

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**  
**Научный журнал**  
**№ 2(52)**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”  
**Основатели серии:** Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.  
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

**Ответственные секретари:** С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,  
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,  
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-  
лоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

**Адрес издателя:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1182

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2022

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK  
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO  
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA  
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal  
№ 2(52)**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University  
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,  
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007  
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications  
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"  
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"  
(reg. No. 13109).

**Editor-in-chief:** B. G. Mironov

**Executive Editor:** Yu. N. Radayev

**Associate Editor:** N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

**Executive Secretary:** E. V. Murashkin, S. V. Matveev

**Editorial Board:** V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,  
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,  
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,  
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,  
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,  
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

**International Council:** V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** <http://limit21.ru>

**О ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ПРОГИБА  
БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ  
ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ ГРУНТА В МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА**

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.001

: [624.04:624.15]:519.6

**1. Введение.** При строительстве различных сооружений применяются бетонные, металлические и деревянные балки. Основу фундамента здания составляют, как правило, бетонные балки. Для обеспечения прочности, долговечности и безопасности конструкции важно знать расчетный максимальный прогиб балки на этапе проектирования.

Влияние выбора расчетной схемы (количество разбиений по длине балки) на точность решения краевой задачи для дифференциального уравнения Бернулли методом конечных разностей исследовано в работах [1–2].

**2. Основная часть.** В работе [1] исследуется влияние числа разбиений на погрешность численного решения на примере краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки Бернулли с коэффициентом постели  $k = 75000$  при действии статической нагрузки.

---

© , 2022

e-mail: [vioprokopiev@mail.ru](mailto:vioprokopiev@mail.ru),

e-mail: [sp730-1787@yandex.ru](mailto:sp730-1787@yandex.ru),

01.07.2022

Влияние величины отпора грунта в зависимости от числа разбиений в конечноразностной схеме также представляет интерес.

В данной статье исследуется влияние величины отпора грунта в зависимости от числа разбиений в конечноразностной схеме для шарнирного опирания балки Бернулли на концах.

Решается краевая задача:

$$y^{(4)}(x) + \beta y(x) = F(x), \quad 0 < x < L, \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0, \\ y(L) = y''(L) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $y$  – прогиб балки;  $x$  – координата сечения по ее длине;  $L$  – длина балки;  $\beta = \frac{k}{EJ}$ ,  $k = k_b/b_b$ ,  $EJ = EJ$ ,  $J = b_b h_b^3/12$ ,  $h_b$  и  $b_b$  – высота и ширина поперечного сечения, соответственно,  $E$  – модуль упругости,  $J$  – момент инерции поперечного сечения балки,  $k$  – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера.

Нагрузка, приложенная к балке, описывается формулой  $F(x) = \frac{P}{EJ} \delta(x - \frac{L}{2})$  (Рис. 1). Здесь  $P = 100$  кН – нагрузка, заданная в средней точке (см. рис. 1.);  $L = 8$  м,  $h_b = 1.3$  м,  $b_b = 1$  м;  $E = 2560 \cdot 10^4$  кН/м<sup>2</sup>.

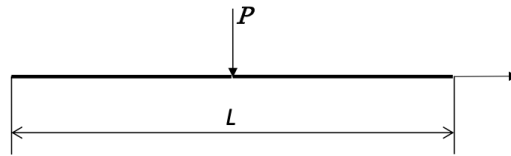


Рис. 1.

Конечноразностная схема имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &= 0, \\ y_i - 2y_{i-1} + (6 + \beta h) y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} &= f_i, \quad i = 3, 4, \dots, n-2, \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} &= f_{n-1}, \\ y_n &= f_n, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\beta h = h^4 \beta, \\ f_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ h^4 F_h(x_i), & 2 \leq i \leq n-1, \\ 0, & i = n \end{cases}, \\ F_h(x_i) = F(x_i)/h.$$

Значения коэффициента отпора грунта при расчете выбирались равными

$$k = 0, 25000, 50000, 75000.$$

Решения систем линейных алгебраических уравнений выполнялись для числа делений  $N = 2, 4, 16, 100, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 10000$  по программе, составленной на языке программирования MATLAB. Расчеты выполнялись на 32 разрядном персональном компьютере.

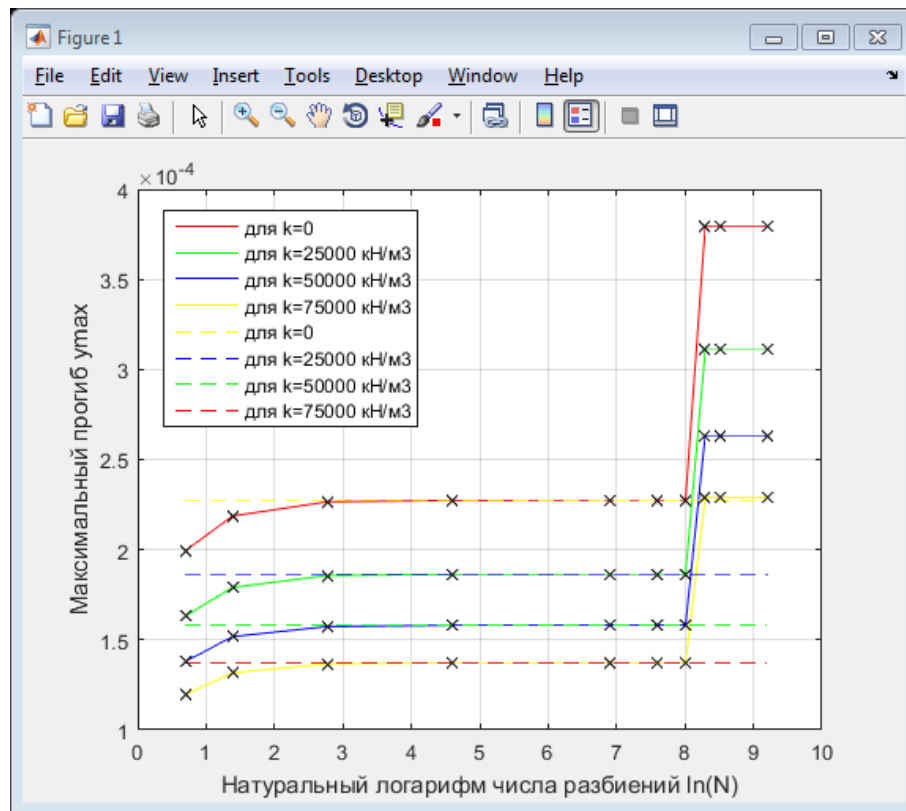
Аналитическое решение при любом  $k$  имеет вид [4]

$$y(\xi) = \frac{Q_0}{EJ\lambda^3} Y_4(\xi) + \frac{\varphi_0}{\lambda} Y_2(\xi) \Big|_{(1)} + \frac{P}{EJ\lambda^3} Y_4\left(\xi - \frac{\lambda L}{2}\right) \Big|_{(2)}$$

$Q_0$  – это значение поперечной силы в начале балки;  $\xi = \lambda x$ ,  $\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb_b}{4EJ}}$ ;  $\varphi_0$  – значение угла поворота в начале балки;  $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$  – функции Крылова, имеющие вид

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= ch\xi \cos\xi, \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2}(ch\xi \sin\xi + sh\xi \cos\xi), \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2}sh\xi \sin\xi, \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4}(ch\xi \sin\xi - sh\xi \cos\xi). \end{aligned}$$

**3. Анализ результатов расчета.** Максимальные прогибы балки, полученные из решения краевой задачи для дифференциального уравнения (1) и краевых условий (2) методом конечных разностей, при разных значениях  $k$  с соответствующие аналитические решения (пунктирные линии) приведены на рис. 2 и в таблице 1.



$k =$		0	25000 кН/м <sup>3</sup>	50000 кН/м <sup>3</sup>	75000 кН/м <sup>3</sup>
Аналитические решения		0,2276 мм	0,1865 мм	0,1581 мм	0,1373 мм
$N = 2$	МКР	0,1994 мм	0,1631 мм	0,1379 мм	0,1196 мм
	Оп в %	14,14	14,35	14,65	14,8
$N = 4$	МКР	0,2187 мм	0,1791 мм	0,1518 мм	0,1317 мм
	Оп в %	4,07	4,13	4,15	4,25
$N = 16$	МКР	0,2266 мм	0,1857 мм	0,1574 мм	0,1367 мм
	Оп в %	0,44	0,43	0,44	0,44
$N = 10^2$	МКР	0,2274 мм	0,1864 мм	0,1581 мм	0,1373 мм
	Оп в %	0,09	0,05	0	0
$N = 10^3$	МКР	0,2276 мм	0,1865 мм	0,1581 мм	0,1373 мм
	Оп в %	0	0	0	0
$N = 2 \cdot 10^3$	МКР	0,2276 мм	0,1865 мм	0,1581 мм	0,1374 мм
	Оп в %	0	0	0	0,07
$N = 3 \cdot 10^3$	МКР	0,2276 мм	0,1865 мм	0,1581 мм	0,1373 мм
	Оп в %	0	0	0	0
$N = 4 \cdot 10^3$	МКР	0,3793 мм	0,3108 мм	0,2635 мм	0,2289 мм
	Оп в %	39,99	39,99	40	40,02
$N = 5 \cdot 10^3$	МКР	0,3793 мм	0,3108 мм	0,2635 мм	0,2289 мм
	Оп в %	39,99	39,99	40	40,02
$N = 10^4$	МКР	0,3793 мм	0,3108 мм	0,2635 мм	0,2289 мм
	Оп в %	39,99	39,99	40	40,02

1.

 $N = n - 1$ .

Обозначения в таблице: МКР – результат решения методом конечных разностей; Оп в % - отличие прогибов в %.

**4. Заключение.** Таким образом, можно сделать вывод, что при увеличении коэффициента постели максимальный прогиб балки уменьшается. Если число разбиений балки в методе конечных разностей слишком маленькое, то значение максимального прогиба будет меньше точного. Если число разбиений балки в методе конечных разностей слишком большое, то значение максимального прогиба будет больше точного.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] //
- [2] Jurgen Dankert. Numerische methoden der mechanic. VEB FACHBUCHVERLAG: LEIPZIG, 1977. 318 p.
- [3] , 1995. 568
- [4] 1.
- " . 1968. 832

V. I. Prokopiev, P. E. Sturnik

ON THE ACCURACY OF SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM  
FOR THE BERNOULLI DIFFERENTIAL EQUATION OF BEAM DEFLECTION  
BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD DEPENDING ON THE  
COEFFICIENT OF THE SOIL BED IN THE WINKLER MODEL

*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

*Abstract.* The influence of the bed coefficient in the Winkler model on the error of the numerical solution by the finite difference method is investigated by the example of the boundary value problem for the differential equation of the deflection of the Bernoulli beam under the action of static load.

*Keywords:* bed coefficient, Winkler model, finite difference method, error, boundary value problem, system of linear algebraic equations, matrix

### REFERENCES

- [1] Prokopiev V. I., Sturnik P. E. Evaluation of the accuracy of solving the boundary value problem for the differential equation of the beam deflection by the method of finite differences. // Vestnik of the I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2021. No 4 (50). P. 53–58.
- [2] Jurgen Dankert. Numerische methoden der mechanic. VEB FACHBUCHVERLAG: LEIPZIG, 1977. 318 p.
- [3] Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. Resistance of materials with the basics of the theory of elasticity and plasticity. Textbook edited by G.S. Vardanyan. M.: Publishing House of the ACU, 1995. 568 p.
- [4] Strength, stability, vibrations. Handbook in three volumes. Volume 1. Ed. Dr. tech. sciences prof. I. A. Birger and Corresponding Member Academy of the Latvian SSR Ya. G. Panovko. M.: Publishing House "Mechanical engineering". 1968. 832 pp.

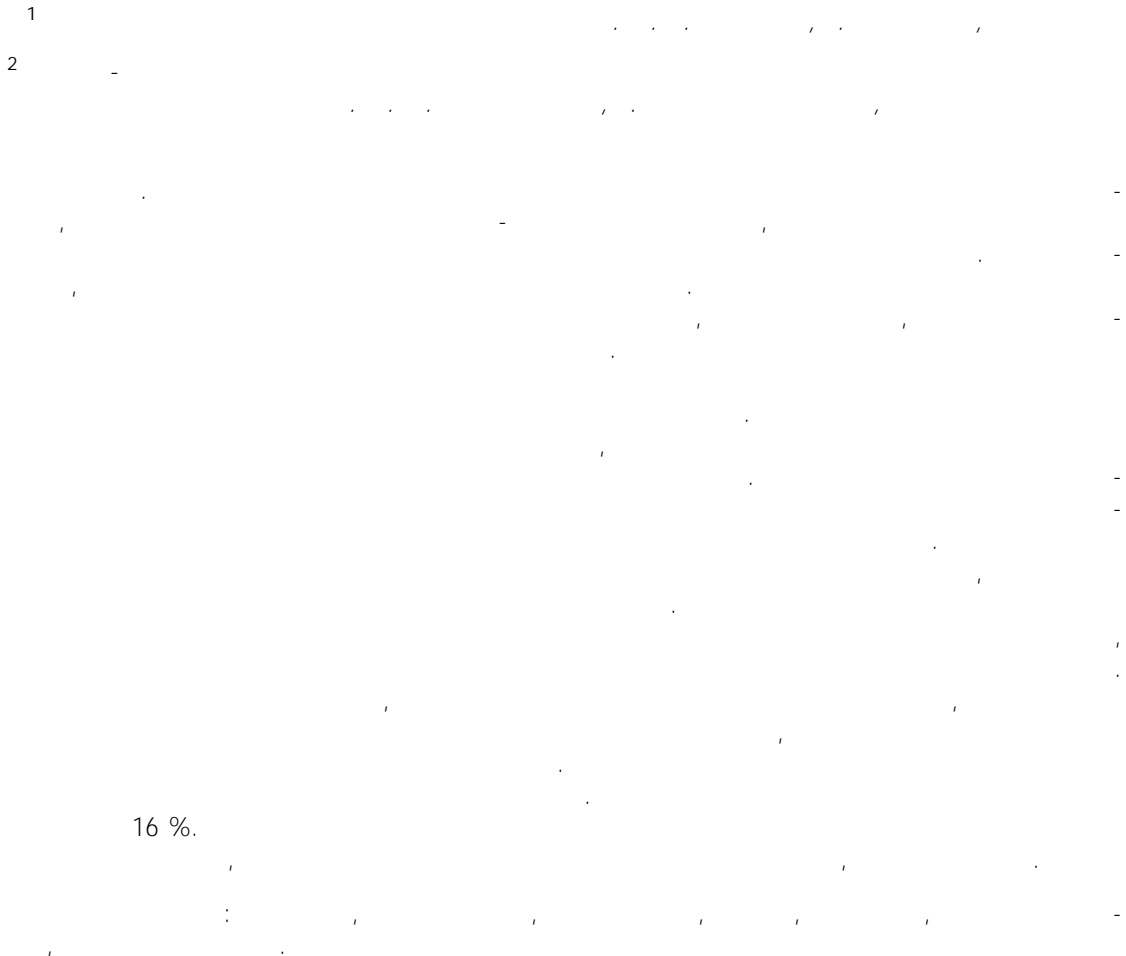
---

*Prokopiev Valery Ivanovich*, Professor, Candidate of Technical Sciences, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

*Sturnik Pavel Eduardovich*, Undergraduate Student, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

1, . . . 2, . . . 1, . . . 1, . . . 1

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ  
ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ  
ДЛИНЫ, ЗАПОЛНЕННЫХ СЫПУЧИМ МАТЕРИАЛОМ, ПРИ  
КРУЧЕНИИ**



16 %.

**Введение.** Много элементов конструкций машиностроения, самолетостроения типа тонкостенных оболочек. Расчеты на прочность и устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек рассмотрены в многочисленных работах [15-18,21-25]. В этих работах исследуются пустые и заполненные различными жидкими продуктами оболочки под действием различных нагрузок. В работах [18-20] выполнены теоретические и экспериментальные исследования устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, при изгибе. Оказалось, что устойчивость оболочек, заполненных сыпучим материалом, при изгибе возрастает. Автоцистернами перевозятся различные сыпучие грузы (мука, песок, сельхозпродукты и т.д.). При перевозке цистерны, представляющие собой тонкостенную цилиндрическую оболочку, испытывают действие изгибающих и крутящих моментов.

Устойчивость тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом, при кручении мало исследовано [4], поэтому исследование этой проблемы весьма актуально. Не разработана методика оперативного, приближенного их расчета на устойчивость.

**Цель работы.** Выполнение экспериментальных исследований устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, при кручении, разработка приближенного метода расчета их на устойчивость.

**Методика расчета.** Для определения давления сыпучей среды на внутреннюю поверхность образца воспользуемся методикой [1], принимая для заполнителя условия идеально сыпучей среды.

Рассечем образец на две равные части. На рис.1 показана схема действия сил поперечным сечением на середине длины образца.

Обозначим геометрические размеры образца  $L$  – длина,  $r$  – радиус срединной поверхности.

Сила гидростатического давления на сечение ABC равна:

$$F_x = \gamma H L h_c, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – удельный вес сыпучей среды,  $H$  – расстояние от верхнего уровня заполнителя до нижней точки,  $h_c$  – расстояние от верхнего уровня заполнителя до центра давления.

---

© 2022

e-mail: rimmapirova20@gmail.com,

e-mail: kibec@mech.unn.ru,

e-mail: boris.mihaylov.63@mail.ru,

e-mail: katya.gonik@mail.ru,

e-mail: 2605viktor@mail.ru,

03.07.2022

Сила собственного веса заштрихованного объёма  $G$  равна:

$$G = \gamma V, \quad (2)$$

где  $V$  – объём, занимаемый сыпучей средой.

Реакцию оболочки на действие сыпучей среды обозначим  $R$ . Спроектируем силу  $R$  на  $X$  и  $Z$ , получим  $R_x$  и  $R_z$ .

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum x = 0; \quad F_x - R_x = 0 \text{ откуда } R_x = F_x, \\ \sum z = 0; \quad R_z - G = 0 \text{ откуда } R_z = G. \end{aligned}$$

Реакция цилиндрической поверхности:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = \sqrt{(\gamma V)^2 + (\gamma S_x h_c)^2}, \quad (3)$$

где  $S_x = \pi r L$ .

Суммарное давление сыпучей среды  $P$  на внутреннюю поверхность отсечённой части образца (рис. 1):

$$P = R. \quad (4)$$

Сила трения между поверхностями заполнителя и внутренней стенкой образца  $F$  равна:

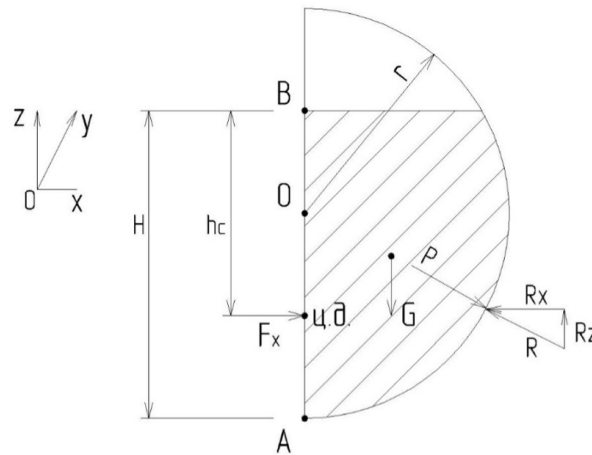
$$F = 2 P k, \quad (5)$$

где  $k$  – коэффициент внешнего трения, коэффициент два учитывает две одинаковые отсечённые части образца.

Крутящий момент от силы трения  $M$  равен:

$$M = F r. \quad (6)$$

Крутящий момент от силы трения противодействует внешнему крутящему моменту и увеличивает критический крутящий момент. Зависимость (6) позволяет исследовать влияние сыпучего заполнителя на величину критического крутящего момента.



Если известно опытное значение критического крутящего момента для пустых образцов  $M_{cr}^{01}$ , тогда величина крутящего момента для заполненных сыпучим материалом образцов  $M_{cr}^0$  равен:

$$M_{cr}^0 = M_{cr}^{01} + M. \quad (7)$$

Если неизвестно  $M_{cr}^{01}$ , то можно рассчитать величину критического крутящего момента для заполненных сыпучим материалом образцов  $M_{cr}^0$  следующим образом:

В работе [2] верхнее критическое касательное напряжение для пустых оболочек рассчитывается по формуле 13.120:

$$S_B = 0,78 E \frac{h}{R} \sqrt[4]{\frac{R h}{L^2}}. \quad (8)$$

Для практических расчетов рекомендуется вычислять критическое касательное напряжение:

$$S_{cr} = 0,8 S_B \quad (9)$$

Критический крутящий момент  $M_{cr}^{\bar{}}$  равен:

$$M_{cr}^{\bar{}} = S_{cr} 2\pi R^2 h. \quad (10)$$

Тогда расчетное значение критического крутящего момента  $M_{cr}^P$  для заполненных оболочек равно:

$$M_{cr}^P = M_{cr}^{\bar{}} + M. \quad (11)$$

В расчетных формулах неизвестно расстояние от верхнего уровня заполнителя до нижней точки  $H$ , которое зависит от процента заполнения сыпучим материалом.

Площадь поперечного сечения, занимаемого заполнителем равен:

$$S = \frac{\Pi S_1}{100} \quad (12)$$

где  $S_1 = \pi r^2$  - площадь поперечного сечения образца;  $\Pi$  - процент заполнения образца.

Площадь поперечного сечения сегмента кругового, не занятого заполнителем равен:

$$S_c = S_1 - S. \quad (13)$$

Для расчёта геометрических размеров сегмента воспользуемся таблицей 1.1.1.15 [3] Табличное значение площади сегмента равен

$$S = \frac{S_c}{r^2}. \quad (14)$$

По значению  $S$  определяем стрелку сегмента  $h_T$

Стрелка сегмента заполненного образца:

$$h = h_T r. \quad (15)$$

Расстояние от верхнего уровня заполнителя до нижней точки равен:

$$H = 2r - h. \quad (16)$$

Расстояние от верхнего уровня, сыпучей среды до центра давления, примем как для идеально сыпучей среды:

$$h_c = \frac{2}{3} H. \quad (17)$$

**Результаты испытания.** Для проверки методики расчета выполнены экспериментальные исследования.

Эксперименты выполнялись на экспериментальной установке, описанные в работе [4]. Один конец образцов жестко закреплялся, к другому концу прикладывался крутящий момент. Размеры образцов приведены в таблице 1.

№ серии	Радиус $r$ , мм	Толщина стенки $h$ , мм	Длина $L$ , мм	$L/R$
1	31,5	0,1	140	4,45
2	31,5	0,1	90	2,86
3	31,5	0,1	25	0,79

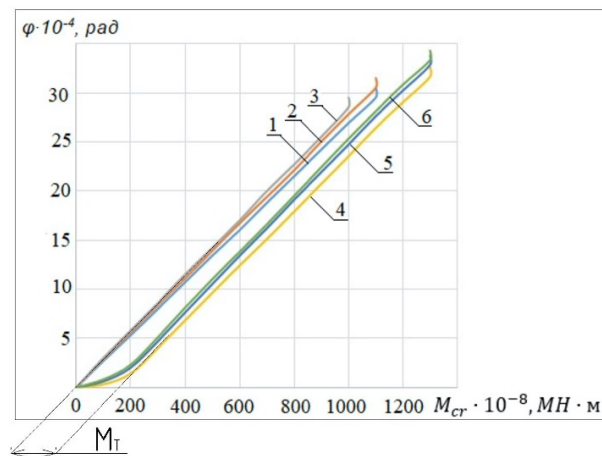
1.

Результаты испытаний и расчетов приведены в таблице 2.

серия образцов	$M_{cr}^{01}$ , Н см	$M_{cr}^0$ , Н см	$M_{cr}^{\bar{}}$ , Н см	$M$ , Н см	$M_{cr}^P$ , Н см	$\frac{M_{cr}^0 \cdot M_{cr}^P}{M_{cr}^0}$ 100%
1	1094	1154	1094	47,15	1141	7,7
2	1103	1290	1207	30,7	1238	4
3	1745	1986	2294	8,41	2302,41	16

2.

Как пример результаты испытаний образцов второй серии приведены на рис . 2.



. 2.

4,5,6

90%

1,2,3

На рис 2.  $\varphi$  – означает угол закручивания образца при соответственном крутящем моменте.

Графики линейные, потеря устойчивости происходило в упругости. Для пустых и заполненных, железным порошком образцов, графики параллельные кроме начальных участков, где происходило влияние силы трения между порошком и внутренней стенкой образцов. Графики 4,5,6 смещены на  $M$  по отношению к графикам 1,2,3. Для третьей серии коротких образцов образцов получено большое расхождение до 16 % критического крутящего момента (табл. 2), потому что формула (8) выведена для оболочек средней длины.

Чтобы убедиться в правильности предположении о влиянии силы трения на крутящий момент были выполнены опыты с обмазкой внутренней стенки образцов смазочным материалом. В этом случае для обмазанных образцов критический крутящий момент совпадал с критическим крутящим моментом для пустых образцов.

Результаты расчетов критических крутящих моментов удовлетворительно совпадают с результатами экспериментов (табл. 2). Следовательно, разработанную методику расчетов можно использовать для практических расчетов критического крутящего момента тонкостенных цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим наполнителем, при кручении.

### Заключение

- (1) Разработана приближённая методика расчета на устойчивость при кручении цилиндрических тонкостенных оболочек, заполненных сыпучим материалом.
- (2) Для заполненных сыпучим материалом оболочек при кручении на критический крутящий момент влияет сила трения между наполнителем и внутренней стенкой оболочки.
- (3) Сыпучий наполнитель увеличивает значение критического крутящего момента.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] ... 2015, 277 .
- [2] ... , 1967. 984 .
- [3] ... , 1964. 607 .
- [4] ...
- // ... 2021 : ... III
- ( ... , 23-24 ... 2021 . ) . 71-78 .
- [5] 1960. 227 .
- [6] ... , 1977. 141 .
- [7] ... //
- ... , 2012. 2 . . 59-67 .
- [8] ... //
- ... . 2012. 3 .
- 47-53 .
- [9] // ... . 9. 3. 1978.
- [10] // ... . 1973. . 9. 1. . 117-121 .
- [11] ... , 1978. 360 .

- [12] . . . . . 1983. . . . . - . . . . .
- [13] . . . . . // . . . . .
- [14] . . . . . 2. 1977. C. 94-99. . . . .
- [15] 1987. 260 . . . . . - . . . . .
- [16] . . . . . // . . . . .
- [17] . . . . . , 1989. C. 89-98 . . . . .
- [18] . . . . . 2 . . . 1. . . . . , 2007. . . . .
- [19] 448 . . . . .
- [20] . . . . . , 1977. 331 . . . . .
- [21] // . . . . . , 1978. . . . .
- [22] 10. . . 97-103. . . . .
- [23] . . . . . - . . . . . // . . . . .
- [24] . . . . . C . . . . . , 2017. . . 159. . . 282-295 . . . . .
- [25] . . . . . IV . . . . . ( X . . . . . ) . . . . .
- [26] . . . . . , 2018. . . 148-156 . . . . .
- [27] . . . . . // . . . . . , 2008. . . 70. . . . .
- [28] 89-97 . . . . .
- [29] Cerik B. C., Shin H. K., Cho S. R. A comparative study on damage assessment of tubular members subjected to mass impact // Marine Structures. 2016. V.46. P. 1-29 .
- [30] Dou Y., Liu Y. Computational investigation of lateral impact behavior of pressurized pipelines and influence of internal pressure // Thin-Walled Structures. 2015 . V. 95. P. 40-47.
- [31] Houliara S., Karamanos S.A. Stability of long transversely isotropic elastic cylindrical shells under bending // International Journal of Solids and Structures . 2010. V. 47. No 1 . P. 10-24.
- [32] Arbocz J., Babcock Experimental investigation of the effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells . NASA CR - 1163. 1968.
- [33] Chong J., Gao F. Y., Li X. H. Dynamic buckling behaviors of steel cylindrical shell subjected to conventional explosion impact loading // Advanced Materials Research . 2013. V.800. P. 196-200 .

M. V. Petrov<sup>1</sup>, A. I. Kibets<sup>2</sup>, B. V. Mikhailov<sup>1</sup>, E. G. Gonik<sup>1</sup>, V. A. Ivanov<sup>1</sup>

APPROXIMATE METHOD FOR CALCULATING THE STABILITY OF  
THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS OF MEDIUM LENGTH FILLED  
WITH BULK MATERIAL DURING TORSION

<sup>1</sup>Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

<sup>2</sup>Research Institute of Mechanics, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

*Abstract.* In this work, an experimental study of the stability of cylindrical shells filled with granular material - iron powder, during torsion, was carried out and a method for the operational approximate calculation of the critical torque was developed. Experiments have shown that the stability of shells is lost in elasticity. Linear dependences of the angle of rotation of the cross sections on the torque are constructed, except for shells filled with bulk material at the initial moment of motion. Here, a nonlinear dependence of the angle of rotation of the shell sections on the torque is obtained due to the action of the torque on the friction forces between the powder and the inner wall of the sample. The dependence of the angle of rotation on the torque in both cases is parallel, but for the filled samples, the dependence was shifted by the amount of torque on the friction forces. To verify the correctness of the statement about the effect of friction force on the critical torque, experiments were performed with coating the inner wall of the samples with a lubricant. In this case, the critical torque for samples filled with bulk material coincided with the critical torque for empty samples. To calculate the torque from friction forces, the method for calculating the pressure force of a granular medium on the sample wall was used, which was multiplied by the friction coefficient and the radius of the middle surface of the sample.

The critical torque of the samples filled with iron powder was determined by the sum of the critical torque for empty samples calculated according to the Volmir formula with a torque from friction forces.

The critical torques obtained by calculation were compared with experimental values. Satisfactory convergence within 16% was obtained. The calculation method is recommended for the operational calculation of the critical torque, for shells filled with bulk material, during torsion.

*Keywords:* shell, stability, experiment, calculation, technique, bulk material, torque.

## REFERENCES

- [1] Zvereva V. N., Zemlyanaya N. V., Zemlyanoy V. V., Bocharov S. V., Yakushkina O. I., Kucherova L. V., etc. *Hydraulics, Educational and methodological complex*. Far Eastern Federal University. 2015, 277 p.

---

*Petrov Mikhail Vasilyevich*, Doctor of Engineering, Professor, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia,

*Kibets Alexander Ivanovich*, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Research Institute of Mechanics, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia,

*Mikhailov Boris Vasilyevich*, Candidate of technical Sciences, Associate Professor, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia,

*Gonik Ekaterina Grigoryevna*, Ass. Professor, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia,

*Ivanov Viktor Anatolyevich*, Senior Lecturer, Chuvash state University named after I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

- 
- [2] Volmir A.S. Stability of deformable systems. M.: Fizmatgiz, 1967. 984 p.
- [3] Bronstein I. N., Semendyaev K. A. Handbook of mathematics. M.: Nauka, 1964. 607 p.
- [4] Petrov M. V., Mikhailov B. V., Gonik E. G., Ivanov V. A. Experimental study of the buckling of thin - walled cylindrical shells with loose filler during torsion // Modern issues of mechanics 2021: Collection of articles based on the materials of the III International Continuum Conference (Cheboksary, November 23-24, 2021) . pp.71-78.
- [5] Ilyushin A. A., Ogibalov P. M. Elastic-plastic deformations of hollow cylinders. M., MGU, 1960. 227 p.
- [6] Mossakovsky V. I., Manevich L. I., Miltsyn A. M. Simulation of the bearing capacity of cylindrical shells. Kyiv: Naukova Dumka, 1977. 141 p.
- [7] Boyko D. V., Zhelezov P., Kabanov V. V. Study of nonlinear deformation and stability of non-circular cylindrical shells under transverse bending // Solid State Mechanics. 2012. No. 2. P. 59–67.
- [8] Boyko D. V., Zhelezov P., Kabanov V. V. Investigation of nonlinear deformation and stability of reinforced oval cylindrical shells under combined loading with a bending moment and an edge transverse force // Solid State Mechanics. 2012. No. 3. P. 47–53.
- [9] Shcherbakov V. T. Stability of a cylindrical shell during torsion under creep conditions // Scientific notes of TsAGI. Vol. 9. No. 3. 1978.
- [10] Vlasov V.V. Stability of Cylindrical Shells with Filler under Axial Compression and External Pressure // Applied Mech. 1973. V. 9. No. 1. P. 117–121.
- [11] Grigolyuk E. I., Kabanov V. V. Shell stability. M.: Nauka, 1978. 360 p.
- [12] Ivanov V. A. Research on the theory of shells with filler. Dissertation of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1983. Kazan.
- [13] Zaripov R. M., Ivanov V. A. Approximate calculation of the shell bending by filler. Sat // Mechanics of deformable media. 1977. No. 2. P. 94–99.
- [14] Ilgamov M. A., Ivanov V. A., Gulin B. V. Calculation of shells with elastic filler. M.: Nauka, 1987. 260 p.
- [15] Kabanov V. V., Zhelezov L. P. Nonlinear deformation and stability of a circular cylindrical shell filled with liquid // Spatial constructions in the Krasnoyarsk region. - Krasnoyarsk, 1989. P. 89–98.
- [16] Zubchaninov V. G. Stability and plasticity. In 2 t. T. 1. Stability. M.: Fizmatlit, 2007. 448 p.
- [17] Ilgamov M. A., Ivanov V. A., Gulin V. Strength, stability and dynamics of shells with elastic filler. M.: Science, 1977. 331 p.
- [18] Safiullin F.Kh. To the bending of cylindrical shells with filler under local loads. Sat: Researches on the theory of shells // Proceedings of the KIPT KFAN USSR seminar. Kazan, 1978. Issue. 10. P. 97-103.
- [19] Bazhenov V. G., Gonik E. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Fedorova T. G., Frolova I. A. Experimental elastoplastic and theoretical study of buckling of cylindrical shells filled with bulk material under the action of a transverse force // Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Series - mathematical sciences. 2017. Vol. 159. P. 282–295.
- [20] Petrov M. V., Fedorova T. G., Mikhailov B. V., Gonik E. G., Pfanenstil N.G. Influence of imperfections in the geometry of thin - walled cylindrical shells filled with bulk material on their bending stability // New in architecture , design of building structures and reconstruction . Proceedings of the IV International (X All-Russian) Conference. 2018. P. 148–156
- [21] Bazhenov V. G., Kibets A. I., Petrov M. V., Shoshin D. V. Numerical Analysis of Deformation, Loss of Stability and Supercritical Behavior of Large Tanks for Automobile Transportation of Bulk Cargoes //Problems of Strength and Plasticity . 2008. No. 70. P. 89–97.
- [22] Cerik B. C., Shin H. K., Cho S. R. A comparative study on damage assessment of tubular members subjected to mass impact // Marine Structures . 2016. V.46. P. 1–29 .
- [23] Dou Y., Liu Y. Computational investigation of lateral impact behavior of pressurized pipelines and influence of internal pressure // Thin-Walled Structures. 2015. V. 95. P. 40–47.
- [24] Houliara S., Karamanos S.A. Stability of long transversely isotropic elastic cylindrical shells under bending // International Journal of Solids and Structures. 2010. V. 47. No 1. P. 10–24.
- [25] Arbocz J., Babcock Experimental investigation of the effect of generalimperfections on the buckling of cylindrical shells . NASA CR - 1163. 1968 .
- [26] Chong J., Gao F. Y., Li X. H. Dynamic buckling behaviors of steel cylindrical shell subjected to conventional explosion impact loading // Advanced Materials Research . 2013. V.800. P. 196–200 .

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ

1  
2  
3

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.003

: 539.374

17-41-210272

© , 2022

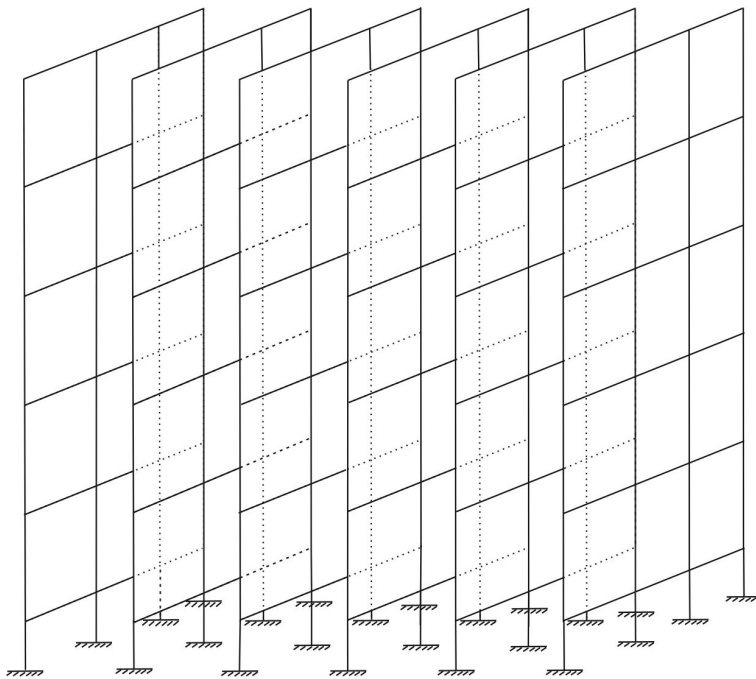
e-mail: nemiryury@mail.ru,

e-mail: strangcheb@mail.ru,

05.08.2022

В настоящее время с ростом населения крупных городов все актуальнее становятся вопросы и проблемы, возникающие при строительстве высотных зданий и сооружений. Одной из важных проблем является расчет при проектировании указанных зданий на воздействие нагрузок, в частности ветровых нагрузок. Одними из наиболее распространенных и недорогих в производстве изделий, используемых в строительстве, являются изделия на основе бетонов. Задачи живучести бетонных и железобетонных стержневых систем рассматриваются в достаточно большом количестве научных исследований [1–5]. Расчеты зданий и сооружений из железобетонных стержневых систем на действие различных нагрузок приведены в работах [6–8]. Известно [9–11], что диаграммы деформирования бетонов демонстрируют существенную нелинейность при растяжении и сжатии. Учет физической нелинейности деформирования бетонов, а также его разносопротивляемость растяжению и сжатию был рассмотрен в работах [12–26]. В данной работе будем рассматривать высотные здания из физически нелинейных стержней с учетом массовых сил.

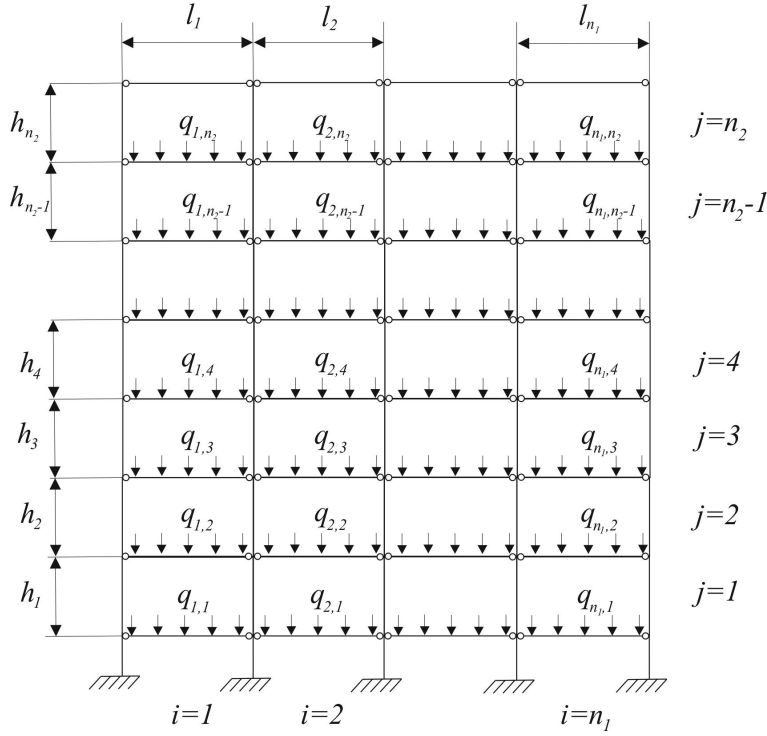
Рассмотрим конструктивную схему связевого каркаса многоэтажного здания из железобетона с поперечным расположением рам (рис. 1). Рассмотрим плоскую раму (рис. 2) под действием вертикальных нагрузок, где ригели с колоннами соединяются шарнирно.



. 1.

Стержневые элементы в рассматриваемой раме будем обозначать двузначными индексами  $i, j$ , где  $i = 1, \dots, n_1$ ,  $j = 1, \dots, n_2$ .

Обозначим через  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, n_1$  длины ригелей,  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, n_2$  – высоты колонн в рассматриваемой раме (рис. 2).



. 2.

На рассматриваемый железобетонный ригель действует распределенная нагрузка  $q_{ij}$ , направленная вертикально вниз.

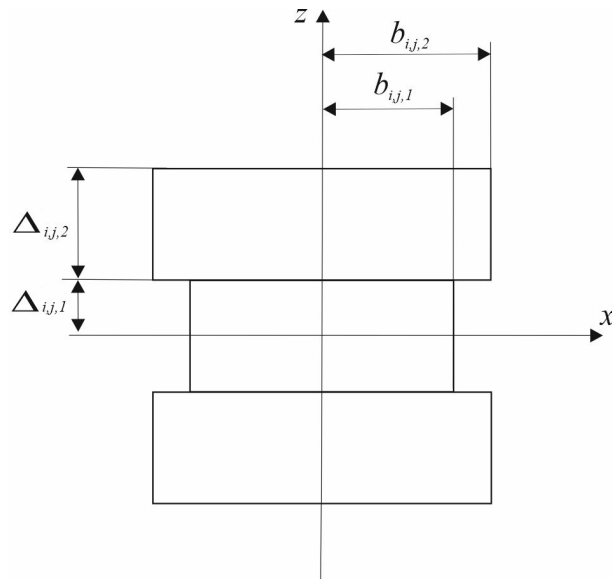
На колонну действует продольная сила  $N_z$  от стоящей выше колонны и равнодействующая от опорных усилий в месте шарнирного соединения ригеля и колонны.

Каждый из ригелей будем рассматривать как многослойную бетонную конструкцию, где в каждом из слоев может быть реализована своя марка бетона. Будем считать, что ригели имеют одинаковое поперечное сечение вдоль всей длины. Для простоты последующих расчетов ограничимся случаем трехслойных конструкций, имеющих симметричное относительно осей  $OX$  и  $OY$  поперечное сечение (рис. 3), где на указанном рисунке через  $b_{ij;k}$  и  $i_{j;k}$  обозначены параметры поперечного сечения ригеля. Индексы  $i, j$  в обозначениях  $b_{ij;k}$  и  $i_{j;k}$  означают место расположения ригеля в раме (рис. 2),  $k$  – порядковый номер слоя в сечении (рис. 3).

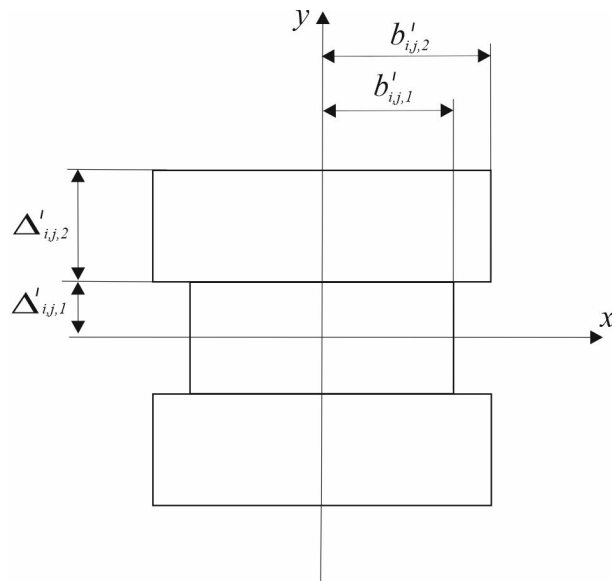
Аналогично ригелям, колонны также примем трехслойными, где через  $b_{ij;k}^0$  и  $i_{j;k}^0$  обозначены параметры поперечного сечения, которым в дальнейшем, чтобы отличать от ригелей, будем дописывать штрих в обозначениях (рис. 4).

Исходя из того, что реальные диаграммы демонстрируют существенную нелинейность при растяжении и сжатии, в качестве зависимости между напряжениями и деформациями в  $i$ -ом слое стержня для случая  $\varepsilon_{ij;k} < \varepsilon_{ij;k}^+$  будем использовать аппроксимацию указанной диаграммы полиномами второго порядка

$$\sigma_{ij;k} = A_{1;ij;k}^2 \varepsilon + A_{2;ij;k}^2 \varepsilon^2, \quad (1)$$



. 3.



. 4.

где  $\varepsilon_{ij;k}^+$ ,  $-\varepsilon_{ij;k}$  – предельная деформация упрочнения при растяжении и сжатии материала  $k$ -го слоя стержня  $i, j$ ,  $A_{1;ij;k}^2$ ,  $A_{2;ij;k}^2$  – физические параметры, определяемые из реальной диаграммы растяжения и сжатия бетонов  $k$ -го слоя соответствующего стержня. Указанные коэффициенты можно получить, имея реальные диаграммы

растяжения и сжатия бетонов, либо использовать соотношения, имея основные физические характеристики бетонов, таких как пределы прочности, модули упругости и предельные деформации при растяжении и сжатии [9, 27]. Значения коэффициентов (1), сопоставление реальных диаграмм деформирования и диаграмм, построенных по соотношениям (1), приведены в работе [20]. Для колонн коэффициенты  $A_{1;ij;k}^2, A_{2;ij;k}^2$  в зависимости (1) будем указывать со штрихом, без штриха будем подразумевать, что указанные коэффициенты относятся к ригелям.

Случай равенства или превышения значения деформации  $\varepsilon_{ij}^+ = \min f \varepsilon_{ij;k}^+ g$  или  $\varepsilon_{ij} = \min f \varepsilon_{ij;k} g$  будем считать случаем потери несущей способности стержня.

Во всех последующих расчетах будем использовать безразмерные величины

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma}{\sigma_1}, \quad \tilde{b}_{ij;k} = \frac{b_{ij;k}}{l_1}, \quad \tilde{~}_{ij;k} = \frac{ij;k}{l_1}, \quad \tilde{t}_i = \frac{l_i}{l_1}, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i}{l_1}, \\ \varphi &= q \frac{1}{l_1 \sigma_1}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l_1^2 \sigma_1}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l_1^2 \sigma_1}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l_1 \sigma_1}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где безразмеривающие величины:  $\sigma_1$  – предел прочности при сжатии бетона марки В10,  $l_1$  – длина ригеля 1, 1;  $q$  – величина распределенной нагрузки,  $Q$  – величина перерезывающей силы,  $M$  – величина изгибающего момента,  $N$  – продольного усилия,  $w$  – величина прогиба.

В дальнейшем индекс « $\sim$ » над величинами будем опускать и полагать, что они являются безразмерными, если это не оговорено специально.

При рассмотрении ригелей начало координат  $O$  поместим в левый конец в центр поперечного сечения, ось  $OZ$  направим вертикально вверх, ось  $OX$  направим вдоль оси ригеля (рис. 3).

В данной работе ограничимся рассмотрением случая, когда ось стержня совпадает с нейтральной линией. Случай несовпадения нейтральной линии с осью стержня при продольно-поперечном изгибе рассмотрен в работе [28].

Для рассматриваемых стержней будем считать справедливыми кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява, тогда будут справедливы соотношения

$$\varepsilon(y, z) = z \{ z(y), \quad \{ z(y) = \frac{d^2 w_0(y)}{dy^2}, \quad (3)$$

где  $\{ z(y)$  – кривизны осевой линии ригеля,  $w_0(y)$  – величина прогиба ригеля.

Из соотношений (3) видно, что в рамках принятой системы координат и действующих нагрузок на ригель кривизна кривой прогиба  $\{ z(y)$  положительна, а сама кривая прогиба имеет выпуклость вниз. Соответственно, знак деформации в ригеле  $\varepsilon(y, z) < 0$  при  $z > 0$  и  $\varepsilon(y, z) > 0$  при  $z < 0$ . Из соотношений (1) видно, что аналогичные знаки имеют и напряжения:  $\sigma_{ij;k} < 0$  при  $z > 0$  и  $\sigma_{ij;k} > 0$  при  $z < 0$ .

Для колонн начало координат  $O$  поместим в верхний конец в центр поперечного сечения, ось  $OZ$  направим вертикально вниз вдоль оси колонны. Для колонн деформация определяется из соотношений

$$\varepsilon(z) = e_0(x) = \frac{dw_0(z)}{dz}. \quad (4)$$

Нагрузки и условия закрепления ригеля таковы, что имеем случай прямого изгиба, тогда дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{d^2 M_x}{dy^2} = q_{ij}, \quad Q = \frac{dM_x}{dy}, \quad (5)$$

где  $M_x(y)$  – проекция вектора изгибающего момента на ось  $Ox$ ,  $Q$  – величина перерезывающей силы,  $q_z$  – величина нагрузки на ригель, которую будем считать равномерно распределенной по длине ригеля.

Уравнения равновесия для колонн имеют вид

$$\frac{dN}{dz} = q_j, \quad (6)$$

где  $N$  – величина продольного усилия,  $q_j$  – распределенная нагрузка, вызванная собственной массой колонны.

Из условия того, что стержни являются шарнирно опертыми, справедливы соотношения

$$w(0) = 0, \quad w(l_i) = 0, \quad M_x(0) = 0, \quad M_x(l_i) = 0. \quad (7)$$

Для колонны  $i, j$  из условия закрепления имеем

$$w(0) = 0, \quad (8)$$

также для данной колонны  $i, j$  (рис. 4) в верхней точке должны быть справедливы условия непрерывности усилий, которые с учетом того, что на колонну действуют продольные усилия от соседних ригелей, примут вид

$$N(h_j) = N_{ij} + N_{i-1j}^{00} + N_{ij}^0, \quad Q(h_j) = 0, \quad (9)$$

где  $N_{ij}$  равно величине продольного усилия в колонне выше  $i, j + 1$  в месте защемления, если  $j = n_2$ , то, т. к. на верхнюю колонну не действует нагрузка, имеем  $N_{i;n_2} = 0$ . Значения продольных усилий от реакций оснований рядом расположенных ригелей в месте шарнирного соединения с колонной обозначены через  $N_{ij}^0$ ,  $N_{ij}^{00}$ , причем для крайних колонн справедливо  $N_{0j}^{00} = 0$ ,  $N_{n_1j}^0 = 0$ .

Величина изгибающего момента в ригеле  $i, j$  в случае одноосного напряженного состояния и поперечного сечения ригеля, изображенного на рис. 3, определяется из соотношений

$$M_x = 4 \sum_{i=1}^2 \iint_S z \sigma_i dS, \quad (10)$$

которые, с учетом связи напряжений и деформаций по закону (1), и соотношений (3) примут вид

$$\begin{aligned} M_x &= 4 \int_0^{i,j,1} dz \int_0^{b_{i,j,1}} z \sigma_{ij,1} dx + 4 \int_{i,j,1}^{i,j,1+i,j,2} dz \int_0^{b_{i,j,2}} z \sigma_{ij,2} dx = \quad (11) \\ &= 4 \int_0^{i,j,1} dz \int_0^{b_{i,j,1}} z (A_{1;ij,1} \varepsilon + A_{2;ij,1} \varepsilon^2) dx \\ &+ 4 \int_{i,j,1}^{i,j,1+i,j,2} dz \int_0^{b_{i,j,2}} z (A_{1;ij,2} \varepsilon + A_{2;ij,2} \varepsilon^2) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{i,j,1} dz \int_0^{b_{i,j,1}} (A_{1;i,j,2} z \{z(y) + A_{2;i,j,2} z^2 \{z(y)^2\} dx \\
&4 \int_{i,j,1}^{i,j,1+i,j,2} dz \int_0^{b_{i,j,2}} (A_{1;i,j,2} z \{z(y) + A_{2;i,j,2} z^2 \{z(y)^2\} dx = \\
&= B_{i,j,1} \{z(y) + B_{i,j,2} \{z^2(y),
\end{aligned}$$

где постоянные  $B_{i,j,1}$ ,  $B_{i,j,2}$  можно определить из соотношений

$$\begin{aligned}
B_{i,j,1} &= \frac{4}{3} \int_{i,j,1}^3 b_{i,j,1} A_{1;i,j,1} + \frac{4}{3} \left( \int_{i,j,2}^3 + 3 \int_{i,j,1}^2 + 3 \int_{i,j,1}^2 \int_{i,j,2}^2 \right) b_{i,j,2} A_{1;i,j,2}, \\
B_{i,j,2} &= \int_{i,j,1}^4 b_{i,j,1} A_{2;i,j,1} \left( \int_{i,j,1}^f + \int_{i,j,2}^g + \int_{i,j,1}^4 \right) b_{i,j,2} A_{2;i,j,2}.
\end{aligned}$$

Из полученных выражений видно, что для полученных коэффициентов справедливы неравенства  $B_{i,j,1} > 0$ ,  $B_{i,j,2} < 0$ .

Выражение для момента (11) в ригеле можно написать как функцию от прогиба

$$M_x = B_{i,j,1} \frac{d^2 w_0(y)}{dy^2} + B_{i,j,2} \left( \frac{d^2 w_0(y)}{dy^2} \right)^2. \quad (12)$$

Подставим выражение момента (12) в уравнение равновесия (5), тогда получим дифференциальное уравнение

$$B_{i,j,1} \frac{d^4 w_0}{dy^4} + 2B_{i,j,2} \frac{d^3 w_0}{dy^3} + 2B_{i,j,2} \frac{d^2 w_0}{dy^2} \frac{d^4 w_0}{dy^4} = q_{i,j}. \quad (13)$$

Из решения уравнения (13) с условиями на границах (7) можно определить величину изгибающего момента и перерезывающей силы вдоль всей его длины.

Более простой вид уравнения (13) можно получить, если проинтегрировать уравнение (5)

$$\int_0^y \frac{d^2 M_x}{dy^2} dy = q_{i,j} y, \quad (14)$$

которое перепишем в виде

$$\frac{dM_x}{dy} = q_{i,j} y + Q(0). \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (14) с учетом (7), получим соотношения для изгибающего момента

$$M_x = q_{i,j} \frac{y^2}{2} + Q(0)y, \quad M_x = q_{i,j} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{l_i^2}{2} \right) + Q(0)(y - l_i). \quad (16)$$

Исключая из уравнений (16) величину перерезывающей силы в левом краю ригеля  $Q(0)$ , получим выражение для изгибающего момента

$$M_x = q_{i,j} \frac{y^2}{2} - \frac{l_i}{2} q_{i,j} y. \quad (17)$$

Из соотношений (17) видно, что с учетом того, что все нагрузки направлены вертикально вниз, т. е.  $q_{i,j} < 0$ , величина изгибающего момента  $M_x$  всюду положительна по всей длине ригеля.

Из соотношений (12), (17) получим уравнение для определения прогибов в ригеле

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dy^2}\right)^2 + \frac{B_{ij,1}}{B_{ij,2}} \frac{d^2 w_0}{dy^2} = y^2 \frac{q_{ij}}{2B_{ij,2}} - y \frac{l_i q_{ij}}{2B_{ij,2}}. \quad (18)$$

Уравнение (14) является квадратным относительно  $\frac{d^2 w_0}{dy^2}$  и, соответственно, имеет два решения. Из этих двух решений выберем то решение, которое соответствует равенству 0 второй производной прогиба при отсутствии нагрузок. Так как  $B_{ij,1} > 0$ ,  $B_{ij,2} < 0$ , то равенство нулю второй производной прогиба при  $q_{ij} = 0$  будет только при условии знака минус в решении перед корнем

$$\frac{d^2 w(y)}{dy^2} = \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} - \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij})}, \quad (19)$$

Выражение под корнем в соотношениях (19) должно быть неотрицательным, соответственно, должно быть справедливо

$$\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij}) > 0,$$

принимая во внимание, что  $B_{ij,2} < 0$ , а выражение  $y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij} > 0$ , получим ограничение для нагрузок на ригели  $q_{ij}$

$$q_{ij} > \frac{2B_{ij,1}^2}{B_{ij,2}(y^2 - y l_i)}. \quad (20)$$

Правая часть полученного выражения (20) отрицательна и по модулю достигает минимального значения в середине пролета ригеля  $y = l_i/2$ . Тогда для того, чтобы выражение (20), выполнялось по всей длине ригеля, должны выполняться ограничения на действующие нагрузки  $q_{ij}$

$$q_{ij} > \frac{8B_{ij,1}^2}{l_i^2 B_{ij,2}}. \quad (21)$$

Если проинтегрировать уравнение (19), то можно получить

$$\frac{dw_0(y)}{dy} = \frac{dw_0(y)}{dy} \Big|_{y=0} - \frac{B_{ij,1} y}{2B_{ij,2}} - \int_0^y \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij})} dy, \quad (22)$$

которое, если проинтегрировать его с учетом условий на границе

$$w_0(0) = 0, \quad w_0(l_i) = 0, \quad (23)$$

можно получить соотношения для прогиба

$$w_0(y) = \frac{dw_0(y)}{dy} \Big|_{y=0} y - \frac{B_{ij,1} y^2}{4B_{ij,2}} - \int_0^y dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij})} dy, \quad (24)$$

$$w_0(y) = \frac{dw_0(y)}{dy} \Big|_{y=0} (y - l_i) - \frac{B_{ij,1} (y^2 - l_i^2)}{4B_{ij,2}} \quad (25)$$

$$\int_{l_i}^y dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij})} dy.$$

Решая совместно уравнения (24) и (25), можно получить значение  $\frac{dw_0(y)}{dy}$

$$\left. \frac{dw_0}{dy} \right|_{y=0} = l_i \frac{B_{ij,1}}{4B_{ij,2}} + \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij})} dy. \quad (26)$$

Из соотношений (24), (26) можно окончательно получить выражения для прогиба ригеля

$$w_0(y) = \left( l_i \frac{B_{ij,1}}{4B_{ij,2}} + \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij})} dy \right) y + \frac{B_{ij,1} y^2}{4B_{ij,2}} - \int_0^y dy \int_0^y \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij})} dy. \quad (27)$$

Из соотношений (3), (19) можно получить выражение для опеределения деформации в ригеле

$$\varepsilon(y, z) = z \frac{d^2 w_0}{dy^2} = z \left( \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} - \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} + \frac{1}{2B_{ij,2}} (y^2 q_{ij} - y l_i q_{ij})} \right). \quad (28)$$

Рассмотрим случай  $z > 0$ , тогда деформация будет отрицательная и в рамках решаемой задачи значение деформации должно удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij,1} < \varepsilon(y, z), \quad 0 \leq z \leq l_{ij,1}, \\ \varepsilon_{ij,2} < \varepsilon(y, z), \quad l_{ij,1} \leq z \leq l_{ij,1} + l_{ij,2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\varepsilon_{ij,k}^k$  – предельная деформация сжатия  $k$ -го слоя материала стержня.

Исходя из уравнения деформации  $\varepsilon(y, z)$  видно, что она возрастает по модулю линейно с увеличением  $z$ , соответственно, наибольшее по модулю значения будут на верхних границах каждого слоя, т. е. при  $z = l_{ij,1}$  и при  $z = l_{ij,1} + l_{ij,2}$ .

В местах закрепления ригеля  $y = 0$  и  $y = l_i$  деформация  $\varepsilon(y, z)$  равна нулю и достигает наибольшего по модулю значения в середине пролета ригеля  $y = l_i/2$ , тогда можно получить соотношения для первого фазового материала стержня

$$\varepsilon_{ij,1} < 1 \left( \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} - \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} - \frac{q_{ij} l_i^2}{8B_{ij,2}}} \right),$$

которые перепишем в виде

$$\frac{\varepsilon_{ij,1}}{1} > \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} - \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} - \frac{q_{ij} l_i^2}{8B_{ij,2}}},$$

а указанное неравенство запишем

$$\sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} - \frac{q_{ij} l_i^2}{8B_{ij,2}}} > \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} - \frac{\varepsilon_{ij,1}}{1}.$$

Если возвести в квадрат обе части полученного выражения, получим ограничение для внешней нагрузки  $q_{ij}$

$$q_{ij} > 2 \frac{B_{ij,1}^2}{l_i^2 B_{ij,2}} - \frac{8B_{ij,2}}{l_i^2} \left( \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} + \frac{\varepsilon_{ij,1}}{1} \right)^2. \quad (30)$$

Аналогичные соотношения можно получить для второго слоя, при которых деформация не превысит своих предельных значений

$$q_{ij} > 2 \frac{B_{ij,1}^2}{l_i^2 B_{ij,2}} \frac{8B_{ij,2}}{l_i^2} \left( \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} + \frac{\varepsilon_{ij,2}}{1+2} \right)^2. \quad (31)$$

Для случая  $z < 0$  имеем, что деформация положительна в рассматриваемых слоях, следовательно, должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon(y, z) &= \varepsilon_{ij,1}^+, & ij,1 & z & 0, \\ \varepsilon(y, z) &= \varepsilon_{ij,2}^+, & ij,1 & ij,2 & z & ij,1. \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично, рассуждая, как и для случая сжатия, имеем

$$1 \left( \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} \sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} \frac{q_{ij} l_i^2}{8B_{ij,2}}} \right) < \varepsilon_{ij,1}^+,$$

которое перепишем в виде

$$\sqrt{\frac{B_{ij,1}^2}{4B_{ij,2}^2} \frac{q_{ij} l_i^2}{8B_{ij,2}}} > \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} \frac{\varepsilon_{ij,1}^+}{1},$$

откуда окончательно получим для нагрузок неравенство

$$q_{ij} > 2 \frac{B_{ij,1}^2}{l_i^2 B_{ij,2}} \frac{8B_{ij,2}}{l_i^2} \left( \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} + \frac{\varepsilon_{ij,1}^+}{1} \right)^2, \quad (33)$$

которое для оставшегося слоя имеет вид

$$q_{ij} > 2 \frac{B_{ij,1}^2}{l_i^2 B_{ij,2}} \frac{8B_{ij,2}}{l_i^2} \left( \frac{B_{ij,1}}{2B_{ij,2}} + \frac{\varepsilon_{ij,2}^+}{1+2} \right)^2. \quad (34)$$

Таким образом, для того, чтобы деформация не превышала предельные значения в соответствующих слоях, необходимо, чтобы нагрузка  $q_{ij}$  удовлетворяла соотношениям (30), (31), (33), (34). Также для существования решения необходимо, чтобы нагрузка удовлетворяла соотношениям (20).

Из соотношений (5), (17) можно найти силу реакций опор и величины сил (9), с которой ригели воздействуют на колонны

$$N^0(i, j) = N^{00}(i, j) = q_{ij} l_i / 2. \quad (35)$$

Продольное усилие в колонне  $i, j$  с поперечным сечением, изображенным на рис. 4, определяется из соотношений

$$N = 4 \sum_{i=1}^2 \iint_S \sigma_{ij,k} dS, \quad (36)$$

которые, с учетом связи напряжений и деформаций по закону (1) и соотношений (4), примут вид

$$\begin{aligned}
N &= 4 \int_0^{\frac{0}{i,j,1}} dy \int_0^{b_{i,j,1}^0} \sigma_{ij,1} dx + 4 \int_{\frac{0}{i,j,1}}^{\frac{0}{i,j,1} + \frac{0}{i,j,2}} dy \int_0^{b_{i,j,2}^0} \sigma_{ij,2} dx = \quad (37) \\
&= 4 \int_0^{\frac{0}{i,j,1}} dy \int_0^{b_{i,j,1}^0} (A_{1;ij,1}^0 \varepsilon + A_{2;ij,1}^0 \varepsilon^2) dx + \\
&\quad + 4 \int_{\frac{0}{i,j,1}}^{\frac{0}{i,j,1} + \frac{0}{i,j,2}} dy \int_0^{b_{i,j,2}^0} (A_{1;ij,2}^0 \varepsilon + A_{2;ij,2}^0 \varepsilon^2) dx = \\
&= 4 \int_0^{\frac{0}{i,j,1}} dy \int_0^{b_{i,j,1}^0} (A_{1;ij,1}^0 e_0(z) + A_{2;ij,1}^0 e_0^2(z)) dx + \\
&\quad + 4 \int_{\frac{0}{i,j,1}}^{\frac{0}{i,j,1} + \frac{0}{i,j,2}} dy \int_0^{b_{i,j,2}^0} (A_{1;ij,2}^0 e_0(z) + A_{2;ij,2}^0 e_0^2(z)) dx = \\
&= C_{ij,1} e_0(z) + C_{ij,2} e_0^2(z),
\end{aligned}$$

где постоянные  $C_{ij,1}$ ,  $C_{ij,2}$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned}
C_{ij,1} &= 4 \int_0^{\frac{0}{i,j,1}} dy \int_0^{b_{i,j,1}^0} A_{1;ij,1}^0 dx + 4 \int_{\frac{0}{i,j,1}}^{\frac{0}{i,j,1} + \frac{0}{i,j,2}} dy \int_0^{b_{i,j,2}^0} A_{1;ij,2}^0 dx + 4 \int_0^{\frac{0}{i,j,1}} dy \int_0^{b_{i,j,1}^0} A_{1;ij,3}^0 dx, \\
C_{ij,2} &= 4 \int_0^{\frac{0}{i,j,1}} dy \int_0^{b_{i,j,1}^0} A_{2;ij,1}^0 dx + 4 \int_{\frac{0}{i,j,1}}^{\frac{0}{i,j,1} + \frac{0}{i,j,2}} dy \int_0^{b_{i,j,2}^0} A_{2;ij,2}^0 dx + 4 \int_0^{\frac{0}{i,j,1}} dy \int_0^{b_{i,j,1}^0} A_{2;ij,3}^0 dx.
\end{aligned}$$

Как видно из полученных соотношений, постоянные  $C_{ij,1}$  и  $C_{ij,2}$  положительны. При заданных нагрузках деформация осевой линии стержня  $e_0(z)$  и продольное усилие  $N$  должны быть отрицательны.

Выражение для продольного усилия (37) в колонне можно написать как функцию от прогиба

$$N = C_{ij,1} \frac{dw_0(z)}{dz} + C_{ij,2} \left( \frac{dw_0(z)}{dz} \right)^2. \quad (38)$$

Подставим выражение продольного усилия в уравнение равновесия (6), тогда получим

$$C_{ij,1} \frac{d^2 w_0}{dz^2} + 2C_{ij,2} \frac{dw_0}{dz} \frac{d^2 w_0}{dz^2} = q_j. \quad (39)$$

Для определения величины прогиба в колонне необходимо решить дифференциальное уравнение (39) с граничным условием (5). По соотношениям (4) необходимо определить деформации в колонне и указанные деформации не должны превышать предельные значения для материалов каждого слоя.

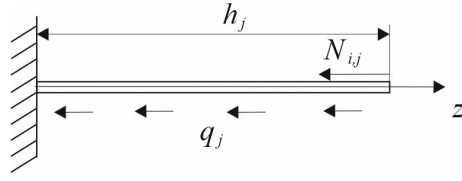
Вместо дифференциального уравнения (39) можно получить более простые соотношения, если учесть, что задача о защемленном с одного края стержне является статически определимой (рис. 5).

Из уравнения равновесия (6) и граничных условий на вершине колонны (9) имеем

$$\int_{h_j}^x \frac{dN}{dz} dz = q_j(z - h_j), \quad (40)$$

которое перепишем в виде

$$N = N(h_j) - q_j(z - h_j), \quad (41)$$



. 5.

откуда окончательно получим

$$N = N_{ij} - q_j(z - h_j). \quad (42)$$

Из (38), (42) получим дифференциальное уравнение для определения перемещений в колоннах

$$C_{ij,1} \frac{dw_0(z)}{dz} + C_{ij,2} \left( \frac{dw_0(z)}{dz} \right)^2 = N_{ij} - q_j(z - h_j), \quad (43)$$

с условиями на границе

$$w_0(0) = 0. \quad (44)$$

Уравнение (43) перепишем в виде

$$\left( \frac{dw_0(z)}{dz} \right)^2 + \frac{C_{ij,1}}{C_{ij,2}} \frac{dw_0(z)}{dz} = \frac{N_{ij}}{C_{ij,2}} - \frac{q_j}{C_{ij,2}}(z - h_j). \quad (45)$$

Решив квадратное уравнение (45) относительно  $\frac{dw_0}{dz}$ , получим

$$\frac{dw_0}{dz} = \frac{C_{ij,1}}{2C_{ij,2}} \sqrt{\frac{C_{ij,1}^2}{4C_{ij,2}^2} + \frac{1}{C_{ij,2}}(N_{ij} - q_j(z - h_j))}. \quad (46)$$

Для выбора нужного знака в соотношениях (46) нужно выбрать решение, которому соответствует равенство нулю правой части при отсутствии нагрузок, соответственно, нужно взять со знаком плюс, тогда, с учетом (44), находим выражение для прогиба колонны

$$w_0(z) = \int_0^z \left( \frac{C_{ij,1}}{2C_{ij,2}} + \sqrt{\frac{C_{ij,1}^2}{4C_{ij,2}^2} + \frac{1}{C_{ij,2}}(N_{ij} - q_j(z - h_j))} \right) dz. \quad (47)$$

Тогда получим из соотношений (4), (46) выражение для деформации

$$\varepsilon = \frac{dw_0}{dz} = \frac{C_{ij,1}}{2C_{ij,2}} + \sqrt{\frac{C_{ij,1}^2}{4C_{ij,2}^2} + \frac{1}{C_{ij,2}}(N_{ij} - q_j(z - h_j))}. \quad (48)$$

Как видно из уравнения (48), деформация с увеличением нагрузок  $N_{ij}$  и  $q_j$  возрастает по абсолютной величине. Значение под корнем в выражении деформации должно быть неотрицательно

$$\frac{C_{ij,1}^2}{4C_{ij,2}^2} + \frac{1}{C_{ij,2}}(N_{ij} - q_j(z - h_j)) > 0, \quad (49)$$

причем наименьшее значение левой части выражения (49) достигается в месте защемления  $z = 0$ , тогда для нагрузок получим ограничение

$$\frac{C_{ij;1}^2}{4C_{ij;2}^2} + \frac{1}{C_{ij;2}}(N_{ij} + q_j h_j) > 0,$$

откуда получим

$$N_{ij} + q_j h_j > \frac{C_{ij;1}^2}{4C_{ij;2}}. \quad (50)$$

Также деформация не должна превышать предельные значения для каждого из составляющих фазовых материалов, если принять

$$\varepsilon_{ij} = \min f \varepsilon_{ij;k} g, \quad k = 1, 2, \quad (51)$$

тогда получим соотношения для нагрузок, при которых деформация не превышает предельных значений в месте защемления, где деформация наибольшая по абсолютной величине

$$\frac{C_{ij;1}}{2C_{ij;2}} + \sqrt{\frac{C_{ij;1}^2}{4C_{ij;2}^2} + \frac{1}{C_{ij;2}}(N_{ij} - q_j(z - h_j))} > \varepsilon_{ij}, \quad (52)$$

из соотношений (52) получим

$$N_{ij} + q_j h_j > C_{ij;2} \left( \frac{C_{ij;1}}{2C_{ij;2}} - \varepsilon_{ij} \right)^2 + \frac{C_{ij;1}^2}{4C_{ij;2}}. \quad (53)$$

Величины нагрузок, с которыми колонна действует на ниже расположенную колонну, можно определить из выражения (42)

$$N_{ij-1} = N_{ij} + q_j h_j. \quad (54)$$

Решение задачи сводится к определению, при заданных нагрузках на ригели  $q_{ij}$ , по соотношениям (35) нагрузок на соседние колонны. По соотношениям (27) определяются прогибы ригелей, границы нагрузок  $q_{ij}$ , при которых деформация не превышает предельных значений для каждого фазового материала ригеля, определяются неравенствами (20), (30), (31), (33), (34).

Для расчета прогибов и деформаций колонн по соотношениям (47), (48) необходимо знать нагрузки от вышестоящих колонн, поэтому расчет необходимо делать, начиная с верхних этажей, последовательно применяя формулу (54).

При расчете с учетом массовых нагрузок необходимо в выражение  $q_{ij}$  нагрузок на ригели добавить нагрузку, вызванную массовыми силами, и в распределенные нагрузки на колонны  $q_j$  подставить выражение для массовых сил для колонн. В случае отсутствия массовых сил в расчетах следует брать  $q_{ij}$  без учета массовых сил, а  $q_j$  принять равной 0.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] ... // ... , 1974. 208 ...
- [2] ... // ... , 2004. 488 ...
- [3] ... // ...
2011. 5-2(38). . 243–246.

- [4] // . 2012. 11. . 61–66.
- [5] // / . 1972. . 192–222.
- [6] . 352 .
- [7] // . 2014. 9. . 28–30.
- [8] // . 2015. 6. . 20–22.
- [9] // . 2015. 6. . 125–129.
- [10] 2006. 222 .
- [11] // . 2008. 7. . 113–122.
- [12] // XIX . 28–31 . 2005 . , 2005. . 184–188.
- [13] // . 2020. 1. . 60–73.
- [14] // . 2021. 1(117). . 40–46.
- [15] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [16] // 9-
- [17] 30- . 2019. . 185–189.
- [17] // . 2021. 2(48). . 94–103.
- [18] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [19] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [20] // . 2021. 3(49). . 85–93.
- [21] // . 2013. 4. . 133–146.

- [22] // . 2016. 3. . 95–110.
- [23] : , 1974. 208 .
- [24] // - . 2020. 12. . 11–49.
- [25] // : - . 8-11 2009 . : . - , 2009.
- [26] // : V . 2006. . 288–290.
- [27] // : . 2018. 3(37). . 26–37.
- [28] // . 2020. 1. . 60–73.

*Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov*

DETERMINATION OF THE BEARING CAPACITY OF MULTI-STOREY BUILDINGS FROM PHYSICALLY NON-LINEAR CONCRETE RODS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

*Abstract.* The paper considers a multi-storey building made of reinforced concrete. As a constructive scheme, a braced building frame with a transverse arrangement of frames was chosen. Columns and crossbars are considered as multilayer composite reinforced concrete structures. The calculations take into account the physical nonlinearity of strain diagrams and the difference in ultimate strains in tension and compression of the constituent phase materials of the rods, taking into account their mass loads. Ratios are given for the limiting values of loads at which the deformation does not exceed the corresponding limiting values in tension and compression in each of the phase materials of the columns and crossbars. Relationships for determining forces, moments, deformations and deflections in the considered bar structures are given.

*Keywords:* crossbar, column, multi-storey building, body forces, physical nonlinearity, concrete deformation diagram, longitudinal-transverse bending, static determinability, bending moment, composites

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

*Tikhonov Sergey Vladimirovich*, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

## REFERENCES

- [1] Gemlering A. V. Calculation of bar systems. Moscow: Stroitelstvo, 1974. 208 p.
- [2] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered bar systems. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 p.
- [3] Bukhtiyarova A. S. Some results of studies of the survivability of spatial reinforced concrete frame-rod systems // *Izvestiya of the Southwestern State University*. 2011. no. 5-2(38). P. 243–246.
- [4] Klyueva N. A., Shuvalov K. A. Method of experimental determination of the parameters of deformation and destruction of prestressed reinforced concrete statically indeterminate beam systems in transcendent states // *Vestnik of MGSU*. 2012. no. 11. P. 61–66.
- [5] Protsenko A. M., Vlasov V. V. Static principle of limit equilibrium and determination of the deformed state of statically indeterminate reinforced concrete structures in the stage of exhaustion of their bearing capacity // *Influence of static, dynamic and repeatedly repeated loads on concrete and elements of reinforced concrete structures* / Ed. by A. A. Gvozdev. 1972. P. 192–222.
- [6] Kodysh E. N., Trekin N. N., Nikitin I. K. Design of multi-storey buildings with reinforced concrete frame. Moscow: Publishing house of construction universities. 352 p.
- [7] Egorychev O. O., Churin P. S. Experimental study of wind loads on high-rise buildings // *Zhilishnoe Stroitelstvo*. 2015. no. 6. P. 20–22.
- [8] Egorychev O. O., Churin P. S., Poddava O. I. Experimental study of force-moment wind loads on high-rise buildings // *Industrial and civil engineering*. 2014. no. 9. P. 28–30.
- [9] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // V. G. Shukhov *Vestnik of the Belgorod State Technological University*. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [10] Mailyan L. R., Ivashchenko E. I. Calculation of reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams. Rostov-on-Don: Publishing house of the Rostov state. builds. un., 2006. 222 p.
- [11] Krus Y. A. Transformations of concrete deformation diagrams under central compression and tension // *News of universities. Construction*. 2008. no. 7. P. 113–122.
- [12] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // *Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity: Proceedings of the XIX All-Russian Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005*. P. 184–188.
- [13] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // *Bulletin of PNRPU. Mechanics*. 2020. no. 1. p. 60–73.
- [14] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel-fiber-reinforced concrete bars // *News of the Altai State University*. 2021. no. 1(117). P. 40–46.
- [15] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [16] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape of a multilayer concrete bar on the bearing capacity under longitudinal-transverse loading // *Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Collection of abstracts of the 9th All-Russian scientific conference with international participation named after I. F. Obraztsov and Yu. G. Yanovsky dedicated to the 30th anniversary of IPRIM RAS*. 2019. P. 185–189.
- [17] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete bars reinforced with steel reinforcement under the action of body forces // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University*. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 2(48). P. 94–103.
- [18] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [19] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [20] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically non-linear reinforced concrete beams // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University*. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 3(49). P. 85–93.
- [21] Mishchenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // *News of universities. Construction*. 2013. no. 4. P. 133–146.

- 
- [22] Plevkov V. S., Kolupaeva S. N., Kudyakov K. L. Design diagrams of non-linear deformation of basalt-fiber-reinforced concrete under static and short-term dynamic effects // Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2016. no. 3. p. 95–110.
- [23] Lukash P. A. Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics. Moscow: Construction, 1974. 208 p.
- [24] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete bars under quasi-static loads // Modeling and structural mechanics. 2020. no. 12. P. 11–49.
- [25] Nemirovsky Y. V. Nonlinear Deformation Prediction for Hybrid Composite Materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid: materials of the second international conference, Kazan, Russia, December 8-11, 2009. Kazan: Kazan state. un-t, 2009.
- [26] Nemirovsky Y. V. Method of calculation of rod composite rods from different-modulus materials // Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics: Proceedings of the V All-Russian Scientific Conference. Tomsk: TSU publishing house, 2006. P. 288–290.
- [27] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2018. no. 3(37). P. 26–37.
- [28] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. no. 1. P. 60–73.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.004

: 539.374

В работе [1] предлагается следующая связь тензоров напряжений и тензора деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + 2\mu_0\varepsilon_{12} + \lambda\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= \mu_0\varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{12} + \mu_0\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} - 2\mu_0\varepsilon_{12} + \lambda\varepsilon_{11},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензора деформаций,  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$  - постоянные Ламе,  $\mu_0$  - произвольное вещественное число, если  $\mu_0 = 0$ , то

© 2022

e-mail: sen@sibsau.ru,

e-mail: savostyanova@sibsau.ru,

05.07.2022

(1) есть классический закон Гука для изотропного, однородного случая.

Подставляя (1) в уравнения равновесия, тогда в случае отсутствия массовых сил получаем

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \mu_0(u_{xy} + v_{xx}) + \lambda v_{xy} + \mu_0 u_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) + \mu_0 v_{yy} &= 0, \\ \mu_0 u_{xy} + \mu(u_{xy} + v_{xy}) + \mu_0 v_{xy} + (\lambda + 2\mu)v_{yy} + \mu_0(u_{yy} + v_{xy}) + \lambda u_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u, v$  - компоненты вектора деформаций, индексы внизу, если не указано иное, означают производные по соответствующим переменным. Известно, что система (2) является эллиптической.

Групповые свойства уравнений асимметричных уравнений упругости в динамическом случае изучены в [2], там, в частности, показано, что система (2) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами

$$X = h^1 \partial_u + h^2 \partial_v, \quad (3)$$

где  $h^1, h^2$  - произвольное решение уравнений Коши-Римана

$$h_x^1 + h_y^2 = 0, h_y^1 - h_x^2 = 0. \quad (4)$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (2) по методу [1] на подалгебре, порождаемой (3) [3]. Для этого продолжим операторы (3) на первые производные. Имеем

$$X_1 = X + h_x^1 \partial_{u_x} + h_y^2 \partial_{v_y} + h_y^1 \partial_{u_y} + h_x^2 \partial_{v_x}. \quad (5)$$

Дифференциальные инварианты для (5), с учетом (4), имеют вид

$$I_1 = x, I_2 = y, I_3 = u_x + v_y, I_4 = u_y - v_x. \quad (6)$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x, y), u_y - v_x = \omega(x, y). \quad (7)$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (3).

Подставляя (7) в (2) получаем разрешающую систему

$$\begin{aligned} F_1 = (\lambda + 2\mu)\theta_x + \mu_0\theta_y - \mu\omega_y + \mu_0\omega_x &= 0, \\ F_2 = (\lambda + 2\mu)\theta_y - \mu_0\theta_x + \mu_0\omega_y + \mu\omega_x &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Повторяя почти дословно рассуждения из [2], можно утверждать, что система (8) равносильна системе уравнений (2).

Поэтому построив решение системы (8) мы получим решение системы (2).

Пусть для системы (8) поставлена задача Дирихле:

$$\theta|_L = \theta_0(x, y), \omega|_L = \omega_0(x, y), \quad (9)$$

где  $L$  - некоторая гладкая замкнутая кривая. Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (8).

В силу линейности системы (8) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В работе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (9).

. Законом сохранения для системы уравнений (8) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, \theta, \omega) + B_y(x, y, \theta, \omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \quad (10)$$

где  $\alpha, \beta$  - некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно.  $A, B$  называются компонентами сохраняющегося тока.

Более подробная информация о построении законов сохранения для произвольных систем дифференциальных уравнений может быть найдена в [4 - 6]. Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega, B = b^1\theta + b^2\omega, \quad (11)$$

где  $a^1, a^2, b^1, b^2$  - некоторые функции от  $x, y$ .

Тогда из (10) получаем

$$\begin{aligned} a^1 &= \alpha(\lambda + 2\mu) - \beta\mu_0, a^2 = \beta\mu + \alpha\mu_0, \\ b^1 &= \beta(\lambda + 2\mu) + \alpha\mu_0, b^2 = -\alpha\mu + \beta\mu_0, \\ a_x^1 + b_y^1 &= 0, a_x^2 + b_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (13)$$

Из (10) следует

$$\int \int_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L A dy + B dx. \quad (14)$$

Пусть  $(x_0, y_0) \in S$ , тогда из (14) следует -

$$\oint_L A dy + B dx = \oint_{\varepsilon} A dy + B dx. \quad (15)$$

где  $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$  - окружность радиуса  $\varepsilon$  вокруг точки  $(x_0, y_0) \in S$ , если функции  $A, B$  имеют особенности в этой точке. Вычислим интеграл в правой части (15) для разных решений уравнений Коши-Римана. Пусть

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\oint_{\varepsilon} A dy + B dx = \\ &= \oint_{\varepsilon} (\alpha((\lambda + 2\mu)\theta + \mu_0\omega) + \beta(-\mu_0\theta + \mu\omega)) dy + (\alpha(\mu_0\theta - \mu\omega) + \beta((\lambda + 2\mu)\theta + \mu_0\omega)) dx \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим (16) в (17) и сделаем замену переменных по формулам  $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi$ ,  $y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$  получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} A dy + B dx &= \\ &= \int_0^{2\pi} [ ((\lambda + 2\mu + \mu_0)\theta + (\mu_0 - \mu)\omega) + 2 \sin \phi \cos \phi (\mu + \mu_0)\omega ] d\phi = \\ &= 2\pi [ (\lambda + 2\mu + \mu_0)\theta(x_0, y_0) + (\mu_0 - \mu)\omega(x_0, y_0) ]. \end{aligned} \quad (18)$$

В формуле (18) устремили  $\varepsilon \rightarrow 0$  и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (19)$$

Формулы (18) и (19) позволяют, с учетом граничных условий (9) и равенства (15) определить значения функций  $\theta$  и  $\omega$  в произвольной точке  $(x_0, y_0) \in S$ .

Теперь после восстановления решений разрешающей системы, найдем решения автономной системы, т.е. решения исходной системы уравнений (2). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x, y) = 0, F_4 = u_y - v_x - \omega(x, y) = 0. \quad (20)$$

Здесь в правой части стоят известные функции. Найдем законы сохранения уравнений (20) в следующем виде

$$A = a^3\theta + a^4\omega + c^1, B = b^3\theta + b^4\omega + c^2, \quad (21)$$

где  $a^3, a^4, b^3, b^4, c^1, c^2$  - некоторые функции от  $x, y$ .

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0. \quad (22)$$

Расщепляя систему уравнений (22) получаем

$$\begin{aligned} a^3 &= \alpha, a^4 = -\beta, b^3 = \beta, b^4 = -\alpha, \\ a_x^3 + b_x^3 &= 0, a_x^4 + b_x^4 = 0, c_x^1 + c_x^2 = -\alpha\theta - \beta\omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (24)$$

Пусть для системы (2) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L = u_0(x, y), v|_L = v_0(x, y). \quad (25)$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L A dy + B dx = \oint_{\Gamma} A dy + B dx. \quad (26)$$

Пусть решение уравнений (24) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (27)$$

Подставляем (27) в правую часть (26), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} A dy + B dx &= \oint_{\Gamma} (\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_{\Gamma} (\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi + c^1) dy - (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi + c^2) dx = 2\pi u(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть решение уравнений (24) имеет вид

$$\alpha = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (29)$$

Подставляем (29) в правую часть (26), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} A dy + B dx &= \oint_{\Gamma} (\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_{\Gamma} (u \sin \phi - v \cos \phi + c^1) dy - (u \cos \phi - v \sin \phi + c^2) dx = 2\pi v(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (30)$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L A dy + B dx, 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L A dy + B dx, \quad (31)$$

где  $c^1 = \int \alpha \theta dx$ ,  $c^2 = \int \beta \omega dx$ .

**Заключение.** В статье получены новые бесконечные серии законов сохранения, которые позволили решить краевую задачу для разрешающей системы уравнений, а также для автоморфной системы. Все это позволило построить аналитическое решение задачи Дирихле для уравнений асимметричной теории упругости.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] . . . . . : . . . . . , 1983. 239 .
- [2] . . . . . // . . . . . . 2012. .15. 4. . 38–50.
- [3] . . . . . : . . . . . , 1978. 192 .
- [4] . . . . . : . . . . . , 2001. 192 .
- [5] Senashov S.I., Vinogradov A.M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity.// Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V.3(2). pp. 415–439.
- [6] . . . . . : . . . . . , 1996.

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF  
ASYMMETRIC ELASTICITY THEORY

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

*Abstract.* When solving the problem of group classification of equations describing the motion of a purely mechanical continuum, some new systems of differential equations have appeared that can be used to describe real physical processes. One of such new systems is the asymmetric theory of elasticity. This system can be used for materials with a small Young's modulus, as well as for materials that operate at loads close to critical. In this paper, the equations of the asymmetric theory of elasticity are studied on the basis of their group bundle: decomposition of the system into automorphic and resolving systems, which are systems of differential equations of the first order. Infinite series of conservation laws are constructed for a resolving system of equations and an automorphic system. These laws made it possible to solve the Dirichlet boundary value problem for the asymmetric theory of elasticity in the two-dimensional case. The solutions are constructed in the form of quadratures, which are calculated along the contour of the studied area.

*Keywords:* asymmetric two-dimensional elasticity, conservation laws, boundary value problem.

### REFERENCES

- [1] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 239 p. (in Russian)
- [2] Belmetsov N. F., Chirkunov Yu. A. Exact solutions of the equations of the dynamic asymmetric model of elasticity theory. // Sib. journal. industry. matem. 2012. Vol. 15. No. 4. P. 38–50. (in Russian)
- [3] Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. Novosibirsk: Nauka Publishing, 1978. 192 p. (in Russian)
- [4] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk: Izd.Nauka, 2001. 192 p. (in Russian)
- [5] Senashov S. I., A. M. Vinogradov, Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // The Proc. Edinburgh Math. Soc. 1988. V. 3(2). pp. 415-439.
- [6] Vinogradov A. M., Dyer I. S., Lychagin V. V. Symmetries and conservation laws. Moscow: Factor, 1996. (in Russian)

---

*Senashov Sergei Ivanovich*

e-mail: sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

*Savostyanova Irina Leonidovna*

e-mail: savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

**ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.005

: 539.3

Для решения краевых задач теории пластичности в расчете должны использоваться физические соотношения, адекватно описывающие свойства конструкционных материалов. В известных программных комплексах по расчету элементов конструкций за пределом упругости современная теория упругопластических процессов пока не используется. При неоднородном НДС краевых задач на основе соотношений теории упругопластических процессов решено мало [1-4]. Сейчас имеется достаточно большое количество экспериментальных данных о свойствах материалов при сложном (непропорциональном) нагружении и деформировании [5-8], а также предложены математические модели [5, 9-15] в рамках теории упругопластических процессов, верификация которых проведена при сопоставлении с экспериментальными данными. В данной статье обсуждается новая форма определяющих соотношений теории упругопластических процессов, теоретически обоснованная В.Г. Зубчаниновым [5]. Удобство этих определяющих соотношений состоит в том, что они приводятся к удобной форме

---

© , 2022

e-mail: sbtn@yandex.ru,

e-mail: alexeew@bk.ru,

01.07.2022

связи между скоростями напряжений и деформаций. Под скоростями напряжений и деформаций понимаются их первые производные по произвольному монотонно возрастающему параметру прослеживания процесса упругопластического деформирования (обобщенному времени). Существенной особенностью этой формы определяющих соотношений является то, что из трех функционалов пластичности  $N, P, Q$ , содержащихся в соотношениях, первые два определяются так же, как и в гипотезе компланарности А.А. Ильюшина [5, 16]. Третий функционал  $Q$  распространяет соотношения на общий случай плоского напряженного состояния. В этом смысле такая форма определяющих соотношений может рассматриваться как обобщение гипотезы компланарности [16].

Трехчленное определяющее соотношение теории упругопластических процессов для плоского напряженного состояния и пространственных траекторий деформирования может быть записано в виде [5, 16] :

$$\frac{d\sigma}{ds} = N \frac{d\vartheta}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{\sigma}{\sigma} + Q \hat{\rho}, \quad (1)$$

где

$$\sigma = S_1 \hat{e}_1 + S_2 \hat{e}_2 + S_3 \hat{e}_3$$

– вектор напряжений в трехмерном изображающем девиаторном пространстве А.А. Ильюшина [5];  $\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$  – его модуль;  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  – единичные векторы (орты) трехмерного изображающего пространства А.А. Ильюшина;

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta_1}{ds} \hat{e}_1 + \frac{d\vartheta_2}{ds} \hat{e}_2 + \frac{d\vartheta_3}{ds} \hat{e}_3 = \hat{p}_1$$

– вектор скорости деформаций, направленный по единичному вектору репера Френе  $\hat{p}_1$ , касательному к траектории деформирования в каждой ее точке;  $s$  – длина дуги траектории деформирования;

$$\hat{\rho} = \mu_1 \hat{e}_1 + \mu_2 \hat{e}_2 + \mu_3 \hat{e}_3$$

– единичный вектор, перпендикулярный плоскости компланарности, то есть плоскости, в которой расположены векторы  $\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma}$  и  $p_1 = \frac{d\vartheta}{ds}$ ;  $\vartheta_1$  – угол между векторами  $\hat{p}_1$  и  $\hat{\sigma}$ , для которого

$$\cos \vartheta_1 = \hat{p}_1 \hat{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left( S_1 \frac{d\vartheta_1}{ds} + S_2 \frac{d\vartheta_2}{ds} + S_3 \frac{d\vartheta_3}{ds} \right); \quad (2)$$

$N, P, Q$  – функционалы пластичности, определяемые из экспериментов.

Как будет показано ниже, существенной особенностью определяющих соотношений (1) является возможность решения краевых задач для произвольного плоского напряженного состояния в конструкциях, находящихся в условиях упругопластического деформирования.

Для координат единичного вектора  $\hat{\rho}$  получено [16]:

$$\mu_1 = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \quad S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right), \quad \mu_2 = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \quad S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right),$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \quad S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right),$$

тогда в скалярной форме определяющее соотношение (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + (P \quad N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \quad S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right), \\ \frac{dS_2}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + (P \quad N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \quad S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right), \\ \frac{dS_3}{ds} &= N \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} + (P \quad N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left( S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \quad S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом формулы (2) преобразуем соотношения (3) так, чтобы каждое слагаемое в правой части содержало как множитель производную от компонента вектора деформации по длине дуги траектории деформирования, то есть

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{ds} &= \left[ N + (P \quad N) \frac{S_1^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + \left[ (P \quad N) \frac{S_1 S_2}{\sigma^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + \\ &\quad + \left[ (P \quad N) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \quad \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}, \\ \frac{dS_2}{ds} &= \left[ (P \quad N) \frac{S_1 S_2}{\sigma^2} \quad \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_3}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + \left[ N + (P \quad N) \frac{S_2^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + \\ &\quad + \left[ (P \quad N) \frac{S_2 S_3}{\sigma^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}, \\ \frac{dS_3}{ds} &= \left[ (P \quad N) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_2}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + \left[ (P \quad N) \frac{S_2 S_3}{\sigma^2} \quad \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{S_1}{\sigma} \right] \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + \\ &\quad + \left[ N + (P \quad N) \frac{S_3^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для плоского напряженного состояния при использовании модели несжимаемого материала координаты векторов напряжений и деформаций связаны соответственно с компонентами  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  тензора напряжений и компонентами  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  тензора деформаций соотношениями [5]

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_x \quad \frac{1}{2} \sigma_y \right), \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_y, \quad S_3 = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \tau_{xy}, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_x, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_y, \quad \mathcal{E}_3 = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда, с учетом (5) для модуля вектора напряжений  $\sigma$  и косинуса угла  $\vartheta_1$  по (2) при переходе от компонент векторов напряжений и скоростей деформаций к компонентам тензоров напряжений и скоростей деформаций получим

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma_x^2 \quad \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i, \quad (6)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_x \quad \frac{1}{2} \sigma_y \right) \sqrt{\frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \frac{1}{2} \sigma_y \left( \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \frac{\rho}{2} \frac{d\varepsilon_y}{ds} \right) + \frac{\rho}{2} \tau_{xy} \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_x \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \sigma_y \frac{d\varepsilon_y}{ds} + \tau_{xy} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}}{\sigma_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (5), (6) определяющие соотношения можно записать через компоненты тензоров напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{ds} &= \left[ 2N + \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \left[ N + \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \right] \frac{d\varepsilon_y}{ds} + \\ &+ \left[ \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\sigma_x \tau_{xy}}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{\frac{1}{2} \sigma_x \quad \sigma_y}{\sigma_i} \right] \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_y}{ds} &= \left[ N + \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_i^2} \quad \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \right] \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \left[ 2N + \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\sigma_y^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{d\varepsilon_y}{ds} + \\ &+ \left[ \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\sigma_y \tau_{xy}}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{\sigma_x \quad \frac{1}{2} \sigma_y}{\sigma_i} \right] \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{xy}}{ds} &= \left[ \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\sigma_x \tau_{xy}}{\sigma_i^2} \quad \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{\frac{1}{2} \sigma_x \quad \sigma_y}{\sigma_i} \right] \frac{d\varepsilon_x}{ds} + \\ &+ \left[ \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\sigma_y \tau_{xy}}{\sigma_i^2} \quad \frac{Q}{\sin \vartheta_1} \frac{\sigma_x \quad \frac{1}{2} \sigma_y}{\sigma_i} \right] \frac{d\varepsilon_y}{ds} + \left[ \frac{1}{2} N + \frac{3}{2} (P \quad N) \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{d\gamma_{xy}}{ds}. \end{aligned}$$

Окончательно, определяющие соотношения теории упругопластических процессов в скалярной форме через компоненты тензоров напряжений и деформаций можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{ds} &= E_{11} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + E_{12} \frac{d\varepsilon_y}{ds} + E_{13} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \\ \frac{d\sigma_y}{ds} &= E_{21} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + E_{22} \frac{d\varepsilon_y}{ds} + E_{23} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \\ \frac{d\tau_{xy}}{ds} &= E_{31} \frac{d\varepsilon_x}{ds} + E_{32} \frac{d\varepsilon_y}{ds} + E_{33} \frac{d\gamma_{xy}}{ds}, \end{aligned} \quad (8)$$

где упругопластические характеристики

$$\begin{aligned}
E_{11} &= 2N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2}, & E_{12} &= N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin\vartheta_1}\frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i}, \\
E_{13} &= \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x\tau_{xy}}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin\vartheta_1}\frac{\frac{1}{2}\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_i}, \\
E_{21} &= N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin\vartheta_1}\frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i}, & E_{22} &= 2N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_y^2}{\sigma_i^2}, \\
E_{23} &= \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_y\tau_{xy}}{\sigma_i^2} + \frac{Q}{\sin\vartheta_1}\frac{\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y}{\sigma_i}, \\
E_{31} &= \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_x\tau_{xy}}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin\vartheta_1}\frac{\frac{1}{2}\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_i}, \\
E_{32} &= \frac{3}{2}(P - N)\frac{\sigma_y\tau_{xy}}{\sigma_i^2} - \frac{Q}{\sin\vartheta_1}\frac{\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y}{\sigma_i}, & E_{33} &= \frac{1}{2}N + \frac{3}{2}(P - N)\frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_i^2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если вместо длины дуги траектории деформации  $s$  проследивать процесс деформирования по любому другому монотонно возрастающему параметру  $t$  (обобщенному времени), то с учетом выражения

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

определяющие соотношения, связывающие скорости напряжений и деформаций, принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_x}{dt} &= E_{11}\frac{d\varepsilon_x}{dt} + E_{12}\frac{d\varepsilon_y}{dt} + E_{13}\frac{d\gamma_{xy}}{dt}, \\
\frac{d\sigma_y}{dt} &= E_{21}\frac{d\varepsilon_x}{dt} + E_{22}\frac{d\varepsilon_y}{dt} + E_{23}\frac{d\gamma_{xy}}{dt}, \\
\frac{d\tau_{xy}}{dt} &= E_{31}\frac{d\varepsilon_x}{dt} + E_{32}\frac{d\varepsilon_y}{dt} + E_{33}\frac{d\gamma_{xy}}{dt}.
\end{aligned} \tag{10}$$

При этом из (7)

$$\cos\vartheta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sigma_i} \left( \sigma_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \sigma_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \tau_{xy} \frac{d\gamma_{xy}}{dt} \right) \frac{1}{\frac{ds}{dt}}, \quad \sin\vartheta_1 = \sqrt{1 - \cos^2\vartheta_1},$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{d\Theta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta_3}{dt}\right)^2} = \\
&= \rho \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_x}{dt}\right)^2 + \frac{d\varepsilon_x}{dt} \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \left(\frac{d\varepsilon_y}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\gamma_{xy}}{dt}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Представленные выше соотношения позволяют решать краевые задачи методом конечных элементов в скоростях. Для этого система расчетных уравнений метода конечных элементов

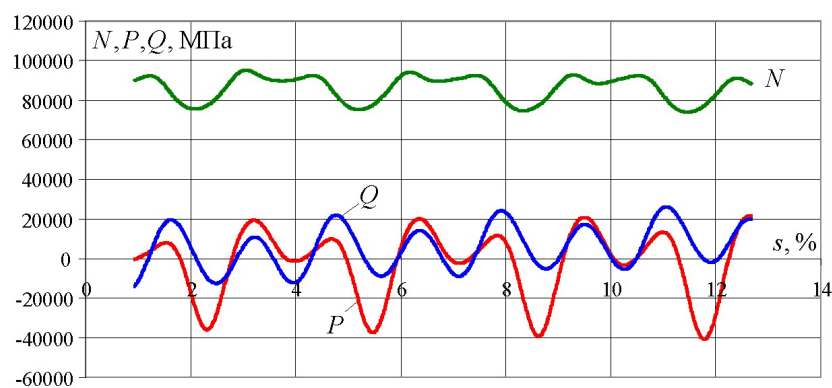
$$K^l U = ^l P,$$

где  $K$  – матрица жесткости;  $^l U$  – вектор узловых перемещений;  $^l P$  – вектор узловых нагрузок, преобразуется к решению в скоростях

$$K_t \frac{d^l U}{dt} = \frac{d^l P}{dt},$$

где  $K_t$  – касательная матрица жесткости, получаемая на основании определяющих соотношений через производные по обобщенному времени  $t$ ;  $\frac{d^l U}{dt}$  и  $\frac{d^l P}{dt}$  – векторы скоростей перемещений узлов и скоростей узловых нагрузок соответственно. Касательная матрица жесткости находится обычным методом, применяемым в методе конечных элементов, на основе метода возможных перемещений Лагранжа из условия равенства работ на возможных перемещениях внешних узловых нагрузок и внутренних сил, выраженных через напряжения, но записанных в скоростях. При этом, вместо зависимостей между перемещениями узлов и деформациями в конечных элементах используются зависимости в скоростях (при условии малых перемещений), а для связи между напряжениями и деформациями – определяющие соотношения в рассматриваемой форме. Такой метод для получения касательной матрицы жесткости рассмотрен в [1] для случая определяющих соотношений в форме гипотезы компланарности.

Функционалы  $N, P, Q$  определяются путем обработки результатов экспериментов, в которых реализуется плоское напряженное состояние, соответствующее решаемой задаче. На рис. 1 показана характерная зависимость величин функционалов от длины дуги траектории деформирования  $s$  в изображающем пространстве А.А. Ильюшина для трехмерной винтовой траектории деформирования постоянной кривизны и кручения, полученная в [16].



1.  $N, P, Q$   $s$

Уравнения метода конечных элементов в скоростях решаются на каждом шаге по параметру прослеживания. Таким образом, задача прослеживания процесса нагружения приведена к задаче Коши, где обобщенным временем является монотонно возрастающий параметр процесса. Задача решается численно по шагам. Для интегрирования может использоваться любой вариант метода прогноз-коррекция (Эйлера-Коши, Рунге-Кутта).

Необходимо отметить, что в рассматриваемых определяющих соотношениях использована модель несжимаемого материала, обладающая достаточной точностью при упругопластическом деформировании в условиях плоского напряженного состояния.

Таким образом, определяющие соотношения (10) с конкретизированными функционалами  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  в формулах (9) позволяют решать краевые задачи в рамках теории упругопластических процессов с использованием, например, метода конечных элементов в скоростях. Вопрос об аппроксимирующих функциях для функционалов пластичности  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  пока требует дополнительных исследований. Например, можно использовать, предложенный А.А. Ильюшиным экспериментально-теоретический метод СН-ЭВМ [17-19], реализация которого требует применения испытательной машины на сложное нагружение. В этом методе выбор аппроксимирующих функций выполняется по способу последовательных приближений. А большое количество уже накопленных экспериментальных данных позволяет применять метод СН-ЭВМ в численном эксперименте при решении краевых задач теории пластичности с проверкой на соответствие расчетных результатов экспериментальным данным.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] ... // ...
- [2] ... : ..., 2005. ... 7. ... 45-49.
- [3] ... // ... : ..., 2006. ... 8. ... 10-13.
- [4] ... // ... : ..., 2006. ... 4. ... 46-47.
- [5] ... // ... : ..., 2010. ... 3. ... 207-212.
- [6] ... : ..., 2010. 352 ... 1.
- [7] ... : ..., 2003. 172 ... 2.
- [8] ... : ..., 2004. 184 ... 45
- [9] ... // ... : ..., 2016. ... 9. ... 14-19.
- [10] ... // ... : ..., 2014. ... 216-220.
- [11] ... // ... : ..., 2015. ... 4 (26). ... 39-49.

- [11] ... // 2019. 61. C. 32–44.  
doi: 10.17223/19988621/61/4
- [12] ... // 2020. 3 (45). 64–71.
- [13] ... 45 // 2021. 14.  
1. 102–109.
- [14] ... 2: // 2016. 1. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106
- [15] ... // 2018. 22.  
3. 11–28.
- [16] ... // 2022. 1 (51). 84–94.
- [17] ... // 1971. 166–178.
- [18] ... // 1971. 1. 52–58.
- [19] ... 1987, 288.

*S. L. Subbotin, A. A. Alekseev*

CONSTITUTIVE RELATIONS OF THE THEORY OF ELASTOPLASTIC  
PROCESSES FOR SOLVING BOUNDARY PROBLEMS UNDER A PLANE  
STRESS STATE

*Tver State Technical University, Tver, Russia*

*Abstract.* For the case of a plane stress state, the constitutive relations of the connection beyond the elastic limit between stresses and strains in velocities are obtained. The tracking parameter is taken to be the generalized time, which increases monotonically in the course of deformation. The presented relations with specified plasticity functionals make it possible to solve boundary value problems based on the theory of elastoplastic processes using the finite element method in velocities.

*Keywords:* plasticity, constitutive relations, theory of elastoplastic processes, plane stress state, plasticity functionals, boundary value problem.

---

*Subbotin Sergey Lvovich*

e-mail: sbtn@yandex.ru, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

*Alekseev Andrey Alekseevich*

e-mail: alexew@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver, Russia.

## REFERENCES

- [1] Alekseev A. A. Algorithm for the numerical solution of a plane problem of the theory of elastoplastic processes by the finite element method // Bulletin of the Tver State Technical University. Tver: TvSTU, 2005. Issue. 7. P. 45-49. (in Russian)
- [2] Subbotin S. L. Boundary value problem of the theory of elastoplastic processes under rigid, soft and mixed loading // Bulletin of the Tver State Technical University. Tver: TvSTU, 2006. No. 8. P. 10-13. (in Russian)
- [3] Subbotin S. L., Alekseev A. A. A software package for modeling processes of complex loading of structural materials // Software and systems. 2006. No. 4. P. 46-47. (in Russian)
- [4] Zubchaninov V.G., Subbotin S.L., Alekseev A.A. Accounting for hardening in the calculation of processes of complex elastoplastic loading // News of the Tula state university. Technical sciences. 2010. . 3. pp. 207-212.
- [5] Zubchaninov V.G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010, 352 p. (in Russian)
- [6] Zubchaninov V. G. , Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity. Book 1. Processes of complex deformation. Tver: TvSTU, 2003. 172 p.
- [7] Zubchaninov V. G. , Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity. Book 2. Complex loading processes. Tver: TvSTU, 2004. 184 p.
- [8] Zubchaninov V. G. , Alekseev A. A., and Gul'tyaev V. I. 45 steel test under elastoplastic deformation on complex trajectories of fixed and variable curvatures // Deformatsiya i Razrushenie materialov. 2016. No 9. P. 14-19.
- [9] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A. Calculations of complex elastoplastic deformation of metals using a modified model of the theory of processes // Modern problems of continuum mechanics: proceedings of the conference. 2014. P. 216-220.
- [10] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Numerical modelling and creation of the image of process under elasto-plastic deformation steel along complex plane circle trajectories // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2015. No. 4 (26). pp. 39-49.
- [11] Zubchaninov V. G., Alekseev A.A., Gul'tyaev V. I., Alekseeva E. G. The processes of a complex loading of structural steel in a five-link piecewise polygonal strain path // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2019, P. 32-44. DOI: 10.17223/19988621/61/4.
- [12] Alekseev A. A., Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I. Experimental study and numerical calculation of the processes of complex elastoplastic deformation of materials along some multi-link strain paths // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2020. No. 3 (45). pp. 64-71.
- [13] Alekseev A. A. Modeling of elastoplastic deformation of steel 45 along archimedes spiral type trajectories // Computational Continuum Mechanics. 2021. Vol. 14. No. 1. pp. 102-109 DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.1.9
- [14] Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // Mechanics of Solids, 2016, Vol. 51, Issue 1, pp 91–113. doi: 10.3103/S0025654416010106
- [15] Molodtsov I. N., Babaeva D. O. Some mathematical models of elastoplastic processes of complex loading // Intelligent systems. Theory and applications. 2018. V. 22. No. 3. S. 11-28.
- [16] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Concretization of generalization of the coplanarity hypothesis for elastic-plastic processes in a three-dimensional space by A.A. Ilyushin // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2022. No 1 (51). pp. 84–94.
- [17] Ilyushin A. A. The SN-EVM Method in the Theory of Plasticity // Problems of Applied Mathematics and Mechanics. M.: Nauka, 1971. P. 166-178.
- [18] Ilyushin A. A. On a model explaining the SN-EVM approximation method in the theory of plasticity. // Elasticity and inelasticity. M.: Publishing House of Moscow State University, 1971, issue 1. P. 52-58.
- [19] Babamuratov K. Sh., Ilyushin A. A., Kabulov V. K., The SN-EVM Method and Its Applications to Problems in the Theory of Plasticity. Tashkent: FAN, 1987, 288 p.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ И РАЦИОНАЛЬНОГО  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОВЫХ МАТЕРИАЛОВ В ОДНОРОДНЫХ И  
ГИБРИДНЫХ ПОЛИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ  
ПЛАСТИНАХ**

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.006

: 539.374

---

© . . . , 2022

e-mail: nemiryury@mail.ru,

20.07.2022

## Введение

Прямоугольные пластинки изгибаемые поперечными распределенными давлениями находят широкое применение во многих изделиях авио-космической, судо- и машиностроительной промышленности и объектах индустриального и гражданского строительства [1–18]. Если до середины прошлого века теория расчета таких конструкций опиралась на законы линейной теории упругости и линейной алгебры были достаточно обоснованы и внедрены в расчетную практику повсеместно, то в настоящее время ситуация коренным образом изменилась. Жесткие требования современной конкуренции в промышленном производстве, связанные с необходимостью повышения надежности эксплуатации создаваемых конструкций, увязанные с экономией материальных и финансовых ресурсов требуют создания новых типов изделий в виде композитных конструкций, методы расчетов по которым находятся в состоянии пробных разработок, не всегда обоснованных и требующих больших временных и трудовых ресурсов для выправления и осознания совершенных ошибок. Поэтому проблема разработки относительно простых и надежных множественных методов композитных конструкций разных типов всегда будет актуальной. Удобнее всего такие разработки проводить на классах конструкций, наиболее широко встречающихся в практике производства и в пробных попытках решения подобных задач до настоящего времени. Некоторые из таких попыток нашли отражение в работах [2, 4, 5], некоторые из возникающих вопросов освещены в работах [1, 8–16, 19–23].

В данной статье сделана попытка учитывающая предыдущие (удачные с точки зрения авторов разработки) свести их воедино и разработать единый метод расчета изгибаемых полиметаллических пластин. Некоторые детали промежуточных математических выкладок, которые легко провести читателю, знакомому с изданными материалами [17, 18] автор опускает из-за ограниченности объема статьи.

### Формулировка общей задачи исследования

В декартовой системе координат  $Oxyz$  рассмотрим  $2n$ -слойную полиметаллическую прямоугольную пластинку

$$\begin{aligned} & 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \\ & h_n \leq z \leq h_{n-1} \leq \dots \leq 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n, \\ & h_i = \sum_{i=1}^n h_i, \quad h_0 = 0, \end{aligned}$$

где  $h_i$  – толщина  $i$ -го фазового материала,  $a$  и  $b$  – размеры сторон прямоугольника.

Будем считать структуру расположения фазовых материалов попарно симметричной относительно срединной плоскости  $z = 0$ .

При рассмотрении задач изгиба пластин поперечную нагрузку для простоты считаем равномерно распределенным давлением, контурные внешние нагрузки отсутствующими и контур пластины закрепленным по сторонам прямоугольника традиционным способом: защемление, шарнирное опирание в разных комбинациях по отрезкам контура. Все слои гибридной пластины считаем тонкими, находящимися в условиях плоского напряженного состояния и подчиняющимися в процессе деформирования классическим гипотезам Кирхгофа-Лява от начала деформирования и до разрушения.

Тогда для компонент деформаций будем иметь выражения

$$\varepsilon_{xx} = z\{\_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = z\{\_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = z\{\_{xy}, \quad (1)$$

$$\{\_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \{\_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \{\_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \{\_{yx}, \quad (2)$$

где  $w(x, y)$  – прогиб пластины.

Имеем также выражения

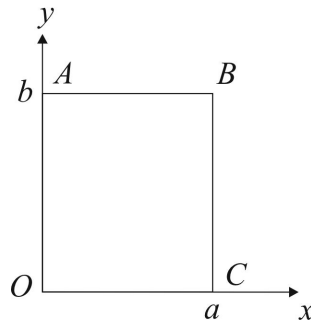
$$\{\_{xx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \{\_{yy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3)$$

где  $\theta_x, \theta_y$  – углы поворота,  $\{\_{xx}, \{\_{yy}, \{\_{xy}$  – компоненты тензора кривизны и кручения изгибаемой поверхности пластины. Очевидно, эти соотношения справедливы и для однослойной пластины.

В качестве уравнений состояния фазовых материалов рассматриваемых гибридных пластин будем использовать уравнения деформационной теории Генки-Ильюшина []. Тогда для напряжений  $i$ -го фазового слоя будем иметь

$$\sigma_{xxi} = \frac{\sigma_{ui}}{\{\_u} (2\{\_{xx} + \{\_{yy}), \quad \sigma_{yyi} = \frac{\sigma_{ui}}{\{\_u} (2\{\_{yy} + \{\_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{ui} \frac{\{\_{xy}}{\{\_ui}, \quad (4)$$

$$\{\_u^2 = (\{\_{xx}^2 + \{\_{xx}\{\_{yy} + \{\_{yy}^2 + \{\_{xy}^2)^{1=2}. \quad (5)$$



. 1.

Закон деформирования

$$\sigma_{ui} = (E_{1i} + z^2 E_{2i} \{\_u^2) z\{\_u, \quad (6)$$

$$E_{2i} = \frac{1}{3} \frac{E_i^2}{\sigma_i}, \quad \varepsilon_i = \frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{E_i}, \quad (7)$$

где  $E_i, \sigma_i$  – модуль Юнга и предел прочности  $i$ -го фазового материала, а  $\varepsilon_i$  – предельная деформация предразрушения (разупрочнения) материала для  $i$ -ой фазы.

Рассмотрим полиметаллическую пластинку в размерах  $a$  и  $b$  (рис. 1) в декартовой системе координат.

Уравнения сторон ее описываются соотношениями

$$\begin{aligned} OA: & \quad x = 0, 0 \quad y \quad b, & AB: & \quad y = b, 0 \quad x \quad a, \\ BC: & \quad x = a, 0 \quad y \quad b, & OC: & \quad y = 0, 0 \quad x \quad a. \end{aligned} \quad (8)$$

По условиям закрепления на контуре исследуемые пластины разделены на группы, в каждой из которых функция прогибов с точностью до постоянного для данной группы слоистых пластин из изотропных фазовых материалов удовлетворяют всем условиям закрепления контура. Тогда будем иметь нижеследующие выражения:

если все стороны контура защемлены, то

$$w_1(x, y) = C_1 x^2 y^2 (x - a)^2 (y - b)^2 = C_1 (x^4 - 2ax^3 + a^2 x^2)(y^4 - 2by^3 + b^2 y^2),$$

если все стороны шарнирно оперты, то

$$w_2(x, y) = C_2 x^3 y^3 (x - a)^3 (y - b)^3,$$

если стороны  $OA$  и  $BC$  защемленные, а стороны  $OC$  и  $AB$  шарнирно закреплены, то

$$w_3(x, y) = C_3 x^2 (x - a)^2 y^3 (y - b)^3,$$

если стороны  $OA$  и  $BC$  шарнирно оперты, а стороны  $OC$  и  $AB$  защемлены, то

$$w_4(x, y) = C_4 x^3 (x - a)^3 y^2 (y - b)^2,$$

если смежные стороны  $OA$  и  $AB$  защемлены, а другие смежные шарнирно оперты, то

$$w_5(x, y) = C_5 x^2 (y - b)^2 (x - a)^3 y^3,$$

если смежные стороны  $OA$  и  $AB$  шарнирно оперты, а смежные стороны  $BC$  и  $OC$  защемлены, то

$$w_6(x, y) = C_6 x^2 (x - a)^3 y^2 (y - b)^3,$$

если закрепления сторон  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $OC$  последовательно заменяют защемление на шарнирную опору, а ее – на защемление и шарнирную опору, то будем иметь

$$w_7(x, y) = C_7 x^3 (x - a)^2 y^3 (y - b)^2.$$

Совершенно иные формы изгибания будут реализовываться в пластинках, у которых одна, две или три контурные стороны окажутся не закрепленными. Рассмотрим их здесь последовательно.

Если сторона  $AB$  не защемлена, то возможны следующие формы изгибания

при защемленных остальных сторонах

$$w_8(x, y) = C_8 (x - a)^2 y^2 (y - b)^2,$$

при шарнирно опертых остальных сторонах

$$w_9(x, y) = C_9 (x - a)^3 y^3 (y - b)^3,$$

при шарнирно опертой стороне  $BC$  и остальных защемленных сторонах

$$w_{10}(x, y) = C_{10} (x - a)^3 x^2 (y - b)^2,$$

при шарнирно опертых стороне  $BC$  и  $CO$  и защемленной стороне  $OA$

$$w_{11}(x, y) = C_{11} x^2 (x - a)^2 y^3,$$

если сторона  $BC$  не закреплена, а остальные – защемлены, то будем иметь

$$w_{12}(x, y) = C_{12} x^3 (x - a)^3 y^2,$$

если сторона  $BC$  не закреплена, а остальные шарнирно оперты, то

$$w_{13}(x, y) = C_{13} x^3 (x - a)^3 y^3,$$

если сторона  $BC$  не закреплена, сторона  $CD$  – шарнирно оперта, а остальные защемлены, то

$$w_{14}(x, y) = C_{14}(x - a)^3 y^2 (y - b)^2,$$

если сторона  $BC$  не закреплена, а стороны  $CD$  и  $DA$  шарнирно оперты, а сторона  $AB$  защемлена, то

$$w_{15}(x, y) = C_{15} x^2 (x - a)^3 y^3,$$

если сторона  $CO$  не закреплена, а остальные защемлены, то

$$w_{16}(x, y) = C_{16} x^2 y^2 (y - b)^2,$$

если сторона  $CO$  не закреплена, а остальные – шарнирно оперты, то

$$w_{17}(x, y) = C_{17} x^3 y^3 (y - b)^3,$$

если сторона  $CO$  не закреплена, сторона  $AO$  – шарнирно оперта, а остальные – защемлены, то

$$w_{18}(x, y) = C_{18} y^3 (y - b)^2 x^2,$$

если сторона  $CO$  не закреплена, стороны  $AO$  и  $AB$  шарнирно оперты, а стороны  $BC$  – защемлены, то

$$w_{19}(x, y) = C_{19} y^3 (y - b)^2 x^3,$$

если сторона  $AO$  не закреплена, а остальные защемлены, то

$$w_{20}(x, y) = C_{20} x^2 (x - a)^2 (y - b)^2,$$

если сторона  $AO$  не закреплена, а остальные стороны – шарнирно оперты, то

$$w_{21}(x, y) = C_{21} x^3 (x - a)^3 (y - b)^3,$$

если сторона  $AO$  не закреплена, сторона  $AB$  шарнирно оперта, а остальные – защемлены, то будем иметь

$$w_{22}(x, y) = C_{22} x^3 y^2 (y - b)^2,$$

если сторона  $AO$  не закреплена, стороны  $AB$  и  $BC$  – шарнирно оперты, а сторона  $AO$  – защемлена, то будем иметь

$$w_{23}(x, y) = C_{23} x^2 (y - b)^3 (x - a)^3.$$

Возможны также ситуации, связанные с незакреплением двух или трех сторон. Рассмотрим здесь ситуации, приводящие к цилиндрическим и консольным изгибаниям прямоугольных плит. Пусть стороны  $AB$  и  $CO$  не закреплены, тогда возможны состояния:

стороны  $BC$  и  $AO$  защемлены

$$w_{24}(x, y) = C_{24} (y - b)^2 y^2,$$

стороны  $BC$  и  $AO$  шарнирно оперты

$$w_{25}(x, y) = C_{25} (y - b)^3 y^3,$$

$AO$  – шарнирно оперта,  $BC$  – защемлена

$$w_{26}(x, y) = C_{26} (y - b)^2 y^3,$$

$BC$  – шарнирно оперта,  $AO$  – защемлена

$$w_{26}(x, y) = C_{27} y^2 (y - b)^3.$$

Аналогичные зависимости получим с заменой  $y \leftrightarrow x$  и  $(y - b) \leftrightarrow (x - a)$ , когда незакрепленными будут параллельные стороны  $BC$  и  $AO$ . В случае трех незакрепленных сторон будем иметь зависимости

$$\begin{aligned} w_{27}(x, y) &= C_{26}x^2, & w_{28}(x, y) &= C_{28}(x - a)^2, \\ w_{29}(x, y) &= C_{29}y^2, & w_{30}(x, y) &= C_{30}(y - b)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого варианта рассматриваемых пластин с номером  $m$  искомое решение можно записать в форме

$$w_m(x, y) = C_m \varphi_m(x, y), \quad (9)$$

где  $\varphi_m(x, y)$  – известная функция.

Определение постоянных  $C_m$  может быть реализовано при использовании обобщенных модификаций метода Бубнова-Галеркина [ ], в которых функция  $\varphi_m(x, y)$  может быть использована для получения первого приближения, а набор функций  $\varphi_m(x, y)$ ,  $\varphi_m^2(x, y)$ ,  $\varphi_m^3(x, y)$  – для получения уточняющих решений.

Одним из важнейших вопросов, связанных с процессами деформирования гибридных полиметаллических плит является вопрос об их несущей способности, определяющей амплитуду нагрузки необходимой для их разрушения. При сформулированных выше гипотезах развития деформационных процессов, очевидно, что процесс их разрушения для проекта изделия с номером  $m$  может происходить только одновременно во всех фазовых материалах одновременно. В противном случае с развитием дальнейшего нагружения окружающие фазовые неразрушенные слои будут сохранять целостность конструкции. Допустим, что при некоторой амплитуде нагрузки  $q$  происходит разрушение  $m$ -го проекта с номером  $m$  вследствие достижения интенсивностью искривления некоторого уровня  $\{ \varepsilon_m \}$ , зависящего от  $q_m$ . В таком случае для любых пар  $i$  и  $j$  фазовых материалов будут справедливы зависимости [ ]

$$\{ \varepsilon_m h_i = \varepsilon_i, \quad \{ \varepsilon_m h_j = \varepsilon_j, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{3\sigma_i}{2E_i}, \quad \varepsilon_j = \frac{3\sigma_j}{2E_j}, \quad (11)$$

где  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$ ,  $E_i$ ,  $E_j$  – пределы прочности и модули Юнга соответствующих фазовых материалов. Тогда будем иметь очевидно

$$\frac{h_i}{h_j} = \frac{\sigma_i E_j}{\sigma_j E_i}. \quad (12)$$

Среди предельных величин деформаций предразрушения существует величина

$$\varepsilon_k = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n) = \frac{3\sigma_k}{2E_k}. \quad (13)$$

Для сравнения различных проектов между собой введём эталонный проект в виде однослойной пластины толщиной  $2h_0$  из материала с параметрами  $E_0$ ,  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$ , для которых при разрушении будут справедливы зависимости

$$\{ \varepsilon_0 h_0 = \varepsilon_0 = \frac{3\sigma_0}{2E_0}. \quad (14)$$

Одним из важнейших вопросов, связанных с процессами деформирования гибридных полиметаллических плит, является вопрос об их несущей способности, определяющих амплитуду нагрузки, необходимой для их разрушения. При сформулированных гипотезах о развитии деформационных процессов, очевидно, что процесс их развития для определенного проекта с номером  $m$  может происходить только одновременно во всех фазовых материалах одновременно. В противном случае с развитием дальнейшего нагружения неразрушенные окружающие фазовые материалы будут сохранять целостность гибридной конструкции.

Будем рассматривать при одинаковых условиях на контурных сторонах, соответствующих проекту с номером  $m$  однородную однослойную пластинку с толщиной  $2h_0$  и полиметаллическую пластинку с общей толщиной  $2h_n$

$$h_n = \sum_{i=1}^n h_i. \quad (15)$$

$h_i$  – толщина  $i$ -го фазового слоя и будем считать, что они разрушаются при одинаковых амплитудах равномерно распределенной нагрузки

$$q_0 = q_m. \quad (16)$$

Тогда нагрузке  $q_0$  будет соответствовать предельно допустимая интенсивность изгиба эталонной пластинкой зависимостью

$$\{ \}_0 h_0 = \varepsilon_0, \quad (17)$$

где  $\varepsilon_0$  – предельно допустимая деформация эталонного материала.

При разрушающей нагрузке  $q_0$  вес и стоимость рассматриваемой эталонной пластинки будут определяться формулами

$$B_0 = 2ab\rho_0 h_0, \quad (18)$$

$$C_0 = 2abc_0 h_0, \quad (19)$$

где  $\rho_i, c_i$  – удельные плотность и стоимость материала  $i$ -ой фазы.

В момент разрушения можно определить также характеристики

$$w_0 = \max_{(x,y) \in 2(a,b)} w_0(x, y), \quad (20)$$

$$w_m = \max_{(x,y) \in 2(a,b)} w_m(x, y), \quad (21)$$

и ввести относительную характеристику жесткости (податливости) рассматриваемого проекта

$$w_{0m} = \frac{w_m}{w_0}. \quad (22)$$

Очевидно, что местоположение точки накопленной максимальной податливости у обоих пластин будет совпадать

$$x_0 = x_m, \quad y_0 = y_m. \quad (23)$$

Введенные относительные характеристики характеризуют при одинаковой несущей способности качества вновь создаваемых проектов по расходам материалов и стоимости изделий. Очевидно, что наиболее рациональными следует чаще всего признавать

проекты, для которых справедливы неравенства

$$\frac{B}{B_0} < 1, \quad \frac{C}{C_0} < 1. \quad (24)$$

Ввиду определенного произвола параметров  $i$ , и большого разнообразия механических и физических характеристик фазовых материалов и способов закрепления исследуемых пластин сформулировать экспромтом зависимости между геометрическими, механическими параметрами в любых из рассматриваемых комбинациях закрепления вряд-ли возможно из-за неполной формулировке всех обязательно требуемых законов механического поведения исследуемых объектов. Среди сформулированных в виде гипотез и предположений (в упрощенной приближенной форме) не был затронут обязательный для любого механического объекта при квазистатических нагружениях закон требующий обеспечение в заданных условиях нагружения и закрепления равновесного состояния изучаемого объекта, к необходимости обеспечения которого мы теперь и приступим.

Как известно, при изгибе пластин из любых материалов условия их равновесия требуют выполнения в процессе всего нагружения следующего уравнения

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - q + q_1 = 0. \quad (25)$$

Здесь  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$  – возникающие при изгибе пластины изгибающие и крутящий моменты,  $q$  – распределенная по поверхности внешняя (заданная) поперечная нагрузка,  $q_1$  – удельная (на единице длины) общая нагрузка от собственных удельных весов фазовых материалов

$$q_1 = 2 \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot h_i. \quad (26)$$

Изгибающие  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  и крутящий момент  $M_{xy}$  связаны с напряжениями  $\sigma_{xxi}$ ,  $\sigma_{yyi}$ ,  $\sigma_{xyi}$  в  $i$ -ом фазовом слое

$$M_{xx} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{xxi} z^2 dz, \quad M_{yy} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{yyi} z^2 dz, \quad (27)$$

$$M_{xy} = 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_{xyi} z^2 dz,$$

и с учетом зависимостей (4)-(6) могут быть представлены в форме

$$M_{xx} = \frac{2}{3} (2 \cdot 1 + 2) \sum_{i=1}^n E_{1i} (h_i^3 - h_{i-1}^3) - \frac{2}{5} (2 \cdot 3 + 4) \sum_{i=1}^n E_{2i} (h_i^5 - h_{i-1}^5), \quad (28)$$

$$M_{yy} = \frac{2}{3} (2 \cdot 3 + 4) \sum_{i=1}^n E_{1i} (h_i^3 - h_{i-1}^3) - \frac{2}{5} (2 \cdot 2 + 1) \sum_{i=1}^n E_{2i} (h_i^5 - h_{i-1}^5), \quad (29)$$

$$M_{xy} = \frac{2}{3} \cdot 5 \sum_{i=1}^n E_{1i} (h_i^3 - h_{i-1}^3) - \frac{2}{5} \cdot 6 \sum_{i=1}^n E_{2i} (h_i^5 - h_{i-1}^5), \quad (30)$$

где

$$\epsilon_1 = \{\epsilon_{xx}, \quad \epsilon_2 = \{\epsilon_{yy}, \quad \epsilon_3 = \{\epsilon_{xx}\}^2, \quad \epsilon_4 = \{\epsilon_{yy}\}^2, \quad \epsilon_5 = \{\epsilon_{xy}, \quad \epsilon_6 = \{\epsilon_{xy}\}^2. \quad (31)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] ... : ..., 1958. 502 .
- [2] ... // ... X
- [3] ... , 2017. . 106–110.
- [4] ... , 1990. 190 .
- [5] ... // ... , 2009.
- [6] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [8] ... : ..., 1974. 208 .
- [9] ... // ... . 2012. 11. . 61–66.
- [10] ... : ..., 352 .
- [11] ... : ..., 1974. 208 .
- [12] ... // ... . 2013. 4. . 133–146.
- [13] ... : ..., 2004. 488 .
- [14] ... // ... . 2018. 3(37). . 26–37.
- [15] ... // ... : ..., 2006. . 288–290.
- [16] ... : ..., 2015. 6. . 125–129.
- [17] ... // ... . 2020. 12. . 11–49.
- [18] ... // ... / ... . 1972. . 192–222.
- [19] ... 6. 2015. . 20–22.
- [20] ... 9. 2014. . 28–30.
- [21] ... // ... . 2008. 7. . 113–122.

- [22] Nemirovskii Yu. V. Dynamics of plastic laminated fibrous plates // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics deformable rigid body. Samara: Samara State Technical University, 2017. P. 106–110.
- [23] Koshur W. D., Nemirovskii Yu. V. Continuous and discrete models of dynamic deformation structural elements. Novosibirsk: Science, 1990. 190 p.

*Yu. V. Nemirovskii*

INVESTIGATION OF DESTRUCTION AND RATIONAL DISTRIBUTION OF  
PHASE MATERIALS IN HOMOGENEOUS AND HYBRID POLYMETALLIC  
RECTANGULAR PLATES

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch  
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** For rectangular polymetallic plates made of isotropic materials, a general method has been developed for their nonlinear elastic and plastic deformation up to failure. The method is based on the use of the classical Kirchhoff-Love kinematic hypotheses and the relationship between the physical connection of stresses and strains in phase materials in the form of a deformation theory of plasticity, taking into account the influence of hardening effects. The criterion of maximum allowable deformation is used as a failure criterion. Corresponding transition from the state of hardening to the state of failure. It is believed that the bearing capacity of a hybrid plate is realized if the limiting state is reached simultaneously in all phase materials. Arbitrary conditions for fixing the contour sides of a rectangle (loose, pinched, hinged) in any combination are considered. General equations are obtained, a method for their solution is described in detail using modern modifications of the Bubnov-Galerkin method. A criterion for selecting rational designs of hybrid plates based on the coincidence of loads with a single-layer plate equivalent in bearing capacity is formulated.

**Keywords:** hybrid plates, contour, bending, external loads, phase materials, hardening, softening, pre-fracture deformation, conditions for fixing the contour sides (free, pinched, hinged), bearing capacity loads, reference single-layer plate, rational (optimal) designs of hybrid polymetallic plates

## REFERENCES

- [1] Vlasov W. Z. Thin-walled spatial systems. Moscow: Gosstroyizdat, 1958. 502 p.
- [2] Nemirovskii Yu. V. Dynamics of plastic laminated fibrous plates // Proceedings of the X All-Russian Conference on Mechanics deformable rigid body. Samara: Samara State Technical University, 2017. P. 106–110.
- [3] Koshur W. D., Nemirovskii Yu. V. Continuous and discrete models of dynamic deformation structural elements. Novosibirsk: Science, 1990. 190 p.
- [4] Nemirovskii Yu. V. Nonlinear Deformation Prediction of Hybrid composite materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid body. Proceedings of the second international conference. Kazan: Kazan State University, 2009.
- [5] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. World: Moscow, 1988. 352 p.

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

- 
- [6] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
- [7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [8] Gemlering A. V. Calculation of bar systems. Moscow: Construction, 1974. 208 p.
- [9] Klyueva N. A., Shuvalov K. A. Method of experimental determination of the parameters of deformation and destruction of prestressed reinforced concrete statically indeterminate beam systems in transcendent states // *Bulletin of MGSU*. 2012. no. 11. P. 61–66.
- [10] Kodysh E. N., Trekin N. N., Nikitin I. K. Design of multi-storey buildings with reinforced concrete frame. Moscow: Publishing house of construction universities. 352 .
- [11] Lukash P. Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics. Moscow: Construction, 1974. 208 p.
- [12] Mishchenko A. V., Nemirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements under longitudinal-transverse bending // *News of universities. Construction*. 2013. no. 4. P. 133–146.
- [13] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered bar systems. Novosibirsk: NGASU, 2004. 488 p.
- [14] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University*. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2018. no. 3(37). P. 26–37.
- [15] Nemirovsky Y. V. Method of calculation of rod composite rods from different-modulus materials // *Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics: Proceedings of the V All-Russian Scientific Conference*. Tomsk: TSU publishing house, 2006. P. 288–290.
- [16] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // *Bulletin of BSTU im. V.G.Shukhova*. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [17] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete bars under quasi-static loads // *Modeling and structural mechanics*. 2020. no. 12. P. 11–49.
- [18] Protsenko A. M., Vlasov V. V. Static principle of limit equilibrium and determination of the deformed state of statically indeterminate reinforced concrete structures at the stage of exhaustion of their bearing capacity // *Influence of static, dynamic and repeatedly repeated loads on concrete and elements of reinforced concrete structures* / Ed. by G. A. A. 1972. P. 192–222.
- [19] Egorychev O. O., Churin P. S. Experimental study of wind loads on high-rise buildings. No. 6. 2015. P. 20–22.
- [20] Egorychev O. O., Churin P. S., Poddaeva O. I. Experimental study of force-moment wind loads on high-rise buildings. No. 9. 2014. P. 28–30.
- [21] Krus Y. A. Transformations of concrete deformation diagrams under central compression and tension // *News of universities. Construction*. 2008. no. 7. P. 113–122.
- [22] Mailyan L. R., Ivashchenko E. I. Calculation of reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams. Rostov-on-Don: Publishing house of the Rostov state. builds. un-t, 2006. 222 p.
- [23] Ivashchenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams, taking into account the actual change in their cross-sectional area // *dis. ... cand. tech. Sciences. Voronezh*, 2006. 230 p.

## ОБОБЩЕННЫЙ АНАЛИЗ ГАРАНТИРОВАННОГО РАЗРУШЕНИЯ ВЗРЫВОМ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ВОДЕ

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.007

: 531/534

**Первый этап.** Эффекты отражения при взрыве в воде.

Пусть к преграде в точке под некоторым углом  $\alpha$  подходит параллельно-струйный или расходящийся поток возмущенной воды, образованный при взрыве в

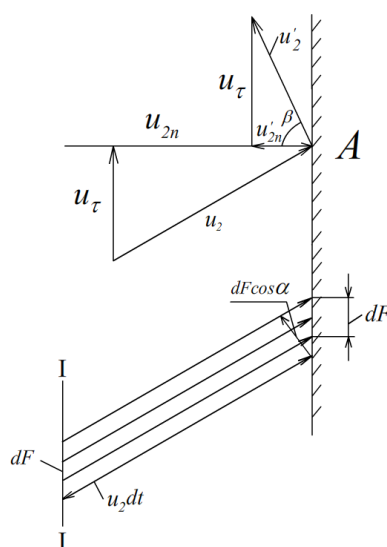
© , 2022

e-mail: g.volodin@yandex.ru,

e-mail: sir.cod4@yandex.ru,

17.07.2022

воде заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ) сферической формы радиуса  $r_0$  (Рис. 1). Преграда считается идеальной (недеформируемой) в момент воздействия на неё потока и отражения, а также неподвижной, так как за время действия нагрузки рассматриваемого вида элементы преграды не получают заметных смещений, а получают лишь начальные скорости. Деформирование преграды происходит после окончания действия нагрузки, во время свободных колебаний преграды [1], [2]. Форма преграды не фиксируется. Набегающий на преграду поток считается состоящим из отдельных частиц, каждая из которых достигает преграды и вносит свой вклад в создаваемую потоком взрывную нагрузку. Взаимодействие частиц с преградой считается неидеальным, коэффициент восстановления при ударе  $0 < K < 1$  необходимо найти.



. 1.

Чтобы найти давление, которое создаёт в этой точке возмущенный поток при его торможении, вырежем мысленно в окрестности точки  $A$  бесконечно малую площадку  $dF$  и рассмотрим действие на неё частиц потока.

На площадку падает бесконечно малая струйка возмущенной воды, площадь поперечного сечения которой  $dF \cos \alpha$  (Рис. 1). За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  к площадке  $dF$  подойдет масса воды, заключенная в элементарной струйке между преградой и сечением  $I-I$ , удаленным от преграды на расстояние  $u_2 dt \cos \alpha$ . Эта масса определяется в виде

$$dm = \rho_2 dF u_2 dt \cos \alpha \quad (1)$$

где  $\rho_2$ ,  $u_2$  – соответственно плотность и скорость частиц среды на фронте падающей водной ударной волны.

При ударе элементарной струйки о преграду, частицы возмущенного потока этой струйки, теряя часть нормальной составляющей скорости, отражаются от преграды

под некоторым углом  $\beta \neq \alpha$ . Обозначим нормальную составляющую скорости подходящего к преграде потока через  $u_{2n}$ , а нормальную составляющую скорости отраженного потока через  $u_{2n}^{\circ}$ . Применим к элементарной струйке закон сохранения импульса. Согласно этому закону импульс силы, действующей на преграду  $dF$ , равен изменению количества движения струйки

$$PdF dt = dm (u_{2n} - u_{2n}^{\circ}). \quad (2)$$

Заменив элементарную массу  $dm$  её значением по формуле (1), получим

$$P = \rho_2 u_2 \cos \alpha (u_{2n} - u_{2n}^{\circ}) = \rho_2 u_2 \cos \alpha u_{2n} \left(1 - \frac{u_{2n}^{\circ}}{u_{2n}}\right). \quad (3)$$

Отношение модуля нормальной составляющей скорости отраженного потока к модулю нормальной составляющей падающего потока есть коэффициент восстановления при ударе

$$K = \frac{ju_{2n}^{\circ}}{ju_{2n}}. \quad (4)$$

Так как  $u_{2n}$  и  $u_{2n}^{\circ}$  имеют противоположные направления, то

$$1 - \frac{u_{2n}^{\circ}}{u_{2n}} = 1 + K \quad (5)$$

Учитывая соотношение

$$u_{2n} = u_2 \cos \alpha \quad (6)$$

формулу (3) запишем в виде

$$P = (1 + K) \rho_2 u_2^2 \cos^2 \alpha. \quad (7)$$

Для нахождения коэффициента восстановления  $K$  воспользуемся его свойствами. Величина  $K$  должна принадлежать интервалу  $(0 < K < 1)$ ; эта величина является функцией угла падения:  $K = f(\alpha)$ , при этом с увеличением  $\alpha$  коэффициент  $K$  уменьшается, в пределе при  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$  величина  $K \rightarrow 0$ , то есть должно выполняться требование

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\alpha) = 0. \quad (8)$$

Указанным условиям удовлетворяет функция  $\cos^2 \alpha$ . Положим

$$K = \cos^2 \alpha. \quad (9)$$

С учётом (9) формула (7) примет вид

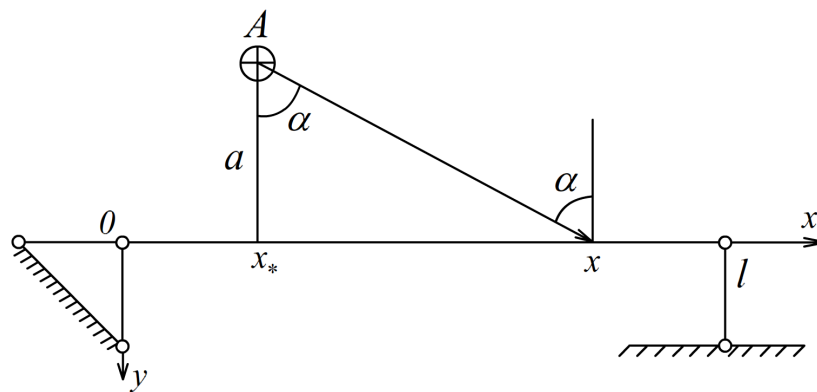
$$P = (1 + \cos^2 \alpha) \rho_2 u_2^2 \cos^2 \alpha. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь влияние расположения заряда над преградой на величину давления  $P$  в формуле (10).

Пусть заряд радиуса  $r_0$  расположен над преградой (балкой) в воде на расстоянии  $a$  от оси балки, точка  $x$  - эпицентр взрыва (Рис.2).

Тогда

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (x - x_0)^2}}. \quad (11)$$



. 2.

С учётом соотношения (11) формулу (10) можно записать в виде

$$P_m = \frac{a^2 [2a^2 + (x - x_*)^2] \rho_2 u_2^2}{[a^2 + (x - x_*)^2]^2}. \quad (12)$$

Формула (12) определяет максимальное значение давления торможения возмущенного потока воды в момент его отражения от преграды. В большинстве исследований по взрыву в воде, следуя работе [3], принято определять изменение давления со временем в фиксированной точке пространства по формуле

$$\frac{P - P_{01}}{P_{01}} = \frac{P_m - P_{01}}{P_{01}} e^{-\frac{t}{\vartheta}}, \quad (13)$$

в которой время  $t$  отсчитывается от момента прихода фронта ударной волны в данную точку, а величина  $\vartheta$ , называемая постоянной времени, определяется для сферического заряда радиуса  $r_0$  соотношением [1]:

$$\frac{a_{01} \vartheta}{r_0} = 1,4 \left( \frac{a}{r_0} \right)^{0,24}, \quad (14)$$

где  $r$  – расстояние от центра взрыва до точки наблюдения,  $a_{01}$  – скорость звука в воде.

В соответствии с (13) удельный импульс фазы сжатия

$$i = \int_0^+ (P - P_{01}) dt = (P_m - P_{01}) \int_0^+ e^{-\frac{t}{\vartheta}} dt = (P_m - P_{01}) \vartheta (1 - e^{-\frac{\tau_+}{\vartheta}}), \quad (15)$$

где  $\tau_+$  – время действия фазы сжатия [1].

В неограниченной среде  $\frac{\tau_+}{\vartheta} > 5$  [1], [3], поэтому

$$i = (P_m - P_{01}) \vartheta. \quad (16)$$

Запишем, согласно соотношению для  $\vartheta$  (14) выражение для удельного импульса (16) в виде

$$i = 1,4 \frac{r_0}{a_{01}} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{0,24} (\eta \rho_2 u_2^2 - P_{01}), \quad (17)$$

где

$$\eta = \frac{a^2 [2a^2 + (x - x_0)^2]}{[a^2 + (x - x_0)^2]^2}. \quad (18)$$

**Второй этап.** Воздействие импульсной нагрузки взрыва на балку. Постановка задачи.

$$(\dots)$$

Будем считать, что балка по всей длине имеет постоянное сечение, поперечные размеры балки невелики по сравнению с её длиной. Нагрузка прикладывается к балке мгновенно и действует, монотонно убывая, в течение времени  $\tau_+$ , которое в пределе можно считать стремящимся к нулю [4].

Пренебрегаем по малости усилиями, возникающими в балке длиной  $l$  от её собственного веса, следовательно, можно считать, что до действия нагрузки ось балки прямолинейна, а сама балка находится в покое – начальные смещения всех её точек  $y=0$  и начальная скорость всех частиц  $y'_x = 0$ . Под действием внешней нагрузки частицы балки получают смещения и скорости, которые распределены по длине балки, то есть являются функциями положения сечения  $x$  и времени  $t$  [1], [2], [4].

Поместим начало координат на левом конце балки (Рис. 2), ось  $x$  направим вдоль неё, а ось  $y$  вниз по направлению действия нагрузки. В этих обозначениях ордината будет выражать собой прогиб балки в сечении, находящемся на расстоянии  $x$  от её левого конца в момент времени  $t$ , то есть  $y=y(x,t)$ .

В работе [5] получено уравнение движения балки под действием внешней динамической нагрузки

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{K_1 b}{m + m_1} P_2(x) f(t), \quad (19)$$

где  $P_2$  – давление на балку в момент приложения к ней нагрузки,  $b$  – ширина балки,  $K_1$  – коэффициент формы, учитывающий расположение балки по отношению к действующей на неё нагрузке [4],  $f(t)$  – функция, учитывающая спад давления со временем; эта функция на основе обработки данных многочисленных экспериментов может быть задана в виде

$$f(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau_+}\right)^n, \quad (20)$$

где  $n$  – параметр, значения которого расположены в интервале  $n \in (1; 3)$  в зависимости от величины и вида взрывной нагрузки [4],  $m$  – погонная масса балки,  $m_1$  – погонная присоединенная масса воды (её введение учитывает сопротивление воды движению балки),

$$\beta = \sqrt{\frac{EJ}{m + m_1}}; \quad (21)$$

Так как импульс действует кратковременно, то за время его действия частицы балки не успевают получить заметных смещений, а получают только начальные скорости [1], [2], [4], [5]. Деформирование балки происходит после окончания действия нагрузки, во время ее свободных колебаний, уравнение которых имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (22)$$

В случае свободного опирания балки на идеальные (не разрушаемые взрывом) опоры граничными условиями для уравнения (22) будут условия отсутствия перемещений и изгибающих моментов на концах балки; эти условия соответственно примут вид

$$y(0, t) = y(l, t) = 0 \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (24)$$

Начальные условия в соответствии с характером действующей нагрузки имеют вид

$$y(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{i(x)}{m + m_1}, \quad (25)$$

где  $i(x)$  – погонный импульс взрывной нагрузки.

Начально-краевая задача (22)-(25) решена в работе [5] и в размерных переменных  $x, y$  может быть записана в виде

$$y(x, t) = \frac{2l}{\pi^2 \beta \mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sin j \frac{\pi x}{l} \sin \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \beta t \int_0^l i(x) \sin \frac{j \pi x}{l} dx. \quad (26)$$

Обозначим

$$S_j = \int_0^l i(x) \sin \frac{j \pi x}{l} dx. \quad (27)$$

В момент времени  $t$  для которого  $\sin \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \beta t = 1$ , то есть для

$$t = \frac{l^2}{2j^2 \pi \beta}, \quad (28)$$

смещения  $y(x, t)$  будут максимальны

$$y(x, t) = \frac{2l}{\pi^2 \mu \beta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sin j \frac{\pi x}{l} S_j. \quad (29)$$

Из формулы (29), определяющей распределение по пролёту балки максимальных смещений в момент времени  $t = t$  следует, что максимальное из этих смещений будет в середине пролёта балки – при  $x = \frac{l}{2}$ . Покажем, что в этом сечении будет наблюдаться максимальный изгибающий момент.

Как известно [6], изгибающий момент в любом сечении балки определяется соотношением

$$M = \frac{EJ \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (30)$$

Следовательно, для  $M_{\max}$  в критической точке (при  $x = \frac{l}{2}$ ) должно выполняться условие

$$\left. \frac{\partial M}{\partial x} \right|_{x=\frac{l}{2}} = 0. \quad (31)$$

Для функции  $y(x, t)$ , определенной формулой (29), при подстановке ее в соотношение (31), после преобразований получим

$$\frac{\partial M}{\partial x} = EJ \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}} \left\{ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] - 3 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\}. \quad (32)$$

Из (32) с учётом формулы для  $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) = \frac{2\pi}{l^2 \beta \mu} \sum_{j=1}^7 j S_j \cos \frac{j\pi x}{l}, \quad (33)$$

следует, что в точке  $x = \frac{l}{2}$  (там, где смещения максимальные)  $\left. \frac{\partial M}{\partial x} \right|_{x=\frac{l}{2}} = 0$ , поскольку в этой точке  $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=\frac{l}{2}} = \left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x=\frac{l}{2}} = 0$ .

Итак, получено, что в точке максимального прогиба балки имеет место максимальный изгибающий момент.

Используя один из известных критериев разрушения (по достижению в критическом сечении максимальных нормальных напряжений, из которого следует достижение в этом сечении максимального изгибающего момента [6]), запишем условие гарантированного разрушения в виде

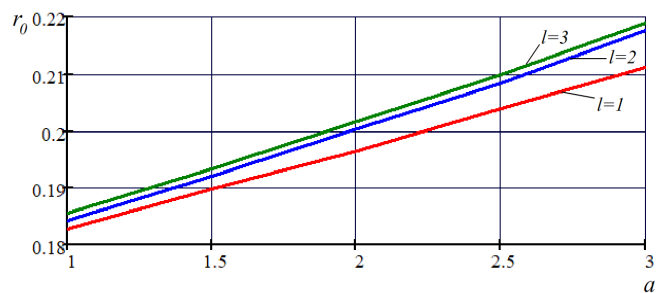
$$\frac{M_{\max}}{W} \delta_n \leq K_0 \mu_3 \leq 0, \quad (34)$$

где  $W$  – осевой момент инерции сечения балки,  $\delta_n$  – нормированный браковочный минимум материала балки,  $K_0$  – коэффициент однородности на гарантированное разрушение,  $\mu_3$  – коэффициент динамичности [2], [4].

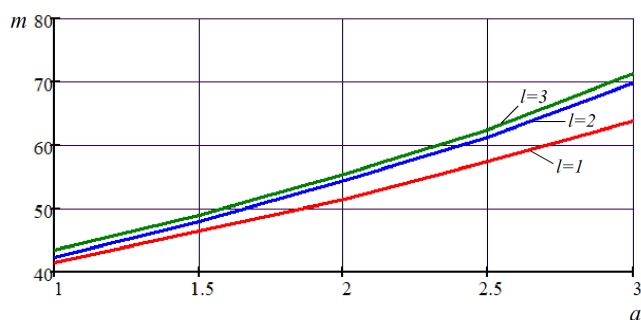
Неравенство (34) является трансцендентным относительно радиуса  $r_0$  заряда ВВ при фиксированном значении его расстояния до оси балки и фиксированных геометрических и физических характеристиках заряда и балки. Решение неравенства (34) определяет минимальное значение радиуса заряда  $r_0$ , взрыв которого на фиксированном расстоянии от балки и фиксированном его расположении по пролёту, приводит к гарантированному разрушению балки.

#### Примеры численных расчётов.

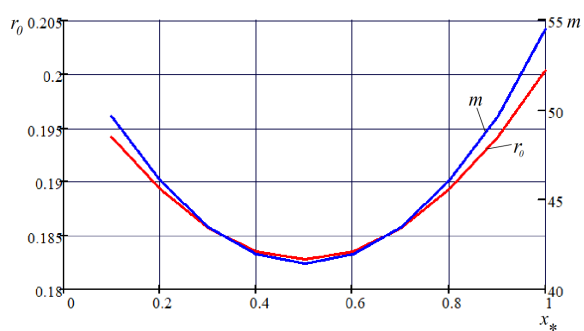
В расчетах по нахождению радиуса  $r_0$  и массы заряда тротила приняты следующие входные данные: длина балки может быть равной  $l=1$ [м];  $l=2$ [м];  $l=3$ [м], параметры поперечного сечения для всех длин одинаковы:  $b=0.15$  [м];  $h=0.20$  [м], расстояние заряда от оси балки [м] варьируется; глубина погружения  $H = 100$ [м], модуль упругости материала балки  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ [Па], коэффициент динамичности  $\mu_3 = 1.8$ , коэффициент однородности на гарантированное разрушение  $K_0 = 1.644$ , плотность материала балки (Ст.3)  $\rho_0 = 7800$ [кг/м<sup>3</sup>], нормированный браковочный минимум  $\delta_n = 2.4 \cdot 10^8$ [Па], плотность воды  $\rho_1 = 1000$ [кг/м<sup>3</sup>], скорость звука в воде  $a_{01} = 1460$ [м/с], давление на поверхности  $P_{01} = 101325$ [Па].



3.  
1, 2, 3 [ ],  $x = \frac{l}{2}$  [ ]

 $r_0$  $a$  $l =$ 

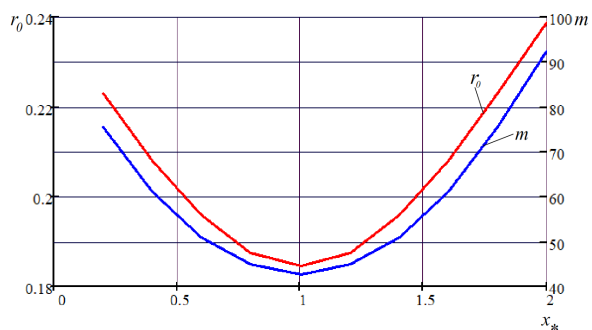
4.  
1, 2, 3 [ ],  $x = \frac{l}{2}$  [ ]

 $m$  $a$  $l =$ 

5.

 $m$  $r_0$  $x$  $l = 1$  [ ],  $a = 1$  [ ]

На рисунках 3-6 представлены графики соответствующих зависимостей, полученные по данным расчётов. Из графиков видно существенное влияние на величину радиуса и массы заряда ВВ (тротил) длины балки, расположения заряда по отношению к ней. Следует заметить, что аналогичные графики можно построить по результатам



6.  $m$   $r_0$   $x$   $l = 2$  [ ],  $a = 1$  [ ]

проведенных расчётов для выявления влияния других характеристик (физических и геометрических) заряда и рассматриваемой балочной конструкции на величину заряда, взрыв которого приводит к гарантированному разрушению балки в воде.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] . : , 1974. 255 .
- [2] . : , 2005. 160 .
- [3] . : , 1950. 495 .
- [4] . : , 1961. 275 .
- [5] . : . 1(51), 2022. 28-35 .
- [6] . : , 1976. 607 .

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

GENERALIZED ANALYSIS OF GUARANTEED EXPLOSION DESTRUCTION  
OF BEAM STRUCTURAL ELEMENTS IN WATER

*Tula State University, Tula, Russia.*

*Abstract.* The solution of the problems determining the process of the impact of an explosion of a charge of a condensed explosive substance (BB) on a beam in water is presented. It is noted that this process can be divided into two stages. At the first stage, a pulse load is formed an explosion in water; at the second stage, the impact of this load on the structural element (or the structure as a whole for the corresponding task). For the first stage, for the first time using experimental data, an analytical dependence for the specific impulse from an explosion in water of a spherical charge with specified physical and geometric characteristics was obtained. At the second stage, as a result of solving the corresponding initial boundary value problem, the dependence of the displacement of the beam sections for any moment of time is obtained, which allows us to find the conditions for guaranteed destruction of the beam in accordance with the selected destruction criterion. The statements and solutions of the corresponding tasks take into account: the effects of reflection of the disturbed incident water flow from the barrier (beam), the depth of immersion of the structure and the charge into the water, the physical and geometric characteristics of the charge and the beam, as well as their mutual location in the water, the type of fastening of the beam on supports. A significant influence of these factors on the magnitude of the charge, the explosion of which leads the beam in question to its guaranteed destruction, is noted.

*Keywords:* explosion in water, guaranteed destruction, pulse load, destruction criterion.

## REFERENCES

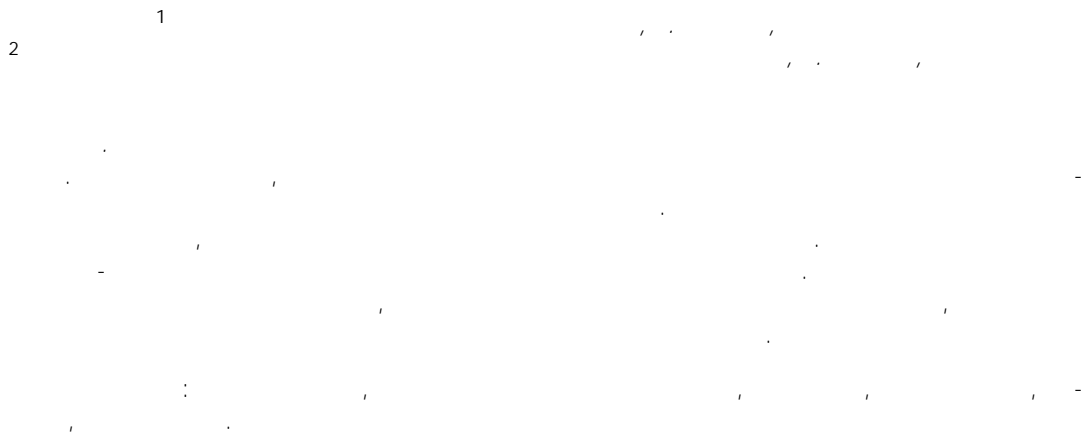
- [1] Salamakhin T. M. Physical foundations of the mechanical action of an explosion and methods for determining explosive loads. Moscow: VIA, 1974. 255 p. (in Russian).
- [2] Volodin G. T. The effect of the explosive charges in gas and liquid media. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).
- [3] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [4] Cole R. G. Underwater explosions. Moscow: IL, 1950. 495 p. (in Russian).
- [5] Volodin G. T., Kochergin D. S. Vibrations of elements of beam structures under the action of an explosion in water. Cheboksary: Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. No. 1(51), 2022. 28-35 p. (in Russian).
- [6] Belyaev N. M. Resistance of materials. Moscow: Science, 1976. 607 p. (in Russian).

---

*Volodin Gennady Timofeevich*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia.

*Kochergin Denis Sergeevich*, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

## О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ С ТРАНСЛЯЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ



DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.008

: 539.374

Кручение – это вид деформации стержней, в ходе которой под влиянием моментов, действующих в поперечных сечениях, происходит их взаимный поворот. При кручении поперечные сечения стержней подвержены деформации. Исследования по теории предельного состояния стержней, подвергающихся кручению, содержатся во многих работах. В работах [1] и [2] рассмотрено кручение стержней из идеально пластического материала. Математические основы теории предельного состояния стержней при кручении изложены в работе [3]. Исследованию кручения анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала посвящены работы [4, 5]. В [6] рассмотрено кручение стержней из идеального жесткопластического материала при условии, что они находятся под действием меняющегося внешнего давления. Вопросы кручения стержней из при условии трансляционной анизотропии рассмотрены в работах [7] и [8].

© , 2022

e-mail: mbg.chspu@yandex.ru,

e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru,

14.08.2022

Рассмотрим стержень из идеального жесткопластического материала, удовлетворяющей условию трансляционной анизотропии. Стержень ориентирован в пространстве  $x, y, z$  так, что его образующие параллельны оси  $z$ . Предполагается, что стержень находится под внешнего давления, которое меняется вдоль образующей стержня линейно. Пусть боковая поверхность стержня свободна от нагрузок и он закручивается вокруг своей оси.

Напряженное состояние в стержне определяется из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z &= \lambda z + \mu \quad (\lambda, \mu \text{ const}) \\ \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} &= \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda, \quad (2)$$

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k^2 \quad (k_1, k_2, k \text{ const}) \quad (3)$$

Компоненты скоростей деформаций  $\varepsilon_{ij}$  определяются из соотношений

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad (4)$$

и

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial xz}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial yz}} \quad (5)$$

На контуре поперечного сечения закручиваемого стержня вектор  $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$  на направлен по касательной к ней и имеет место равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad (6)$$

Дифференцируя уравнение (3) по переменной  $x$  имеем

$$(\tau_{xz} - k_1) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + (\tau_{yz} - k_2) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Согласно (7) из (2) получим

$$(\tau_{yz} - k_2) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + (\tau_{xz} - k_1) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda(\tau_{xz} - k_1). \quad (8)$$

Следовательно, характеристики уравнения (8) определяются из системы

$$\frac{dx}{(\tau_{yz} - k_2)} = \frac{dy}{\tau_{xz} - k_1} = \frac{d\tau_{yz}}{\lambda(\tau_{xz} - k_1)} \quad (9)$$

Из системы (9) имеем, что характеристики уравнения (2) задаются уравнением

$$(\tau_{xz} - k_1)dx + (\tau_{yz} - k_2)dy = 0, \quad (10)$$

а вдоль характеристик справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = k_1 + \sqrt{k^2 - (\lambda(y + c_1) - k_2)^2}, \quad \tau_{yz} = \lambda(y + c_1), \quad (11)$$

где  $c_1 = \text{const}$

Согласно (10) характеристики уравнения (2) направлены по касательной к кривой течучести (3).

Аналогично, дифференцируя (3) по  $y$  и поставляя полученное соотношение в (2), получим

$$(\tau_{yz} - k_2) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - (\tau_{xz} - k_1) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \lambda(\tau_{yz} - k_2). \quad (12)$$

$$\frac{dx}{\tau_{yz} k_2} = \frac{dy}{(\tau_{xz} k_1)} = \frac{d\tau_{xz}}{\lambda(\tau_{yz} k_2)} \quad (13)$$

Из (13) вытекает справедливость соотношений

$$\tau_{xz} = \lambda(x + c_2), \quad \tau_{yz} = k_2 \sqrt{k^2 (\lambda(x + c_2) k_1)^2} \quad (14)$$

где  $c_2 = const$

В ходе кручения стержня компоненты напряжения остаются постоянными, в силу чего соотношения (4) и (5) интегрируются. В начальный момент компоненты деформации можно принять равными нулю. Тогда в соответствии (3) имеем

$$e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad \frac{e_{xz}}{\tau_{xz} k_1} = \frac{e_{yz}}{\tau_{yz} k_2} \quad (15)$$

где  $e_{ij}$  – компоненты деформаций.

Запишем соотношения для перемещений  $u, v, w$  в виде

$$u = \theta yz, \quad v = \theta xz, \quad w = w(x, y) \quad (16)$$

где  $w$  – депланация  $\theta$  – крутка. Тогда компоненты деформации выражаются через компоненты перемещения в следующем виде

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta y \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta x \right) \quad (17)$$

Из (17) следует справедливость соотношения

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta. \quad (18)$$

Последнее уравнение из системы (15) представим в виде

$$(\tau_{yz} k_2) e_{xz} - (\tau_{xz} k_1) e_{yz} = 0. \quad (19)$$

Продифференцируем уравнение (19) по переменной  $x$

$$(\tau_{yz} k_2) \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} - (\tau_{xz} k_1) \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = e_{yz} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - e_{xz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}. \quad (20)$$

Тогда из (18) получим

$$(\tau_{yz} k_2) \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + (\tau_{xz} k_1) \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} = \theta (\tau_{xz} k_1) e_{yz} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + e_{xz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \quad (21)$$

Характеристики уравнения (19) согласно (21) определяются из системы

$$\frac{dx}{(\tau_{yz} k_2)} = \frac{dy}{(\tau_{xz} k_1)} = \frac{de_{xz}}{\theta (\tau_{xz} k_1) e_{yz} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + e_{xz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}} \quad (22)$$

Следовательно, характеристики соотношения (19) также имеют вид (10), а соотношения вдоль характеристик (10) примут вид

$$\begin{aligned} (\tau_{yz} k_2) de_{xz} + \left( \theta (\tau_{xz} k_1) e_{yz} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + e_{xz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dx &= 0, \\ (\tau_{xz} k_1) de_{xz} - \left( \theta (\tau_{xz} k_1) e_{yz} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + e_{xz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dy &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом (11) из второго уравнения (23) имеем

$$e_{xz} = \theta (y + c_3) \quad (24)$$

где  $c_3 = const$ . В соответствии (11) и (24) из (19) находим

$$e_{yz} = \frac{\theta(y + c_3)(\lambda(y + c_1) - k_2)}{\sqrt{k^2 - (\lambda(y + c_1) - k_2)^2}} \quad (25)$$

Дифференцируя соотношение (19) по  $y$ , получим, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (\tau_{yz} - k_2)de_{yz} + \left( \theta(\tau_{yz} - k_2) + e_{yz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - e_{xz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dx &= 0, \\ (\tau_{xz} - k_1)de_{yz} - \left( \theta(\tau_{yz} - k_2) + e_{yz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - e_{xz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dy &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно (14) из первого уравнения (26) получим

$$e_{yz} = \theta(x + c_4) \quad (27)$$

где  $c_4 = const$ .

Тогда из (19) согласно (14) и (27) имеем

$$e_{xz} = \frac{\theta(x + c_4)(\lambda(x + c_2) - k_1)}{\sqrt{k^2 - (\lambda(x + c_2) - k_1)^2}} \quad (28)$$

Положим, что точка  $(x_0, y_0)$  контура сечения стержня принадлежит характеристике и  $\tau_{xz}(x_0, y_0) = \tau_x^0$ ,  $\tau_{yz}(x_0, y_0) = \tau_y^0$ . Тогда вдоль этой характеристики согласно (11) справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = k_1 \sqrt{k^2 - \left( \lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda}) - k_2 \right)^2}, \quad \tau_{yz} = \lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda}). \quad (29)$$

При этом уравнение характеристики, содержащей точку  $(x_0, y_0)$  контура поперечного сечения стержня, запишется в виде

$$\left( \lambda(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}) - k_1 \right)^2 + \left( \lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda}) - k_2 \right)^2 = k^2 \quad (30)$$

Аналогично, согласно (14) вдоль характеристики (11) имеем

$$\tau_{xz} = \lambda(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}), \quad \tau_{yz} = k_2 \sqrt{k^2 - \left( \lambda(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}) - k_1 \right)^2} \quad (31)$$

При этом уравнение характеристики, содержащей точку  $(x_0, y_0)$ , также имеет вид (30)

С учетом (29), из (24) и (25) получим

$$e_{xz} = \theta(y + c_3), \quad e_{yz} = \frac{\theta \lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda})(y + c_3)}{k_1 \sqrt{k^2 - \left( \lambda(y - y_0 + \frac{\tau_y^0}{\lambda}) - k_2 \right)^2}} \quad (32)$$

Аналогично, согласно (31) из (27) и (28) имеем

$$e_{yz} = \theta(x + c_4), \quad e_{xz} = \frac{\theta \lambda(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda})(x + c_4)}{k_2 \sqrt{k^2 - \left( \lambda(x - x_0 + \frac{\tau_x^0}{\lambda}) - k_1 \right)^2}} \quad (33)$$

Так как на линиях разрыва напряжений справедливы соотношения

$$e_{xz} = e_{yz} = 0, \quad (34)$$

то константы  $c_3$  и  $c_4$  определяются из соотношений (34).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] . . . . . , 1969. 608 .
- [2] . . . . . , 1956. 398 .
- [3] . . . . . , 1966. 232 .
- [4] . . . . . , 2002. 566 .
- [5] . . . . . // . . . . .
- [6] . . . . . 2015. . 1, . 23. . 196–199. // // . . . . .
- [7] . . . . . 2014. . 3. . 107–113. // . . . . .
- [8] . . . . . 2014. . 4(72). . 57–60. // . . . . .
- [8] . . . . . 2012. . 1. . 36–38. . . . .

B. G. Mironov<sup>1</sup>, Yu. B. Mironov<sup>2</sup>

ON TORSION OF RODS WITH TRANSLATIONAL ANISOTROPY UNDER  
EXTERNAL PRESSURE

<sup>1</sup>*Russian University of transport, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

*Abstract.* This work is devoted to the study of relations in the theory of torsion of rods. It is assumed that the rod consists of an ideal rigid-plastic material with the property of translational anisotropy. In this case, the rod is under the action of pressure, which varies linearly along its generatrix. The stress-strain state of the considered rod is determined in the work. Equations for the characteristics of general relations describing the limit state of the rod are obtained, and the components of stresses and strains along these characteristics are found.

*Keywords:* plasticity, translational anisotropy, torsion, deformation, stress, warping.

### REFERENCES

- [1] Sokolovsky V. V. Theory of plasticity. M: high school, 1969. 608 p.
- [2] Prager V., Hodge F. G. Theory of Ideally Plastic Solids. M.: IL, 1956. 398 p.
- [3] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. M.: Science, 1966. 232 p.
- [4] Bykovtsev G. Selected problematic issues of the mechanics of deformable media. Digest of articles. Vladivostok: Far Science, 2002. 566 p.
- [5] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. To the question of torsion of anisotropic rods // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2015. Vol. 1, no. 23. p. 196–199.
- [6] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. Deformed state of translationally anisotropic bodies under torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. 2014. no. 4(72). p. 57–60.
- [7] Kozlova L. S., Mironov B. G. Torsion of prismatic rods under the action of pressure changing linearly along the generatrix// // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2014. no. 3. p. 107–113.
- [8] Mironov B. G., Tikhonov S. V. About one kind of anisotropy in torsion // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2012. no. 1. p. 36–38.

---

*Mironov Boris Gurjevich* , Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of department, Russian University of transport, Moscow, Russia.

*Mironov Yuri Borisovich* , Candidate of technical Sciences, Dean, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.

## О ВЛИЯНИИ АССОЦИИРОВАННОЙ СЖИМАЕМОСТИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ МАТЕРИАЛА

1  
2

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.009

: 539.374

### Введение

Вопросу влияния сжимаемости и температурных эффектов на поведение упругопластических тел посвящены ряд статей, среди которых можно выделить работы [1–10]. Статья [1] посвящена определению напряженно-деформированного состояния упругопластических тел при учете ассоциированной сжимаемости. Исследование влияния сжимаемости по упругим деформациям подробно представлено в работах [2, 3]. В работах [4,5] рассмотрены задачи об определении напряженно-деформированного состояния упрочняющейся упруговязкопластической трубы и упругого пространства,

© , 2022

e-mail: kovalev@amm.vsu.ru,

e-mail: ymkahavren@gmail.com,

15.09.2022

ослабленного цилиндрической полостью, с учетом температуры. В работах [6–10] исследовано влияние температуры и сжимаемости по упругим деформациям на определение напряженно-деформированного состояния упругопластических тел. В данной работе рассмотрена задача определения напряженного состояния упругопластической трубы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления, при учете температуры, сжимаемости по упругим деформациям и ассоциированной сжимаемости. Условие пластичности для задачи определено в виде [11]

$$\alpha_c \sigma_1 + \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \frac{P_-}{2k} = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_1$  – первый инвариант тензора напряжений,  $\alpha_c$  – скорость дилатансии,  $S_{ij}$  – девиатор тензора напряжений,  $k$  – предел текучести.

### Постановка задачи

Рассмотрим упругопластическую толстостенную трубу, поперечное сечение которой ограничено окружностями радиусов  $a$  и  $b$ , ( $a < b$ ). При этом данная труба находится под действием равномерного внутреннего давления  $p$ . Материал трубы предполагается сжимаемым и учитывается влияние температурных эффектов. При этом рассматривается случай ассоциированной сжимаемости. Выражение для температуры задается по логарифмическому закону [12, 13] и является известным решением уравнения теплопроводности. Решение данной задачи будем проводить в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ .

Запишем систему уравнений для решения задачи:

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_r}{r}, \quad (2)$$

где  $\sigma_r, \sigma$  – компоненты тензора напряжений;

– соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e = \frac{u}{r}, \quad (3)$$

где  $e_r, e$  – компоненты тензора полных деформаций,  $u$  – компонента радиального перемещения;

– выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{aligned} e_r^e &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu (\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T, \\ e^e &= \frac{1}{E} [\sigma - \mu (\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T, \\ e_z^e &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_r + \sigma)] + \alpha T, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $e_r^e, e^e, e_z^e$  – компоненты тензора деформаций в упругой области;  $E$  – модуль упругости,  $\sigma_z$  – компонента тензора напряжений,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $T$  – температура, которая задается выражением  $T = P - Q \ln r$ ,  $P, Q$  – известные постоянные [12],  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения [14, 15];

– условие пластичности (1) в цилиндрической системе координат

$$(\sigma - \sigma_r)^2 + (\sigma - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 = 3 \left( \frac{P_-}{2k} - \alpha_c \sigma_1 \right)^2, \quad (5)$$

где  $\sigma_1 = \sigma_r + \sigma + \sigma_z$ ;

– ассоциированный закон пластического течения

$$\begin{aligned} de_r^p &= 2d\lambda \left[ 3\sigma_r \quad (1 + 3\alpha_c^2) (\sigma_r + \sigma + \sigma_z) + 3 \frac{\rho_-}{2} k \alpha_c \right], \\ de^p &= 2d\lambda \left[ 3\sigma \quad (1 + 3\alpha_c^2) (\sigma_r + \sigma + \sigma_z) + 3 \frac{\rho_-}{2} k \alpha_c \right], \\ de_z^p &= 2d\lambda \left[ 3\sigma_z \quad (1 + 3\alpha_c^2) (\sigma_r + \sigma + \sigma_z) + 3 \frac{\rho_-}{2} k \alpha_c \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $e_r^p, e^p, e_z^p$  – компоненты тензора пластических деформаций,  $d\lambda$  – скалярный положительный множитель;

– граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=a} &= p, \\ \sigma_r \Big|_{r=b} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

– условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$[\sigma_r] = [\sigma] = [u] = 0, \quad (8)$$

– выражение полных деформаций тела в пластической области

$$e_r = e_r^e + e_r^p, e = e^e + e^p, e_z = e_z^e + e_z^p. \quad (9)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука с учетом температуры (4), а приращения пластических деформаций – ассоциированным законом пластического течения (6). Поскольку в задаче мы будем рассматривать случай плоской деформации, то  $e_z = 0$ . Принимая во внимание соотношения (4), (6) и (9), запишем соотношения для определения полных деформаций тела в пластической области

$$\begin{aligned} de_r &= \frac{1}{E} [d\sigma_r \quad \mu (d\sigma + d\sigma_z)] + \alpha dT + \\ &+ 2d\lambda \left[ 3\sigma_r \quad (1 + 3\alpha_c^2) (\sigma_r + \sigma + \sigma_z) + 3 \frac{\rho_-}{2} k \alpha_c \right], \\ de &= \frac{1}{E} [d\sigma \quad \mu (d\sigma_r + d\sigma_z)] + \alpha dT + \\ &+ 2d\lambda \left[ 3\sigma \quad (1 + 3\alpha_c^2) (\sigma_r + \sigma + \sigma_z) + 3 \frac{\rho_-}{2} k \alpha_c \right], \\ 0 &= \frac{1}{E} [d\sigma_z \quad \mu (d\sigma_r + d\sigma)] + \alpha dT + \\ &+ 2d\lambda \left[ 3\sigma_z \quad (1 + 3\alpha_c^2) (\sigma_r + \sigma + \sigma_z) + 3 \frac{\rho_-}{2} k \alpha_c \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

### Метод решения

В данной работе решение задачи будем проводить с помощью метода возмущений. Искомые соотношения представим в виде рядов по малому параметру  $\delta$ . При этом мы ограничимся первыми двумя членами ряда. Таким образом, решение задачи будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)}, u = u^{(0)} + \delta u^{(1)}, \\ T &= T^{(0)} + \delta T^{(1)}, \alpha = \alpha^{(0)} + \delta \alpha^{(1)}, \alpha_c = \alpha_c^{(0)} + \delta \alpha_c^{(1)}, \\ \mu &= \mu^{(0)} + \delta \mu^{(1)}, \lambda = \lambda^{(0)} + \delta \lambda^{(1)}, k = k^{(0)} + \delta k^{(1)}, r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^{(1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mu^{(0)} = \frac{1}{2}$ ,  $\mu^{(1)}$  – известная постоянная, верхние индексы (0), (1) определяют нулевое и первое приближения соответственно.

### Решение и результаты

Данные разложения подставим в уравнения (2)–(5), (7), (8), (10) и, приравняв выражения при одинаковых степенях малого параметра, получим в каждом приближении систему дифференциальных уравнений для определения искомых соотношений.

В нулевом приближении, положив  $\alpha^{(0)} = 0$ ,  $\alpha_c^{(0)} = 0$ , получим следующую систему уравнений:

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} = \frac{\sigma^{(0)}}{r} \frac{\sigma_r^{(0)}}{\sigma_r^{(0)}}, \quad (12)$$

– соотношения Коши

$$e_r^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r}, e^{(0)} = \frac{u^{(0)}}{r}, \quad (13)$$

– выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{aligned} e_r^{e(0)} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r^{(0)} \quad \frac{1}{2} (\sigma^{(0)} + \sigma_z^{(0)}) \right], \\ e^{e(0)} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma^{(0)} \quad \frac{1}{2} (\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}) \right], \\ e_z^{e(0)} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z^{(0)} \quad \frac{1}{2} (\sigma_r^{(0)} + \sigma^{(0)}) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

– условие пластичности

$$\left( \sigma^{(0)} \quad \sigma_r^{(0)} \right)^2 + \left( \sigma^{(0)} \quad \sigma_z^{(0)} \right)^2 + \left( \sigma_r^{(0)} \quad \sigma_z^{(0)} \right)^2 = 6k^{(0)2}, \quad (15)$$

– выражение полных деформаций в пластической области

$$\begin{aligned} de_r^{(0)} &= \frac{1}{E} \left[ d\sigma_r^{(0)} \quad \frac{1}{2} (d\sigma^{(0)} + d\sigma_z^{(0)}) \right] + 2d\lambda^{(0)} \left[ 2\sigma_r^{(0)} \quad \sigma^{(0)} \quad \sigma_z^{(0)} \right], \\ de^{(0)} &= \frac{1}{E} \left[ d\sigma^{(0)} \quad \frac{1}{2} (d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_z^{(0)}) \right] + 2d\lambda^{(0)} \left[ 2\sigma^{(0)} \quad \sigma_r^{(0)} \quad \sigma_z^{(0)} \right], \\ 0 &= \frac{1}{E} \left[ d\sigma_z^{(0)} \quad \frac{1}{2} (d\sigma_r^{(0)} + d\sigma^{(0)}) \right] + 2d\lambda^{(0)} \left[ 2\sigma_z^{(0)} \quad \sigma_r^{(0)} \quad \sigma^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

– граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} \Big|_{r=a} &= p, \\ \sigma_r^{(0)} \Big|_{r=b} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

– условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$\left[ \sigma_r^{(0)} \right] = \left[ \sigma^{(0)} \right] = \left[ u^{(0)} \right] = 0. \quad (18)$$

Исходя их соотношений (12) – (18), в нулевом приближении имеем задачу о плоской деформации упругопластического несжимаемого материала. Тогда решение этой задачи представимо в виде [3]:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{p(0)} &= p + 2k^{(0)} \ln\left(\frac{r}{a}\right), \sigma^{p(0)} = p + 2k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right), \\
\sigma_z^{p(0)} &= p + k^{(0)} \left(1 + 2\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right), \\
u^{p(0)} &= u^{e(0)} = \frac{3k^{(0)}r_s^{(0)2}}{2Er}, \\
\sigma_r^{e(0)} &= k^{(0)}r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right], \sigma^{e(0)} = k^{(0)}r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right], \\
\sigma_z^{e(0)} &= \frac{k^{(0)}r_s^{(0)2}}{b^2}, \\
r_s^{(0)2} &= \frac{b^2}{k^{(0)}} \left[ p + k^{(0)} \left(1 + 2\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right) \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

В первом приближении, согласно принятому методу решения, предполагая, что  $T^{(1)} = 0$  получим следующую систему уравнений:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} = \frac{\sigma^{(1)}}{r} - \frac{\sigma_r^{(1)}}{r}, \tag{20}$$

— соотношения Коши

$$e_r^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}, e_z^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{r}, \tag{21}$$

— выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{aligned}
e_r^{e(1)} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma^{(0)} + \sigma_z^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T^{(0)}, \\
e^{e(1)} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T^{(0)}, \\
e_z^{e(1)} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma_r^{(1)} + \sigma^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma_r^{(0)} + \sigma^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T^{(0)},
\end{aligned} \tag{22}$$

— условие пластичности

$$\begin{aligned}
2 \begin{pmatrix} \sigma^{(0)} & \sigma_r^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & \sigma_r^{(1)} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \sigma^{(0)} & \sigma_z^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & \sigma_z^{(1)} \end{pmatrix} + \\
+ 2 \begin{pmatrix} \sigma_r^{(0)} & \sigma_z^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r^{(1)} & \sigma_z^{(1)} \end{pmatrix} &= 6 \sqrt{2} k^{(0)} \alpha_c^{(1)} \sigma_1^{(0)},
\end{aligned} \tag{23}$$

— выражение полных деформаций в пластической области

$$\begin{aligned}
de_r^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[ d\sigma_r^{(1)} \quad \frac{1}{2} \left( d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)} \right) \quad \mu^{(1)} \left( d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_z^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT^{(0)} + \\
&+ 2d\lambda^{(0)} \left[ 2\sigma_r^{(1)} \quad \sigma_r^{(1)} \quad \sigma_z^{(1)} + 3^{\rho} \bar{2}k^{(0)} \alpha_c^{(1)} \right] + 2d\lambda^{(1)} \left[ 2\sigma_r^{(0)} \quad \sigma_r^{(0)} \quad \sigma_z^{(0)} \right], \\
de_z^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[ d\sigma_z^{(1)} \quad \frac{1}{2} \left( d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)} \right) \quad \mu^{(1)} \left( d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_z^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT^{(0)} + \\
&+ 2d\lambda^{(0)} \left[ 2\sigma_z^{(1)} \quad \sigma_r^{(1)} \quad \sigma_z^{(1)} + 3^{\rho} \bar{2}k^{(0)} \alpha_c^{(1)} \right] + 2d\lambda^{(1)} \left[ 2\sigma_z^{(0)} \quad \sigma_r^{(0)} \quad \sigma_z^{(0)} \right], \\
0 &= \frac{1}{E} \left[ d\sigma_z^{(1)} \quad \frac{1}{2} \left( d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)} \right) \quad \mu^{(1)} \left( d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_z^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT^{(0)} + \\
&+ 2d\lambda^{(0)} \left[ 2\sigma_z^{(1)} \quad \sigma_r^{(1)} \quad \sigma_z^{(1)} + 3^{\rho} \bar{2}k^{(0)} \alpha_c^{(1)} \right] + 2d\lambda^{(1)} \left[ 2\sigma_z^{(0)} \quad \sigma_r^{(0)} \quad \sigma_z^{(0)} \right],
\end{aligned} \tag{24}$$

— граничные условия

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=a} = \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = 0, \tag{25}$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$\left[ \sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = \left[ \sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = \left[ u^{(1)} + \frac{u^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = 0. \tag{26}$$

Определим соотношение для определения компоненты напряжений  $\sigma_z^{(1)}$ . Для этого преобразуем третье выражение уравнения (24).

$$\begin{aligned}
d\sigma_z^{(1)} \quad \frac{1}{2} \left( d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)} \right) \quad \mu^{(1)} \left( d\sigma_r^{(0)} + d\sigma_z^{(0)} \right) + E\alpha^{(1)} dT^{(0)} + \\
+ 2Ed\lambda^{(0)} \left[ 2\sigma_z^{(1)} \quad \sigma_r^{(1)} \quad \sigma_z^{(1)} + 3^{\rho} \bar{2}k^{(0)} \alpha_c^{(1)} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Введем обозначение  $\chi^{(1)} = 2\sigma_z^{(1)} \quad \sigma_r^{(1)} \quad \sigma_z^{(1)}$ . С учетом введенного обозначения, предыдущее выражение примет вид

$$\frac{d\chi^{(1)}}{d\lambda^{(0)}} + 4E\chi^{(1)} = 4\mu^{(1)} \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \quad 2E\alpha^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \quad 12^{\rho} \bar{2}Ek^{(0)} \alpha_c^{(1)}. \tag{28}$$

Решение дифференциального уравнения (28) можно представить в виде:

$$\chi^{(1)} = e^{-4E \lambda^{(0)}} \int_0^{\lambda^{(0)}} \left[ 4\mu^{(1)} \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \quad 2E\alpha^{(1)} \frac{dT^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \quad 12^{\rho} \bar{2}Ek^{(0)} \alpha_c^{(1)} \right] e^{4E \lambda^{(0)}} d\lambda^{(0)} + \chi_e^{(1)}, \tag{29}$$

где  $\chi_e^{(1)} = 4\mu^{(1)} \sigma_z^{(0)} \quad 2E\alpha^{(1)} T^{(0)}$ .

Таким образом, компоненту напряжений  $\sigma_z^{(1)}$  можно определить согласно введенному обозначению и уравнению (29).

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)} + \chi^{(1)} \right). \tag{30}$$

Для определения компонент деформаций  $e_r^{(1)}, e_z^{(1)}$  в упругой области, просуммируем первые два уравнения соотношения (22), при учете уже полученного решения в

нулевом приближении.

$$\begin{aligned} e_r^{(1)} + e^{(1)} &= \frac{6\mu^{(1)}}{E}\sigma_z^{(0)} + 3\alpha^{(1)}T^{(0)}, \\ e_r^{(1)} - e^{(1)} &= \frac{1}{2E} \left[ 3 \left( \sigma_r^{(1)} - \sigma^{(1)} \right) + 2\mu^{(1)} \left( \sigma_r^{(0)} - \sigma^{(0)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Для определения компонент напряжений  $\sigma_r^{(1)}, \sigma^{(1)}$  преобразуем условие пластичности (23), с учетом введенного обозначения, а также полученного нулевого решения. Таким образом, получим следующее выражение:

$$\sigma^{(1)} - \sigma_r^{(1)} = \frac{2^{\rho} \bar{2} k^{(0)} \alpha_c^{(1)} \sigma_1^{(0)}}{\sigma^{(0)} \sigma_r^{(0)}}. \quad (32)$$

Разрешая уравнения (31), (32), учитывая соотношения (19), получим выражения, определяющие компоненты напряжений в первом приближении.

$$\begin{aligned} \sigma_r^{p(1)} &= 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left( 1 + \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) \right] \ln \left( \frac{r}{a} \right), \\ \sigma^{p(1)} &= 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) \right] \\ &\quad 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left( 1 + \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) \right] \ln \left( \frac{r}{a} \right), \\ \sigma_r^{e(1)} &= \alpha^{(1)} EQ \left[ \ln \left( \frac{r}{b} \right) - \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2}{r_s^{(0)2}} \frac{b^2}{b^2} \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{b} \right) \right] \\ &\quad 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left( 1 + \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{a} \right) \right) \right] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2}{r_s^{(0)2}} \frac{b^2}{b^2} \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{a} \right), \\ \sigma^{e(1)} &= \alpha^{(1)} EQ \left[ 1 + \ln \left( \frac{r}{b} \right) - \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 + b^2}{r_s^{(0)2}} \frac{b^2}{b^2} \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{b} \right) \right] \\ &\quad 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left( 1 + \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{a} \right) \right) \right] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 + b^2}{r_s^{(0)2}} \frac{b^2}{b^2} \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{a} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение радиуса упругопластической границы получим из условия сопряжения (26) компонент напряжений  $\sigma^{(1)}$  в упругой и пластической областях на упруго-пластической границе.

$$\begin{aligned} r_s^{(1)} &= \left\{ \alpha^{(1)} EQ \left[ 1 + \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{b} \right) - \frac{r_s^{(0)2} + b^2}{r_s^{(0)2}} \frac{b^2}{b^2} \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{b} \right) \right] \right. \\ &\quad 6^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left( 1 + \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{a} \right) \right) \right] \frac{b^2}{r_s^{(0)2}} \frac{b^2}{b^2} \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{a} \right) + \\ &\quad \left. + 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{r_s^{(0)}}{a} \right) \right) \right] \right\} \frac{r_s^{(0)}}{4k^{(0)}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Согласно принятому методу решения, можем представить выражения компонент напряжений и уравнение радиуса упругопластической границы для поставленной задачи. Тогда, используя (11), (19), (33), (34) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_r^p &= p + 2k^{(0)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - 3^{\rho} \bar{2} \delta \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \ln\left(\frac{r}{a}\right), \\
\sigma^p &= p + 2k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) \\
3^{\rho} \bar{2} \delta \alpha_c^{(1)} &\left( p + k^{(0)} \left(1 + 2\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \left[ p - k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right), \\
\sigma_r^e &= k^{(0)} r_s^{(0)2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \delta \left\{ \alpha^{(1)} EQ \left[ \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 - b^2}{r_s^{(0)2} b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right) \right] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 - b^2}{r_s^{(0)2} b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right) \right\}, \\
\sigma^e &= k^{(0)} r_s^{(0)2} \left[ \frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right] + \delta \left\{ \alpha^{(1)} EQ \left[ 1 + \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 + b^2}{r_s^{(0)2} b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right) \right] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 + b^2}{r_s^{(0)2} b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right) \right\}, \\
r_s &= r_s^{(0)} + \delta \left\{ \alpha^{(1)} EQ \left[ 1 + \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) - \frac{r_s^{(0)2} + b^2}{r_s^{(0)2} b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{b}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. 6^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right) \right] \frac{b^2}{r_s^{(0)2} b^2} \ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right) + \right. \\
&\quad \left. + 3^{\rho} \bar{2} \alpha_c^{(1)} \left[ p + k^{(0)} \left(1 + 2\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right) \right] \right\} \frac{r_s^{(0)}}{4k^{(0)}}.
\end{aligned} \tag{35}$$

где  $r_s^{(0)}$  определяется из уравнения

$$r_s^{(0)2} = \frac{b^2}{k^{(0)}} \left[ p + k^{(0)} \left(1 + 2\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right) \right]. \tag{36}$$

### Заключение

Таким образом, согласно принятому методу малого параметра, было получено напряженное состояние и радиус упругопластической границы для поставленной задачи. Кроме того, если положить в приведенных выше соотношениях коэффициент температурного расширения и скорость дилатансии равным нулю, то получим выражения, представленные в работе [2]. Приравняв нулю только скорость дилатансии, можно прийти к результатам, полученным в работах [6, 7, 9, 10].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] // . . . . . 2013. 1(15). . 65–69.
- [2] // . . . . . 1978. 4. . 80–87.
- [3] 1978. 208 . . . . .
- [4] // . . . . . 2015. 3(25). . 176–184.
- [5] // . . . . . 2014. 2(20). . 29–35.
- [6] // . . . . . 85- . . . . . 2015.
- [7] // . . . . . 9 . . . . . " . . . . . 2016. . 153–155.
- [8] // . . . . . 2021. . 1306–1311.
- [9] // . . . . . , 2017. . 1079–1082.
- [10] K.K. Gornostaev A.V. Kovalev Y.V. Malygina. Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressi-bility of the material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 973. . 012004.
- [11] // . . . . . : 2 . . 2 : . 1975. 6. . 166–177.
- [12] // . . . . . 1965. 6. . 8–13.
- [13] . . . . . , 1963. 253 . . . . .
- [14] . . . . . : . . . . . , 1977. 734 . . . . .
- [15] . . . . . , 1958. 167 . . . . .

A. V. Kovalev<sup>1,2</sup>, Y.V. Malygina<sup>1</sup>

ON THE EFFECT OF ASSOCIATED COMPRESSIBILITY ON THE DETERMINATION OF THE STRESS STATE OF AN ELASTIC-PLASTIC PIPE TAKING INTO ACCOUNT THE TEMPERATURE OF THE MATERIAL

<sup>1</sup> *Voronezh State University, Voronezh, Russia*

<sup>2</sup> *Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin, Voronezh, Russia*

*Abstract.* In the article the authors have considered the problem of determining the stress state of the elastoplastic pipe taking into account the temperature. The task was solved using the method of the small parameter. The case of associated and elastic compressibility is considered.

*Keywords:* stress, elasticity, plasticity, associated compressibility, temperature, plane strain.

## REFERENCES

- [1] Kovalev A.V. On the inclusion of the associated compression elastoplastic bodies in the case of plane strain // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2013. 1(15). 65–69.
- [2] D.D. Ivlev Ye.V. Makarov Yu.M. Marushkey. On the plasticity conditions of a compressible elastic-plastic material under flat deformation // A Journal of Russian Academy of Sciences: Mechanics of Solids. 1978. 4. 80–87.
- [3] Ivlev D.D. Yerшов L.V. Perturbing approximation in theory of elastoplastic body. Moscow: Science, 1978. 208.
- [4] Gornostaev A.V. Kovalev. About symmetric deformation hardening elastoviscoplastic pipe taking into account temperature // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. 3(25). 176–184.
- [5] A.V.Kovalev I.G.Khvostov. Stress and displacement analysis of an elastic space weakened by a spherical cavity in a thermal field // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. 2(20). 29–35.
- [6] Y. V. Andreeva A. N. Vnukov A. V. Kovalev. Determining the stress state of elastoplastic pipe considering temperature effects and compressibility // All-Russian Scientific School-Conference "Mechanics of Marginal State and Related Issues dedicated to the 85th anniversary of Professor D.D. Ivlev. I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2015.
- [7] Y. V. Andreeva A. N. Vnukov A. V. Kovalev. To the calculation of a compressible elastic-plastic pipe // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2016. 153–155.
- [8] A.V. Kovalev Y.V. Malygina. Determination of the stress-strain state in an elastoplastic strengthening pipe, taking into account the temperature and compressibility of the material // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2021. 1306–1311.
- [9] A.V. Kovalev Y.V. Malygina. On the determination of the stress-strain state in an elastic plastic pipe, taking into account the temperature and compressibility of the material // International Conference

---

*Kovalev Alexey Victorovich*, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia, Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Voronezh, Russia.

*Malygina Yuliya Vladimirovna*, Lecturer of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

- "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2017. . 1079–1082.
- [10] K.K. Gornostaev A.V. Kovalev Y.V. Malygina. Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressibility of the material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 973. . 1–10.
- [11] D.C.Drucker W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design // . . . . . 1952. no. V.10, No.2). P. 157–165.
- [12] Danilovskaya V. I. Elastoplastic symmetric deformation of a thick-walled tube with consideration of non-uniform temperature distribution along the radius // Applied Mechanics. 1965. 6. . 8–13.
- [13] Parkus G. Nonsteady Temperature Stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 253 .
- [14] . N. Tikhonov A. A. Samarsky. The equations of mathematical physics. Moscow: Science, 1977. 734 .
- [15] E. Melan G. Parkus. Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields. Moscow: Fizmatgiz, 1958. 167 .

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ НА ЛИТЕЙНО-КОВОЧНОМ МОДУЛЕ  
НОВОЙ МОДИФИКАЦИИ**

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.010

: 004.942

---

© 2022

e-mail: 79122718858@yandex.ru,

e-mail: rector@knastu.ru,

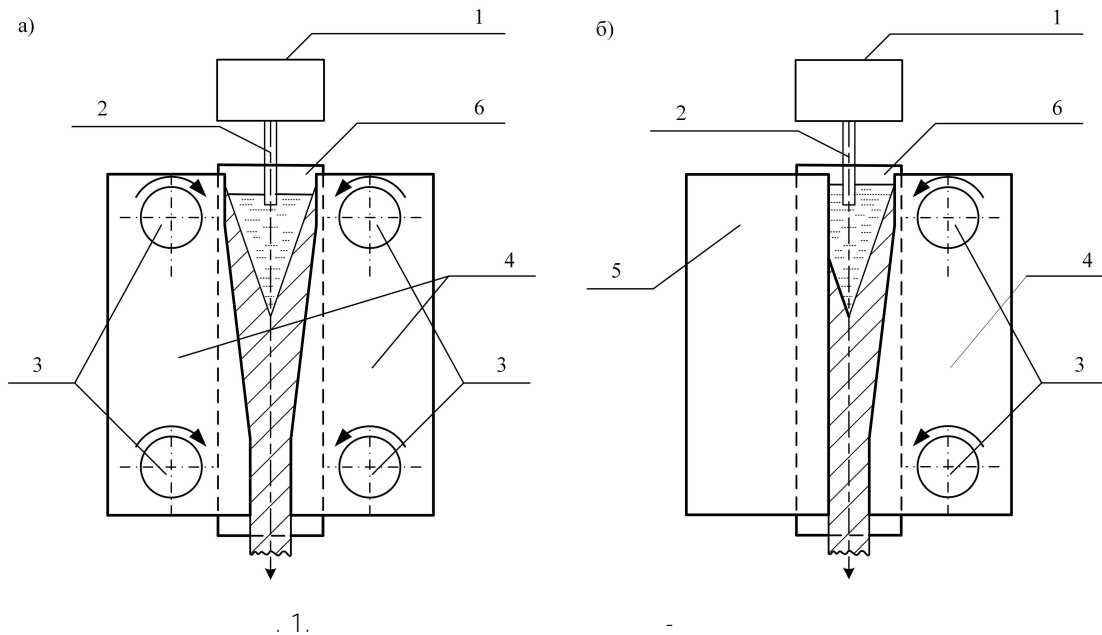
e-mail: potyanikhin@mail.ru,

e-mail: diss@knastu.ru,

e-mail: kvashnin\_ae@mail.ru,

20.08.2022

**Введение.** Идея получения непрерывно-деформируемого металлоизделия из разливаемого жидкого металла была запатентована в 1995 г. [1]. Опытная установка была построена в Институте машиноведения и металлургии ДВО РАН. Проведены многочисленные экспериментальные и теоретические исследования данного процесса, на основании которых осуществлялась модернизация построенного устройства. В данной работе дано теоретическое обоснование новой конструкции литейно-ковочного модуля (ЛКМ) [2]. В отличие от прежней конструкции [1], в новой [2] деформация металла осуществляется не двумя наклонными бойками (рис. 1, а), а одним (рис. 1, б). Работа устройства [2] (рис.1, б) происходит следующим образом. Из разливочного ковша 1 с погружным стаканом 2 жидкий металл поступает в вертикальный кристаллизатор, включающий боковой боек 4 с наклонным и вертикальным участками, вертикальную боковую плиту 5, и пару рабочих стенок 6. Боковой боек 4 и рабочие стенки 6 приводятся в движение от приводных валов 3 с соответствующими эксцентриками  $e_1$ ,  $e_2$ , при этом стенки 6 приводятся в движение только от нижнего вала 3 с эксцентриком  $e_2$ .



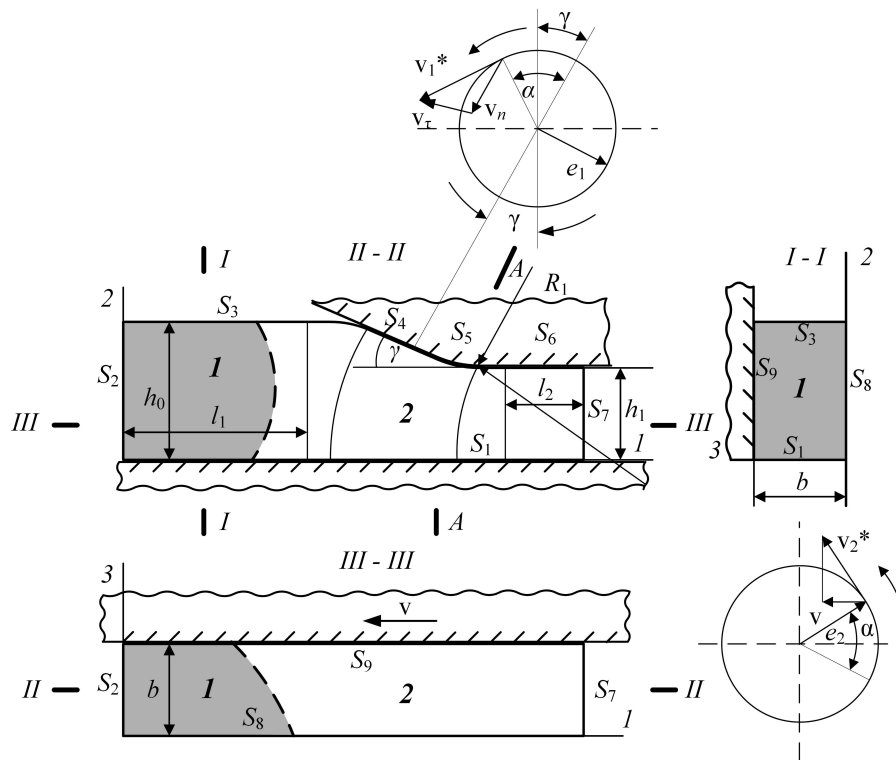
Эксцентрик привода боковых стенок 6 повернут относительно привода эксцентрика бойка 4 на  $90^\circ$ . Тогда при сближении бойка 4 с плитой 5 рабочие стенки 6 будут подниматься вверх, а при раздвижении бойка 4 с плитой 5 – опускаться вниз, осуществляя тем самым подачу затвердевшего металла к выходу из установки. Попадая в кристаллизатор, жидкий металл охлаждается, при этом в объеме кристаллизатора наблюдается три зоны: зона жидкого металла; зона жидкого металла с закристаллизовавшейся корочкой; зона твердого металла.

Кинематика деформирования металла в представленных конструкционных схемах значительно отличается. В первой схеме (рис. 1, а) закристаллизовавшийся металл подхватывается и симметрично обжимается с двух сторон боковыми бойками, движущимися по круговым траекториям навстречу друг другу. Во второй схеме (рис. 1, б)

правый боек деформирует закристаллизовавшийся металл, двигаясь по круговой траектории. При этом металл, деформируясь правым бойком, скользит по вертикальной плите. Скольжению препятствуют силы трения, создающие подпор движению, а значит, увеличивающие сдвиговые деформации. Это положительно влияет на структуру получаемой заготовки и способствует более интенсивному залечиванию имеющихся в литом металле пустот, раковин, трещин.

**Математическая постановка задачи.** Будем полагать деформируемый материал несжимаемым и изотропно упрочняющимся, массовыми и инерционными силами будем пренебрегать. Кроме того, будем пренебрегать теплотой, выделяющейся от деформации металла. Тогда решение задачи можно разбить на два этапа. На первом этапе решаются уравнения теплопроводности на временном шаге с учетом начальных и граничных условий. На втором этапе производится решение системы уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние в рассматриваемой области на временном шаге с учетом начальных и граничных условий, а также найденного температурного поля.

Расчетная схема деформации с учетом плоскости симметрии  $x_3 = 0$  представлена на рис. 2. Цифрами обозначены: 1 – жидкий металл, 2 – твердый металл. Весь цикл поворота эксцентрикового вала разбивался на  $m$  шагов. Исследовался процесс деформации для угла поворота  $180^\circ$ . Величина одного шага  $p_m = 180^\circ / m$ .



. 2.

$x_3 = 0$

1. Уравнение теплопроводности в эйлеровой системе координат имеет вид

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} \theta). \quad (1)$$

Здесь  $\lambda = \lambda(\theta)$  — коэффициент теплопроводности,  $\theta$  — температура,  $c$  — удельная теплоемкость;  $\rho$  — плотность. Начальные условия записывали следующим образом:

$$\text{при } \tau = 0 : \alpha_0 = 0, \theta = \theta_0, \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  — угол поворота эксцентрикового вала при полном раскрытии бойков,  $\theta_0$  — начальная температура в исследуемой области. Граничные условия записывали из предположения, что границы исследуемой области описываются системой ортогональных поверхностей (рис. 2):

$$\theta|_{S_i} = \theta_i \quad (i = 1, \dots, 7), \quad q|_{S_8} = 0. \quad (3)$$

$q|_{S_8}$  — тепловой поток через поверхность симметрии  $S_8$ ,  $\theta_i$  — заданное поле температур на поверхностях  $S_i$ .

Зоны твёрдого и жидкого металла определяются по температуре:

$$\text{при } \theta > \theta_c, \quad \text{при } \theta < \theta_c, \quad (4)$$

где  $\theta_c$  — температура кристаллизации металла.

Решение уравнения (1) с учетом начальных и граничных условий (2), (3), а также (4) осуществлялось численным методом и подробно описано в работе [3], в которой приводятся также результаты численных расчетов по временным шагам.

Использовались следующие исходные данные (рис. 2):  $h_0 = 32$  мм,  $h_1 = 8$  мм,  $l_1 = 45$  мм,  $l_2 = 60$  мм,  $2b = 64$  мм,  $\gamma = 8^\circ$ ,  $R_1 = 50$  мм,  $e_1 = 3$  мм,  $e_2 = 10$  мм,  $n = 100$  об/мин — частота оборотов приводных валов,  $p_m = 30$  МПа.

Физические характеристики разливаемого металла (АД0):  $\theta_c = 680$  С,  $\lambda = 0,49$  Вт/м,  $c = 0,00046 \theta + 0,00026 \theta^2$  Дж/(кг С),  $\rho = 2,7 \cdot 10^6$  кг/мм<sup>3</sup>.

Для решения температурной задачи использовался программный комплекс «Одиссей» [4].

2. В соответствии с обозначенными выше допущениями, используя теорию течения, запишем в эйлеровой системе координат уравнения модели вязкопластического твердого тела:

$$\sigma_{ijj} = 0; \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\lambda \xi_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases} \quad (6)$$

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i;j} + v_{j;i}), \quad \lambda = \frac{T}{H}, \quad T = T(H, \varepsilon, \theta), \quad H = (2\xi_{ij}\xi_{ij})^{1/2}, \quad \xi_{ii} = 0. \quad (7)$$

Индексы  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам производится суммирование. Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\xi_{ij}$  — компоненты тензора скоростей пластических деформаций;  $v_i$  — проекции скоростей перемещений на координатные оси  $x_i$ . Интенсивность касательных напряжений  $T = T(H, \varepsilon, \theta)$  определялась по аппроксимации экспериментальных данных для материала металлоизделия.

В области, где металл находится в жидком состоянии, выполняются уравнения (5) и (7), а вместо уравнений (6) используются соотношения

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\mu \xi_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент вязкости.

**Начальные и граничные условия.** Начальные условия записывали следующим образом:

$$\text{при } \tau = 0 : \alpha_0 = 0, \varepsilon_0 = 0, \quad (9)$$

где  $\alpha_0$  – начальный угол поворота эксцентрикового вала,  $\varepsilon_0$  – начальная деформация металла.

Граничные условия записывали из предположения, что границы исследуемой области описывается системой ортогональных поверхностей (рис. 2):

$$\begin{aligned} \sigma_{11}/S_i &= \sigma_{12}/S_i = \sigma_{13}/S_i = 0 \quad (i = 2, 7); \quad \sigma_{22}/S_2 = \sigma_{23}/S_2 = 0; \\ \sigma_{23}/S_i &= 0 \quad (i = 1, 4, 5, 6); \quad \sigma_{21}/S_i = \psi_i \tau_s \frac{(v_n)_i}{v} \cos(n, x_2) \quad (i = 1, 4, 5, 6); \\ \sigma_{31}/S_8 &= \sigma_{32}/S_8 = 0; \quad \sigma_{31}/S_9 = \psi_9 \tau_s \frac{(v_n)_9}{v}; \\ v_2/S_i &= 0; \quad v_2/S_i = (v_n)_i \quad (i = 4, 5, 6); \quad v_3/S_i = 0 \quad (i = 8, 9). \end{aligned} \quad (10)$$

В соотношениях (10)  $\tau_s$  – предел текучести материала при сдвиге;  $v$  – нормирующая скорость;  $(v_n)_i = (v_n - v)_i$  – скорость скольжения металла относительно инструмента деформации на  $i$ -й поверхности контакта;  $v$  – скорость движения металла,  $v$  – скорость движения инструмента;  $(v_n)_i$  – скорость перемещения инструмента по нормали на  $i$ -й поверхности контакта;  $\psi_i$  – коэффициенты трения на поверхностях  $S_i$ .

Решение уравнений (5)–(8) при наличии начальных и граничных условий (9), (10) осуществляется численным методом [5], согласно которому рассматриваемая область разбивается семействами ортогональных поверхностей на элементы конечных размеров, по каждому элементу записываются в разностной форме уравнения (5)–(8), которые решаются по алгоритму, разработанному в работах [5, 6]. Результатом решения являются поля скоростей перемещений, напряжений, деформаций на каждом временном шаге.

Для произвольного элемента ортогональной формы (рис. 3, а) уравнения (5) в разностном представлении будут иметь вид:

$$\begin{aligned} S_{ik} S_{ij}(\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + S_{ij} S_{ik}(\sigma_{ii} - \sigma_{kk}) + \frac{1}{2} \sigma_{ii} S_{ij} S_{ik} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} S_{ki} S_{kj} + \\ + \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ji} S_{jk} + (S_{ji} - S_{jk} + 2S_{jk} - S_{ji})\sigma_{ij} + (S_{ik} - S_{kj} + 2S_{kj} - S_{ki})\sigma_{ik} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3; i \notin j \notin k).$

Здесь

$$\sigma_{ij} = 0,5(\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1, \quad S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2, \quad S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1.$$

Для  $\xi_{ii}$  (3, а)

$$\begin{aligned} \xi_{ii} = \frac{2}{S_{ji}} \frac{v_i}{v_j} + \frac{2v_j}{S_{ji}} - \frac{S_{ji}}{S_{ij}} + \frac{2v_k}{S_{ik}} - \frac{S_{ki}}{S_{ik}}, \quad v_i = v_i^1 + v_i^2, \quad v_i = v_i^2 - v_i^1 \end{aligned} \quad (12)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3; i \notin k).$

Для  $\xi_{ij}, i \neq j$  (3, б) для узла (0)

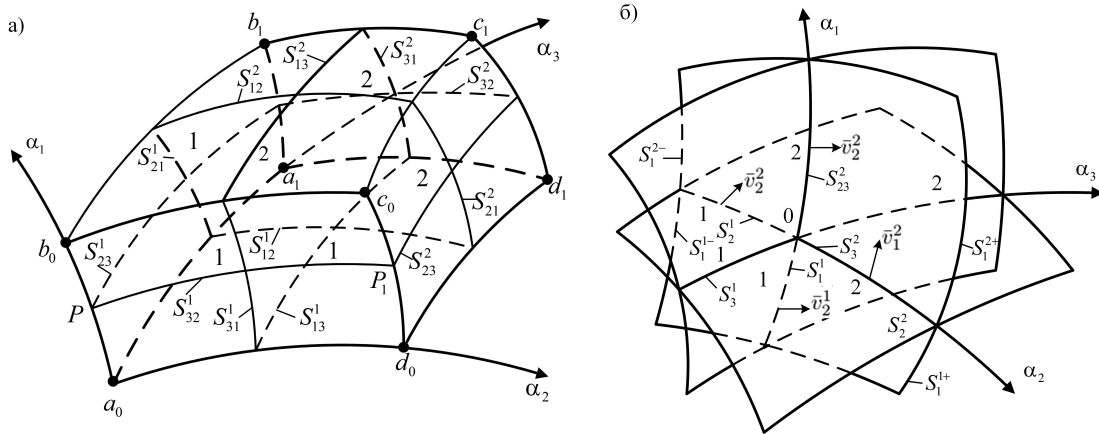
$$\xi_{ij}^0 = \frac{2}{S_i} \frac{v_j}{S_j} \frac{1}{2} v_j \frac{S_j^+}{S_i S_j} + \frac{2}{S_j} \frac{v_i}{S_i} \frac{1}{2} v_i \frac{S_i^+}{S_i S_j}. \quad (13)$$

В частности, на поверхности  $(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\xi_{12}^0 = \frac{2}{S_1} \frac{v_2}{S_2} \frac{1}{2} v_2 \frac{S_2^+}{S_1 S_2} + \frac{2}{S_2} \frac{v_1}{S_1} \frac{1}{2} v_1 \frac{S_1^+}{S_1 S_2}, \quad (14)$$

где

$$S_i = S_i^1 + S_i^2, S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+}, S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-}, v_i = v_i^2 - v_i^1.$$



. 3.

Методика решения уравнений (10) в разностном представлении (11)–(14) подробно изложена в работах [5, 6], там же приведены расчетные схемы и алгоритмы решения при соответствующих граничных условиях. В рассматриваемой задаче решение осуществлялось по указанной методике с учетом начальных и граничных условий (9), (10).

Как отмечено выше, теоретические исследования в работе [3] проводилось для сплава алюминия АД0. По результатам опытов при одноосном сжатии образцов [7] была получена аппроксимирующая формула

$$\sigma_s = a_0 E^{a_1} \xi^{a_2} \theta^{a_3}, \quad (15)$$

где  $\sigma_s$  – сопротивление деформации;  $E$  – степень деформации;  $\xi$  – скорость деформации;  $\theta$  – температура деформации;  $a_0, a_1, a_2, a_3$  – параметры. С использованием формул [8]

$$T = \sigma_s / \rho \bar{3}, \quad E = \rho \bar{3}, \quad H = \xi \rho \bar{3}, \quad (16)$$

можно переписать (15) в инвариантной форме

$$T = a_0 E^{a_1} H^{a_2} \theta^{a_3}, \quad (17)$$

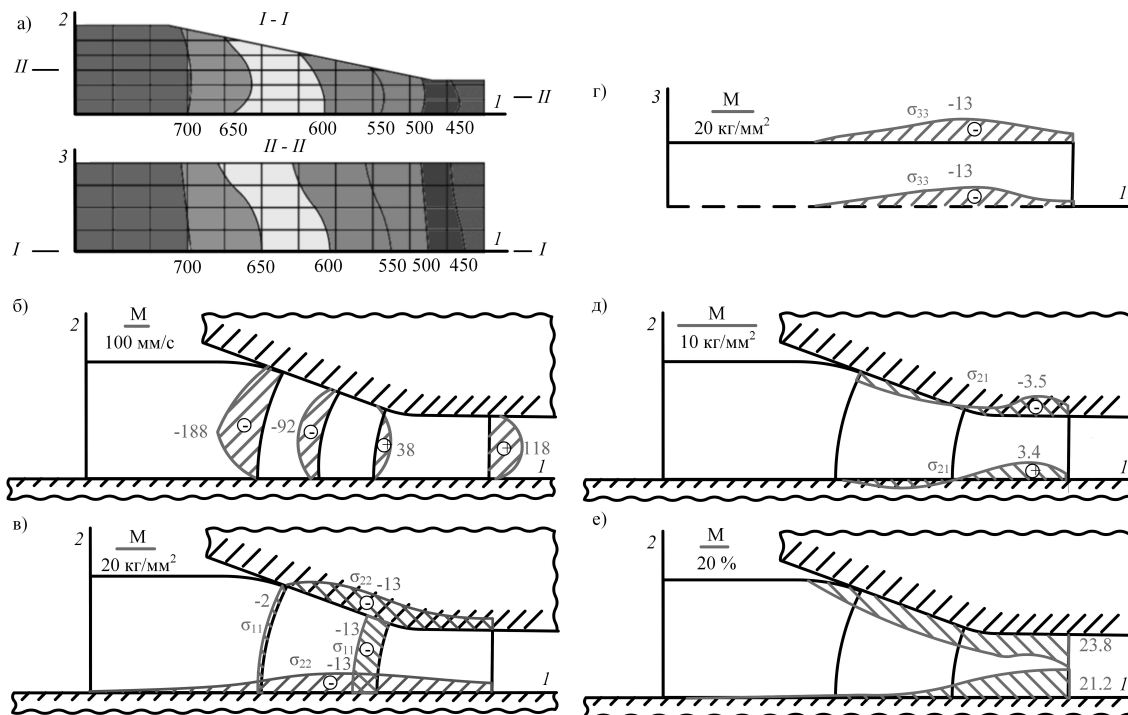
где  $T$  – интенсивность касательных напряжений (кг/мм<sup>2</sup>),  $E$  – интенсивность деформаций сдвига,  $H$  – интенсивность скоростей деформаций сдвига. Методом наименьших

квадратов были получены коэффициенты:

$$a_0 = 11,01; a_1 = 0,04; a_2 = 0,23; a_3 = -0,1 \text{ при } \theta = 240 \text{ C};$$

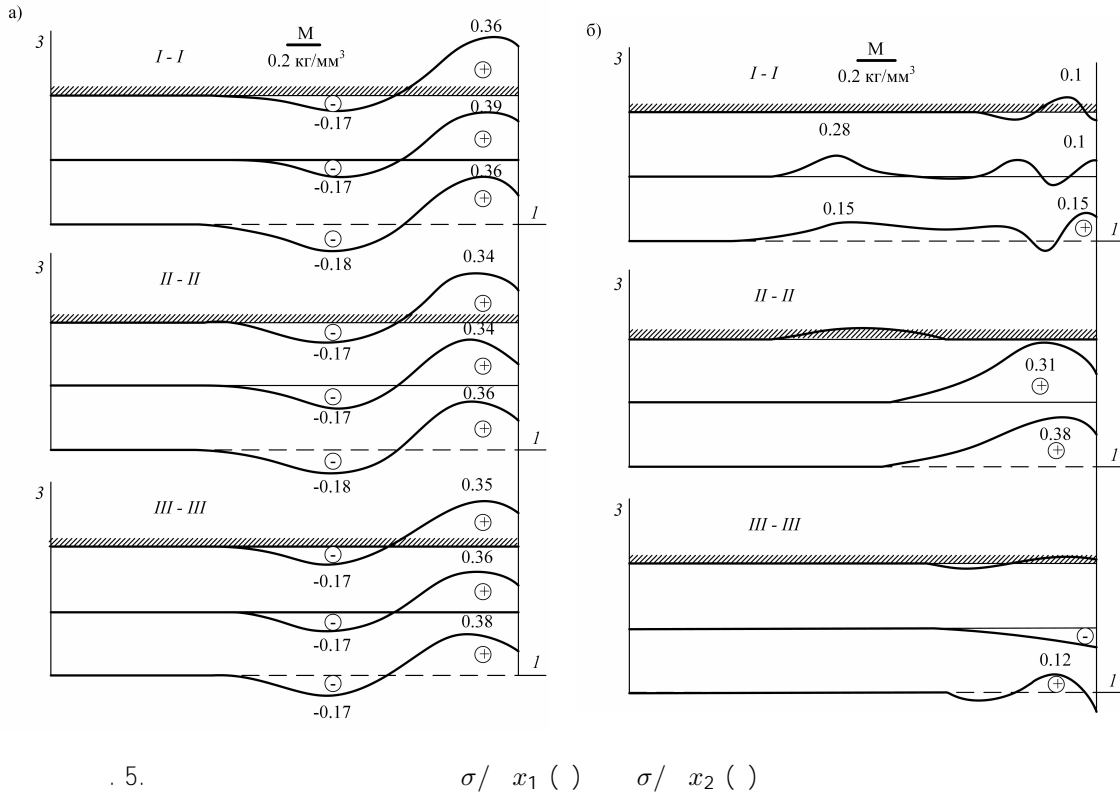
$$a_0 = 278007; a_1 = 0,14; a_2 = 0,14; a_3 = -1,97 \text{ при } \theta > 240 \text{ C}.$$

**Результаты решения задачи.** Некоторые результаты решения при  $\alpha = 90$  (шаг 3) приведены на рис. 4, 5. Для более полной картины на рис. 4, а показано поле температур из работы [3]. Также изображены эпюры скорости  $v_1$  (рис. 4, б); напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  (рис. 4, в)  $\sigma_{33}$  (рис. 4, г),  $\sigma_{21}$  (рис. 4, д); степени деформации  $E\%$  (рис. 4, е). По рис. 4, б видно, что закристаллизовавшийся металл в основном выжимается бойком в обратном по отношению выхода направлении, лишь вблизи калибрующего участка и на самом участке металл течет в сторону выхода. Рис. 4, в, г показывают, что внутри очага деформации реализуется всестороннее сжатие деформируемого металла, что способствует активному залечиванию имеющихся раковин или пустот. Наблюдается значительные сдвиговые напряжения по всему объему деформируемой области (рис. 4, д) и деформации  $E\%$ , достигающие 23% на выходе из устройства (рис. 4, е).



4. ( ), ( ), ( , , ) -  $\alpha = 90$

На рис. 5 приведены колебания  $\sigma / x_1$  (рис. 5, а) и  $\sigma / x_2$  (рис. 5, б) по сечениям:  $I-I$  – сечение в плоскости  $x_1x_3$  вблизи неподвижной стенки;  $II-II$  – сечение в плоскости  $x_1x_3$  по середине области деформирования; сечение  $III-III$  – у поверхности подвижного бойка. Результаты приведены для угла поворота  $\alpha = 120$ .



Как следует из рис. 4, в, г, по всему объему рассматриваемой области идет синхронное увеличение (по модулю) сжимающих напряжений вплоть до участка перехода наклонной зоны на подвижном бойке в калибрующую зону.

Наглядно это видно по градиенту  $\sigma / x_1$  (рис. 5, а). Колебание напряжения  $\sigma$  в направлении  $x_2$  по сечению  $x_2 = \text{const}$  показано на рис. 5, б. Это колебание очень незначительно, что соответствует результату о равенстве напряжения  $\sigma$ . Небольшим исключением является калибрующая зона в средней части (сечение  $II-II$ ). Градиент  $\sigma / x_2$  практически равен нулю по всей области кроме отдельных точек, где его значения не превышает  $0,1 \text{ кг/мм}^2$ , то есть значения  $\sigma$  по сечениям  $x_1 = \text{const}$  отличается незначительно.

### Выводы

1. Разработана математическая модель сложного технологического процесса получения непрерывных металлоизделий на литейно-ковочном модуле новой модификации.
2. Осуществлено теоретическое моделирование получения непрерывной полосы из алюминиевого сплава АД0.
3. Дан краткий анализ полученных результатов, показывающий эффективность нового предложенного технологического процесса.

### ЛИТЕРАТУРА

[1]

09.08.1995.

2041011.

- [2] ... 2769679. 05.04.2022.
- [3] // ... 2022. 2. 1–10.
- [4] ... 2012661389. 13.12.2012.
- [5] ... , 2008. 176 .
- [6] // ... 2010. 10. 19–145.
- [7] ... , 1980. 160 .
- [8] ... , 1969. 420 .

*V. I. Odinsonov, E. A. Dmitriev, D. A. Potianikhin, A. I. Evstigneev, A. E. Kvashnin*

#### THEORETICAL MODELING OF METAL DEFORMATION PROCESSES ON A CASTING AND FORGING MODULE OF A NEW MODIFICATION

*Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia*

**Abstract.** The problem of determining the temperature fields and parameters of the stress-strain state in metal during processing in a casting and forging module is considered. The principle of operation of this device combines the crystallization of the metal melt and subsequent deformation into a given profile by ensuring the mobility of the walls of the mold. A mathematical model of material deformation is constructed taking into account friction and heat dissipation on the contact surfaces with the tooling. The material is supposed to be thermo-visco-plastic, with temperature-dependent properties. A difference numerical method for solving the problem is described. In computational experiments, fields of temperature, displacement velocities, stresses and deformations were obtained for the production of a strip of aluminum alloy AD0.

**Keywords:** stresses, deformations, thermoviscoplasticity, mathematical modeling, numerical method, difference scheme, casting and forging module.

---

*Odinsonov Valery Ivanovich*

Dr. Sci. Tech., Professor, Leading Research Worker, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

*Dmitriev Eduard Anatolievich*

Dr. Sci. Tech., Associate Professor, Rector, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

*Potianikhin Dmitrii Andreevich*

Dr. Sci. Phys. & Math., Associate Professor of Aircraft Construction Department, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

*Evstigneev Alexey Ivanovich*

Dr. Sci. Tech., Professor, Leading Research Worker, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

*Kvashnin Alexander Evgenievich*

Postgraduate student, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia.

**REFERENCES**

- [1] Odinsonov V. I. Device for continuous casting of workpieces. RU Patent no. 2041011. Publ. 09.08.1995. (in Russian).
- [2] V. I. Odinsonov A. I. Evstigneev E. A. D. D. A. P. A. Y. L. A. E. K. Device for production of continuously cast deformed billets. RU Patent no. 2769679. Publ. 05.04.2022. (in Russian).
- [3] E. A. Dmitriev D. A. Potianikhin V. I. O. A. I. E. A. E. K. Modelling of the temperature field in the production of metal products on a casting and forging module of a new modification // Mathematical Modelling and Computational Methods. 2022. no. 2. P. 1–10. (in Russian).
- [4] V. I. Odinsonov A. N. Prokudin A. M. S. G. M. S. Computer program Odissey . Certificate of ofic. registration no. 2012661389. Publ. 13.12.2012. (in Russian).
- [5] V. I. Odinsonov B. G. Kaplunov A. V. P. A. V. B. Mathematical modelling of complex technological processes. Moscow: Nauka, 2008. 176 p. (in Russian).
- [6] V. I. Odinsonov N. S. Lovizin S. Y. S. Simulation of of the deformation of a metal in the casting-forging module // Mathematical Models and Computer Simulations. 2010. no. 10. P. 19–145. (in Russian).
- [7] Kroha V. A. Hardening of metals in cold plastic deformations. Handbook. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 160 p. (in Russian).
- [8] Kachanov L. M. Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow: Nauka, 1969. 420 p. (in Russian).



$$r_i \sigma_j^i = 0, \quad (2)$$

где символ  $r_i$  обозначает квадратичную производную по  $i$  - ой компоненте.

Граничные условия таковы:

$$n_j \sigma^j = P, \quad (3)$$

где  $n_j$  – орты нормали к поверхности тела,  $P$  – составляющие вектора поверхностных сил.

Геометрические соотношения представлены формулами Коши:

$$2\varepsilon_j^i = r_j w^i + r^i w_j. \quad (4)$$

Если в теле наряду с упругой зоной ( $V^e$ ) существует и пластическая зона ( $V^p$ ), то на границе раздела этих областей  $\gamma$  должны выполняться условия непрерывности перемещений:

$$[w_j] \Big| = 0, \quad (5)$$

и поверхностных сил

$$[n_j \sigma^j] \Big| = 0. \quad (6)$$

Присоединяя к уравнениям линейной теории (1)-(6) уравнение состояния для зоны упругого, пластического и вязкоупругого деформирования среды, получим замкнутую математическую задачу.

Связь между напряжениями и деформациями в упругой зоне будем определять несжимаемым телом Гука

$$S_j^i = 2\mu \varepsilon_j^i, \quad \varepsilon_{kk} = 0. \quad (7)$$

Пластическая область включения подчиняется соотношениям для упруговязкопластического тела [6] с функцией нагружения:

$$(S_i^j - c \varepsilon_i^j - \eta \varepsilon_i^j) (S_j^i - c \varepsilon_j^i - \eta \varepsilon_j^i) = k^2, \quad (8)$$

и ассоциированным законом течения:

$$\varepsilon_i^j = \psi (S_i^j - c \varepsilon_i^j - \eta \varepsilon_i^j), \quad S_i^j = \sigma_i^j - p_0 \delta_i^j. \quad (9)$$

Здесь  $\eta$  - коэффициент вязкости,  $c$ - коэффициент упрочнения,  $k$ - предел текучести материала,  $\psi$ - положительный скалярный множитель.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой  $\varepsilon_j^i$  и пластической  $\varepsilon_j^i$  составляющей:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (10)$$

причем, упругие деформации  $\varepsilon_{ij}^e$  связаны с напряжениями законом Гука. Объемная деформация удовлетворяет условию несжимаемости:

$$\varepsilon_{nn} = 0. \quad (11)$$

Вязкоупругая область представлена несжимаемой моделью тела Кельвина-Фойхта.

$$S_i^j = 2\mu_1\varepsilon_j^i + 2\eta_1\varepsilon_j^i, \quad \varepsilon_{kk} = 0. \quad (12)$$

На границе контакта  $b-h$  заполнитель-оболочка трением пренебрегаем, полагая, что на границе оболочка и заполнитель деформируются совместно, без проскальзывания и отставания, тогда выполняются условия сплошности (5), (6).

В предположении, что в момент начала пластического течения  $t = t$  зарождение пластической области начинается от границ внутренней полости сферического тела (шара), начальные условия задаются в форме:

$$\gamma_{t=t}^j = a, \quad \varepsilon_{ij}^p \Big|_{t=t} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^e \Big|_{t=t} = 0. \quad (13)$$

**2.** Напряженно-деформированное состояние заполнителя в упругой области в осесимметричном случае ( $\varepsilon = \varepsilon \cdot$ ) в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  определяется уравнением равновесия (2):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r}{r} - \frac{\sigma}{r} = 0, \quad (14)$$

законом Гука (7), условием несжимаемости и соотношениями Коши (4). Решая эту систему уравнений, находим:

$$w = \frac{A_1}{r^2}, \quad \sigma_r = 4\mu_1 \frac{A_1}{r^3} + A_2, \quad \sigma = 2\mu_1 \frac{A_1}{r^3} + A_2. \quad (15)$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической области включения и соотношения Коши, получаем:

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon = \frac{dw}{dr} + 2\frac{w}{r} = 0, \quad (16)$$

откуда:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_r}{2}, \quad w = \frac{B_1}{r^2} \quad (17)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (9) имеем:

$$e_r^p = \psi(S_r \quad c\varepsilon_r^p \quad \eta e_r^p), \quad e^p = \psi(S \quad c\varepsilon^p \quad \eta e^p), \quad e^p = \psi(S \cdot \quad c\varepsilon^p \quad \eta e^p) \quad (18)$$

Так как  $\varepsilon^p = \varepsilon^p$ , то из этих равенств следует, что:

$$S = S \cdot = \frac{S_r}{2}$$

Функция нагружения (8) принимает вид:

$$(S_r \quad c\varepsilon_r^p \quad \eta e_r^p)^2 = k^2, \quad k^2 = \frac{2}{3}k^2. \quad (19)$$

Из соотношений (4), (7), (10) и (17):

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r \quad \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_r = \frac{dw}{wr}, \quad \varepsilon = \frac{w}{r}, \quad S_r = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p),$$

получаем:

$$S_r = 2\mu \left( \frac{2B_1}{r^3} + \varepsilon_r^p \right) \quad (20)$$

Подставляя (20) в уравнение (19) получаем дифференциальное уравнение относительно  $\varepsilon_r^p$ :

$$\frac{d\varepsilon_r^p}{dt} + \frac{2\mu + c}{\eta} \varepsilon_r^p = \frac{k}{\eta} \frac{4\mu}{\eta r^3} B_1. \quad (21)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varepsilon_r^p = \frac{(kr^3 + 4\mu B_1)}{(2\mu + c)r^3} + B_3 e^{\frac{(2\mu+c)t}{\eta}}. \quad (22)$$

Из условия (13)  $\varepsilon_r^p = 0$  при  $t = t$  определяем постоянную интегрирования  $B_3$ .

$$B_3 = \frac{kr^3 + 4\mu B_1}{(2\mu + c)r^3} e^{-\frac{(2\mu+c)t}{\eta}}. \quad (23)$$

С учетом этого (22) примет вид:

$$\varepsilon_r^p = \left( k + \frac{4\mu B_1}{r^3} \right) E, \quad (24)$$

где

$$E = \left( 1 - e^{-\frac{(2\mu+c)t}{\eta}} + e^{-\frac{(2\mu+c)t}{\eta}} \right) \left( \frac{1}{2\mu + c} \right).$$

Вычисляя

$$\sigma_r - \sigma = S_r - S = 3\mu(2\varepsilon_r - \varepsilon_r^p) = 3\mu \left( \frac{2B_1}{r^3} + \varepsilon_r^p \right), \quad (25)$$

из уравнения (14) находим поле напряжения в пластической области включения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu \left[ 3kE \ln r + 2B_1(1 - 2\mu E) \frac{1}{r^3} \right] + B_2, \\ \sigma &= 3\mu kE(1 + 2 \ln r) + 2\mu B_1(1 - 2\mu E) \frac{1}{r^3} + B_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Из системы уравнений (2), (4) и (12) для вязкоупругой оболочки напряженно-деформированное состояние находим в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4(\mu_2 C_1 + \eta_2 C_1)}{r^3} + C_2, \quad \sigma = \frac{2(\mu_2 C_1 + \eta_2 C_1)}{r^3} + C_2, \\ w &= \frac{C_1}{r^2}, \quad \varepsilon_r = \frac{2C_1}{r^3}, \quad \varepsilon = \varepsilon' = \frac{C_1}{r^3}, \quad \dot{C}_1 = \frac{dC_1}{dt} \end{aligned} \quad (27)$$

Для определения неизвестных интегрирования  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  и радиуса  $\gamma$  поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования заполнителя имеем, согласно (2), (4), (5), (13):

- граничные условия

$$\begin{aligned}\sigma_r^p &= P_0 e^{\hat{a}t} \quad \text{при } r = a, \\ \sigma_r^b &= p_0 \quad \text{при } r = b\end{aligned}\quad (28)$$

- условия сопряжения

$$w^e = w^p \quad \sigma_r^e = \sigma_r^p \quad \sigma^e = \sigma^p \quad \text{при } r = \gamma \quad (29)$$

- условия контакта (жесткое сцепление) оболочка – включение

$$w = w^e \quad \sigma_r^b = \sigma_r^e \quad \text{при } r = a + h \quad (30)$$

- начальные условия

$$\gamma = a \quad \varepsilon_r^b = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (31)$$

Откуда находим:

$$A_1 = B_1 = C_1 = e^{-\mu_0 t} \left( \frac{\alpha_{12}}{\mu_0} e^{\mu_0 t} \right) \quad (32)$$

$$\left[ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} e^{-\mu_0 t} \quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} \mu_0} e^{-(\mu_0 + \hat{a})t} \quad \frac{P_0}{4\eta_0(\alpha_{11} + \hat{a})} e^{-(\mu_0 + \hat{a})t} + E(t) + C_1 \right],$$

$$C_1 = C_1|_{t=0}, \quad E(t) = \int_0^t e^{-\mu_0 t} e^{\mu_0 \tau} \left( \alpha_{21} \alpha_{22} e^{-\mu_0 \tau} \frac{P_0 e^{\hat{a}\tau}}{4\eta_2} \right) d\tau$$

$$C_2 = p_0 + \frac{C_0}{b^3} A_2 = \frac{C_0}{(a+h)^3} \frac{4\mu_1}{(a+h)^3} A_1 + C_2 \quad (33)$$

$$B_2 = 2\mu \left[ 3kE \ln(a) + 2C_1 (1 - 2\mu E) \frac{1}{a^3} \right] P_0 e^{\hat{a}t}$$

$$C_0 = 4(\mu_2 C_1 + \eta_2 G_1) \quad G_1 = \frac{dC_1}{dt}$$

$$E = E_1 \quad E_2 e^{-\mu_0 t} = \frac{1}{2\mu + c} \frac{1}{2\mu + c} e^{-\mu_0 t} e^{-\mu_0 t}, \quad \mu_0 = \frac{2\mu + c}{\eta}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\eta_2} \left\{ \mu_2 + \left[ \mu_1 \left( \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) + \mu \left( \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3} \right) \right] \right\} \frac{1}{\eta_2} 2\mu^2 \left( \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3} \right) E_1$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\eta_2} 2\mu^2 \left( \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3} \right) E_2 e^{-\mu_0 t}$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{2\eta_2} \left\{ \frac{p_0}{2} + 3\mu k E_1 (\ln(a) - \ln(\gamma)) \right\} \alpha_{22} = \frac{3\mu k}{2\eta_2} \{ E_2 e^{-\mu_0 t} (\ln(a) - \ln(\gamma)) \} \quad (34)$$

При этом уравнение для определения радиуса упругопластической границы  $\gamma$  имеет вид:

$$4\eta_2 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) G_1 + f 4\mu_2 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \frac{4\mu_1}{(a+h)^3} 4\mu (1 - 2\mu E) \frac{1}{a^3} \quad (35)$$

$$\frac{2}{\gamma^3} [\mu_1 - \mu (1 - 2\mu E)] C_1 + 3\mu k E (1 + 2 \ln(\gamma)) - 6\mu k E \ln(a) - p_0 + P_0 e^{\hat{a}t} = 0.$$

Удовлетворяя начальному условию ( $\gamma = a$  при  $t = t_0$ ) получаем уравнение для определения начала зарождения пластической области на внутреннем контуре сферического тела:

$$p_0 + P_0 e^{\lambda t} = 4\eta_2 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \frac{dC_1}{dt}, \quad (36)$$

при этом в  $C_1$  согласно (34):

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\eta_2} \left[ \mu_2 + \mu \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \right], \quad \alpha_{12} = 0, \quad (37)$$

$$\alpha_{21} = \frac{p_0}{4\eta_2}, \quad \alpha_{22} = 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Н. Спорихин, В. В. Шендерович // *Известия Воронежского государственного технического университета*, 2004. 232.
- [2] А. Н. Спорихин, В. В. Шендерович // *Известия Воронежского государственного технического университета*, 2019. 4 (42). С. 21-24.
- [3] А. Н. Спорихин, В. В. Шендерович // *Известия Воронежского государственного технического университета*, 2022. 1 (51). С. 110-114.
- [4] А. Н. Спорихин, В. В. Шендерович // *Известия Воронежского государственного технического университета*, 1971. 231.
- [5] А. Н. Спорихин, В. В. Шендерович // *Известия Воронежского государственного технического университета*, 2001. 701.
- [6] А. Н. Спорихин, В. В. Шендерович // *Известия Воронежского государственного технического университета*, 1967. 4. С. 52-58.

*A. N. Sporykhin*

## DYNAMIC DEFORMATION OF A SPHERICAL VISCOELASTIC BODY WITH AN ELASTIC-VISCOPLASTIC FILLER

*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

*Abstract.* Based on the model of a hardening elastic-plastic body and a viscoelastic body, the stress-strain state of a piecewise inhomogeneous spherical body under the action of loads, constant external and time-dependent internal, is investigated. Solutions for stress and displacement fields are obtained.

*Keywords:* spherical piecewise inhomogeneous body, plasticity, viscosity, elasticity, hardening, dynamic load.

---

*Anatoly N. Sporykhin*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

**REFERENCES**

- [1] Sporykhin A. N. , Shashkin A. I. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of mechanics and rocks. M: Fizmatlit, 2004, 232 p.
- [2] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a half-space with a spherical cavity // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2019. No.4 (42). pp. 21-24
- [3] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a piecewise inhomogeneous spherical body // Bulletin of the I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2022. No.1 (51). pp. 110-114  
bibitem4 Ivlev D. D., Bykovtsev T. I. Theory of hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 231 p.  
bibitem5 Ishlinskiy A. Y., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 701 p.
- [4] Sporykhin A. N. Nonconservative problems of the three-dimensional theory of inelastic stability in geomechanics. Voronezh: VSU Publishing House, 2015. 372 p.
- [5] Sporykhin A. N. On the stability of deformation of elastic-viscoplastic bodies // PMTF SB of the USSR Academy of Sciences. 1967. No. 4. pp. 52-58.

## КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННЫЕ ТЕНЗОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЕВКЛИДА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012

: 539.374

**Вводные замечания.** Вариационные и дифференциальные уравнения, описывающие деформирование твердых тел, сопровождающееся микроповоротами, в общем

---

© . . . . ., 2022

e-mail: murashkin@ipmnet.ru,

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp,

120011690132-4)

20-01-00666.

20.06.2022

случае требуют привлечения методов современной геометрии и формализма псевдотензорной алгебры [1–6]. Ковариантно постоянные тензорные и псевдотензорные поля играют важную роль, как при выводе определяющих уравнений, так и при преобразовании дифференциальных уравнений механики сплошных сред. В настоящей статье обсуждаются понятия и минимально необходимые сведения из алгебры псевдотензоров. Подробное и полное изложение псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [2–4, 7–10]. Псевдотензорный формализм неизбежен при разработке моделей линейных гемитропных микрополярных упругих сред (см. [11–14]).

В данной работе вводится и обсуждается понятие ковариантного постоянства абсолютных тензорных и псевдотензорных полей. Приведены примеры фундаментальных объектов псевдотензорного анализа, обладающих свойствами ковариантного постоянства. Рассмотрен алгоритм получения ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров, предложенный в монографии [2].

При ковариантном дифференцировании тензорного произведения или свертки тензора с ковариантно постоянным тензором последний может быть вынесен из под знака ковариантного дифференцирования. В работе приводятся и обсуждаются различные реализации ковариантной производной псевдотензоров, широко используемых в механике микрополярных упругих тел [11–13].

В настоящей работе показано, что относительные и абсолютные тензоры с постоянными компонентами являются ковариантно постоянными. Ряд ковариантно постоянных тензоров (например, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр и его целые степени, обобщенные дельты Кронекера, символы перестановок (альтернирующие символы, символы Леви-Чивита, дискриминантные не символы), сведены в таблицу. Обсуждается общий алгоритм получения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами, которые одновременно являются ковариантно постоянными, следуя монографии Б. Г. Гуревича [2].

После вводных замечаний, в разделе 2, приводятся и обсуждаются определения фундаментального ориентирующего псевдоскаляра, обобщенных дельт Кронекера, символов перестановок для  $N$ -мерного евклидова пространства. Рассмотрены три различные эквивалентные реализации ковариантного дифференцирования псевдотензорного поля произвольного ранга и целого веса. Приведен ряд частных случаев, широко используемых в современной механике сплошных сред.

Затем, в разделе 3, следуя рассуждениям монографии проф. Б. Г. Гуревича [2] обсуждается общий алгоритм получения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами. Предложены определения и примеры тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами. Показано, что относительные и абсолютные тензоры с постоянными компонентами являются ковариантно постоянными.

В разделе 4 устанавливается взаимосвязь произвольного полуизотропного тензора четвертого ранга и тензора с постоянными компонентами. Координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, использующихся при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов, даны в терминах метрического тензора. Обсуждается оптимальная неконвенциональная терминология, связанная с понятиями полностью изотропных, конвенционально изотропных, неконвенционально изотропных, полуизотропных (демитропных, гемитропных) тензоров и псевдотензоров четвертого ранга. На основе неконвенционального

определения для полуизотропного тензора четвертого ранга приводится координатное представление в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров.

В целом настоящую работу следует рассматривать как современную основу для важных в нелинейной механике сплошных сред задач ковариантного дифференцирования тензорных и псевдотензорных полей, а также построения координатных представлений ковариантно постоянных тензорных и псевдотензорных полей. В следующей статье будут детально рассмотрены проблемы применения развиваемой теории при построении математических моделей линейных гемитропных микрополярных упругих сред.

**Необходимые понятия и уравнения из алгебры и анализа псевдотензоров в евклидовых пространствах заданной размерности.** Рассмотрим  $N$ -мерное евклидово пространство, параметризованное координатами  $x^k$ . Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр  $e$  [11–14] и его целые степени играют важную роль в геометрии многомерных пространств. В  $N$ -мерном пространстве он определяется как косое произведение [1, р. 63–65] ковариантных базисных абсолютных векторов

$$e = d\{f, \underset{1}{f}, \dots, \underset{N}{f}\}. \quad (1)$$

Псевдотензоры произвольного ранга и целого веса  $g$  могут быть преобразованы в абсолютные тензоры с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра (1) (см. [11–14]), т.е.

$$T^{h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r} = e \ g T^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}. \quad (2)$$

Легко показать, что в евклидовом пространстве справедливо следующее соотношение

$$e^2 = g > 0, \quad (3)$$

где  $g$  — детерминант метрического тензора  $g_{ij}$ :  $g = \det(g_{ij})$ . Условие  $g = 1$  ( $jej = 1$ ) является фундаментальным для развития общей теории относительности [15] и, например, математической теории пластичности [16]. Важно отметить, что в этом случае абсолютные тензоры совпадают с псевдотензорами с точностью до знака, учитывая уравнение (2) получим

$$T^{h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r} = (\text{sgn } e) \ g T^{[g] h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}. \quad (4)$$

Откуда следует, что псевдотензоры меняют свой знак на противоположный при изменении ориентации координатного репера если их вес нечетный.

В трехмерном пространстве ( $N = 3$ ) уравнение (1) приобретает вид

$$e = d\{f, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}\} = \underset{1}{f} \left( \underset{2}{f} \ \underset{3}{f} \right). \quad (5)$$

Перейдем к обсуждению других фундаментальных объектов  $N$ -мерной геометрии, которыми являются абсолютные тензоры  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$ , обычно называемые обобщенными кронекеровскими дельтами. Объекты  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$  определяются для каждого целого  $M$   $N$  согласно [3, С. 242, § 7.105].

С помощью обобщенных дельт Кронекера  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$  символы перестановки, являющиеся псевдотензорами, могут быть немедленно определены как:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[1]} = \delta_{i_1 i_2 \dots i_N}^{12 \dots N}, \quad (6)$$

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[+1]} = \delta_{12 \dots N}^{i_1 i_2 \dots i_N}. \quad (7)$$

Например, абсолютные знакопеременные тензоры могут быть получены из символов перестановки, умноженных на соответствующую степень (+1 или -1) фундаментального ориентирующего псевдоскаляра

$$e_{i_1 i_2 \dots i_N} = e^{[1]} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (8)$$

$$e_{i_1 i_2 \dots i_N} = e^{-1} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[+1]}.$$

Индекс веса  $g$  в верхней позиции будет опущен для фундаментальных символов, таких как фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, символы перестановки, и он также применим к абсолютным тензорам с нулевым весом.

Ковариантная производная псевдотензора  $T_{ij \dots k}^{pqr \dots s}$  заданной валентности и веса  $g$  определяется согласно работам О. Веблена [17, 18], в соответствии с аналогичной операцией для абсолютных тензоров, в виде:

$$\begin{aligned} r_p T_{ij \dots k}^{lm \dots n} &= \partial_p T_{ij \dots k}^{lm \dots n} + T_{ij \dots k}^{sm \dots n} \Gamma_{sp}^l + T_{ij \dots k}^{ls \dots n} \Gamma_{sp}^m + \\ &+ T_{ij \dots k}^{lm \dots s} \Gamma_{sp}^n + \Gamma_{ip}^s T_{ij \dots k}^{lm \dots n} + \Gamma_{jp}^s T_{ij \dots k}^{lm \dots n} + \\ &+ \Gamma_{kp}^s T_{ij \dots k}^{lm \dots n} - g T_{ij \dots k}^{lm \dots n} \Gamma_{sp}^s, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}.$$

Градиент псевдотензора произвольной валентности и веса  $g$  можно вычислить согласно<sup>1</sup>

$$\nabla \mathbf{T} = e^g \zeta \partial_k (e^g \mathbf{T}). \quad (10)$$

Однако, существуют альтернативные подходы реализации ковариантного дифференцирования псевдотензора. Определим ковариантную производную псевдотензора произвольной валентности и целого веса  $g$  с помощью соотношения:

$$r_p T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} = e^g r_p \left( e^{-g} T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots} \right). \quad (11)$$

В сокращенной записи имеем:

$$\nabla T_{(n)}^{[g]} = e^{g\rho} \zeta \partial_p \left( e^{-g} T_{(n)}^{[g]} \right). \quad (12)$$

1

:  $\nabla = \mathbf{i} @_s$ .

Легко проверить, что

$$\nabla \begin{matrix} [g] \\ \mathbf{T} \\ (n) \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} \partial_p \\ \lambda_p \end{matrix} \right\} \begin{matrix} [g] \\ \mathbf{T} \\ (n) \end{matrix}, \quad (13)$$

где

$$\lambda_p = g \frac{\partial_p e}{e}.$$

Кроме того, существует третий способ реализовать ковариантное дифференцирование псевдотензора с целым положительным весом можно с помощью символов перестановок согласно правилу

$$\begin{aligned} r_p \begin{matrix} [g] \\ T \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots \\ \dots k_1 k_2 \dots k_r = (N!) \underbrace{g \begin{matrix} [g+1] \\ \epsilon \end{matrix} k_{r+1} \dots k_{r+N} \begin{matrix} [g+1] \\ \epsilon \end{matrix} k_{r+(g-1)N+1} \dots k_{r+Ng}}_g \\ r_p \left( \begin{matrix} [g] \\ T \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots \begin{matrix} [1] \\ \epsilon \end{matrix} k_{r+1} \dots k_{r+N} \begin{matrix} [1] \\ \epsilon \end{matrix} k_{r+(g-1)N+1} \dots k_{r+Ng} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Все три вида реализации ковариантной производной (9), (11) и (14) являются эквивалентными, что было продемонстрировано в работе [19].

Рассмотрим случаи ковариантного дифференцирования (9) псевдотензоров, широко используемых в механике сплошных сред:

(1) ковариантная производная псевдоскаляра веса  $g$ :

$$r_p \begin{matrix} [g] \\ T \end{matrix} = \partial_p \begin{matrix} [g] \\ T \end{matrix} + g \begin{matrix} [g] \\ T \end{matrix} \begin{matrix} s \\ s_p \end{matrix}; \quad (15)$$

(2) ковариантная производная контравариантного псевдовектора веса  $g$ :

$$r_p \begin{matrix} [g] \\ T^k \end{matrix} = \partial_p \begin{matrix} [g] \\ T^k \end{matrix} + \begin{matrix} [g] \\ T^s \end{matrix} \begin{matrix} k \\ s_p \end{matrix} + g \begin{matrix} [g] \\ T^k \end{matrix} \begin{matrix} s \\ s_p \end{matrix}; \quad (16)$$

(3) ковариантная производная дважды контравариантного псевдотензора веса  $g$ :

$$r_p \begin{matrix} [g] \\ T^{ji} \end{matrix} = \partial_p \begin{matrix} [g] \\ T^{ji} \end{matrix} + \begin{matrix} [g] \\ T^{si} \end{matrix} \begin{matrix} j \\ s_p \end{matrix} + \begin{matrix} [g] \\ T^{js} \end{matrix} \begin{matrix} i \\ s_p \end{matrix} + g \begin{matrix} [g] \\ T^{ji} \end{matrix} \begin{matrix} s \\ s_p \end{matrix}; \quad (17)$$

(4) ковариантная производная от псевдоаффинора веса  $g$ :

$$r_p \begin{matrix} [g] \\ T_i^j \end{matrix} = \partial_p \begin{matrix} [g] \\ T_i^j \end{matrix} + \begin{matrix} [g] \\ T_s^j \end{matrix} \begin{matrix} s \\ i_p \end{matrix} + \begin{matrix} [g] \\ T_i^s \end{matrix} \begin{matrix} j \\ s_p \end{matrix} + g \begin{matrix} [g] \\ T_i^j \end{matrix} \begin{matrix} s \\ s_p \end{matrix}. \quad (18)$$

Заданное псевдотензорное поле  $\begin{matrix} [g] \\ T^{lm\dots n} \\ \dots ij\dots k \end{matrix}$  валентности  $N$  и веса  $g$  является ковариантно постоянным, если оно удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$r_p \begin{matrix} [g] \\ T^{lm\dots n} \\ \dots ij\dots k \end{matrix} = 0. \quad (19)$$

Уравнению (19) заведомо удовлетворяют абсолютные тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами, которые обсуждаются в следующем разделе настоящей статьи.

Заметим, что псевдотензорное уравнение (19), включающее псевдотензор, будучи верным в данной координатной системе, остается верным в любой другой координатной системе [7, 8]. В правосторонних декартовых координатах все тензоры из таблицы имеют постоянные компоненты, равные 0 или 1. В этом случае их ковариантные производные являются обычными частными производными. Таким образом, каждая

1.

N-

-	$e^m (m = 1, 2, \dots)$	$m$	${}^{[m]}e^m = e^m$
-	$\text{sgn } e$	-	
	$g_{ij}$	0	
-	$g^{ij}$	0	
-	$g$	+2	${}^{[+2]}g = e^2$
-	$\text{sgn } g$	0	
$(M \ N)$	$\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$	0	
-	$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_M}$	+1	$e^{i_1 i_2 \dots i_N} = \frac{1}{e} {}^{[+1]}e^{i_1 i_2 \dots i_N}$
-	$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_M}$	1	$e_{i_1 i_2 \dots i_N} = e {}^{[1]}e_{i_1 i_2 \dots i_N}$
	$e^{i_1 i_2 \dots i_N}$	0	
	$e_{i_1 i_2 \dots i_N}$	0	

ковариантная производная будет равна нулю, что доказывает ковариантное постоянство абсолютных тензоров и псевдотензоров из таблицы 1 в любой криволинейной координатной системе.

**Тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами.** Тензором (псевдотензором) с постоянными компонентами [2, стр. 164] называется тензор (псевдотензор), сохраняющий (retain) неизменными (unaltered) все свои компоненты при любых линейных преобразованиях координатного репера: самые важные из них — повороты, преобразования масштабирования (scaling), центральная инверсия, зеркальные отражения.

Абсолютный тензор второго ранга, с точностью до постоянного множителя  $a$  (абсолютного инварианта) совпадающий с единичным аффинором, будет тензором с постоянными коэффициентами:

$$C_k^h = a\delta_k^h. \quad (20)$$

Псевдотензор третьего ранга с постоянными коэффициентами пропорционален символам перестановок. Дельты Кронекера и символы перестановок простейшие и самые важные примеры тензоров с постоянными коэффициентами.

Несложно показать, что наиболее общий абсолютный тензор четвертого ранга  $C_{sm}^{il}$  с постоянными компонентами можно представить в виде

$$C_{sm}^{il} = a\delta_s^i\delta_m^l + c\delta_s^l\delta_m^i, \quad (21)$$

где  $a$  и  $c$  — абсолютные инварианты (абсолютные скаляры).

Уравнение (21), справедливое в любой системе координат в декартовых координатах можно представить следующим образом

$$C_{ilsm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + c\delta_{ls}\delta_{im}. \quad (22)$$

В монографии [2, стр. 164–176] предлагается общий алгоритм построения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами для целых положительных (отрицательных) весов. Например, общий вид псевдотензора  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами целого отрицательного веса представляется формулой

$$C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s} = \sum_{P=1}^{r!} \lambda_P \delta_{f k_1}^{h_1} \delta_{k_2}^{h_2} \underbrace{\delta_{k_s}^{[1]} \in k_{s+1} \dots k_{s+N} \quad [1] \in k_{r-N+1} \dots k_r}_{jg}, \quad (23)$$

где  $r$  — число ковариантных индексов,  $s$  — число контравариантных индексов,  $N$  — размерность пространства,  $g$  — вес, целое отрицательное число,  $\lambda_P$  ( $P = 1, 2, \dots, r!$ ) — произвольные постоянные (абсолютные инварианты),  $P$  — перестановка ряда индексов

$$k_1, \dots, k_s, \dots, k_{s+N}, \dots, k_{r-N+1}, \dots, k_r.$$

В формуле (23) по ковариантным индексам, заключенным в фигурные скобки производятся всевозможные перестановки. Число ковариантных, контравариантных индексов и вес псевдотензора должны удовлетворять ограничению

$$r = s + Njg, \quad (24)$$

откуда

$$r \geq s. \quad (25)$$

Если условие (24) не выполняется, то псевдотензор  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами будет равен нулю.

Отметим, что псевдотензорное поле  $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$  с постоянными компонентами является ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению (19) при условии

$$r_s \lambda_P = 0. \quad (26)$$

Обратим внимание, что псевдотензоры вида (23) не составляют полного набора ковариантно постоянных абсолютных тензоров. Наглядным примером является параллельное векторное поле, которое является ковариантно постоянным вектором, но

не может быть представлено в виде вектора с постоянными компонентами. Примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров подробно обсуждались в работах (см. [2, 7, 8, 20, 21]). Среди них фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр  $e$  и его алгебраические степени, обобщенные  $\delta$ -символы,  $\epsilon$ -символы,  $e$ -тензоры, метрические тензоры  $g^{kh}$ ,  $g_{hk}$  которые часто используются в микрополярных теориях механики сплошных сред [12–14, 22].

Рассмотрим важный для приложений пример. Пусть  $N = 3$ ,  $g = 2$ , тогда, воспользовавшись соотношением (24), для тензора четвертого ранга получим

$$\begin{cases} r & s = 6, \\ r + s & = 4. \end{cases} \quad (27)$$

Очевидно, что система (27) несовместна, и, следовательно, невозможно построить в трехмерном пространстве псевдотензор с постоянными компонентами с весами  $g = 2$ .

**Абсолютные полуизотропные тензоры четвертого ранга.** В дальнейшем будем придерживаться неконвенциональной терминологии. Неконвенционально изотропным (полностью изотропным) будем называть тензор (псевдотензор) не меняющий свои компоненты при любых поворотах координатного репера, зеркальных отражениях и центральных инверсиях трехмерного пространства [23–26].

Конвенционально изотропным тензором (псевдотензором) называется тензор (псевдотензор), сохраняющий неизменными все свои компоненты при поворотах координатного репера. Конвенционально изотропные тензоры (псевдотензоры) терминологически лучше неконвенционально называть полуизотропными, демитропными или гемитропными.

Для абсолютного полуизотропного тензора четвертого ранга в декартовой системе координат будет справедливо представление [23, p. 77]

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{b}{2}c(\delta_{il}\delta_{sm} - \delta_{im}\delta_{sl}) + \frac{b}{2}c(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \quad (28)$$

т.е.

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{il}\delta_{sm} + c\delta_{im}\delta_{sl}. \quad (29)$$

Здесь  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — ротационные инварианты, сохраняющие свои значения при поворотах декартова репера. В отличие от представления (21) для тензора с постоянными компонентами в представлении (29) для полуизотропных тензоров четвертого ранга участвует слагаемое  $\delta_{il}\delta_{sm}$  с множителем  $b$ .

Принимая во внимание представление для тензора четвертого ранга с постоянными компонентами (22), в абсолютном гемитропном тензоре четвертого ранга можно выделить часть с постоянными компонентами

$$H_{islm} = C_{islm} + b\delta_{il}\delta_{sm}. \quad (30)$$

Представление (29) легко записывается в произвольной системе координат после замены  $\delta$ -символов на метрические тензоры:

$$H^{islm} = ag^{is}g^{lm} + bg^{il}g^{sm} + cg^{im}g^{sl}. \quad (31)$$

Так как компоненты метрического тензора  $g^{is}$  не меняются при поворотах координатного репера, то правая часть в (31), очевидно, также остается неизменной. Если считать  $a$ ,  $b$ ,  $c$  абсолютными инвариантами, то правая часть в (31) не будет также меняться при зеркальных отражениях и центральных инверсиях.

Полуизотропное тензорное поле  $H^{ism}$  оказывается ковариантно постоянным и, следовательно, удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\Gamma_k H^{ism} = 0, \quad (32)$$

при условии ковариантного постоянства инвариантов  $a, b, c$ , т.е.

$$\Gamma_k a = 0, \quad \Gamma_k b = 0, \quad \Gamma_k c = 0, \quad (33)$$

или

$$\partial_k a = 0, \quad \partial_k b = 0, \quad \partial_k c = 0. \quad (34)$$

Очевидно, что полностью изотропный тензор четвертого ранга не отличается от полуизотропного тензора.

В приложениях инварианты  $a, b, c$  приходится считать псевдоскалярами. В частности, в микрополярных теориях упругих сред из псевдоскаляров  $a, b, c$  формируется характеристическая микродлина  $L = L^{[1]}$ , являющаяся псевдоскаляром отрицательного целого веса.

**Результаты и выводы** Ковариантное постоянство абсолютных тензорных и псевдотензорных полей произвольной валентности и веса обсуждалось для исправления ошибочных утверждений, имеющих в литературе по нелинейной механике сплошных сред.

- (1) Понятия и необходимые уравнения из алгебры и анализа псевдотензоров были представлены для ясного понимания и справочной основы.
- (2) Предложено и обсуждено понятие ковариантного постоянства тензоров и псевдотензоров.
- (3) Примеры ковариантных постоянных тензоров и псевдотензоров, интересных для микрополярной упругости, для удобства приведены в таблице. В частности, введено и применено к рассматриваемым задачам понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра, удовлетворяющего условию ковариантного постоянства.
- (4) Напоминается и обсуждается общий алгоритм построения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами, которые одновременно являются ковариантными константами.
- (5) Указаны условия приведения произвольного полуизотропного тензора четвертого ранга к тензору с постоянными компонентами. Координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, использующихся при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов, даны в терминах метрического тензора.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, P. Noordhoof, 1966.
- [2] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, P. Noordhoof, 1948. 408 p. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, P. Noordhoof, 1964. 429 p.]
- [3] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [4] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 456 p.]
- [5] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, P. Noordhoof, 1948. 408 p. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, P. Noordhoof, 1964. 429 p.]

- [6] Radaev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [7] Sokolniko I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [
- [8] McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
- [9] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [10] Maugin G. A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 p.
- [11] // . 2018. . 22, 3. . 504–517.
- [12] // . 2020. . 82, 4. . 399–412.
- [13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [14] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [15] Kop A. *Mathematical Theory of Relativity*. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
- [16] . 2006. 340 .
- [17] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Trans. Am. Math. Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [18] Veblen O. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [ . 1948. 139 .].
- [19] // . 2022. 1(51). . 17–26.
- [20] Radaev Y. N., Murashkin E. GENERALIZED PSEUDOTENSOR FORMULATIONS OF THE STOKES' INTEGRAL THEOREM // . 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
- [21] Radaev Y. N., Murashkin E., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // . 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [22] .B., // . 2021. . 25, 3. . 457–474.
- [23] Je reys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [24] Je reys H., Swirles B. *Methods of mathematical physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. 712 p.
- [25] . 1980. 512 .
- [26] Spencer A. J. M. *Continuum mechanics and theory of materials*. New York: Courier Corporation, 2004. 192 p.

## COVARIANTLY CONSTANT TENSORS IN EUCLID SPACES. ELEMENTS OF THE THEORY

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

*Abstract.* In this paper, we discuss the covariant constancy of tensors and pseudotensors (including two-point ones) of arbitrary valency and weight in Euclidean space. The requisite notions and equations from algebra and analysis of pseudotensors in Euclidean spaces are given. The general conditions for the covariant constancy of pseudotensors are highlighted. Examples of covariantly constant tensors and pseudotensors from multidimensional geometry are considered. In particular, a fundamental orienting pseudoscalar whose integer powers satisfy the condition of covariant constancy is introduced. The properties and methods of coordinate representation of covariantly constant tensors and pseudotensors of the fourth rank are discussed. Based on an unconventional definition of a semi-isotropic tensor of the fourth rank, a coordinate representation in terms of Kronecker deltas and metric tensors is given. Conditions for the covariant constancy of semi-isotropic tensors of the fourth rank are derived.

*Keywords:* pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, permutation symbol, covariant derivative, gradient, unconventionally isotropic tensor, fully isotropic tensor, demitropic tensor, hemitropic tensor, semi-isotropic tensor, conventionally isotropic tensor, tensor with constant components, constitutive pseudotensor, chiral media, micropolar hemitropic continuum

**REFERENCES**

- [1] Rozenfeld B. A. *Mnogomernye prostranstva*. M.: Nauka, 1966.
- [2] Gurevich G. B. *Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov*. M., L.: GITTL, 1948. 408 p. [Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Groningen, P. Noordhoof, 1964. 429 p.]
- [3] Synge J. L., Schild A. *Tensor calculus*. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [4] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.]
- [5] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a Generalization of the Hamilton-Cayley Algebraic Theory // *Izv. RAN. MTT*. 2021. 6. 130–138.
- [6] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [7] Sokolniko I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Sokolniko I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.]
- [8] McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
- [9] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories* // *Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie* / Ed. by S. Flugge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [10] Maugin G. A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 p.

---

*Murashkin Evgenii Valeryevich*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

*Radayev Yuri Nikolaevich*, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

- [11] . . . The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. . 22, . 3. . 504–517.
- [12] Radaev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2020. . 82, . 4. . 399–412.
- [13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [14] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [15] Kop A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
- [16] Radaev Y. N. Spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samarskiy universitet, 2006. 340 p.
- [17] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [18] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [19] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. . 1(51). . 17–26.
- [20] Radaev Y. N., Murashkin E. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform. 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
- [21] Radaev Y. N., Murashkin E., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [22] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2021. . 25, . 3. . 457–474.
- [23] Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [24] Jeffreys H., Swirles B. Methods of mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. 712 p.
- [25] Lurie A. I. Nelineynaya teoriya uprugosti. Moskva: Nauka, 1980. 512 .
- [26] Spencer A. J. M. Continuum mechanics and theory of materials. New York: Courier Corporation, 2004. 192 p.

---

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.

**КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННЫЕ ТЕНЗОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ  
ЕВКЛИДА. ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ КОНТИНУУМА**

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013

: 539.374

---

© , 2022

e-mail: murashkin@ipmnet.ru,

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp,

120011690132-4)

20-01-00666.

20.06.2022

**Вводные замечания.** В предшествующей публикации [1] обсуждались элементы теории тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами произвольной валентности и целого веса в Евклидовых пространствах. Настоящее исследование посвящено вопросам применения развиваемой теории в механике сплошных сред. И в этом смысле настоящую работу следует рассматривать как продолжение публикации [1].

Статья представляется нам важной, поскольку встречаются утверждения (см., например, [2, с. 65]), что двухточечные тензоры дисторсии и обратной дисторсии, имеющие фундаментальное значение при построении моделей геометрически нелинейной механики сплошных сред, являются ковариантно постоянными. Это утверждение, в общем случае, неверно и должно считаться ошибочным, что можно выяснить с помощью формализма рациональной механики [3, 4]. Кроме того, требует уточнения понятие ковариантной производной двухточечных тензоров и псевдотензоров [5].

После вводных замечаний, в разделе 2, настоящей статьи рассматриваются определения, следуя формализму рациональной механики [3, 4], двухточечных тензоров дисторсии (сопряженного градиента деформации) и обратной дисторсии. Фундаментальный положительный абсолютный скаляр  $J$ , широко используемый в рациональной механике, вычисляется в терминах фундаментальных ориентирующих псевдоскаляров, связанных с референциальной и пространственной системами координат. Предложены двухточечные тензорные формулировки уравнений Эйлера–Пиола–Якоби. Получены уравнения, наиболее близкие к условиям ковариантного постоянства дисторсии и обратной дисторсии.

В третьем разделе обсуждается общая форма упругого потенциала линейного анизотропного микрополярного упругого континуума. Приводятся координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, использующихся при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов.

В разделе 4 доказывается ковариантное постоянство определяющих линейный гемитропный микрополярный континуум тензоров и псевдотензоров четвертого ранга. Выделяется тензорная часть с постоянными компонентами в декартовом координатном представлении полуизотропного тензора четвертого ранга. Отмечено, что характеристическая микродлина  $L$  проявляется как псевдоскаляр веса  $-1$ .

В работе используется неконвенциональная терминология, существо которой было ранее разъяснено в работах авторов [1]. Изложение элементов псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [6–10]. Псевдотензорный формализм использовался авторами при разработке моделей линейных гемитропных микрополярных упругих сред (см. [11–20]).

**Тензоры дисторсии и обратной дисторсии в нелинейной механике континуума.** Введем в евклидовом пространстве системы координат  $X$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) и  $x^S$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Обе системы координат считаются равноправными, однако, в дальнейшем, следуя терминологии нелинейной механики континуума, будем называть одну из них  $X$  — отсчетной (лагранжевой), а вторую  $x^S$  — пространственной (эйлеровой). Греческие и латинские индексы будут ассоциироваться с отсчетными  $X$  и пространственными  $x^S$  координатами.<sup>2</sup> Обозначим через  ${}^8\{$  и  $\{$  векторы ковариантных базисов, а через  ${}^8E$  и  $e$  — фундаментальные ориентирующие псевдоскаляры. Будем считать

<sup>2</sup>  
 $L, M$

( , , [3])

[4]

$K$

известными метрические тензоры  ${}^{\circ}g = {}^{\circ}\{ {}^{\circ}\{$  и  $g_{sk} = \{ \{$  соответственно введенным системам координат. Сопряженный градиент деформации<sup>3</sup> (или тензор дисторсии), являющийся двухточечным тензором, определяется следующими компонентами, называемыми дисторсиями:

$$x^i = \partial x^i. \quad (1)$$

Обратный градиент деформации (или обратная дисторсия)<sup>4</sup> определяется на основании уравнения

$$X_j = \partial_j X. \quad (2)$$

Очевидно, что справедливы следующие соотношения

$$x^i X_j = \delta_j^i, \quad X_i x^i = \delta. \quad (3)$$

Следуя схеме рациональной механики, дисторсия  $x^i$  и обратная дисторсия  $X_j$  могут быть определены согласно

$$x^i = {}^{\circ}r^{\text{total}} x^i, \quad X_j = r_j^{\text{total}} X, \quad (4)$$

где дифференциальные операторы  ${}^{\circ}r^{\text{total}}$  и  $r_j^{\text{total}}$  обозначают полные ковариантные производные двухточечных тензоров, известные из работ по рациональной механике (см. [3, с. 810]):

$${}^{\circ}r^{\text{total}} = {}^{\circ}r^{\text{expl}} + (\partial x^p) r_p^{\text{expl}}, \quad (5)$$

$$r_p^{\text{total}} = r_p^{\text{expl}} + (\partial_p X) {}^{\circ}r^{\text{expl}}. \quad (6)$$

Неполные операторы Гамильтона определяются согласно

$${}^{\circ}\nabla^{\text{expl}} = {}^{\circ}\{ \partial^{\text{expl}}, \quad (7)$$

$$\nabla^{\text{expl}} = \{ \partial_k^{\text{expl}}. \quad (8)$$

Выражение для полных частных производных записываются в виде цепных правил (chain rules)

$$\partial^{\text{total}} = \partial^{\text{expl}} + (\partial x^k) \partial_k^{\text{expl}}, \quad (9)$$

$$\partial_k^{\text{total}} = \partial_k^{\text{expl}} + (\partial_k X) \partial^{\text{expl}}. \quad (10)$$

В книге В. Л. Бердичевского [2, с. 65] утверждается, что дисторсия и обратная дисторсия являются ковариантно постоянными тензорами. Это утверждение в целом не соответствует действительности. Это можно показать, действуя следующим образом.

Согласно формализму рациональной механики [3, с. 244, уравнение (16.5)], введем положительный абсолютный скаляр  $J$ :

$$J = \frac{E}{{}^{\circ}E} > 0, \quad (11)$$

3

4

F.

"

"  $x^i \rightarrow X^\alpha$  [21]. - , " $X^\alpha \rightarrow x^i$ 

" (inverse description),

где фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр  $E$  равен смешанному произведению конвективных базисных векторов  $\{\alpha = {}^0_1, {}^0_2, {}^0_3\}$ , а  ${}^0E$  равен смешанному произведению референциальных базисных векторов  ${}^0\{\alpha = {}^0_1, {}^0_2, {}^0_3\}$ . Поэтому фундаментальные ориентирующие псевдоскаляры в уравнении (11) определяются как:

$$E = (\{\ \}_1 \ \{\ \}_2 \ \{\ \}_3, \quad {}^0E = ({}^0\{\ \}_1 \quad {}^0\{\ \}_2 \quad {}^0\{\ \}_3. \quad (12)$$

Очевидно,  $J = +E$  в случае, когда референциальный базис правосторонний декартов, и  $J = -E$ , если референциальный базис левосторонний.

Якобиан деформации  $\Delta = \det(\partial x^i)$ , будет удовлетворять тождеству Якоби [3, с. 246, уравнение (17.8)]

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x^i} = X_i \Delta. \quad (13)$$

Используя последнее уравнение, можно получить уравнения Эйлера–Пиола–Якоби [3, стр. 246, уравнение (17.9)]:

$$\partial_k^{\text{total}}(\Delta^{-1} x^k) = 0, \quad \partial^{\text{total}}(\Delta X_k) = 0. \quad (14)$$

Двухточечная тензорная формулировка уравнений (14) запишется в виде

$$r_i^{\text{total}}(J^{-1} x^i) = 0, \quad {}^0r^{\text{total}}(J X_k) = 0. \quad (15)$$

Уравнения (15) справедливы в любой системе координат, в том числе и в случае, когда Эйлеравы и Лагранжевы координаты декартовы. В этом случае имеет место следующее соотношение:

$$J = \Delta. \quad (16)$$

С учетом (16) уравнение (15) можно вывести из (14), так как в декартовых координатах имеем

$$\begin{aligned} {}^0r^{\text{total}}(J X_k) &= \partial^{\text{expl}}(\Delta X_k) + \partial_s^{\text{expl}}(\Delta X_k)(\partial x^s) = \partial^{\text{total}}(\Delta X_k), \\ r_k^{\text{total}}(J^{-1} x^k) &= \partial^{\text{expl}}(\Delta^{-1} x^k)(\partial_k X^i) + \partial_k^{\text{expl}}(\Delta^{-1} x^k) = \partial_k^{\text{total}}(\Delta^{-1} x^k), \end{aligned}$$

и, применяя уравнения (14), мы можем в итоге получить

$$r_i^{\text{total}}(J^{-1} x^i) = 0, \quad {}^0r^{\text{total}}(J X_i) = 0. \quad (17)$$

Кроме уравнений (15) никаких других утверждений о ковариантном постоянстве тензоров дисторсии и обратной дисторсии в нелинейной механике сплошных сред не известно.

**Применение ковариантно постоянных абсолютных тензорных и псевдотензорных полей в линейных микрополярных теориях.** Тензоры и псевдотензоры четвертого ранга играют исключительно важную роль в математических моделях линейных анизотропных микрополярных упругих континуумов [22–24].

Введем в рассмотрение микрополярный упругий потенциал  $U$ , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с естественными псевдотензорными аргументами

$$U = U(\epsilon_{ij}, \kappa_j^{[+1]s}), \quad (18)$$

где  $\epsilon_{ij}$  — асимметричный тензор деформации;  $\kappa_j^{[+1]s}$  — псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал полагается абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим в том числе от зеркальных отражений и центральной инверсии трехмерного пространства.

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела упругий потенциал в произвольной системе координат получается в форме:

$$U = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{[2] islm [+1] [+1] \kappa_{is} \kappa_{lm}} + H_3^{[1] islm [+1] \kappa_{is} \kappa_{lm}}. \quad (19)$$

Отметим, что единственным определяющим тензором четвертого ранга чувствительным к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства оказывается определяющий псевдотензор  $H_3^{[1] islm}$ . Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т.е. полуизотропны, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства.

Чтобы воспользоваться результатами, развиваемой в работе [1] теории ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров четвертого ранга в Евклидовых пространствах, преобразуем энергетическую форму (19) с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра  $e$ , элиминируя веса псевдотензоров:

$$U = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + e^2 H_2^{[2] islm [+1] [+1] \frac{\kappa_{is}}{e} \frac{\kappa_{lm}}{e}} + e H_3^{[1] islm [+1] \frac{\kappa_{is}}{e} \frac{\kappa_{lm}}{e}}, \quad (20)$$

в итоге получим

$$U = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + H_3^{islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}. \quad (21)$$

Полученная энергетическая форма упругого потенциала (21) как правило используется при построении моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов. С помощью координатного представления [1, формула (31)] для определяющих линейный гемитропный микрополярный упругий континуум псевдотензоров можно получить

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}, \\ H_2^{islm} &= a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl}, \\ H_3^{islm} &= a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $a_a, b_a, c_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) — девять определяющих постоянных гемитропного микрополярного упругого тела. С точки зрения тензорной алгебры  $a_a, b_a, c_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) как минимум являются полуизотропными инвариантами.

С тем чтобы вернуться к энергетической форме (19) необходимо преобразовать представления для определяющих тензоров (22). Для этого выполним следующие замены

$$\begin{aligned} H_2^{[2] islm} &= e^2 H_2^{islm}, & H_3^{[1] islm} &= e^1 H_3^{islm}, \\ \frac{a_2}{2} &= e^2 \frac{a_2}{2}, & \frac{b_2}{2} &= e^2 \frac{b_2}{2}, & \frac{c_2}{2} &= e^2 \frac{c_2}{2}, \\ \frac{a_3}{3} &= e^1 \frac{a_3}{3}, & \frac{b_3}{3} &= e^1 \frac{b_3}{3}, & \frac{c_3}{3} &= e^1 \frac{c_3}{3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив выражения (23) в координатные представления (22) получим

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a_1 g_1^{is} g_1^{lm} + b_1 g_1^{il} g_1^{sm} + c_1 g_1^{im} g_1^{sl}, \\ \overset{[2]}{H}_2^{islm} &= \overset{[2]}{a}_2 g_2^{is} g_2^{lm} + \overset{[2]}{b}_2 g_2^{il} g_2^{sm} + \overset{[2]}{c}_2 g_2^{im} g_2^{sl}, \\ \overset{[1]}{H}_3^{islm} &= \overset{[1]}{a}_3 g_3^{is} g_3^{lm} + \overset{[1]}{b}_3 g_3^{il} g_3^{sm} + \overset{[1]}{c}_3 g_3^{im} g_3^{sl}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если вместо определяющих постоянных  $a, b, c$  перейти к конвенциональным механическим постоянным, таким как  $G, \nu, L, \dots$ , то характерная микродлина  $L$  будет псевдоскаляром отрицательного веса  $-1$ .

**Ковариантное постоянство определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга.** Рассмотрим подробнее координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга (22). Сравнивая представление для абсолютного тензора четвертого ранга с постоянными компонентами [1, формула (22)] и представление полуизотропного тензора (22) в декартовой системе координат, заметим, что

$$H_{islm} = C_{islm} + b \delta_{ij} \delta_{sm}, \quad (25)$$

где  $C_{islm}$  обозначает абсолютный тензор четвертого ранга с постоянными компонентами.

Формула (25) в произвольной системе координат примет вид

$$H_{sm}^{il} = C_{sm}^{il} + b g^{il} g_{sm}, \quad (26)$$

где  $C_{sm}^{il}$  — тензор с постоянными коэффициентами в смысле Б.Г. Гуревича [6], являющийся ковариантно постоянным.

Ковариантно продифференцировав представление (26) в произвольной системе координат получим

$$\Gamma_k H_{islm} = 0, \quad (27)$$

при условии, что выполнено

$$\Gamma_k b = \partial_k b = 0. \quad (28)$$

Отметим тот факт, что тензорное уравнение (27) при условии (28), остается справедливым в любой координатной системе.

Полуизотропное тензорное поле  $H_{islm}$  оказывается ковариантно постоянным и, следовательно, удовлетворяет псевдотензорному уравнению (27) при условии ковариантного постоянства инвариантов  $a, b, c$ , т.е.

$$\Gamma_k a = 0, \quad \Gamma_k b = 0, \quad \Gamma_k c = 0, \quad (29)$$

или

$$\partial_k a = 0, \quad \partial_k b = 0, \quad \partial_k c = 0. \quad (30)$$

В механике микрополярных сред инварианты  $a, b, c$  приходится считать псевдоскалярами, а условия (30) следует заменить условиями (29) с соответствующим правилом ковариантного дифференцирования псевдоскаляров. В частности, в микрополярных теориях упругих сред из псевдоскаляров  $a, b, c$  формируется характерная микродлина  $L = L^{[1]}$ , являющаяся псевдоскаляром отрицательного целого веса. Тогда одним

из условий ковариантного постоянства определяющих псевдотензоров гемитропного микрополярного упругого тела будет

$$\nabla_p L = \partial_p L + L \frac{\partial p e}{e} = 0. \quad (31)$$

В заключении отметим, что полуизотропные псевдотензоры четвертого ранга произвольного целого веса, также оказываются ковариантно постоянными, в силу ковариантного постоянства степеней фундаментального ориентирующего псевдоскаляра.

**Результаты и выводы.** В настоящей статье рассмотрены вопросы применения ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров (в том числе, двухточечных) произвольной валентности и целого веса в Евклидовых пространствах в нелинейной механике сплошных сред и линейных моделях микрополярных упругих сред.

- (1) Продемонстрировано, что тензоры дисторсии и обратной дисторсии не являются ковариантно постоянными двухточечными тензорами, в противовес указаниям на их ковариантное постоянство, встречающимся в литературных источниках по нелинейной механике континуума.
- (2) Получены двухточечные абсолютные тензорные уравнения, наиболее близкие к условиям ковариантного постоянства дисторсии и обратной дисторсии.
- (3) Обсуждаются общие координатные представления упругого потенциала для линейного анизотропного микрополярного континуума.
- (4) Приводятся координатные представления в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров для определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга, использующихся при моделировании линейных гемитропных микрополярных упругих континуумов.
- (5) Получены условия ковариантного постоянства определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга для линейного гемитропного микрополярного упругого континуума.
- (6) Отмечено, что характерная микродлина  $L$  проявляется как псевдоскаляр веса 1, и удовлетворяет псевдотензорному уравнению (31).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] // . 2022. 2(52). . 106–116.
- [2] Berdichevsky V. L. Variational Principles of Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1983. 448 p.
- [3] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [4] Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Berlin: Springer, 2004. 579 p.
- [5] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Theory of Covariant Differentiation of Two Point Pseudotensor Fields // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1365–1373.
- [6] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
- [7] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [ . . . . . 1965. 456 .].
- [8] Sokolniko I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [ . . . . . , 1971. 376 c.].
- [9] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [10] McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.

- [11] ... // ... . 2020. . 82, 4. . 399–412.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [13] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [14] ... // ... . 2021. . 2(48). . 104–114.
- [15] ... // ... . 2021. . 4(50). . 59–72.
- [16] ... // ... . 2021. . 6. . 130–138.
- [17] Nickolaevich R. Y., Valeryevich M. E. GENERALIZED PSEUDOTENSOR FORMULATIONS OF THE STOKES' INTEGRAL THEOREM // ... . 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
- [18] Nikolaevich R. Y., Valeryevich M. E. et al. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // ... . 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [19] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [20] ... // ... . 2022. . 1(51). . 17–26.
- [21] Maugin G. A. Material inhomogeneities in elasticity. New York: CRC Press, 1993. 292 p.
- [22] ... // ... . 2018. . 22, 3. . 504–517.
- [23] .B., ... // ... . 2021. . 25, 3. . 457–474.
- [24] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

COVARIANTLY CONSTANT TENSORS IN EUCLID SPACES. APPLICATIONS  
TO CONTINUUM MECHANICS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The present paper is devoted to applications of covariantly constant tensors and pseudotensors (including two-point ones) of arbitrary valency and integer weight in Euclidean spaces to continuum mechanics. The tensors of distortion and inverse distortion are not covariantly constant two-point tensors, in contrast to their covariant constancy mentions found in the literature on nonlinear continuum mechanics. The general form of the elastic potential for a linear anisotropic micropolar continuum is given. Based on the non-conventional definition of a semi-isotropic tensor, coordinate representations of constitutive tensors and pseudotensors of the fourth rank are given in terms of Kronecker deltas and metric tensors. The covariant constancy of the constitutive tensors and pseudotensors of the fourth rank for the linear anisotropic micropolar continuum is shown.

**Keywords:** pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, permutation symbol, covariant derivative, gradient, unconventionally isotropic tensor, fully isotropic tensor, demitropic tensor, hemitropic tensor, semi-isotropic tensor, conventionally isotropic tensor, tensor with constant components, constitutive pseudotensor, chiral media, micropolar hemitropic continuum

## REFERENCES

- [1] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Elements of the theory // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. 2(52). . 106–116.
- [2] Berdichevsky V. L. Variational Principles of Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1983. 448 p.
- [3] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [4] Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Berlin: Springer, 2004. 579 p.
- [5] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Theory of Covariant Differentiation of Two Point Pseudotensor Fields // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 6. P. 1365–1373.
- [6] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
- [7] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [
- [8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [9] Sokolniko I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [
- [10] McConnell A. J. Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+318 p.
- [11] Radaev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2020. . 82, . 4. . 399–412.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.

---

*Murashkin Evgenii Valeryevich*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

*Radayev Yuri Nikolaevich*, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Russia.

- 
- [13] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [14] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a Pseudotensor Generalization of Ugonio-Hadamard Connecting Bilateral Boundary Conditions // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2021. 2(48). . 104–114.
- [15] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Pseudovector differential operators of micropolar elasticity // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2021. 4(50). . 59–72.
- [16] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a Generalization of the Hamilton-Cayley Algebraic Theory // *Izv. RAN. MTT*. 2021. 6. . 130–138.
- [17] Radaev Y. N., Murashkin E. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.* 2022. Vol. 22, no. 2. P. 205–215.
- [18] Radaev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [19] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. 1(51). . 17–26.
- [20] Maugin G. A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 p.
- [21] . . The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2018. . 22, 3. . 504–517.
- [22] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2021. . 25, 3. . 457–474.
- [23] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.

---

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (rector@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (ekc\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin\_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

**на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля `predel.sty`. Стиль `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

О точности решения краевой задачи для дифференциального уравнения Бернулли прогиба балки методом конечных разностей в зависимости от коэффициента Постели грунта в модели Винклера . . . . .	5
Приближенный метод расчета на устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек средней длины, заполненных сыпучим материалом, при кручении . . . . .	10
Определение несущей способности многоэтажных зданий из физически нелинейных бетонных стержней . . . . .	19
Решения задачи Дирихле для уравнений асимметричной теории упругости . . . . .	36
Определяющие соотношения теории упруго-пластических процессов для решения краевых задач при плоском напряженном состоянии . . . . .	42
Исследование разрушения и рационального распределения фазовых материалов в однородных и гибридных полиметаллических прямоугольных пластинах . . . . .	51
Обобщенный анализ гарантированного разрушения взрывом балочных элементов конструкций в воде . . . . .	62
О кручении стержней с трансляционной анизотропией, находящихся под действием внешнего давления . . . . .	72
О влиянии ассоциированной сжимаемости на определение напряженного состояния упругопластической трубы с учетом температуры материала . . . . .	78
Теоретическое моделирование процессов деформации металлов на литейно-ковочном модуле новой модификации . . . . .	89
Динамическое деформирование сферического вязкоупругого тела с упруговязкопластическим наполнителем . . . . .	99
Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории . . . . .	106
Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума . . . . .	118
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА . . . . .	128

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	131
СОДЕРЖАНИЕ .....	133

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2022. № 2 (52)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 09.12.2022. Выход в свет 12.12.2022.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>. Усл. печ. л. 16,8.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 2244

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38