [8] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories* / In: *Encyclopedia of Physics*. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.

Y. N. Radaev

## ON MODELLING HARMONIC WAVES IN LINEAR MICROPOLAR ELASTIC MEDIA BY FOUR SCREW FIELDS

*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper is devoted to study of the coupled vector differential equations of the linear theory of micropolar elasticity formulated in terms of displacements and microrotations in the case of a harmonic dependence of the physical fields on time. An alternative analysis aimed at splitting the coupled vector differential equation of the linear theory of micropolar elasticity into uncoupled equations is given. It is based on a notion of proportionality of the vortex parts of the displacements and microrotations to the single vector, which satisfies the screw equation well known from the mathematical physics. As a result, the problem of finding the vortex parts of the displacements and microrotations fields is reduced to solution of four uncoupled screw differential equations of the first order with partial derivatives. Obtained results are to be used in applied problems of the micropolar elasticity and in particular in studies of harmonic wave propagation along waveguides.

**Keywords:** micropolar elasticity, displacement vector, microrotation vector, coupled, vector potential, vortex part, screw equation, screw field, Helmholtz equation

### REFERENCES

- [1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
- [2] Southwell R.V. An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. London: Oxford University Press, 1941
- [3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
- [4] Nowacki W. Teoria sprężystości. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1970, 769 pp. (In Polish)
- [5] Radaev Yu.N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018. V. 22. No 3. P. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.
- [6] Kovalev V.A., Radaev Yu.N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Saratov Univ. Publ., 2010. 328 pp. ISBN 978-5-91899-012-4
- [7] Radaev Yu.N. Representation of displacements in spatial harmonic theory of elasticity using two helical vectors // Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela. №2. 2021. (in print)
- [8] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories/ In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer, 1960. P. 226–902.

---

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00844).

*Radaev Yuri Nickolaevich*

e-mail: radaev@ipmnet.ru, y.radaev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

Н. А. Вerezуб, А. И. Простомолотов

## ГИДРОМЕХАНИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ПРОЦЕССЕ ВЫРАЩИВАНИЯ КРИСТАЛЛОВ МЕТОДОМ ЧОХРАЛЬСКОГО

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрен один из механизмов гидромеханической неустойчивости при выращивании кристаллов из расплава методом Чохральского, связанный с явлением образования «холодных термиков» в подкристалльной области. С этой целью проанализированы результаты, полученные по двум математическим моделям: 1 – без и 2 – с учетом процесса кристаллизации. В первом случае модельной жидкостью был этанол, а положение фронта кристаллизации задавалось изотермой кристаллизации и было неизменным. В рамках такого подхода были исследованы особенности перехода от стационарного течения жидкости к его неустойчивым модам, сопровождающимся формированием, развитием и отрывом «холодного термика» от фронта (изотермы) кристаллизации. Во втором случае модельными расплавами были два материала с температурой плавления, близкой к комнатной: гептадекан и галлий, которые существенно различаются коэффициентами теплопроводности. В этом случае было изучено влияние термомеханических параметров на формирование формы фронта кристаллизации и возникновение гидромеханической неустойчивости в виде «холодных термиков».

**Ключевые слова:** выращивание кристаллов, метод Чохральского, моделирование, гидродинамика, теплоперенос, фронт кристаллизации

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.004

УДК: 621.315.592:548.4

### Введение

Проблема неустойчивости потока расплава при выращивании кристаллов по методу Чохральского (Cz) является предметом многих экспериментальных и теоретических работ, в которых анализируются флуктуации температуры в расплаве для конкретных условий роста кристаллов кремния (см., например, обзор [1]). Прямое численное

---

© Вerezуб Н. А., Простомолотов А. И., 2020

*Вerezуб Наталья Анатольевна*

e-mail: verezub@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.  
*Простомолотов Анатолий Иванович*

e-mail: prosto@ipmnet.ru, доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках Госзадания АААА-А20-120011690136-2 при поддержке гранта РФФИ № 18-02-00036.

Поступила 20.03.2020

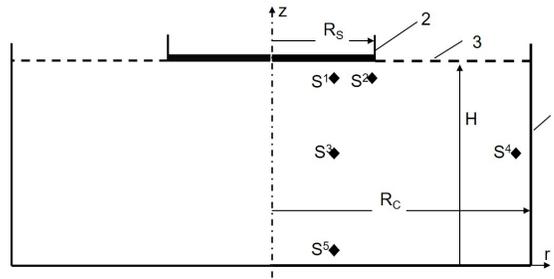


Рис. 1.

моделирование неустойчивых течений на основе полных уравнений Навье-Стокса актуально и мало изучено для разных гидродинамических моделей, включая модель Cz.

Первые попытки таких вычислений методами конечных разностей [2] и конечных элементов [3] выявили значительное влияние параметров сетки. В последующие годы методы численного моделирования были улучшены путем применения консервативной и более точной аппроксимации уравнений. Увеличение компьютерных ресурсов позволило значительно увеличить количество узлов сетки и обеспечить существенное снижение «математической» вязкости. Прямое численное моделирование течения, соответствующее ламинарно-турбулентному переходу, стало возможным после долговременной проверки стационарных течений в Cz-модели [5, 6]. Подобная работа опубликована в [10] с использованием данных физического моделирования [7].

Целью данной работы являлось изучение процессов конвективного теплообмена на двух моделях метода Чохральского: 1 – с использованием этанола в качестве модельной жидкости без учета процесса кристаллизации, 2 – с использованием в качестве модельных жидкостей материалов с температурой плавления, близкой к комнатной (гептадекан и галлий), с учетом процесса кристаллизации. Обсуждается явление образования «холодных термиков» под фронтом кристаллизации (ФК). Результаты математического моделирования верифицировались по данным лабораторных экспериментов [8, 9].

#### Математическое моделирование без учета процесса кристаллизации

Численное моделирование гидродинамических неустойчивых течений в Cz-осесимметричной модели на основе приближения Навье-Стокса-Буссинеска проводилось с последующим вычислением средней скорости, температурных полей и спектров флуктуаций. В зависимости от температуры тигля исследовались скорость, колебания температуры и динамика «холодных термиков».

Геометрия расчетной области, где 1 – тигель, 2 – модель кристалла в виде диска, 3 – свободная поверхность, и расположение контрольных точек  $S^1$ – $S^5$  в жидкости для регистрации температурных пульсаций показаны на Рис. 1. Координаты точек [см]: 1)  $z = 9.82$ ,  $r = 2.68$ ; 2)  $z = 9.82$ ,  $r = 5.36$ ; 3)  $z = 5.16$ ,  $r = 2.68$ ; 4)  $z = 5.16$ ,  $r = 14.25$ ; 5)  $z = 0.50$ ,  $r = 2.68$ .

Жидкость заполняет цилиндрический объем радиуса  $R_C = 14.75$  см до высоты  $H = 10.32$  см. Диск радиуса  $R_S = 5.36$  см расположен на поверхности жидкости соосно с тиглем. Термические условия были следующими: температура диска  $T_S = 300$  К, дно тигля теплоизолировано, боковая стенка нагрета до температуры  $T_W = T_S + \Delta T$ .

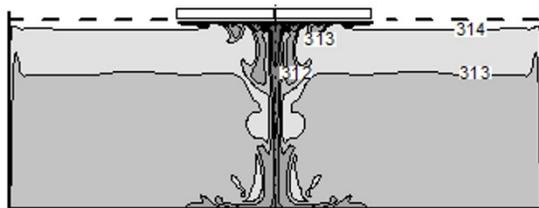


Рис. 2.

Теплофизические параметры этанола:  $\rho = 0.79 \text{ г/см}^3$  – плотность;  $\beta_T = 1.1 \times 10^{-3} \text{ 1/К}$  – коэффициент объемного теплового расширения;  $\partial\sigma/\partial T = -0.083 \text{ дин/(см} \times \text{К)}$  – коэффициент поверхностного теплового расширения;  $\nu = 1.54 \times 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$  – кинематическая вязкость;  $\lambda = 1.75 \times 10^3 \text{ эрг/(см} \times \text{с} \times \text{К)}$  – теплопроводность;  $C_P = 2.43 \times 10^7 \text{ эрг/(г} \times \text{К)}$  – теплоемкость. В расчетах использовалась равномерная конечно-разностная сетка: для осесимметричного случая – 15750 узлов ( $r \times z$  :  $150 \times 105$ ).

Структура течения обусловлена тепловой гравитационной и термокапиллярной конвекцией под действием сил на свободной поверхности жидкости. В данной работе изучался переход к гидродинамически неустойчивым течениям при изменении разности температур между боковой стенкой тигля и диском  $\Delta T$ . Анализ неустойчивости течения проводился на основе записей в каждой точке сетки для статистически однородного температурного поля в объеме жидкости с последующими усредняющими итерациями с течением времени, выполненными с шагом 0.01 с за 200 с. Одновременно вычислялись среднеквадратичные отклонения температурных пульсаций. Достижение статистически однородного температурного поля контролировалось по пульсациям температуры в контрольных точках (см.  $S^1$ – $S^5$  на Рис. 1), для которых рассчитаны амплитудно-частотные характеристики пульсаций.

В графической форме визуализировалась эволюция «холодного термика»: образование, развитие и отрыв от поверхности диска, суть которой заключается в следующем. В гравитационном поле неоднородность распределения температуры в тигле вызывает движение расплава под действием гравитационной тепловой конвекции, которое усиливается дополнительным влиянием термокапиллярных сил на свободной поверхности жидкости. В результате жидкость поднимается около нагреваемой стенки бокового тигля, затем перемещается в радиальном направлении к холодному диску. Под диском наблюдается опускное движение охлажденной жидкости.

При увеличении  $\Delta T$  от 4 до 15 К структуры опускного течения под диском существенно изменяются. При малом значении  $\Delta T = 4 \text{ К}$  опускная струя достигает дна тигля, не теряя первоначальной формы. Существенные радиальные изменения ее формы становятся заметными при больших значениях  $\Delta T = 10$  и 15 К, они также изменяются во времени. Например, при  $\Delta T = 15 \text{ К}$  имеет место радиальный поворот струи от оси к боковой стенке, что заметно по изотермам вблизи дна тигля. На Рис. 2 приведена мгновенная картина изотерм при  $\Delta T = 15 \text{ К}$ , на которой процесс эволюции «холодного термика» под холодным диском хорошо заметен: его формирование вблизи края диска, увеличение по направлению к центру и затем отрыв от диска около центрального нисходящего потока.

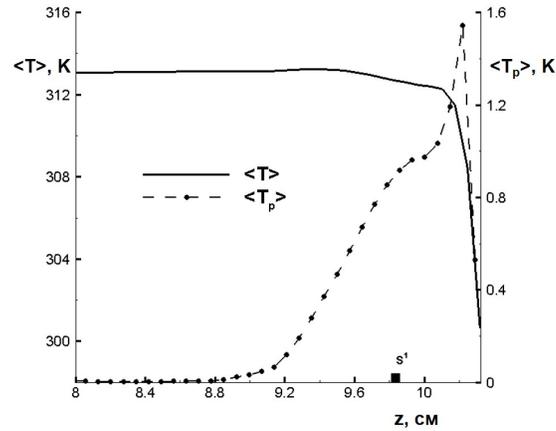


Рис. 3.

Для анализа неустойчивых во времени течений и переноса тепла при  $\Delta T = 15$  К были рассчитаны средние значения пульсации температурного поля. Для поля средней температуры  $\langle T \rangle$  можно выделить три области: 1 – вблизи нагреваемой боковой стенки тигля, где подъемный поток образует пограничный слой; 2 – под свободной поверхностью, где большая часть объема жидкости имеет вертикальную температурную стратификацию; 3 – область под диском, где жидкость охлаждается и течет на дно с большой скоростью, делая на дне резкий поворот, что заметно по локальным изотермам. Максимальное значение пульсаций температуры  $\langle T_p \rangle = 1.4$  К имеет место вблизи диска и равно 9%  $\Delta T$ .

На Рис. 3 показаны осевые профили средней температуры  $\langle T \rangle$  и пульсаций  $\langle T_p \rangle$  в среднем поперечном сечении ( $r = R_S/2$ ) при  $\Delta T = 15$  К (здесь:  $S^1$  – контрольная точка из Рис. 1). В осевых распределениях можно заметить пограничные слои у диска. Изменение температуры в пограничном слое ( $\sim 12$  К) существенно превышает такое же изменение в пограничном слое вблизи дна тигля. Максимальное значение  $\langle T_p \rangle$  наблюдается в средней части пограничного слоя около диска ( $\sim 1.4$  К), вблизи дна оно меньше ( $\sim 0.6$  К). Толщина пограничного слоя у диска составляет  $\sim 1.1$  см.

Соответствующая спектральная мощность флуктуаций температуры в контрольной точке  $S^1$  показана на Рис. 4.

Спектр флуктуаций температуры заметно дискретен, в нем выделяются частоты с наивысшей спектральной мощностью. Экспериментальные данные [8], соответствующие дискретному спектру ламинарно-турбулентного перехода, хорошо согласуются с этими результатами расчетов.

#### Математическое моделирование с учетом процесса кристаллизации

В отличие от предыдущей части, данная модель учитывает процесс кристаллизации. Схема математической модели показана на Рис. 5: расплавленная (1) и кристаллическая (2) части модельного материала; поверхность (3) диска (4), термостатированная при  $T_S$ ; цилиндрический тигель (5) с боковой стенкой, термостатированной при  $T_W > T_S$ , и теплоизолированным дном; форма ФК при температуре плавления  $T_M$  (6); датчики температуры  $S^1$ – $S^3$ .

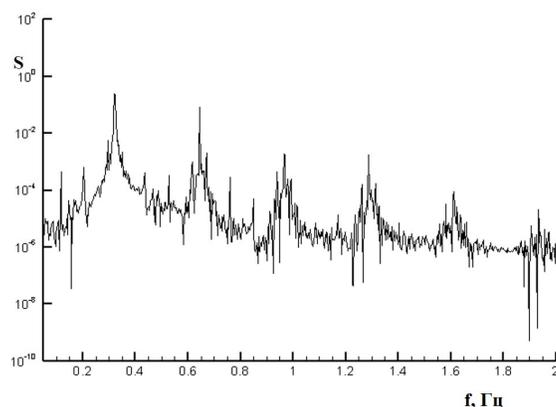


Рис. 4.

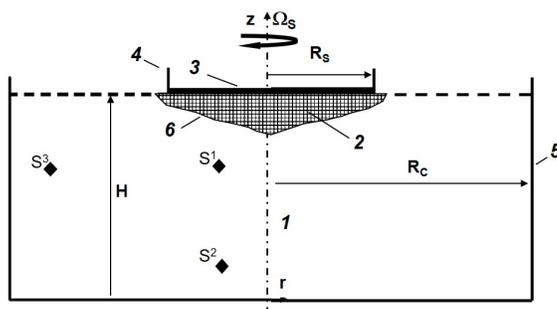


Рис. 5.

Размеры: цилиндрический тигель ( $R_C = 14.75$  см,  $H = 10.32$  см,  $H/R_C = 0.7$ ), коаксиальный диск ( $R_S = 5.36$  см,  $R_C/R_S = 2.75$ ). Расположение датчиков температуры  $(z, r)$  [см]:  $S^1$ –(5.16, 1.34);  $S^2$ –(0.5, 1.34);  $S^3$ –(5.16, 14.25).

Расплавленная фракция (1) кристаллизуется при температуре плавления  $T_M$ . Расплавленное состояние обеспечивается нагреванием боковой стенки (5) до температуры  $T_W > T_M$ . Дно тигля и свободная поверхность расплава (пунктирная линия) являются адиабатическими. Центральную часть поверхности расплава закрыта твердым диском (4), коаксиальным тиглю, его температура  $T_S < T_M$  по всей поверхности (3). Этот диск можно вращать со скоростью  $\Omega_S$ . Охлаждение диска приводит к кристаллизации расплавленного материала под его поверхностью с образованием твердой области (2). Три датчика ( $S^1$ – $S^3$ ) помещены в расплав для регистрации изменений температуры и спектрального анализа.

При учете процесса кристаллизации полагается зависимость от температуры плотности  $\rho(T)$ , теплопроводности  $\lambda(T)$  и динамической вязкости жидкости  $\mu(T)$ .

Предполагается, что между кристаллом (твердой фракцией) и расплавом (жидкой фракцией) существует промежуточная фракция – область кристаллизации при значениях температуры  $T$ , больших температуры солидуса  $T_{SOL}$  и меньших температуры ликвидуса  $T_{LIQ}$ , в которой задается линейное изменение доли жидкой фракции.

Для твердой фракции и области кристаллизации при  $T < T_{LIQ}$  решается уравнение теплопереноса, а для жидкой фракции решаются совместно уравнение теплопереноса и уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска.

Изучались изменения формы ФК в зависимости от задаваемых температур  $T_W$ ,  $T_S$  и скорости вращения диска  $\Omega_S$  для двух режимов конвективного теплообмена: 1 – при тепловой конвекции, 2 – при тепловой конвекции и вращении кристалла.

Таблица 1.

Параметр	Гептадекан	Галлий
$T_M$ [К] температура плавления	295	302.8
$\rho$ [г/см <sup>3</sup> ] плотность	0.787 (273 К), 0.778 (295 К), 0.769 (303 К)	5.904 (298 К), 6.093 (303 К)
$\beta_T$ [1/К] коэф. теплового расширения	$1.17 \times 10^{-3}$	$1.21 \times 10^{-3}$
$\nu$ [см <sup>2</sup> /с] кинематическая вязкость	$5.187 \times 10^{-2}$ (295 К)	$3.24 \times 10^{-3}$ (323 К)
$\sigma$ [дин/см] поверхностное натяжение	28.1 (295 К), 21.4 (373 К)	706 (323 К), 705 (373 К)
$\partial\sigma/\partial T$ [дин/см×К] изменение пов. натяжения	$8.38 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-2}$
$\lambda$ [ерг/с×см×К] теплопроводность	$1.368 \times 10^3$ (295 К), $1.319 \times 10^3$ (313 К)	$2.81 \times 10^5$ (300 К), $2.60 \times 10^5$ (304 К)
$C_p$ [ерг/г×К] теплоемкость	$2.247 \times 10^7$	$3.73 \times 10^6$
$Q$ [ерг/г] скрытая теплота плавления	$3.2 \times 10^9$	$8.0 \times 10^8$
$Pr = \nu\rho C_p/\lambda$ число Прандтля	66	0.03
$Gr = g\beta_T R_S^3 \Delta T/\nu^2$ число Грасгофа	$2.21 \times 10^5$	$7.60 \times 10^7$
$Mn = (\partial\sigma/\partial T)R_S C_p \Delta T/\nu\lambda$ число Марангони	$4.79 \times 10^4$	—
$Re = R_S^2 \Omega_S/\nu$ число Рейнольдса	$5.54 \times 10^2$	$8.0 \times 10^3$

Расчеты были проведены для двух материалов с температурой плавления, близкой к температуре окружающей среды: гептадекана при  $T_M = 295$  К и галлия при  $T_M = 302.8$  К. Теплофизические параметры и критерии подобия для этих материалов приведены в Таблице 1. Значения критериев вычислены для фиксированной разности температур между боковой стенкой и диском  $\Delta T = 3.37$  К.

Нагрев боковой стенки тигля приводит к возникновению тепловой конвекции в гравитационном поле, нагретый расплав движется вверх вдоль стенки к охлажденному

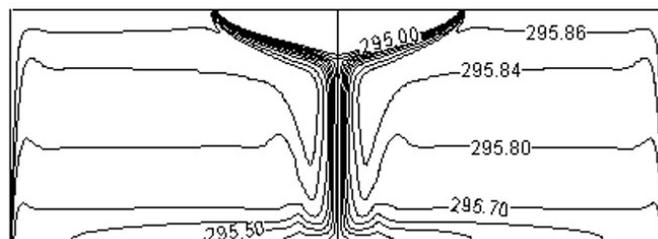


Рис. 6.

диску. Это движение усиливается действием термокапиллярных сил на свободной поверхности расплава. При этом у диска кристаллизуется твердая фракция (2) (см. Рис. 5), объем и форма которой зависят от конвективного режима. В соответствии с экспериментом [9] режим тепловой конвекции в гептадекане рассматривался при  $T_S = 292.3$  К – на диске,  $T_W = 295.9$  К – на боковой стенке тигля. В качестве формы ФК бралась форма изотермы  $T_{SOL}$ .

Результаты расчетов показали, что при кристаллизации гептадекана возникает одновихревой стационарный поток, при этом модуль скорости достигает максимального значения  $V_m = 1.01$  см/с в нисходящем потоке вблизи оси. Однако скорость потока вблизи боковой стенки тигля гораздо меньше:  $V_m \simeq 5.1 \times 10^{-2}$  см/с. Формируется вертикальная стратификация температурного поля согласно распределению изотерм на Рис. 6, которая характеризуется тем, что верхние поверхностные слои становятся более нагретыми, чем нижние. Существенная температурная неоднородность возникает в области, где охлажденный расплав течет вдоль ФК.

Для поиска возможностей управления формой ФК были рассчитаны различные режимы тепловой конвекции в зависимости от числа  $Gr$  и разности температур  $\Delta T$ .

В первом случае при  $\Delta T = 3.37$  К, когда число  $Gr$  изменялось в пределах:  $22.1\text{--}2.21 \times 10^5$ , установлено, что при низких числах  $Gr$  скорость потока мала и теплопередача выполняется в режиме теплопроводности, а твердая фаза охватывает всю центральную область материала. Однако с увеличением числа  $Gr$  происходит уменьшение закристаллизовавшейся части. Стоит отметить, что при  $\Delta T = 1.6$  К и  $Gr = 1.1 \times 10^5$ , соответствовавших  $T_W = 295.9$  К и  $T_S = 294.3$  К, конвективный режим отличался небольшим повышением температуры диска, что выпрямляло форму ФК. Поэтому можно сказать, что форма ФК зависит не только от интенсивности тепловой конвекции (или числа  $Gr$ ) и разности температур  $\Delta T$ , но и от температуры диска  $T_S$ .

Интересны также закономерности изменения формы ФК для материалов с более высокой теплопроводностью. С этой целью выполнены расчеты для галлия (здесь для сравнения результатов у галлия предполагалось  $T_M = 295$  К). В этом случае число  $Pr$  для расплавленной части было уменьшено до 0.03, что отвечает значениям для расплавленных металлов и полупроводников. Использованы примерно те же температурные параметры, что и для гептадекана:  $\Delta T = 3.37$  К,  $T_W = 295.9$  К,  $T_S = 292.53$  К и в пределах того же диапазона чисел  $Gr$ :  $380\text{--}3.8 \times 10^5$ . Изотермы и форма ФК для такого варианта показаны на Рис. 7.

Для небольшого числа  $Gr = 3.8 \times 10^2$  закристаллизовавшаяся часть занимает только центр тигля, на Рис. 7 соответствующий контур ФК показан пунктирной линией. В этом случае поток слабый, а теплопередача соответствует режиму теплопроводности.

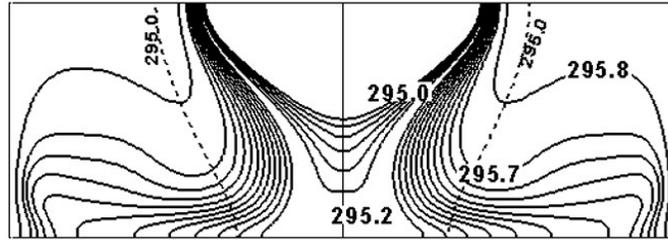


Рис. 7.

Однако поток становится сильнее при большом числе  $Gr = 3.8 \times 10^5$ , что приводит к существенному нагреву центра тигля. Это видно по существенному искривлению изотерм в направлении течения, показанным сплошными линиями на Рис. 7.

Можно отметить некоторые различия в форме ФК по сравнению с гептадеканом. Например, при больших числах  $Gr$  закристаллизовавшаяся часть охватывает больший объем центра тигля. Поэтому можно сказать, что зависимость формы ФК от тепловой конвекции для веществ с высокой теплопроводностью (металлы, полупроводники) значительно ниже, чем для органических и оксидных веществ с низкой теплопроводностью.

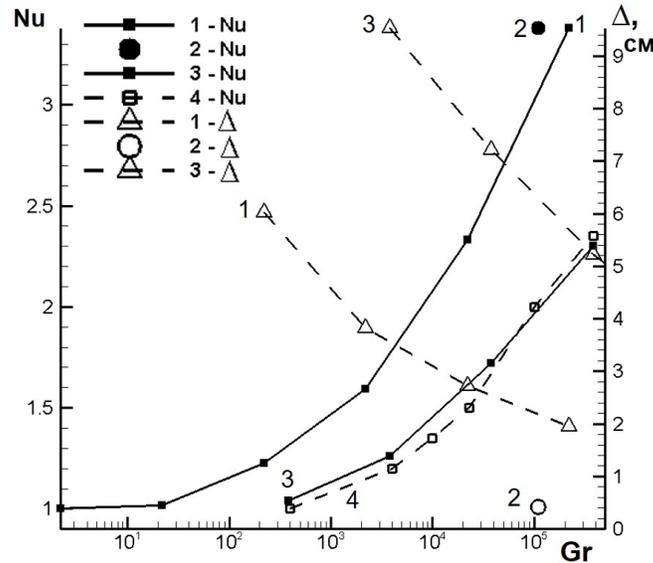


Рис. 8.

Графики наиболее важных характеристик были построены в зависимости от числа Грасгофа для различных температур  $T_S$  охлаждаемого диска, а также для больших и малых чисел Прандтля. Боковая стенка тигля рассматривалась как источник нагрева, а охлаждаемый диск – часть радиатора. Расчеты выполнялись до достижения теплового баланса, когда интегральный тепловой поток на боковой стенке отличался от

потока на диске не более, чем на 5%. Эти графики показаны на Рис. 8 для величины выпуклости  $\Delta$  ФК: 1– $Pr = 66$ ,  $T_S = 292.53$  К; 2– $Pr = 66$ ,  $T_S = 294.23$  К; 3– $Pr = 0.03$ ,  $T_S = 292.53$  К; 4– $Pr = 0.05$  [9].

Тепловой поток на диске выражается относительным интегральным значением числа Нуссельта  $Nu$ , которое рассчитывается как отношение интегрального теплового потока для конкретного числа  $Gr$  к его значению в режиме теплопроводности [9]. Следует отметить, что величина  $\Delta$  уменьшается вместе с увеличением числа  $Gr$ . Ее большие значения соответствуют меньшему числу  $Pr$  (см. кривые 1 и 3). Например, при  $Gr = 10^4$  значения отличаются в 2.5 раза:  $\Delta = 3.5$  см для больших  $Pr = 66$  и  $\Delta = 8.7$  см при малых  $Pr = 0.03$ . Как отмечено выше, изменение температуры охлаждаемого диска  $T_S$  вызывает значительное уменьшение выпуклости ФК. Для  $Gr = 10^5$  и большего числа  $Pr$  значения  $\Delta$  отличаются в 5 раз:  $\Delta = 2.5$  см для  $T_S = 292.53$  К и  $\Delta = 0.5$  см для  $T_S = 294.3$  К (см. кривую 1 и метку 2). Теплоотвод от диска увеличивается при увеличении числа  $Gr$ , причем этот рост намного выше для больших чисел  $Pr$  (см. кривые 1, 3, 4). При  $Gr = 10^5$  значения отличаются примерно в 1.7 раза ( $Nu = 3.1$  для  $Pr = 66$  и  $Nu = 1.8$  для  $Pr = 0.03$ ).

Согласно [9], данные для кривой 4 были получены при малых значениях числа Прандтля ( $Pr = 0.05$ ). Они хорошо соответствуют результатам этой работы при  $Pr = 0.03$  (кривая 3). Изменения температуры  $T_S$  на диске также приводят к определенным различиям. Например, для  $Gr \simeq 10^5$  и большого числа  $Pr$  значения  $Nu$  различаются примерно в 1.1 раза:  $Nu = 3.1$  при  $T_S = 292.53$  К,  $Nu = 3.4$  при  $T_S = 294.3$  К (см. кривую 1 и метку 2). Такое увеличение теплоотвода объясняется влиянием небольшого увеличения  $T_S$  на 1.77 К, что существенно меньше уменьшения величины выпуклости ФК, вызванного им.

Влияние вращения кристалла на форму ФК обсуждалось в течение длительного времени (начиная с публикации [4]). Оно основано на идее ламинарного двухвихревого потока в тигле. Один вихрь вызван тепловой конвекцией в нагретом тигле, а другой вихрь, имеющий противоположное направление движения, вызван вращением кристалла. При этих аргументах форма ФК не вычисляется, а ее выпуклость или вогнутость оценивается качественно на основе отношения чисел Грасгофа и Рейнольдса следующим образом:  $\gamma = Gr/Re^2$ . Обычно предполагается, что при  $\gamma > 1$  преобладает тепловая конвекция и имеет место выпуклая форма ФК, а для  $\gamma < 1$  – вынужденная конвекция, вызванная вращением кристалла, обеспечивает вогнутую форму ФК. Эти взгляды были полезны и экспериментально протестированы много раз. В частности, оценивался критический радиус кристалла, соответствующий инверсии формы ФК (от сильно выпуклой до слегка вогнутой для стадии роста конусной части монокристалла).

В данной работе такая проверка проведена на основе экспериментальных данных о кристаллизации гептадекана, характеризующегося большим значением числа Прандтля (аналогично оксидным, органическим материалам):  $Pr = 66$ . Тепловые условия следующие:  $T_S = 292.53$  К – на диске,  $T_W = 295.9$  К – на боковой стенке тигля (разность температур  $\Delta T = 3.37$  К). Рассмотрено комбинированное действие термогравитационной и термокапиллярной конвекции наряду с вынужденной конвекцией, вызванной вращением диска с угловой скоростью  $\Omega_S = 1$  рад/с. Значения теплофизических параметров и рассчитанных критериев подобия приведены в Таблице 1.

В соответствии со структурой течения, приведенной на Рис. 9, основное подъемное движение, вызванное термогравитационной конвекцией, имеет место вблизи боковой

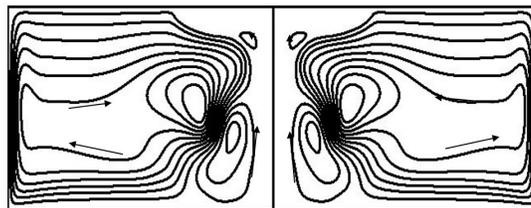


Рис. 9.

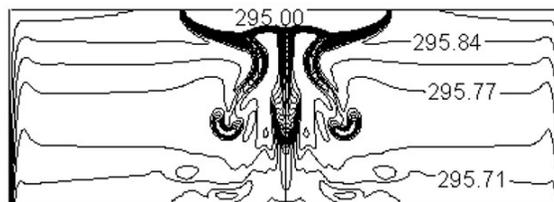


Рис. 10.

стенки тигля. Его средняя скорость достигает  $7.7 \times 10^{-2}$  см/с. Поток несколько усиливается за счет влияния термокапиллярных сил под свободной поверхностью расплава в радиальном направлении к ФК.

По распределению изотерм [К] на Рис. 10 можно сказать, что охлаждение диска приводит к кристаллизации расплавленной части, расположенной под ним, с образованием выпуклой затвердевшей области.

Однако вращение диска с этой затвердевшей областью сильно влияет на течение расплава в тигле. Центробежные силы при вращении твердой выпуклой области вызывают вихревое движение, направленное против вихря тепловой конвекции. Скорость вращения достигает большого значения (5.56 см/с) и весь объем расплава оказывается вовлеченным во вращательное движение. Однако интенсивность меридионального потока (радиальная и осевая компоненты скорости) значительно ниже. Рядом с осью тигля расплав движется вверх с осевой скоростью 0.414 см/с, а затем отбрасывается в радиальном направлении от центра центробежными силами, что влияет на конфигурацию затвердевающей поверхности. Поток противоположного направления приводит к уменьшению влияния тепловой конвекции на форму ФК и создает в ее центре прогиб вверх, такую форму обычно называют W-образной. В этом случае  $\gamma = 0.72$ , что соответствует преобладанию вынужденной конвекции ( $\gamma < 1$ ). В целом, структура течения сохраняется, но интенсивности вихрей подвержены колебаниям. Это вызвано периодическим возникновением и отрывом «холодных термик» от ФК.

#### Заключение

Представленный в статье метод Чохральского является основной технологией выращивания монокристаллов, дефектообразование в которых при их выращивании зависит от гидромеханической неустойчивости термомеханических процессов вблизи ФК на стадии, предшествующей кристаллизации.

С использованием двух гидромеханических моделей (1 – без и 2 – с учетом процесса кристаллизации) показано, что одним из важных механизмов гидромеханической неустойчивости является явление образования «холодных термиков» вблизи ФК. В статье проанализированы амплитудно-частотные характеристики, связанные с длительностью возникновения, развития и отрыва «холодных термиков» от ФК в зависимости от тепловых параметров ( $\Delta T$  и  $Gr$ ).

Показано, что в первой модели, использующей в качестве модельной жидкости этанол, при  $\Delta T = 15$  К гидромеханическая неустойчивость соответствует ламинарно-турбулентному переходу с явно выраженным дискретным спектром колебаний температуры в области существования «холодных термиков».

На основе второй модели, использующей материалы, кристаллизующиеся при температуре, близкой к комнатной (гептадекан и галлий), показано формирование формы ФК в зависимости от интенсивности вихрей, вызванных действием тепловой и вынужденной конвекции. Представленные графики выпуклости ФК и числа  $Nu$  на ФК построены для различных чисел  $Gr$  и температур охлаждаемого диска  $T_S$ , а также для больших и малых значений числа  $Pr$ . В условиях кристаллизации расплава гептадекана подтверждено явление образования, развития и отрыва «холодных термиков» от ФК. Установлено, что динамика поведения «холодных термиков» и соответствующая частота температурных колебаний у ФК существенно зависят от скорости вращения диска.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Miller W. Numerical simulation of bulk crystal growth on different scales: silicon and GeSi // *Physica Status Solidi (B)*. 2010. Vol. 247, no. 4. P. 885–869.
- [2] Convection during crystal growth on earth and in space / V. I. Polezhaev, K. G. Dubovik, S. A. Nikitin et al. // *Journal of Crystal Growth*. 1981. Vol. 52. P. 465–470.
- [3] Finite-element simulation of Czochralski bulk flow / M. J. Crochet, P. J. Wouters, F. T. Geyling et al. // *Journal of Crystal Growth*. 1983. Vol. 65, no. 1-3. P. 153–165.
- [4] Carruthers J. R. Flow transitions and interface shapes in the Czochralski growth of oxide crystals // *Journal of Crystal Growth*. 1976. Vol. 36, no. 2. P. 212–214.
- [5] Nikitin N., Polezhaev V. Direct simulations and stability analysis of the gravity driven convection in a Czochralski model // *Journal of Crystal Growth*. 2001. Vol. 230, no. 1-2. P. 30–39.
- [6] Convective interaction and instabilities in GaAs Czochralski model / V. I. Polezhaev, O. A. Bessonov, N. V. Nikitin et al. // *Journal of Crystal Growth*. 2001. Vol. 230, no. 1-2. P. 40–47.
- [7] Teitel M., Schwabe D., Gelfgat A. Y. Experimental and computational study of flow instabilities in a model of Czochralski growth // *Journal of Crystal Growth*. 2008. Vol. 310, no. 7-9. P. 1343–1348.
- [8] Berdnikov V. S., Prostomolotov A. I., Verezub N. A. The phenomenon of “cold plume” instability in Czochralski hydrodynamic model: Physical and numerical simulation // *Journal of Crystal Growth*. 2014. Vol. 401. P. 106–110.
- [9] Heptadecane and Gallium Crystallization in Hydrodynamic Czochralski Model / V. Berdnikov, A. Prostomolotov, N. Verezub et al. // *Journal of Materials Science and Engineering A*. 2015. Vol. 5, no. 10. P. 351–360.
- [10] Bessonov O. A., Polezhaev V. I. Unsteady nonaxisymmetric flows in the hydrodynamic Czochralski model at high Prandtl numbers // *Fluid Dynamics*. 2011. Vol. 46, no. 5. P. 684–698.

N.A. Verezub, A.I. Prostomolotov

## HYDROMECHANIC INSTABILITY OF CRYSTALS GROWTH BY CZOCHRALSKI METHOD

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russian Federation*

**Abstract.** The mechanism of hydromechanical instability during Czochralski crystal growth from a melt is considered, which is associated with the formation of “cold plumes” under the crystal. For this purpose, the results obtained by two mathematical models: 1 – without and 2 – taking into account the crystallization process are analyzed. In the first case, an ethanol was as the model fluid, and the position of the crystallization front was set by the crystallization isotherm and was unchanged. Within the framework of this approach, the features of a transition from a stationary fluid flow to its unstable modes were studied, which are accompanied by the formation, development, and separation of “cold plumes” from the crystallization front (isotherm). In the second case, the model melts were as two materials with a melting point close to room temperature: heptadecane and gallium, which significantly differ in thermal conductivity. In this case, the influence of thermomechanical parameters on the formation of the crystallization front shape and the occurrence of hydromechanical instability in the form of “cold plumes” was studied.

**Keywords:** crystal growth, Czochralski method, simulation, fluid dynamics, heat transfer, cold plumes, crystallization front.

### REFERENCES

- [1] Miller W. Numerical simulation of bulk crystal growth on different scales: silicon and GeSi // *Physica Status Solidi (B)*. 2010. Vol. 247, no. 4. P. 885–869.
- [2] Convection during crystal growth on earth and in space / V. I. Polezhaev, K. G. Dubovik, S. A. Nikitin et al. // *Journal of Crystal Growth*. 1981. Vol. 52. P. 465–470.
- [3] Finite-element simulation of Czochralski bulk flow / M. J. Crochet, P. J. Wouters, F. T. Geyling et al. // *Journal of Crystal Growth*. 1983. Vol. 65, no. 1-3. P. 153–165.
- [4] Carruthers J. R. Flow transitions and interface shapes in the Czochralski growth of oxide crystals // *Journal of Crystal Growth*. 1976. Vol. 36, no. 2. P. 212–214.
- [5] Nikitin N., Polezhaev V. Direct simulations and stability analysis of the gravity driven convection in a Czochralski model // *Journal of Crystal Growth*. 2001. Vol. 230, no. 1-2. P. 30–39.
- [6] Convective interaction and instabilities in GaAs Czochralski model / V. I. Polezhaev, O. A. Bessonov, N. V. Nikitin et al. // *Journal of Crystal Growth*. 2001. Vol. 230, no. 1-2. P. 40–47.
- [7] Teitel M., Schwabe D., Gelfgat A. Y. Experimental and computational study of flow instabilities in a model of Czochralski growth // *Journal of Crystal Growth*. 2008. Vol. 310, no. 7-9. P. 1343–1348.
- [8] Berdnikov V., Prostomolotov A., Verezub N. The phenomenon of “cold plume” instability in Czochralski hydrodynamic model: Physical and numerical simulation // *Journal of Crystal Growth*. 2014. Vol. 401. P. 106–110.
- [9] Heptadecane and Gallium Crystallization in Hydrodynamic Czochralski Model / V. Berdnikov, A. Prostomolotov, N. Verezub et al. // *Journal of Materials Science and Engineering A*. 2015. Vol. 5, no. 10. P. 351–360.
- [10] Bessonov O. A., Polezhaev V. I. Unsteady nonaxisymmetric flows in the hydrodynamic Czochralski model at high Prandtl numbers // *Fluid Dynamics*. 2011. Vol. 46, no. 5. P. 684–698.

*Verezub Nataliya A.*

**e-mail:** verezub@ipmnet.ru, candidate of physical-mathematical sciences, assistant professor, senior researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, address: 101, bl. 1, Vernadskii avenue, Moscow, 119526, Russia.

*Prostomolotov Anatoly I.*

**e-mail:** prosto@ipmnet.ru, doctor of technical sciences, assistant professor, leading researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, address: 101, bl. 1, Vernadskii avenue, Moscow, 119526, Russia.

Н. М. Осипенко

## СТРУКТУРА РАЗРУШЕНИЯ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ДВУХ МЕХАНИЗМОВ ЛОКАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрены примеры сценариев хрупкого разрушения, в которых участвуют два механизма локального разрушения – развитие трещин нормального разрыва и компактирование, либо торошение, при сжатии. Работа является продолжением исследований структур разрушения в условиях сжатия [1]. Показано, что в модельной ситуации с цепочкой отверстий в пластине выбор механизма формирования локальных очагов разрушения или их совместного действия зависит от ориентации системы отверстий относительно оси сжатия. Другой пример относится к процессу разрушения ледяного покрова при его сжатии под действием течений и ветровой нагрузки. Рассмотрен вариант разрушения, в котором происходит взаимодействие двух видов разрушения – локализованное в виде трещиноподобного дефекта разрушение при сжатии (торошении) и формирование сопутствующих поперечных разрывов, разбивающих нагружаемый участок ледяного покрова на ряд полос вдоль напряжений сжатия.

**Ключевые слова:** локальное разрушение, трещина нормального разрыва, сжатие, компактирование, структура разрушения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.005

УДК: 539.4/621

### Введение

Традиционный подход к сценарию разрушения в механике разрушения базируется на отыскании условий, соответствующих иницированию и развитию некоторого фиксированного механизма локального разрушения. Вместе с тем существуют ситуации в которых появляется возможность одновременной или периодической готовности к реализации двух или большего количества локальных механизмов разрушения. К ним относится, например, развитие разрушения в окрестности отверстия или ряда отверстий в пористой среде при сжатии [2]. Показано, что к трещинам нормального разрыва, приуроченным к областям концентрации растяжения у отверстий, добавляются очаги разрушения (компактирования) в областях концентрации сжатия.

Коротко остановимся на специфике последних. В условиях интенсивных сжимающих нагрузок, в высокопористых материалах проявляются специфические формы

---

© Осипенко Н. М., 2020

*Осипенко Николай Михайлович*

e-mail: osipnm@mail.ru, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г.Москва, Россия

Поступила 20.03.2020

разрушения, связанные с локализованным уплотнением за счет заполнения порового пространства, либо частичного удаления материала или изменения его фазового или структурного состояний [3]. Инициирование такого вида разрушения может реализоваться в окрестности концентратора напряжений (отверстия). Образующаяся при разрушении вытянутая полость, заполненная уплотненной, но сохраняющей подвижность, средой зарождается в диаметральной плоскости иницирующего отверстия поперек оси сжатия, а ее поперечный размер в развитой концевой части близок к постоянному, и не связан с размером отверстия. Образующиеся вытянутые дефекты геометрически подобны трещине (их продольный размер много больше характерной толщины), а процессы разрушения в их окрестностях сосредоточены в малых концевых областях. Узкие трещиноподобные зоны уплотненного материала, интерпретируемые как трещины сжатия (*anti-mode 1 crack*), наблюдаются и в тектонических структурах сжатия в окрестности вершин разлома (магистрального тектонического сдвига) [4]. Условия предельного равновесия таких дефектов (трещин сжатия) в упругой среде аналогичны условиям равновесия трещин, имеющих начальное раскрытие. Поэтому для анализа разрушения таких объектов (трещин сжатия) может быть привлечен аппарат механики разрушения. Недавние лабораторные исследования показали, что локализация уплотнений является важным механизмом разрушения в пористых горных породах (песчаниках с пористостью от 13 до 28%). Обзор этих работ можно найти, например в [3]. Образование зон уплотнения сопровождается всплесками акустической активности [5]. В рассматриваемом сценарии важно, что локальная реализация одного механизма разрушения создает условия активизации другого механизма у того же отверстия. В модельной ситуации с системой отверстий выбор механизма формирования локальных очагов разрушения зависит от ориентации линейной цепочки отверстий относительно оси сжатия. Форма разрушения в виде сливающихся продольных разрывов доминирует в ряде отверстий, ось которого близка к оси сжатия. Инициирование трещин в этом случае происходит в областях концентрации растяжения. Затем следует устойчивое подрастание и слияние трещин с образованием продольного магистрального разрыва. Картина разрушения совпадает со сценарием развитой ранее модели разрывов, ориентированных вдоль главных сжимающих напряжений в окрестности дефектов под действием напряжений, близких к одноосному сжатию [6]. Трещиноподобные зоны уплотнения становятся ведущими структурообразующими дефектами при увеличении угла наклона цепочки отверстий до  $\alpha \geq 45^\circ$ . Они распространяются между областями концентрации сжатия у соседних отверстий. Для промежуточных значений угла наклона  $\alpha = 15^\circ - 45^\circ$  наблюдается вариант разрушения при совместном участии двух типов локальных механизмов разрушения - к трещинам нормального разрыва, образующим эшелон, приуроченный к областям концентрации растяжения соседних отверстий, добавляются очаги разрушения (компактирования) в областях концентрации сжатия. Такой механизм разрушения формирует специфические структуры разрушения. Их совместное действие при росте трещин разрывов и соединении их с очагами компактирования у соседних отверстий приводит к обособлению фрагментов, ограниченных этими нарушениями. Инициирование разрушения на линии отверстий в гипсовом образце при одноосном сжатии под углом  $\alpha = 25^\circ$  показано на Рис.1, Рис.2 где изображены начальная и конечная стадии образования системы отделинностей по линии отверстий. Приведенная

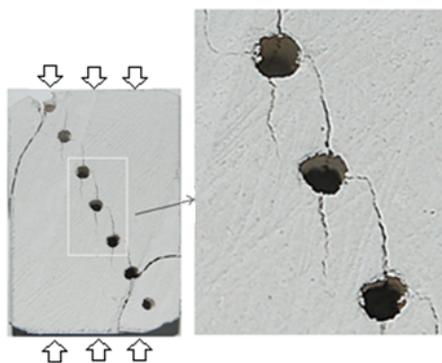


Рис. 1.

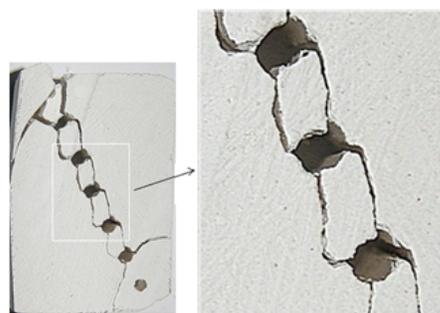


Рис. 2.

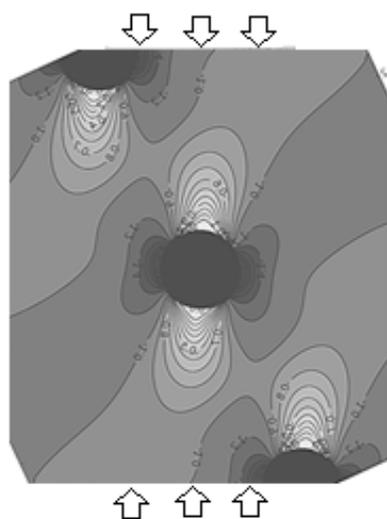


Рис. 3.

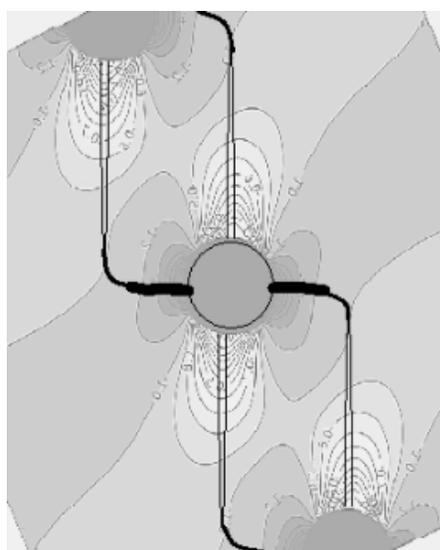


Рис. 4.

на Рис.3 схема изолиний главных напряжений  $\sigma_{min}$  и контур образующихся отдельностей в таком образце Рис.4 показывают связь очагов разрушения с концентрацией напряжений растяжения и сжатия в окрестностях соседних отверстий.

Система малых фрагментов, образующаяся по такому сценарию на линии отверстий, при продолжении деформировании образца формирует «третье тело» - структуру разрушения, активность которой (в данном случае способность к перекачиванию фрагментов) характерна для дальнейшего взаимодействия между оставшимися ненарушенными блоками образца - сдвига по этой линии. Представляется, что описанный сценарий представляет один из механизмов зарождения подвижной структуры области трения в пористой среде.

Другой пример относится к процессу разрушения крупномасштабного участка сплошного ледяного покрова при его сжатии под действием течений и ветровой нагрузки. Наблюдаемая картина частичного разбиения ледяных полей на полосы обычно интерпретируется как следствие разрушения под влиянием волнения. Представляется, что это не единственный возможный механизм развития структур разрушения в

таких условиях. Рассмотрим вариант разрушения, в котором происходит взаимодействие двух видов разрушения – торошения при сжатии и сопутствующих разрывов. Качественная картина разрушения представляется следующей. Исходное состояние системы определяется наличием нарушения, поперечного по отношению к направлению сжатия. Оно может быть связано с развитием «трещины сжатия». При доминировании сжатия в тонком ледяном покрове развиваются системы трещиноподобных структур сжатия – наслоений с перехлестом берегов или торошения, ориентированных по нормали к сжимающим нагрузкам [7]. Предельное равновесие таких элементов макроструктуры ледяного покрова определяется величиной критического коэффициента интенсивности напряжений в концевой области трещин сжатия  $K_h$  (условиями разрушения в малой по отношению к размеру дефекта концевой области). В зависимости от свойств льда и толщины ледяного покрова в ней могут реализоваться различные механизмы разрушения от локальной потери устойчивости, что характерно для тонких льдин (толщиной менее 30 см), до пластического локализованного сдвига или хрупкого разрушения при сжатии.

Очаги и полосы наслоений и торосов (трещин сжатия) во время своего развития сопровождаются вторичными разрывами в направлении сжатия (поперек траектории трещины сжатия), образуя сопряженную систему нарушений. Причиной появления вторичных разрывов служит изменение напряженного состояния в окрестности трещин сжатия. Такие вторичные разрывы фиксируются в окрестности структур сжатия – торосов и наслоений [8–10]. Оценки на модельных материалах [7] показывают, что величина  $K_h$  – критического коэффициента интенсивности напряжений сжатия в вершине трещин сжатия – аналога трещиностойкости – на порядок больше трещиностойкости материала –  $K_{IC}$ . Поэтому маловероятна обратная картина – появление вторичных трещин сжатия в окрестности магистральных разрывов.

Упомянутая трещина сжатия в ледяном покрове толщиной более 0.3 м в своей концевой области демонстрирует начальную стадию торошения – локальное обламывание кромки льда при изгибе. При этом формируется некоторый характерный поперечный размер трещины сжатия – вытянутой поперек сжатия области разрушения. При малых скоростях движения он определяется радиусом статического изгиба кромки льда на гидравлическом основании.

$$r \simeq \left( \frac{Eh^3}{3\rho g} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1)$$

Фактически этот размер играет роль поперечного размера условно открытой части трещины сжатия. Распространение разрушения – развитие трещиноподобного дефекта – при поперечном сжатии приводит к смыканию берегов трещины сжатия. Появляется второй характерный размер – полудлина открытой части трещины сжатия ( $l$ ). Смещение ее берегов в режиме упругого деформирования

$$u \simeq \frac{\pi(1 - \mu^2)\sigma_\infty l}{E} \quad (2)$$

При смыкании берегов трещины с начальным раскрытием  $\gamma$  в упругой плоскости полудлина трещины

$$l \simeq \left( \frac{E^5 h^3}{3\rho g} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\pi(1 - \mu^2)\sigma_\infty} \quad (3)$$

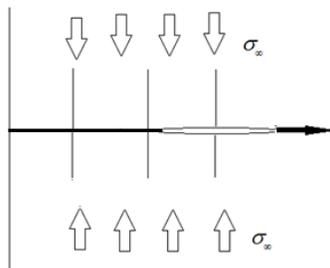


Рис. 5.

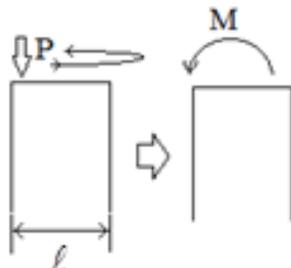


Рис. 6.

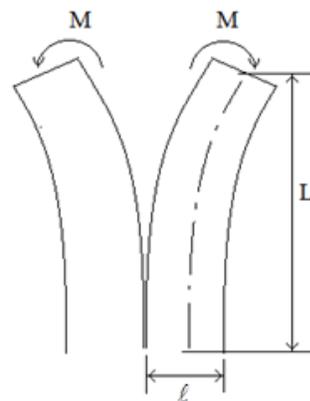


Рис. 7.

Для появления поперечных разрывов в этой области нужно, чтобы было выполнено условие  $\sigma_{\infty} = \sigma_t$ , где  $\sigma_t$  — прочность при растяжении.

В результате первоначально однородная плавающая пластина льда, пересекаемая трещиной сжатия, получает оперение в виде системы поперечных разрывов. Далее вступает в действие кинематический механизм торошения как реакции ледяного покрова на приложенную нагрузку. Приведем здесь вариант реализации такого механизма для случая нагружения полубесконечной ледяной пластины со свободной боковой поверхностью вдоль оси сжатия.

Последовательное развитие разрывов при продвижении трещины сжатия и разбивает нагружаемый объем льда на ряд полос вдоль направления сжатия (Рис.5). Каждая из полос на линии трещины сжатия контактирует с симметричной полосой по другую сторону трещины сжатия. Этот контакт представляет собой ослабленную зону по отношению к полю внешних напряжений сжатия и является потенциально областью торошения.

Заметим, что в области силового контакта полос сомкнутые берега трещины сжатия могут содержать различного рода неоднородности локального нагружения как вследствие следов локализованных процессов разрушения при прохождении концевой области, так и по причине наличия обломков льда. Это приводит к возможности распространения повторного локализованного разрушения в области контакта при возрастании контактной нагрузки и смыкании берегов трещины сжатия. Поскольку локализованное разрушение в области контакта, как и в концевой зоне трещины сжатия, происходит порциями, последовательно распространяющимися на все контактные неоднородности, процесс в целом идентичен сканированию очагом разрушения линии контакта сопряженных полос, в результате которого поддерживается торошение на торцах балок, сопровождаемое кинематическими смещениями полос под влиянием возникающего при локализованном разрушении изгибающего момента в плоскости ледяного покрова. Поэтому полоса получает импульсы кинематического движения (изгиба) в плоскости ледяного покрова, вынуждающие ее совершать колебания в горизонтальной плоскости с частотой, коррелирующей с частотой движения очага контактного разрушения по фронту контакта торцов балок, в свою очередь зависящей от интенсивности сжатия. Эти кинематические движения расталкивают соседние полосы, чем создают противодействие в поперечном относительно оси сжатия

направлении, что препятствует распространению описываемого сценария разрушения от свободной границы.

В модельном приближении можно представить на каждой из сторон трещины сжатия систему полос в виде ряда балок, нагружаемых этими блуждающими моментами, в результате чего между балками поддерживается развитие разрывов в направлении вдоль внешнего сжатия (Рис.6, Рис.7). Каждая из полос содержит также на своем торце область торшения, в которой продолжается сканирование очагом разрушения фронта контакта. В процессе сканирования нагрузки по фронтам контакта величина и знак момента в каждой эффективной балке меняется. Оценку эффекта с точки зрения влияния на развитие разрушения можно сделать, обращаясь к максимальному моменту, при котором возможно подрастание разрывов, оконтуривающих балки. Условия предельного равновесия разрыва между балками на краю ледяного поля близки к таковым для симметричной пары балок, нагруженных максимальным изгибающим моментом [9].

$$K_I = K_{IC} \quad (4)$$

$$K_I = \frac{2\sqrt{3}M}{l^{\frac{3}{2}}h}, \quad (5)$$

где  $M$  изгибающий момент на торце балки,  $M_{max} \simeq Pl$ . ( $P$  - усилие на контакте при обламывании порционного фрагмента кромки льда). Отсюда

$$K_{I_{max}} = \frac{2\sqrt{3}P}{\sqrt{lh}}, \quad (6)$$

Согласно (6), при достижении предельного равновесия разрыв распространяется неограниченно. Ограничение длины разрыва (и продольного размера полосы - балки) при симметричной относительно линии контакта схеме разрушения наступает, когда поворот торца балки вдали от очага контактного разрушения перекрывает открытую часть области контакта (размер  $\sim r$ ). Угол поворота торца упругой балки, нагруженной моментом

$$\theta = \frac{ML}{EI}; \quad I = \frac{hl^3}{12} \quad (7)$$

Для условия смыкания при малых углах поворота

$$l = \frac{r}{\sin \theta} \simeq \frac{r}{\theta} \quad (8)$$

Получим оценку максимальной длины разрыва

$$L \simeq \frac{(Eh)^{2.5}}{12\pi(1 - \mu^2)(3\rho g)^{0.5} P\sigma_\infty} \quad (9)$$

Заметим, что приведенный вариант нагружения локальными усилиями, приводящий к развитию трещин между эффективными балками ледяного покрова, не исчерпывает возможные ситуации. Приведем в качестве альтернативы случай, когда силы  $P$  от локальных очагов контактного разрушения, перемещаясь по области контакта, симметрично сходятся к устью трещины между балками. Тогда возникает изгибающий момент противоположной ориентации, создающий при встречном изгибе балок в устье

разлома опоры и растяжение в его концевой части. Энергия изгиба соседних балок по этому сценарию

$$U_{\Sigma} = 2 \int_0^L \frac{M_{\Sigma}^2 dx}{2EI} = \frac{3P^2 L}{2Ehl^3} \quad (10)$$

Удельная энергия развития трещины

$$G = \frac{dU_{\Sigma}}{dA} = \frac{3P^2}{2Eh^2l} \quad (11)$$

Следовательно

$$K_I = \frac{\sqrt{3}P}{\sqrt{2}lh} \quad (12)$$

Сравнивая (6) и (12), можно видеть, что первый вариант сценария разрушения более благоприятен для развития трещин - разрывов между балками.

Распространению области упорядоченного разрушения от свободной границы, как сказано выше, препятствует деформация эффективных балок между этой границей и рассматриваемыми балками. Учитывая пассивное сопротивление этих промежуточных балок изгибу, можно найти границу распространения процесса. Пренебрегая сопротивлением трения на контурах взаимодействующих балок, примем, что совокупный момент инерции системы балок равен сумме моментов инерции индивидуальных балок

$$I_{\Sigma} \simeq \Sigma I = nI \quad (13)$$

где  $n$  – количество балок между трещиной и свободным краем.

Отсюда и из (6) при сохранении условий предельного равновесия получим

$$K_I = \frac{2\sqrt{3}P}{\sqrt{nl}h}; \quad K_I \geq K_{IC} \quad (14)$$

Это соотношение определяет размер области, охваченной преобразованием структуры разрушения – количество балок между свободной границей и трещиной, в которой еще выполняется условие предельного равновесия

$$n = \left( \frac{2\sqrt{3}P}{K_{IC}\sqrt{l}h} \right)^2 \quad (15)$$

Приведем некоторые оценки. Найдем диапазон расстояний между разрывами на исходной трещине сжатия. В рассматриваемом сценарии разрушения эффективная податливость среды ледяного покрова (эффективный модуль упругости) можно оценить, например, по скорости сближения берегов канала, оставляемого ледоколом при движении в сжатых льдах. По данным, приведенным в [11] при сжатии в 2 балла (соответствует сжимающим напряжениям на уровне 20 кПа) сплоченного ледяного покрова  $E_{ef} \sim 2 - 6$  МПа. В других источниках [12] даются более высокие значения эффективных характеристик льда. Оценка размера  $l$  для приведенных значений эффективного модуля упругости дана на Рис.8.

Для оценки области распространения рассматриваемого сценария разрушения величину  $P$  свяжем с усилием пролома ледяного покрова.

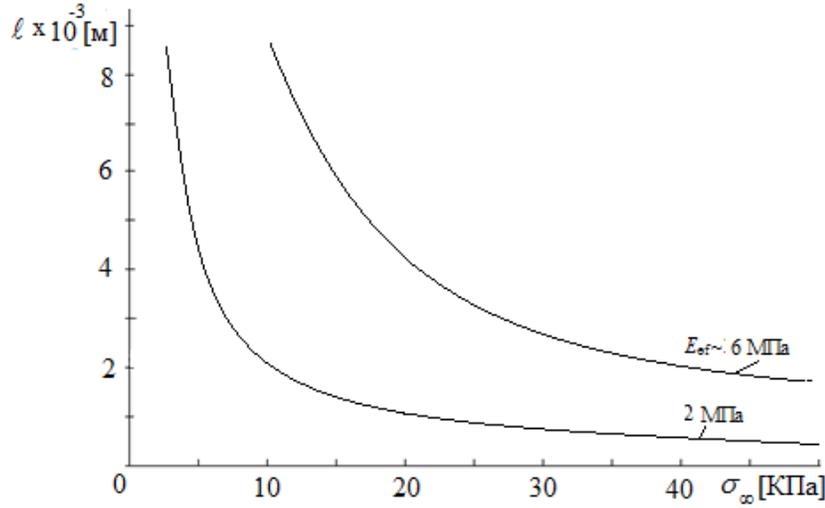


Рис. 8.

Будем придерживаться следующей картины развития локального разрушения на контакте: В области локального контакта образуются сколы меняющие геометрию области контакта и, в частности, меняющие направление локальных сил. [13] Аналогичный механизм, провоцирующий выход кромки плавающего льда из плоскости ледяного покрова, реализуется при локальном разрушении на силовом контакте соседних плавающих пластин льда при сжатии [14].

Это создает возможность взаимного проскальзывания блоков по вновь образованным наклонным поверхностям, чему способствует развитие подвижного слоя раздробленного материала. Тогда появляется механизм отклонения в вертикальной плоскости торцов соседних взаимодействующих льдин при проскальзывании по этим наклонным структурам в среде дробленого льда по мере его сжатия. Подъемная сила в такой системе определяется способностью среды мелкобитого льда передавать касательные нагрузки на торцы взаимодействующих льдин. Условие возможности инициирования наползания может быть представлено как условие достижения касательными силами на торцах плавающих льдин величин, достаточных для их необходимого отклонения по вертикали. Здесь для оценки уровня усилия пролома воспользуемся простым соотношением, полученным при анализе обламывания кромки льда ледоколом [15]

$$P \simeq k\sigma_f h^2; \quad k = 1.64 - 1.7 \quad (16)$$

где  $\sigma_f$  – изгибная прочность ледяного покрова,  $h$  – толщина льда. Сопоставляя (15) и (16), для оценки снизу (при активности максимального изгибающего момента на одной балке) получим:

$$n \simeq \frac{c}{l} \left( \frac{\sigma_f h}{K_{IC}} \right)^2; \quad c \simeq 35 \quad (17)$$

В ситуации с участием реально наблюдаемых уровней механических характеристик ледяного покрова при малых напряжениях ледового сжатия (1-2 балла) наиболее вероятно отделение одной или двух полос на краю ледяного покрова ( $n \sim 1-2$ ), более частое деление на полосы требует высокого напряжения сжатия. Кроме того, совпадение по фазе изгибных колебаний балок под действием сканирующих нагрузок на их торцах увеличивает активность действующих в системе балок изгибающих моментов, расширяя тем самым диапазон действия механизма разрушения. Можно также отметить, что произведение ( $nl$ ), характеризующее поперечный размер области, охваченной данным видом разрушения, в рамках масштабного постоянства механических характеристик зависит только от толщины ледяного покрова.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Некоторые вопросы механики прочности морского льда // Физ. мезомех. 2014. Т. 17, № 6. С. 59–69.
- [2] Осипенко Н. М., Мокряков В. В. Моделирование упорядоченного разрушения двухмасштабной пористой среды при сжатии // Изв. РАН МТТ. 2020. № 4. С. 115–125.
- [3] Haimson B., Klaetsch A. Compaction bands and the formation of slot-shaped breakouts in St. Peter sandstone // Geological Society London. 2007. Vol. 284, no. 1. P. 89–105.
- [4] Mollema P. N., Antonellini M. A. Compaction bands: A structural analog for anti-mode I cracks in Eolian sandstone // Tectonophysics. 1996. Vol. 267. P. 209–228.
- [5] Acoustic emission and velocities associated with the formation of compaction bands in sandstone / J. Fortn, S. Stanchits, G. Dresen et al. // J.Geophys. 2006. Vol. 111, no. 10. p. 16.
- [6] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Структуры в процессах разрушения // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 49–71.
- [7] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. О локализованном хрупком разрушении тонких тел трещиноподобными дефектами при сжатии со стеснением // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 158–167.
- [8] Goldstein R., Osipenko N., Lepparanta M. Classification of large-scale sea ice structures based on remote sensing imagery // Geoph. 2000. Vol. 36, no. 1-2. P. 95–109.
- [9] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Механика разрушения и проблемы освоения Арктики // Арктика: экология и экономика. 2015. Т. 20, № 4. С. 14–27.
- [10] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. Наука, 1974. 640 с.
- [11] Сазонов К. Е. Теоретические основы плавления судов во льдах. СПб: ЦНИИ им. А.Н.Крылова, 2010. 271 с.
- [12] Степанюк И. А., Смирнов В. Н. Методы измерений характеристик динамики ледяного покрова. СПб: Гидрометеоздат, 2001. 136 с.
- [13] Стефанов Ю. П. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Вестник Нижегородского ун-ва им.Н.И.Лобачевского. № 4. 2011. 1789–1791 с.
- [14] Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. О модели разрушения льда при большой площади контакта // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 137–153.
- [15] Квитковский Р. С. О некоторых аспектах прогнозного ледокола СМП круглогодичного плавания // Морской флот. 2017. № 1. С. 32–36.

N.M.Osipenko

## STRUCTURE OF FRACTURE UNDER THE JOINT OPERATION OF TWO MECHANISMS OF LOCAL DESTRUCTION

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russian Federation*

**Abstract.** Examples of brittle fracture scenarios are considered, in which two mechanisms of local fracture participate - the development of normal fracture cracks and compaction, or hummocking, under compression. The work is a continuation of studies of fracture structures under compression [1]. It is shown that in a model situation with a chain of holes in a plate, the choice of the mechanism of formation of local fracture centers or their joint action depends on the orientation of the system of holes relative to the compression axis. Another example relates to the process of destruction of the ice cover when it is compressed under the influence of currents and wind load. The fracture variant is considered, in which two types of fracture interact: the fracture localized in the form of a crack-like defect during compression (hummocking) and the formation of accompanying transverse ruptures dividing the loaded ice sheet section into a series of bands along the compression stresses.

**Keywords:** local fracture, normal fracture crack, compression, compaction, fracture structure.

### REFERENCES

- [1] Goldshtein R. V., Osipenko N. M. Some questions of mechanics of the strength of sea ice // *Fiz. mesomech.* 2014. Vol. 17, no. 6. P. 59–69.
- [2] Osipenko N. M., Mokryakov V. V. Modeling of ordered fracture of a two-scale porous medium under compression // *Izv. RAS MTT.* 2020. no. 4. P. 115–125.
- [3] Haimson B., Klaetsch A. Compaction bands and the formation of slot-shaped breakouts in St. Peter sandstone // *Geological Society London.* 2007. Vol. 284, no. 1. P. 89–105.
- [4] Mollema P. N., Antonellini M. A. Compaction bands: A structural analog for anti-mode I cracks in Eolian sandstone // *Tectonophysics.* 1996. Vol. 267. P. 209–228.
- [5] Acoustic emission and velocities associated with the formation of compaction bands in sandstone // J. Fortn, S. Stanchits, G. Dresen et al. // *J.Geophys.* 2006. Vol. 111, no. 10. p. 16.
- [6] Goldshtein R. V., Osipenko N. M. Structures in fracture processes // *Izv. RAS. MTT.* 1999. no. 5. P. 49–71.
- [7] Goldshtein R. V., Osipenko N. M. On localized brittle fracture of thin bodies by crack-like defects under compression with constraint // *Izv. USSR Academy of Sciences. MTT.* 1987. no. 5. P. 158–167.
- [8] Goldshtein R. V., Osipenko N. M., Lepparanta M. Classification of large-scale sea ice structures based on remote sensing imagery // *Geoph.* 2000. Vol. 36, no. 1-2. P. 95–109.
- [9] Goldshtein R. V., Osipenko N. M. Mechanics of destruction and problems in the development of the Arctic // *Arctic: Ecology and Economics.* 2015. Vol. 20, no. 4. P. 14–27.
- [10] Cherepanov G. P. *Mechanics of brittle fracture.*
- [11] Sazonov K. E. *Theoretical Foundations of the Navigation of Ships in Ice.* St. Petersburg: Central Research Institute of the name A.N. Krylov, 2010. 271 p.
- [12] Stepanyuk I. A., Smirnov V. N. *Methods of measuring the characteristics of ice cover dynamics.* St. Petersburg: Hydrometeoizdat, 2001. 136 p.
- [13] Stefanov Y. P. The development of inelastic deformation in geomaterials under the conditions of dilatancy and compaction // *Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky.* No. 4. 2011. 1789–1791 p.
- [14] Goldshtein R. V., Osipenko N. M. On the model of ice destruction with a large contact area // *Izv. RAS. MTT.* 2011. no. 1. P. 137–153.
- [15] Kvitkovsky R. S. About some aspects of the forecasting icebreaker of the NSR year-round navigation // *Morskoy Flot.* 2017. no. 1. P. 32–36.

---

*Osipenko Nikolai Michailovich*, Ph.D. Sci. Tech., Senior Research Worker, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russian Federation.

Д. А. Бондарчук<sup>1</sup>, Б. Н. Федулов<sup>1</sup>, Е. В. Ломакин<sup>1,2</sup>

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ВОЗМОЖНЫЕ ДЕФЕКТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ УГЛЕРОДНО-ЭПОКСИДНЫХ КОМПОЗИТОВ

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

**Аннотация.** В настоящей работе изучено влияние наличия остаточных напряжений в образце углерод-эпоксидного композита, сформировавшихся в процессе его производства, на такие возможные дефекты как межслоевое расслоение. Исследование посвящено анализу НДС в регулярных образцах вблизи зоны дефекта в течение цикла отверждения, а также при образовании свободного края в материале после разреза в зависимости от длины трещины. Для моделирования процесса отверждения решалась связанная тепловая и прочностная задача в условиях плоской деформации. Для описания поведения композитного материала в процессе производства, включая процессы формования, полимеризации, развития остаточных напряжений и деформаций, была разработана и реализована специальная пользовательская подпрограмма для ПО ABAQUS. В частности, в данной работе была проанализирована история величин скоростей энерговыделения в режимах раскрытия трещины по механизму нормального отрыва и поперечного сдвига в процессе полимеризации и последующего разрезания с образованием свободного края.

Обнаружен незначительный рост значений  $G_I$ ,  $G_{II}$  в вершине трещины в процессе полимеризации и многократное превышение этих значений после механического среза. В результате численного моделирования выявлено, что остаточные напряжения не оказывают существенного влияния на рост дефекта в композите на этапе его изготовления, но при приложении дальнейшей нагрузки на образец могут способствовать интенсивному росту расслоения.

**Ключевые слова:** композит, остаточные напряжения, дефект, разрушение, интенсивность освобождения энергии.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.006

УДК: 539.3

### Введение

В последние десятилетия повышенное внимание уделяется глубокому пониманию процессов, вызванных остаточными напряжениями в слоистых композитах, а именно искажению формы и возможному повреждению изделия еще на стадии его изготовления. Наличие остаточных напряжений в композиционных материалах вызывает появление таких дефектов, как деламинация, коробление, а также повреждение связующего, что в свою очередь оказывает существенное влияние на статическую и

---

Поступила 20.03.2020

усталостную прочность созданного на их основе изделия. Несмотря на то, что возможности методов моделирования процессов были улучшены за последние десятилетия, задача предсказания возникновения локализованных производственных дефектов и остаточных напряжений на этапе проектирования изделия по-прежнему не полностью решена из-за недостаточной разработки теоретической базы, большого количества входных параметров (технологического процесса и материала) и отсутствия надежной масштабируемой методики. В результате процесс изготовления крупных композитных конструкций все еще требует значительных трудозатрат, связанных с эмпирической оптимизацией. В работе [1] показано, что при моделировании характер разрушения для образца полимерного композитного материала (ПКМ) существенно изменяется при учете влияния технологических напряжений в композите. В частности, некоторый тип трещин, а именно ориентированных в продольном направлении вдоль приложения нагрузки, может быть реализован только в моделях, где учтены остаточные напряжения. Максимальное напряжение, полученное при моделировании, для образцов AS4/8552-1 после полимеризации могут быть близки к предельным и не должны быть проигнорированы в последующем прочностном анализе. Существует предположение, что остаточные напряжения вблизи свободного края оказывают существенное влияние на дальнейшее распространение и рост трещин. В настоящем исследовании проведен анализ влияния присутствия остаточных напряжений, образовавшихся в процессе производства, на дефект расслаивания в углеродно-эпоксидном композитном образце в процессе отверждения и после приложения нагрузки. Таким образом, была предпринята попытка изучить природу поля напряжений в процессе изготовления и возможного роста трещины вблизи свободного края. В настоящей работе рассматривается пример углеродно-эпоксидного композита AS4/8552-1 ввиду его популярности в инженерной практике и наличия большого количества экспериментальных данных в литературе [2-4].

#### **Описание задачи**

Для анализа был рассмотрен углеродно-эпоксидный композит AS4/8552-1 с укладкой  $[0^0/90^0]_{12}$ . Геометрия образца и укладка схематически показаны на Рис. 1.

Задача оценки влияния присутствия остаточных напряжений в образце углеродно-эпоксидного композита, сформировавшихся в процессе его производства, на такие возможные дефекты как межслоевое расслоение состояла из двух этапов. Первая часть исследования посвящена анализу напряженно-деформированного состояния в регулярных образцах вблизи зоны дефекта (расслоения) в течение цикла отверждения, вторая часть посвящена изучению изменения поля остаточных напряжений после разрезания и образования свободного края в материале в зависимости от длины трещины. Для моделирования отверждения решалась связанная тепловая и прочностная

---

© Бондарчук Д. А., Федулов Б. Н., Ломакин Е. В., 2020

*Бондарчук Дарья Александровна*

**e-mail:** bondarchuk.da@gmail.com, аспирант, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

*Федулов Борис Никитович*

**e-mail:** fedulov.b@mail.ru, д.ф.-м.н., МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

*Ломакин Евгений Викторович*

**e-mail:** evlomakin@yandex.ru, д.ф.-м.н., чл.-к. РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке исследований РФФИ (гранты №№ 20-01-00356, 18-31-20026).

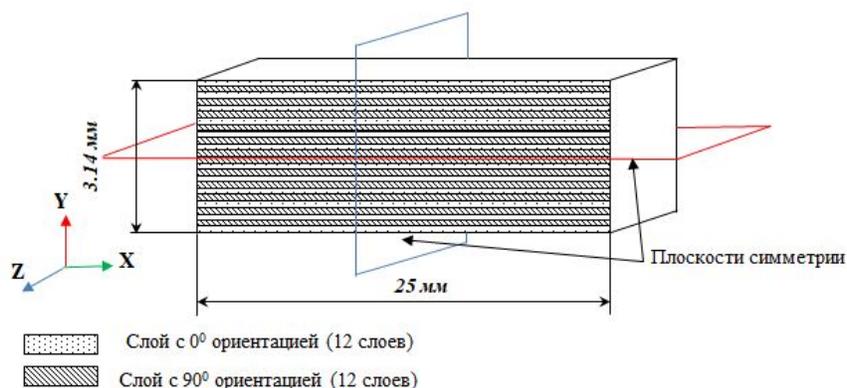


Рис. 1 Образец углеродно-эпоксидного композита AS4/8552-1 с укладкой  $[0^\circ/90^\circ]_{12}$

задача в условиях плоской деформации. Для описания поведения материала во время полимеризации была использована специальная модель материала, которая учитывает изменения физико-механических свойств связующего и наполнителя (волокон) во времени и в зависимости от температуры [5-6]. Для температурных начальных и граничных условий использовался цикл отверждения, рекомендованный производителем [3]. Параметры материала, используемые при моделировании, соответствуют техническому описанию, предоставленного производителем материала [3]. На втором этапе исследования изготовленный образец с расслоением был разрезан на две части. Была проанализирована история изменения интенсивности энерговыделения в режимах I, II ( $G_I$ ,  $G_{II}$ ) с течением времени в процессе полимеризации и разрезания образца с образованием свободного края.

#### Описание КЭМ и методики

В настоящей работе задача решалась в двумерной постановке (для случая плоских деформаций) ввиду наличия симметрии укладки. Для решения задачи отверждения производился связанный тепло-прочностной анализ в конечно-элементном пакете ABAQUS с применением разработанной пользовательской подпрограммы модели материала. Для учета кинетики полимеризации смолы и описания микромеханики ПКМ в процессе производства была применена доработанная псевдо-вязкоупругая модель (CHILE). В разработанной модели материала деформация матрицы для каждого инкремента времени рассчитывалась отдельно для слоев с направлением укладки  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . Описание модели и ее верификация приведена в работе [6].

С целью правильного расчета деформаций и напряжений в образце был осуществлен переход из локальных систем координат слоев в глобальную систему координат [1]. В процессе моделирования влиянием оснастки на образец в процессе отверждения пренебрегли ввиду минимального сопротивления формы усадке. Образец считался свободным для перемещений на всех этапах расчета. Трещина моделировалась посредством seam crack technique с учетом контактного взаимодействия surface-to-surface в виду невозможности применения типовых техник виртуального закрытия трещины (VCST) и расширенного метода конечных элементов (XFEM) [7] для моделирования трещин при решении связанной тепло-прочностной задачи. Трещина длиной 0,5, 1, 2 и 6 мм располагалась между  $0^\circ$  и  $90^\circ$  слоем, как показано на Рис.2.

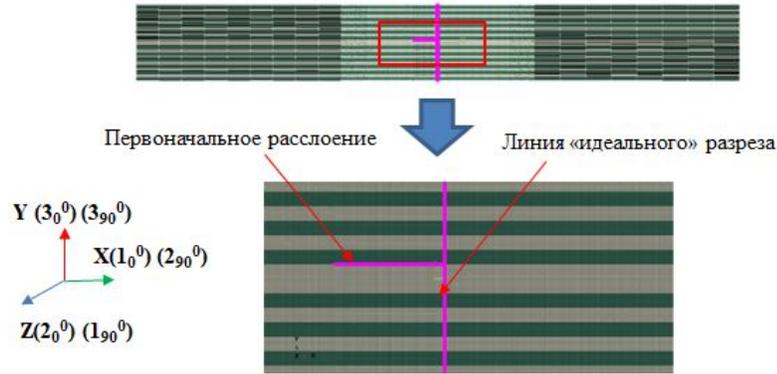


Рис. 2 КЭ модель образца AS4/8552-1 с укладкой  $[0^0/90^0]_{12}$ , плотностью сетки 8 элементов на слой в зоне дефекта и длиной трещины 2 мм

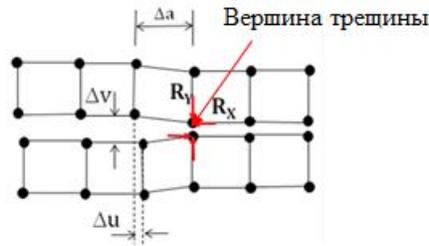


Рис. 3 Схема вычисления  $G_I$  и  $G_{II}$  (MCCI process) для 4-х узловых прямоугольных элементов

Для каждой длины трещины были рассчитаны интенсивности выделения энергии  $G_I$  и  $G_{II}$  для проверки выполнения критериев разрушения  $f_I$  и  $f_{II}$  по формулам (1) и (2) [8] во время отверждения образца и после разрезания.

$$f_I = \frac{G_I}{G_{Ic}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta v \cdot R_y}{\Delta a \cdot b} \right) \frac{1}{G_{Ic}} \quad (1)$$

$$f_{II} = \frac{G_{II}}{G_{IIc}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta u \cdot R_x}{\Delta a \cdot b} \right) \frac{1}{G_{IIc}} \quad (2)$$

Схема вычисления  $G_I$  и  $G_{II}$  приведена на Рис.3.

Процесс резки был реализован с помощью специальной методики моделирования, которая деактивирует взаимодействие (контакт) между двумя частями разрезанного образца после моделирования цикла отверждения с использованием дополнительного шага анализа. Поскольку сингулярность ожидается на фронте расслаивания, более мелкая сетка была сделана только в этой зоне, а более крупные элементы используются поблизости. На каждый слой приходится 8 элементов по толщине. Модель была построена с использованием элементов СРЕ3Т, СРЕ4РТ таким образом, что элементы в зоне дефекта имели идеальную квадратную форму.

**Результаты моделирования**

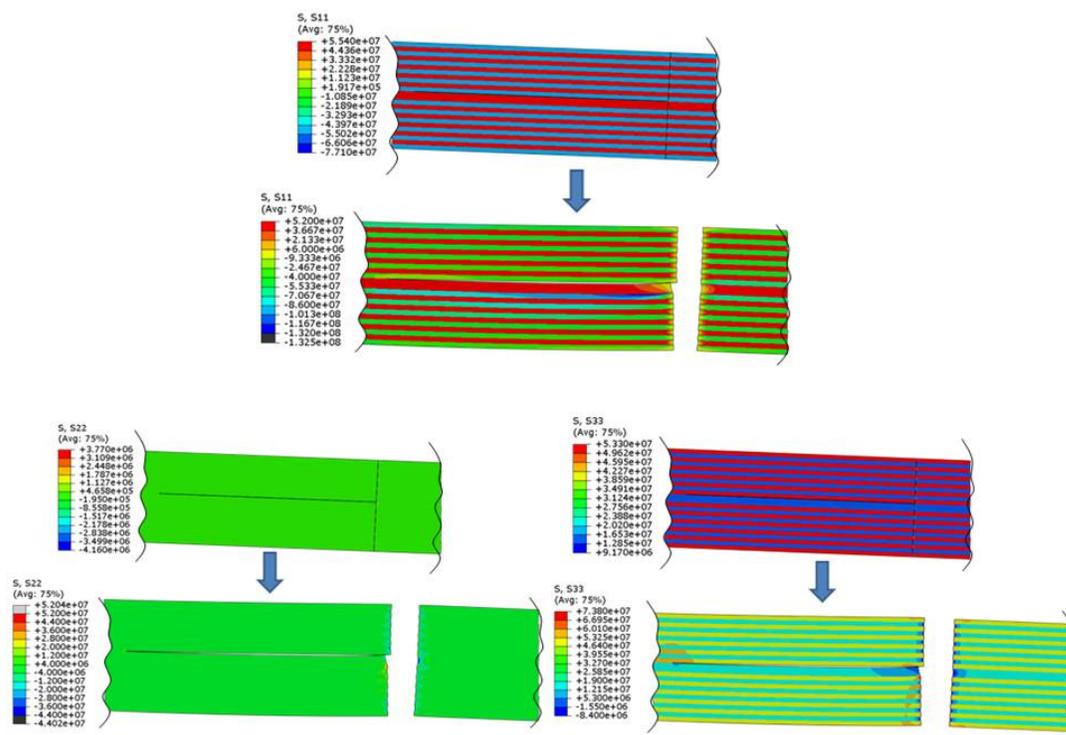


Рис. 4 Распределение напряжений в образце с укладкой  $[0^0/90^0]_{12}$  и длиной трещины 6 мм после полимеризации и после резки(в масштабе перемещений x20)

Результаты конечно-элементного моделирования – распределение остаточных напряжений для отвержденного образца с имеющимся расслоением длиной 6 мм до разреза образца и их перераспределение после разреза представлены на Рис. 4.

При моделировании разреза возникает эффект концентрации максимальных напряжений в локальных зонах области свободного края. На Рис. 4 показано, что абсолютное максимальное напряжение в продольном направлении в основном сосредоточено в довольно небольшой области на свободном крае и близко к предельному напряжению композитного материала [3]. Стоит отметить, что после механического выреза в небольшой области у вершины трещины напряжение в продольном направлении ( $\sigma_{33}$ ) по своему значению также близко к предельному. Таким образом, существует вероятность зарождения микротрещин в образце в процессе изготовления, а также при сравнительно небольшой нагрузке во время эксплуатации. Для оценки влияния длины имеющегося дефекта (трещины) в композите на вероятность дальнейшего роста в процессе полимеризации образца и дальнейшей механической обработки была проанализирована история изменения интенсивности энерговыделения в режимах I, II ( $G_I$ ,  $G_{II}$ ). Значения параметров  $G_I$  и  $G_{II}$  в зависимости от длины трещины после полимеризации образца и после идеального разреза, имитирующего механическую обработку, приведены на Рис.5 и Рис.6.

Длина изначального дефекта в образце не существенно и не совсем явно влияет на значение интенсивности энерговыделения  $G_I$  и  $G_{II}$  за исключением интенсивности

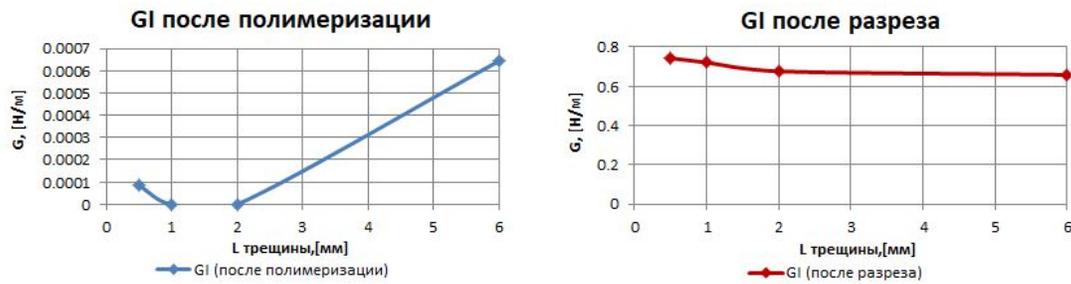


Рис. 5 Значение  $G_I$  в зависимости от длины трещины после полимеризации и после выреза

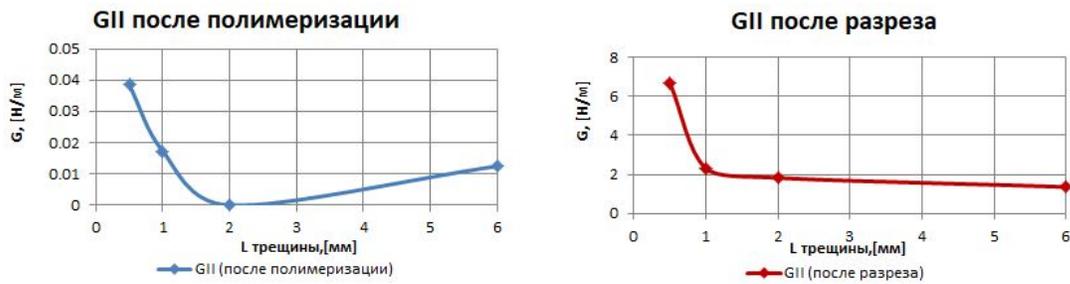


Рис. 6 Значение  $G_{II}$  в зависимости от длины трещины после полимеризации и после выреза

$G_{IC}$ Н/м	$G_{IIC}$ Н/м	$G_{IIIC}$ Н/м
280...293.4	790...2590	790...2590

Таблица 1. Мода I, Мода II и Мода III скорости выделения критической энергии

энерговыведения в режиме I в процессе изготовления образца. Для оценки характера изменения значений  $G_I$  и  $G_{II}$  с течением времени и оценки возможного дальнейшего роста трещин проведен анализ изменения  $f_I$  и  $f_{II}$  с течением времени для образца с трещиной 6 мм. Значения интенсивностей освобождения критических энергий приведено в Таблице 1 на основании экспериментов, описанных в источниках [9,10].

Как видно из Рис.8, резкий рост значений скоростей происходит в момент создания идеального выреза, при этом абсолютное значение критериев разрушения много меньше 1, что свидетельствует об отсутствии дополнительного роста трещины.

Реальные конструкции из ПКМ могут работать под действием многократных нагрузок, в том числе циклических. При циклических нагрузках критические значения

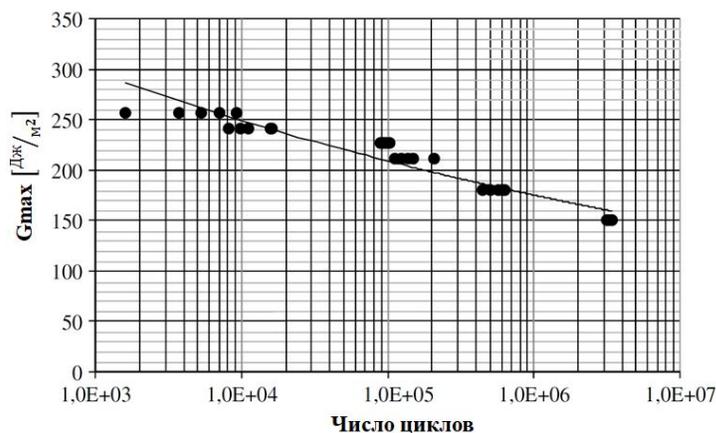


Рис. 8 Кривая усталости для материалов AS4/8552 и AS4/3501-6

интенсивностей освобождения энергии имеют тенденцию к уменьшению с увеличением числа циклов. На Рис.9 для образца AS4/8552 показано изменение значения нормализованной энергии разрушения  $G_{max}$  в зависимости от числа циклов, полученных в ходе экспериментального исследования [11]. Предел усталости, полученный для 3 миллионов циклов нагрузки составляет 50% от статической критической энергии для материала AS4/8552. С последующим увеличением числа циклов существует вероятность дальнейшего снижения критического значения энергии, что, как следствие, может привести к раскрытию и росту трещины. Эти результаты свидетельствуют о том, что предельные значения трещиностойкости при типовом усталостном нагружении на порядки превышают значения, реализуемые в образце под действием остаточных напряжений. Таким образом, усталостные характеристики ПКМ не изменятся от наличия начальных дефектов-расслоений.

### Выводы

В настоящей работе было изучено влияние наличия остаточных напряжений в образце углерод-эпоксидного композита, образовавшихся в процессе производства, на такие возможные дефекты как расслоение. Было проведено исследование распределения напряжений вблизи вершины трещины и свободного края углеродно-эпоксидного многослойного композита AS4/8552 посредством численного моделирования. Задача была решена для случая плоской деформации для композитного образца с укладкой  $[0^0/90^0]_{12}$  и идеальным прямым перпендикулярным разрезом после отверждения. Поведение материала в процессе отверждения и распределение остаточных напряжений изучалось с использованием разработанной пользовательской подпрограммы, которая была реализована в системе ABAQUS. На основании результатов моделирования можно сделать вывод, что максимальные напряжения в образце в продольном направлении близки к предельным. Максимальные напряжения после разрезания образца сосредоточены в небольшой области возле свободного края. Таким образом, существует вероятность зарождения микротрещин в образце в процессе изготовления, а также при сравнительно небольшой нагрузке во время эксплуатации. При этом в процессе изготовления материала и механического разрезания готовой композитной пластины рост значений характеристик трещиностойкости достаточно мал по сравнению со статическими показателями, что позволяет сделать заключение об отсутствии дополнительного роста дефектов. Более того, полученные значения характеристик

малы и в сравнении с усталостными показателями трещиностойкости, что означает, что присутствие сравнительно небольших дефектов в материале или их появление в процессе изготовления не внесет существенного изменения в усталостные показатели прочности изделия.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Анализ остаточных напряжений в слоистых композитах на примере симметричной схемы армирования  $[0^\circ/90^\circ]$  / Д.А. Бондарчук, Б.Н. Федулов, А.Н. Федоренко [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. Пермь, 2019. № 3. С. 17–26.
- [2] Hexply AS4/8552 data sheet. <http://www.lookpolymers.com/pdf/Hexcel-HexPly-8552-Epoxy-Matrix-AS4-Fiber.pdf>. Accessed: 2020-04-17.
- [3] Van Ee David, Poursartip Anoush. HexPly 8552 Material properties database for use with COMPRO CCA and Raven. <https://www.wichita.edu/research/NIAR/Research/hexcel-8552/Additional-Documents-2.pdf>. Accessed: 2020-04-17.
- [4] Parmentier A., Wucher B., Dumas David. Determination of the model complexity level required to predict the cure-induced deformations in thermoset-based composite parts. 2014. 01.
- [5] Optimal process design for large-scale pultrusion structures / A. Safonov, D. Bondarchuk, A. Saratov et al. Beijing: Chinese Society for Composite Materials, 2017. 08.
- [6] Bondarchuk D., Fedulov B. Process modeling of carbon-epoxy composites: residual stress development during cure and analysis of free edge effects // Aviation. United States, 2019. Vol. 23, no. 1. P. 15–22.
- [7] Abaqus 6.14 Documentation. <http://ivt-abaqusdoc.ivt.ntnu.no:2080/v6.14/books/usb/default.htm>. Accessed: 2020-04-17.
- [8] Mabson G. Fracture Interface Elements. Charleston: 46th PMC General Session of Mil-17 (Composites Materials Handbook) Organization, 2003.
- [9] Soroush M., Malekzadeh Fard K., Shahravi M. Finite Element Simulation of Interlaminar and Intralaminar Damage in Laminated Composite Plates Subjected to Impact // Latin American Journal of Solids and Structures. 2018. T. 15, № 6.
- [10] Coronado P., Camanho P., et al.. Low Temperature and Resin Effects on the Mode I Interlaminar Fracture Toughness in Aeronautical Quality Polymer Composites // Proceedings. 2018. 11. T. 2. c. 1478.
- [11] Argüelles A., Viña J., et al.. Influence of the Matrix Type on the Mode I Fracture of Carbon-Epoxy Composites Under Dynamic Delamination // Experimental Mechanics. 2011. 03. T. 51. C. 293–301.

*D.A.Bondarchuk<sup>1</sup>, B.N.Fedulov<sup>1</sup>, E.V.Lomakin<sup>2</sup>*

## ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF RESIDUAL STRESSES ON POSSIBLE DEFECTS FORMED DURING PRODUCTION OF CARBON-EPOXY COMPOSITES

<sup>1</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia,*

<sup>2</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation.*

**Abstract.** In the present study, the effect of presence of residual stresses inherited during manufacturing on delamination defect in carbon-epoxy composite specimen is investigated. The research is devoted to understanding of strain-stress state in regular specimens near defect zone during cure cycle and after free edge cut depending on crack length. To describe the behavior of the composite material during manufacturing process- including processes of formation, polymerization, development of residual stresses and strains, the special user subroutine was developed and implemented in ABAQUS FEM software. The history of energy release rates under mode I, II ( $G_{Ic}$ ,  $G_{IIc}$ ) where analyzed over time during process of polymerization and free edge cut.

A slight increase in the  $G_I$  and  $G_{II}$  values at the crack tip during polymerization and a multiple excess of these values after a mechanical cut is shown. Obtained by modelling values for stress components are essential and cannot be ignored in consequent structural analysis. The results of the study can be applied for prediction of residual stresses in composite structure by means of simulation and further understanding the nature of fracture of composites.

**Keywords:** composite, residual stress, defect, energy release rate.

### REFERENCES

- [1] The analysis of residual stresses in layered composites with  $[0^\circ/90^\circ]$  layup / D. Bondarchuk, B. Fedulov, A. Fedorenko et al. // PNRPU Mechanics Bulletin. Perm, 2019. no. 3. P. 17–26.
- [2] Hexply AS4/8552 data sheet. <http://www.lookpolymers.com/pdf/Hexcel-HexPly-8552-Epoxy-Matrix-AS4-Fiber.pdf>. Accessed: 2020-04-17.
- [3] Van Ee David, Poursartip Anoush. HexPly 8552 Material properties database for use with COMPRO CCA and Raven. <https://www.wichita.edu/research/NIAR/Research/hexcel-8552/Additional-Documents-2.pdf>. Accessed: 2020-04-17.
- [4] Parmentier A., Wucher B., Dumas David. Determination of the model complexity level required to predict the cure-induced deformations in thermoset-based composite parts. 2014. 01.
- [5] Optimal process design for large-scale pultrusion structures / A. Safonov, D. Bondarchuk, A. Saratov et al. Beijing: Chinese Society for Composite Materials, 2017. 08.
- [6] Bondarchuk D., Fedulov B. Process modeling of carbon-epoxy composites: residual stress development during cure and analysis of free edge effects // Aviation. United States, 2019. Vol. 23, no. 1. P. 15–22.
- [7] Abaqus 6.14 Documentation. <http://ivt-abaqusdoc.ivt.ntnu.no:2080/v6.14/books/usb/default.htm>. Accessed: 2020-04-17.

---

*Bondarchuk Daria Alexandrovna*, PhD student, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

*Fedulov Boris Nikitovich*, D.Sc. in Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

*Lomakin Evgenii Viktorovich*, D.Sc. in Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

- [8] Mabson G. Fracture Interface Elements. Charleston: 46th PMC General Session of Mil-17 (Composites Materials Handbook) Organization, 2003.
- [9] Soroush M., Malekzadeh Fard K., Shahravi M. Finite Element Simulation of Interlaminar and Intralaminar Damage in Laminated Composite Plates Subjected to Impact // Latin American Journal of Solids and Structures. 2018. Т. 15, № 6.
- [10] Coronado P., Camanho P., et al.. Low Temperature and Resin Effects on the Mode I Interlaminar Fracture Toughness in Aeronautical Quality Polymer Composites // Proceedings. 2018. 11. Т. 2. с. 1478.
- [11] Argüelles A., Viña J., et al.. Influence of the Matrix Type on the Mode I Fracture of Carbon-Epoxy Composites Under Dynamic Delamination // Experimental Mechanics. 2011. 03. Т. 51. С. 293–301.

М. Н. Перельмутер

## ТРЕЩИНА С КОНЦЕВОЙ ОБЛАСТЬЮ – РАСКРЫТИЕ ВНЕ ЗОНЫ СВЯЗЕЙ И НАПРЯЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ СОЕДИНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Для прямолинейной трещины со связями в концевой области на границе соединения материалов получены выражения для расчета раскрытия трещины вне зоны, занятой связями, и напряжений за вершиной трещины. Рассматривается действие однородных – нормальной и сдвиговой – внешних нагрузок. Размер концевой области трещины не полагается малым по сравнению с длиной трещины. Выполнено сопоставление с результатами, полученными методом граничных элементов.

**Ключевые слова:** концевая область трещины, соединение материалов, раскрытие трещины, напряжения за вершиной трещины.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.007

УДК: 539.375

**Введение.** Модели трещины со связями в концевой области можно разделить на два типа по форме представления напряжений в вершине трещины в состоянии предельного равновесия: **1)** суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) от действия внешних нагрузок и связей в концевой области полагается равным нулю, следствием чего является ограниченность и непрерывность напряжений в вершине трещины; **2)** суммарный КИН в вершине трещины не равен нулю, т.е. предполагается сингулярное поле напряжений в вершине трещины.

Модели первого типа называют когезионными моделями концевой области трещины [1]. Эти модели применяются для однородных материалов, если процессы продвижения вершины трещины и формирования сил сцепления взаимосвязаны и определяются одним физическим механизмом. Модели второго типа – это модели трещины со связями в концевой области – bridged crack models, см. [2]. Эти модели используются, если процессы деформирования и разрушения в концевой области трещины включают в себя несколько физических механизмов, например, в адгезионных соединениях

---

© Перельмутер М. Н., 2020

*Перельмутер Михаил Натанович*

e-mail: perelm@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-00616).

Поступила 27.04.2020

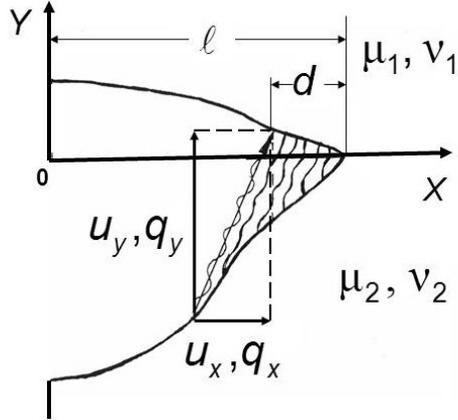


Рис. 1. Модель трещины со связями в концевой области, на границе соединения материалов

или композиционных материалах. Модель трещины со связями в концевой области применяется при оценке трещиностойкости различных видов композиционных материалов [3,4]. Новые направления в применении модели трещины со связями в концевой области возникают при анализе процесса самозалечивания трещин, который может рассматриваться как процесс восстановления связей между поверхностями трещины (формирования концевой области) [5].

Для трещины на границе соединения материалов выделим часть трещины длины  $d$ , примыкающую к её вершине (концевую область трещины), в которой поверхности трещины взаимодействуют так, что это взаимодействие сдерживает раскрытие трещины (см. рис. 1,  $\mu_{1,2}$  и  $\nu_{1,2}$  - модули сдвига и коэффициенты Пуассона материалов подобластей 1 и 2,  $u_{x,y}$  и  $q_{x,y}$  - компоненты раскрытия трещины и усилий в связях в концевой области трещины). Опишем взаимодействие берегов трещины в рамках механической модели трещины со связями в концевой области, не выделяя конкретных причин взаимодействия. Ввиду различия упругих свойств соединенных материалов в связях между берегами трещины, возникают, даже при одноосном растяжении, усилия  $Q(x)$ , имеющие нормальную  $q_y(x)$  и касательную  $q_x(x)$  составляющие:

$$Q(x) = q_y(x) - iq_x(x), \quad i^2 = -1 \quad (1)$$

К берегам трещины приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные  $q_y(x)$  и  $q_x(x)$ , соответственно.

Соотношение, связывающее компоненты раскрытия трещины и усилия в связях (закон деформирования связей), представим в форме квазилинейных зависимостей [6, 7]:

$$u_y(x) - iu_x(x) = c_y(x, \sigma)q_y(x) - ic_x(x, \sigma)q_x(x), \quad c_{y,x}(x, \sigma) = \gamma_{1,2}(x, \sigma) \frac{H}{E_b} \quad (2)$$

где  $u_{y,x}(x)$  - проекции раскрытия трещины на оси координат  $OX$  и  $OY$  (рис. 1), функции  $c_{y,x}(x, \sigma)$  - эффективные податливости связей, зависящие от положения связи вдоль концевой области и модуля вектора усилий в связях  $\sigma(x) = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ ,

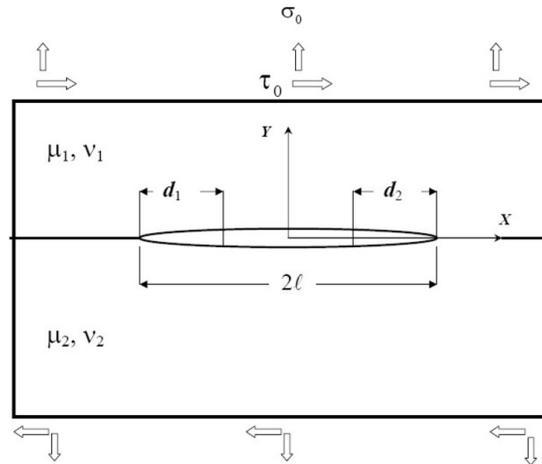


Рис. 2. Прямолинейная трещина со связями в концевой области при действии растягивающих  $\sigma_0$  и сдвиговых  $\tau_0$  нагрузок

$H$  – линейный размер, пропорциональный толщине зоны неоднородности на участке соединения материалов,  $E_b$  – эффективный модуль упругости связей,  $\gamma_{1,2}(x, \sigma)$  – безразмерные функции.

Рассмотрим прямолинейную трещину длины  $2\ell$  с концевыми областями  $d_1$  и  $d_2$  (равными при одноосном растяжении), расположенную на границе соединения двух полуплоскостей из различных материалов, при действии внешних однородных нормальной  $\sigma_0$  и сдвиговой  $\tau_0$  нагрузок (рис.2). Усилия в связях  $q_{x,y}(x)$  в концевой области трещины подлежат определению из решения задачи при заданных внешних нагрузках и известном законе деформирования связей. Размеры концевых областей  $d_{1,2}$  не предполагаются малыми по сравнению с длиной трещины, а усилия в связях зависят как от принятого закона деформирования связей, так и от размера концевой области. Раскрытие в концевой области трещины на границе между двумя разными материалами (см. (2))  $u(x) = u_y(x) - iu_x(x)$  можно, ввиду линейности задачи теории упругости, представить так:

$$u(x) = u_\infty(x) + u_Q(x), \quad u_\infty(x) = u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x), \quad u_Q(x) = u_{Qy}(x) - iu_{Qx}(x) \quad (3)$$

где  $u_\infty(x)$  – раскрытие трещины от действия напряжений  $-\sigma_0$  и  $-\tau_0$  на берегах трещины без связей [8],  $u_Q(x)$  – раскрытие трещины (сближение берегов трещины), обусловленное усилиями  $-q_{y,x}(x)$ , возникающими в связях при действии внешних нагрузок, и приложенными на берегах трещины в концевой области, компоненты с индексами  $x, y$  в (3) – проекции соответствующих слагаемых раскрытия трещины на оси координат  $OX$  и  $OY$ , (см. рис. 1).

Выражение (3) является исходным при получении системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) для определения усилий в связях в концевой области трещины [6, 7]. Дифференцируя выражение (3), имеем

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} - \frac{\partial u_Q(x)}{\partial x} = \frac{\partial u_\infty(x)}{\partial x} \quad (4)$$

В этом уравнении производная раскрытия трещины в концевой области  $\partial u(x)/\partial x$  определяется дифференцированием выражения (2), производная раскрытия трещины от действия усилий  $q_{x,y}(x)$ , приложенных на берегах трещины,  $\partial u_Q(x)/\partial x$  может быть получена, исходя из выражения для производных перемещений берегов трещины при действии произвольных нормальных и касательных усилий на берегах трещины, расположенной на границе соединения материалов [6], а производная раскрытия трещины без связей при действии однородных внешних напряжений определяется, исходя из аналитического решения [8]. После подстановки представлений для производных, дифференцирования в уравнении (4) и алгебраических преобразований, можно получить на промежутке  $\ell - d \leq x \leq \ell$  нелинейную систему СИДУ для определения усилий в концевой области трещины  $q_{x,y}(x)$ . Методика формирования и схема численного решения СИДУ приведены в [6, 7]. После решения СИДУ раскрытие трещины в концевой области определяется из выражения (2). Для полного решения задачи необходимо также определение раскрытия трещины вне концевой области трещины и напряжений за вершиной трещины на границе соединения материалов.

**Определение раскрытия берегов трещины вне концевой области.** Раскрытие берегов трещины вне концевой области ( $0 \leq x_0 < \ell - d$ )

$$\Delta u(x_0) = \Delta u_y(x_0) - i\Delta u_x(x_0) \quad (5)$$

может быть получено после определения усилий в связях и раскрытия трещины вдоль концевой области интегрированием выражения (4):

$$\Delta u(x_0) = u_\infty(x_0) + \int_{x_0}^{\ell} \frac{\partial u_Q(x)}{\partial x} dx \quad (6)$$

Здесь  $u_\infty(x)$  – раскрытие трещины без связей под действием внешних однородных растягивающих ( $\sigma_0$ ) и сдвиговых ( $\tau_0$ ) напряжений

$$u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x) = \frac{A}{4\text{ch}(\pi\beta)} \sqrt{\ell^2 - x^2} \left( \frac{\ell - x}{\ell + x} \right)^{-i\beta} (\sigma_0 - i\tau_0), \quad (7)$$

$$A = \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right), \quad (8)$$

где  $\beta$  – биупругая постоянная, определяющая степень различия механических свойств материалов подобластей,  $\kappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$  или  $\kappa_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})/(1 + \nu_{1,2})$  для плоской деформации или плоского напряженного состояния, соответственно.

Производная раскрытия трещины ( $x > 0$ ) при наличии связей в концевой области трещины, определяется выражением [6, 7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_Q(x)}{\partial x} = & \frac{A(1 - \alpha)}{4(1 + \alpha)} (q_x(x) + iq_y(x)) - \\ & - \frac{A}{2\pi\sqrt{\ell^2 - x^2}} \left( \frac{\ell - x}{\ell + s} \right)^{-i\beta} \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} (R_1(x, \xi) - iR_2(x, \xi)) d\xi \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь  $R_1(s, t) = xp_y(t)$ ;  $R_2(s, t) = \xi p_x(t)$  – при растяжении,  $R_1(s, t) = \xi p_y(t)$ ;  $R_2(s, t) = xp_x(t)$  – при сдвиге, а амплитуды усилий в связях  $p_{y,x}$  определяются как

$$p_y(x) - ip_x(x) = (q_y(x) - iq_x(x)) \left( \frac{\ell - x}{\ell + x} \right)^{i\beta} \quad (10)$$

Запишем выражения (6) для компонент раскрытия трещины вне зоны связей для случая растягивающей нагрузки  $\sigma_0$  с учетом соотношений (9) и (10). После разделения действительный и мнимых частей выражений, получаем

$$\Delta u_y(x_0) = u_{y\infty}(x_0) + \frac{A(1-\alpha)}{4(1+\alpha)} \int_{d-\ell}^{\ell} q_x(x) dx - \frac{A}{2\pi} \int_{x_0}^{\ell} \frac{F_1(x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} dx \quad (11)$$

$$\Delta u_x(x_0) = u_{x\infty}(x_0) - \frac{A(1-\alpha)}{4(1+\alpha)} \int_{d-\ell}^{\ell} q_y(x) dx - \frac{A}{2\pi} \int_{x_0}^{\ell} \frac{F_2(x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} dx \quad (12)$$

Здесь  $u_{y\infty}, u_{x\infty}$  – компоненты раскрытия трещины без связей при действии растягивающей нагрузки  $\sigma_0$  (см. (7))

$$u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x) = \frac{A\sigma_0}{4\text{ch}(\pi\beta)} \sqrt{\ell^2 - x_0^2} (\cos \phi(x_0) - i \sin \phi(x_0)), \quad \phi(x_0) = \beta \ln \frac{\ell - x_0}{\ell + x_0} \quad (13)$$

Функции  $F_{1,2}(x)$  имеют вид

$$F_1(x) = x \cos \phi(x) I_1(x) - \sin \phi(x) I_2(x), \quad F_2(x) = x \sin \phi(x) I_1(x) + \cos \phi(x) I_2(x), \quad (14)$$

где  $I_{1,2}(x)$  определяется так

$$I_1(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_y(\xi) d\xi, \quad I_2(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\xi \sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_x(\xi) d\xi \quad (15)$$

При действии сдвиговых нагрузок  $\tau_0$  структура формул (11)-(12) не изменяется. Компоненты раскрытия трещины без связей при действии сдвиговой нагрузки (см. (7)) имеют вид

$$u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x) = -\frac{A\tau_0}{4\text{ch}(\pi\beta)} \sqrt{\ell^2 - x_0^2} (\sin \phi(x_0) + i \cos \phi(x_0)) \quad (16)$$

Функции  $F_{1,2}(x)$  и  $I_{1,2}(x)$  для случая сдвиговой нагрузки, с учетом выражений (9) и (10), принимают вид

$$F_1(x) = \cos \phi(x) I_1(x) - x \sin \phi(x) I_2(x), \quad F_2(x) = \sin \phi(x) I_1(x) + x \cos \phi(x) I_2(x) \quad (17)$$

$$I_1(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\xi \sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_y(\xi) d\xi, \quad I_2(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_x(\xi) d\xi \quad (18)$$

При совместном действии растягивающей и сдвиговой внешних нагрузок итоговые перемещения определяются суммированием.

**Вычисление напряжений на границе соединения материалов.** В модели трещины со связями в концевой области напряжения на границе соединения материалов  $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  на продолжении трещины ( $|x| > \ell$ ) при действии внешних нагрузок  $\sigma_0, \tau_0$  определяются выражением [6, 7]

$$\sigma_{yy}(x) + i\sigma_{xy}(x) = (\sigma_{yy}^{ext}(x) + \sigma_{yy}^{int}(x)) + i(\sigma_{xy}^{ext}(x) + \sigma_{xy}^{int}(x)) \quad (19)$$

Здесь  $\sigma_{yy}^{ext}(x)$ ,  $\sigma_{xy}^{ext}(x)$  - напряжения на продолжении трещины от действия внешних нагрузок  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$ , приложенных на удаленной границе [9]

$$\sigma_{yy}^{ext}(x) + i\sigma_{xy}^{ext}(x) = (\sigma_0 + i\tau_0) \frac{(x + 2\ell\beta i)}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left( \frac{x - \ell}{x + \ell} \right)^{i\beta}, \quad x > \ell, \quad (20)$$

$\sigma_{yy}^{int}(x)$ ,  $\sigma_{xy}^{int}(x)$  - напряжения на продолжении трещины от действия нагрузок  $q_{y,x}(x)$  на берегах трещины (усилий в связях), которые определяются выражением (см. [9], формула (6.24)),  $x > \ell$

$$\sigma_{yy}^{int}(x) + i\sigma_{xy}^{int}(x) = \frac{ch(\pi\beta)}{\pi\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left( \frac{x - \ell}{x + \ell} \right)^{i\beta} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} \left( \frac{\ell + \xi}{\ell - \xi} \right)^{i\beta} (q_y(\xi) + iq_x(\xi)) d\xi \quad (21)$$

Преобразуем выражение (21) с учетом соотношения (10) и свойств функций  $q_{x,y}(x)$  и  $p_{x,y}(x)$ . Выражение (10) с заменой  $i \rightarrow -i$  подставим в (21)

$$\sigma_{yy}^{int}(x) + i\sigma_{xy}^{int}(x) = \frac{ch(\pi\beta)}{\pi\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left( \frac{x - \ell}{x + \ell} \right)^{i\beta} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi \quad (22)$$

Рассмотрим растягивающие нагрузки. Преобразуем интеграл в (22) с учетом того, что  $q_x = q_y = 0$  при  $|x| < \ell - d$

$$H(x) = \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi = H_1(x) + H_2(x) \quad (23)$$

где

$$H_1(x) = \int_{-\ell}^{-\ell+d} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi; \quad H_2(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi$$

Интеграл  $H_1(x)$  преобразуем, меняя местами пределы интегрирования, выполнив замену переменной  $\xi \rightarrow -\xi$ , а также учитывая, что при растяжении  $p_x(-\xi) = -p_x(\xi)$  [7]

$$H_1(x) = - \int_{-\ell+d}^{-\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) + ip_x(\xi)) d\xi = - \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} (p_y(\xi) - ip_x(\xi)) d\xi \quad (24)$$

Получаем

$$H(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left( \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} - \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi + x} \right) p_y(\xi) d\xi + i \int_{\ell-d}^{\ell} \left( \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi - x} + \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi + x} \right) p_x(\xi) d\xi \quad (25)$$

В итоге имеем

$$H(x) = H_y^{\sigma_0}(x) + iH_x^{\sigma_0}(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{2x\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_y(\xi) d\xi + i \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{2\xi\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_x(\xi) d\xi \quad (26)$$

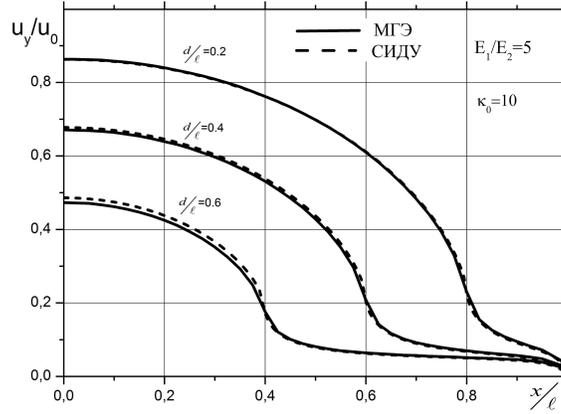


Рис. 3. Нормальная составляющая раскрытия трещины,  $\kappa_0$ -относительная жесткость связей

В случае сдвиговых нагрузок  $\tau_0$  аналогичные преобразования дают

$$H(x) = H_y^{\tau_0}(x) + iH_x^{\tau_0}(x) = \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{2\xi\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_y(\xi) d\xi + i \int_{\ell-d}^{\ell} \frac{2x\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{\xi^2 - x^2} p_x(\xi) d\xi \quad (27)$$

Интегралы в соотношениях (26)-(27) не являются сингулярными, т.к.  $x > \ell$ .

Запишем итоговые выражения для напряжений на продолжении трещины (см.(19)) при наличии связей в концевой области трещины,  $x > \ell$

**А) Растяжение:** ( $\phi(x) = \beta \ln \frac{x-\ell}{x+\ell}$ )

$$\sigma_{xy}(x) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left\{ x \sin \phi(x) + 2\beta\ell \cos \phi(x) + \frac{ch(\pi\beta)}{\pi\sigma_0} [\sin \phi(x) H_y^{\sigma_0}(x) + \cos \phi(x) H_x^{\sigma_0}(x)] \right\} \quad (28)$$

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left\{ x \cos \phi(x) - 2\beta\ell \sin \phi(x) + \frac{ch(\pi\beta)}{\pi\sigma_0} [\cos \phi(x) H_y^{\sigma_0}(x) - \sin \phi(x) H_x^{\sigma_0}(x)] \right\} \quad (29)$$

**В) Сдвиг:** ( $\phi(x) = \beta \ln \frac{x-\ell}{x+\ell}$ )

$$\sigma_{xy}(x) = \frac{\tau_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left\{ x \cos \phi(x) - 2\beta\ell \sin \phi(x) + \frac{ch(\pi\beta)}{\pi\tau_0} [\sin \phi(x) H_y^{\tau_0}(x) + \cos \phi(x) H_x^{\tau_0}(x)] \right\} \quad (30)$$

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{\tau_0}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} \left\{ -x \sin \phi(x) - 2\beta\ell \cos \phi(x) + \frac{ch(\pi\beta)}{\pi\tau_0} [\cos \phi(x) H_y^{\tau_0}(x) - \sin \phi(x) H_x^{\tau_0}(x)] \right\} \quad (31)$$

Приведенные выше выражения для напряжений за вершиной трещины на границе соединения материалов справедливы при  $x > \ell$ . Выражения для вычисления напряжений при  $x < -\ell$  могут быть получены при изменении знака биупругой постоянной ( $\beta \rightarrow -\beta$ ) в выражениях (28)-(31).

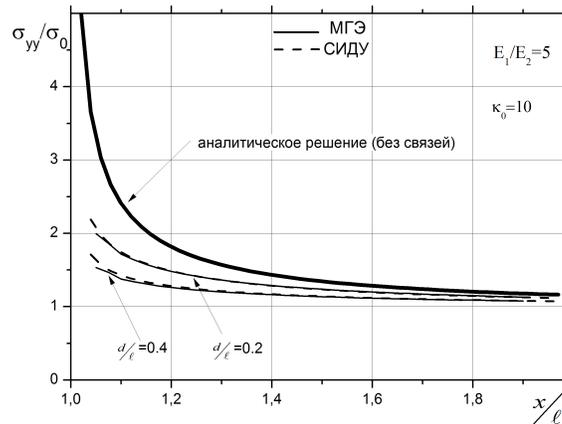


Рис. 4. Нормальные напряжения на границе соединения материалов за вершиной трещины

На рис. 3 и рис. 4 показаны нормальная составляющая раскрытия трещины и нормальные напряжения на границе соединения материалов (отношение модулей упругости материалов  $E_1/E_2 = 5$ ) за вершиной трещины, полученные на основе соотношений, приведённых в данной работе, а также численно (методом граничных элементов [10]) для различных размеров концевой области трещины. Раскрытие трещины нормировано величиной раскрытия в центре аналогичной трещины без связей  $u_0$ . Результаты расчетов обоими методами практически совпадают.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 3. С. 434–444.
- [2] Cox В. N., Marshall D. B. Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue // Acta Metallurgica et Materialia. 1994. Vol. 42, no. 2. P. 341 – 363.
- [3] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 2. С. 22–39.
- [4] Shao Y., Zhao H. P., Gao H. Discontinuous crack-bridging model for fracture toughness analysis of nacre // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2012. Vol. 60, no. 8. P. 1400–1419.
- [5] Перельмутер М. Н. Моделирование кинетики самозалечивания трещин // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22, № 4. С. 47–55.
- [6] Goldstein R., Perelmuter M. Modeling of Bonding at an Interface Crack // International Journal of Fracture. 1999. Vol. 99, no. 1-2. P. 53–79.
- [7] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. МГТ. 2001. № 1. С. 94–112.
- [8] Rice J. R., Sih G. C. Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media // Journal of Applied Mechanics. 1965. Vol. 32, no. 2. P. 418–423.
- [9] Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. с. 295.
- [10] Perelmuter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks // Computational Mechanics. 2013. Vol. 51, no. 4. P. 523–534.

M. N. Perelmuter

## BRIDGED CRACK – OPENING OUTSIDE OF THE BRIDGED ZONE AND STRESSES AT THE MATERIAL INTERFACE

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** For a straight interfacial crack with bridged zone the expressions for calculating the opening of the crack outside of the bridged zone and stresses ahead of the crack tip are obtained. The action of uniform normal and shear external loads is considered. The size of the crack bridged zone is not considered small compared with the length of the whole crack. A comparison with the results obtained by the boundary element method is presented.

**Keywords:** crack bridged zone, interface crack opening, stresses ahead of the crack tips.

### REFERENCES

- [1] Barenblatt G. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1959. Vol. 23, no. 3. P. 622 – 636.
- [2] Cox B. N., Marshall D. B. Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue // *Acta Metallurgica et Materialia*. 1994. Vol. 42, no. 2. P. 341 – 363.
- [3] Goldstein R. V., Perelmuter M. N. Modeling of fracture toughness of composite materials // *Computational Continuum Mechanics (in Russian)*. 2009. Vol. 2(2). P. 22–39.
- [4] Shao Y., Zhao H. P., Gao H. Discontinuous crack-bridging model for fracture toughness analysis of nacre // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2012. Vol. 60, no. 8. P. 1400–1419.
- [5] Perelmuter M. N. Modelling of self-healing kinetics of cracks // *Physical mesomechanics*. 2019. Vol. 22, no. 4. P. 47–55.
- [6] Goldstein R., Perelmuter M. Modeling of bonding at an interface crack // *International Journal of Fracture*. 1999. Vol. 99, no. 1-2. P. 53–79.
- [7] Goldstein R. V., Perelmuter M. N. An interface crack with bonds between the surfaces // *Mechanics of solids*. 2001. no. 1. P. 94–112.
- [8] Rice J. R., Sih G. C. Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media // *Journal of Applied Mechanics*. 1965. Vol. 32, no. 2. P. 418–423.
- [9] Slepnyan L. I. *Mechanics of cracks*. L.: Sudostroenie, 1981.
- [10] Perelmuter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks // *Computational Mechanics*. 2013. Vol. 51, no. 4. P. 523–534.

---

*Perelmuter Mikhail Natanovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

И. Г. Горячева, Е. В. Торская

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКОПЛЕНИЯ КОНТАКТНО-УСТАЛОСТНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ИЗНАШИВАЕМЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ С ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается влияние остаточных напряжений, формирующихся при различных видах поверхностной обработки элементов пар трения, на скорость накопления контактно-усталостных повреждений, возникающих при циклическом нагружении поверхностей взаимодействующих тел в условиях трения качения при наличии поверхностного изнашивания. Исследовано влияние относительного проскальзывания, коэффициента трения скольжения, величины остаточных напряжений на распределение амплитудных значений максимальных касательных напряжений. Полученные результаты использованы для анализа влияния поля остаточных напряжений и скорости поверхностного изнашивания на процесс накопления контактно-усталостных повреждений.

**Ключевые слова:** контактная задача, качение, износ, напряженное состояние, контактно-усталостные повреждения.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.008

УДК: 539.3

Одним из распространенных видов разрушения в условиях циклического контактного взаимодействия является контактно-усталостное, проявлениями которого являются образование выщербин (например, в системе колесо-рельс), отслаивание покрытий, усталостное изнашивание, возникающее при фрикционном контакте шероховатых поверхностей.

---

© Горячева И. Г., Торская Е. В., 2020

*Горячева Ирина Георгиевна*

e-mail: goryache@ipmnet.ru, академик РАН, зав. лабораторией трибологии, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Торская Елена Владимировна*

e-mail: torskaya@mail.ru, д.ф.-м.н., профессор РАН, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4), а также при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00400).

Поступила 01.04.2020

Общий подход к моделированию контактно-усталостного разрушения шероховатых тел изложен в [1]. Этот подход основан на построении функции поврежденности поверхностных слоев материалов, зависящей от значений напряжений в каждой точке. Процесс накопления контактно-усталостной поврежденности на макроуровне может заканчиваться удалением материала в количествах, не позволяющих в дальнейшем полноценно использовать деталь с дефектной поверхностью. На микроуровне накопление контактно-усталостной поврежденности приводит к усталостному изнашиванию — массовому отделению частиц малого размера. Характерной особенностью усталостного разрушения поверхностей является то обстоятельство, что после единичного акта разрушения, произошедшего в некоторый момент времени, оставшаяся часть материала, характеризующаяся известной функцией распределения повреждений, вновь вступает в контакт, т.е. материал несет в себе следы истории процесса.

Процесс изнашивания может иметь различную природу: помимо усталостной, это абразивный, адгезионный износ и т.п. Сочетание двух типов разрушения — поверхностного изнашивания, имеющего природу, отличную от усталостной, и выкрашивание материала по контактно-усталостному механизму имеет место, например, в системе колесо-рельс. Было показано [2, 3], что равномерное изнашивание приводит к замедлению процесса накопления поврежденности в подповерхностных слоях. Современные исследования затрагивают проблемы сочетания адгезионного и усталостного механизмов изнашивания [4], а также влияния твердости на скорость износа и накопления поврежденности [5].

Последняя работа является экспериментальной и затрагивает вопрос об упрочнении поверхностных слоев материала для повышения их сопротивления абразивному изнашиванию. Во многих случаях при такой обработке формируется поле остаточных напряжений, на которое накладывается напряжённое состояние, возникающее при их циклическом деформировании в условиях фрикционного взаимодействия. Влияние остаточных напряжений на появление усталостных трещин при одноосном циклическом нагружении достаточно хорошо изучено. В частности, в монографии [6] и ряде других исследований показано, что наличие сжимающих остаточных напряжений препятствует распространению усталостных трещин, а растягивающие напряжения ускоряют разрушение. Работ, посвящённых изучению образования контактно-усталостных повреждений при наличии остаточных напряжений, немного, и они содержат, в основном, экспериментальный материал. Так, исследования, проведённые в [7], показывают, что остаточные напряжения в поверхностных слоях материала железнодорожного колеса существенно меняются при значительном фрикционном разогреве в условиях торможения. В результате проведённых испытаний подшипниковой стали на контактную усталость, сопровождающихся пластической деформацией, установлено [8], что вблизи поверхности изначально сжимающие остаточные напряжения переходят в растягивающие. Изучение влияния свойств материалов железнодорожных рельсов и особенностей их поверхностной обработки на возникающие распределения остаточных напряжений проведено в [9].

Вопрос о влиянии остаточных напряжений на время работы трибосопряжения в условиях многоциклового упругого нагружения до момента зарождения усталостной трещины исследован в работе [10]. Возможность варьирования поля остаточных напряжений за счёт выбора соответствующих технологий обработки поверхностных слоев материалов является инструментом для увеличения долговечности узлов трения,

разрушающихся по контактно-усталостному механизму, а также в результате абразивного изнашивания.

В данной работе исследуется совместное влияние поля остаточных напряжений и абразивного поверхностного изнашивания на процесс накопления контактно-усталостных повреждений при циклическом фрикционном взаимодействии.

**Метод моделирования контактной усталости при циклическом фрикционном нагружении.** Для моделирования процесса накопления контактно-усталостных повреждений в материале, подвергнутом циклическому нагружению, необходимо провести выбор функции, связывающей скорость накопления поврежденности с напряженным состоянием поверхностных слоев материала.

Существуют разные физические подходы к моделированию поврежденности, в которых скорость накопления поврежденности рассматривается как функция напряжений в данной точке, температуры и других параметров в зависимости от механизма разрушения, вида материала и других факторов. При построении модели контактно-усталостного разрушения поверхности используется макроскопический подход, который состоит в построении положительной неубывающей во времени функции  $Q(M, t)$ , характеризующей меру повреждения материала в точке  $M(x, y, z)$  и зависящей от значений напряжений в данной точке. Для исследования накопления контактно-усталостных повреждений часто используется модель линейного суммирования повреждений (в каждый момент времени приращение поврежденности не зависит от величины накопленной поврежденности). Разрушение наступает в момент времени  $t^*$ , когда функция поврежденности достигнет заданного порогового значения.

В данном исследовании считалось, что скорость  $\partial Q(x, y, z, t)/\partial t$  накопления усталостных повреждений связана со значением напряжений, соответствующих выбранному критерию разрушения для изучаемого материала, степенной зависимостью вида

$$q(x, y, z, t) = \frac{\partial Q(x, y, z, t)}{\partial t} = c(\sigma(x, y, z, t))^m, \quad (1)$$

где  $c$  и  $m$  — некоторые постоянные, определяемые экспериментально. В качестве критериальных напряжений для упругих материалов рассматривалась разница  $\Delta\tau_1(x, y, z, t)$  между максимальным и минимальным значениями максимальных касательных напряжений в точке  $(x, y, z)$  за один цикл нагружения; в случае эластомерных материалов — амплитудные значения приведенных напряжений. Разрушение наступает тогда, когда поврежденность в некоторой точке достигает критической величины. В нормированной системе отсчета это условие можно записать в виде

$$Q(x, y, z, L) = 1, \quad (2)$$

где  $L$  — количество циклов до разрушения.

Таким образом, для расчета функции поврежденности необходимо определить поле внутренних напряжений, которое зависит от характера взаимодействия контактирующих тел.

**Постановка задачи и метод расчёта контактных и внутренних напряжений.** Рассмотрим задачу о качении с постоянной линейной скоростью  $V$ , направленной по оси  $x$ , и угловой скоростью  $\omega$  бесконечного упругого цилиндра по упругому основанию из того же материала под действием нормальной к поверхности силы  $P$  и тягового момента  $M$  (рис. 1). Контактующая поверхность цилиндра описывается

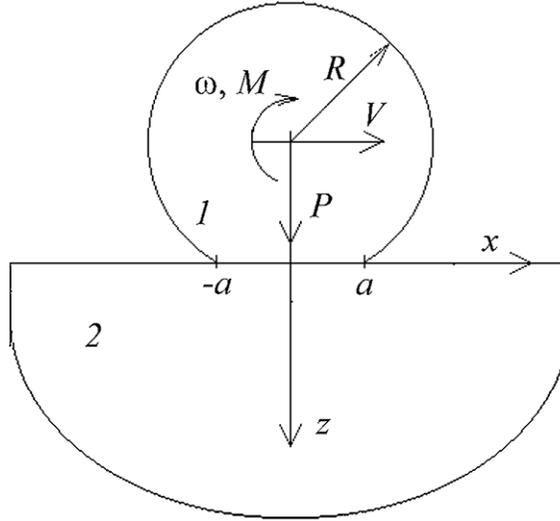


Рис. 1. Схема контакта

функцией  $f(x) = -x^2/(2R)$ , где  $R$  — радиус цилиндра. Эта задача может исследоваться в плоской квазистатической постановке (в сечении  $xOz$  плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра). В основании действуют растягивающие или сжимающие остаточные напряжения  $\sigma_x^{res}(x, z)$ , не зависящие от времени. Влияние преднапряжённого состояния на решение контактной задачи будем считать пренебрежимо малым (для некоторых частных случаев это доказано в [11]).

Для рассматриваемой задачи граничные условия имеют вид

$$w_1(x) + w_2(x) + f(x) = d, \quad (3)$$

где  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  — нормальные упругие перемещения поверхностей основания и цилиндра;  $d$  — сближение рассматриваемых упругих тел.

В условиях качения с проскальзыванием область контакта  $(-a, a)$  разбивается на подобласти скольжения  $\Omega_1$ , в которой трение скольжения моделируется законом Амонтона–Кулона, и сцепления  $\Omega_2$ , в которой равна нулю скорость  $s$  относительного проскальзывания поверхностей контактирующих тел, а касательные напряжения не превосходят предельные сдвиговые напряжения [12]:

$$\begin{aligned} |s(x)| > 0, \quad q(x) = \mu p(x)s/|s|, \quad (x) \in \Omega_1, \\ |s(x)| = 0, \quad |q(x)| \leq \mu p(x), \quad (x) \in \Omega_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $q(x)$  и  $p(x)$  — соответственно касательные и нормальные напряжения на площадке контакта;  $\mu$  — коэффициент трения.

Для одинаковых материалов цилиндра и основания распределение касательных напряжений не влияет на распределение контактных давлений, для определения которых можно воспользоваться решением задачи Герца о контакте двух упругих цилиндров [12]:

$$p(x) = \frac{E^* \sqrt{a^2 - x^2}}{4\pi R}, \quad -a < x < a, \quad a = \sqrt{\frac{4RP}{\pi E^*}}, \quad (5)$$

где  $E^*$  — приведённый модуль упругости.

Распределение касательных напряжений при качении с проскальзыванием упругого цилиндра по основанию из того же материала, удовлетворяющее граничным условиям (4), имеет вид [13]

$$q(x) = \begin{cases} \mu p(x) = \frac{\mu E^*}{4\pi R} \sqrt{a^2 - x^2}, & -a < x < c, \\ q_1(x) = \frac{\mu E^*}{4\pi R} \left[ \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{(a-x)(x-c)} \right], & c < x < a, \end{cases} \quad (6)$$

$$c = a \left[ \frac{2\delta R}{\mu a} - 1 \right], \quad \delta = \frac{\omega R - V}{V}.$$

Используя выражения (5) и (6) для контактных напряжений и принцип суперпозиции, определим распределение внутренних напряжений с учётом поля остаточных растягивающих (сжимающих) напряжений  $\sigma_x^{res}(x, z)$  по известным соотношениям [12]:

$$\sigma_x(x, z) = \sigma_x^0(x, z) + \sigma_x^{res}(x, z), \quad \sigma_z(x, z) = \sigma_z^0(x, z), \quad \tau_{xz}(x, z) = \tau_{xz}^0(x, z), \quad (7)$$

где

$$\sigma_x^0(x, z) = -\frac{2z}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\alpha)(x-\alpha)^2 d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2} - \frac{2}{\pi} \int_{-a}^c \frac{\mu p(\alpha)(x-\alpha)^3 d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2} - \frac{2}{\pi} \int_c^a \frac{q_1(\alpha)(x-\alpha)^3 d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2},$$

$$\sigma_z^0(x, z) = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\alpha) d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2} - \frac{2z^2}{\pi} \int_{-a}^c \frac{\mu p(\alpha)(x-\alpha) d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2} - \frac{2z^2}{\pi} \int_c^a \frac{q_1(\alpha)(x-\alpha) d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2},$$

$$\tau_{xz}^0(x, z) = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\alpha)(x-\alpha) d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2} - \frac{2z}{\pi} \int_{-a}^c \frac{\mu p(\alpha)(x-\alpha)^2 d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2} - \frac{2z}{\pi} \int_c^a \frac{q_1(\alpha)(x-\alpha)^2 d\alpha}{((x-\alpha)^2 + z^2)^2}.$$

**Метод расчёта контактно-усталостных повреждений с учетом поверхностного изнашивания.** Для расчёта контактно-усталостных повреждений в поверхностных слоях материала при циклически изменяющемся поле напряжений воспользуемся макроскопическим подходом, описанным выше, при этом в качестве критерия накопления усталостных повреждений рассмотрим величину амплитудных значений  $\Delta\tau_{\max}(z, t)$  максимальных касательных напряжений. Таким образом, скорость накопления повреждений определяется согласно следующему выражению [1]:

$$\frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} = c \left( \frac{\Delta\tau_{\max}(z, t)}{p_0} \right)^m. \quad (8)$$

Здесь  $Q(z, t)$  — распределение поврежденности вдоль оси  $Oz$  в момент времени  $t$ ;  $p_0$  — максимальные контактные давления ( $p_0 = \sqrt{PE^*/(\pi R)}$ ), параметры  $m$  и  $c$  связаны с прочностными свойствами материала и определяются экспериментально [14].

Распределение максимальных касательных напряжений в случае плоской деформации можно рассчитать по формуле [12]:

$$\tau_{\max}(x, z) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x^0(x, z) + \sigma_x^{res}(x, z) - \sigma_z^0(x, z))^2 + 4(\tau_{xz}^0(x, z))^2}, \quad (9)$$

где компоненты тензора напряжений  $\sigma_x^0(x, z)$ ,  $\sigma_z^0(x, z)$  и  $\tau_{xz}^0(x, z)$  определяются из соотношений (7).

Тогда амплитудные значения  $\Delta\tau_{\max}(z)$  максимальных касательных напряжений на фиксированном расстоянии  $z$  от поверхности можно определить как

$$\Delta\tau_{\max}(z) = \max_x \Delta\tau_{\max}(x, z) = \max_x \left[ \tau_{\max}(x, z) - \frac{1}{2} |\sigma_x^{res}(x, z)| \right]. \quad (10)$$

Здесь сделано предположение, что в условиях качения по упругому основанию периодической системы цилиндров под его поверхностью чередуются нагруженные и ненагруженные области.

Заметим, что при каждом фиксированном значении координат  $(x, z)$  функция  $\Delta\tau_{\max}(x, z)$  (10) имеет при малых положительных значениях  $\sigma_x^{res}(x, z)$  следующее асимптотическое разложение:

$$\Delta\tau_{\max}(x, z) = \tau_{\max}^0(x, z) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_x^0(x, z) - \sigma_z^0(x, z)}{2\tau_{\max}^0(x, z)} \right) \sigma_x^{res}(x, z) + O((\sigma_x^{res}(x, z))^2), \quad (11)$$

$$\tau_{\max}^0(x, z) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x^0(x, z) - \sigma_z^0(x, z))^2 + 4(\tau_{xz}^0(x, z))^2}.$$

Таким образом, из (11) получаем, что при малых значениях  $\sigma_x^{res}(x, z)$  амплитудные значения максимальных касательных напряжений меньше, чем в случае нулевых остаточных напряжений.

Скорость изнашивания, имеющего природу, отличную от усталостной, зависит от ряда параметров: контактного давления, величины области проскальзывания  $\Omega_1$ , величины коэффициента трения скольжения, износостойкости материала и т.п. [15]. В задаче о качении, рассматриваемой в данной работе, условия изнашивания одинаковы для всех точек полуплоскости. Будем рассматривать установившийся режим изнашивания, характеризующийся постоянной линейной скоростью  $K$ . В предположении линейного суммирования повреждений [1] и независимости напряженного состояния в упругом теле от накопленных в нем повреждений из (8) получим следующее соотношение для функции поврежденности, справедливое при отсутствии изнашивания:

$$Q(z, t) = tc \left( \frac{\Delta\tau_{\max}(z)}{p_0} \right)^m, \quad t = NT, \quad (12)$$

где  $T$  — время одного цикла;  $N$  — количество циклов.

При наличии изнашивания скорость (8) накопления контактно-усталостных повреждений в фиксированной точке материала непрерывно меняется в связи со смещением поверхности. В этом случае поврежденность в точке  $Z$ , связанной с неизношенной поверхностью материала, рассчитывается согласно следующему соотношению:

$$Q(Z, t) = c \int_0^t \theta \left( \frac{\Delta\tau_{\max}(Z - K\theta)}{p_0} \right)^m d\theta, \quad Z \geq Kt. \quad (13)$$

Условие зарождения контактно-усталостной трещины определим как

$$Q(z, N^*T) = Q^*, \quad (14)$$

где  $N^*$  — количество циклов до начала разрушения;  $Q^*$  — критическое значение поврежденности, соответствующее началу зарождения усталостной трещины.

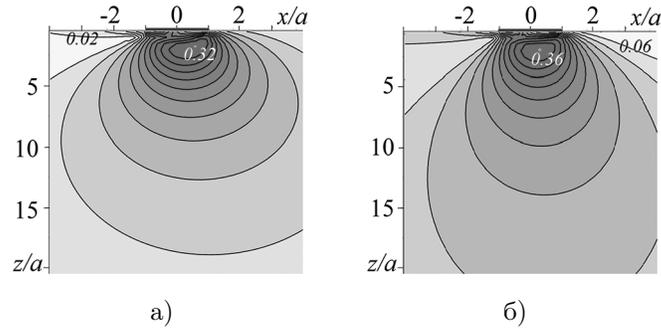


Рис. 2. Распределение максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}(x, z)/p_0$  в основании под цилиндром: а) при  $\sigma^{res}(z) = 0$ ; б) при  $\sigma^{res}(z) = 0,1p_0$ .  $\mu = 0,4$ ,  $\delta' = 0,14$

**Анализ результатов расчётов.** Разработанный алгоритм был применен для расчёта распределения максимальных касательных напряжений и их амплитуды в присутствии полей остаточных напряжений, а также функции поврежденности материала в условиях трения качения с учетом изнашивания поверхности основания. Входными параметрами модели являются коэффициент трения скольжения  $\mu$ , величина  $\delta' = \delta R/a$ , характеризующая проскальзывание, остаточные напряжения  $\sigma^{res}(z)$ , которые для определённости полагались зависящими только от расстояния от поверхности.

На рис. 2 приведены изолинии распределения максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}(x, z)$ , полученные без учёта остаточных напряжений и при действии постоянных растягивающих остаточных напряжений. Помимо увеличения максимальных значений функции  $\tau_{\max}(x, z)$  растягивающие остаточные напряжения частично нивелируют асимметрию относительно оси  $Oz$  этой функции, обусловленную наличием сил трения.

С целью исследования накопления контактно-усталостных повреждений проведён анализ амплитудных значений максимальных касательных напряжений  $\Delta\tau_{\max}(z)/p_0$ , являющихся функцией расстояния от поверхности (см. (10)).

Результаты расчётов, представленные на рис. 3, позволяют провести анализ влияния величины коэффициента трения скольжения и значений постоянных по глубине растягивающих остаточных напряжений на амплитуду максимальных касательных напряжений. Остаточные напряжения уменьшают перепады максимальных касательных напряжений в основании. Заметим, что этот эффект является нелинейным — увеличение остаточных напряжений с 0 до  $0,1p_0$  приводит к уменьшению значения максимума функции  $\Delta\tau_1(z)$  с 0,323 до 0,315 (кривые 1 и 2 на рис. 3, а), в то время как изменение  $\sigma_x^{res}$  с  $0,2p_0$  до  $0,5p_0$  почти не влияет на вид этой функции (кривые 3 и 4). Полученные результаты согласуются с асимптотическим анализом соотношения (9), проведённым в п. 2.

Результаты расчёта показывают (рис. 3, б), что увеличение коэффициента трения увеличивает амплитудные значения максимальных касательных напряжений. Интересно отметить, что при выбранных параметрах расчёта наличие остаточных напряжений приводит к приближению к поверхности максимального значения перепада

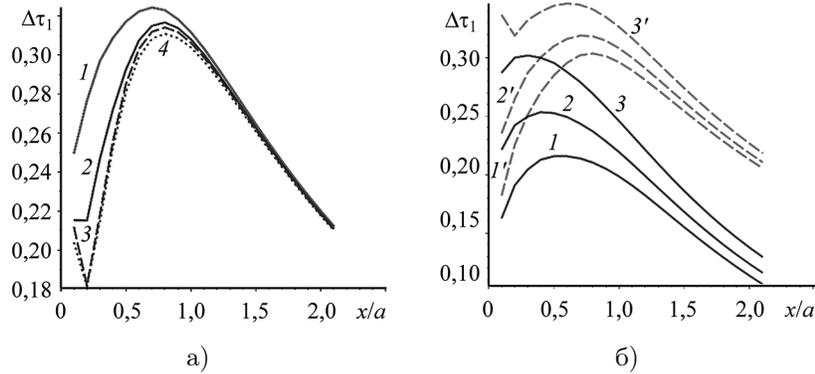


Рис. 3. Зависимость амплитудных значений максимальных касательных напряжений от расстояния от поверхности: а) при разных значениях растягивающих напряжений:  $\mu = 0,4$ ,  $\delta' = 0,14$ ,  $\sigma_x^{res}/p_0 = 0; 0,1; 0,2; 0,5$  (кривые 1–4 соответственно); б) при разных значениях коэффициента трения:  $\sigma_x^{res}/p_0 = 0,1$  (сплошные линии),  $\sigma_x^{res}/p_0 = 0$  (штриховые линии),  $\delta' = 0,14$ ,  $\mu = 0,1; 0,35; 0,6$  (кривые 1–3 и 1'–3' соответственно)

напряжений, что может быть причиной уменьшения глубины образования контактно-усталостных дефектов.

При анализе напряжённого состояния были использованы безразмерные величины, позволяющие обобщать полученные результаты на разные пары трения качения.

Для расчёта процесса накопления поврежденности на основании соотношений (12)–(14) необходимо использовать параметры  $m$  и  $c$ , определяемые экспериментально для конкретного материала. В качестве примера для расчётов были использованы результаты экспериментов на контактную усталость для рельсовой стали [16], позволившие получить путём перерасчёта, предложенного в [14], значения  $m = 1,684$ ,  $c = 9,344825999 \cdot 10^{-23}$ .

Функция накопления контактно-усталостных повреждений определялась для подповерхностных слоев материала при наличии остаточных напряжений и без них, варьировалась также скорость износа (рис. 4). Поверхностное изнашивание увеличивает время до достижения критических значений поврежденности, одновременно с этим приводит к тому, что поврежденность более равномерно распределяется по глубине. Во всех случаях точка максимального значения поврежденности постепенно смещается к поверхности, при этом для материала с остаточными напряжениями при относительно высокой скорости изнашивания (штриховые кривые на рис. 4, б) в итоге локализуется на поверхности, а значение поврежденности не достигает критического. Таким образом, износ препятствует накоплению поврежденности. Разница в результатах, полученная для материалов с нулевыми и ненулевыми остаточными напряжениями, обусловлена только разницей в амплитудах максимальных касательных напряжений. Однако следует отметить, что в общем случае обработка поверхностных слоев, приводящая к появлению остаточных напряжений, изменяет и их прочностные свойства (параметры  $m$  и  $c$ ), а также износостойкость.

**Выводы.** В данном исследовании предложен численно-аналитический метод расчёта контактно-усталостных повреждений в подповерхностных слоях взаимодействующих тел в условиях трения качения при наличии поверхностного изнашивания.

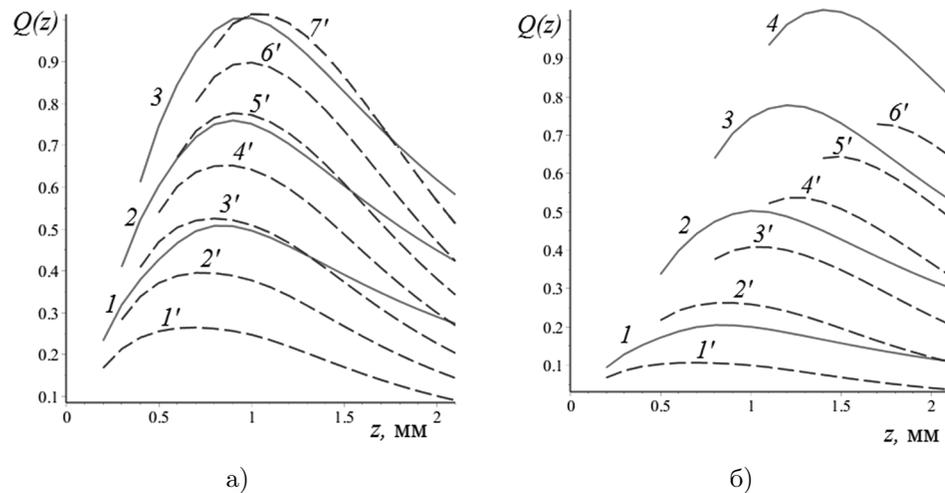


Рис. 4. Зависимости поврежденности  $Q$  от расстояния от поверхности материала при  $\sigma_x^{res}/p_0 = 0$  (кривые 1–4) и  $\sigma_x^{res}/p_0 = 0,1$  (кривые 1'–7'). Скорость износа: а) 1 мм за  $2,4 \cdot 10^7$  циклов; б) 3 мм за  $2,4 \cdot 10^7$  циклов.  $N = 2,4 \cdot 10^6$ ;  $4,8 \cdot 10^6$ ;  $7,2 \cdot 10^6$ ;  $9,6 \cdot 10^6$ ;  $12,0 \cdot 10^6$ ;  $14,4 \cdot 10^6$ ;  $16,8 \cdot 10^6$  (кривые 1–7 соответственно), радиус пятна контакта 7,5 мм, максимальное контактное давление 1010 МПа,  $\mu = 0,4$ ,  $\delta' = 0,02$

Проведён анализ влияния распределений остаточных растягивающих напряжений на амплитудные значения максимальных касательных напряжений при разных значениях коэффициента трения в области контактного взаимодействия; в частности, показано, что растягивающие остаточные напряжения увеличивают максимальные значения максимальных касательных напряжений, но уменьшают их амплитудные значения.

На примере расчёта процесса накопления контактно-усталостных повреждений в рельсовой стали показано, что поверхностное изнашивание увеличивает время до достижения критических значений поврежденности, одновременно с этим приводит к тому, что поврежденность более равномерно распределяется по глубине. При относительно высокой скорости изнашивания в связи с удалением поврежденных слоев материала критические значения поврежденности не достигаются.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 с.
- [2] Торская Е. В., Сошенко С. Н. Влияние износа на процесс накопления контактно-усталостной поврежденности в системе колесо-рельс // Трение и износ. 2006. Т. 27, № 4. С. 378–387.
- [3] Goryacheva I. G., Soshenkov S. N., Torskaya E. V. Modelling of wear and fatigue defect formation in wheel-rail contact // Vehicle System Dynamics. 2013. Vol. 51, no. 6. P. 767–783.
- [4] Adhesion-fatigue dual mode wear model for fractal surfaces in AISI 1045 cylinder-plane contact pairs / G. Wenjun, C. Yunxia, L. Mengwei et al. // Wear. 2019. Vol. 430–431. P. 327–339.
- [5] Investigation on wear and rolling contact fatigue of wheel-rail materials under various wheel/rail hardness ratio and creepage conditions / Y. Hu, L. Zhou, H. H. Ding et al. // Tribology International. 2020. Vol. 143, 106091.
- [6] Павлов В. Ф., Кирпичёв В. А., Вакулюк В. С. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых деталей по остаточным напряжениям. Самара: Самарский научный центр РАН, 2012.

- [7] Effects of Metal Removal and Residual Stress on the Contact Fatigue Life of Railway Wheels / J. Won, S. Byeong, C. Goo et al. // *International Journal of Fatigue*. 2008. Vol. 30, no. 10–11. P. 2021–2029.
- [8] Paladugu M., Scott H. R. Influence of Microstructure on Retained Austenite and Residual Stress Changes under Rolling Contact Fatigue in Mixed Lubrication Conditions // *Wear*. 2018. Vol. 406–407. P. 84–91.
- [9] Фимкин А. И., Долотказин Д. Б. Расчётно-экспериментальный метод определения продольных остаточных напряжений в железнодорожных рельсах // *Вестник Московского института инженеров ж.-д. транспорта (МИИТ)*. 2001. № 6. С. 28–39.
- [10] Горячева И. Г., Торская Е. В. Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений в условиях трения качения при наличии остаточных напряжений // *Трение и износ*. 2019. Т. 40, № 1. С. 44–51.
- [11] Александров В. М., Воротынцева И. В. Осесимметричные контактные задачи для преднапряженных деформируемых тел // *Прикладная механика и техническая физика*. 1990. № 3. С. 146–153.
- [12] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Москва: Мир, 1989.
- [13] Carter F. W. On the Action of a Locomotive Driving Wheel // *Proc. Roy. Soc. London A*. 1926. Vol. 112. P. 151–157.
- [14] Горячева И. Г., Добычин М. Н., Торская Е. В. Моделирование условий образования контактно-усталостных повреждений поверхности катания // *Контактно-усталостные повреждения колес грузовых вагонов* / под ред. С. М. Захарова. Москва: Интекст, 2004. С. 58–97.
- [15] Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. Москва: Машиностроение, 1977. 526 с.
- [16] Борц А. И., Долгих Л. В., Заграничек К. Л. Испытания рельсов на выносливость // *Путь и путевое хозяйство*. 2013. № 2. С. 16–22.

*Irina G. Goryacheva, Elena V. Torskaya*

## MODELING OF FATIGUE DAMAGE ACCUMULATION IN MULTIPLE CONTACT OF PRE-STRESSED BODIES IN THE PRESENCE OF WEAR

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** Residual stresses are formed during various types of surface treatment of elements of friction pairs. The effect of the residual stresses on the rate of fatigue damage accumulation is considered for the case of cyclic rolling contact in the presence of surface wear. The effect of relative slippage, friction coefficient, and residual stresses on the distribution of the amplitude values of the principal shear stress is studied. The results are used to analyze the effect of the residual stresses and the surface wear rate on the fatigue damage accumulation.

**Keywords:** contact problem, rolling friction, wear, internal stresses, fatigue damage accumulation.

### REFERENCES

- [1] Goryacheva I. Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer, 1998.
- [2] Torskaya E. V., Soshenkov S. N. Influence of Wear on the Process of Contact-Fatigue Damage Accumulation in a Wheel-Rail System // Journal of Friction and Wear. 2006. Vol. 27, no. 4. P. 378–387.
- [3] Goryacheva I. G., Soshenkov S. N., Torskaya E. V. Modelling of wear and fatigue defect formation in wheel-rail contact // Vehicle System Dynamics. 2013. Vol. 51, no. 6. P. 767–783.
- [4] Adhesion-fatigue dual mode wear model for fractal surfaces in AISI 1045 cylinder-plane contact pairs / G. Wenjun, C. Yunxia, L. Mengwei et al. // Wear. 2019. Vol. 430–431. P. 327–339.
- [5] Investigation on wear and rolling contact fatigue of wheel-rail materials under various wheel/rail hardness ratio and creepage conditions / Y. Hu, L. Zhou, H. H. Ding et al. // Tribology International. 2020. Vol. 143, 106091.
- [6] Pavlov V. F., Kirpichjov V. A., Vakuljuk V. S. Prediction of the fatigue resistance of surface-hardened parts by residual stresses. Samara: Samarskij nauchnyj centr RAN, 2012.
- [7] Effects of Metal Removal and Residual Stress on the Contact Fatigue Life of Railway Wheels / J. Won, S. Byeong, C. Goo et al. // International Journal of Fatigue. 2008. Vol. 30, no. 10–11. P. 2021–2029.
- [8] Paladugu M., Scott H. R. Influence of Microstructure on Retained Austenite and Residual Stress Changes under Rolling Contact Fatigue in Mixed Lubrication Conditions // Wear. 2018. Vol. 406–407. P. 84–91.
- [9] Fimkin A. I., Dolotkazhin D. B. Calculated and experimental method for determining longitudinal residual stresses in railway rails // VNIIZHT Scientific Journal. 2001. no. 6. P. 28–39.
- [10] Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Modeling the accumulation of contact fatigue damage in materials with residual stresses under rolling friction // Journal of Friction and Wear. 2019. Vol. 40, no. 1. P. 44–51.
- [11] Aleksandrov V. M., Vorotyntseva I. V. Axisymmetrical contact problems for prestressed deformable bodies // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1990. no. 3. P. 146–153.
- [12] Johnson K. L. Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
- [13] Carter F. W. On the Action of a Locomotive Driving Wheel // Proc. Roy. Soc. London A. 1926. Vol. 112. P. 151–157.
- [14] Gorjacheva I. G., Dobychin M. N., Torskaya E. V. Modeling the conditions for the formation of contact-fatigue damage to the rolling surface // Contact fatigue damage to the wheels of freight cars / Ed. by S. M. Zaharova. Moscow: Intekst, 2004. P. 58–97.
- [15] Kragelsky I. V., Dobychin M. N., Kombatov V. S. Fundamentals of Friction and Wear Calculations. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 526 p.
- [16] Borc A. I., Dolgih L. V., Zagranichek K. L. Endurance tests of rails // Railway Track and Facilities. 2013. no. 2. P. 16–22.

---

*Goryacheva Irina Georgievna*, Academician of RAS, Head of Laboratory of Tribology, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Torskaya Elena Vladimirovna*, D.Sc., Professor of RAS, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

С. Н. Коробейников, В. В. Алёхин, А. В. Бабичев

## МОЛЕКУЛЯРНАЯ МЕХАНИКА ОДНОСЛОЙНЫХ ГРАФЕНОВЫХ ЛИСТОВ

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

*Институт геологии и минералогии им. В.С. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Получены наборы материальных и геометрических параметров силового поля DREIDING и балочного элемента, точно воспроизводящие механические модули графена в рамках стандартного метода ММ и метода МСМ. Эти методы реализованы в компьютерных кодах Pioneer и MSC.Marc соответственно. Компьютерное моделирование частот и форм собственных колебаний однослойного графенового листа показало, что как частоты, так и соответствующие им формы собственных колебаний, полученные обоими методами, близки между собой, а также близки к частотам и формам колебаний почти квадратной сплошной пластинки, моделирующей ОГЛ.

**Ключевые слова:** графен, механические модули, метод молекулярной механики.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.009

УДК: 539.3

### Введение

Метод молекулярной механики (ММ) широко используется для моделирования деформаций, колебаний и выпучивания углеродных тонкостенных наноструктур: однослойных графеновых листов (ОГЛ), однослойных углеродных нанотрубок, фуллеренов и т. д. Так как графен является структурным материалом для этих наноструктур,

---

© Коробейников С. Н., Алёхин В. В., Бабичев А. В. 2020

*Коробейников Сергей Николаевич*

e-mail: korob@hydro.nsc.ru, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

*Алёхин Владимир Витальевич*

e-mail: alekhin@hydro.nsc.ru, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

*Бабичев Алексей Владимирович*

e-mail: babichev@igm.nsc.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт геологии и минералогии им. В. С. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (грант № Р220-14.W03.31.0002).

Поступила 10.03.2020

то разработка как методов ММ, так и компьютерных кодов для их реализации, воспроизводящих с высокой точностью механические модули графена (модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль изгибной жесткости), позволяют адекватно определить как частоты и формы колебаний, так и критические нагрузки и формы выпучивания этих наноструктур. Метод ММ можно разделить на стандартный метод ММ, основанный на прямом использовании силовых полей атомных взаимодействий и метод молекулярной структурной механики (МСМ), в котором потенциальные энергии атомных взаимодействий аппроксимируются потенциальными энергиями балочных элементов и/или ферм. Мы реализуем стандартный метод ММ с помощью силового поля DREIDING [1], а метод МСМ — с помощью балочных элементов Бернулли–Эйлера с круглым поперечным сечением. Мы реализуем первый метод в коде Pioneer [2], а второй метод — в коммерческом коде MSC.Marc [3]. Цель настоящей работы состоит, во-первых, в установлении параметров силового поля DREIDING, а также материальных и геометрических параметров балочных элементов, точно моделирующих механические модули графена и, во-вторых, в проведении сравнительного анализа частот и форм собственных колебаний почти квадратного ОГЛ, полученных стандартным методом ММ и методом МСМ.

#### Параметры моделей графена, точно воспроизводящие его механические модули

Мы провели в [4] анализ имеющихся в литературе данных о механических модулях графена, основанных как на квантово-механических расчетах, так и на экспериментальных исследованиях. Из этого анализа следует, что значения модуля Юнга  $Y$ , коэффициента Пуассона  $\nu$  и модуля изгибной жесткости  $D$

$$Y = 345 \text{ Н/м}, \quad \nu = 0.17, \quad D = 0.245 \text{ аДж.} \quad (1)$$

можно полагать близкими к реальным значениям.

В соответствии с силовым полем DREIDING [1], потенциальную энергию ковалентных взаимодействий атомов углерода в атомной решетке графена можно представить в виде разложения на элементарные потенциальные энергии вида:

- потенциальная энергия растяжения связи (потенциал Морзе)

$$V_{\text{bs}}(r) \equiv \bar{D}[e^{-2\bar{\alpha}(r-r_e)} - 2e^{-\bar{\alpha}(r-r_e)}], \quad (2)$$

где  $r$  — расстояние между атомами углерода,  $r_e$  — межатомное расстояние, соответствующее минимальной потенциальной энергии растяжения связей,  $\bar{D}$  — глубина потенциальной ямы, а  $\bar{\alpha}$  — заданный параметр, определяющий форму потенциала;

- потенциальная энергия изменения угла между соседними связями

$$V_{\text{ba}}(\theta) \equiv \frac{1}{2}k_{\text{ba}}(\cos \theta - \cos \theta_0)^2 / \sin^2 \theta_0, \quad (3)$$

где  $\theta_0$  и  $\theta$  — отсчетное и текущее значения угла между соседними связями, а  $k_{\text{ba}}$  — параметр модели;

- потенциальная энергия кручения связи

$$V_{\text{da}}(\phi) \equiv \frac{1}{2}k_{\text{da}}(1 - \cos 2\phi), \quad (4)$$

где  $\phi$  — текущее значение двугранного угла, а  $k_{\text{da}}$  — параметр модели;

- потенциальная энергия инверсии связи (энергия угла, соответствующая выходу атома из плоскости трех соседних атомов)

$$V_{ia}(\psi) \equiv k_{ia}(1 - \cos \psi), \quad (5)$$

где  $\psi$  — текущее значение угла инверсии, а  $k_{ia}$  — параметр модели.

В [4] показано, что при использовании стандартного метода ММ, следующий набор параметров силового поля DREIDING

$$\bar{\alpha} = 22.92 \text{ нм}^{-1}, \quad \bar{D} = 0.685240 \text{ аДж}, \quad r_e = 0.142 \text{ нм}, \quad k_{ba} = 1.329928 \text{ аДж}, \\ k_{da} = 0.090289 \text{ аДж}, \quad k_{ia} = 0.144463 \text{ аДж}. \quad (6)$$

точно воспроизводит механические модули графена (1).

Потенциальную энергию малых деформаций прямолинейной балки Бернулли-Эйлера из упругого материала можно представить суммой трех элементарных энергий:

- энергия продольной деформации балки при изменении ее длины на  $\Delta L$

$$V_A(\Delta L) \equiv \frac{1}{2} E_b \frac{A}{L} (\Delta L)^2; \quad (7)$$

- энергия изгиба балки на угол  $\Delta\alpha$

$$V_B(\Delta\alpha) \equiv \frac{1}{2} E_b \frac{I}{L} (2\Delta\alpha)^2; \quad (8)$$

- энергия кручения балки на угол  $\Delta\beta$

$$V_T(\Delta\beta) \equiv \frac{1}{2} G_b \frac{J}{L} (\Delta\beta)^2. \quad (9)$$

Здесь  $L$  — длина балки,  $A$  — площадь ее поперечного сечения,  $I$  и  $J$  — момент инерции и полярный момент инерции поперечного сечения балки соответственно,  $E_b$  и  $G_b$  — модуль Юнга и модуль сдвига материала балки. Параметры  $A$ ,  $I$ ,  $J$  круглого поперечного сечения балки выражаются через ее диаметр  $d_b$  следующим образом:

$$A = \frac{\pi}{4} d_b^2, \quad I = \frac{\pi}{64} d_b^4, \quad J = \frac{\pi}{32} d_b^4. \quad (10)$$

В [5] показано, что при использовании метода МСМ, следующий набор параметров балки

$$d = 0,121565 \text{ нм}, \quad L = 0,142 \text{ нм}, \quad E_b = 8808,127 \text{ нН/нм}^2, \quad G_b = 705,997 \text{ нН/нм}^2 \quad (11)$$

точно воспроизводит механические модули графена (1).

#### Компьютерные коды, реализующие метод ММ

Для реализации стандартного метода ММ мы используем конечно-элементный код Pioneer [2]. При этом для каждой из элементарных энергий (2)-(5) силового поля DREIDING развита формулировка специализированного конечного элемента [6]. Компьютерные моделирования собственных колебаний ОГЛ, представленные ниже, проведены с использованием набора параметров (6) силового поля DREIDING. Для реализации метода МСМ мы используем коммерческий конечно-элементный код MSC.Marc [3]. При этом для моделирования ковалентных связей атомов углерода мы используем конечные элементы прямолинейной балки Бернулли-Эйлера (элемент №52 в классификации MSC.Marc) с круглым поперечным сечением с использованием набора параметров (11).

Формы ( $m, n$ )	Циклические частоты свободных колебаний (в ТГц)		
	ММ метод	МСМ метод	$\tilde{\omega}_{mn}$ (12)
(1,1)	0.0459	0.0465	0.0464
(2,1)	0.1138	0.1149	0.1149
(1,2)	0.1161	0.1171	0.1171
(2,2)	0.1829	0.1857	0.1857
(3,1)	0.2270	0.2287	0.2291
(1,3)	0.2330	0.2347	0.2350
(3,2)	0.2949	0.2995	0.2998
(2,3)	0.2989	0.3034	0.3035

Таблица 1. Циклические частоты свободных колебаний и соответствующие формы ОГЛ

### Результаты компьютерных моделирований

В первую очередь, используя представительные ячейки графена для моделирования однородных деформаций, мы подтвердили, что наборы параметров (6), (11) с высокой точностью воспроизводят механические модули графена обоими методами (стандартным ММ и МСМ).

Затем мы провели частотный анализ почти квадратного шарнирно опертого по всем сторонам ОГЛ, состоящего из 1530 атомов углерода со сторонами 6.149 нм  $\times$  6.248 нм в направлениях «кресло» и «зигзаг» соответственно. Атомы моделируются сосредоточенными частицами с массами  $m_a = 0.019927$  нН пс<sup>2</sup>/нм, равным массам атомов углерода. Далее частоты и формы собственных колебаний ОГЛ мы будем сравнивать с соответствующими частотами и формами собственных колебаний эквивалентной упругой пластинки. Обозначая через  $\tilde{\omega}_{mn}$  и  $W_{mn}$  циклические частоты (в ТГц) и нормальный к поверхности пластинки прогиб (в нм) для соответствующей формы собственных колебаний пластинки соответственно, где  $m$  и  $n$  — количество полуволн вдоль сторон пластинки с длинами  $a_1$  и  $a_2$  (в нм) соответственно, имеем

$$\tilde{\omega}_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D_p}{\rho_s}} \left( \frac{m^2}{a_1^2} + \frac{n^2}{a_2^2} \right), \quad W_{mn} = A \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2}. \quad (12)$$

Здесь  $x_1, x_2$  — декартовы координаты поверхности пластинки вдоль ее сторон с длинами  $a_1$  и  $a_2$  соответственно,  $A$  — амплитуда прогиба пластинки (в нм), которая принимает произвольные значения,  $D_p$  — изгибная жесткость материала пластинки (в аДж) и  $\rho_s$  — плотность массы материала пластины на единицу ее площади (масса/площадь) (в нН  $\cdot$  пс<sup>2</sup>/нм<sup>3</sup>). При моделировании ОГЛ пластинкой, мы приравниваем изгибную жесткость материала упругой пластинки изгибной жесткости графена, т.е. полагаем  $D_p = 0.245$  аДж, для значения  $\rho_s$  мы используем значение массовой плотности графена на единицу площади

$$\rho_s = m_a/S_a = 0.7607524 \text{ нН} \cdot \text{пс}^2/\text{нм}^3 (= 0.7607524 \cdot 10^{-6} \text{ кг}/\text{м}^2),$$

а значения  $a_1$  и  $a_2$  приравниваем длинам сторон в направлениях «кресло» и «зигзаг» соответственно.

Результаты частотного анализа приведены в табл. 1 ( $m$  и  $n$  — числа полуволн вдоль сторон «кресло» и «зигзаг» соответственно).

Так как все полученные моды свободных колебаний близки друг с другом, то на рис. 1 представлены только формы свободных колебаний ОГЛ, полученные в компьютерных моделированиях стандартным методом ММ.

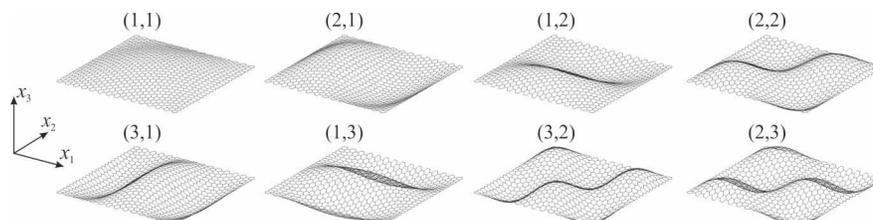


Рис. 1

Из приведенных в табл. 1 значений циклических частот собственных колебаний и отмеченной близости соответствующих им форм (рис. 1) следует, что оба метода (стандартный ММ и МСМ) могут успешно применяться к определению частот и форм собственных колебаний ОГЛ.

### Закключение

Получены наборы материальных и геометрических параметров силового поля DREIDING и балочного элемента, точно воспроизводящие механические модули графена в рамках стандартного метода ММ и метода МСМ. Эти методы реализованы в компьютерных кодах Pioneer и MSC.Marc соответственно. Компьютерное моделирование частот и форм собственных колебаний ОГЛ показало, что как частоты, так и соответствующие им формы собственных колебаний, полученные обоими методами, близки между собой, а также близки к частотам и формам колебаний почти квадратной сплошной пластинки, моделирующей ОГЛ.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mayo S.L., Olafson B.D., Goddard III W.A. DREIDING: A generic force field for molecular simulations // J. Phys. Chem. 1990. V. 94. P. 8897–8909.
- [2] Korobeynikov S.N., Agapov V.P., Bondarenko M.I., Soldatkin A.N. The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER // Proceedings of the International Conference on Numerical Methods and Applications. Sofia: Publishing House of the Bulgarian Academy of Science, 1989. P. 228–233.
- [3] MARC Users Guide. Vol. A. Theory and Users Information // Newport Beach: MSC.Software Corporation, 2015.
- [4] Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Simulating of graphene mechanical parameters by the DREIDING force field // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 2343–2378.
- [5] Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. On the molecular mechanics of single layer graphene sheets // Int. J. Eng. Sci. 2018. V. 133. P. 109–131
- [6] Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Annin B.D., Babichev A.V. Quasi-static buckling simulation of single-layer graphene sheets by the molecular mechanics method // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20. P. 836–870.

Korobeynikov S. N., Alyokhin V. V., Babichev A. V.

## MOLECULAR MECHANICS OF SINGLE LAYER GRAPHENE SHEETS

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

*Sobolev Institute of Geology and Mineralogy of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** Sets of material and geometric parameters of the DREIDING force field and beam element, which accurately reproduce the mechanical modules of graphene in the framework of the standard MM method and the MSM method, are obtained. These methods are implemented in computer codes Pioneer and MSC.Marc, respectively. Computer simulation of the frequencies and modes of natural vibrations of a single-layer graphene sheet showed that both the frequencies and the corresponding modes of natural vibrations obtained by both methods are close to each other, as well as close to the frequencies and modes of vibration of an almost square continuous plate simulating a single-layer graphene sheet.

**Keywords:** graphene, mechanical moduli, molecular mechanics method.

## REFERENCES

- [1] Mayo S.L., Olafson B.D., Goddard III W.A. DREIDING: A generic force field for molecular simulations // *J. Phys. Chem.* 1990. V. 94. P. 8897–8909.
- [2] Korobeynikov S.N., Agapov V.P., Bondarenko M.I., Soldatkin A.N. The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER // *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods and Applications.* Sofia: Publishing House of the Bulgarian Academy of Science, 1989. P. 228–233.
- [3] MARC Users Guide. Vol. A. Theory and Users Information // Newport Beach: MSC.Software Corporation, 2015.
- [4] Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Simulating of graphene mechanical parameters by the DREIDING force field // *Acta Mech.* 2018. V. 229. P. 2343–2378.
- [5] Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. On the molecular mechanics of single layer graphene sheets // *Int. J. Eng. Sci.* 2018. V. 133. P. 109-131
- [6] Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Annin B.D., Babichev A.V. Quasi-static buckling simulation of single-layer graphene sheets by the molecular mechanics method // *Math. Mech. Solids.* 2015. V. 20. P. 836-870.

---

*Korobeynikov Sergey Nikolaevich*, D.Sc., Head of Laboratory, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

*Alyokhin Vladimir Vitalyevich*, D.Sc., Leading Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

*Babichev Aleksey Vladimirovich*, PhD, Major Researcher, Sobolev Institute of Geology and Mineralogy of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

В. В. Мокряков

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНАХ В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПУАССОНА

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрены максимальные напряжения в осесимметричных волнах в упругих стержнях для положительных значений коэффициента Пуассона. Обнаружена особая длина волны, для которой имеет место наибольшее значение максимального растяжения на оси по отношению к максимальному растяжению на поверхности. Показано, что и особая длина волны, и наибольшее значение отношений растяжений не зависят от коэффициента Пуассона.

**Ключевые слова:** упругость, стержень круглого сечения, волны Погхаммера–Кри, коэффициент Пуассона, максимальное растяжение, максимальный сдвиг.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.010

УДК: 539.3

**Введение.** Цилиндрические стержни круглого сечения, как конструкционный элемент, широко распространены. Расчет прочности любой конструкции требует нахождения напряженно-деформированного состояния (НДС), в том числе — наибольших значений напряжений (максимальное растяжение и сдвиг). Напряжения возникают не только из-за статических напряжений, но и по причине вибраций. Таким образом, также необходимо изучать и НДС, вызванные упругими волнами.

Л. А. Poсhhammer в 1876 г. [1] и С. Chree в 1886 г. [2, 3] независимо вывели основные уравнения для волн в упругом круговом цилиндре. Позже (в работах [4–14] и др.) были получены решения для осесимметричных, изгибных и крутильных волн Погхаммера–Кри, построены дисперсионные соотношения.

Сегодня исследование волн Погхаммера–Кри продолжается в нескольких направлениях (см., напр., [15–23]): изменение геометрии задачи (вместо цилиндра — цилиндрическая полость в неограниченной среде, труба или другая осесимметричная конструкция), изменение механических свойств материала (в модель добавляются вязкость, термоупругость и т.д.), изменение распределения свойств (рассматриваются неоднородные и анизотропные конструкции).

---

© Мокряков В. В., 2020

*Мокряков Вячеслав Викторович*

e-mail: mokr@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00100.

Поступила 01.04.2020

Работа [24] посвящена изучению структуры полей напряжений в волнах Погхаммера–Кри. В частности, показано, что максимальные величины напряжений (растяжения и сдвига) могут локализоваться не только на поверхности стержня, но и на его оси. В работе [25] рассмотрена локализация максимумов напряжений для стального стержня, получены диапазоны частот для внешней и внутренней локализаций, получены отношения максимумов напряжений на оси и на поверхности стержня.

Представленная работа продолжает работу [25] и рассматривает локализацию максимумов напряжений для упругого стержня для коэффициента Пуассона  $0,001 \leq \nu \leq 0,499$ .

**Расчет напряжений.** Рассматривается бесконечный упругий стержень радиусом  $a$ . Материал стержня имеет модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , плотность  $\rho$ .

В работе [24] получены следующие выражения для осесимметричной волны Погхаммера–Кри:

$$\begin{aligned} u_r &= 2U \frac{h}{\kappa a} \left[ \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) J_1(\kappa a) J_1(hr) + 2 J_1(ha) J_1(\kappa r) \right] \sin(\gamma z - \omega t), \\ u_z &= 2U \gamma \left[ - \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + 2 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \cos(\gamma z - \omega t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega$  — круговая частота волны;  $\gamma$  — волновое число;  $c = \omega/\gamma$  — фазовая скорость волны;  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  — скорость волн расширения в бесконечной среде;  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость волн сдвига в бесконечной среде;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе;  $h = \gamma \sqrt{(c/c_1)^2 - 1}$ ,  $\kappa = \gamma \sqrt{(c/c_2)^2 - 1}$  — вспомогательные параметры;  $J_n(x)$  — функция Бесселя;  $U$  — обобщенная амплитуда.

С помощью (1) получены напряженно-деформированные состояния стержня посредством дифференцирования и применения закона Гука. В работе [24] показано, что в осесимметричных волнах максимумы растягивающих и сдвиговых напряжений могут находиться не только на поверхности стержня, но и на его оси.

**Исследование нулевой моды.** В работе [25] исследован бесконечный упругий стержень с параметрами, соответствующими стали ( $E = 2,0 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0,28$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>). Рассмотрены НДС для волн с частотой и фазовой скоростью, соответствующих нулевой моде (диапазон частот — до 3 МГц).

Вычислены максимальное растяжение  $\sigma_{tension}$  и максимальный сдвиг  $\sigma_{shear}$  на оси ( $r = 0$ ) и поверхности ( $r = a$ ) стержня, введены отношения

$$R_{tension} = \frac{\max_{r=0} \sigma_{tension}(\omega)}{\max_{r=a} \sigma_{tension}(\omega)} \quad \text{и} \quad R_{shear} = \frac{\max_{r=0} \sigma_{shear}(\omega)}{\max_{r=a} \sigma_{shear}(\omega)}.$$

Получено, что максимальное растяжение локализуется на оси при  $\omega \lesssim 1,3$  МГц, и максимальный сдвиг — при  $\omega \lesssim 1,7$  МГц.

В продолжение работ [24, 25] вычислены отношения  $R_{tension}$  и  $R_{shear}$  для коэффициентов Пуассона в диапазоне  $0,001 \leq \nu \leq 0,499$  (особые значения  $\nu = 0$  и  $\nu = 0,5$  исключены из данного исследования, так как в этих точках дисперсионное соотношение вырождается, это предмет для следующих исследований).

Отношения  $R_{tension}$  и  $R_{shear}$  в зависимости от относительной длины волны  $l/a$  представлены на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

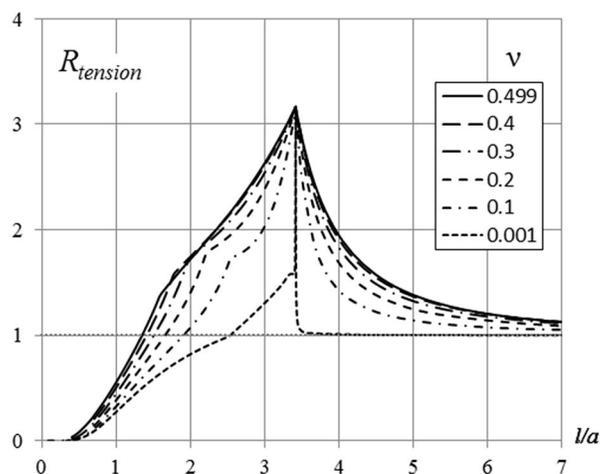


Рис. 1. Отношение  $R_{tension}$  в зависимости от относительной длины волны

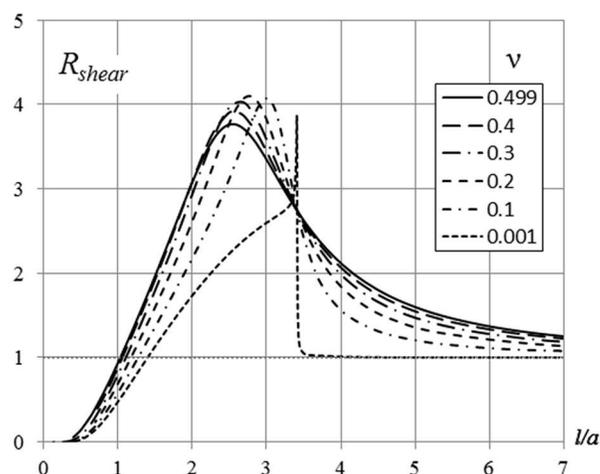


Рис. 2. Отношение  $R_{shear}$  в зависимости от относительной длины волны

На графиках привлекает внимание особая точка, соответствующая длине волны  $l^* \approx 3,412a$ . Для всех рассмотренных  $\nu$  отношение  $R_{tension}$  имеет максимум в этой точке, и при этом это значение одно и то же:  $R_{tension} \approx 3,164$ . Отношение  $R_{shear}$  также имеет одно и то же значение  $R_{shear} \approx 2,741$  для данной длины волны, но это значение не максимальное (максимумы  $R_{shear}$  соответствуют разным длинам волн и имеют разные значения).

**Заключение.** Обнаружена длина волны, для которой максимальное растяжение на оси в три с лишним раза больше, чем на поверхности. Этот результат важен для контроля напряжений в стержневых конструкциях.

С другой стороны, пока нет объяснения, почему  $l^*/a$  имеет именно такое значение и почему не зависит от коэффициента Пуассона, почему максимальное  $R_{tension}$  также не

зависит от свойств материала. Получение ответов на поставленные вопросы требует следующих исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. Vol. 81. P. 324–336.
- [2] Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1886. Vol. 21. P. 287–298.
- [3] Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1889. Vol. 14. P. 250–309.
- [4] Field G. S. Velocity of sound in cylindrical rods // *Canadian J. Research.* 1931. Vol. 5. P. 619–624.
- [5] Shear S. K., Focke A. B. The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel and magnesium // *Phys. Rev.* 1940. Vol. 57. P. 532–537.
- [6] Hudson G. E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.* 1943. Vol. 63. P. 46–51.
- [7] Кольский Г. Волны напряжения в твёрдых телах. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.
- [8] Redwood M., Lamb J. On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // *Proc. Phys. Soc. Section B. London.* 1957. Vol. 70, no. 1. P. 136–143.
- [9] Onoe M., McNiven H. D., Mindlin R. D. Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1962. Vol. 29. P. 729–734.
- [10] Hutchinson J. R., Percival C. M. Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. Vol. 44. P. 1204–1210.
- [11] Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. Vol. 51. P. 265–283.
- [12] Graff K. F. Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 692 p.
- [13] Abramson H. N. Flexural waves in elastic beams of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. Vol. 29. P. 1284–1286.
- [14] Pao Y.-H., Mindlin R. D. Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinders // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. Vol. 27. P. 513–520.
- [15] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 340 с.
- [16] Ватульян А. О., Юров В. О. Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений // *ПМТФ.* 2016. Т. 57, № 4. С. 182–191.
- [17] Zhou W. et al. Guided torsional wave generation of a linear in-plane shear piezoelectric array in metallic pipes // *Ultrasonics.* 2016. Vol. 65. P. 69–77.
- [18] Муравьева О. В., Ленков С. В., Мурашов С. А. Крутильные волны, возбуждаемые электромагнитно-акустическими преобразователями, при акустическом волноводном контроле трубопроводов // *Акустический журнал.* 2016. Т. 62, № 1. С. 117–124.
- [19] Garcia-Sanchez D. et al. Acoustic confinement in superlattice cavities // *Phys. Rev. A.* 2016. Vol. 94. P. 033813–1 – 033813–6.
- [20] Othman R. A fractional equation to approximate wave dispersion relation in elastic rods // *Strain.* 2017. Vol. 53, no. 4. e12228. P. 1–10.
- [21] Li Z., Jing L., Murch R. Propagation of monopole source excited acoustic waves in a cylindrical high-density polyethylene pipeline // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2017. Vol. 142. P. 3564–3579.
- [22] Zima B., Rucka M. Guided ultrasonic waves for detection of debonding in bars partially embedded in grout // *Constr. Build. Mat.* 2018. Vol. 168. P. 124–142.
- [23] Пышненко А. В., Кuznetsov S. V. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. Vol. 88, no. 8. P. 1385–1394.
- [24] Мокряков В. В. Максимумы напряжений в продольных волнах Похгаммера–Кри // *Изв. РАН. Механика твёрдого тела.* 2019. № 5. С. 86–103.
- [25] Mokryakov V. Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer–Chree waves // *Procedia Structural Integrity.* 2019. Vol. 23. P. 143–148.

V. V. Mokryakov

**LOCALIZATION OF MAXIMAL STRESSES IN AXISYMMETRIC WAVES  
IN ELASTIC RODS FOR POSITIVE POISSON'S RATIO***Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia*

**Abstract.** The maximum stresses in axisymmetric waves in elastic rods for positive values of the Poisson's ratio are considered. A special wavelength has been found for which the ratio of axial maximal extension to surface maximal extension has the largest value. It is shown that both the special wavelength and the largest value of the extensions ratio are independent of the Poisson's ratio.

**Keywords:** elasticity, cylindrical rod, Pochhammer–Chree waves, Poisson's ratio, maximal extension, maximal shear.

**REFERENCES**

- [1] Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. Vol. 81. P. 324–336.
- [2] Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1886. Vol. 21. P. 287–298.
- [3] Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1889. Vol. 14. P. 250–309.
- [4] Field G. S. Velocity of sound in cylindrical rods // *Canadian J. Research.* 1931. Vol. 5. P. 619–624.
- [5] Shear S. K., Focke A. B. The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel and magnesium // *Phys. Rev.* 1940. Vol. 57. P. 532–537.
- [6] Hudson G. E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.* 1943. Vol. 63. P. 46–51.
- [7] Kolsky H. *Stress Waves in Solids.* Oxford: Clarendon Press, 1953.
- [8] Redwood M., Lamb J. On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // *Proc. Phys. Soc. Section B. London.* 1957. Vol. 70, no. 1. P. 136–143.
- [9] Onoe M., McNiven H. D., Mindlin R. D. Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1962. Vol. 29. P. 729–734.
- [10] Hutchinson J. R., Percival C. M. Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. Vol. 44. P. 1204–1210.
- [11] Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. Vol. 51. P. 265–283.
- [12] Graff K. F. *Wave motion in elastic solids.* New York: Dover, 1991. 692 p.
- [13] Abramson H. N. Flexural waves in elastic beams of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. Vol. 29. P. 1284–1286.
- [14] Pao Y.-H., Mindlin R. D. Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinders // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. Vol. 27. P. 513–520.
- [15] Kovalev V. A., Radaev Y. N. *Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics.* Saratov: Izd-vo Saratov Univ., 2010. 340 p. (in Russian).
- [16] Vatul'yan A. O., Yurov V. O. Wave Processes in a Hollow Cylinder in an Inhomogeneous Prestress Field // *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* 2016. Vol. 57, no. 4. P. 182–191. (in Russian).
- [17] Zhou W. et al. Guided torsional wave generation of a linear in-plane shear piezoelectric array in metallic pipes // *Ultrasonics.* 2016. Vol. 65. P. 69–77.

---

*Mokryakov Viacheslav Viktorovich*, Ph. D., Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

- 
- [18] Murav'eva O. V., Len'kov S. V., Murashov S. A. Torsional Waves Excited by Electromagnetic-Acoustic Transducers During Guided-Wave Acoustic Inspection of Pipelines // *Acust. Zh.* 2016. Vol. 62, no. 1. P. 117–124. (in Russian).
  - [19] Garcia-Sanchez D. et al. Acoustic confinement in superlattice cavities // *Phys. Rev. A.* 2016. Vol. 94. P. 033813–1 – 033813–6.
  - [20] Othman R. A fractional equation to approximate wave dispersion relation in elastic rods // *Strain.* 2017. Vol. 53, no. 4. e12228. P. 1–10.
  - [21] Li Z., Jing L., Murch R. Propagation of monopole source excited acoustic waves in a cylindrical high-density polyethylene pipeline // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2017. Vol. 142. P. 3564–3579.
  - [22] Zima B., Rucka M. Guided ultrasonic waves for detection of debonding in bars partially embedded in grout // *Constr. Build. Mat.* 2018. Vol. 168. P. 124–142.
  - [23] Ilyashenko A. V., Kuznetsov S. V. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. Vol. 88, no. 8. P. 1385–1394.
  - [24] Mokryakov V. Maxima of the Stresses in the Longitudinal Pochhammer–Chree Waves // *Mech. Solids.* 2019. Vol. 54, no. 7. P. 1063–1075.
  - [25] Mokryakov V. Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer–Chree waves // *Procedia Structural Integrity.* 2019. Vol. 23. P. 143–148.

М. А. Волков, А. И. Демин, В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко

## ДВУХСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ И КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрена задача продольного растяжения двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов при различной ориентации слоев. Получены аналитические зависимости модуля Юнга и коэффициентов Пуассона пластин от отношения толщин. Проведен численный анализ изменчивости эффективных характеристик пластин из всех возможных комбинаций гексагональных и кубических кристаллов. Установлено, что существенное нарушение правила смесей для эффективного модуля Юнга двухслойной пластины происходит, если один из двух слоев заполняет ауксетик. Эффективный модуль Юнга может превосходить модуль Юнга кристаллов в обоих слоях близкой жесткости. Отношение модулей Юнга кристаллов в обоих слоях оказывает существенное влияние и на эффективный коэффициент Пуассона.

**Ключевые слова:** двухслойные пластины, эффективные характеристики, кубические кристаллы, гексагональные кристаллы

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.011

УДК: 539.32

---

© Волков М. А., Демин А. И., Городцов В. А., Лисовенко Д. С., 2020

*Волков Михаил Андреевич*

e-mail: volkovmikh@gmail.com, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Демин Александр Иванович*

e-mail: deminaliv@gmail.com, аспирант, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Городцов Валентин Александрович*

e-mail: gorod@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Лисовенко Дмитрий Сергеевич*

e-mail: lisovenk@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 18-79-10270.

Поступила 01.05.2020

## Введение

Последнее время материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетички) привлекают все больше внимания [1, 2]. В силу своих необычных свойств наличие ауксетических включений существенно влияет на механическое поведение композитных материалов в сравнении с композитами из материалов с положительным коэффициентом Пуассона. Исследования слоистых композитов, содержащих слои с положительными и отрицательными коэффициентами Пуассона, первоначально касались изотропных материалов. В [3] дан анализ растяжения многослойных композитов. Авторами определены аналитические зависимости эффективного модуля Юнга при продольном и поперечном растяжении. Проведено сопоставление аналитических результатов с экспериментальными. Установлено, что в случае композитов с различными положительными коэффициентами Пуассона правила смесей нарушаются. Поведение эффективного модуля Юнга многослойных пластин с чередующимися ауксетическими и неауксетическими слоями при помощи метода конечных элементов исследовано в [4]. В работе принято, что модули Юнга слоев одинаковы, коэффициент Пуассона неауксетического слоя равен 0.4, а ауксетического -0.9. Авторами установлено, что эффективный модуль Юнга, соответствующий растяжению по нормали к плоскости пластины [5], может в несколько раз превосходить модули Юнга слоев и зависит от количества слоев и порядка их укладки. Выявлено, что сильное влияние на величину эффективного модуля Юнга оказывало отношение ширины слоя к его толщине. В [6] исследовано поведение двухслойных композитов, содержащих ауксетический слой, при растяжении по нормали к плоскости пластины. В работе принято, что модули Юнга обоих слоев равны, их коэффициенты Пуассона равны по величине и имеют разный знак. Установлено, что для таких композитов правила смесей не выполняются и эффективный модуль Юнга композита может значительно (в 1.5 раза) превосходить значение модуля Юнга слоев. Зависимость эффективного модуля Юнга двухслойного цилиндрического композита из ауксетического и неауксетического слоев от отношения модулей Юнга слоев при равных по величине коэффициентах Пуассона разного знака исследована в [7] при продольном растяжении композитов. Авторами установлено, что для таких пластин наблюдается существенное отличие эффективного модуля Юнга от значения, полученного с использованием правила смесей. Для некоторых отношений модулей Юнга пластин отмечено, что эффективный модуль Юнга может превосходить по своей величине наибольший из модулей Юнга слоев. Поведение концентрических цилиндрических трехслойных композитов с ауксетическими слоями анализируется в [7, 8], где исследуется растяжение и кручение таких композитов, соответственно. В [7] анализировался случай растяжения композита вдоль продольной оси. Наличие ауксетического слоя оказывало сильное влияние на величину эффективного модуля Юнга, хотя он оказался ограничен значениями модуля Юнга слоев. Аналогичное поведение было свойственно и эффективному коэффициенту Пуассона. Поведение тонких двухслойных пластин из кристаллов различных систем при продольном растяжении проанализировано в [9–12]. Авторами установлено, что эффективные модуль Юнга и коэффициенты Пуассона тонких двух- и трехслойных пластин из кристаллов могут значительно отличаться от значений, предсказываемых по правилам смесей. Для некоторых пластин эффективный модуль Юнга мог превосходить значения модуля Юнга составляющих кристаллов.

Ниже анализируются эффективные упругие характеристики при продольном растяжении двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов. В Разделе 2 получены формулы для эффективных упругих характеристик. В Разделе 3 и Разделе 4 проводится численный анализ эффективных упругих характеристик на основе экспериментальных данных по упругим константам из справочника [13]. В Разделе 5 приводится краткое заключение.

## 2. Продольное растяжение двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов

Рассмотрена задача продольного растяжения тонкой двухслойной пластины из гексагональных и кубических кристаллов. Считаем, что слой 1 заполняет гексагональный кристалл, а слой 2 – кубический. В каждом из слоев кристаллы ориентированы таким образом, что оси 6 и 4 порядка гексагонального и кубического кристалла, соответственно, нормальны плоскости пластины. В слое 1 кристаллофизические оси  $X_1$  и  $X_2$  направлены вдоль граней. В слое 2 оси  $X_1$  и  $X_2$  могут быть повернуты на некоторый угол  $\varphi$  в плоскости пластины (Рис.1). При таких ориентациях кристаллов, лабораторная система координат  $xyz$  совпадает с системой координат  $X_1X_2X_3$ . Для описания упругого поведения кристаллов в первом слое необходимо 5 независимых коэффициентов податливости  $(s_{11}^1, s_{12}^1, s_{13}^1, s_{33}^1, s_{44}^1)$ , во втором слое необходимо 7 коэффициентов  $(\bar{s}_{11}^2, \bar{s}_{12}^2, \bar{s}_{13}^2, \bar{s}_{16}^2, \bar{s}_{33}^2, \bar{s}_{44}^2, \bar{s}_{66}^2)$ , зависящих от угла  $\varphi$  и 3-х коэффициентов податливости кубического кристалла  $(s_{11}^2, s_{12}^2, s_{44}^2)$ . Здесь и далее верхний индекс обозначает номер пластины. Эти коэффициенты образуют матрицы

$$\|s_{ij}^1\| = \begin{pmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^1 & s_{11}^1 & s_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^1 & s_{13}^1 & s_{33}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}^1 - s_{12}^1) \end{pmatrix},$$

$$\|\bar{s}_{ij}^2\| = \begin{pmatrix} \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{12}^2 & \bar{s}_{13}^2 & 0 & 0 & \bar{s}_{16}^2 \\ \bar{s}_{12}^2 & \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{13}^2 & 0 & 0 & -\bar{s}_{16}^2 \\ \bar{s}_{13}^2 & \bar{s}_{13}^2 & \bar{s}_{33}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{44}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{44}^2 & 0 \\ \bar{s}_{16}^2 & -\bar{s}_{16}^2 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{66}^2 \end{pmatrix},$$

где  $\bar{s}_{ij}^2$  – эффективные коэффициенты податливости, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} \bar{s}_{11}^2 &= s_{11}^2 - 0.5\Delta \sin^2 2\varphi, \\ \bar{s}_{12}^2 &= s_{12}^2 + 0.5\Delta \sin^2 2\varphi, \\ \bar{s}_{13}^2 &= s_{12}^2, \quad \bar{s}_{16}^2 = -0.5\Delta \sin 4\varphi \\ \bar{s}_{44}^2 &= s_{44}^2, \quad \bar{s}_{66}^2 = s_{44}^2 + 2\Delta \sin^2 2\varphi, \\ \Delta &= s_{11}^2 - s_{12}^2 - 0.5s_{44}^2. \end{aligned}$$

Предполагается, что деформации однородны

$$\varepsilon_{xx}^1 = \varepsilon_{xx}^2, \quad \varepsilon_{yy}^1 = \varepsilon_{yy}^2, \quad \varepsilon_{xy}^1 = \varepsilon_{xy}^2. \quad (1)$$

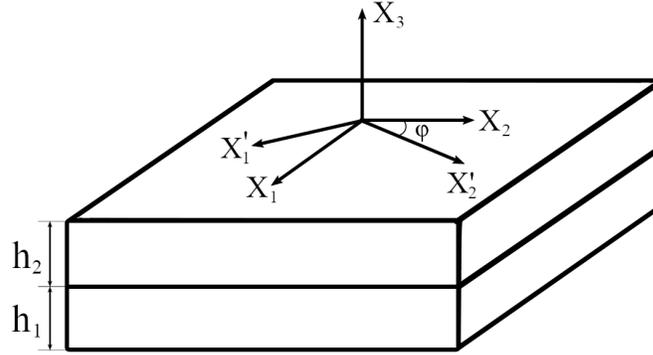


Рис. 1. Ориентация кристаллофизических систем координат двухслойной пластины

Продольное растяжение тонкой двухслойной пластины в направлении оси  $x$  удельной силой  $P$  позволяет написать уравнения равновесия следующим образом

$$h_1 \sigma_{xx}^1 + h_2 \sigma_{xx}^2 = P, \quad h_1 \sigma_{yy}^1 + h_2 \sigma_{yy}^2 = 0. \quad (2)$$

Отсутствие изгибного момента накладывает следующее ограничение на компоненты напряжений

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xy}^1 z dz + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \sigma_{xy}^2 z dz = 0. \quad (3)$$

Закон Гука для каждого из слоев имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^1 = s_{11}^1 \sigma_{xx}^1 + s_{12}^1 \sigma_{yy}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 = s_{12}^1 \sigma_{xx}^1 + s_{11}^1 \sigma_{yy}^1 \\ \varepsilon_{zz}^1 = s_{13}^1 (\sigma_{xx}^1 + \sigma_{yy}^1) \\ \varepsilon_{xy}^1 = 2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) \sigma_{xy}^1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx}^2 = \bar{s}_{11}^2 \sigma_{xx}^2 + \bar{s}_{12}^2 \sigma_{yy}^2 + \bar{s}_{16}^2 \sigma_{xy}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 = \bar{s}_{12}^2 \sigma_{xx}^2 + \bar{s}_{11}^2 \sigma_{yy}^2 - \bar{s}_{16}^2 \sigma_{xy}^2 \\ \varepsilon_{zz}^2 = \bar{s}_{13}^2 (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) \\ \varepsilon_{xy}^2 = \bar{s}_{16}^2 (\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2) + \bar{s}_{66}^2 \sigma_{xy}^2 \end{cases} \quad (4)$$

С использованием условий (1)-(3) из уравнений (4) определяются компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^1 &= \frac{h_2 (s_{11}^1 k_1 - s_{12}^1 k_2) + h_1 ((k_1)^2 - (k_2)^2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P, & \sigma_{yy}^1 &= h_2 \frac{s_{11}^1 k_2 - s_{12}^1 k_1}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P, \\ \sigma_{xx}^2 &= \frac{h_2 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + h_1 (s_{11}^1 k_1 - s_{12}^1 k_2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P, & \sigma_{yy}^2 &= -h_1 \frac{s_{11}^1 k_2 - s_{12}^1 k_1}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P. \\ \sigma_{xy}^1 &= \frac{\bar{s}_{16}^2 (2h_1 + h_2)}{2(2h_1 + h_2) h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + (h_1)^2 \bar{s}_{66}^2} \left[ \frac{h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1)}{h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + h_1 (k_1 - k_2)} \right] P, \\ \sigma_{xy}^2 &= -\frac{\bar{s}_{16}^2 h_1}{2(2h_1 + h_2) h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + (h_1)^2 \bar{s}_{66}^2} \left[ \frac{h_1 (s_{11}^1 - s_{12}^1)}{h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + h_1 (k_1 - k_2)} \right] P, \end{aligned}$$

где

$$k_1 = \bar{s}_{11}^2 + \frac{(\bar{s}_{16}^2 h_1)^2}{2(2h_1 + h_2) h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + h_1^2 \bar{s}_{66}^2}, \quad k_2 = \bar{s}_{12}^2 - \frac{(\bar{s}_{16}^2 h_1)^2}{2(2h_1 + h_2) h_2 (s_{11}^1 - s_{12}^1) + h_1^2 \bar{s}_{66}^2},$$

Им соответствуют деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^1 &= \varepsilon_{xx}^2 = \frac{s_{11}^1 h_1 ((k_1)^2 - (k_2)^2) + k_1 h_2 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 - h_1 k_2)^2} P, \\ \varepsilon_{yy}^1 &= \varepsilon_{yy}^2 = \frac{s_{12}^1 h_1 ((k_1)^2 - (k_2)^2) + k_2 h_2 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 - h_1 k_2)^2} P, \\ \varepsilon_{zz}^1 &= s_{13}^1 \frac{k_1 + k_2}{h_2 (s_{11}^1 + s_{12}^1) + h_1 (s_{11}^2 + s_{12}^2)} P, \quad \varepsilon_{zz}^2 = \bar{s}_{13}^2 \frac{h_2 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + h_1 (s_{11}^1 + s_{12}^1)(k_1 + k_2)}{(h_2 s_{11}^1 + h_1 k_1)^2 - (h_2 s_{12}^1 + h_1 k_2)^2} P.\end{aligned}$$

Выражения для эффективных модуля Юнга и коэффициентов Пуассона пластины принимают вид

$$E^{eff} = \frac{(\lambda s_{11}^1 + k_1)^2 - (\lambda s_{12}^1 + k_2)^2}{(1 + \lambda) [s_{11}^1 (k_1 - k_2)^2 + k_1 \lambda ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2)]}, \quad (5)$$

$$\nu_{xy}^{eff} = \frac{s_{12}^1 ((k_1)^2 - (k_2)^2) + k_2 \lambda ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2)}{k_1 \lambda ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + s_{11}^1 ((k_1)^2 - (k_2)^2)}, \quad (6)$$

$$\nu_{xz}^{1\, eff} = -s_{13}^1 (k_1 + k_2) \frac{\lambda (s_{11}^1 - s_{12}^1) + k_1 - k_2}{\lambda k_1 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + s_{11}^1 ((k_1)^2 - (k_2)^2)}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\nu_{xz}^{2\, eff} &= -\bar{s}_{13}^2 (s_{11}^1 + s_{12}^1) \frac{\lambda (s_{11}^1 - s_{12}^1) + k_1 - k_2}{\lambda k_1 ((s_{11}^1)^2 - (s_{12}^1)^2) + s_{11}^1 ((k_1)^2 - (k_2)^2)}, \quad (8) \\ \lambda &= h_2/h_1\end{aligned}$$

Данные эффективные характеристики являются функциями коэффициентов упругости слоев, отношения толщин  $\lambda$  и угла  $\varphi$  с периодом  $\pi/2$ . Если ввести обозначения

$$\alpha = 1 + \frac{\Lambda}{1 + \Lambda} \frac{[\nu_{xy}^1 - \nu_{xy}^2]^2}{1 - (\nu_{xy}^2)^2 + \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]},$$

$$\langle E \rangle = \frac{1 + \Lambda}{1 + \lambda} E^1, \quad \Lambda = \lambda \frac{E^2}{E^1},$$

$$E^k = \frac{1}{s_{11}^k}, \quad \nu_{xy}^k = -\frac{s_{12}^k}{s_{11}^k}, \quad k = 1, 2,$$

$$\nu_{xz}^1 = -\frac{s_{13}^1}{s_{11}^1}, \quad \nu_{xz}^2 = -\frac{s_{12}^2}{s_{11}^2}$$

$$\langle \nu \rangle = \frac{\nu_{xy}^1 + \lambda \nu_{xy}^2}{1 + \lambda}$$

то в частном случае кристаллов с  $\varphi = 0$  выражения (5)–(8) можно переписать в виде

$$E^{eff} = \frac{P}{(h_1 + h_2) \varepsilon_{xx}} = \alpha \langle E \rangle, \quad (9)$$

$$\nu_{xy}^{eff} = \frac{\nu_{xy}^1 [1 - (\nu_{xy}^2)^2] + \nu_{xy}^2 \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]}{1 - (\nu_{xy}^2)^2 + \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]}, \quad (10)$$

$$\nu_{xz}^{1\, eff} = \nu_{xz}^1 (1 - \nu_{xy}^2) \frac{\Lambda (1 + \nu_{xy}^1) + 1 + \nu_{xy}^2}{1 + (\nu_{xy}^2)^2 + \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]}, \quad (11)$$

$$\nu_{xz}^{2\, eff} = \nu_{xz}^2 (1 - \nu_{xy}^1) \frac{\Lambda (1 + \nu_{xy}^1) + 1 + \nu_{xy}^2}{1 + (\nu_{xy}^2)^2 + \Lambda [1 - (\nu_{xy}^1)^2]}. \quad (12)$$

Здесь  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности между эффективным модулем Юнга (5) и средневзвешенным модулем Юнга  $\langle E \rangle$ ,  $\langle \nu \rangle$  – средневзвешенный коэффициент Пуассона.

С использованием значений коэффициентов упругости из справочника [13] был проведен численный анализ изменчивости эффективных модуля Юнга и коэффициентов Пуассона двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов. В справочнике приведены данные более чем для 1000 кубических и 170 гексагональных кристаллов. Одна четверть всех кубических кристаллов являются ауксетиками [14]. К таким материалам можно отнести калий, кальций, железо, литий, никель и т.д. При выбранной ориентации кристаллофизической системы координат ауксетиками оказываются кристаллы Zn и MoS<sub>2</sub> [15].

### 3. Эффективные характеристики двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов при одинаковой ориентации кристаллофизических систем координат в слоях

Значения эффективного модуля Юнга большинства пластин (75% всех рассмотренных) из двух неауксетических кристаллов практически совпадают с значениями, предсказанными по правилу смесей (Фойгта) ( $|1 - \alpha| < 0.01$ ). Среди всех проанализированных пластин из двух неауксетиков, коэффициент  $\alpha$  меняется в диапазоне  $1.0 \leq \alpha \leq 1.25$ . Если же в одном из слоев находится кристалл с отрицательным коэффициентом Пуассона, то эффективный модуль Юнга пластины может гораздо сильнее отклоняться от значений, предсказываемых правилом смесей. У таких пластин коэффициент  $\alpha$  меняется в диапазоне  $1.0 \leq \alpha \leq 1.68$ .

Таблица 1. Максимальные значения параметра  $\alpha_{max}$  и отношения эффективного модуля Юнга  $E^{eff}$  к модулю Юнга наиболее жесткого слоя ( $E_{max}$ ) некоторых пластин из неауксетических гексагональных и кубических кристаллов

Пластина	$\alpha_{max}$	$\lambda$	$\left(\frac{E^{eff}}{E_{max}}\right)_{max}$	$\lambda_{max}$	$E^1$ , ГПа	$\nu_{xy}^1$	$E^2$ , ГПа	$\nu_{xy}^2$
CuCl–TetraCyanoethylene	1.13	1.27	1.10	1.70	18.9	0.68	20.2	0.05
In <sub>2</sub> Bi–TetraCyanoethylene	1.15	1.16	1.07	2.44	16.4	0.72	20.2	0.05
CuCl–NaH(CH <sub>3</sub> COO) <sub>2</sub>	1.08	1.28	1.06	1.71	18.9	0.68	19.7	0.20
Ti–SnTe–25 mole% GeTe	1.06	1.15	1.06	1.12	103	0.49	103	0.03
Cd–Mg 14.01 at% Mg–NiTi	1.05	0.90	1.05	0.90	47.8	0	47.8	0.44
Co–Li <sub>2</sub> O	1.04	1.11	1.03	1.30	195	0.46	198	0.09

У ряда двухслойных пластин (около 500 из 188000) значения эффективного модуля Юнга превосходят модули Юнга наиболее жесткого слоя. Все эти пластины имеют близкие значения модуля Юнга слоев ( $E^1$  и  $E^2$ ). Как правило, разница между величинами  $E^1$  и  $E^2$  составляет не более 1 ГПа. Наибольший эффект среди пластин из двух неауксетиков достигается в случае кристаллов CuCl и tetraCyanoEthylene (Рис.2(а)). Коэффициент  $\alpha$  для этой пластины меняется в интервале  $1.04 \leq \alpha \leq 1.12$ , наибольшее различие достигается при  $\lambda = 1.29$ . У этой пластины оба слоя имеют близкие модули Юнга небольшой величины – около 20 ГПа. Такой эффект наблюдается и для двухслойных пластин с большими значениями модуля Юнга. Например, он имеет место у пластины из неауксетических кристаллов Ti и SnTe - 12 mole %

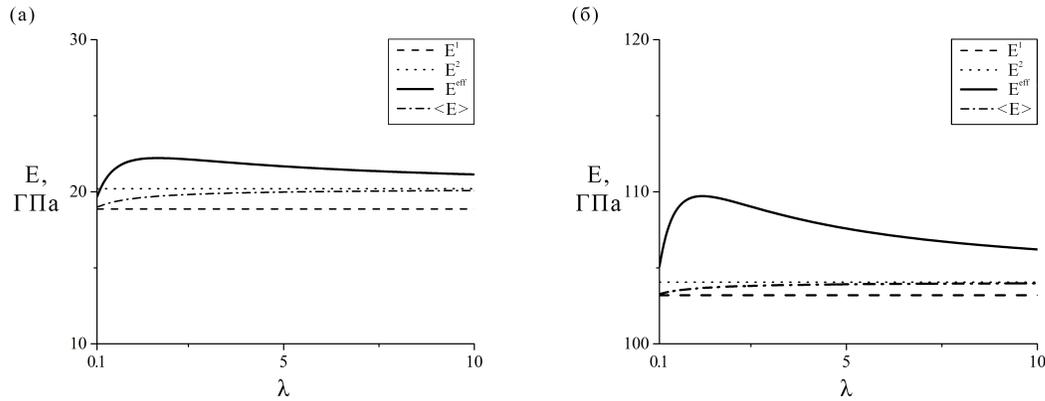


Рис. 2. Эффективный модуль Юнга по правилу смесей, эффективный модуль Юнга двух-слойной пластины CuCl и TetraCyanoethylene (а) и Ti-SnTe 12 mole % GeTe (б) при  $\varphi = 0$

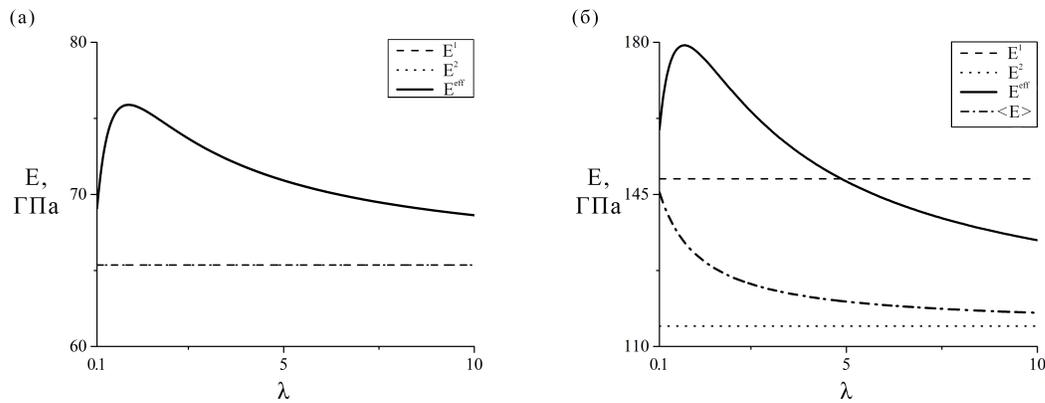


Рис. 3. Эффективный модуль Юнга двухслойных пластин Ho-Sm<sub>0.75</sub>Tm<sub>0.25</sub>S(а) и Mn<sub>5</sub>Si<sub>3</sub>-TmSe(б) при  $\varphi=0$

GeTe, у которой модули Юнга обоих слоев превосходят 100 ГПа. Эффективный модуль Юнга этой пластины при некоторых отношениях толщин превосходит модуль Юнга наиболее жесткого слоя на 5% (Рис.2(б)). Для всех пластин из Табл.1 модули Юнга слоев имеют близкие значения, однако их коэффициенты Пуассона значительно отличаются. Если значения модулей Юнга слоев близки, как в случае кристаллов Ho и Sm<sub>0.75</sub>Tm<sub>0.25</sub>S ( $E^1 = 65.4$  ГПа и  $E^2 = 65.4$  ГПа), а коэффициенты Пуассона значительно отличаются ( $\nu_{xy}^1 = 0.28$ ,  $\nu_{xy}^2 = -0.46$ ), то эффективный модуль Юнга существенно отклоняется от значения, рассчитанного по правилу смесей (Рис.3(а)). У данной пластины при  $0.1 \leq \lambda \leq 10$  коэффициент  $\alpha$  меняется в пределах  $1.05 \leq \alpha \leq 1.16$  с максимумом  $\alpha_{max} = 1.16$  при  $\lambda = 0.92$ , что соответствует  $E^{eff} = 75.9$  ГПа. Пластина, составленная из кристаллов Ti и TmSe (Рис.4), является другим примером такого поведения. Максимальное значение ее эффективного модуля Юнга  $E^{eff} = 148$  ГПа, что превышает модули Юнга исходных кристаллов

Таблица 2. Максимальные значения параметра  $\alpha_{max}$  и отношения эффективного модуля Юнга  $E^{eff}$  к модулю Юнга наиболее жесткого слоя ( $E_{max}$ ) некоторых пластин из гексагональных и кубических кристаллов с ауксетическим слоем

Пластина	$\alpha_{max}$	$\lambda$	$\left(\frac{E^{eff}}{E_{max}}\right)_{max}$	$\lambda_{max}$	$E^1$ , ГПа	$\nu_{xy}^1$	$E^2$ , ГПа	$\nu_{xy}^2$
$\text{BN}_3\text{-TmSe}$	1.42	1.21	1.30	0.88	138	0.55	115	-0.50
$\text{Ti-TmSe}$	1.36	0.87	1.29	1.06	103	0.89	115	-0.50
$\text{Ti-Sm}_{0.7}\text{Y}_{0.3}\text{S}$	1.31	1.11	1.25	0.89	103	0.89	93.0	0.49
$\text{Ho-Sm}_{0.75}\text{Tm}_{0.25}\text{S}$	1.16	0.92	1.16	0.92	65.4	0.28	65.4	-0.46

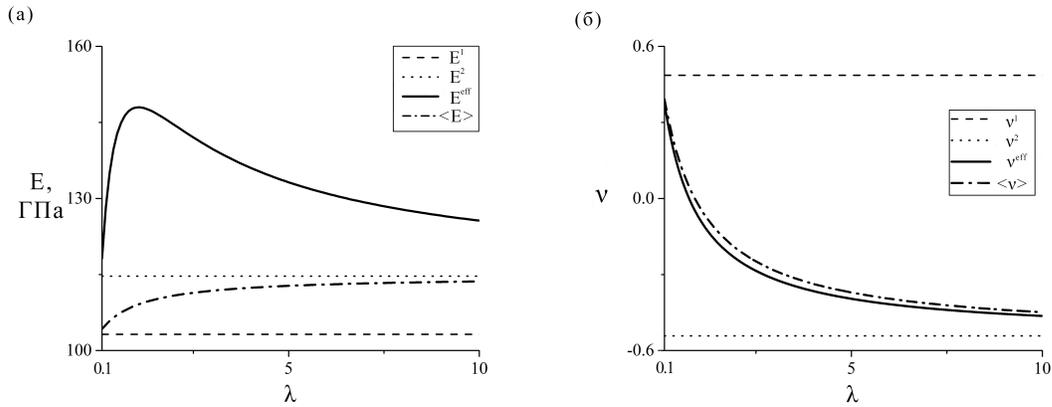


Рис. 4. Распределения эффективного модуля Юнга (а) и продольного коэффициента Пуассона (б) по параметру толщины двухслойной пластины из кристаллов Ti и TmSe при  $\varphi=0$

более чем на 30 ГПа ( $E^1 = 103$  ГПа,  $E^2 = 115$  ГПа) при  $\lambda = 1.04$ . Подобный эффект наблюдается в случаях, когда модули Юнга слоев различаются на несколько десятков ГПа (Рис.3(б)), но только при значительном различии величин  $\nu_{xy}^1$  и  $\nu_{xy}^2$  (более 0.7). Такое поведение характерно более чем для 1100 (из 74310) пластин с ауксетическим и неауксетическим слоями при  $\varphi = 0$ . Качественно поведение эффективного коэффициента Пуассона пластин с ауксетическим слоем не отличается от поведения для случая двух неауксетиков. Для ряда пластин с ауксетическими слоями возможна ситуация, когда пластина является ауксетической, с эффективным коэффициентом Пуассона меньшей величины, чем даваемый правилом смесей, а ее эффективный модуль Юнга превосходит значение модуля Юнга наиболее жесткого слоя (Рис.4).

У всех пластин величина продольного эффективного коэффициента Пуассона ограничена величинами коэффициентов Пуассона слоев. Существенное влияние на величину эффективных коэффициентов Пуассона оказывает отношение модулей Юнга  $E^2/E^1$ . Это видно на примере пластин с гексагональным кристаллом  $\text{C}_7\text{H}_{12}$ . Его модуль Юнга имеет низкую величину ( $E^1 = 0.74$  ГПа), а коэффициент Пуассона выходит за ограничения для изотропных материалов ( $\nu_{xy}^1 = 0.76$ ). На Рис.5(а) и Рис.5(б) представлены зависимости эффективных модуля Юнга и коэффициентов Пуассона пластины  $\text{C}_7\text{H}_{12}\text{-C}$ (алмаз) ( $E^2 = 1051$  ГПа,  $\nu_{xy}^2 = 0.10$ ). Значения эффективного модуля

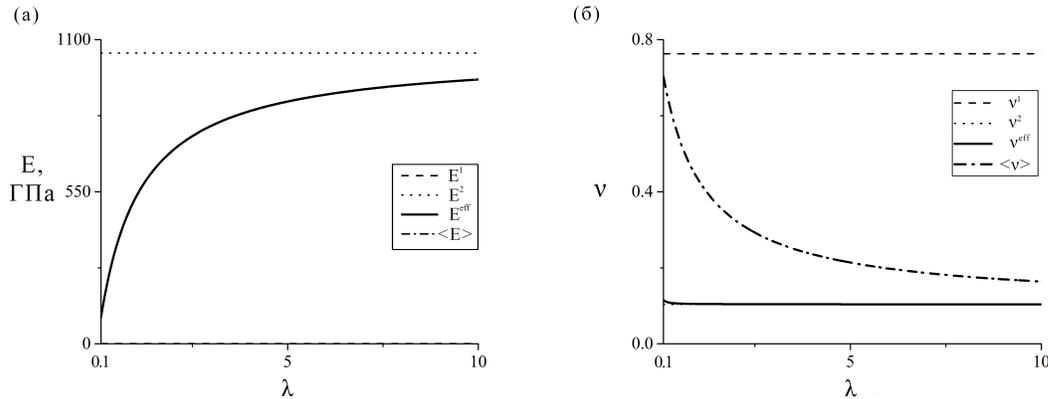


Рис. 5. Эффективный модуль Юнга (а) и коэффициенты Пуассона (б) двухслойной пластины из кристаллов  $C_7H_{12}$  и  $C$  при  $\varphi = 0$

Юнга данной пластины неотличимы от значений, даваемых правилом смесей, а эффективный коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}^{eff}$  практически не отличается от коэффициента Пуассона алмаза, но демонстрирует существенное отклонение от  $\langle \nu \rangle$ . Аналогичное поведение наблюдается, если более жестким является слой 1: эффективный модуль Юнга практически не отличается от  $\langle E \rangle$ , а эффективный коэффициент Пуассона почти неотличим от  $\nu_{xy}$  более жесткого слоя. В случае, когда пластины имеют близкие значения модуля Юнга, эффективный коэффициент Пуассона практически не отличается от значений, предсказанных по правилу смесей.

#### 4. Эффективные характеристики двухслойных пластин при различной ориентации кристаллофизических систем координат

При учете ненулевого угла  $\varphi$  количество пластин, для которых эффективные значения модуля Юнга существенно отклоняются от значений, предсказанных правилом смесей, увеличивается. При одинаковой ориентации кристаллофизических систем координат таких пластин около 400. Если двухслойная пластина составлена из неауксетических кристаллов различной ориентации, то этот эффект проявляется более чем у 3000 пластин (из 113568), а в случаях когда один из слоев является ауксетиком количество таких пластин составляет 11 425 (из 74310). Это в несколько раз превосходит количество пластин с таким поведением при  $\varphi = 0$ . Отметим, что при нулевом угле ориентации ауксетиками являются кубические кристаллы только с  $s_{12} > 0$ . У кубических кристаллов с  $s_{12} < 0$  ауксетические свойства могут проявляться при углах ориентации близких к  $\pi/4$ . Наибольшее различие между величиной эффективного модуля Юнга и модулей Юнга слоев в относительных и абсолютных величинах имеет место у пластин  $CuCl-NiCr_2O_4$  (Рис.6(а)) и  $Ag_2Al - Cu-14.5 \text{ wt\% } Al-3.15 \text{ wt\% } Ni$  (Рис.6(б)), соответственно. Первая пластина составлена из кристаллов с близкими величинами модуля Юнга ( $E^1 = 18.9 \text{ ГПа}$ ,  $E^2 = 26.0 \text{ ГПа}$ ) и большим различием между коэффициентами Пуассона ( $\nu_{xy}^1 = 0.68$ ,  $\nu_{xy}^2 = -0.77$ ). Эффективный модуль Юнга этой пластины достигает своей максимальной величины  $E^{eff} = 46.7 \text{ ГПа}$  при  $\lambda = 0.85$ , что почти на 80% превосходит модуль Юнга наиболее жесткого слоя. В случае пластины  $Ag_2Al - Cu-14.5 \text{ wt\% } Al-3.15 \text{ wt\% } Ni$  модули Юнга слоев равны  $E^1 = 84.0 \text{ ГПа}$ ,

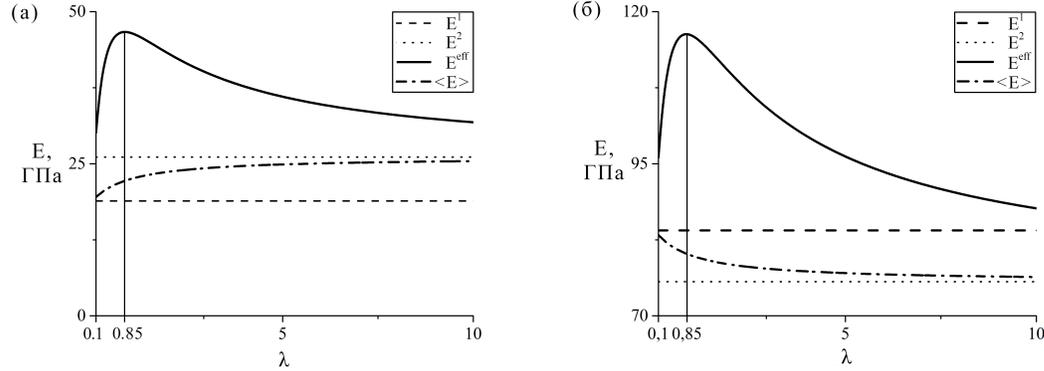


Рис. 6. Эффективный модуль Юнга пластин  $\text{CuCl-NiCr}_2\text{O}_4$  (а) и  $\text{Ag}_2\text{Al-Cu-14.5 wt\% Al-3.15 wt\% Ni}$  (б) при  $\varphi = \pi/4$

$E^2 = 75.6$  ГПа, а эффективный модуль Юнга равен  $E^{\text{eff}} = 116$  ГПа, который достигается при  $\lambda = 0.85$ , что почти на 38% превосходит модуль Юнга наиболее жесткого слоя. Экстремальные значения эффективного модуля Юнга почти всех пластин достигаются при  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi/4$ . Исключением являются двухслойные пластины, составленные из гексагональных кристаллов ( $\text{Be}$ ,  $\text{MoS}_2$ ,  $\text{Zn}$ ) с близкими к нулю коэффициентами Пуассона  $\nu_{xy}$  и кубических кристаллов  $\text{W}$ ,  $\text{Ti-71 at\% V}$ ,  $\text{Mo-26.9 at\% Re}$ ,  $\{\text{Gd}_{0.67}\text{Er}_{0.33}\}_3(\text{Sc}, \text{Ga})_2\text{Ga}_3\text{O}_{12}$  с близким к нулю параметром анизотропии  $\Delta$ , чьи эффективные характеристики практически не изменяются с  $\varphi$ .

Эффективный продольный коэффициент Пуассона при изменении отношения толщин от 0.1 до 10 принимает отрицательные значения только для пластин, у которых один из слоев является ауксетиком. Не обнаружено пластин, для которых эффективный продольный коэффициент Пуассона имел бы отрицательные значения большей величины, чем у составляющих кристаллов. С изменением угла  $\varphi$  поведение пластины может значительно изменяться за счет того, что коэффициент Пуассона одного из слоев становится отрицательным. Такое поведение имеет место у пластины из кристаллов  $\text{C}_7\text{H}_{12}$  и  $\text{TmSe}$ . При  $\varphi = 0$  кристалл  $\text{TmSe}$  является ауксетиком и эффективный продольный коэффициент Пуассона пластины отрицателен (Рис.7(а)), а при  $\varphi = \pi/4$   $\nu_{xy}^{\text{eff}} > 0$  (Рис.7(б)) для всех отношений толщин. Некоторые пластины могут иметь отрицательный эффективный продольный коэффициент Пуассона значительной величины и эффективный модуль Юнга, превышающий значение модуля Юнга наиболее жесткого слоя. Примерами таких пластин являются  $\text{C}_7\text{H}_{12} - \text{In-25 at\% Tl}$  и  $\text{Cd-Mg 14.01 at\% Mg} - \{\text{Y}_{0.74}\text{Er}_{0.26}\}\text{Al}_5\text{O}_{12}$ .

Важным частным случаем является случай двухслойной пластины из различным образом ориентированных гексагонального и кубического кристаллов одинаковой толщины. Эффективный модуль Юнга пластин, составленных из двух неауксетических слоев, при  $\lambda = 1$  может превосходить модуль Юнга наиболее жесткого слоя. Таких пластин насчитывается более 2500 и во всех случаях наибольшее различие между эффективным модулем Юнга и наибольшим модулем Юнга составляющего слоя достигается при  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi/4$ . Более чем у 7600 пластин (из 113000) коэффициент

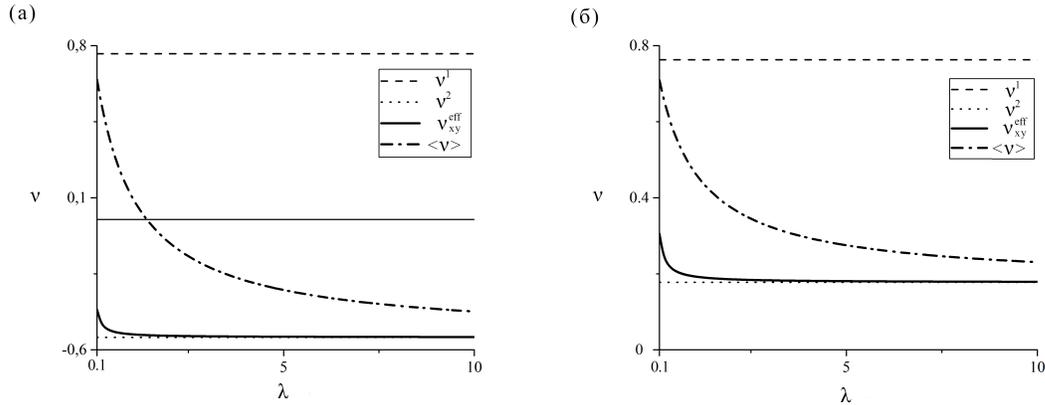


Рис. 7. Эффективный продольный коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}^{eff}$  двухслойной пластины  $C_7H_{12} - TmSe$  при  $\varphi = 0$  (а) и  $\varphi = \pi/4$ (б)

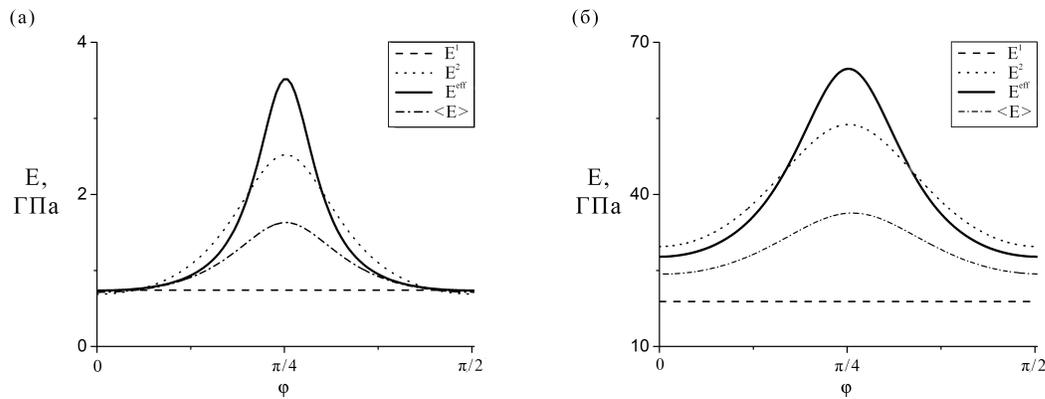


Рис. 8. Эффективный модуль Юнга  $E^{eff}$  и средний модуль Юнга по Фойгту  $\langle E \rangle$  двухслойных пластин  $C_7H_{12} - In-25 \text{ at\% Tl}$  (а) и  $CuCl - \{Y_{0.74}Er_{0.26}\}Al_5O_{12}$  (б) при  $\lambda = 1$

$\alpha > 1.01$ . Более чем на 5% значения эффективного модуля Юнга превосходят значения модуля Юнга, предсказанного по правилу смесей, у 2300 пластин. Если один из слоев содержит ауксетик, то эффективный модуль Юнга превосходит значения модуля Юнга наиболее жесткого слоя у 9257 пластин из 74310. Количество пластин, для которых  $\alpha > 1.05$ , возрастает по сравнению с предыдущим случаем и составляет более 4700 пластин. В обоих случаях коэффициент  $\alpha$  меняется в широком диапазоне: от 0.9 до 1.26 в случае двух неауксетиков, и от 0.93 до 2.16 при наличии ауксетического слоя. Так, эффективный модуль Юнга более чем в 2 раза превосходит предсказание по правилу смесей у пластины  $C_7H_{12} - In-25 \text{ at\% Tl}$  (Рис.8(а)) и более чем на 75% у пластины  $CuCl - \{Y_{0.74}Er_{0.26}\}Al_5O_{12}$  (Рис.8(б)).

Эффективный продольный коэффициент Пуассона всех пластин из неауксетических кристаллов при переменном  $\varphi$  и  $\lambda = 1$  остается положительным. Минимальные значения этого эффективного коэффициента Пуассона практически у всех пластин

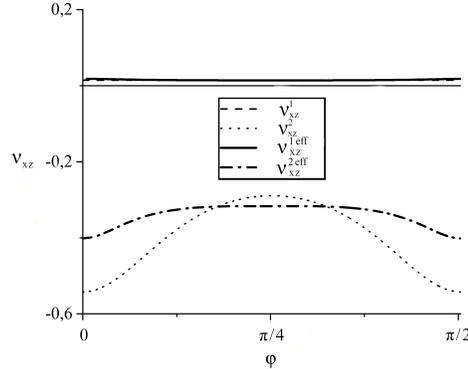


Рис. 9. Поперечные эффективные коэффициенты Пуассона пластины Be-TmSe при  $\lambda = 1$

достигаются при  $\varphi$  равном 0 или  $\pi/4$ , исключение составляют 400 пластин, содержащих кубические кристаллы с  $\Delta = 0$ . То же справедливо для пластинок, содержащих ауксетический слой. Среди таких пластин находятся те, для которых  $\nu_{xy}^{eff}$  отрицателен, однако не выявлено ни одной пластины для которой данный коэффициент Пуассона принимал бы отрицательные значения большей величины чем у исходных кристаллов.

Эффективные поперечные коэффициенты Пуассона большинства пластин положительны. Это связано с тем, что отношение, входящее в (7) и (8), всегда положительно. Данное отношение входит в оба эффективных поперечных коэффициента Пуассона и, поэтому, качественно поведение этих коэффициентов Пуассона для каждого слоя одинаковы. Эффективные поперечные коэффициенты Пуассона могут принимать отрицательные значения только для пластин с  $s_{13}^1 > 0$  или  $s_{12}^2 > 0$ . Пластина из кристаллов Be-TmSe (Рис.9) является примером пластины с таким поведением. В случае слоев одинаковой толщины ( $\lambda = 1$ ) эффективные поперечные коэффициенты Пуассона слоев значительно различаются. Такая пластина будет расширяться в поперечном направлении при растяжении.

### Заключение

Рассмотрена задача продольного растяжения двухслойных пластин из гексагональных и кубических кристаллов. Проведен анализ изменчивости эффективных характеристик пластин для всех возможных комбинаций из двух типов кристаллов перечисленных в справочнике [13]. Установлено, что значения эффективных характеристик пластин могут существенно отклоняться от значений, полученных по правилу смесей. Показано, что если модули Юнга исходных кристаллов имеют близкие значения, то эффективный модуль Юнга пластины может превосходить модуль Юнга наиболее жесткого слоя. Показано, что эффективный модуль Юнга может значительно превосходить модуль Юнга наиболее жесткого слоя как в абсолютных, так и в относительных величинах. Установлено, что на данный эффект оказывает существенное влияние разница между величинами коэффициента Пуассона кристаллов. Так, в случае если один из кристаллов является ауксетиком, при различии между модулями Юнга в несколько

десятков ГПа эффективный модуль Юнга превосходит модуль Юнга наиболее жесткого слоя при  $|\nu_{xy}^1 - \nu_{xy}^2| > 0.7$ . Не обнаружено пластин, для которых бы продольный коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}^{eff}$  превосходил величины коэффициентов Пуассона, как положительные, так и отрицательные, исходных кристаллов. Значения  $\nu_{xy}^{eff}$  некоторых пластин значительно отличаются от значений даваемых правилом смесей по Фойгту.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Carneiro V. H., Meireles J., Puga H. Auxetic materials - A review // *Mater. Sci.-Pol.* 2013. Vol. 31, no. 4. P. 561–571. URL: <https://doi.org/10.2478/s13536-013-0140-6>.
- [2] Auxetic metamaterials and structures: a review / X. Ren, R. Das, P. Tran et al. // *Smart Mater. Struct.* 2018. Vol. 27, no. 2. p. 023001. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>.
- [3] Liu B., Feng X., Zhang S.-M. The effective Young's modulus of composites beyond the Voigt estimation due to the Poisson effect // *Comp. Sci. Tech.* 2009. Vol. 69, no. 13. P. 2198–2204. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.06.004>.
- [4] Kocer C., McKenzie D. R., Bilek M. M. Elastic properties of a material composed of alternating layers of negative and positive Poisson's ratio // *Mater. Sci. Eng. A.* 2009. Vol. 505, no. 1-2. P. 111–115. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2008.11.002>.
- [5] Lim T. C. In-plane stiffness of semiauxetic laminates // *J. Eng. Mech.* 2010. T. 136, № 9. С. 1176–1180. URL: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000167](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000167).
- [6] Lim T. C. Out-of-plane modulus of semi-auxetic laminates // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2009. Vol. 28, no. 4. P. 752–756. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.02.001>.
- [7] Streck T., Jopek H. Effective mechanical properties of concentric cylindrical composites with auxetic phase // *Phys Status Solidi B.* 2012. Vol. 249, no. 7. P. 1359–1365. URL: <http://dx.doi.org/10.1002/pssb.201084218>.
- [8] Lim T. C. Auxeticity of concentric auxetic-conventional foam rods with high modulus interface adhesive // *Materials.* 2018. Vol. 11, no. 2. p. 223. URL: <https://doi.org/10.3390/ma11020223>.
- [9] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Longitudinal elastic tension of two-layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals // *Eur. J. Mech. A. Solids.* 2017. Vol. 63. P. 122–127. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.01.001>.
- [10] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Lim T.-C. Three-layered plate exhibiting auxeticity based on stretching and bending modes // *Compos. Struct.* 2018. Vol. 194. P. 643–651. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.092>.
- [11] Тонкие однородные двухслойные пластины из кубических кристаллов с различной ориентацией слоев / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д.С. Лисовенко [и др.] // *Физ. Мезомех.* 2018. Т. 21, № 2. С. 5–13.
- [12] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Tension of thin two-layered plates of hexagonal crystals // *Compos. Struct.* 2019. Vol. 209. P. 453–459. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.063>.
- [13] Second and Higher Order Elastic Constants / Ed. by D. F. Nelson. Springer, 1992. Vol. 29a of *Landolt-Börnstein - Group III Condensed Matter*. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/b44185>.
- [14] Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д.С. Лисовенко [и др.] // *Физ. Мезомех.* 2014. Т. 16, № 6. С. 13–31.
- [15] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Extreme values of Young's modulus and Poisson's ratio of hexagonal crystals // *Mech. Mater.* 2019. Vol. 134. P. 1–8.

M. A. Volkov, A. I. Demin, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko

## TWO-LAYERED PLATES OF HEXAGONAL AND CUBIC CRYSTALS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS*

**Abstract.** The problem of longitudinal tension of two-layered plate of hexagonal and cubic crystals with different orientations of crystallophysic coordinate systems is discussed. Analytical dependences of effective Young's modulus and Poisson's ratios on layer thickness ratio are obtained. Numerical analysis of plates from all possible combinations of hexagonal and cubic crystals is performed. It is established that significant deviation of effective Young's modulus values from predictions by mixture rule takes place in the case when one of the layers is auxetic. Effective Young's modulus can have greater value than values of Young's modulus of crystals at both layers. The ratio of Young's modulus of crystals has great influence on the value of effective Poisson's ratio.

**Keywords:** two-layered plates, effective properties, cubic crystals, hexagonal crystals

### REFERENCES

- [1] Carneiro V. H., Meireles J., Puga H. Auxetic materials - A review // *Mater. Sci.-Pol.* 2013. Vol. 31, no. 4. P. 561–571. URL: <https://doi.org/10.2478/s13536-013-0140-6>.
- [2] Auxetic metamaterials and structures: a review / X. Ren, R. Das, P. Tran et al. // *Smart Materials and Structures.* 2018. Vol. 27, no. 2. p. 023001. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>.
- [3] Liu B., Feng X., Zhang S.-M. The effective Young's modulus of composites beyond the Voigt estimation due to the Poisson effect // *Comp. Sci. Tech.* 2009. Vol. 69, no. 13. P. 2198–2204. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.06.004>.
- [4] Kocer C., McKenzie D. R., Bilek M. M. Elastic properties of a material composed of alternating layers of negative and positive Poisson's ratio // *Mater. Sci. Eng. A.* 2009. Vol. 505, no. 1-2. P. 111–115. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2008.11.002>.
- [5] Lim T. C. In-plane stiffness of semiauxetic laminates // *J. Eng. Mech.* 2010. Vol. 136, no. 9. P. 1176–1180. URL: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000167](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000167).
- [6] Lim T. C. Out-of-plane modulus of semi-auxetic laminates // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2009. Vol. 28, no. 4. P. 752–756. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.02.001>.
- [7] Streck T., Jopek H. Effective mechanical properties of concentric cylindrical composites with auxetic phase // *Phys. Status Solidi B.* 2012. Vol. 249, no. 7. P. 1359–1365. URL: <http://dx.doi.org/10.1002/pssb.201084218>.
- [8] Lim T. C. Auxeticity of concentric auxetic-conventional foam rods with high modulus interface adhesive // *Materials.* 2018. Vol. 11, no. 2. p. 223. URL: <https://doi.org/10.3390/ma11020223>.
- [9] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Longitudinal elastic tension of two-layered plates from isotropic auxetics-nonauxetics and cubic crystals // *European Journal of Mechanics - A/Solids.* 2017. Vol. 63. P. 122–127. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.01.001>.

---

*Volkov Mikhail Andreevich*, Ph. D. Phys. & Math., Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Demin Aleksandr Ivanovich*, Postgraduate Stud., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Gorodtsov Valentin Aleksandrovich*, Dr. Sc. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Lisovenko Dmitry Sergeevich*, Dr. Sc. Phys. & Math., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

- 
- [10] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Lim T.-C. Three-layered plate exhibiting auxeticity based on stretching and bending modes // *Compos. Struct.* 2018. Vol. 194. P. 643–651. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.092>.
- [11] Thin Homogeneous Two-Layered Plates of Cubic Crystals with Different Layer Orientation / R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko et al. // *Physical Mesomechanics*. 2019. Vol. 22, no. 4. P. 261–268.
- [12] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Tension of thin two-layered plates of hexagonal crystals // *Compos. Struct.* 2019. Vol. 209. P. 453–459. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.063>.
- [13] Second and Higher Order Elastic Constants / Ed. by D. F. Nelson. Springer, 1992. Vol. 29a of *Landolt-Börnstein - Group III Condensed Matter*. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/b44185>.
- [14] Negative Poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes / R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko et al. // *Physical Mesomechanics*. 2014. Vol. 17, no. 2. P. 97–115. URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1029959914020027>.
- [15] Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Extreme values of Young's modulus and Poisson's ratio of hexagonal crystals // *Mechanics of Materials*. 2019. Vol. 134. P. 1–8.

К. В. Кукуджанов, А. В. Ченцов

## О ЗАЛЕЧИВАНИИ ПОРИСТОСТИ В МЕТАЛЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье приведены результаты исследования по обработке образцов из цинка короткими импульсами высокоэнергетического электромагнитного поля. Целью работы являлась исследование возможности залечивания микропор и микротрещин внутри материала. Приводится описание используемого оборудования и методики экспериментов. Проведен анализ полученных экспериментальных данных. На основе исследования микроструктуры металла до и после воздействия полем подтверждается предположение о том, что в процессе воздействия высокоэнергетическим полем в металле может происходить уменьшение его пористости и как следствие значительное увеличение предельной пластической деформации до разрушения. Показано, что уменьшение пористости не является результатом рекристаллизации, которая при исследуемом воздействии практически не происходит.

**Ключевые слова:** импульсное электромагнитное воздействие, залечивание микродефектов, высокоэнергетическое поле.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.012

УДК: 539.374

### 1. Введение

Цинк и его сплавы являются биосовместимыми и биоразлагаемыми материалами, имеющими большие перспективы для использования в медицине. Возможность улучшения механических свойств цинка с использованием высокотехнологичных методов его обработки позволило бы существенно расширить эти перспективы.

О влиянии электрического тока в металлах на их механические свойства известно достаточно давно. Так, авторами работы [1] было показано, что усталостную долговечность стали можно увеличить, если приложить электрический ток во время

---

© Кукуджанов К. В., Ченцов А. В., 2020

*Кукуджанов Константин Владимирович*

e-mail: kconstantin@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Ченцов Александр Викторович*

e-mail: chentsov@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках госзадания № АААА-А17-117021310380-1 при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-08-00958.

Поступила 05.04.2020

нагружения. Исследования влияния импульсного тока высокой плотности на монокристаллические металлы показали, что подвижность дислокаций может увеличиваться за счет их взаимодействия со свободными электронами, движимыми электромагнитным полем [2, 3]. Что, по мнению авторов, приводило к скачкообразному уменьшению предела текучести металлов при одновременном нагружении и воздействии полем.

Гипотеза о том, что в металлах под действием кратковременных импульсов высокоэнергетического электромагнитного поля (ВЭМП) может происходить залечивание объемных несплошностей типа микопор и микротрещин высказывалась рядом исследователей [4–7]. Авторы исходили из того что в окрестности таких дефектов в частности в их острых кончиках происходит концентрация напряженности электромагнитного поля и, как следствие, интенсивное тепловыделение. Из решения модельных задач получалось, что при этом в вершинах макротрещин могут возникать сжимающие напряжения, а их берега могут сближаться [6, 7].

Интересные результаты были получены в работе [8], в которой исходя из термодинамических соображений, было показано, что в проводящем материале может происходить уменьшение большой оси эллиптической трещины, если приложенный ток превышает некоторую пороговую величину.

На основе связанной модели воздействия импульсным ВЭМП на материал с микродефектами в работах [9–11] было показано, что в металле может происходить уменьшение объема микродефектов и, как следствие, пористости материала, вплоть до полного залечивания некоторых микropор и микротрещин посредством сварки их берегов расплавленным металлом.

Имеющиеся эксперименты [2, 3, 12–16] подтверждали предположение, что внутри материала происходит восстановление сплошности структуры, сопровождаемое изменением объемного содержания микродефектов, в частности увеличением плотности материала до и после воздействия полем. Кроме того это выражалось для исследуемых материалов в улучшении их макроскопических механических характеристик: увеличении предельной пластической деформации до разрушения или увеличении количества циклов до разрушения при циклическом нагружении. Необходимо отметить интересные результаты, полученные в работе [16], в которой были залечены поверхностные микротрещины, образовавшиеся при прокатке в листе из титанового сплава.

Однако гипотеза о залечивании микropор и микротрещин внутри материала получила в вышеперечисленных работах лишь косвенное экспериментальное подтверждение. Между тем представляется, что данную гипотезу следует подтвердить непосредственным исследованием микроструктуры металла до и после воздействия ВЭМП.

Целью настоящей работы является экспериментальное подтверждение возможности залечивания микropор и микротрещин размерами до 1,0 мкм, образовавшихся в поликристаллическом цинке в результате интенсивного пластического деформирования, при воздействии на него ВЭМП с заданными параметрами. При этом объектом исследования является непосредственно изменения микроструктуры внутри металла, а не изменения его макроскопических характеристик, произошедшие в результате рассматриваемого воздействия.

## 2. Эксперименты

Объектом исследования был цинк марки Ц0 (Zn 99,975%), химический состав которого приведен в таблице 1. Материал имел поликристаллическую структуру. Образцы вырезались механическим способом из листа металла вдоль направления прокатки, после чего им придавалась соответствующая форма путем холодного фрезерования (рис. 1). Сам цинковый лист имел размеры 500x1000x10 мм и был изготовлен путем горячей прокатки.

Таблица 1. Химический состав Ц0 (Zn 99,975% масс.)

Zn, не менее %	Массовая доля примесей, не более %							Всего примесей
	Fe	Al	Cu	As	Pb	Sn	Cd	
99.975	0.005	0.005	0.001	0.0005	0.013	0.001	0.004	0.025

Размеры образца указаны на рис. 1. На рис. 2 показан образец, установленный в зажимы машины MTS Synergy 400, на котором также виден внешний экстензометр, закрепленный на образце. Начальная базовая длина (расстояние между контактами экстензометра в момент времени  $t = 0$ ) принималась равной  $l_0 = 40$  мм.

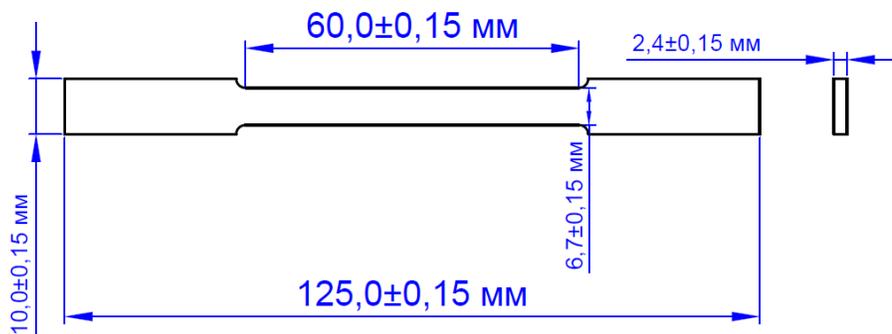


Рис. 1. Форма и размеры образцов

Собирательная рекристаллизация в чистом цинке начинается уже при комнатной температуре. Однако температура рекристаллизации цинка увеличивается с увеличением содержания примесей. Сильное влияние на нее оказывает их химический состав. Температура рекристаллизации может достигать нескольких сотен градусов Цельсия в разбавленных сплавах цинка с магнием или алюминием, когда содержание этих металлов в цинке составляет всего лишь 0,1%). Систематические данные об изменении температуры собирательной рекристаллизации от химического состава примесей цинка в литературе отсутствуют.

Цинк марки Ц0 начинает изменять поликристаллическую структуру при температуре 50°C.

Однако проводимая в настоящей работе температурная обработка не имела цель провести собирательную рекристаллизацию в цинке и получить однородную и равноосную поликристаллическую структуру металла. Как будет показано ниже, исследуемый горячекатаный цинк марки Ц0 имеет сравнительно однородную поликристаллическую структуру со средним размером зерна порядка нескольких 100 мкм правильной формы. Ее целью было произвести в цинке релаксацию внутренних остаточных напряжений, возникших в результате прокатки и последующей холодной механической обработки.

Поэтому до испытаний образцы подвергались температурной обработке по следующей программе: образцы в течение 15 мин нагревались в печи от комнатной температуры до температуры 50°C и выдерживались при ней еще в течение 3,5 мин. После этого вынимались из печи и помещались в достаточный объем воды с температурой 3°C на 10 мин.

При проведении экспериментов применялось следующее основное оборудование: - универсальная разрывная машина «MTS Synergy 400»; - оптический микроскоп «Zeiss Axio Imager.D1m»; - генератор импульсного ВЭМП «ГОРН»; - сканирующий электронный микроскоп «Quanta 650».

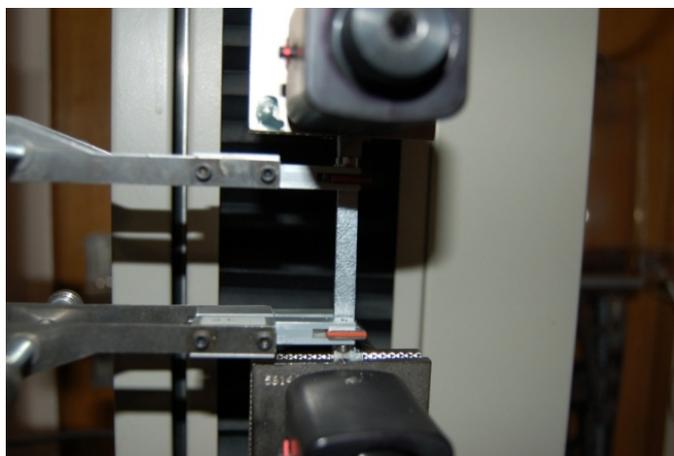


Рис. 2. Растягиваемый образец в захватах разрывной машины

Исследуемые образцы подвергались одноосному растяжению за пределом текучести вплоть до полного разрушения. При этом в цинке имело место развитое пластическое течение. Скорость движения верхнего зажима разрывной машины (нижний зажим был неподвижным) во всех экспериментах задавалась равной 1,0 мм/мин.

В экспериментах сравнивались микроструктуры образцов нижеприведенных серий. Серия состояла из 5 образцов каждого из номеров:

- 1) нерастянутых;
- 2) растянутых до разрыва;
- 3) растянутых до предразрушения;
- 4) растянутых до предразрушения, а затем подвергнутых воздействию импульсного ВЭМП.

Образцы №2 растягивались до разрыва (макроразрушения) образца. Эксперименты показывали, что разрыву образца предшествовало интенсивное пластическое течение материала с образованием шейки в месте разрыва.

Образцы №3 растягивались до состояния, предшествующего разрыву образца (рис. 3, кривая 1), после чего разгружались.

На рис. 3 по оси абсцисс отложено относительное удлинение базовой длины (инженерная деформация)  $\epsilon = l/l_0 - 1$ , где  $l_0$  – начальная базовая длина в момент времени  $t_0$ ,  $l$  – текущая базовая длина в момент времени  $t$ . По оси ординат на рис. 3 отложено инженерное напряжение  $\sigma = F/S_0$ , где  $F$  – приложенная нагрузка (Н),  $S_0$  – начальная площадь поперечного сечения образца.

Данное близкое к макроразрушению состояние определялось как такое НДС, при котором напряжение достигало величины  $\sigma^* = 0,97\sigma_{\max}$ , где  $\sigma_{\max}$  – предел прочности при растяжении (определяемый как максимальное напряжение в экспериментах с образцами серии №2, доведенных до макроразрушения). После чего образец №3 разгружался.

Эксперименты показали, что при этом значении напряжения в образцах отчетливо просматривалось образование шейки. При дальнейшем нагружении происходил разрыв образца. А именно, если образцы №3 повторно растягивались, вплоть до разрушения, то величина деформации до макроразрушения не превышала 2% (рис. 3., кривая 2). При этом достигаемые напряжения не превышали 90%  $\sigma_{\max}$ . Поэтому для удобства принималось, что вышеуказанное НДС, до которого растягивались образцы №3, непосредственно предшествует разрыву образца.

Данное напряженно-деформированное состояние образца будем далее называть предразрушенным состоянием.

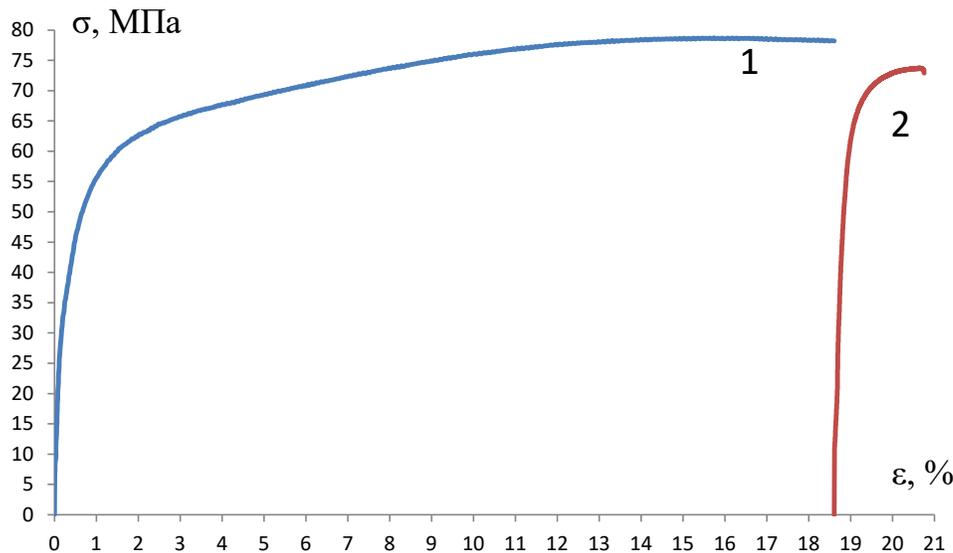


Рис. 3. Диаграммы растяжения образцов серии №3

Образцы №4 растягивались до напряжения  $\sigma^* = 0,97\sigma_{\max}$ , разгружались, а затем подвергались воздействию исследуемого ВЭМП. Как будет показано ниже, цинк марки Ц0 при разрушении в тестах на растяжение ведет себя квази-вязко, в нем при развитой пластичности происходил рост существующих микропор и микротрещин, а также зарождение новых подобных дефектов и их последующий рост. Это сопровождается образованием шейки в месте последующего разрыва (макроразрушения) образца (рис. 2).

Залечивание поврежденности именно в области шейки (области с максимальной поврежденностью, в которой идет формирование поверхности последующего макроразрушения) после обработки образца ВЭМП позволяет увеличить предельную пластическую деформацию до разрушения. Поэтому основной интерес для исследования представляли микродефекты и поврежденность (пористость) внутри материала, которые наблюдались вблизи шейки в образцах №3 и №4 и вблизи поверхности разрушения в образцах №2.

Шлифы изготавливались в плоскости, показанной на рис. 4 образца вдоль продольной оси симметрии образца в области шейки). По этим шлифам исследовалась микроструктура металла.

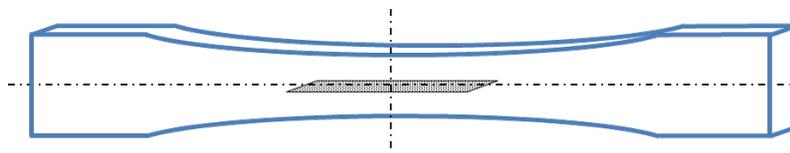


Рис. 4. Образец и плоскость шлифов (серым цветом показаны место и плоскость, в которой изготавливались шлифы)

Изготовленные шлифы изучались с помощью сканирующего электронного и оптического микроскопов в области шейки при различных увеличениях. Исследование шлифов с помощью двух разных микроскопов (рис. 5) показало, что для исследования микродефектов размерами до 0,2 мкм в цинке достаточно использовать оптический микроскопом с увеличением  $\times 2000$ . Дефекты на соответствующих микрофотографиях отображаются черным цветом. Линейные размеры микропор и микротрещин, наблюдаемых на этих фотографиях, находятся в диапазоне 0,2-2 мкм (за исключением макродефекта с размером несколько 100 мкм слева на рис. 5).

В работе изучалось влияние ВЭМП на изменение микроструктуры материала образцов.

Исследуемое ВЭМП представляло собой серию периодически приложенных к образцу близких к прямоугольным импульсов электрического тока. Генератор импульсного ВЭМП «ГОРН» позволял генерировать поле следующего вида: напряженность исследуемого ВЭМП подбиралась такой, чтобы оно индуцировало в металле ток с максимальной плотностью  $j \approx 4,0 \cdot 10^8$  А/м<sup>2</sup> с формой единичного импульса, приведенной на рис. 6, и продолжительностью единичного импульса примерно 20 мкс. Период составлял 1000 мкс. Продолжительность приложенной серии импульсов - 3,0 с.

### 3. Результаты экспериментов

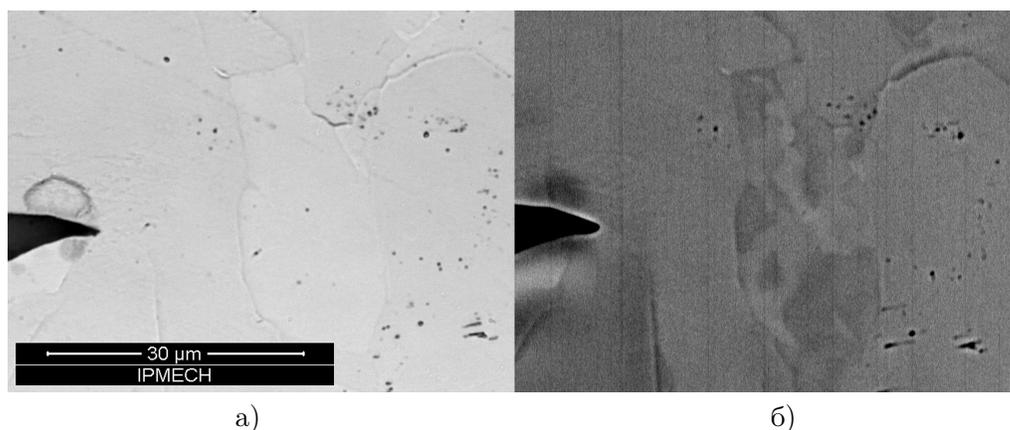


Рис. 5. Микропоры и микротрещины в области образования шейки, наблюдаемые в образце С, (а) в оптический микроскоп, (б) в сканирующий электронный микроскоп

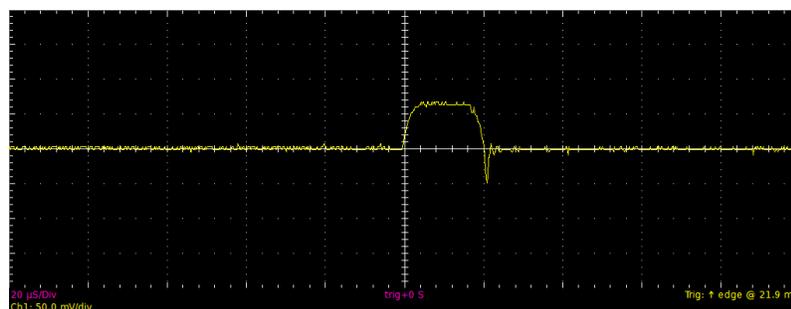


Рис. 6. Форма, величина и продолжительность единичного импульса ВЭМП

В результате исследования шлифов установлено, что в нерастянутом образце №1 наблюдается небольшое количество микропор и микротрещин с размерами в пределах от 0,2 мкм до 100 мкм. Типичная микроструктура недеформированного образца №1 приведена на рис. 7. Фотография выполнена с помощью оптического микроскопа при увеличении  $\times 400$ . Микродефекты отображаются темным цветом (наблюдаются на рис. 7 в виде темных областей или пятнышек на светлом фоне).

Исследование поверхностей разрушения образцов №2 показало, что цинк данной марки при растяжении разрушается по смешанному или квазивязкому типу разрушения. Поверхность разрушения металла показывает черты, характерные для вязкого разрушения, включая в себя чешуйчатые поверхности раздела с множественными кавернами (ямками) размерами от 0,2 до 1,0 мкм (рис. 8). В тоже время на поверхности разрушения наблюдается некоторое количество гладких поверхностей раздела расщепленных зерен, что характерно для хрупко-разрушающихся материалов. Данный механизм соответствует достаточно большой наблюдаемой величине суммарной предельной пластической деформации до разрушения равной 19,56% (рис. 3).

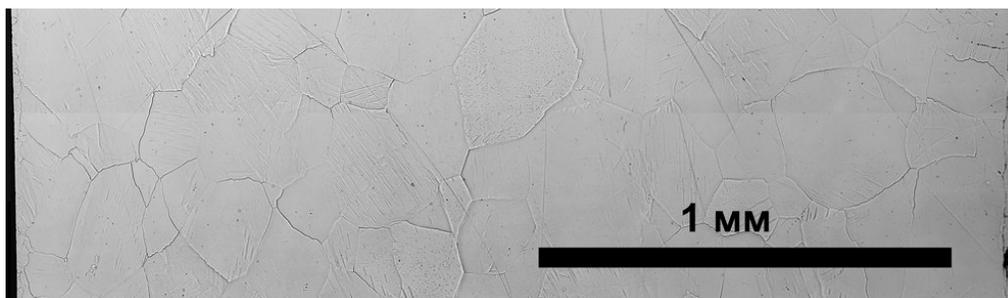


Рис. 7. Микроструктура образца №1. По горизонтали толщина образца составляет 2,4 мм, справа и слева видны вертикальные поверхности образца

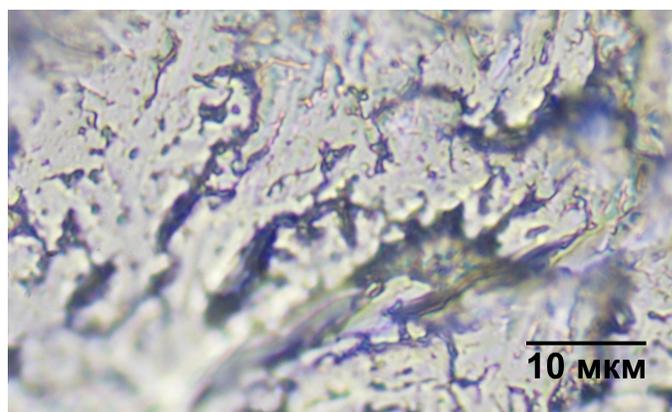


Рис. 8. Микроструктура поверхности разрыва (макроразрушения) образца №2. При увеличении  $\times 2000$

Помимо поверхности разрыва (рис. 7) микродефекты наблюдаются также и на шлифах. Например, в состоянии предшествующем разрыву в области шейки образца №3 наблюдались дефекты различных размеров от 0,2 мкм до нескольких 100 мкм (рис. 5).

Пористость цинка рассчитывалась по суммарной площади микродефектов с определенными размерами, видимой на шлифах.

Фотография микроструктуры образца №2 в области образования шейки, аналогичная фотографии на рис. 7, представлена на рис. 9. На ней хорошо просматривается сечение поверхности макроразрушения плоскостью шлифа, имеющее сильно изломанный характер.

Вязкое макроразрушение происходит при достижении пористостью в точках образца определенного критического значения (ориентировочно для цинка, как показывают проведенные эксперименты, это значение пористости не превышает 20%).

На рис. 10 представлены диаграммы растяжения образца №4 до и после воздействия исследуемым ВЭМП. Обозначения те же, что и на рис. 3. Образцы №4 сначала растягивались до предразрушенного состояния, когда напряжения  $\sigma^* = 0,97\sigma_{\max}$ . При этом

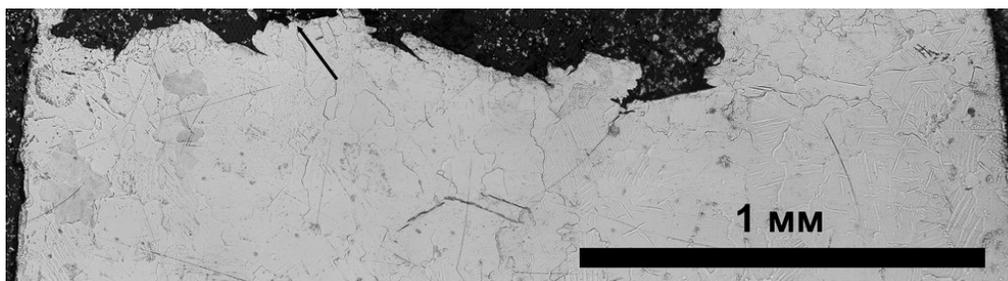


Рис. 9. Микроструктура образца №2 в области поверхности макроразрушения и образования шейки. По горизонтали толщина образца составляет 2.4мм, справа и слева видны вертикальные поверхности образца

средняя деформация достигала значения 17,1% (рис. 10, кривая 1). Затем подвергались воздействию исследуемого ВЭМП. После обработки полем образцы приобретали способность дополнительно деформироваться еще на 11,6% (рис. 10, кривая 2). В результате величина суммарной предельной пластической деформации до разрушения увеличивалась до 27,7%.

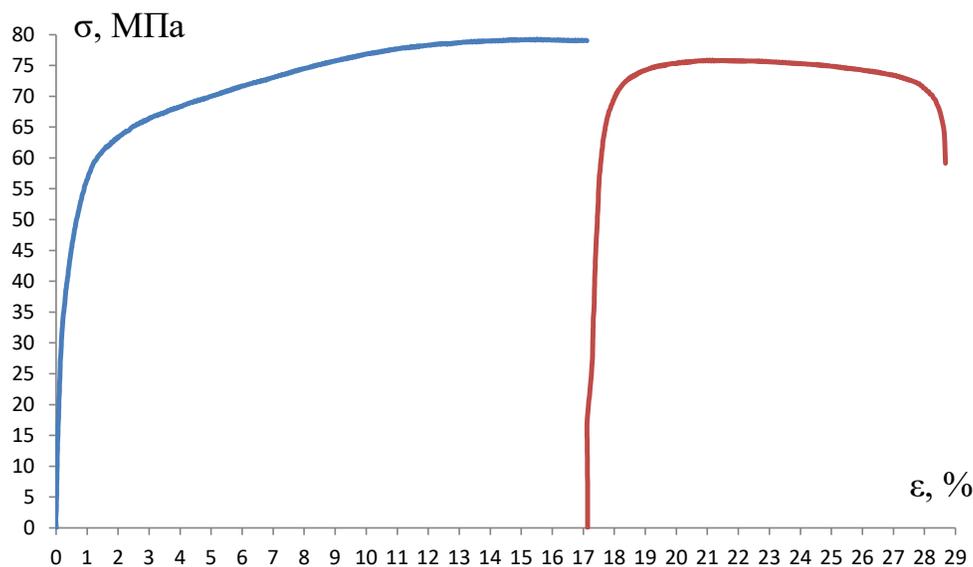


Рис. 10. Диаграммы растяжения образцов серии №4 (кривая 1 - до воздействия ВЭМП, кривая 2 - после воздействия ВЭМП)

Таким образом, в результате воздействия исследуемым ВЭМП суммарная предельная пластическая деформация до разрушения цинка марки Ц0 увеличивалась на 41,62% (по сравнению с образцами №2). Это свидетельствует о том, что количество микропор и микротрещин в образцах №4 значительно уменьшается после воздействия

импульсным ВЭМП вследствие чего материал может дальше растягиваться не разрушаясь. Такого увеличения суммарной предельной пластической деформации невозможно достичь при отжиге.

Фотография микроструктуры образца №4 в области образования шейки после воздействия исследуемым ВЭМП, аналогичная фотографиям на рис. 7 и рис. 9, представлена на рис. 11.

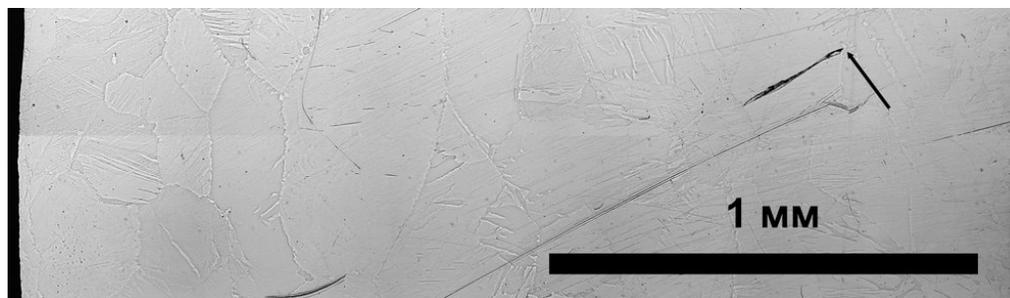


Рис. 11. Микроструктура образца №4 в области образования шейки. По горизонтали толщина образца составляет 2.4мм, справа и слева видны вертикальные поверхности образца

Сопоставление рис. 7, рис. 9 и рис. 11 показывает, что количества микродефектов в образцах №1, №2 и №4 существенно отличаются друг от друга. Максимальное количество микродефектов и соответственно пористость (количество темного цвета) наблюдается в образце №2 (рис. 9). Напротив, в недеформированном образце №1 микродефектов очень мало (рис. 7). После воздействия импульсным ВЭМП пористость в значительной степени залечивается. А именно, количество и суммарная площадь микродефектов на шлифах в образце №4 (рис. 11) сильно уменьшается по сравнению с их количеством и площадью на шлифах в образце №2 на рис. 9.

На рис. 12,а представлена микрофотография области в образце №2, указанной стрелкой на рис. 9 при увеличении  $\times 2000$ . А на рис. 12,б представлена микрофотография области в образце №4, указанной стрелкой на рис. 11. Количество дефектов и соответственно локальная пористость в образце на рис. 12,а более чем на порядок превосходит их количество и локальную пористость на рис. 12,б. Пористость рассчитывалась для микродефектов размерами 0,2-1,0 мкм. Пористость в области формирующейся поверхности разрушения локально достигает значений 0,20 (рис. 12,а).

Сопоставление микроструктуры шлифов исследуемых образцов при различных увеличениях (рис. 7-12) доказывает, что при приложении исследуемого ВЭМП к пластически деформированным образцам №4 в области образования в них шейки наблюдается значительное уменьшения пористости.

Во введении были упомянуты результаты проведенного численного моделирования [9–11], в соответствии с которыми в цинке при воздействии исследуемым импульсным ВЭМП может иметь место уменьшение пористости материала. Это уменьшение пористости обусловлено изменением формы и объема микропор и микротрещин в материале вплоть до полного исчезновения некоторых дефектов. Процесс уменьшения

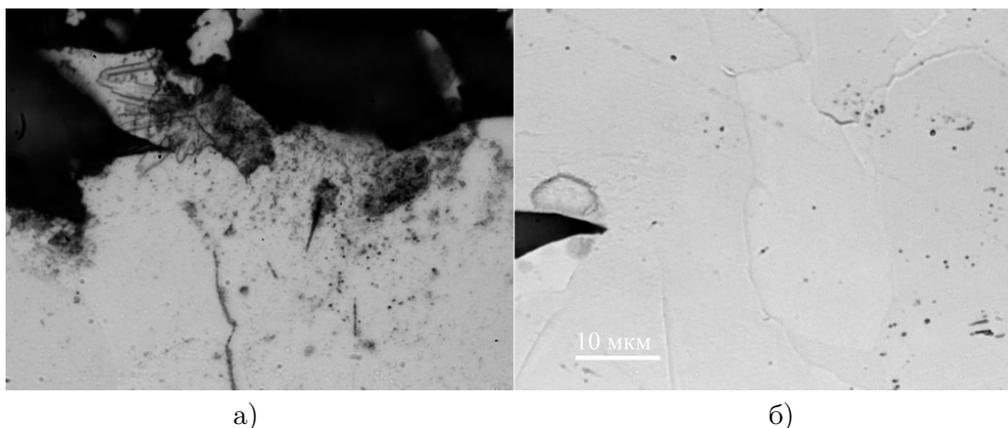


Рис. 12. Поры в шейке: (а) без ВЭМП в образце №2; (б) после воздействия ВЭМП в образце №4

пористости цинка происходит за счет концентрации ВЭМП на дефектах, интенсивного выделения джоулева тепла, сопровождаемых фазовыми превращениями (плавлением, испарением) и возникновением высоких сжимающих напряжений в окрестности микродефектов. Полное исчезновение может протекать путем сварки берегов микротрещин расплавленным металлом. Полученные экспериментальные данные подтверждают реальность такого механизма.

Отметим также некоторые важные в контексте настоящего исследования аспекты изменения поликристаллической структуры цинка марки Ц0 в процессе пластического деформирования и воздействия исследуемым ВЭМП.

Типичная поликристаллическая структура недеформированного образца №1 приведена на рис. 13. В образцах №1 зерна имеют размеры от 50-500 мкм. Внутри зерен хорошо просматриваются двойники.

Типичная поликристаллическая структура сильно деформированного образца №2 в области шейки приведена на рис. 14. В образцах №2 количество двойников в зернах значительно увеличивается, при этом размер зерен незначительно уменьшается.

Поликристаллическая структура образца №4 в области шейки после воздействия исследуемым ВЭМП приведена на рис. 15. После приложения ВЭМП размер зерен практически в металле практически не изменяется по сравнению с образцами №2, однако наблюдается незначительное изменение количества двойников в зернах по сравнению с образцами №2.

Аналогичные изменения поликристаллической структуры наблюдаются также на рис. 7, рис. 9 и рис. 11.

Исследования изменений поликристаллических структур образцов позволяет заключить, что при пластическом деформировании цинка этой марки вплоть до разрыва динамическая рекристаллизация проходит медленно. Однако при этом значительно увеличивается количество двойников в зернах. После воздействия ВЭМП в цинке происходит незначительное изменение количества двойников в зернах, в то время как размер зерен практически не изменяется.

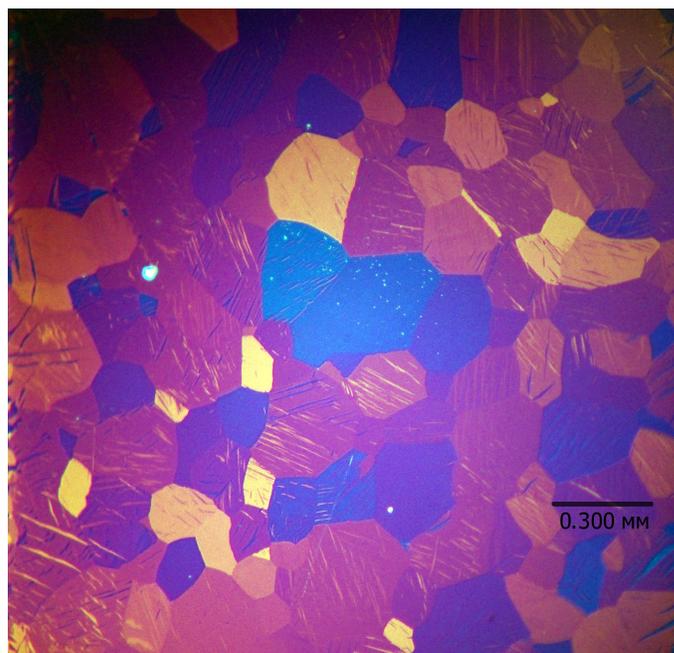


Рис. 13. Зерна и двойники в образце №1

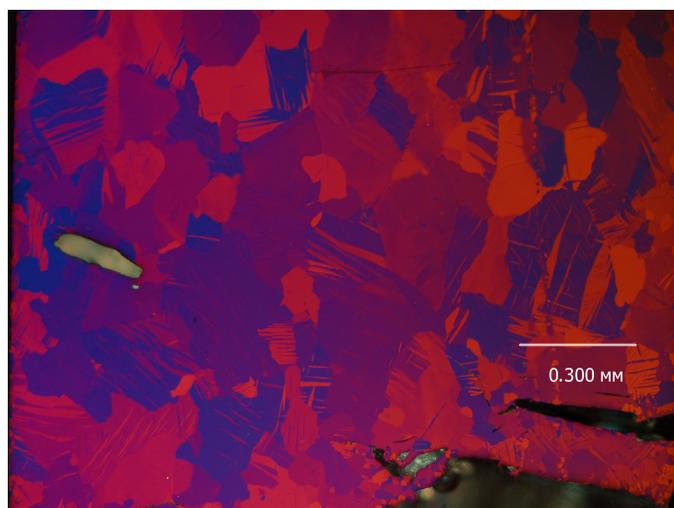


Рис. 14. Зерна и двойники в образце №1

Из сравнения рис. 7, рис. 9 и рис. 11 также видно, что исследуемое воздействие ВЭМП практически не изменяет средний размер зерна в цинке, но несколько изменяет количество двойников в зернах.



Рис. 15. Зерна и двойники в образе №4 в области шейки после воздействия ВЭМП

Таким образом, наблюдаемое залечивание пористости в цинке при воздействии ВЭМП происходит по механизму, описанному в работах [9–11], а не за счет рекристаллизации при исследуемом воздействии.

#### 4. Вывод

В результате приложения исследуемого короткоимпульсного ВЭМП к образцам из поликристаллического цинка внутри них наблюдалось уменьшение пористости вследствие залечивания микропор и микротрещин размерами 0,2–1,0 мкм, которые возникли в процессе пластической деформации при растяжении до предразрушенного состояния.

В результате воздействия исследуемым ВЭМП суммарная предельная пластическая деформация до разрушения цинка марки Ц0 увеличивалась на 41,62%. Такого увеличения предельной пластической деформации невозможно достичь при отжиге.

При пластическом деформировании цинка этой марки вплоть до разрыва динамическая рекристаллизация проходит медленно. Однако значительно увеличивается количество двойников в зернах.

В результате воздействия ВЭМП в цинке происходит незначительное уменьшение количества двойников в зернах, в то время как размер зерен практически не изменяется. Это исключает возможность залечивания микродефектов за счет рекристаллизации при исследуемом воздействии ВЭМП.

Полученные экспериментальные данные согласуются с результатами численного моделирования, проведенного авторами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Влияние электрического тока на малоцикловую усталость стали / Г. В. Карпенко, О. А. Кузин, В. И. Ткачев [и др.] // Докл. АН СССР: сер. Физика. 1976. № 21. С. 159–160.
- [2] Физические основы и технологии обработки современных материалов (теория, технология, структура и свойства) / О. А. Троицкий, Ю. В. Баранов, Ю. С. Аврамов [и др.]. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. Т. 1. 590 с.

- [3] Effect of electric current pulses on fatigue characteristics of polycrystalline copper / H. Conrad, J. White, W. D. Cao et al. 1991. Vol. 145. P. 1–12.
- [4] Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А. О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 848–851.
- [5] Беклемишев Н. Н., Корягин Н. И., Шапиро Г. С. Влияние локально-неоднородного электромагнитного поля на пластичность и прочность проводящих материалов // Известия АН СССР. Металлы. 1984. № 4. С. 184–187.
- [6] Клошников В. Д., Овчинников И. В. Плоская задача о воздействии мгновенного точечного источника тепла // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. Т. 250, № 4. С. 118–122.
- [7] Кукуджанов В. Н., Коломиец-Романенко А. В. Модель термоэлектропластичности изменения механических свойств металлов на основе реорганизации структуры дефектов под воздействием импульсного электрического тока // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 6–21.
- [8] Qin R. S., Su S. X. Thermodynamics of crack healing under electropulsing // J. Mater. Res. 2002. Vol. 17, no. 8. P. 2048–2052.
- [9] Кукуджанов К. В. Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 4. С. 138–158.
- [10] Кукуджанов К. В., Левитин А. Л. Процессы трансформации и взаимодействия микротрещин в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016. № 2. С. 89–110.
- [11] Кукуджанов К. В. Моделирование залечивания поврежденности металла высокоэнергетическим импульсным электромагнитным полем // Письма о материалах. 2018. Т. 8, № 1. С. 27–32.
- [12] Song H., jin Wang Z., jun Gao T. Effect of high density electropulsing treatment on formability of TC4 titanium alloy sheet // Trans. Nonferrous Soc. China. 2007. Vol. 17, no. 1. P. 87–92.
- [13] Song H., Wang Z.-J. Microcrack healing and local recrystallization in pre-deformed sheet by high density electropulsing // Materials Science and Engineering: A. 2008. Vol. 490, no. 1. P. 1–6.
- [14] Acoustic evaluation of the endurance of steel specimens and recovery of their serviceability / L. B. Zuev, O. V. Sosnin, D. Z. Chirakadze et al. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1998. Vol. 39, no. 4. P. 639–641.
- [15] The healing of quenched crack in 1045 steel under electropulsing / Z. Yizhou, Z. You, H. Guanhu et al. // Journal of Materials Research. 2001. Vol. 16, no. 1. P. 17–19.
- [16] Self-healing of damage inside metals triggered by electropulsing stimuli / H. Song, Z. jin Wang, X. dong He et al. // Scientific Reports. 2017. Vol. 7, no. 1. p. 7097.

K. V. Kukudzhanov, A. V. Chentsov

## ABOUT HEALING OF POROSITY IN METAL UNDER HIGH ENERGY ELECTROMAGNETIC FIELD

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The article presents the results of a study of treatment short pulses of a high-energy electromagnetic field on samples from zinc. The aim of the work was to study the possibility of healing micropores and microcracks inside the material. The description of the used equipment and experimental methods is given. The obtained experimental data are analyzed. Based on the study of the microstructure of the metal before and after exposure to the field, The assumption is confirmed that under the considered treatment in zinc, there may be a decrease in the damage (porosity) of the material and, as a result, a significant increase in the limit plastic strain before fracture. It is shown that the decrease in porosity is not the result of recrystallization, which practically does not occur under the studied influence.

**Keywords:** pulse EM treatment, microdefects healing, high-energy electromagnetic field.

### REFERENCES

- [1] Influence of an electric current upon the low-cycle fatigue of steel / G. V. Karpenko, O. A. Kuzin, V. I. Tkachev et al. // *Sov. Phys. Dokl.* 1976. no. 21. P. 159–160.
- [2] *Fizicheskie osnovy i tekhnologii obrabotki sovremennykh materialov (teoriya, tekhnologiya, struktura i svoystva)* / O. A. Troitskiy, Y. V. Baranov, Y. S. Avramov et al. Moskva–Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2004. 590 p.
- [3] Effect of electric current pulses on fatigue characteristics of polycrystalline copper / H. Conrad, J. White, W. D. Cao et al. // *Materials Science and Engineering: A.* 1991. Vol. 145, no. 1. P. 1–12.
- [4] Finkel V. M., Golovin Y. I., Sletkov A. A. Razrushenie vershiny treshchiny silovym elektromagnitnym polem // *Doklady AN USSR.* 1977. Vol. 237, no. 2. P. 325–327.
- [5] Beklemishev N. N., Koryagin N. I., Shapiro G. S. Vliyaniye lokal'no-neodnorodnogo elektromagnitnogo polya na plastichnost' i prochnost' provodyashchikh materialov // *Izvestiya AN USSR, Metally.* 1984. no. 4. P. 184–187.
- [6] Klyushnikov V. D., Ovchinnikov I. V. Plane Problem of Effect of an Instantaneous Point Heat Source // *Mech. Solids.* 1988. Vol. 250, no. 4. P. 118–122.
- [7] Kukudzhanov V. N., Kolomiets-Romanenko A. V. A Model of Thermoelctroplasticity of Variations in the Mechanical Properties of Metals Based on Defect Structure Reorganization under the Action of Pulse Electric Current // *Mechanics of Solids.* 2011. no. 6. P. 6–21.
- [8] Qin R. S., Su S. X. Thermodynamics of crack healing under electropulsing // *J. Mater. Res.* 2002. Vol. 17, no. 8. P. 2048–2052.
- [9] Kukudzhanov K. V. Modelirovaniye vozdeystviya vysokoenergeticheskogo impul'snogo elektromagnitnogo polya na mikrotreshchiny v polikristallicheskom metalle // *Vestnik PNIPU. Mekhanika.* 2015. no. 4. P. 138–158.
- [10] Kukudzhanov K. V., Levitin A. L. Protsessy transformatsii i vzaimodeystviya mikrotreshchin v metalle pod vozdeystviem vysokoenergeticheskogo impul'snogo elektromagnitnogo polya // *Vestnik PNIPU. Mekhanika.* 2016. no. 2. P. 89–110.

---

*Kukudzhanov Konstantin Vladimirovich*, Cand. Sci. Phys. & Math., Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia.

*Chentsov Alexander Viktorovich*, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia, Россия.

- 
- [11] Kukudzhанov K. V. Modelirovanie zalechivaniya povrezhdennosti metalla vysokoenergeticheskim impul'snym elektromagnitnym polem // Letters on Materials. 2018. Vol. 8, no. 1. P. 27–32.
- [12] Song H., jin Wang Z., jun Gao T. Effect of high density electropulsing treatment on formability of TC4 titanium alloy sheet // Trans. Nonferrous Soc. China. 2007. Vol. 17, no. 1. P. 87–92.
- [13] Song H., Wang Z.-J. Microcrack healing and local recrystallization in pre-deformed sheet by high density electropulsing // Materials Science and Engineering: A. 2008. Vol. 490, no. 1. P. 1–6.
- [14] Acoustic evaluation of the endurance of steel specimens and recovery of their serviceability / L. B. Zuev, O. V. Sosnin, D. Z. Chirakadze et al. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1998. Vol. 39, no. 4. P. 639–641.
- [15] The healing of quenched crack in 1045 steel under electropulsing / Z. Yizhou, Z. You, H. Guanhu et al. // Journal of Materials Research. 2001. Vol. 16, no. 1. P. 17–19.
- [16] Self-healing of damage inside metals triggered by electropulsing stimuli / H. Song, Z. jin Wang, X. dong He et al. // Scientific Reports. 2017. Vol. 7, no. 1. p. 7097.

Б. Г. Миронов<sup>1</sup>, Ю. Б. Миронов<sup>2</sup>

## КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ ИЗ АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

<sup>1</sup>Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

**Аннотация.** В работе исследовано кручение стержней из анизотропно упрочняющегося жесткопластического материала. Получены интегралы, определяющие напряженное и деформированное состояния стержня при линеаризованном условии пластичности. Построены линии разрыва напряжений.

**Ключевые слова:** кручение, напряжение, деформация, пластичность, упрочнение, анизотропия, жесткопластический стержень, условие текучести, уравнения равновесия, линеаризованное соотношение.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.013

УДК: 539.735

**Введение.** Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней довольно часто встречается в инженерной практике, особенно в машиностроении. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала изложена в работах [1–3]. В работах [4–6] исследовано кручение неоднородных и составных стержней из идеального жесткопластического материала. Переход к случаю кручения стержней из упрочняющегося материала приводит к определенным трудностям: задача перестает быть статически определенной, необходимо совместное рассмотрение полей напряжений и деформаций. Возникают трудности при точной постановке задачи. Отдельные случаи в линеаризованной постановке рассмотрены в работе [7].

---

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б., 2020

*Миронов Борис Гурьевич*

**e-mail:** mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

*Миронов Юрий Борисович*

**e-mail:** mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, декан, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 01.07.2020

**Основные результаты.** Соотношения теории кручения стержней из анизотропно упрочняющегося жесткопластического материала могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y); \end{aligned} \quad (1)$$

уравнение равновесия —

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

условие текучести —

$$(\tau_{xz} - ce_{xz})^2 + (\tau_{yz} - ce_{yz})^2 = k, \quad (k = \text{const}); \quad (3)$$

соотношения ассоциированного закона течения —

$$\frac{de_{xz}}{\tau_{xz} - ce_{xz}} = \frac{de_{yz}}{\tau_{yz} - ce_{yz}}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad (4)$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты напряжения;  $e_{ij}$  — компоненты деформации;  $k$  — предел текучести.

Будем предполагать, что упрочнение линейное ( $c = \text{const}$ ).

Условие текучести (3) в плоскости  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  представляет окружность радиуса  $k$  (рис. 1), центр которой находится в точке с координатами  $\gamma_1 = ce_{xz}, \gamma_2 = ce_{yz}$ .

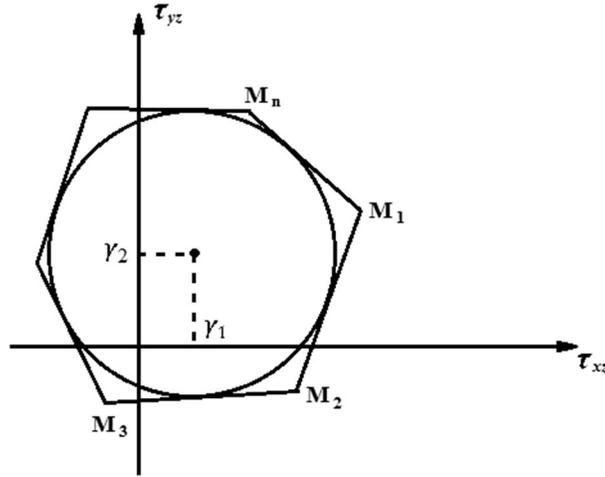


Рис. 1.

Предположим, что окружность условия текучести (3) заменена замкнутой ломаной  $M_1M_2M_3\dots M_nM_1$  (рис. 1):

$$A_i(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_i(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k, \quad (5)$$

где  $A_i^2 + B_i^2 = 1$ ;  $A_i, B_i = \text{const}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ . Условие (5) представляет на некотором отрезке линеаризованное условие текучести (3). Рассматривая условие (5) в качестве пластического потенциала, получим вместо (4) соотношение

$$\frac{de_{xz}}{A_i} = \frac{de_{yz}}{B_i}. \quad (6)$$

Интегрируя соотношение (6) и часть соотношений (4) и учитывая, что в начальный момент закручивания компоненты деформации  $e_{ij}$  равны 0, получим

$$\frac{e_{xz}}{A_i} = \frac{e_{yz}}{B_i}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует

$$B_i e_{xz} - A_i e_{yz} = 0. \quad (8)$$

Предположим, что компоненты перемещения  $u, v, w$  имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y), \quad (9)$$

где  $\theta$  — крутка,  $w$  — депланация.

Соотношения связи между компонентами деформации и компоненты перемещения с учетом (8) имеют вид

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta y \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta x \right). \quad (10)$$

Из (10) получим

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta. \quad (11)$$

Согласно (8) из (5) получим

$$A_i \left( \tau_{xz} - \frac{A_i}{B_i} c e_{yz} \right) + B_i (\tau_{yz} - c e_{yz}) = k. \quad (12)$$

Тогда из соотношений (12), (8) имеем

$$e_{yz} = \frac{B_i}{c} (-k + A_i \tau_{xz} + B_i \tau_{yz}), \quad (13)$$

$$e_{yz} = \frac{A_i}{c} (-k + A_i \tau_{xz} + B_i \tau_{yz}). \quad (14)$$

Подставив выражения (13), (14) для компонент деформаций в (11), получим

$$A_i^2 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + A_i B_i \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) - B_i^2 \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = c\theta. \quad (15)$$

Уравнению равновесия (2) удовлетворим, полагая

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (16)$$

Подставляя выражения (16) в соотношение (15), получим уравнение

$$A_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2A_i B_i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + B_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = c\theta. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) будем искать в виде полинома

$$U = a_i x^2 + b_i y^2 + c_i xy + d_i x + g_i y, \quad (18)$$

где  $a_i, b_i, c_i, d_i, g_i = \text{const}$ . Согласно (18) из (17) следует

$$2b_i A_i^2 + 2a_i B_i^2 - 2A_i B_i c_i = c\theta. \quad (19)$$

Согласно (18) из (16) следует, что для компонент напряжения справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = 2b_i y + c_i x + g_i, \quad \tau_{yz} = -2a_i x - c_i y - d_i. \quad (20)$$

С учетом (20) из (13), (14) имеем

$$e_{yz} = \frac{B_i}{c} (-k + (2b_i A_i - c_i B_i)y + (c_i A_i - 2a_i B_i)x + g_i A_i - d_i B_i), \quad (21)$$

$$e_{xz} = \frac{A_i}{c} (-k + (2b_i A_i - c_i B_i)y + (c_i A_i - 2a_i B_i)x + g_i A_i - d_i B_i). \quad (22)$$

Рассмотрим кручение стержня прямоугольного сечения  $m_1 m_2 m_3 m_4$  со сторонами  $2l$  и  $2n$  (рис. 2, слева). На контуре сечения вектор касательного напряжения  $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$  параллелен контуру.

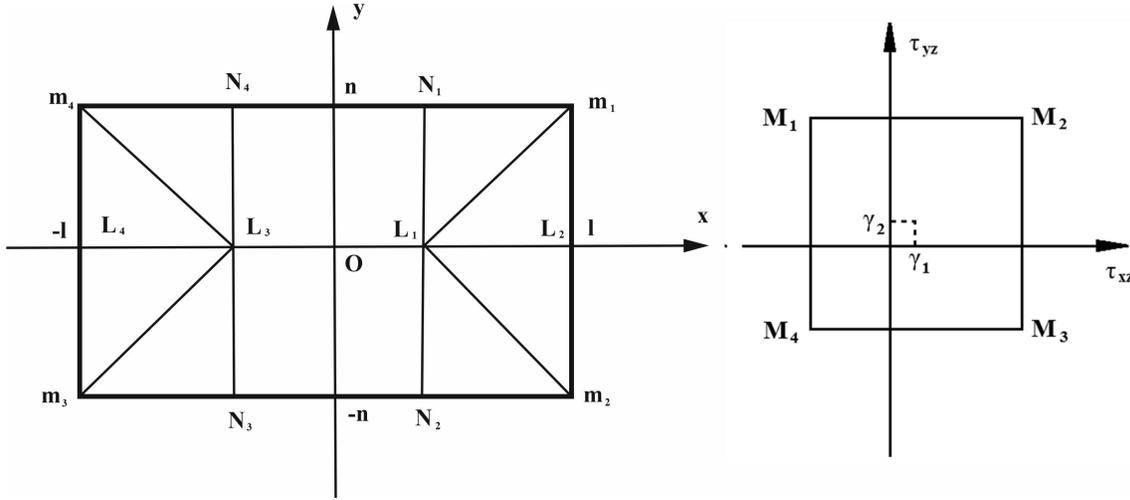


Рис. 2.

В рассматриваемом случае линеаризованное условие пластичности (5) выберем таким образом, чтобы вектор  $\vec{r}_l = (A_i, B_i)$  был параллелен отрезку  $m_i m_{i+1}$  контура (рис. 2). Здесь мы имеем четыре линеаризованных условия текучести:

$$A_1(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_1(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k, \quad (23)$$

$$A_2(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_2(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k, \quad (24)$$

$$A_3(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_3(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k, \quad (25)$$

$$A_4(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_4(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k. \quad (26)$$

Вдоль отрезка  $m_1 m_2$  имеем

$$x = l, \quad \tau_{xz} = 0, \quad A_1 = 0, \quad B_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}c\theta.$$

В области, примыкающей к отрезку  $m_1 m_2$ ,

$$\tau_{xz} = c_1(x - l), \quad \tau_{yz} = -c\theta x - c_1 y - d_i, \quad (27)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = \frac{1}{c}(-k - c_1 y - c\theta x - d_i). \quad (28)$$

Вдоль отрезка  $m_2 m_3$  имеем

$$y = -n, \quad \tau_{yz} = 0, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2}c\theta.$$

В области, примыкающей к отрезку  $m_2m_3$ ,

$$\tau_{yz} = -c_2(y + n), \quad \tau_{xz} = c\theta y + c_2x + g_2, \quad (29)$$

$$e_{yz} = 0, \quad e_{xz} = \frac{1}{c}(-k - c\theta y + c_2x + g_2). \quad (30)$$

Вдоль отрезка  $m_3m_4$  имеем

$$x = l, \quad \tau_{xz} = 0, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = -1, \quad b_3 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{2}c\theta.$$

В области, примыкающей к отрезку  $m_3m_4$ ,

$$\tau_{xz} = c_3(x + l), \quad \tau_{yz} = -c\theta x - c_3y - d_i, \quad (31)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = \frac{1}{c}(k - c_3y - c\theta x - d_i). \quad (32)$$

Вдоль отрезка  $m_4m_1$  имеем

$$y = -n, \quad \tau_{yz} = 0, \quad A_4 = -1, \quad B_4 = 0, \quad a_4 = 0, \quad b_4 = \frac{1}{2}c\theta.$$

В области, примыкающей к отрезку  $m_4m_1$ ,

$$\tau_{yz} = -c_4(y - n), \quad \tau_{xz} = c\theta y + c_4x + g_2, \quad (33)$$

$$e_{yz} = 0, \quad e_{xz} = \frac{1}{c}(k + c\theta y + c_4x + g_2). \quad (34)$$

Особо следует остановиться на линиях разрыва напряжений (линии  $m_1L_1$ ,  $m_2L_1$ ,  $m_3L_3$ ,  $m_4L_3$ ,  $L_1L_3$  на рис. 2), которые являются следом исчезающих жестких областей. На них всегда выполняются соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (35)$$

Согласно (27)–(34) и (36) получим следующие уравнения линий разрыва напряжений:

$$m_1L_1 : \quad y = n + (x - l), \quad (36)$$

$$m_2L_1 : \quad y = -n - (x - l), \quad (37)$$

$$m_3L_3 : \quad y = -n + (x + l), \quad (38)$$

$$m_4L_3 : \quad y = n - (x - l), \quad (39)$$

$$L_1L_3 : \quad y = 0. \quad (40)$$

На рис. 2 построены линии разрыва напряжений  $m_1L_1$ ,  $m_2L_1$ ,  $m_3L_3$ ,  $m_4L_3$ ,  $L_1L_3$ , которые пересекаются в точках  $L_1$ ,  $L_3$ .

Согласно (36), (37), (38), (39), (40) из (27)–(34) имеем следующие соотношения для компонент напряжений и деформаций:

в области  $m_1L_1L_2$ :

$$\tau_{xz} = -c\theta(x - l), \quad \tau_{yz} = k - c\theta(-y + n + x - l), \quad (41)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(-y + n + x - l); \quad (42)$$

в области  $m_2L_1L_2$ :

$$\tau_{xz} = c\theta(x - l), \quad \tau_{yz} = k - c\theta(y + n + x - l), \quad (43)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(y + n + x - l); \quad (44)$$

в области  $m_2L_1N_2$ :

$$\tau_{xz} = k + c\theta(y + n + x - l), \quad \tau_{yz} = -c\theta(y + n), \quad (45)$$

$$e_{xz} = \theta(y + n + x - l), \quad e_{yz} = 0; \quad (46)$$

в области  $L_1N_2N_3L_3$ :

$$\tau_{xz} = k + c\theta y, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (47)$$

$$e_{xz} = \theta y, \quad e_{yz} = 0; \quad (48)$$

в области  $m_3L_3N_3$ :

$$\tau_{xz} = k - c\theta(-y - n + x + l), \quad \tau_{yz} = c\theta(y + n), \quad (49)$$

$$e_{xz} = -\theta(-y - n + x + l), \quad e_{yz} = 0; \quad (50)$$

в области  $m_3L_3L_4$ :

$$\tau_{xz} = -c\theta(x + l), \quad \tau_{yz} = -k + c\theta(y + n - x - l), \quad (51)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = \theta(y + n - x - l); \quad (52)$$

в области  $m_4L_3L_4$ :

$$\tau_{xz} = c\theta(x + l), \quad \tau_{yz} = -k - c\theta(y - n + x + l), \quad (53)$$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(y - n + x + l); \quad (54)$$

в области  $m_4L_3N_4$ :

$$\tau_{xz} = -k + c\theta(y - n + x + l), \quad \tau_{yz} = -c\theta(y - n), \quad (55)$$

$$e_{xz} = \theta(y - n + x + l), \quad e_{yz} = 0; \quad (56)$$

в области  $L_1N_1N_4L_3$ :

$$\tau_{xz} = -k + c\theta y, \quad \tau_{yz} = 0, \quad (57)$$

$$e_{xz} = \theta y, \quad e_{yz} = 0; \quad (58)$$

в области  $m_1L_1N_1$ :

$$\tau_{xz} = -k + c\theta(y - n - x + l), \quad \tau_{yz} = c\theta(y - n), \quad (59)$$

$$e_{xz} = \theta(y - n - x + l), \quad e_{yz} = 0. \quad (60)$$

На отрезках  $L_1L_2$ ,  $L_3L_4$  терпит разрыв компонента напряжения  $\tau_{xz}$ . Разрыв компоненты  $\tau_{xz}$  в данном случае допустим, контактирующее напряжение  $\tau_{yz}$  при переходе через отрезки  $L_1L_2$ ,  $L_3L_4$  непрерывно. Аналогично, на отрезках  $N_1N_2$ ,  $N_3N_4$  терпит разрыв компонента напряжения  $\tau_{yz}$ , а контактирующее напряжение  $\tau_{xz}$  непрерывно. Следует отметить, что линии разрыва напряжений  $L_1L_2$ ,  $L_3L_4$ ,  $N_1N_2$ ,  $N_3N_4$  не являются следом жесткой области, а являются следствием исследуемой предельной схемы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [2] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Москва: ИЛ, 1956. 398 с.
- [3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [4] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.
- [5] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.
- [6] Mironov B. G., Mironov Y. V. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 012009.
- [7] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. — Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.

*B. G. Mironov<sup>1</sup>, Yu. B. Mironov<sup>2</sup>*

**TORSION OF RODS MADE OF ANISOTROPICALLY HARDENING  
MATERIAL UNDER A LINEARIZED PLASTICITY CONDITION**

<sup>1</sup>*Russian University of transport, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

**Abstract.** The torsion of rods made of anisotropically hardening rigid-plastic material is studied. Integrals are obtained that determine the stress and strain States of the rod under the linearized plasticity condition. Stress discontinuity lines are constructed.

**Keywords:** torsion, stress, strain, plasticity, hardening, anisotropy, rigid plastic rod, yield condition, equilibrium equations, linearized ratio.

**REFERENCES**

- [1] Sokolovskij V. V. Theory of plasticity. Moscow: Higher school, 1969. 608 p. (in Russian).
- [2] Prager V., Hoge F. G. Theory of ideally plastic bodies. Moscow: IL, 1956. 398 p. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Science, 1966. 232 p. (in Russian).
- [4] Ivlev D. D. Mechanics of plastic media: in 2 vol. — V. 2. General issue. Rigid-plastic and elastic-plastic state of bodies. Strengthening. Deformation theories. Complex environment. Moscow: Fizmatlit, 2002. 448 p. (in Russian).
- [5] Olshak V., Ryhlevskiy Y., Urbanovskiy B. Theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G. On the theory of torsion of inhomogeneous rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 4(22). P. 236–240. (in Russian).
- [7] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 012009.

---

*Boris Gurjevich Mironov*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

*Yuri Borisovich Mironov*, Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.

М. Н. Михин, Е. В. Мурашкин

## КРУЧЕНИЕ НАРАЩИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

Российский государственный гуманитарный университет, филиал в г. Домодедово, Россия

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН г. Москва, Россия

**Аннотация.** В работе рассматривается задача о кручении растущего стержня треугольного сечения, изготовленного из вязкоупругого стареющего функционально-градиентного материала, с интегральными краевыми условиями на торцах. Изучается процесс непрерывного наращивания под действием крутящего момента. Предлагаются методы решения поставленных краевых задач путем приведения задач теории наращивания к задачам теории упругости с внутренним параметром. Приводятся формулы расшифровки для восстановления истинных параметров напряженно-деформированного состояния. Исследуется распределение интенсивности касательных напряжений на различных стадиях процесса наращивания. Приводятся расчеты задачи кручения призматического стержня с сечением в форме правильного треугольника.

**Ключевые слова:** растущее тело, поверхность роста, остаточное напряжение, функционально-градиентный материал, вязкоупругость, стареющий материал

DOI: 10.37972/chgru.2020.44.2.014

УДК: 539.374

**1. Введение.** Наличие уникальных (экзотических) свойств 3D-материалов (метаматериалов, тканых композитов, аусетиков [1]) являются несомненным преимуществом перед другими инженерными материалами. Эти преимущества делают их

---

© Михин М. Н., Мурашкин Е. В. 2020

*Михин Михаил Николаевич*

e-mail: mikhin@inbox.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный гуманитарный университет, филиал в г. Домодедово, Россия

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 19.07.2019

пригодными для использования в качестве легких компонент и конструкций в различных отраслях современной промышленности [2]. В настоящее время около 50% деталей самолетов изготавливается из композиционных материалов [3]. Кроме того, композитные материалы все чаще используются в автомобильной промышленности. Исследования показали, что с 2015 года ежегодный рост использования композитов в автомобильной промышленности увеличился на 5%.

Мировой спрос на композиционные материалы растет с каждым днем [4]. Титановые композиты имеют более широкий спектр применения по сравнению с обычными титановыми сплавами из-за их более высокой жесткости и прочности [3–9]. Еще одна особенность титановых композитов — высокая износостойкость и устойчивость к коррозии [9], что также делает их пригодными для широкого спектра автопромышленных и аэрокосмических приложений. Эти свойства обеспечиваются добавлением частиц TiC (карбид титана) или TiB (борид титана) [6]. Превосходная механическая прочность, отличная биосовместимость, низкая плотность, устойчивость к коррозии и высокие температурные характеристики делают титановые композиты применимыми в большинстве отраслей, где требуется использование легких материалов, например, в компонентах газотурбинных двигателей, предприятиях пищевой промышленности, высокопроизводительных автомобильных деталях, авиакосмической промышленности, атомных электростанциях, химической промышленности, теплообменниках нефтеперерабатывающих заводов, морском оборудовании, медицинских устройствах, электронике, биомедицинских приложениях (имплантаты и протезы), энергетике и оборонной промышленности.

Технологии аддитивного производства — наиболее экономически выгодная технология для производства и обработки титановых композитов, поскольку она решает большинство проблем традиционного производства композитов [9]. Композиционные материалы обычно состоят из определенной матрицы в виде однородной фазы, армирования в виде дисперсной фазы и границы раздела или связующего вещества, которое соединяет материалы вместе [5, 6]. Механические свойства и микроструктура композитных материалов могут контролироваться путем правильного выбора составляющих материалов. Преимущества аддитивного производства композитов очевидны. Прежде всего — это создание геометрически сложных деталей, которые невозможно создать с помощью субтрактивных производственных процессов. Кроме того, были проведены исследования по улучшению физико-механических свойств титана за счет введения других материалов в композиты, которые являются подходящими материалами для большинства современных промышленных применений.

Проблемы математического анализа процессов наращивания твердых тел в живой [10–14] и не живой природе [15–29] неизменно привлекают внимание отечественных и зарубежных исследователей. Далее в статье будем придерживаться терминологией и аппаратом теории подробно изложенной в монографии [18].

**2. Постановка задачи.** Исследуем напряженно-деформируемое состояние наращиваемого тела изготовленного из однородного вязкоупругого стареющего материала. Момент изготовления основного тела примем за начало отсчета внутреннего времени задачи. Примем, что в начальный момент времени основное тело занимало некоторую область  $\Omega_1$  с треугольным поперечным сечением, имеющим границу  $L_1$

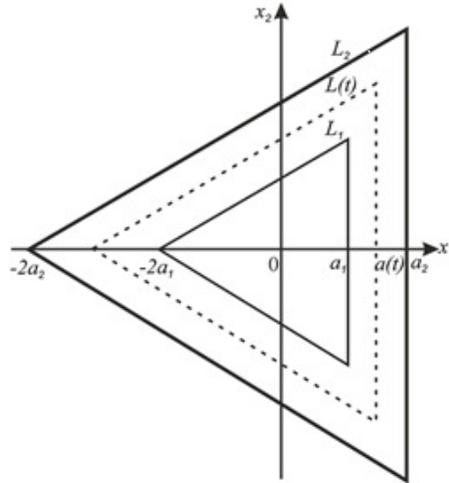


Рис. 1. Поперечное сечение наращиваемого призматического стержня

(см. рис. 1). В момент  $\tau_0$  к торцам основного призматического тела прикладываются нагружающие усилия, статически эквивалентные паре с моментом  $M(t)$ . Будем полагать, что боковая поверхность основного тела свободна от напряжений.

Далее, в некоторый момент времени, обозначим его через  $\tau_1 \geq \tau_0$ , начинается непрерывное наращивание тела последовательным присоединением к внешней поверхности основного тела новых элементов, изготовленных из материала произведенного одновременно с основным телом. Причем, будем полагать, что новые приращиваемые элементы находятся в свободном состоянии. Обозначим через  $L(t)$  распространяющуюся границу поперечного сечения дополнительного тела  $\Omega(t)$ , которая изменяется с течением времени. Кроме того, заметим, что  $L(\tau_1) = L_1$  и  $\Omega(\tau_1) = \Omega_1$ . Граница  $L(t)$  сечения  $\Omega(t)$  состоит из двух участков  $L(t) = \overset{*}{L}(t) \cup L_\sigma(t)$ , где  $\overset{*}{L}(t)$  — граница роста, к которой в текущий момент времени осуществляется приток материала, при этом  $\overset{*}{L}(t) = \overset{*}{L}$  при  $\tau \leq \tau_1$ ,  $L_\sigma(t)$  — граница, свободная от напряжений.

Будем считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам  $\tau_0 = \tau_0(x_1, x_2)$  совпадает с моментом их присоединения к наращиваемому основному телу  $\overset{*}{\tau} = \overset{*}{\tau}(x_1, x_2)$ . Далее примем следующее сокращение

$$\tau_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \tau_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_1; \\ \overset{*}{\tau}(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \overset{*}{\Omega}(t). \end{cases} \quad (1)$$

Момент времени  $\tau_2 \geq \tau_1$  свяжем с окончанием процесса наращивания. С этого момента оно занимает область с поперечным сечением  $\Omega_2 = \Omega(\tau_2)$  и границей  $L_2 = L(\tau_2)$ . Заметим, что всюду далее рассматривается достаточно медленные процессы, такие, что в уравнениях движения сплошной среды можно пренебречь инерционными членами.

**3. Методика решения краевой задачи.** Краевая задача о деформировании основного тела, изготовленного из вязкоупругого стареющего тела на интервале времени  $[\tau_0, \tau_1]$ , предшествующем началу процесса наращивания, представляет собой традиционную задачу кручения, аналогичную рассмотренной в [30–32]. Задачу, решение которой моделирует процесс непрерывного наращивания на интервале времени  $t \in [\tau_1, \tau_2]$  назовем начально-краевой задачей для непрерывно наращиваемого тела. Дальнейшие рассуждения, для удобства, будем проводить в декартовой прямоугольной системе координат с осью  $Ox_3$  совпадающей с осью симметрии стержня.

Для рассматриваемого случая призматического стержня уравнения равновесия следует принять в виде

$$\partial_3 \sigma_{13} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{23} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial k}. \quad (2)$$

Соотношения Коши между скоростями деформации  $D_{ij}$  и скоростями перемещений  $v_i$  в декартовой прямоугольной системе координат, учитывая симметрию краевой задачи, примут вид

$$\begin{aligned} D_{11} = \partial_1 v_1 = 0, & \quad D_{22} = \partial_2 v_2 = 0, & \quad D_{33} = \partial_3 v_3 = 0, \\ 2D_{12} = \partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 = 0, & \quad 2D_{13} = \partial_1 v_3 + \partial_3 v_1, & \quad 2D_{23} = \partial_3 v_2 + \partial_2 v_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Определяющие уравнения однородного вязкоупругого стареющего континуума для не нулевых компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и тензора малых деформаций  $\varepsilon_{ij}$  можно принять в форме

$$\sigma_{13} = 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0})\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0})\varepsilon_{23}, \quad (4)$$

где  $G$  — модуль сдвига или второй параметр Ламе,  $\mathbf{I}$  — тождественный интегральный оператор, а для интегрального оператора  $\mathbf{N}$  справедливы соотношения

$$(\mathbf{I} + \mathbf{N}_{\tau_0})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{L}_{\tau_0}, \quad \mathbf{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \quad (5)$$

$$K_1(t, \tau) = G(\tau) \partial_\tau [G^{-1}(\tau) + \omega(t, \tau)]. \quad (6)$$

Здесь  $K_1(t, \tau)$  — ядро ползучести,  $\omega(t, \tau)$  — мера ползучести при сдвиге.

Краевое условие на неподвижной части наращиваемой границы принимает вид

$$(x_1, x_2) \in L_\sigma(t) : \quad n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} = 0. \quad (7)$$

Краевое условие на распространяющейся поверхности наращивания  $\dot{L}^*(t)$  запишем в форме

$$(x_1, x_2) \in \dot{L}^*(t) : \quad n_1 \partial_t \sigma_{13} + n_2 \partial_t \sigma_{23} = 0. \quad (8)$$

При этом необходимо потребовать выполнения условия равновесия торцевых сечений дополнительного тела  $\Omega(t)$ , т.е.

$$M(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2, \quad \iint_{\Omega(t)} \sigma_{13} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega(t)} \sigma_{23} dx_1 dx_2 = 0. \quad (9)$$

В соотношениях (7)–(9)  $n = \{n_1, n_2\}$  — единичный вектор внешней нормали боковой поверхности тела. Значения всех физических полей в момент времени  $\tau_0 \leq t \leq \tau_1$  известны из решения задачи для основного тела.

Отличительными особенностями начально-краевой задачи для растущего тела (2)–(9), выводящими ее за рамки классических задач механики деформируемого твердого тела, являются:

- (i) нарушение условия совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин (это обстоятельство позволяет учитывать этот факт, что приращиваемые элементы до момента присоединения к основному телу могут подвергаться деформирующим воздействиям независимо от процессов, протекающих в самом теле);
- (ii) зависимость определяющих соотношений от функции  $\tau_0 = \tau_0(x_1, x_2)$ , которая может иметь разрывы первого рода.

Введем обозначение  $\sigma_{ij}^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_{\tau_0})\sigma_{ij}G^{-1}$  и преобразуем задачу наращиваемого вязкоупругого тела с определяющими соотношениями (2)–(9) к задаче наращивания упругого тела, описываемого законом Гука. В результате не сложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \partial_1\sigma_{13}^0 + \partial_2\sigma_{23}^0 &= 0, \quad 2D_{13} = \partial_1v_3 + \partial_3v_1, \quad 2D_{23} = \partial_3v_2 + \partial_2v_3, \\ \sigma_{13}^0 &= 2\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23}^0 = 2\varepsilon_{23}, \quad M(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})dx_1dx_2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$(x_1, x_2) \in L_\sigma(t) : n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \overset{*}{L}(t) : n_1\partial_t\sigma_{13} + n_2\partial_t\sigma_{23} = 0.$$

Преобразуем начально-краевую задачу (10) к краевой задаче относительно скоростей деформации, скоростей перемещений и скоростей операторных напряжений. Для этого продифференцируем по  $t$  уравнение равновесия и уравнения состояния. В итоге получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \partial_1S_{13} + \partial_2S_{23} &= 0, \quad 2D_{13} = \partial_1v_3 + \partial_3v_1, \quad 2D_{23} = \partial_3v_2 + \partial_2v_3, \\ S_{13}^0 &= 2D_{13}, \quad S_{23}^0 = 2D_{23}, \quad S_{ij} = \partial_t\sigma_{ij}^0, \quad (x_1, x_2) \in L(t) : n_1S_{13} + n_2S_{23} = 0, \\ \partial_tM^0(t) &= \iint_{\Omega(t)} (x_1S_{23} - x_2S_{13})dx_1dx_2 + \oint_{\overset{*}{L}(t)} (x_1\overset{*}{\sigma}_{23} - x_2\overset{*}{\sigma}_{13})s_n dl, \end{aligned} \quad (11)$$

причем  $\overset{*}{\sigma}_{13}(x_1, x_2) = \sigma_{13}(x_1, x_2, \overset{*}{\tau}(x_1, x_2))$  и  $\overset{*}{\sigma}_{23}(x_1, x_2) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \overset{*}{\tau}(x_1, x_2))$ ,  $s_n$  — скорость движения растущей границы вдоль нормали.

Дополненные начальными условиями для основного тела при  $t = \tau_1$  соотношения (12), ставят начально-краевую задачу с внутренним параметром времени  $t$ .

Для величин  $S_{ij}$  и  $v_i$  справедливы формулы:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\partial_t\theta(t)x_2x_3, \quad v_2 = \partial_t\theta(t)x_1x_3, \quad v_3 = \partial_t\theta(t)\varphi_t, \\ S_{13} &= \partial_t\theta(t)(\partial_1\varphi_t - x_2), \quad S_{23} = \partial_t\theta(t)(\partial_2\varphi_t + x_1), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varphi_t = \varphi(x_1, x_2, t)$  — неизвестная функция кручения,  $\theta(t)$  — угол закручивания стержня. Функция кручения  $\varphi_t$  является гармонической в области  $\Omega(t)$ , а значит удовлетворяет краевому условию

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \partial_{\mathbf{n}}\varphi_t = x_2n_1 - x_1n_2.$$

Таким образом, решение задачи кручения с использованием функции кручения  $\varphi_t$  сводится к определению в области поперечного сечения  $\Omega(t)$  гармонической функции

по заданному значению ее нормальной производной на контуре  $L(t)$ , т.е. к решению классической задачи Неймана.

Очевидно, что с учетом (12) можно получить

$$\begin{aligned} \partial_t M^0(t) &= \partial_t \theta(t) D(t) + \int_{L^*(t)} (x_1 \sigma_{23}^* - x_2 \sigma_{13}^*) dl, \\ D(t) &= \iint_{\Omega(t)} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \partial_2 \varphi - x_2 \partial_1 \varphi) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $D(t)$  — переменная жесткость растущего тела при кручении.

Рассмотрим два возможных варианта постановки задачи:

- (i) задан момент  $M(t)$ , а требуется определить напряжения  $\sigma_{ij}$ , перемещения  $u_i$  и крутку  $\theta(t)$ ;
- (ii) задана крутка  $\theta(t)$ , а требуется определить  $\sigma_{ij}$ ,  $u_i$  и момент  $M(t)$ .

Решение первого варианта постановки (когда задан крутящий момент  $M(t)$ ) можно построить следующим образом: по краевому условию определим функцию  $\varphi_t$ , по формулам (13) найдем  $\theta(t)$ , по формулам (12) найдем  $v_i$  и  $S_{ij}$ , наконец, истинные напряжения  $\sigma_{ij}$  восстановим по формуле (10).

Для второго варианта постановки определим функцию кручения  $\varphi(x_1, x_2, t)$ , найдем  $v_i$  и  $S_{ij}$  по формулам (12), восстановим истинные напряжения  $\sigma_{ij}$  при помощи (10), определим крутящий момент  $M(t)$  на основании условия равновесия торцевых сечений (9).

**4. Кручение тела после прекращения процесса наращивания.** Рассмотрим теперь этап кручения тела после прекращения роста. Пусть в момент времени  $\tau_2$  наращивание тела прекращается. В этот момент оно занимает область с поперечным сечением  $\Omega_2$ , ограниченную кривой  $L_2$ . В этом случае получаем задачу, аналогичную (10). Тогда для величин  $v_i$  и  $S_{ij}$  применимы формулы (12), в которых необходимо положить  $t = \tau_2$ . Напряжения, перемещения и крутка в этом случае можно найти согласно формулам (10).

В итоге неклассические краевые задачи, возникающие при исследовании кручения наращиваемых тел сводятся к известным краевым задачам, содержащим некоторый внутренний параметр. По найденным решениям последних полностью восстанавливается напряженно-деформированное состояние тела при помощи формул расшифровки:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1, x_2, t) &= G(t) \left\{ \sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau_0) G^{-1}(\tau_0) \left[ 1 + \int_{\tau_0}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_0}^t [S_{ij}(x_1, x_2, \tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} S_{ij}(x_1, x_2, \varsigma) d\varsigma R_{ij}(t, \tau)] d\tau \right\}, \\ u(x_1, x_2, t) &= u(x_1, x_2, \tau_0) + \int_{\tau_0}^t v(x_1, x_2, \tau) d\tau, \quad \theta(t) = \theta(\tau_0) + \int_{\tau_0}^t \partial_t \theta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения классических краевых задач с параметром применим два метода теории функций комплексного переменного. Первый метод основан на применении конформного отображения, а второй — на приведении уравнения границы растущего тела к специальному виду (см. [31, 32]).

Рассмотрим метод конформного отображения. Введем сопряженную с  $\varphi(x_1, x_2, t)$  гармоническую функцию  $\psi(x_1, x_2, t)$ , связанную с ней условиями Коши–Римана [31]:

$$\partial_1\varphi = \partial_2\psi, \quad \partial_2\varphi = -\partial_1\psi.$$

Граничное условие для функции  $\psi(x_1, x_2, t)$  примет вид

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \psi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + C(t),$$

где  $C(t)$  некоторая произвольная функция времени.

Таким образом, задачу кручения можно считать решенной, если мы сумеем отобразить конформно область  $\Omega(t)$  на круг [32]. В этом случае, естественно, область  $\Omega(t)$  должна быть односвязной.

Пусть  $z = x_1 + ix_2 = \omega(\zeta, t)$  конформное отображение области  $\Omega$  на круг  $|\zeta| < 1$ , окружность, которую обозначим  $\gamma$ .

Определим комплексную функцию кручения

$$F(z, t) = \varphi + i\psi,$$

где  $\varphi$  — функция кручения, а  $\psi$  сопряженная с ней функция. Если функция  $F(z, t)$  будет выражена через  $\zeta$ , т.е.  $F(z, t) = f(\zeta, t)$ , то  $f(\zeta)$  будет функцией, голоморфной внутри  $\gamma$ .

Действительная часть  $\psi$  функции

$$-if(\zeta, t) = \psi - i\varphi$$

будет удовлетворять на  $\gamma$  граничному условию  $\psi = (x_1^2 + x_2^2)/2$ . Обозначая через  $\sigma = e^{i\rho}$  точки на контуре получим, что на  $\gamma$  имеем

$$\psi = \frac{1}{2}\omega(\sigma, t)\overline{\omega(\sigma, t)}.$$

Теперь найдем голоморфную внутри  $\gamma$  функцию по граничным значениям ее действительной части [31, 32]:

$$f(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma, t)\overline{\omega(\sigma, t)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + C_1(t), \quad (15)$$

где  $C_1(t)$  — произвольная функция.

Используя (15), мы можем определить как функцию  $\psi(x_1, x_2, t)$ , которая является действительной частью функции  $-if(\zeta, t)$ , так и функцию  $\varphi(x_1, x_2, t)$ , которая является мнимой частью функции  $-if(\zeta, t)$ .

Таким образом, по найденной гармонической функции, можно напряжения, перемещения и крутку (или момент) растущего призматического тела в любой момент времени.

Теперь рассмотрим метод основанный на приведении уравнения границы к специальному виду.

Рассмотрим комплексную функцию кручения

$$F(z, t) = \varphi + i\psi,$$

где  $\varphi$  — функция кручения, а  $\psi$  сопряженная с ней функция.

С учетом формул

$$F(z, t) + \overline{F(z, t)} = 2\operatorname{Re}F(z, t), \quad F(z, t) - \overline{F(z, t)} = 2i\operatorname{Im}F(z, t).$$

Граничное условие в комплексной форме запишется следующим образом:

$$z \in L(t) : \quad F(z, t) - \overline{F(z, t)} = z\bar{z}.$$

Пусть соотношение между  $z$  и  $\bar{z}$  для точек контура можно привести к виду

$$z \in L(t) : \quad z\bar{z} = h(z, t) + \overline{h(z, t)},$$

причем  $\overline{h(z, t)}$  — функция, аналитическая внутри контура поперечного сечения. Тогда справедливо равенство

$$F(z, t) = ih(z, t) + C(t),$$

где  $C(t)$  — произвольная функция, которую можно принять равной нулю.

Определив комплексную функцию кручения  $F(z, t)$ , получим функцию кручения  $\varphi = \operatorname{Re}\{F(z, t)\}$ . Данным методом решаются такие задачи, как кручение эллипса, кручение равностороннего треугольника, кручение кругового вала с продольной выточкой.

**5. Решение задачи кручения растущего треугольного вязкоупругого стержня.** В качестве примера рассмотрим задачу кручения растущего призматического стержня с поперечным сечением в форме правильного треугольника под действием крутящего момента  $M(t)$ . Граница поперечного сечения  $L(t)$  является границей роста, т.е.  $L(t) = \overset{*}{L}(t)$ . Материал среды вязкоупругий и стареющий, т.е. его свойства зависят от времени. Рассмотрим наращивание стержня по закону подобия, при котором за время наращивания сторона равностороннего треугольника увеличится в два раза,  $a_2 = 2a_1$  (рис. 1).

Будем считать, что новые приращиваемые элементы не напряжены. Ввиду математической эквивалентности получаемых задач на каждом рассматриваемом этапе, достаточно рассмотреть только этап наращивания.

Найдем функцию кручения  $\varphi(x_1, x_2, t)$ . Для этого уравнение

$$(x_1 - a(t))((x_1 + 2a(t))^2 - 3x_2^2) = 0,$$

контур  $L(t)$  преобразуем в комплексную форму, сделав замену

$$x_1 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad x_2 = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

В комплексной форме уравнение равностороннего треугольника примет вид

$$F(z, t) = -\frac{i}{6a(t)}z^3.$$

Отделяя действительную часть, получим функцию кручения в виде

$$\varphi(x_1, x_2, t) = (3x_1^2x_2 - x_2^3)/(6a(t)). \quad (16)$$

Если задана крутка  $\theta(t)$ , то вычислив производную  $\partial_t\theta(t)$ , находим величины  $v_i$ ,  $S_{13}$  и  $S_{23}$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= -\partial_t\theta(t)x_2x_3, \quad v_2 = \partial_t\theta(t)x_1x_3, \quad v_3 = \partial_t\theta(t)(3x_1^2x_2 - x_2^3)/(6a(t)), \\ S_{13} &= \partial_t\theta(t)(\partial_1\varphi_t - x_2) = \frac{\partial_t\theta(t)}{a(t)}(x_1 - a(t))x_2, \\ S_{23} &= \partial_t\theta(t)(\partial_2\varphi_t + x_1) = \frac{\partial_t\theta(t)}{2a(t)}(x_1^2 + 2a(t)x_1 - x_2^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Истинные напряжения и перемещения восстанавливаются по формулам (14). И наконец, определим  $M(t)$  на основании первой формулы из (9).

При заданном моменте  $M(t)$  поступим следующим образом. Сначала находим производную  $\partial_tM^0(t)$  по формуле

$$\partial_tM^0(t) = \partial_tM(t)G^{-1}(t) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \partial_\tau M(t)\partial_t\omega(t, \tau)d\tau + M(\tau_0(x_1, x_2))\partial_t\omega(t, \tau_0(x_1, x_2)).$$

Затем находим скорость крутки  $\partial_t\theta(t)$

$$\partial_t\theta(t) = \frac{5}{9\sqrt{3}a^4(t)}\partial_tM^0(t).$$

Скорость перемещений  $v_i$  находим по формулам (17), а величины  $S_{13}$  и  $S_{23}$  находим по формулам

$$\begin{aligned} S_{13} &= \frac{5(x_1 - a(t))x_2}{9\sqrt{3}a^5(t)}\partial_tM^0(t), \\ S_{23} &= \frac{5(x_1^2 + 2a(t)x_1 - x_2^2)}{18\sqrt{3}a^5(t)}\partial_tM^0(t). \end{aligned}$$

Истинные напряжения, перемещения и крутка восстанавливаются по формулам (14).

Для построения решений на этапах до и после наращивания достаточно в функции кручения принять  $t = \tau_1$  и  $t = \tau_2$  соответственно.

**6. Пример расчета задачи кручения растущего треугольного призматического стержня.** Решим краевую задачу описанную в предыдущих разделах статьи для материала с модулем упруго-мгновенной деформации сдвига и мерой ползучести при сдвиге в форме [18]

$$G(t) = G_0(1 - e^{-\alpha_0 t}), \quad \omega(t, \tau) = (D_0 + Fe^{-\beta\tau})(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}).$$

Перейдем к безразмерным величинам, используя: предельный модуль сдвига  $G_0$ , коэффициент  $\gamma$  в аппроксимации меры ползучести и начальную длину  $a_1 = a(\tau_1)$  стороны равностороннего треугольника. Сделаем замену переменных по формулам:

$$\begin{aligned} t^* &= \gamma t, \quad \tau_1^* = \gamma\tau_1, \quad \tau_2^* = \gamma\tau_2, \quad a^*(t^*) = a(t)/a_1, \quad a_1^* = a_1/a_1 = 1, \quad a_2^* = a_2/a_1, \\ M^*(t^*) &= M(t)G_0^{-1}a^{-3}, \quad \alpha^* = \alpha_0/\gamma, \quad \beta^* = \beta/\gamma, \quad \gamma^* = \gamma/\gamma = 1, \quad D_0^* = D_0G_0, \quad F^* = FG_0 \end{aligned}$$

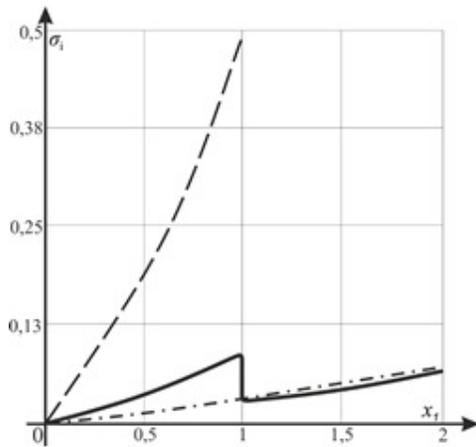


Рис. 2. Интенсивность касательных напряжений для процесса быстрого наращивания, которое начинается одновременно с приложением постоянного крутящего момента

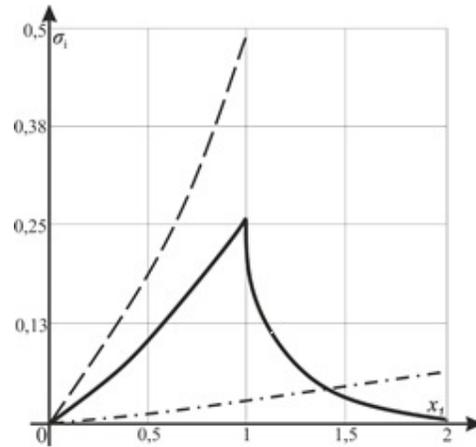


Рис. 3. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается одновременно с приложением постоянного крутящего момента

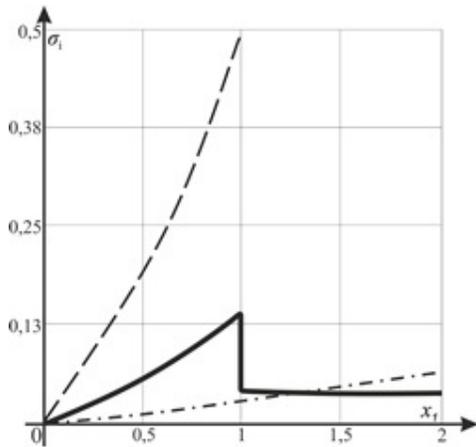


Рис. 4. Интенсивность касательных напряжений для процесса быстрого наращивания, которое начинается с некоторой паузой, после приложения постоянного крутящего момента

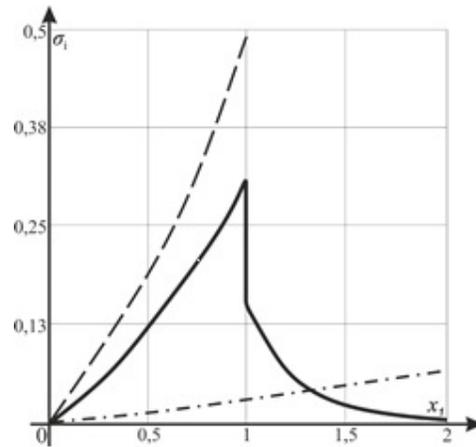


Рис. 5. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается с некоторой паузой, после приложения постоянного крутящего момента

и, опуская звездочки в обозначениях, зададимся следующими значениями функций и параметров:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a(t) = a_1(t + \tau_2 - 2\tau_1)(\tau_2 - \tau_1)^{-1}, \quad \alpha_0 = 2, \\ \gamma = 0.06, \quad \beta = 0.031/0.06, \quad A = 0.5, \quad D_0 = 0.5522, \quad F = 4.$$

Исследуем распределение интенсивности касательных напряжений вдоль отрезка, соединяющего центр тяжести треугольника и середину стороны треугольника. Интенсивность касательных напряжений при кручении дается формулой  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}$ .

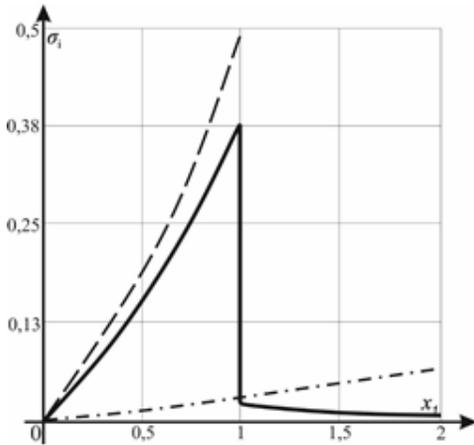


Рис. 6. Интенсивность касательных напряжений для процесса быстрого наращивания, которое начинается спустя длительный промежуток времени, после приложения постоянно крутящего момента

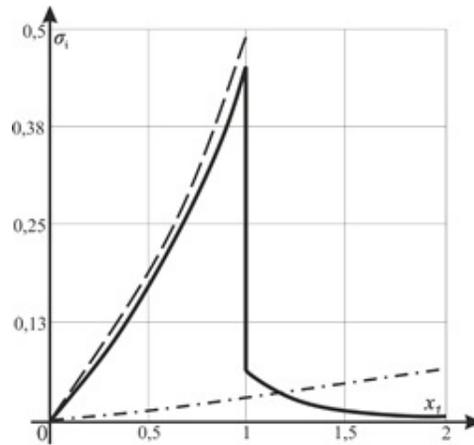


Рис. 7. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается спустя длительный промежуток времени, после приложения постоянно крутящего момента

Всюду далее на графиках штриховыми линиями будем обозначать распределения интенсивности касательных напряжений в момент начала наращивания, штрихпунктирной — в готовом теле без учета процесса наращивания, сплошной линией — предельное распределение интенсивности касательных напряжений при больших значениях времени.

Рассмотрим случай постоянного момента  $M(t) = 1$ . Рассмотрим процессы наращивания, которые начинаются одновременно с приложением крутящего момента ( $\tau_0 = \tau_1 = 0.1$ ). На рис. 2 показано распределение интенсивности касательных напряжений при быстром наращивании ( $\tau_2 = 0.4$ ); а на рис. 3 — распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании ( $\tau_2 = 5.1$ ).

Рассмотрим процессы наращивания, которые начинаются с некоторой паузой, после приложения крутящего момента ( $\tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.3$ ). На рис. 4 показано распределение интенсивности касательных напряжений при быстром наращивании ( $\tau_2 = 0.6$ ); а на рис. 5 — распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании ( $\tau_2 = 5.3$ ).

Рассмотрим процессы наращивания, которые начинаются спустя длительный промежуток времени, после приложения крутящего момента ( $\tau_0 = 0.1, \tau_1 = 2$ ). На Рис. 6 показано распределение интенсивности касательных напряжений при быстром наращивании ( $\tau_2 = 2.3$ ); а на рис. 7 — распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании ( $\tau_2 = 7$ ).

Предположим, что момент возрастает по линейному закону:  $M(t) = t$ . На рис. 8 показано распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании, которое начинается в момент приложения крутящего момента ( $\tau_0 = \tau_1 = 0.1, \tau_2 = 5.1$ ); а на рис. 9 — распределение интенсивности касательных напряжений при быстром наращивании, которое начинается спустя малый промежуток времени ( $\tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.3, \tau_2 = 5.1$ ). В каждом рассматриваемом случае максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе готового тела.

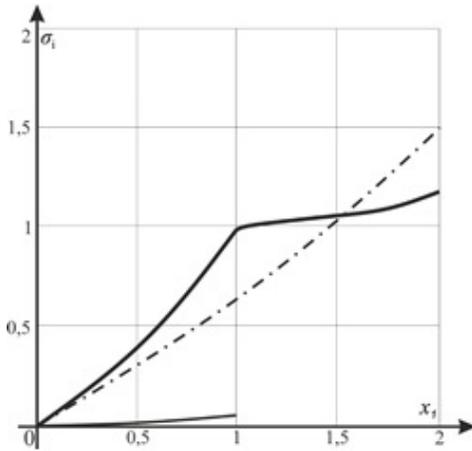


Рис. 8. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается в момент приложения линейного крутящего момента

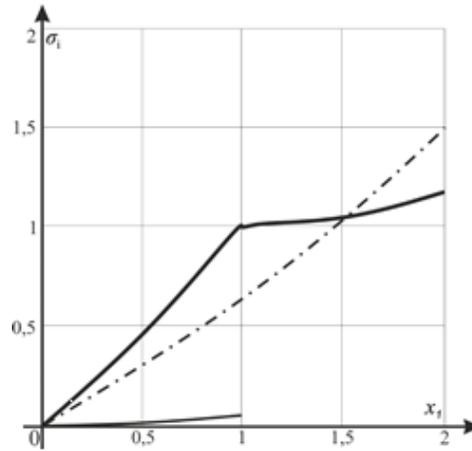


Рис. 9. Интенсивность касательных напряжений для процесса быстрого наращивания, которое начинается спустя малый промежуток времени, после приложения линейного крутящего момента

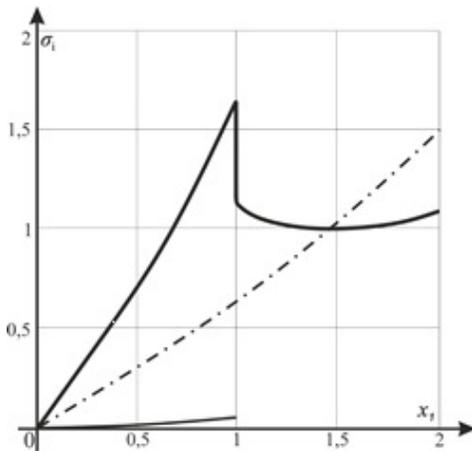


Рис. 10. Интенсивность касательных напряжений для процесса медленного наращивания, которое начинается спустя малый промежуток времени, после приложения линейного крутящего момента

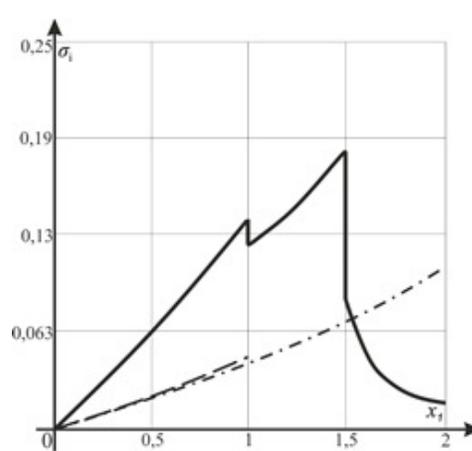


Рис. 11. Распределение интенсивности касательных напряжений при котором максимум достигается во внутренней точке дополнительного тела

На рис 10 показано распределение интенсивности касательных напряжений при медленном наращивании, которое начинается спустя малый промежуток времени ( $\tau_0 = 0.1$ ,  $\tau_1 = 2$ ,  $\tau_2 = 7$ ). В этом случае максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе основного и дополнительного тел.

Рассмотрим случай ступенчатого момента

$$M(t) = \begin{cases} 0,1 & t \leq T, \\ 1,8 & t > T. \end{cases}$$

Если взять  $T \in (\tau_1, \tau_2)$ , то максимум интенсивности касательных напряжений достигается внутри дополнительного тела. На рис 11 приведены изменения интенсивности касательных напряжений при  $T = 3$ .

## 7. Выводы.

- (i) В предлагаемой работе приводится пример применения теории поверхностного роста развиваемой в школе академика Н. Х. Арутюняна для исследования задачи кручения призматического стержня.
- (ii) Дана постановка начально-краевых задач деформирования наращиваемого по боковой поверхности стержня треугольного сечения.
- (iii) Предложены методы решения поставленных краевых задач. Методы решения основаны на приведении неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел к задачам теории упругости с внутренним параметром, использовании теории аналитических функций для решения. Истинные параметры напряженно-деформированного состояния восстановлены по формулам расшифровки.
- (iv) Численными экспериментами установлено, что при кручении в готовом теле без учета процесса наращивания максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе тела. При наращивании максимум интенсивности касательных напряжений может достигаться на границе раздела основного и дополнительного тел, на границе готового тела и даже в произвольной точке дополнительного тела.
- (v) Полученные результаты могут служить основой для решения важных прикладных задач для деталей и элементов конструкций, изготавливаемых при помощи современных технологий из функционально градиентных материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // *physica status solidi (b)*. 2013. Vol. 250, no. 10. P. 2038–2043.
- [2] Hegab H. A. Design for additive manufacturing of composite materials and potential alloys: a review // *Manufacturing Review*. 2016. Vol. 3. p. 11.
- [3] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood, S. Akinlabi, M. Shatalov et al. // *Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology*. 2019. Dec. Vol. 30. P. 51–58. URL: <https://www.gup.ugal.ro/ugaljournals/index.php/awet/article/view/2639>.
- [4] Berman B. 3–D printing: The new industrial revolution // *Business horizons*. 1990. Vol. 55. P. 155–162.
- [5] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. M. Lasisi, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, 2020. P. 515–522.
- [6] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. M. Lasisi, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, 2020. P. 523–529.
- [7] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 555–564.
- [8] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu/Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 503–513.

- [9] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2020. Vol. 51, no. 6. P. 766–773.
- [10] Ciarletta P. Preziosi L. M. G. A. Mechanobiology of interfacial growth // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2013. Vol. 61. P. 852–872.
- [11] Ciarletta P. Ambrosi D. M. G. A. P. L. Mechano-transduction in tumour growth modelling Physical constraints of morphogenesis and evolution // *European Physical Journal E*. 2013. Vol. 36. p. 23.
- [12] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. Springer, 2017.
- [13] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses computing in blood vessels in virtue of pathological growth processes // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2018. P. 618–622.
- [14] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // *AIP Conference Proceedings*. 2019. Vol. 2116, no. 1. p. 380013.
- [15] Southwell R. V. *Introduction to the theory of elasticity*, 2nd ed. Oxford Univ. Press., 1941.
- [16] Рашба Э. И. Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения. 1953.
- [17] Харлаб В. Д. Линейная теория ползучести наращиваемого тела // *Механика стержневых систем и сплошных сред*: Тр. ЛИСИ. 1966. С. 93–119.
- [18] Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. *Механика растущих вязкоупругопластических тел*. М: Наука, 1987. 472 с.
- [19] Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1992. № 5. С. 6–24.
- [20] Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1992. № 6. С. 99–112.
- [21] Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Термомеханическая модель наращиваемого тела: вариационная формулировка. Препринт. Ин-т проблем механики РАН. М.
- [22] Дмитриева А. М., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Наращивание термоупругого сферического слоя: применение вариационного подхода. Препринт. Ин-т проблем механики РАН. М.,.
- [23] Arutyunyan N. K., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1984. Vol. 48, no. 1. P. 1–10.
- [24] Тринчер В. К. Общая геометрически линейная постановка задачи определения деформированного состояния для тела с переменной границей // *Проблемы современной механики*. Ч.2. Под ред. Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 119–124.
- [25] Быковцев Г. И. *Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред*: Сборник статей. Владивосток: Дальнаука.
- [26] Murashkin, E. V., Stadnik, N. E. Compatibility Conditions in Continua with Microstructure // *MATEC Web Conf*. 2017. Vol. 95. p. 12001.
- [27] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2019. № 6. С. 38–46.
- [28] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // *Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. № 3(41). С. 11–29.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* Т. 23.
- [30] Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматлит, 1961. 519 с.
- [31] Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. *Кручение упругих тел*. м: Физматгиз, 1963. 667 с.
- [32] Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer, 1977. xxxi + 732 с.

M. N. Mikhin, E. V. Murashkin

## TORSION OF A GROWING PRISMATIC BAR WITH TRIANGULAR CROSS-SECTION MADE OF A FUNCTIONAL-GRADED MATERIAL

*Russian State University for the Humanities, Branch in Domodedovo, Russia*

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper considers the problem of torsion of a growing triangular cross-section bar made of a viscoelastic aging functionally-graded material with integral boundary conditions at the ends. The process of continuous growth under the influence of torque is studied. Methods for solving the set boundary value problems by reducing the problems of the growth theory to the problems of the theory of elasticity with an internal parameter are proposed. Deciphering formulas are given to restore the true parameters of the stress-strain state. The distribution of the shear stress intensity at different stages of the growth process is investigated. Calculations of the problem of torsion of a prismatic bar with a cross-section in the form of a regular triangle are presented.

**Keywords:** growing solids, propagating growing surface, residual stress, functionally-graded material, viscoelasticity, aging material

## REFERENCES

- [1] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisoenko D. S. Classification of cubic auxetics // *physica status solidi (b)*. 2013. Vol. 250, no. 10. P. 2038–2043.
- [2] Hegab H. A. Design for additive manufacturing of composite materials and potential alloys: a review // *Manufacturing Review*. 2016. Vol. 3. p. 11.
- [3] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood, S. Akinlabi, M. Shatalov et al. // *Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology*. 2019. Dec. Vol. 30. P. 51–58. URL: <https://www.gup.ugal.ro/ugaljournals/index.php/awet/article/view/2639>.
- [4] Berman B. 3–D printing: The new industrial revolution // *Business horizons*. 1990. Vol. 55. P. 155–162.
- [5] Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. M. Lasisi, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, 2020. P. 523–529.
- [6] Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. M. Lasisi, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, 2020. P. 515–522.
- [7] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 555–564.

---

*Mikhin Mikhail Nikolaevich*

e-mail: mmokin@inbox.ru, PhD, Associated Professor, Branch of the Russian State University for the Humanities, Domodedovo, Russia

*Murashkin Evgenii Valerievich*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, PhD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.

- [8] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. 2020. Vol. 51, no. 6. P. 766–773.
- [9] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu/Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // *Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in Mechanical Engineering* / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 503–513.
- [10] Ciarletta P. Preziosi L. M. G. A. Mechanobiology of interfacial growth // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2013. Vol. 61. P. 852–872.
- [11] Ciarletta P. Ambrosi D. M. G. A. P. L. Mechano-transduction in tumour growth modelling Physical constraints of morphogenesis and evolution // *European Physical Journal E*. 2013. Vol. 36. p. 23.
- [12] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. Springer, 2017.
- [13] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis // *AIP Conference Proceedings*. 2019. Vol. 2116, no. 1. p. 380013.
- [14] Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses computing in blood vessels in virtue of pathological growth processes // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2018. P. 618–622.
- [15] Southwell R. V. *Introduction to the theory of elasticity*, 2nd ed. Oxford Univ. Press., 1941.
- [16] Rashba E. I. *Determination of stresses in arrays from the action of their own weight, taking into account the order of their construction*. 1953.
- [17] Harlab V. D. *Linear theory of creep of a growing solids* // *The mechanics of rod systems and continuous media: Tr. LISP*. 1966. P. 93–119.
- [18] Arutyunyan N. K., Drozdov A. D., Naumov V. E. *Mechanics of growing viscoelastoplastic solids*. Moscow, Nauka, 1987. 472 p.
- [19] Arutyunyan N. K., Naumov V. E., Radaev Y. N. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 1. The motion of the flow of deposited particles with a variable velocity // *Izv. USSR AS. MTT*. 1992. no. 5. P. 6–24.
- [20] Arutyunyan N. K., Naumov V. E., Radaev Y. N. Dynamic accretion of the elastic layer. Part 2. The case of deposition of incremental particles at a constant velocity // *Izv. AN SSSR. MTT*. 1992. no. 6. P. 99–112.
- [21] Naumov V. E., Radaev Yu. N. Thermomechanical model of an growing solids: variational formulation. Preprint. M.: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
- [22] Dmitrieva A. M., Naumov V. E., Radaev Yu. N. Growth of thermoelastic spherical layer: variational approach application. Preprint. M.: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
- [23] Arutyunyan N. K., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1984. Vol. 48, no. 1. P. 1–10.
- [24] Trincher V. K. On the statement of the problem of determining stresses in the gravitational state of a growing solid // *Izv. USSR AS. MTT*.
- [25] Bykovtsev G. I. *Selected fundamental problems in the mechanics of solids: Collection of papers*. Vladivostok: Dal'nauka.
- [26] Murashkin, E. V., Stadnik, N. E. Compatibility Conditions in Continua with Microstructure // *MATEC Web Conf*. 2017. Vol. 95. p. 12001.
- [27] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54, no. 8. P. 1157–1164.
- [28] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a class of constitutive equations on propagating growing surface // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2019. no. 3(41). P. 11–29.
- [29] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* T. 23.
- [30] Arutyunyan N. K., Abramyan B. L. *Torsion of Elastic Solids*. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 667 p.
- [31] Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer, 1977. xxxi + 732 p.
- [32] Saint-Venant B. *Memoir on prism torsion. Memoir on prism bending*. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 519 p.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## СОВМЕЩНОСТЬ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ СРЕДАХ. ПСЕВДОТЕНЗОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье рассматривается процедура вывода условий совместности на поверхностях сильных разрывов в микрополярных термоупругих средах. Условия совместности сильных разрывов 4-тензора Пиолы–Кирхгофа и 4-тензора энергии–импульса выводятся из принципа наименьшего действия. Приведена определяющая форма микрополярного термоупругого потенциала для изотропных и гемитропных сред. Развиваемая псевдотензорная формулировка условий совместности сильных разрывов может быть применена при моделировании динамики изотропных и гемитропных микрополярных термоупругих сред.

**Ключевые слова:** микроструктура, микрополярность, директор, сильный разрыв, условие совместности, Лагранжиан, изотропия, гемитропия, аддитивные технологии

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.015

УДК: 539.3

**1. Предварительные сведения и вводные замечания.** Термодинамика физико-механических процессов зачастую связана с распространением в трехмерном пространстве поверхности, при переходе через которую исследуемые физические поля претерпевают сильный разрыв, т.е. сами поля непрерывны, а их производные, начиная с первой, вообще говоря, разрывны. Это наблюдается, например, при моделировании ударных воздействий, коротко-импульсных возмущений, процессов фазового перехода, многочисленных процессов аддитивных технологий. Современные конструкционные материалы (в частности, метаматериалы, биоматериалы и т.д.) могут обладать

---

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2020

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2020

микроструктурными особенностями и для моделирования их поведения может потребоваться привлечение неклассических моделей механики сплошных сред [1, 2].

Бурное развитие методов аддитивных технологий существенно упростило производство 3D-материалов. Лазерное напыление металлических сплавов ускоряет процессы изготовления изделий из титановых сплавов сложной геометрии и состава. Производимые таким способом 3D-изделия и 3D-материалы обладают сложными анизотропными термомеханическими свойствами, в том числе, наличием микроструктуры.

Постановка краевых условий на поверхностях разрывов физических полей является нетривиальной задачей механики континуума. Для корректного решения волновых задач теории микрополярной термоупругости требуется привлечение теоретико-полевого формализма [1–3] и аппарата алгебры относительных тензоров [4–11]. Относительные тензоры естественным образом возникают в механике и термодинамике микрополярных упругих сред. В частности, таковыми выступают: естественных элемент объема, псевдоплотность Лагранжиана, 4-псевдотензор Пиолы–Кирхгофа, 4-псевдотензор энергии–импульса. Формулировка основных законов термодинамики и определяющих уравнений микрополярной теории упругости в терминах относительных тензоров (псевдотензоров) позволяет более глубоко понять физическую и геометрическую природу физических полей.

В настоящей работе мы будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в монографии [1].

Первый вводный раздел статьи посвящен краткому литературному обзору исследуемой проблемы и ее актуальности.

Во втором разделе сформулирован принцип наименьшего действия. Получена дивергентная форма законов сохранения. Указана форма вектора тока в условиях конечных вариаций.

Третий раздел статьи посвящен проблемам вывода условий совместности сильных разрывов на распространяющихся в трехмерном пространстве поверхностях. Вводится понятие скачка физического поля. Получены 4-ковариантные условия совместности сильных разрывов 4-псевдотензора Пиолы–Кирхгофа и 4-псевдотензора энергии–импульса поля и их трехмерные аналоги.

Полученные в предыдущем разделе условия совместности сильных разрывов конкретизируются в четвертом разделе статьи для термоупругих микрополярных сред.

**2. Принцип наименьшего действия в механике сплошных деформируемых сред.** В основе теоретико-полевого формализма лежит принцип наименьшего действия. Интегральный функционал действия в четырехмерном пространстве–времени с элементарным естественным объемом  $d^4X = dX^1dX^2dX^3dX^4$  можно представить в виде

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(X^\beta, \varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k) d^4X, \quad (1)$$

где  $\varphi^k$  — полевые переменные,  $\partial_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) — оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате  $X^\alpha$ .

Использование естественного элемента объема подразумевает, что Лагранжиан будет являться относительным скаляром (псевдоскаляром) веса +1. При использовании

инвариантного элемента объема  $dV$ , имеющего нулевой вес, Лагранжиан будет абсолютным скаляром.<sup>1</sup>

Согласно принципу наименьшего действия ( $\delta$  — символ первой вариации интегрального функционала)

$$\delta\mathfrak{S} = 0,$$

т.е. действие (1) экстремально для всех допустимых вариаций физических полей  $\varphi^k$  и неварьируемых пространственных координатах  $X^\alpha$ .

Законы сохранения при использовании теоретико-полевого формализма записываются через вектор тока в дивергентной форме

$$\partial_\beta J^\beta = 0,$$

причем вектор тока  $J^\beta$  вычисляется в терминах конечных вариаций согласно

$$J^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \delta' \varphi^k + \left( \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right) \delta' X^\alpha. \quad (2)$$

где  $\delta'$  обозначает конечную вариацию.

Первая вариация действия (1) для конечных вариаций физических полей и пространственно-временных координат получается в виде [1]

$$\delta' \mathfrak{S} = \int (\partial_\beta J^\beta) d^4 X. \quad (3)$$

Отметим, что выражение (2) для вектора тока по существу получено Э. Нетер в 1918 г. с помощью теории вариационных симметрий интегрального функционала действия.

**3. Совместимость сильных разрывов на распространяющихся в трехмерном пространстве поверхностях.** Рассмотрим в трехмерном пространстве распространяющуюся двустороннюю поверхность  $\Sigma^\pm$ . Ее аналог  $\Sigma_4^\pm$  в четырехмерном пространстве неподвижен. Будем полагать, что физическое поле непрерывно при переходе через эту поверхность, а его пространственные градиенты терпят разрыв.

Воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса, перейдем к поверхностным интегралам в формуле (3), в итоге при закрепленных вариациях  $\delta\varphi^k$  и  $\delta X^\beta$  получим

$$\delta\mathfrak{S} = \int_{\Sigma^+} J^\beta \mathcal{N}_\beta d\Sigma - \int_{\Sigma^-} J^\beta \mathcal{N}_\beta d\Sigma, \quad (4)$$

где  $\mathcal{N}_\beta$  — 4-вектор нормали к поверхности  $\Sigma_4$ .

Отсюда при условии непрерывности вариаций  $\delta\varphi^k$  и  $\delta X^\beta$  можно получить 4-ковариантные условия совместности сильных разрывов

$$\mathcal{N}_\beta \left[ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right] = 0, \quad \mathcal{N}_\beta \left[ \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right] = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее, квадратными скобками будем обозначать скачки заключенных в них величин при переходе через поверхность  $\Sigma_4$ .

<sup>1</sup>Заинтересованный читатель может найти теорию относительных тензоров (псевдотензоров) в многомерных пространствах (в нашем случае, четырехмерных пространствах) в классических руководствах по тензорному анализу и многомерной геометрии [4–13].

Приняв обозначения для 4-псевдотензора Пиола—Кирхгофа и 4-псевдотензора энергии—импульса поля

$$S_4^{\beta \cdot k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad T_{\cdot \alpha}^{\beta \cdot} = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad (6)$$

условия совместности (5) можно преобразовать к трехмерной форме

$$\begin{aligned} -c [T_{\cdot 4}^{\lambda \cdot}] + n_\mu [T_{\cdot 4}^{\mu \cdot}] &= 0, & -c [T_{\cdot \lambda}^{\lambda \cdot}] + n_\mu [T_{\cdot \lambda}^{\mu \cdot}] &= 0 & (\lambda, \mu = 1, 2, 3), \\ -c [S_4^{\lambda \cdot k}] + n_\mu [S_4^{\mu \cdot k}] &= 0 & (\mu = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $c$  — нормальная скорость распространения поверхности  $\Sigma$ ,  $n_\mu$  — единичный вектор 3-нормали.

Условия совместности для сильных разрывов физических полей необходимо дополнить геометрическими и кинематическими условиями совместности Адамара—Томаса [14] второго и первого порядка справедливыми для произвольного поля  $\varphi^k$ .

**4. Условия совместности сильных разрывов в термоупругих микрополярных средах.** Псевдоскалярную плотность действия в (1) зададим в форме

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_R g_{kj} \partial_4 x^k \partial_4 x^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{ij} \overset{ab}{\mathcal{J}} \partial_4 d^i_a \partial_4 d^j_b - \psi(X^\alpha, x^j, d^j_a, \vartheta, \partial_4 \vartheta, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d^j_a, \partial_\alpha \vartheta). \quad (8)$$

Здесь  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) — лагранжевы координаты;  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — эйлеровы координаты;  $d^j_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) — директоры, детерминирующие микроповорот;<sup>2</sup>  $\vartheta$  — температу-

ратурное смещение. Здесь  $\overset{ab}{\mathcal{J}}$  — тензор микроинерции,  $\rho_R$  — референциальная плотность,  $g_{ij}$  — метрический тензор пространства,  $\psi$  — псевдоплотность свободной энергии Гельмгольца.

Уравнения поля в этом случае принимают вид:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^{\alpha \cdot} - \partial_4 P_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} & (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{a}{\mathcal{M}}_j^{\alpha \cdot} + \overset{a}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 (\overset{a}{\mathcal{Q}}_j) &= 0 & (a = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \partial_4 s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} & (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (9)$$

и дополняются определяющими уравнениями:

$$\begin{aligned} S_j^{\alpha \cdot} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, & \overset{a}{\mathcal{M}}_j^{\alpha \cdot} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d^j_a)}, & \overset{a}{\mathcal{A}}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_a}, \\ P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 x^j)}, & \overset{a}{\mathcal{Q}}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 d^j_a)}, & s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \vartheta)}, & j_R^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}. \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>2</sup>Отметим, что микроповорот может быть как малым, так и конечным.

Условия совместности на поверхности сильного разрыва поля в микрополярной среде, согласно (7), записываются в форме:

$$\begin{aligned}
 & -c[\mathcal{L} - P_l \partial_4 x^l - \overset{a}{Q}_l \partial_4 d^l - s \partial_4 \vartheta] + n_\mu [S_{.l}^{\mu} \partial_4 x^l + \overset{a}{M}_{.l}^{\mu} \partial_4 d^l - j_R^{\mu} \partial_4 \vartheta] = 0, \\
 & c[P_l \partial_\lambda x^l + \overset{a}{Q}_l \partial_\lambda d^l + s \partial_\lambda \vartheta] + n_\mu [\mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S_{.l}^{\mu} \partial_\lambda x^l + \overset{a}{M}_{.l}^{\mu} \partial_\lambda d^l - j_R^{\mu} \partial_\lambda \vartheta] = 0, \\
 & c\rho_{Rgkl} [\partial_4 x^k] = n_\mu [S_{.l}^{\mu}], \quad c\rho_{Rgkl} \overset{ab}{J} [\partial_4 d^k] = n_\mu [\overset{a}{M}_{.l}^{\mu}], \\
 & c[s] = n_\mu [j_R^{\mu}] \quad (l, \lambda, \mu = 1, 2, 3).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

### 5. Заключение и выводы.

- (1) Рассматривается конвенциональная процедура вывода условий совместности на поверхностях сильных разрывов в термоупругих микрополярных континуумах.
- (2) Теоретико-полевой формализм дополняется аппаратом алгебры и анализа относительных тензоров в четырехмерном пространстве.
- (3) Условия совместности сильных разрывов 4-псевдотензора Пиолы–Кирхгофа и 4-псевдотензора энергии–импульса выводятся из принципа наименьшего действия.
- (4) Сформулированы условия совместности на распространяющейся в трехмерном пространстве поверхности сильного разрыва перемещений, температурных перемещений и микровращений для микрополярного термоупругого континуума.
- (5) Развитую в работе псевдотензорную формулировку условий совместности сильных разрывов можно применять в динамике изотропных и гемитропных микрополярных термоупругих сред.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. Физматлит, 2009. 156 с.
- [2] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
- [3] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
- [4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.
- [5] Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Papers: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci et al. Brookline: Math Science Press, 1975. Vol. 2. 260 p.
- [6] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
- [7] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
- [8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [9] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [10] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [11] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007. XII+290 p.
- [12] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.
- [13] Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 547 с.
- [14] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York: Academic Press, 1961. 267 с.

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev*

## COMPATIBILITY OF STRONG DISCONTINUITIES IN MICROPOLAR THERMOELASTIC MEDIA. A PSEUDOTENSOR FORMULATION

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper deals with the regular procedures for deriving compatibility conditions on the surfaces of strong discontinuities in thermoelastic micropolar media. The jump conditions of the Piola–Kirchhoff 4-pseudotensor and the energy-momentum 4-pseudotensor are derived from the principle of least action. The compatibility conditions on the propagating strong discontinuity surface are explicitly formulated for a micropolar thermoelastic continuum. The developed pseudotensor formulation of the compatibility conditions for strong discontinuities can be applied to the dynamic problems for isotropic and hemitropic micropolar thermoelastic media.

**Keywords:** microstructure, micropolarity, director, strong rupture, compatibility condition, Lagrangian, isotropy, hemitropia, additive technologies

### REFERENCES

- [1] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants. FIZMATLIT, 2009. 156 p.
- [2] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov University Press, 2010. 328 p.
- [3] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
- [4] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
- [5] Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci et al. Brookline: Math Science Press, 1975. Vol. 2. 260 p.
- [6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
- [7] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
- [8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [9] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [10] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [11] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007. XII+290 p.
- [12] Rosenfeld B. A. Multidimensional Spaces. Moscow: Nauka, 1966. 648 p.
- [13] Rosenfeld B. A. Non-euclidean Spaces. Moscow: Nauka, 1969. 547 p.
- [14] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York: Academic Press, 1961. 267 c.

---

*Evgenii V. Murashkin*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.  
*Yuri N. Radayev*, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

**ИНФОРМАЦИЯ О ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ СЕМИНАРАХ  
В ИНСТИТУТЕ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ  
ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО РАН  
СЕМИНАР ЛАБОРАТОРИИ МЕХАНИКИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ ИПМЕХ РАН**

*под руководством д.ф.-м.н. Лисовенко Дмитрия Сергеевича*

10 июня 2019 г.

*А.В. Волков*

**ПРИМЕНЕНИЕ МИКРО-ДИЛАТАЦИОННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ  
УТОЧНЁННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРИСТЫХ  
МАТЕРИАЛОВ**

*Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgru.2020.44.2.016

**Аннотация.** Доклад по материалам кандидатской диссертации. Будут представлены следующие результаты: Разработка методов уточненного описания пористых материалов, с использованием микро-дилатаций, и разработка теоретической базы для идентификации материальных констант микро-дилатационной теории на основе простых экспериментальных методик. Построение аналитических и численных решений в рамках микродилатационной теории упругости и термоупругости для прикладных задач деформациях балки, слоя, полого цилиндра. Сравнение результатов численных и аналитических решений для проверки точности реализованных численных методов моделирования и для исследования областей возможного применения простых аналитических решений, без привлечения численного моделирования. Исследование неклассических масштабных эффектов, возникающих в задачах микродилатационной теории упругости.

---

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 18-01-00844.

14 июня 2019 г.

М.А. Гоник

## ВЫРАЩИВАНИЕ МОНОКРИСТАЛЛОВ В СТРОГО КОНТРОЛИРУЕМЫХ ТЕПЛОВЫХ УСЛОВИЯХ

*ООО «Центр материаловедения «Фотон», г. Москва, Россия*

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.017

**Аннотация.** В представленной работе рассматривается установление основных закономерностей формирования совершенных по структуре и однородных по составу кристаллов, а также разработка физико-технологических основ выращивания монокристаллов широкого класса материалов из тонкого слоя расплава методом осевого теплового потока на фронте кристаллизации (ОТФ методом). Для достижения поставленной цели решались следующие задачи: исследование численными методами тепло- и массопереноса при росте кристаллов; обеспечение расчетов теплофизическими данными о кристалле и его расплаве; проектирование и изготовление оборудования для выращивания кристаллов и изучения закономерностей формирования их структуры; разработка автоматической системы, обеспечивающей создание необходимых тепловых условий при росте кристаллов и их поддержание в течение всего цикла кристаллизации; изучение особенностей выращивания кристаллов с использованием погруженного в расплав нагревателя.

18 сентября 2019 г.

Ю.Н. Радаев, Е.В. Мурашкин

## ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА Г.И. БЫКОВЦЕВА В МЕХАНИКЕ РАСТУЩИХ КONTИНУУМОВ

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.018

**Аннотация.** В представленной работе предлагается методика постановки граничных условий в краевых задачах механики растущих тел. При выводе определяющих соотношений на поверхности наращивания используется аппарат алгебры рациональных инвариантов. Проведен вывод различных вариантов физически непротиворечивых дифференциальных ограничений на поверхности наращивания. Полученные условия справедливы для весьма широкого круга материалов и метаматериалов. Для использования сформулированных дифференциальных ограничений в конкретных приложениях необходима их экспериментальная идентификация. По этой причине полученные результаты могут служить общей основой в прикладных исследованиях по механике растущих тел. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда проект № 17-19-01257.

25 сентября 2019 г.

*Д.В. Гандилян*

### **ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛАСТИНЕ С ДВУМЯ КРУГЛЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.019

**Аннотация.** В настоящей работе рассмотрена задача о двух равных отверстиях в плоскости при равномерном всестороннем растяжении с учетом эффектов поверхностной упругости. Задача решается в приближении плоской деформации с использованием биполярных координат и разложения в ряд. Решение представляет интерес для случая достаточно близких отверстий. В этом случае, несмотря на довольно простую геометрию, из-за небольшого расстояния между отверстиями можно ожидать появления сравнительно значимых различий между поверхностными и объемными свойствами.

05 ноября 2019 г.

*Д.М. Идрисов*

### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСЛОЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.020

**Аннотация.** Рассматривается задача о полосе, состоящей из двух ортотропных упругих слоев, разделенных полу-бесконечной трещиной, расположенной вдоль линии между слоями. Предполагается, что упругие слои имеют отношение толщин один к двум, а также разные упругие константы, ограниченные определенными условиями (равенство нулю второго параметра Дандура, условие дегенеративности и т.д.). Для рассматриваемой задачи выполнено численное моделирование в программном комплексе МКЭ, для четырех различных комбинаций приложенных сил и моментов. Механическая нагрузка была приложена на расстояние равное двадцатикратной ширине пластины. По полученным распределениям компонент тензора напряжений, вдоль линии, разделяющей два слоя, с помощью прямого метода рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений. Показано, что полученные результаты соответствуют аналитическому решению для случая, когда нагрузка приложена на бесконечности.

06 ноября 2019 г.

*E. T. Akinlabi, S. A. Akinlabi\*, R. M. Mahamood, E. V. Murashkin*

**ADDITIVE MANUFACTURING TECHNOLOGY: LASER MATERIAL  
PROCESSING AND FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS**

*University of Johannesburg, Johannesburg, South Africa*

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН*

УДК: 539.374

DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.021

**Abstract.** Professor Akinlabi's research and her team has focused on the field of advanced and modern manufacturing processes like Laser Additive Manufacturing (AM), in particular laser material processing. Her other research work is focused on laser metal deposition and functionally graded materials of titanium-based alloys and other materials. Some of the studies she has been involved in focus on cladding titanium with titanium carbide for enhanced wear properties, the cladding of titanium alloy biological implants with hydroxyapatite (HAP) for improved osteo-integration, and the cladding of Grade 5 titanium alloy with copper for improved corrosion properties for marine applications. Akinlabi focuses her investigations on the development of advanced metallic coatings on Ti-6Al-4V substrate using additive manufacturing technology for improved surface performance; with targeted applications in the aerospace, automotive, and shipbuilding industries. This work makes a substantial contribution to knowledge by bringing the theoretical clarity and experimental studies required for the effective assessment of surface degradation mechanisms in additive manufactured Ti-6Al-4V alloy. This is ascribed to the elimination of high residual stresses and crack formation through the optimization of laser processing parameters, leading to enhanced quality of the coatings, surface adhesion between the substrate and the reinforcement materials, microstructural evolution and thus improved mechanical properties. Her research was developed to produce advanced innovative corrosion-wear resistant coatings with enhanced hardness, tribological property, and sustainable anti-corrosion performance thereby, consequently lengthening the lifespan and durability of titanium and its alloys, eliminating material loss and equipment damage, minimizing cost of maintenance, and reduced failure of this material. Despite all the benefits derived from AM technology, there are still a lot of unresolved issues with the technology that has hindered its performance and commercialisation thereby limiting its application to high tolerant utilizations. Professor Akinlabi research on additive manufacturing techniques had produced near-net-shape, light weight and high strength components which has gradually revolutionized the manufacturing sector. The use of the technology is now providing sustainable production benefits, as ability to repair and manufacture components can now be employed to increase product life circle. Against this background, the Additive Manufacturing technology is in itself referred to as a technology of the future despite its versatile applications in the industry. On the other hand, Functionally Graded Materials (FGMs) are advanced materials usually developed for specific and tailored applications. The FGMs also referred to as materials of the future as its applications are not yet fully explored for tailored applications. In this talk, Prof Akinlabi shared some of her research endeavours in the field of AM and FGMs, and also shared the scope on the primary objectives of the joint project which was to be undertaken on FGM of Titanium alloy and Titanium Carbide.

The study was supported by SA (NRF) / RUSSIA (RFBR) joint science and technology research collaboration (project No. RUSA180527335500/19-51-60001).

\*Prof E. T. Akinlabi is now Director, Pan African University for Life and Earth Sciences Institute, Ibadan, Nigeria.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (екс\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва, Россия.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

**на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Лисовенко Д. С., Осипенко Н. М., Ченцов А. В., Шифрин Е. И.</i> Механика деформирования и разрушения в работах Р.В. Гольдштейна.....	5
<i>Лебедев И. М., Шифрин Е. И.</i> Обнаружение множественных трещин в балке с помощью собственных частот поперечных колебаний.....	19
<i>Радаев Ю. Н.</i> Моделирование гармонического волнового поля в микрополярных средах четырьмя винтовыми векторными полями.....	27
<i>Верезуб Н. А., Простомолотов А. И.</i> Гидромеханическая неустойчивость в процессе выращивания кристаллов методом Чохральского.....	37
<i>Осипенко Н. М.</i> Структура разрушения при совместном действии двух механизмов локального разрушения.....	49
<i>Бондарчук Д. А., Федулов Б. Н., Ломакин Е. В.</i> Анализ влияния остаточных напряжений на возможные дефекты, полученные при изготовлении углеродно-эпоксидных композитов.....	59
<i>Перельмутер М. Н.</i> Трещина с концевой областью – раскрытие вне зоны связей и напряжения на границе соединения материалов.....	69
<i>Горячева И. Г., Торская Е. В.</i> Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений при циклическом нагружении изнашиваемых деформируемых тел с остаточными напряжениями.....	78
<i>Коробейников С. Н., Алёхин В. В., Бабичев А. В.</i> Молекулярная механика однослойных графеновых листов.....	89
<i>Мокряков В. В.</i> Локализация максимальных напряжений в осесимметричных волнах в упругих стержнях для положительных коэффициентов Пуассона.....	95
<i>Волков М. А., Демин А. И., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.</i> Двухслойные пластины из гексагональных и кубических кристаллов.....	101
<i>Кукуджанов К. В., Ченцов А. В.</i> О залечивании пористости в металле под действием высокоэнергетического электромагнитного поля.....	116
<i>Мионов Б. Г., Мионов Ю. Б.</i> Кручение стержней из анизотропно упрочняющегося материала при линеаризованном условии пластичности.....	132
<i>Михин М. Н., Мурашкин Е. В.</i> Кручение наращиваемого стержня треугольного сечения изготовленного из функционально-градиентного материала.....	139
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Совместность сильных разрывов в микрополярных термоупругих средах. Псевдотензорная формулировка.....	155

Информация о постоянно действующих семинарах в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН .....	161
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	165
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	168
СОДЕРЖАНИЕ .....	170

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2020. № 2 (44)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 23.06.2020. Выход в свет 26.06.2020.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>. Усл. печ. л. 16,5.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ №

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38