

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 3(57)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев (Бе-
лоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2023

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 3(57)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev (Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

Н. К. Салихова¹, Д. С. Дудин¹, И. Э. Келлер¹, Г. Л. Пермяков², Д. Н. Трушников²

МОДЕЛЬ ИСКРИВЛЕНИЯ СТЕНКИ НА ПОДЛОЖКЕ, НАРАЩИВАЕМОЙ ПРОВОЛОЧНО-ДУГОВОЙ НАПЛАВКОЙ, И ЕЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ АПРОБАЦИЯ ДЛЯ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

²Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия

Аннотация. Для исследования формирования остаточных напряжений и искажений изделий, создаваемых проволочно-дуговой наплавкой, университетом Крэнфилда выполнена наплавка на закрепленную подложку стенки из алюминиевого сплава, в том числе — с послойной обкаткой роликом с различным усилием прижима. В настоящей работе значения прогиба освобожденной конструкции из данного эксперимента воспроизведены численно, для чего построена математическая модель. Процесс представлялся в виде последовательно решаемых задач а) тепловой — наплавки 9-18 слоев материала, б) термоупругопластической — формирования собственных деформаций и остаточных напряжений вследствие остывания созданной конструкции с неоднородным распределением температуры во время паузы, в) термоупругопластической — обкатки роликом напряженной заготовки при повышенной температуре (этап может отсутствовать) и г) упругопластической — искажения конструкции и изменения поля остаточных напряжений при освобождении конструкции. Для учета собственных деформаций при послойной обкатке роликом и прогнозирования эволюции изгиба конструкции и распределения остаточных напряжений по ее высоте разработана балочно-стержневая модель механики наращиваемой стенки. Модель хорошо описывает величину продольного изгиба образца при наплавке, однако избыточно учитывает влияние обкатки роликом. При послойной, и даже однократной, обкатке роликом конструкция изгибается в противоположном направлении, тогда как в эксперименте она только выпрямляется.

Ключевые слова: аддитивное производство, проволочно-дуговая наплавка, послойная обкатка роликом, алюминиевый сплав, искажения, остаточные напряжения, эксперимент, расчет.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.012

УДК: 539.374+621.791.927.55

© Салихова Н. К., Дудин Д. С., Келлер И. Э., Пермяков Г. Л., Трушников Д. Н., 2023

Салихова Нелли Камилевна

e-mail: snk021@mail.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Поступила 20.11.2023

1. Введение

Аддитивное производство проволоочно-дуговой наплавкой позволяет создавать легкие, жесткие и прочные металлические конструкции сложной формы при значительной экономии материала. По видимому, первым прямым предшественником этого способа был способ электрической отливки металлов для восстановления деталей машин, разработанный в 1888 году помощником горного начальника Пермских пушечных заводов Н.Г. Славяновым, удостоенный золотой медали Всемирной выставки в Чикаго в 1893 году (экспонат — шестигранный «стакан», наплавленный из слоев колокольной бронзы, томпака, никеля, стали, чугуна, меди, нейзильбера и бронзы, находится в мемориальном доме-музее Н. Г. Славянова в Перми; другой стакан, изготовленный для демонстрации на IV Электрической выставке в Петербурге в 1892 г., хранится в музее истории и техники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого). Современные способы аддитивного производства проволоочно-дуговой наплавкой на основе эффективных технологий (плазменной, плазменно-дуговой с плавящимся электродом и холодным переносом металла), с послойной точечной обработкой давлением или термомеханической обработкой в последние десять лет разрабатываются рядом научных организаций [1–5]. Технологии аддитивного производства с послойной обработкой пневматическим ударным инструментом или обкаткой роликом позволяют формировать благоприятную микроструктуру и зависящие от нее характеристики прочности и пластичности материала, а также минимизировать неоднородность распределения остаточных напряжений и искажения возведенной конструкции.

С целью исследования закономерностей формирования напряженно-деформированного состояния конструкции, возводимой проволоочно-дуговой наплавкой с послойной точечной обработкой давлением авторы работ [6, 7] предложили рассматривать эталонную конструкцию, состоящую из стенки, наплавленных на подложку — плиту, закрепленную на жесткой горизонтальной поверхности. Ими были исследованы прогиб и распределение по высоте стенки главных компонент остаточных напряжений свободной конструкции для алюминиевого, титанового, никелевого сплавов и мягкой стали, наплавленных на подложку, с послойной обкаткой роликом и без нее. Обнаружено, что послойная точечная обработка давлением позволяет в несколько раз уменьшить искажение конструкции; при этом изменение распределения остаточных напряжений остается довольно замысловатым. В настоящей работе моделируются результаты экспериментального исследования искривления освобожденной от закрепления подложки, на которую проволокой из алюминийево-магниевого сплава

Дудин Дмитрий Сергеевич

e-mail: dmitryovj@yandex.ru, инженер, Институт механики сплошных сред УрО РАН, научный сотрудник, г. Пермь, Россия

Келлер Илья Эрнстович

e-mail: kie@icmm.ru, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Пермяков Глеб Львович

e-mail: gleb.permyakov@yandex.ru, кандидат технических наук, научный сотрудник, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия.

Трушников Дмитрий Николаевич

e-mail: trdimitr@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, проректор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия.

АМг5 была наплавлена стенка, в том числе — с послойной обкаткой роликом с двумя величинами усилия на инструмент [7]. Для исследования закономерностей эволюции искажений конструкции и остаточных напряжений при наплавке стенки на подложку и роли в этой эволюции послойной обработки давлением в зависимости от усилия на инструмент была построена несвязанная численная модель, отдельно описывающая тепловые и механические процессы. Для учета специфики механики растущего тела рассмотрена упрощенная балочно-стержневая модель рассматриваемой конструкции, которая позволяет также учитывать послойную обработку давлением с использованием решения задачи для однократной обработки предварительно напряженной стенки. Представлены результаты расчета с использованием построенной модели выполненных в [7] экспериментов, позволяющие оценить приемлемость/неприемлемость несвязанной постановки задачи и гипотез упругой балочно-стержневой модели для описания возведения конечной стенки на подложке.

2. Данные эксперимента

На подложку — прямоугольную пластину $310 \times 65 \times 6,5$ мм, изготовленную из алюминиевого сплава 6082 Т6, прикрепленную к горизонтальному столу автоматической установки гибридного аддитивного производства в восемь болтами, наплавлялась стенка, состоящая из девяти-восемнадцати слоев материала. Использовалась проволока ER2319 диаметром 1,2 мм и технология холодного переноса металла с наплавкой слоя по прямолинейной траектории. Слои длиной 250 мм наплавлялись со скоростью 10 мм/с поочередно в реверсивных направлениях с паузами между проходами наплавки 45 с, в течение которых образец охлаждался практически до комнатной температуры. После наплавки каждого слоя и выдержки верхняя поверхность образца обкатывалась широким цилиндрическим роликом диаметром 100 мм. В табл. 1 приведены геометрические размеры возведенной стенки для каждого значения усилия прижима инструмента при обкатке роликом. Как можно увидеть из этих данных, значения высоты возведенной стенки для всех четырех случаев были близки между собой (для этого и подбирались количества слоев в каждом случае), но ширина стенки за счет пластических деформаций материала при этом существенно различались, достигая 100%. Прогиб освобожденной конструкции на базе 200 мм, определенный согласно методике [6, 7], также приведен в табл. 1.

3. Балочно-стержневая модель наращиваемого образца

Для оценки прогиба наращиваемого линейного сегмента предлагается балочно-стержневая модель, в рамках которой последовательно решаются задачи упругого

Параметр	Обозначение	Без об- катки	Обкатка 14 кН	Обкатка 28 кН	Обкатка 42 кН
Количество слоев	n	9	10	14	18
Высота стенки, мм	h	24,3	23,5	23,3	24,0
Высота слоя, мм	h_*	2,70	2,35	1,66	1,33
Ширина стенки, мм	b	5,5	5,9	8,3	10,3
Прогиб, мм	w	1,75	0,60	0,27	0,27

Таблица 1. Размеры поперечного сечения возведенной стенки и прогиб конструкции

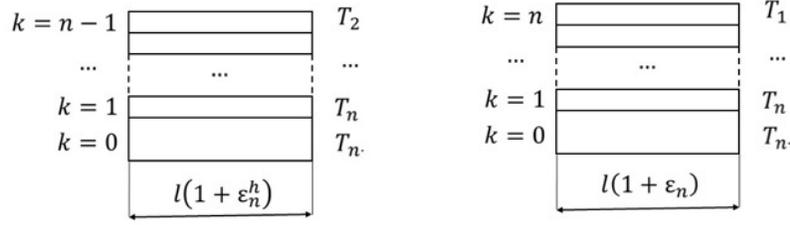


Рис. 1. Схемы пакетов стержней для первой и второй задач.

равновесия n наплавленных слоёв и подложки а) как стержней и б) как балок. Полагается, что после наплавки слоя профиль температуры сдвигается в сторону свободной границы на величину толщины слоя h . Профиль температуры описывается рядом T_i , $i = 1, \dots, n + 1$, значения которого приписываются слоям. Далее индексы означают: i — номер значения в ряде температур, начиная от верхнего слоя $i = 1$ до подложки $i = n + 1$, k — номер слоя, начиная от подложки $k = 0$ до верхнего слоя $k = n$. На первом этапе слои полагаются стержнями. Обозначим за

$$\epsilon_i^t = \alpha(T_i - T_{amb}) - \epsilon_i^p, \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (1)$$

эффективные температурные деформации стержня длиной l , где T_{amb} — температура окружающей среды, а ϵ_i^p — пластические деформации, возникающие при охлаждении стержня. Пусть также ϵ^p — пластические деформации за счет обработки давлением верхнего стержня, тогда деформация пакета стержней, включающего подложку и n наплавленных слоев, равна

$$\epsilon_n = \frac{F/f \epsilon_{n+1}^t + \sum_{j=1}^n \epsilon_j^t + \sum_{j=1}^n \epsilon_j^h + n \epsilon^p}{n + F/f}, \quad n \geq 1, \quad (2)$$

$$\epsilon_0^h = 0, \quad \epsilon_1^h = \epsilon_2^t, \quad \epsilon_1^h = \frac{F/f \epsilon_{n+1}^t + \sum_{j=2}^n \epsilon_j^t + \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j^h + (n-1) \epsilon^p}{n-1 + F/f}, \quad n \geq 2, \quad (3)$$

где F и f — площади поперечного сечения подложки и слоя, ϵ_k^h , $k = 0, \dots, n$ — температурные деформации стержней в пакете, состоящем из подложки и $n-1$ слоёв, вызванные температурами T_i , $i = 2, \dots, n + 1$.

Деформацию ϵ_n также можно получить как результат решения задачи равновесия пакета упругих стержней с собственными деформациями

$$\epsilon_{0,n}^{eig} = \epsilon_{n+1}^h, \quad \epsilon_{k,n}^{eig} = \epsilon_k^h + \epsilon_{n-k+1}^t + \epsilon^p, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где $\epsilon_{0,n}^{eig}$ и $\epsilon_{k,n}^{eig}$ — собственные деформации подложки и k -ого слоя после наплавки n слоёв. Пластические деформации ϵ^p за счет послойной обработки давлением также учтены в (4).

Выражения (2),(3) были получены при последовательном решении двух задач (рис. 1) для каждого значения $n \geq 1$:

1. Вычисление деформаций ϵ_n^h из системы уравнений $\sum_{k=0}^{n-1} P_{k,n}^h = 0$, где $P_{0,n}^h = EF(\epsilon_n^h - \epsilon_{n+1}^t)$, $P_{k,n}^h = Ef(\epsilon_n^h - (\epsilon_k^h + \epsilon_{n-k+1}^t + \epsilon^p))$, $k = 1, \dots, n-1$.

2. Присоединение следующего слоя длины $l(1 + \epsilon_n^h)$ с температурой T_1 и охлаждение до температуры T_{amb} . Деформации пакета ϵ_n определяются из системы уравнений

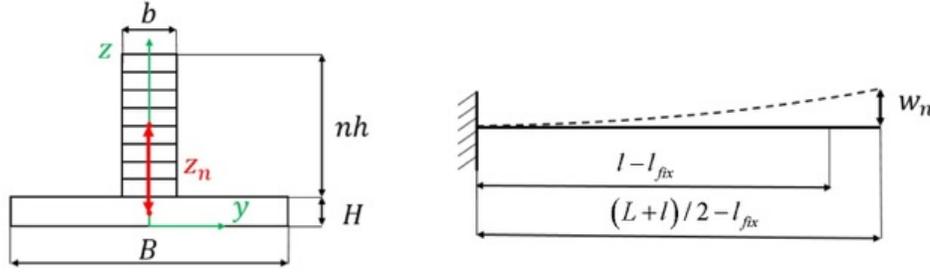


Рис. 2. Схема образца как пакета балок.

$\sum_{k=0}^n P_{k,n} = 0$, where $P_{0,n} = EF(\epsilon_n - \epsilon_{n+1}^t)$, $P_{k,n} = Ef(\epsilon_n - (\epsilon_k^h + \epsilon_{n-k+1}^t + \epsilon^p))$, $k = 1, \dots, n$.

При $n = 1$ на первом этапе из уравнений $P_{0,1}^h = EF(\epsilon_1^h - \epsilon_2^t)$, $P_{0,1}^h = 0$ находим $\epsilon_1^h = \epsilon_2^t$, на втором из уравнений $P_{0,1}^h = EF(\epsilon_1 - \epsilon_2^t)$, $P_{1,1} = Ef(\epsilon_1 - (\epsilon_1^h + \epsilon_1^t + \epsilon^p))$, $P_{0,1} + P_{1,1} = 0$ находим ϵ_1 . Задачи для последующих n решаются с учётом результатов решения предыдущих, из которых определены значения ϵ_k^h , $k = 1, \dots, n - 1$.

Усилия в стержнях определяются выражениями

$$P_{0,n} = E \frac{\sum_{j=1}^n \epsilon_{j,n}^{eig} - n\epsilon_{0,n}^{eig}}{n/F + 1/f}, \quad P_{1,1} = E \frac{\epsilon_{0,1}^{eig} - \epsilon_{1,1}^{eig}}{1/F + 1/f}, \quad (5)$$

$$P_{k,n} = E \frac{\epsilon_{0,n}^{eig} - \epsilon_{k,n}^{eig} + f/F(\sum_{j=1}^n \epsilon_{j,n}^{eig} - n\epsilon_{k,n}^{eig})}{n/F + 1/f}, \quad (6)$$

следующими из решения системы $P_{0,n} = EF(\epsilon_n - \epsilon_{0,n}^{eig})$, $P_{1,n} = Ef(\epsilon_n - \epsilon_{1,n}^{eig})$, \dots , $P_{k,n} = Ef(\epsilon_n - \epsilon_{k,n}^{eig})$, $k = 0, \dots, n$, $\sum_{j=0}^n P_{j,n} = 0$.

В частном случае, при охлаждении стенки, мгновенно появившейся с неоднородным полем температуры по высоте, выражения (2), (3) с $\epsilon_{k,n}^h = 0$, $k = 0, \dots, n$, $\epsilon^p = 0$ примут вид

$$\epsilon_n = \frac{F/f\epsilon_{n+1}^t + \sum_{j=1}^n \epsilon_j^t}{n + F/f}, \quad n \geq 1, \quad \epsilon_{k,n}^{eig} = \epsilon_{n-k+1}^t, \quad 0 = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Этот случай переоценивает неоднородность распределения собственных деформаций по сравнению со случаем последовательного наращивания тела и не будет рассматриваться далее.

По известным продольным усилиям P_n^k , $k = 0, \dots, n$ определяются величины прогиба образца, который полагается балкой Бернулли-Эйлера. Выражение для стрелы прогиба w_n подложки с n слоями как балки имеет вид

$$w_n = \frac{(l - l_{fix})(L - l_{fix})}{2EJ_n} M_n, \quad (8)$$

$$J_n = \frac{b(nh)^3}{12} + bnh \left(\frac{H + nh}{2} - z_n \right)^2 + \frac{BH^3}{12} + BH z_n^2, \quad z_n = \frac{bnh(H + nh)}{2(BH + bnh)}, \quad (9)$$

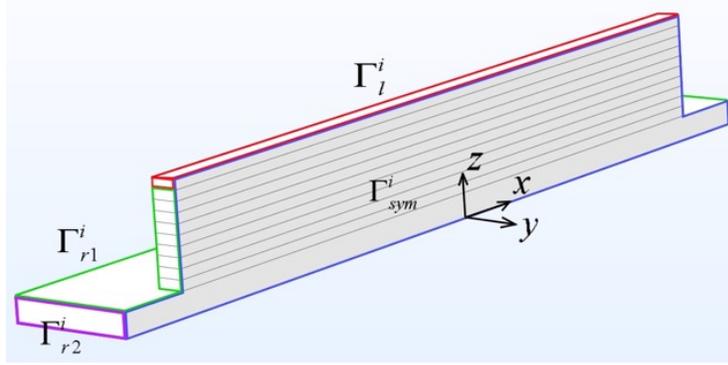


Рис. 3. Геометрическая модель образца.

$$M_n = \left(2P_{0,n}z_n - h \sum_{j=1}^n (2k-1)P_{j,n} - (H-2z_n) \sum_{j=1}^n (2k-1)P_{j,n} \right) \quad (10)$$

где M_n и J_n — изгибающий момент и момент инерции поперечного сечения, z_n — расстояние от центра масс подложки до центра масс n наплавленных слоев, l_{fix} — расстояние от левого торца стенки до места закрепления (рис. 2).

Для более корректной оценки прогиба образца и распределения остаточных напряжений по высоте стенки необходимо учитывать неупругие деформации и неоднородность распределения напряжений и деформаций по длине образца. Наиболее близкие теоретические работы [8–12] по механике поверхностно наращиваемого тела также требуют адаптации к рассматриваемой здесь задаче. Для исследования особенностей задачи наращивания стенки на подложку, простейшей с точки зрения эксперимента, далее эта задача решается численно. В качестве интегрального показателя соответствия расчета эксперименту будет рассматриваться прогиб конструкции. Распределение остаточных напряжений будет анализироваться в другой работе.

4. Моделирование наплавки стенки на подложку

Для моделирования тепловых процессов при многослойной проволочно-дуговой наплавке реализован следующий алгоритм. По мере наплавки очередного слоя постепенно активизируются области геометрической модели стенки (рис. 3). Для этого коэффициент теплопроводности материала стенки, в начале процесса тождественно равный нулю, принимает ненулевое значение для объемов, через которые прошёл или в которых находится источник теплоты. Последний локализован в объеме $\Omega_*^i(t)$ прямоугольного параллелепипеда с размерами $l_* \times b/2 \times h$ мм вдоль декартовых координат $x \times y \times z$, движущегося со скоростью $v_x = 10$ мм/с вдоль наплавляемого слоя. При наплавке i -го слоя в этом слое коэффициент теплопроводности равен

$$\lambda(\mathbf{x}, t) \equiv \lambda, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^i \cap \{-(l+l_*)/2 + v_x t \leq x \leq -(l-l_*)/2 + v_x t\}, \quad (11)$$

где \mathbf{x} — радиус-вектор точки, Ω_i^i — геометрическая область, соответствующая i -ому слою, а t — время, отсчитываемое с начала наплавки этого слоя.

В области источника теплоты в i -ом наплавляемом слое его удельная мощность задаётся выражением

$$q_i(\mathbf{x}, t) \equiv q(T(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in \Omega_*^i(t) \quad (12)$$

где T — абсолютная температура,

$$q(T) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{T - \mu_T}{\sqrt{2\sigma_T^2}} \right) \right) q_*, \quad (13)$$

а величина q_* подбирается так, чтобы максимальное значение температуры расплава в объеме $\Omega_*^i(t)$ равнялась температуре солидуса T_{sol} . Таким образом, задача наплавки слоя сводится к задаче нагрева слоя движущимся источником при соответствующем изменении со временем профиля коэффициента теплопроводности вдоль слоя.

Задача теплопроводности численно реализована в пакете Comsol Multiphysics с применением неявной схемы интегрирования с шагом по времени 0,1 с. Расчётная область разбита равномерной сеткой тетраэдральных квадратичных конечных элементов. В результате исследования сходимости результатов расчёта по размеру конечных элементов выбрана дискретизация подложки конечными элементами размером 3,6-20 мм, стенки — 1,5-2 мм. Для материала стенки взяты тепловые константы алюминиевого сплава АМг5, для пластины подложки — алюминиевого сплава, использованного в [7]. Для краткости записи уравнений используются одинаковые обозначения плотности массы ρ , коэффициента теплопроводности λ и удельной теплоёмкости c_p для обоих материалов, но имея в виду их различие в областях расчётной области. Численно рассчитывались результаты наплавки 9, 10 и 18-слойных стенок из табл. 2, в качестве размеров которых взяты значения, соответствующие пластически деформированной конфигурации, приведенные в этой таблице. Поле температур, возникающее при наплавке i -го слоя, находилось при решении нестационарной задачи теплопроводности

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_l \nabla T) + q_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_l^i, \quad (14)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega_r^i, \quad (15)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, q_i — удельная мощность источника тепла для i -го наплавляемого слоя, данная (11)-(13), Ω_r^i — внешняя область тела при наплавке i -го слоя, с граничными и начальными условиями

$$-\lambda_l \mathbf{n} \cdot \nabla T = \epsilon_T \sigma_{SB} (T^4 - T_0^4) + k(T - T_0), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l^i, \quad (16)$$

$$-\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T = \epsilon_T \sigma_{SB} (T^4 - T_0^4) + k(T - T_0), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{r1}^i, \quad (17)$$

$$\lambda_l \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{r2}^i \cup \Gamma_{sym}^i, \quad (18)$$

$$T(t=0) \equiv T_{rel}^i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i, \quad (19)$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе, Γ_l^i — поверхность i -го наплавляемого слоя, Γ_r^i — поверхность, соответствующая внешней области тела при наплавке i -го слоя, $\Omega^i = \Omega_l^i \cup \Omega_r^i$, T_{rel}^i — однородное распределение температуры после наплавки $(i-1)$ -го слоя и выдержки. Граничные условия (16), (17) есть условия радиационного и конвективного теплообмена с окружающей средой, (18) — условие тепловой изоляции для Γ_{r2}^i и условие симметрии для Γ_{sym}^i . На границе областей Ω_l^i и Ω_r^i обеспечивается условие непрерывности по температуре. Остальные обозначения в (14)-(19) и значения соответствующих физических констант и параметров модели теплопроводности приведены в табл. 2.

После наплавки очередного слоя решается нестационарная задача теплопроводности для описания релаксации образовавшегося поля температуры

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega^i, \quad (20)$$

$$-\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T = \epsilon_T \sigma_{SB} (T^4 - T_{amb}^4) + k(T - T_{amb}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1^i, \quad (21)$$

$$\lambda_l \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2^i \cup \Gamma_{sym}^i, \quad (22)$$

$$T(t = 0) = T_{cld}^i, \quad \mathbf{x} \in \Omega^i, \quad (23)$$

в течение $\tau = 45$ с, за которое температурное поле становится практически равномерным, где T_{cld}^i — распределение температуры в образце сразу после наплавки слоя. Получившееся распределение температуры передаётся в качестве начального условия для решения задачи теплопроводности при наплавке следующего слоя. Задачи (14)-(19) и (20)-(23) решаются последовательно для каждого слоя с учётом изменения начальных условий при добавлении нового слоя.

Эволюция распределения температуры в различные моменты времени при наплавке 10-го слоя показана на рис. 4 и рис. 5 (б). На рис. 5, а приведены распределения температуры по высоте стенки вдоль линии пересечения плоскостей симметрии образца в зависимости от количества наплавленных слоев. Последний позволяет принять гипотезу, что, начиная приблизительно с 5-го слоя, распределение температуры вдоль оси z практически становится стационарным в системе координат, связанной с границей наплавленного слоя. При этом данное распределение оказывается более расплывчатым по сравнению с аналогичным профилем для аустенитной нержавеющей

Константа	Обозначение	Размерность	Значение
Температура солидуса АМг5	T_{sol}	К	823
Температура окружающей среды	T_{amb}	К	293
Удельная теплоемкость АМг5	c_p	Дж/кг/К	922
Удельная теплоемкость пластины из алюминиевого сплава АlMgSi	c_p	Дж/кг/К	892
Плотность массы АМг5	ρ	кг/м ³	2640
Плотность массы пластины из сплава АlMgSi	ρ	кг/м ³	2700
Коэффициент теплопроводности АМг5	λ	Вт/м/К	122
Коэффициент теплопроводности пластины из алюминиевого сплава АlMgSi	λ	Вт/м/К	177
Коэффициент теплового излучения	ϵ_T	кг/м ³	0,33
Коэффициент теплопередачи	k	Вт/м ² /К ²	15
Постоянная Стефана – Больцмана	σ_{SB}	Вт/м ² /К ²	$5,67 \cdot 10^{-8}$
Удельная мощность источника	q_*	Вт/м ³	$8 \cdot 10^9$
Продольный размер ванны расплава	l_*	мм	
9-слойная стенка			6,5
10-слойная стенка			7,0
18-слойная стенка			12,0
Коэффициент регулятора	μ_T	К	823
Коэффициент регулятора	σ_T	К	20

Таблица 2. Константы модели теплопроводности

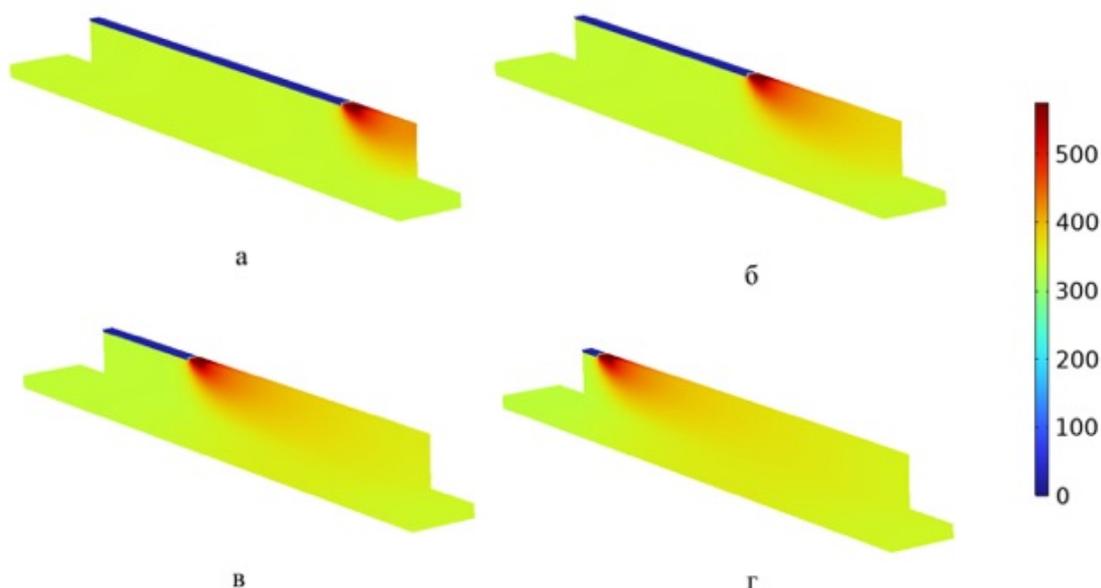


Рис. 4. Эволюция распределения температуры в различные моменты времени при наплавке 18-го слоя.

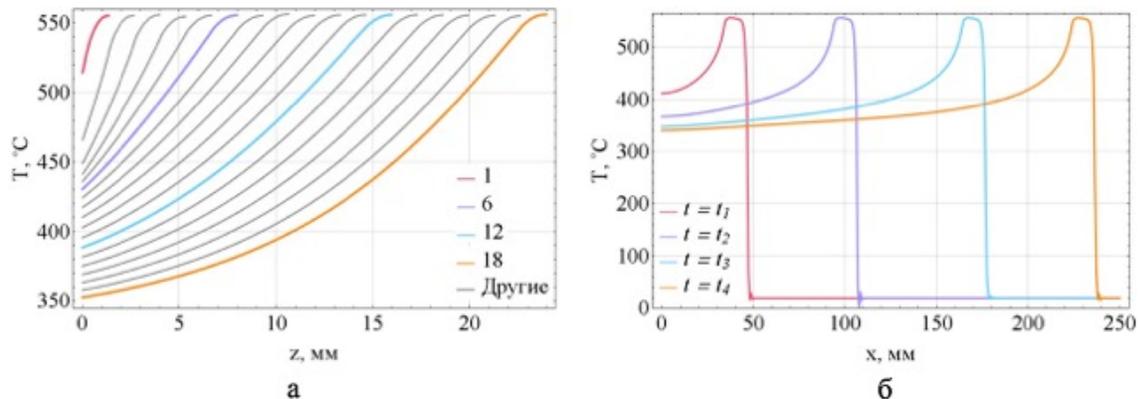


Рис. 5. Профили температуры: а) вдоль высоты стенки, б) вдоль длины стенки при наплавке последнего слоя.

стали [13] вследствие значительно более высокой теплопроводности рассматриваемого алюминиевого сплава.

5. Напряженно-деформированное состояние образца после выдержки

Для описания формирования остаточных напряжений и собственных деформаций в стенке на подложке во время выдержки в пакете программ COMSOL Multiphysics была численно реализована модель термоупругопластического поведения образца. Была

использована стандартная модель больших пластических и малых упругих деформаций металлов в терминах текущего лагранжева подхода в скоростях. В модели принята аддитивность упругих, температурных и пластических тензоров деформаций скорости, при этом упругий тензор связывается линейно с производной Яуманна тензора напряжений Кирхгоффа, а пластический тензор $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ с тензором напряжений Коши σ_{ij} — законом пластического течения, ассоциированным с критерием текучести Мизеса

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \phi = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_u^2} - 1 = 0, \quad (24)$$

где $\sigma_M = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}/3\delta_{ij}$ — компоненты девиатора напряжений, а σ_u — предел текучести при одноосном растяжении, для которого принят закон изотропного упрочнения Джонсона — Кука в форме

$$\sigma_u = \left(A \left(1 + C \ln \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_*} \right) + B \left(1 + D \ln \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_*} \right) \epsilon_p^{n+\alpha\dot{\epsilon}_p} \right) k_u(T) \quad (25)$$

где $\epsilon_p = \int_0^t \dot{\epsilon}_p dt$ — накопленные пластические деформации, $\dot{\epsilon}_p = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}/3$ — интенсивность скоростей пластических деформаций, $\dot{\epsilon}_* = 1 \text{ s}^{-1}$ — размерный параметр.

В модели были приняты значения констант закона деформационного упрочнения (25) для алюминиевого сплава АМг5 [14], который слабо отличается от алюминиевого сплава, использованного в экспериментах [1], [7]. Зависимости температурного разупрочнения $\sigma_u(T) = \sigma_0 k_\sigma(T)$ в (25) и модуля Юнга от температуры $E(T) = E_0 k_E(T)$ были взяты в [15]. Соответствующие материальные константы и функции приведены в табл. 3.

После релаксации в течение $\tau = 45 \text{ с}$ распределение температуры $T(x, y, z) = T_{cd}^i(x, y, z)$ в образце сразу после наплавки слоя становится практически однородным $T(x, y, z) \equiv T_{rel}^i$ (рис.7, а) и, таким образом, создает неоднородное поле собственных деформаций

$$\epsilon_{ij}^{eig} = \alpha(T_{cd}^i(x, y, z) - T_{rel}^i)\delta_{ij}. \quad (26)$$

Решается термоупругопластическая задача формирования распределения остаточных напряжений и пластических деформаций в конструкции, вызванных собственными тепловыми деформациями. На рис. 6 показаны распределения x -компоненты пластических деформаций, а на рис. 7 а) – в) и рис. 8, а) – в) — распределения накопленных пластических деформаций и x -компоненты остаточных напряжений после наплавки 9-, 10- и 18-слойной стенки с размерами, приведенными в табл. 2, на подложку и 45-секундной релаксации температурного поля во время технологической выдержки. Вблизи верхней кромки стенки образуется локализованная область сжимающих пластических деформаций и сравнительно более распределенная область растягивающих остаточных напряжений. Следует обратить внимание на то, что максимальные продольные пластические деформации 0,5% практически совпадают с максимальными величинами накопленных пластических деформаций, а также на то, что пластическое течение практически не затронуло отрезки вблизи концов стенки суммарной длиной около 20% вследствие того, что инструмент не стали к ним приближать для стабильности процесса. Следует также отметить уменьшение максимальных напряжений и деформаций на верхней кромке стенки примерно на 20% в 18-слойной стенке по сравнению с 9-слойной из-за практически двукратного увеличения ширины стенки.

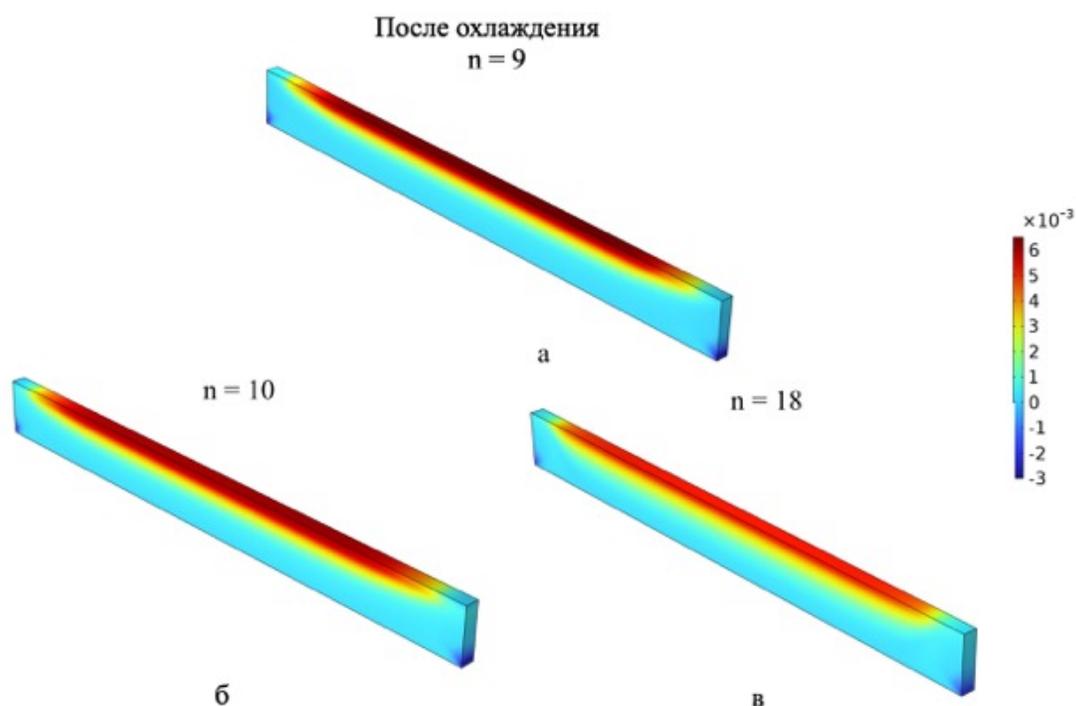


Рис. 6. Пластические продольные деформации после охлаждения заготовки.

6. Моделирование обкатки роликом

Для описания обкатки широким цилиндрическим роликом [7] стенки в пакете программ LS-DYNA была реализована термоупругопластическая модель материала, описанная в разделе 5 и соответствующая стандартному материалу MAT_098 [16]. На рис. 7 (г, д) и рис. 8 (г, д) приведены поля накопленных пластических деформаций и x -компоненты остаточных напряжений после однократной обкатки роликом 10- и 18-слойной стенок с учетом их предварительного напряженно-деформированного и упрочненного состояния после наплавки и 45-секундной релаксации температурного

Константа	Обозначение	Размерность	Значение
Постоянные закона упрочнения [14]	A	МПа	124
	C	–	0,056
	B	МПа	540
	n	–	0,55
Модуль Юнга при 20°C	E_0	ГПа	71
Коэффициент Пуассона	ν	–	0,3
Плотность материала	ρ	кг/м ³	2640
Коэффициент линейного температурного расширения материала	α	С ⁻¹	$25 \cdot 10^{-6}$
Температура окружающей среды	T_{amb}	К	293

Таблица 3. Константы модели термоупругопластичности для АМг5

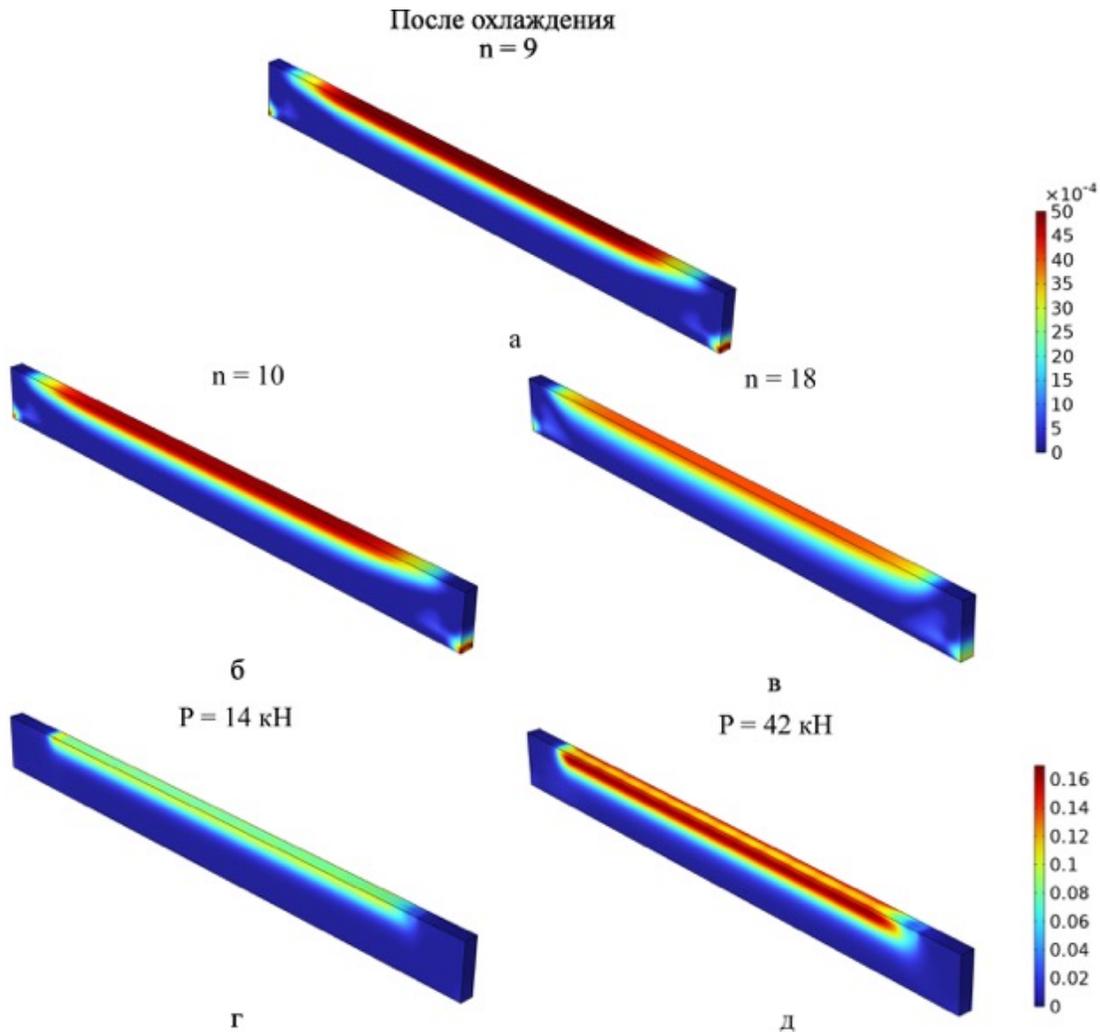


Рис. 7. Накопленные пластические деформации (а – в) после охлаждения заготовки, (г, д) после охлаждения и обкатки роликом.

поля. Эти поля были импортированы из предыдущего этапа решения задачи в пакете программ COMSOL Multiphysics. Однократная обкатка роликом ведет к развитию растягивающей продольной пластической деформации, неоднородно распределенной по высоте стенки. В результате сжимающие собственные деформации, локализованные вблизи этой поверхности, уступают место растягивающим, уменьшая источник продольного изгиба конструкции при ее освобождении рис. 9. Известно, что в точечных схемах обработки давлением линейного сегмента поперечные деформации по меньшей мере на порядок превышают продольные, а обработка образца без начальных напряжений может вызвать сжимающую или растягивающую продольную пластическую деформацию вблизи поверхности [17,18]. В рассматриваемом случае можно убедиться в аналогичных порядках вклада поперечных компонент пластических деформаций вследствие однократной обкатки стенки роликом, сравнивая максимальные

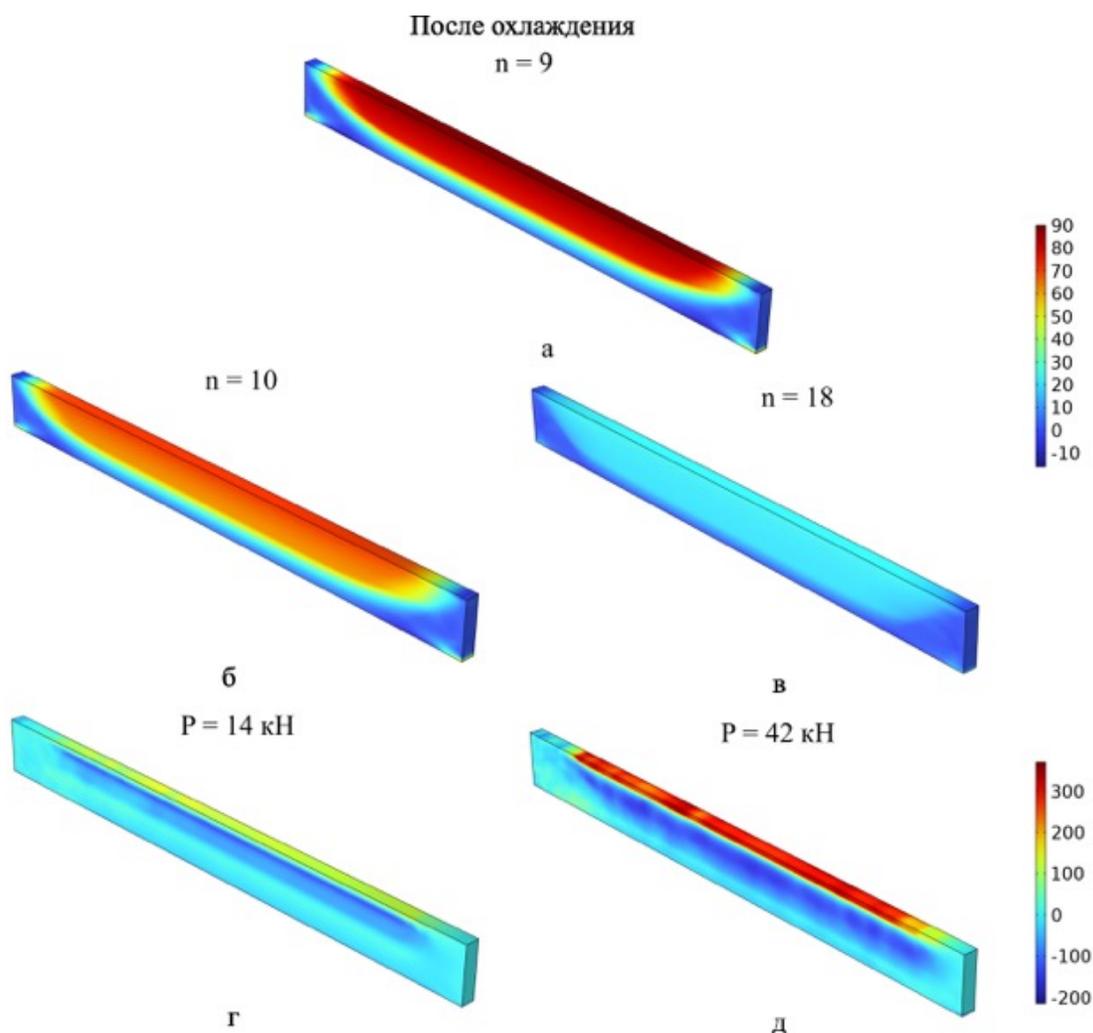


Рис. 8. Продольные напряжения (а – в) после охлаждения заготовки, (г, д) после охлаждения и обкатки роликом.

значения на графиках (а – в) и (г, д) рис. 7. Распределения продольных пластических деформаций $\epsilon_x^{p,rolling}$, приведенные на рис. 9, имеют замысловатый вид, отличающийся от аналогичных распределений, наведенных проковкой [13, 17]. Вблизи поверхности, до глубины 2 мм, продольная компонента исчезает либо имеет сжимающий характер, но на глубине 5-15 мм она становится растягивающей. Максимальные значения растягивающих продольных деформаций после однократной обкатки роликом приведены в табл. 4. Вызванные этими собственными деформациями распределения продольных остаточных напряжений по высоте стенки дважды меняют свой знак, переходя от растягивающих к сжимающим, и наоборот, что отличается от монотонного изменения этих напряжений по высоте в образцах, наплавленных без проковки, рис. 8. Эту качественную особенность можно подтвердить экспериментально — способом, предложенным в [18].

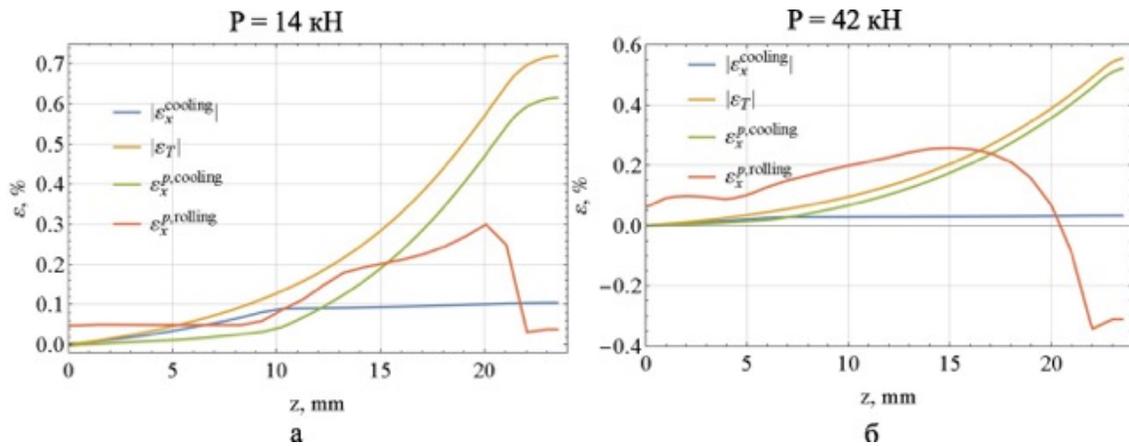


Рис. 9. Профили составляющих продольных деформаций по высоте стенки: ϵ_T — температурные (26), $\epsilon_x^{p,cooling}$ — пластические при охлаждении, $\epsilon_x^{cooling} = \epsilon_T - \epsilon_x^{p,cooling}$ — эффективные температурные (1), $\epsilon_x^{p,rolling}$ — пластические при обкатке после охлаждения.

7. Расчет искажений освобожденного образца

Прогиб конструкции, освобожденной от закрепления, при комнатной температуре, был рассчитан численно в пакете COMSOL Multiphysics в упруго-пластической постановке, приведенной в разделе 5. На рис. 10 показаны поле продольной компоненты напряжений и продольный изгиб освобожденной конструкции после наплавки 9,10 и 18 слоев и охлаждения до комнатной температуры (а – в) и дополнительного этапа однократной обкатки роликом двух последних образцов. Образец жестко закреплялся на площадке справа, которую можно увидеть на рис. 10, размер которой l_{fix} дан в табл. 5. В табл. 4 сведены экспериментальные и численные значения прогибов. Можно заметить, что вычисленное значение прогиба образца без проковки на 29% превышает экспериментальное. Однако при однократной обкатке роликом вычисленные значения прогиба образцов в обоих случаях имеют противоположный знак по сравнению с экспериментальными значениями. То есть, согласно модели, воздействие обкаткой роликом оказалось избыточным.

На рис. 11 показаны результаты расчета прогиба освобожденного образца в зависимости от количества нанесенных слоев в соответствии с балочно-стержневой моделью.

Переменная, задача, модель	Единица	9 слоев, без обкатки	10 слоев, обкатка 14 кН	18 слоев, обкатка 42 кН
w , эксперимент	мм	1,75	0,60	0,27
w , без обкатки, 3D-модель	мм	2,25	1,94	0,82
w , без обкатки, балочная модель	мм	1,77	1,60	1,72
w , обкатка верхнего слоя, 3D-модель	мм	–	-0,74	-1,86
w , послынная обкатка, балочная модель	мм	–	-3,0	-2,8
ϵ^p , 3D-модель	%	–	0,30	0,25
ϵ^p , балочная модель, подгонка	%	–	0,065	0,080

Таблица 4. Результаты расчетов

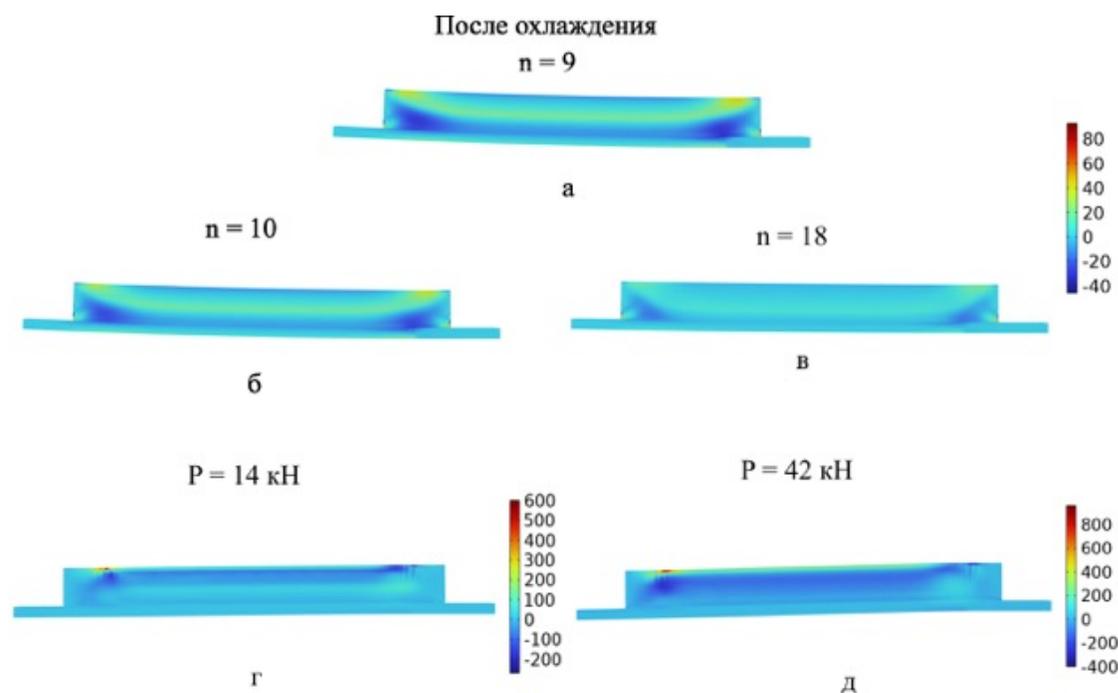


Рис. 10. Продольные напряжения после освобождения образца (а – в) после охлаждения, (г, д) после охлаждения и однократной обкатки роликом.

Были использованы данные табл. 5. Поскольку пластические деформации, вызванные однократной проковкой стенки, не сосредотачиваются ни в верхнем слое, ни в нескольких примыкающих к верхней границе слоях (рис. 9), а распределены замысловатым образом, формулы раздела 3 были изменены соответствующим образом. Результаты, представленные на рис. 11 соответствовали случаю, когда пластические деформации, вызванные однократной проковкой стенки, сосредоточены во втором слое, считая от верхнего, а их амплитуды (табл. 4) соответствовали максимальной растягивающей деформации на рис. 9. Прогибы освобожденной конструкции, рассчитанные согласно балочно-стержневой модели (табл. 4) оказались того же знака, как и определенные по численной модели, но еще большего (в 1,5-4 раза) значения. Экспериментальных значений прогибов можно добиться, если уменьшить амплитуды пластических деформаций ϵ^p до значений, приведенных в табл. 4.

Зависимости на рис. 11 позволяют понять, как изменяется прогиб и средняя продольная деформация образца с учетом и без учета пластических деформаций послойной обкатки в зависимости от количества наплавленных слоев, а также распределение собственных напряжений по высоте стенки на подложке. Заслуживает внимания немонотонность зависимости прогиба образца от количества наплавленных слоев, которая достигает максимума при наплавке 4-6 слоев. Разрыв на кривых распределения собственных деформаций с учетом и без учета пластических деформаций послойной обкатки связан с П-образной формой профиля температурных деформаций, которая принята из соображений простоты. Следует отметить, что эта особенность не проявляется на зависимости для прогиба образца. На рис. 11 также приведены результаты

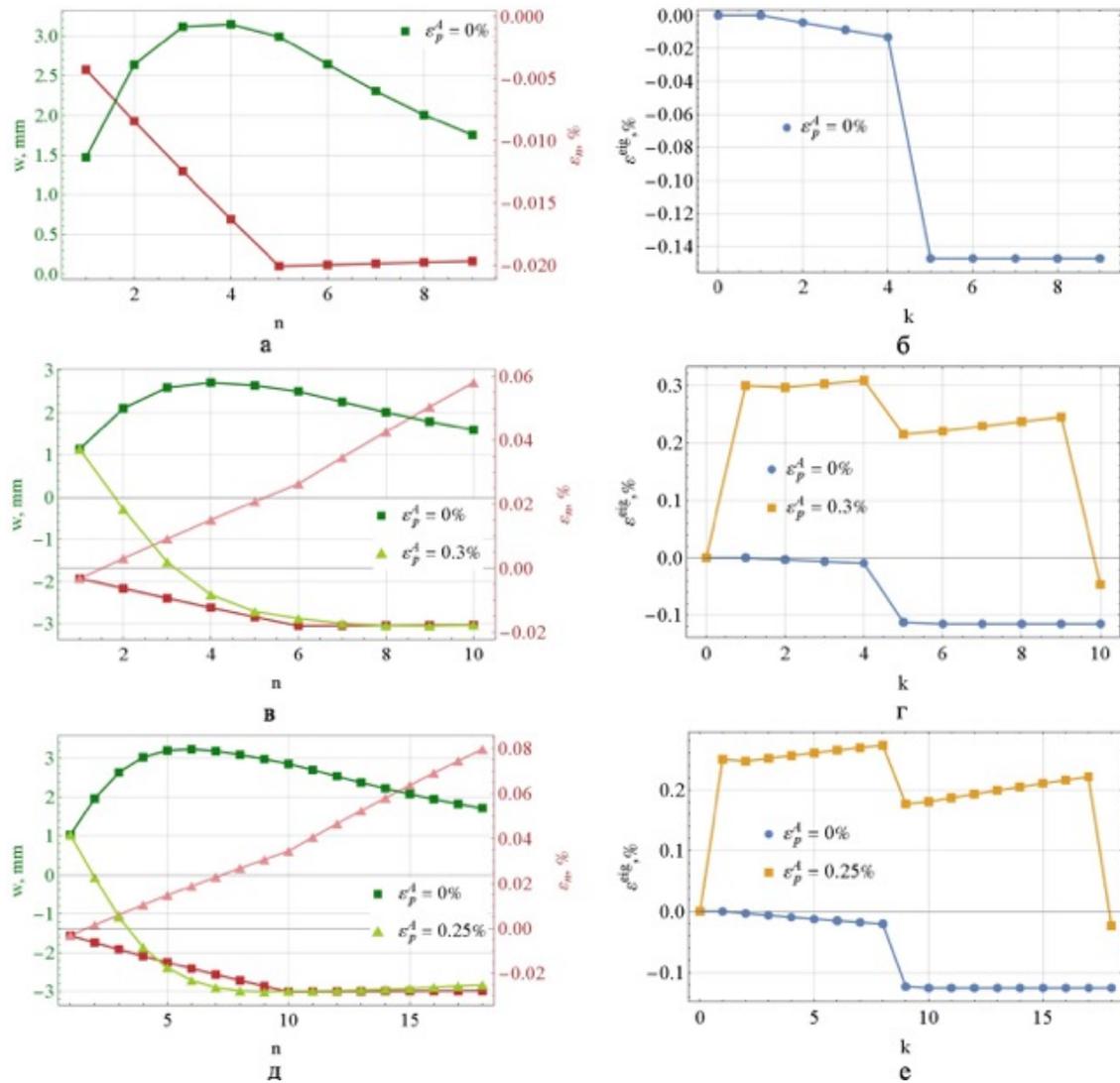


Рис. 11. Прогиб и продольная деформация пакета в зависимости от числа наплавленных слоев (а, в, д) и распределение собственных деформаций с учетом и без учета пластических деформаций послойной обкатки роликом (б, г, е).

численного расчета всех значений в пакете COMSOL Multiphysics в упругой постановке, которые позволяют оценить точность балочно-стержневой модели рассматриваемой конструкции.

8. Заключение

Для анализа искажений металлической конструкции, возведенной аддитивным производством с послойной обработкой давлением, и распределения в ней остаточных напряжений, предпринято численное воспроизведение результатов экспериментов с образцами в виде стенки, наплавленной на закрепленную подложку [6, 7]. Построена и верифицирована численная модель процесса, включающего ряд несвязанных

задач: наплавки стенки и частичного остывания образца (тепловая задача), изменения напряжений и деформаций в образце при его остывании, изменения напряжений и деформаций в образце при обкатке верхней кромки стенки роликом (термоупругопластические задачи) и освобождении его от закреплений (упругопластическая задача). Модель предполагается использовать для выбора рациональных параметров технологического процесса, в особенности — времени релаксации после наплавки слоя и интенсивности послышной обработки давлением, для минимизации искажения конструкции и неоднородности распределения остаточных напряжений. Результаты расчета прогибов конструкции, возведенной без учета обкатки роликом, удовлетворительно согласуются с экспериментом. Однако моделирование однократной обкатки роликом вызывает избыточные растягивающие пластические деформации, искривляющие образец в обратную сторону, тогда как в эксперименте такие воздействия просто исправляли кривизну образца. Вероятно, при послышной обработке давлением градиент пластических деформаций по высоте стенки не является настолько большим, как при однократной обкатке всей стенки, но необходимость учета связанности существенно усложняет задачу.

В работе предложена и верифицирована упругая балочно-стержневая модель, позволяющая оценивать изменение ряда характеристик образца в зависимости от количества наплавленных слоев с учетом пластических деформаций послышной обработки и особенностей механики наращиваемого тела. Для образца в виде стенки на подложке исследуются прогиб, средняя продольная деформация и распределения собственных деформаций и остаточных напряжений по высоте стенки.

Постоянная	Обозначение	Размерность	Слоев, n	Значение
Модуль упругости	E	ГПа	—	71
Ширина подложки	B	мм	—	65
Толщина подложки	H	мм	—	6,35
Длина подложки	L	мм	—	310
Ширина слоя	b	мм	9	5,5
			10	5,9
			18	10,3
Толщина слоя	h	мм	9	2,7
			10	2,35
			18	1,33
Длина слоя	l	мм	150	250
Расстояние от точки закрепления до конца стенки	l_{fix}	мм	—	25
Температурные деформации	$\epsilon_i^t, i = 1...m$ $m = 5$ $m = 6$ $m = 10$	%	9	-0,13
			10	-0,1
			18	-0,1
Температурные деформации	$\epsilon_i^t, i > m$	%	—	0
Пластические деформации обкатки	ϵ_p^A	%	9	0
			10	0,3
			18	0,25

Таблица 5. Константы балочно-стержневой модели

ЛИТЕРАТУРА

- [1] The Strengthening Effect of Inter-Layer Cold Working and Post-Deposition Heat Treatment on the Additively Manufactured Al-6.3Cu Alloy / J. Gu, J. Ding, S. Williams et al. // *Materials Science and Engineering A*. 2016. no. 651. P. 18–26.
- [2] Karunakaran K., Kapil S., Negi S. Multi-Station Multi-Axis Hybrid Layered Manufacturing System // Indian Patent no. 201821038516. 2018.
- [3] Formation of Structure and Properties of Two-Phase Ti-6Al-4V Alloy during Cold Metal Transfer Additive Deposition with Interpass Forging / Y. Shchitsyn, M. Kartashev, E. Krivosova et al. // *Materials*. 2021. no. 16 (14). p. art. 4415.
- [4] Improving VT6 Titanium-Alloy Components Produced by Multilayer Surfacing / D. Trushnikov, M. Kartashev, T. Olshanskaya et al. // *Russian Engineering Research*. 2021. no. 9 (41). P. 848–850.
- [5] Гибридные технологии и оборудование аддитивного синтеза изделий / А.В. Киричек, О.Н. Федонин, А.В. Хандожко [и др.] // *Научные технологии в машиностроении*. 2022. № 9. С. 31–38.
- [6] Study of Residual Stress and Microstructural Evolution in As-Deposited and Inter-Pass Rolled Wire Plus Arc Additively Manufactured Inconel 718 Alloy after Ageing Treatment / J. Hoennige, C. E. Seow, S. Ganguly et al. // *Material Science and Engineering A*. 2021. no. 801. p. art. 140368.
- [7] Control of residual stress and distortion in aluminium wire + arc additive manufacture with rolling / J. Hoennige, P. Colegrove, S. Ganguly et al. // *Additive Manufacturing*. 2018. no. 22. P. 775–783.
- [8] Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывного нарастающего вязкоупругого стареющего тела // *Прикладная математика и механика*. 1995. № 59 (5). С. 836–848.
- [9] Yavari A. A Geometric Theory of Growth Mechanics // *Journal of Nonlinear Sciences*. 2010. no. 20. p. 781–830.
- [10] Transient Temperature Fields in Growing Bodies Subject to Discrete and Continuous Growth Regimes / S. Lychev, A. Manzhurov, M. Shatalov et al. // *Procedia IUTAM*. 2017. no. 23. p. 120–129.
- [11] Лычев С.А., Фекри М. Остаточные напряжения в термоупругом цилиндре, возникающие в результате послойной наплавки // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2020. № 26 (3). с. 63–90.
- [12] Lychev S., Koifman K., Djuzhev N. Incompatible Deformations in Additively Fabricated Solids: Discrete and Continuous Approaches // *Symmetry*. 2021. no. 13 (2331).
- [13] Modeling residual stresses and distortions of the wall on a substrate built by wire-arc additive manufacturing / D. Dudin, I. Keller, G. Permyakov et al. // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2024. no. 1. P. 1–16.
- [14] Характеристики прочности и пластичности ряда металлических сплавов и нержавеющей сталей, созданных проволоочно-дуговой наплавкой, в широком диапазоне скоростей деформаций / Ю.В. Баяндин, Д.С. Дудин, А.В. Ильиных [и др.] // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2023. № 1. С. 33–45.
- [15] EN 1999-1-2 Eurocode 9: Design of aluminium structures. Part 1-2: Structural fire design. CEN. 2023. 61 p.
- [16] LS-DYNA® Keyword User’s Manual. Volume II. Material Models. Ver. R13. Livermore Software Technology Corporation. 2021. 1993 p.
- [17] Искажение формы, локализация пластической деформации и распределение остаточных напряжений при односторонней проковке/обкатке бруса. Применение результатов к аддитивному производству шпангоута с послойной обработкой давлением / И.Э. Келлер, А.В. Казанцев, Д.С. Дудин [и др.] // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2021. № 4. С. 434–443.
- [18] Способ определения остаточных напряжений в ребре на жестком основании / И.Э. Келлер, Д.С. Петухов, Д.С. Дудин [и др.] // *Патент на изобретение N 27977712018*. 2023.

N. K. Salikhova¹, D. S. Dudin¹, I. E. Keller¹, G. L. Permyakov², D. N. Trushnikov²

A MODEL OF DEFLECTION OF THE WALL ON A SUBSTRATE DURING WIRE-ARC SURFACING AND ITS EXPERIMENTAL CONFIRMATION FOR AN ALUMINUM ALLOY

¹ *Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia*

² *Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia*

Abstract. To study the formation of residual stresses and distortions of structures created by wire-arc surfacing, Cranfield University performed surfacing on a fixed substrate of an aluminum alloy wall, including with a layer-by-layer roll-in with a different clamping force. In this paper, the deflection values of the released structure from this experiment are reproduced numerically, for which a mathematical model is constructed. The process was presented in the form of successively solved tasks: a) thermal — surfacing of 10-20 layers of material, b) thermo-elastic-plastic — formation of eigenstrains and residual stresses due to cooling of the created structure with an inhomogeneous temperature distribution, c) thermo-elastic-plastic — rolling of a stressed workpiece at elevated temperature (the stage may be absent) and d) elastic-plastic — the structure distortion and changes in the field of residual stresses when the structure is released. It is established that tensile residual stresses are formed in the deposited wall near its upper face, and use of layer-by-layer roll-in allows to reduce longitudinal strains, distortion of the released specimen and inhomogeneity of the distribution of residual stresses by the wall height. The calculated deflection values correspond to the experimental data. A beam-rod model of the mechanics of a built-up multilayer wall has been developed, the results of which allow us to predict the evolution of the curvature of the structure and the distribution of residual stresses.

Keywords: wire-arc surfacing, layer-by-layer forging, residual stresses, distortions, experiment, mathematical model.

REFERENCES

- [1] The Strengthening Effect of Inter-Layer Cold Working and Post-Deposition Heat Treatment on the Additively Manufactured Al-6.3Cu Alloy / J. Gu, J. Ding, S. Williams et al. // *Materials Science and Engineering A*. 2016. no. 651. P. 18–26.
- [2] Karunakaran K., Kapil S., Negi S. Multi-Station Multi-Axis Hybrid Layered Manufacturing System // *Indian Patent no. 201821038516*. 2018.
- [3] Formation of Structure and Properties of Two-Phase Ti-6Al-4V Alloy during Cold Metal Transfer Additive Deposition with Interpass Forging / Y. Shchitsyn, M. Kartashev, E. Krivososova et al. // *Materials*. 2021. no. 16 (14). p. art. 4415.
- [4] Improving VT6 Titanium-Alloy Components Produced by Multilayer Surfacing / D. Trushnikov, M. Kartashev, T. Olshanskaya et al. // *Russian Engineering Research*. 2021. no. 9 (41). P. 848–850.

Salikhova Nelli Kamilyevna, Cand. Sci. Phys. & Math., Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia.

Dudin Dmitry Sergeevich, Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia.

Keller Ilya Ernstovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Associated Professor, Head of laboratory, Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia.

Permyakov Gleb Lvovich, Cand. Sci. Eng., Researcher, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia.

Trushnikov Dmitry Nikolaevich, Dr. Sci. Eng., Professor, Vice-Rector, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia.

-
- [5] Hybrid Technologies and Technical Equipment for Additive Synthesis of Products / A. Kirichek, O. Fedonin, A. Khandozhko et al. // *Science Intensive Technologies in Mechanical Engineering*. 2022. no. 9. P. 31–38.
- [6] Study of Residual Stress and Microstructural Evolution in As-Deposited and Inter-Pass Rolled Wire Plus Arc Additively Manufactured Inconel 718 Alloy after Ageing Treatment / J. Hoennige, C. E. Seow, S. Ganguly et al. // *Material Science and Engineering A*. 2021. no. 801. p. art. 140368.
- [7] Control of residual stress and distortion in aluminium wire + arc additive manufacture with rolling / J. Hoennige, P. Colegrove, S. Ganguly et al. // *Additive Manufacturing*. 2018. no. 22. P. 775–783.
- [8] Manzhurov A. General Inertia-Free Initial Boundary Value Problem for a Piecewise Continuously Increasing Viscoelastic Aging Body // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1995. no. 59 (5). P. 836–848. (in Russian).
- [9] Yavari A. A Geometric Theory of Growth Mechanics // *Journal of Nonlinear Sciences*. 2010. no. 20. p. 781–830.
- [10] Transient Temperature Fields in Growing Bodies Subject to Discrete and Continuous Growth Regimes / S. Lychev, A. Manzhurov, M. Shatalov et al. // *Procedia IUTAM*. 2017. no. 23. p. 120–129.
- [11] Lychev S., Fekry M. Residual stresses in a thermoelastic cylinder resulting from layer-by-layer surfacing // *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 2020. no. 26 (3). p. 63–90. (in Russian).
- [12] Lychev S., Koifman K., Djuzhev N. Incompatible Deformations in Additively Fabricated Solids: Discrete and Continuous Approaches // *Symmetry*. 2021. no. 13 (2331).
- [13] Strength and Ductility Characteristics of Metal Alloys and Stainless Steels Created by Wire-Arc Surfacing in a Wide Range of Strain Rates / Y. Bayandin, D. Dudin, A. Ilyinykh et al. // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2023. no. 1. P. 33–45.
- [14] LS-DYNA® Keyword User's Manual. Volume II. Material Models. Ver. R13. Livermore Software Technology Corporation. 2021. 1993 p.
- [15] EN 1999-1-2 Eurocode 9: Design of aluminium structures. Part 1-2: Structural fire design. CEN. 2023. 61 p.
- [16] Shape distortions, plastic strains and residual stresses after one-sided forging/rolling of the beam: application to additive manufacturing of the linear metal segment with layer-by-layer pressure treatment / I. Keller, A. Kazantsev, D. Dudin et al. // *Computational Continuum Mechanics*. 2021. no. 4. P. 434–443.
- [17] Method for Determining Residual Stresses in a Rib on a Rigid Base / I. Keller, D. Petukhov, D. Dudin et al. // *Russian Patent no. 27977712018*. 2023. (in Russian).
- [18] Modeling residual stresses and distortions of the wall on a substrate built by wire-arc additive manufacturing / D. Dudin, I. Keller, G. Permyakov et al. // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2024. no. 1. P. 1–16.

Р. И. Непершин

СКОЛЬЖЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПО ГРАНИЦЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва,
Россия

Аннотация. Приведено численное моделирование стационарного пластического течения поверхностного слоя идеально пластического полупространства при скольжении жесткого гиперболического цилиндра с учетом контактного трения по Прандтлю на основе уравнений плоского пластического течения. Пластическая область с криволинейной границей перед скользящим цилиндром вычисляется из условия стационарности пластического течения в зависимости от распределения давления на границе контакта. Моделирование удовлетворяет полной системе уравнений теории плоской деформации для напряжений и скоростей при условии пластичности Мизеса. Вычисляются нагрузки и момент сопротивления пластическому скольжению гиперболического цилиндра, распределения напряжений и пластических деформаций на линиях тока. Моделирование представляет интерес для технологии пластического упрочнения поверхностного слоя с целью повышения износостойкости и усталостной прочности деталей машин.

Ключевые слова: идеально пластическое полупространство, стационарное пластическое течение, скольжение гиперболического цилиндра, плоская деформация, контактное трение, линии скольжения, годограф скоростей, линии тока.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.001

УДК: 539.374

Введение. Пластическое деформирование поверхностного слоя деталей машин применяется в технологии машиностроения на финишных операциях [1, 2] с целью повышения износостойкости, усталостной прочности и чистоты поверхности вследствие пластического упрочнения, улучшения микроструктуры, снижения шероховатости поверхности и образования сжимающих остаточных напряжений после упругой разгрузки. При этом пластические деформации превышают на несколько десятичных порядков упругие деформации; поэтому моделирование этих процессов целесообразно на основе теории идеальной пластичности [3].

© Непершин Р. И. 2023

Непершин Ростислав Иванович

e-mail: nepershin_ri@rambler.ru, доктор технических наук, профессор кафедры системы пластического деформирования, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 01.02.2023

На стационарной стадии пластического течения поверхностного слоя при скольжении инструмента образуется криволинейная граница пластической области, зависящая от формы границы контакта, контактного трения и нагрузки, приложенной к инструменту. При скольжении тупого клина [4] наклонная свободная граница прямолинейна. Стационарная пластическая область определяется линиями скольжения и полем скоростей с разрывом скорости на жесткопластической границе, что приводит к большим деформациям сдвига и разрушению в поверхностном слое [5]. При криволинейной контактной границе поле напряжений и скоростей в пластической области непрерывно и зависит от кривизны контактной границы. В [6–8] приведено моделирование стационарного пластического течения поверхностного слоя идеально пластического полупространства при качении и скольжении круглого и эллиптического цилиндров на основе численного решения дифференциальных уравнений идеальной пластичности при плоской деформации [3].

В настоящей работе приведено численное моделирование стационарного пластического течения поверхностного слоя при скольжении жесткого гиперболического цилиндра по границе идеально пластического полупространства. Скольжение направлено по нормали к прямолинейным образующим цилиндра. Главные оси гиперболы в нормальном сечении цилиндра направлены по нормали и касательной к границе полупространства. При большой длине цилиндра в нормальных сечениях принимаем плоское пластическое течение поверхностного слоя в окрестности границы контакта.

Стационарное пластическое течение рассматриваем в декартовых координатах, связанных со скользящим цилиндром. Граница пластической области является стационарной линией тока и находится численным интегрированием дифференциальных уравнений плоского пластического течения для напряжений и скоростей [3] по распределению давления на контактной границе с учетом контактного трения по Прандтлю. При малой длине граница контакта приближается к горизонтальной прямой с однородным контактным давлением по Прандтлю или Хиллу в зависимости от контактного трения при уменьшении пластической области и деформации поверхностного слоя. При большой длине гиперболической границы контакта кривизна границы уменьшается, и пластическое течение поверхностного слоя приближается к скольжению клина с гиперболическим контуром при вершине.

1. Основные уравнения. На рис. 1 показаны линии скольжения на плоскости x, y нормального сечения гиперболического цилиндра при скольжении по горизонтальной границе идеально пластического полупространства. Главные оси гиперболического сечения направлены по нормали и касательной к границе полупространства. Начало координат x, y , связанных с цилиндром, скользящим по направлению оси x , принимаем в нижней точке контакта O . В этих координатах цилиндр и стационарная пластическая область неподвижны, а полупространство перемещается относительно цилиндра со скоростью $V_x = -1, V_y = 0$, принимаемой за единицу при вычислении поля скоростей.

Границу контакта в первом квадранте плоскости x, y задаем уравнением сопряженной гиперболы с отношением полуудлин осей a/b по направлениям координат x, y , принимая b за единицу длины и сохраняя обозначение a для безразмерной полуудлины по оси x

$$(y + 1)^2 - x^2/a^2 = 1; \quad x \geq 0, y \geq 0. \quad (1)$$

Из (1) следует уравнение границы контакта OA в виде $y(x)$

$$y(x) = (1 + x^2/a^2)^{1/2} - 1, \quad (2)$$

и уравнение угла наклона касательной α к границе контакта

$$\operatorname{tg} \alpha = x/[(1 + y)a^2], \quad 0 \leq \alpha < \alpha^* = \operatorname{arctg}(1/a); \quad (3)$$

где α^* – угол наклона к оси x асимптоты сопряженной гиперболы. Из (1)-(3) находим зависимости координат x, y от угла α

$$x = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2}, \quad y = (1 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2} - 1. \quad (4)$$

Длину L границы контакта OA , определяемую интегралом

$$L = \int_0^{x_A} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2} dx \quad (5)$$

находим численным методом с использованием зависимостей (3) и (2), где x_A – координата x точки A , вычисляемая по первой формуле (4) при $\alpha_A < \alpha^*$. Угол α_A принимаем за параметр нагрузки цилиндра силами Q_x, Q_y и моментом M относительно оси, проходящей через точку $(0, 1)$.

Дифференциальные уравнения для напряжений и скоростей при плоской деформации идеально пластического тела приводятся к соотношениям Генки и Гейрингер на линиях скольжения [3]. За единицу напряжения принимаем удвоенную пластическую постоянную $2k = 2\sigma_Y/\sqrt{3}$ по условию пластичности Мизеса, где σ_Y – напряжение текучести. При этом дифференциальные соотношения Генки и Гейрингер на линиях скольжения ξ, η для угла φ наклона касательной к линиям скольжения ξ к оси x , среднего напряжения σ и проекций V_ξ, V_η вектора скорости на линии скольжения имеют вид

$$dy/dx = \operatorname{tg} \varphi, \quad \sigma - \varphi = \operatorname{const}, \quad dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{на } \xi, \quad (6)$$

$$dy/dx = -\operatorname{ctg} \varphi, \quad \sigma + \varphi = \operatorname{const}, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{на } \eta. \quad (7)$$

Напряжения и скорости в координатах x, y связаны с σ, φ, V_ξ и V_η соотношениями

$$\sigma_x = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad (8)$$

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi, \quad (9)$$

$$V_\xi = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_\eta = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi. \quad (10)$$

2. Граничные условия. При стационарном пластическом течении поверхностного слоя полупространства линии тока перед входом в пластическую область и после выхода из нее остаются горизонтальными прямыми без изменения границы полупространства с непрерывным изменением скоростей на жесткопластической границе $O-B$. Криволинейная граница пластической области AB и контактная граница OA являются стационарными линиями тока.

Граница AB находится в напряженном состоянии пластического сжатия $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma = -1/2$ с главными напряжениями, направленными по нормали и касательной к этой границе. Вследствие стационарности пластического течения на границе AB выполняются условия

$$dy/dx = V_y/V_x = \operatorname{tg} \beta, \quad \sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \beta \quad \text{на } AB, \quad (11)$$

и на границе полупространства в токе B

$$y = 0, \quad \beta = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \sigma = -\frac{1}{2}. \quad (12)$$

При положительной диссипативной функции главная скорость деформации на границе AB $\varepsilon_2 < 0$, и модуль вектора скорости уменьшается от точки B к точке A . В сингулярной точке A вектор скорости изменяет направление от касательной к границе AB к касательной к контактной границе OA с углом наклона α_A . Модуль вектора скорости на границе OA увеличивается от точки A до единицы в точке O на границе полупространства.

Контактное трение на границе OA учитываем коэффициентом трения $0 \leq \mu \leq 0.5$ по Прандтлю, который равен отношению контактного касательного напряжения к напряжению текучести σ_Y . Используя соотношения (8) в ортогональных координатах τ, n с направлениями по касательной и нормали к границе OA , из третьего соотношения (8) находим угол γ наклона линий скольжения ξ к касательной в точках границы OA и при известном распределении σ на этой границе из второго соотношения (8) находим распределение нормального давления $p = -\sigma_n$

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos 2\mu, \quad \varphi = \alpha - \gamma, \quad p = -\left(\sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right), \quad 0 \leq \alpha < \alpha_A \quad \text{на } OA. \quad (13)$$

В точке O при $\alpha = 0$, $\varphi = -\gamma$. Из второго соотношения (6) на ξ линии скольжения O - B при значениях φ и σ в (12) в точке B находим σ , и из (13) находим σ_O и нормальное давление p_O в точке O

$$\sigma_O = -\left(\frac{1}{2} + \gamma + \frac{\pi}{4}\right), \quad p_O = \frac{1}{2}(1 + \sin \gamma) + \gamma + \frac{\pi}{4}. \quad (14)$$

При отсутствии контактного трения $\mu = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\sigma_O = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ и p_O равно давлению $1 + \frac{\pi}{2}$ на плоский штамп. В этом случае жесткая область в окрестности точки O находится в предельном состоянии пластического сжатия при отсутствии пластических деформаций, так как в этой точке скорость перемещения цилиндра по нормали к границе контакта равна нулю. При наличии трения $\mu > 0$, $\gamma < \pi/4$, сжимающее среднее напряжение и контактное давление в точке O снижаются, и жесткая область клина с вершиной в точке O не нагружена до пластического состояния.

Граничные условия (11) и (13) в сингулярной точке A на границах AB при $\beta = \beta_A$ и OA при $\alpha = \alpha_A$ определяют угол веера ψ линий скольжения η в точке A , которая представляет вырожденную линию скольжения ξ

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \gamma - \alpha_A + \beta_A. \quad (15)$$

Из второго соотношения (6) находим изменения σ и φ в точке A от границы AB до границы OA и значения напряжения σ_A и давления p_A в точке A на границе контакта

$$\sigma = -\left(\frac{1}{2} + \theta\right), \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \beta_A - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \psi; \quad (16)$$

$$\sigma_A = -\left(\frac{1}{2} + \psi\right), \quad \varphi_A = \alpha_A - \gamma, \quad p_A = \psi + \frac{1}{2}(1 + \sin 2\varphi_A). \quad (17)$$

В области AOD линии скольжения и значения σ и φ находим решением задачи Коши для уравнений (6) и (7) с соотношениями Генки при заданном распределении σ в условиях (13) на границе OA . Затем в области ADC решаем задачу Гурса при известных значениях σ и φ на η линии скольжения AD и в сингулярной точке A

в уравнениях (16). Линии скольжения и значения σ и φ в области ACB находим решением обратной задачи Коши по известным значениям σ и φ на AC и условиям (11) на границе AB при заданном значении угла β_A в точке A . При этом определяется криволинейная граница AB по условиям (12) при $y = 0, \beta = 0$ в точке B .

Скорости перемещений находим решением уравнений Гейрингер при условии непрерывности скоростей $V_x = -1, V_y = 0$ на жесткопластической границе $O-B$ в уравнениях (10)

$$V_\xi = -\cos \varphi, \quad V_\eta = -\sin \varphi \quad \text{на } O-B, \quad (18)$$

и равенства нулю скорости по нормали к границе OA

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{ctg} \gamma \quad \text{на } OA. \quad (19)$$

3. Численное решение. В рассматриваемой задаче поля напряжений и скоростей связаны условием стационарности пластического течения (11) на границе AB . Уравнения Генки в (6) и (7) не содержат скоростей и образуют замкнутую систему для вычисления линий скольжения и переменных σ и φ по граничным условиям для напряжений. Уравнения Гейрингер содержат угол φ , и скорости определяется граничными условиями (18) и (19) после вычисления линий скольжения по граничным условиям (13)-(17) по значениям σ на границе OA и углу β_A в точке A , который фигурирует в соотношениях (15), (16) для напряжений и в условии (11) стационарности пластического течения.

При малой длине границы OA и $\alpha_A \rightarrow 0$ в точке A линии скольжения приближаются к задаче о скольжении плоского штампа с однородным распределением σ на границе OA и граница AB , совпадает с границей полупространства при $\beta \equiv 0$ в (11). При малых углах α_A и малой кривизне границы контакта линейное распределение σ в зависимости от угла α на границе OA

$$\sigma(\alpha) = \sigma_O + \alpha(\sigma_A - \sigma_O)/\alpha_A, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_A \quad (20)$$

приводит к погрешности нарушения первого соотношения в (11) порядка $10^{-3} \div 10^{-2}$ после вычисления линий скольжения и поля скоростей по приведенным выше граничным условиям. При увеличении угла контакта α_A нелинейное распределение $\sigma(\alpha)$ аппроксимируем параболической зависимостью, задавая производную

$$\sigma'(\alpha_A) = \lambda(\sigma_A - \sigma_O)/\alpha_A \quad \text{в точке } A$$

$$\sigma(\alpha) = \sigma_O + \frac{\alpha}{\alpha_A}(\sigma_A - \sigma_O) \left[\frac{\alpha}{\alpha_A}(\lambda - 1) - \lambda + 2 \right], \quad \lambda \geq 1. \quad (21)$$

Уравнение (21) переходит в линейную зависимость (20) при $\lambda = 1$.

Для вычислений написана ФОРТРАН – программа для решения задач Коши, Гурса и смешанного типа с конечно-разностной аппроксимацией уравнений (6), (7) в регулярных узлах сетки линий скольжения [8]. Значения $x, y, \sigma, \varphi, V_\xi, V_\eta$, необходимые для решения последовательности краевых задач, сохраняются на линиях скольжения ξ и η с целью уменьшения оперативной памяти компьютера, и выводятся на экран монитора с использованием графических программ ФОРТРАНа.

Линии скольжения в области ACB находим интегрированием дифференциального уравнения границы AB $dy/dx = \operatorname{tg} \beta$ от точки A с углом наклона касательной β_A и значениями x, y, σ, φ на линии скольжения AC . На рис. 1а показан треугольный элемент сетки линий скольжения ξ и η на отрезке $2-P$ пересечения с границей AB .

Углы φ и β в точке P на границе AB находим из уравнения Генки (6) на ξ линии скольжения 1- P и условий $\sigma = -1/2, \varphi = \pi/4 + \beta$ на AB

$$\varphi = \varphi_1 - (1/2 + \sigma_1), \quad \beta = \varphi - \frac{\pi}{4}, \quad (22)$$

где σ_1 и φ_1 – значения σ и φ в точке 1. Точку P находим по конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений для ξ линии скольжения 1- P и границы AB на отрезке 2- P , которая приводит к линейным уравнениям для координат x, y

$$\begin{aligned} x \operatorname{tg} \tilde{\varphi} - y &= x_1 \operatorname{tg} \tilde{\varphi} - y_1, & \tilde{\varphi} &= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi), \\ x \operatorname{tg} \tilde{\beta} - y &= x_2 \operatorname{tg} \tilde{\beta} - y_2, & \tilde{\beta} &= \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta), \end{aligned} \quad (23)$$

где нижние индексы 1 и 2 относятся к известным значениям переменных в точках 1 и 2.

Точка 2 первого треугольника совпадает с точкой A , в которой угол β_A наклона касательной к AB в (15) задан в виде $\beta_A = -\kappa\alpha_A$, $\kappa > 1$ и 1 – точка на линии скольжения AC , ближайшая к точке A . По значениям x, y, σ, φ в точке B и на линии скольжения AC вычисляем линию скольжения η , проходящую через точку P до границы CB . Известные значения переменных в точке P и на линии скольжения η , проходящую через эту точку, переносим в точки 1 и 2 следующего треугольника на границе AB и продолжаем эти вычисления до последнего треугольника, в котором точка P совпадает с точкой B на границе полупространства. Условия $y = 0, \beta = 0$ и $\varphi = \pi/4$ в точке B выполняются с точностью 10^{-5} при изменении коэффициента κ в исходных данных программы.

Поле скоростей находим численным интегрированием дифференциальных уравнений Гейрингер в (6), (7) с граничными условиями (18), (19) на жесткопластической границе $O-B$ и на границе контакта OA с известными значениями x, y, σ, φ после вычисления сетки линий скольжения. Скорости V_ξ и V_η в точках на границе контакта находим по конечно-разностной аппроксимации уравнения Гейрингер на линии скольжения η , проходящей через ближайшую точку линии скольжения ξ начиная с границы $O-B$. Заменяя V_ξ средним значением на отрезке 2- P , где 2 – точка на линии скольжения ξ , находим V_η и V_ξ в точке P на границе OA

$$V_\eta = [V_{\eta 2} - \frac{1}{2}V_{\xi 2}(\varphi - \varphi_2)] \cdot [1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \gamma(\varphi - \varphi_2)]^{-1}, \quad V_\xi = V_\eta \operatorname{ctg} \gamma, \quad (24)$$

где значения V_ξ, V_η и φ с нижним индексом 2 относятся к точке 2 на линии скольжения ξ . Затем вычисляем скорости V_ξ, V_η на линии скольжения ξ , проходящей через точку P до границы AB , численным решением задачи Гурса по конечно-разностной аппроксимации уравнений (6) и (7) для напряжений и скоростей [8]. Выполняя такие вычисления для последующих точек на границе OA до сингулярной точки A , находим скорости V_ξ, V_η в пластической области и на границе AB .

Скорости V_x, V_y находим по уравнениям (9). Поле скоростей отображаем на экране монитора на плоскости годографа, и в файл выходных данных программы записываем табличную функцию погрешности выполнения условия (11) на границе AB

$$V_y/V_x - \operatorname{tg} \beta = 0. \quad (25)$$

Изменяя параметр λ в параболической аппроксимации (21) распределения $\sigma(\alpha)$ на границе OA и параметр κ , определяющий угол β_A в точке A , получаем среднюю

погрешность абсолютных значений табличной функции (25) порядка 10^{-3} при числе точек на границах OA и AB до 20 и угловом шаге 0.075 веера линий скольжения в точке A .

В программу включены процедуры численного интегрирования дифференциального уравнения линий тока $dy/dx = V_y/V_x$, проходящих через пластическую область, с вычислениями напряжений в точках пересечения с линиями скольжения, эквивалентной скорости деформаций, накопленной пластической деформации и искривления координатной сетки при перемещении материальных точек по линиям тока. Так как скорость полупространства V_x принята за единицу, то приращение dx равно приращению времени dt , и зависимости $t_i(x)$ на n линиях тока находим численным интегрированием выражений

$$t_i(x) = \int_{x_B}^x dx/V_x, \quad x_B \geq x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

где индексом i обозначены номера линий тока от горизонтальной линии, касающейся нижней точки жесткопластической границы $O-B$ при $i = 1$, до линии тока BAO при n . Интегралы (26) при $x = 0$ определяют значения времени $T_i = t_i(0)$ возрастающие до максимального значения T_n на линии тока BAO . Из табличных функций $t_i(x)$ находим координаты x и y на линиях тока деформированной координатной сетки для m материальных точек по значениям времени $0 \leq t \leq T_n$ изменяющимся с шагом $\Delta t = T_n/m$.

Нагрузки Q_x , Q_y и момент M относительно точки $(0, 1)$, приложенные к цилиндру на длине $b = 1$ вдоль его оси, находим интегрированием распределения давления $p(x, y)$ и касательного напряжения $\mu = const$ на границе контакта OA

$$Q_x = \mu x_A + \int_O^A p dy, \quad Q_y = \mu y_A - \int_O^A p dx,$$

$$M = \mu \int_O^A (x dy + (1 - y) dx) + \int_O^A p ((1 - y) dy - x dx);$$

где координаты x, y точек границы OA определяются по формулам (4) в зависимости от угла наклона касательной $0 \leq \alpha < \alpha_A$.

4. Численные результаты. Ниже приведены результаты расчета скольжения гиперболического цилиндра с длинами полуосей гиперболы $a = b = 1$. На границе контакта OA учитываем трение по Прандтлю с коэффициентами $\mu = 0$ и $\mu = 0.1$ при задании угла наклона касательной $\alpha_A < \alpha^* = \frac{\pi}{4}$ в точке A . Линии скольжения и годографы скоростей получены изменениями коэффициентов λ и κ в исходных данных вычислительной программы, при которых определяется граница пластической области AB при стационарном пластическом течении. Сетки линий скольжения вычислены с числом точек $N = 20$ на границах OA и AB с шагом $\Delta\varphi = 0.075$ веера η линий скольжения в точке A . При выводе на экран монитора пластической области и линий скольжения за единицу принята длина дуги контакта L в нормальном сечении цилиндра при заданном значении угла α_A .

На рис. 1 и 2 показаны линии скольжения и годограф скоростей при стационарном пластическом течении поверхностного слоя полупространства при скольжении цилиндра с коэффициентом трения $\mu = 0.1$ и $\alpha_A = 0.25$ при длине границы контакта

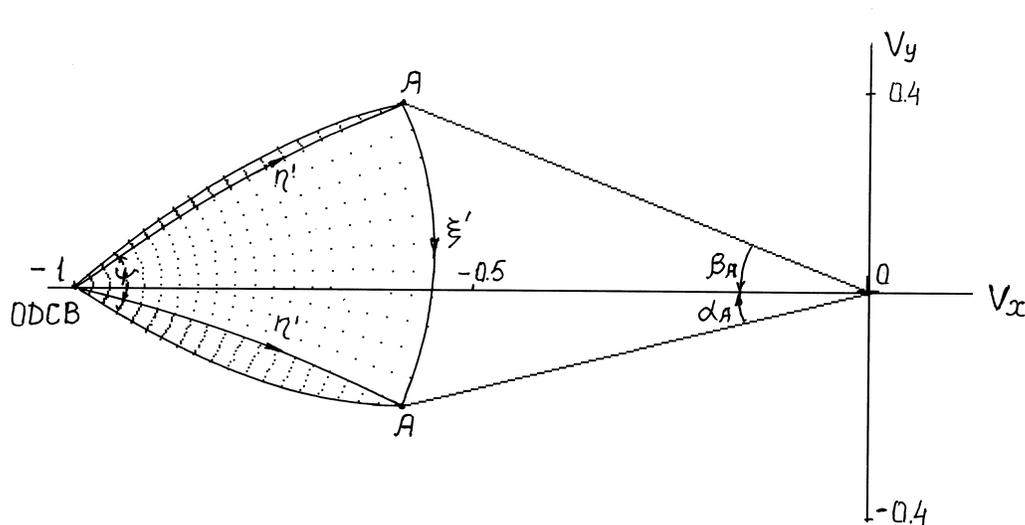


Рис. 2. Годограф скоростей в пластической области. $a = 1, \alpha_A = 0.25, \mu = 0.1$.

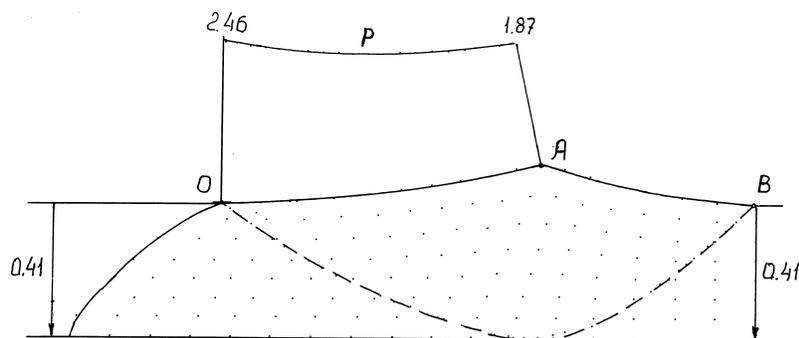


Рис. 3. Линии тока, искривление координатной сетки и контактное давление на границе OA . --- Граница пластической области. $a = 1, \alpha_A = 0.25, \mu = 0.1$.

На рис. 3 показаны линии тока и линии координатной сетки при движении материальных точек через пластическую область, вычисленные по линиям скольжения и полю скоростей на рис. 1 и 2, и распределение контактного давления на границе OA возрастающее от 1.89 в точке A до 2.46 в точке O . Толщина пластического слоя 0.41 отнесена к длине границы контакта $L = 0.267$.

На рис. 4 и 5 показаны линии скольжения и годограф скоростей при скольжении гладкого цилиндра при $\mu = 0, \alpha_A = 0.25$, вычисленные для параметров $\lambda = 1.19, \kappa = 1.33$, при $\psi = 0.988, \beta_A = -0.332$ и $x_B = 0.467, y_B = 1.2 \times 10^{-4}, \beta_B = -1.79 \times 10^{-7}$ в

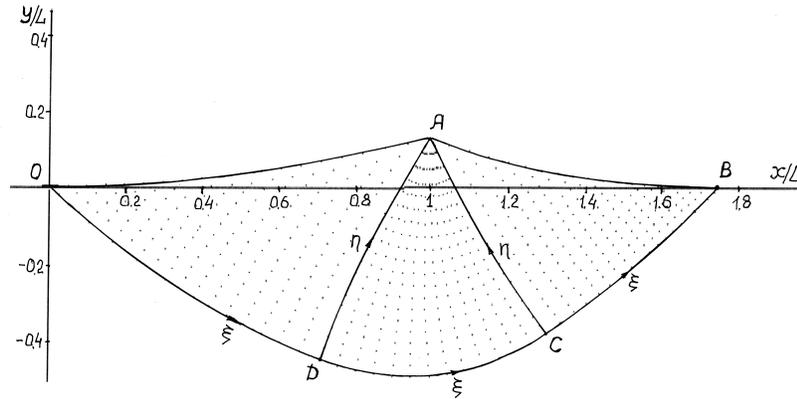


Рис. 4. Линии скольжения при скольжении гладкого цилиндра. $a = 1$, $\alpha_A = 0.25$, $\mu = 0$.

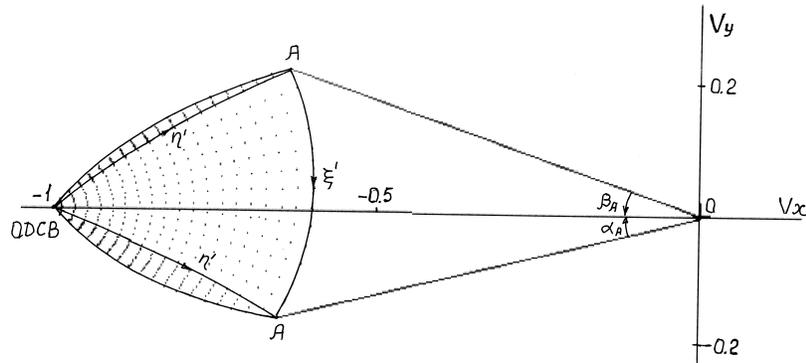


Рис. 5. Годограф скоростей в пластической области. $a = 1$, $\alpha_A = 0.25$, $\mu = 0$.

точке B . На рис. 6 показаны линии тока и координатной сетки в пластической области и распределение контактного давления на границе OA , которые увеличиваются по сравнению со скольжением цилиндра при $\mu = 0.1$ на рис 3. Толщина пластического слоя 0.49 отнесена к длине границы контакта $L = 0.267$.

В табл. 1 приведены координаты x , y , границы AB , углы наклона касательной β , вектора скорости β_V в точках границы AB и погрешность условия стационарности пластического течения $f = \operatorname{tg} \beta - V_y/V_x$ на этой границе для линий скольжения и годографов скоростей, показанных на рис. 1, 2 и 4, 5. При малых углах α_A границы контакта модули f находятся в пределах $10^{-3} \div 10^{-2}$.

В табл. 2 приведены распределения пластических деформаций и напряжений по толщине пластического слоя, вычисленные на линиях тока при выходе материальных точек из пластической области. При нагрузках на цилиндр, вычисленных по распределению контактного давления с учетом напряжения контактного трения μ , возникают большие накопленные эффективные ϵ_p и сдвиговые γ пластические деформации и

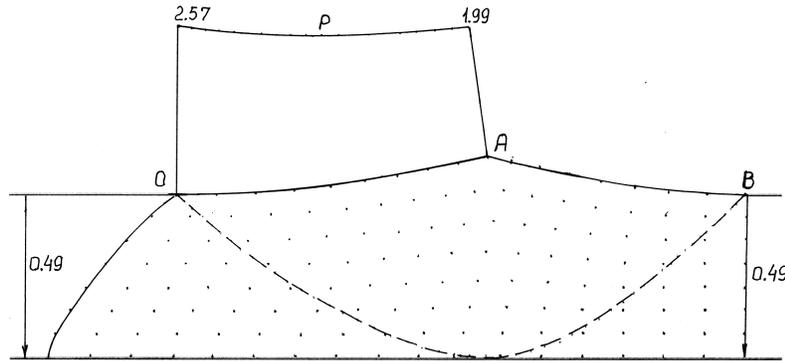


Рис. 6. Линии тока, искривление координатной сетки и контактное давление на границе OA .
 - - - - Граница пластической области. $a = 1, \alpha_A = 0.25, \mu = 0$.

x	$y \cdot 10^{-1}$	$-\beta$	$-\beta_V$	$f \cdot 10^{-2}$
$\mu = 0, \lambda = 1.19, \kappa = 1.33$				
0.279	0.294	0.309	0.305	0.516
0.306	0.212	0.265	0.262	0.317
0.331	0.150	0.223	0.222	0.106
0.355	0.102	0.184	0.185	0.092
0.376	0.066	0.147	0.150	-0.252
0.396	0.040	0.113	0.117	-0.362
0.415	0.022	0.081	0.085	-0.405
0.433	0.010	0.052	0.055	-0.367
0.450	0.003	0.025	0.027	-0.235
0.467	0.001	0.000	0.000	0.000
$\mu = 0.1, \lambda = 1, \kappa = 1.365$				
0.277	0.297	0.323	0.351	-3.080
0.302	0.219	0.287	0.300	-1.370
0.325	0.157	0.251	0.253	-0.192
0.345	0.107	0.215	0.210	0.598
0.364	0.069	0.180	0.170	1.050
0.381	0.041	0.144	0.132	1.240
0.397	0.022	0.108	0.096	1.210
0.411	0.009	0.072	0.062	0.980
0.424	0.002	0.036	0.030	0.575
0.435	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 1. Углы наклона касательной β , вектора скорости β_V и погрешность условия стационарности пластического течения $f = \text{tg} \beta - V_y/V_x$ на границе AB . $a = 1, \alpha_A = 0.25$.

x	$-y$	$-\sigma$	$-\sigma_x$	e_p	e_x	γ
$\mu = 0$						
0.000	0.000	2.071	1.571	1.152	0.027	0.439
0.020	0.019	1.989	1.491	0.929	0.030	0.587
0.043	0.038	1.930	1.433	0.755	0.017	0.636
0.069	0.058	1.872	1.401	0.600	0.004	0.631
0.099	0.077	1.815	1.366	0.457	0.001	0.564
0.133	0.096	1.759	1.339	0.316	0.005	0.447
0.172	0.114	1.704	1.319	0.188	0.000	0.325
0.253	0.132	1.285	1.285	0.000	0.000	0.000
$\mu = 0.1$						
0.000	0.000	1.970	1.479	1.344	0.035	0.695
0.020	0.016	1.883	1.406	1.092	0.041	0.833
0.044	0.032	1.827	1.370	0.901	0.021	0.878
0.071	0.048	1.769	1.340	0.725	0.002	0.834
0.101	0.064	1.714	1.316	0.557	0.005	0.736
0.137	0.080	1.659	1.298	0.397	0.000	0.603
0.178	0.095	1.606	1.286	0.234	-0.005	0.411
0.247	0.110	1.285	1.285	0.000	0.000	0.000

Таблица 2. Напряжения и деформации в поверхностном слое полупространства на границе выхода из пластической области. $a = 1$, $\alpha_A = 0.25$.

сжимающие напряжения, которые после упругой разгрузки определяют остаточные деформации и напряжения в поверхностном слое.

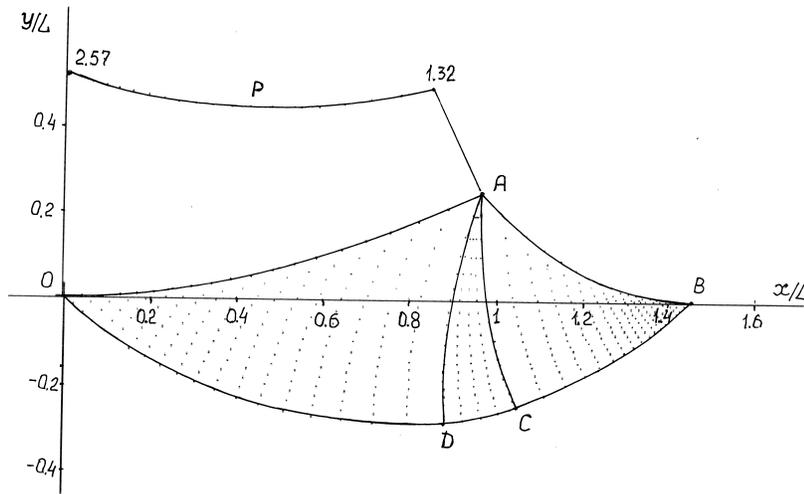


Рис. 7. Линии скольжения и распределение контактного давления при скольжении гладкого цилиндра. $a = 1$, $\alpha_A = 0.45$, $\mu = 0$.

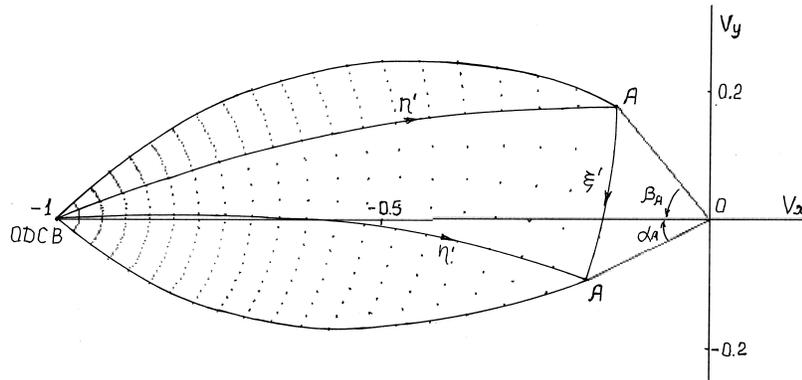


Рис. 8. Годограф скоростей в пластической области. $a = 1$, $\alpha_A = 0.45$, $\mu = 0$.

На рис. 7 и 8 показаны линии скольжения с распределением контактного давления и годограф скоростей при скольжении гладкого цилиндра с углом $\alpha_A = 0.45$ на границе контакта. В этом случае угол веера линий скольжения в точке A уменьшается до $\psi = 0.32$. Модуль угла наклона границы AB в точке A увеличивается при $\beta_A = -0.801$. Вследствие уменьшения кривизны гиперболы на границе OA линии скольжения и граница AB в окрестности точки A приближаются к прямым линиям. Кривизна границы AB при приближении к точке B увеличивается вследствие увеличения кривизны гиперболы на границе OA при приближении к точке O и увеличении контактного давления в этой точке.

α_A	ψ	$-\beta_A$	L	x_A	y_A	x_B	y_B	h_p	Q_x	Q_y	M
$\mu = 0$											
0.20	1.112	0.259	0.208	0.207	0.021	0.376	0.0	0.113	0.048	0.487	0.097
0.25	0.988	0.333	0.267	0.264	0.034	0.467	0.0	0.133	0.075	0.605	0.150
0.30	0.854	0.417	0.331	0.325	0.052	0.559	0.0	0.149	0.109	0.723	0.217
0.35	0.714	0.506	0.401	0.392	0.074	0.652	0.0	0.161	0.149	0.842	0.297
0.40	0.519	0.652	0.481	0.466	0.104	0.734	0.0	0.167	0.195	0.959	0.390
0.45	0.320	0.801	0.575	0.552	0.142	0.838	0.0	0.167	0.249	1.077	0.497
$\mu = 0.1$											
0.20	0.975	0.295	0.208	0.207	0.021	0.352	0.0	0.096	0.066	0.463	0.071
0.25	0.879	0.341	0.267	0.264	0.034	0.435	0.0	0.110	0.097	0.573	0.116
0.30	0.648	0.522	0.331	0.325	0.052	0.516	0.0	0.119	0.133	0.679	0.169
0.35	0.452	0.669	0.401	0.392	0.074	0.594	0.0	0.122	0.174	0.783	0.232
0.40	0.250	0.820	0.481	0.466	0.104	0.670	0.0	0.122	0.220	0.884	0.304

Таблица 3. Скольжение гиперболического цилиндра по границе идеально пластического полупространства. $a = 1$.

В табл. 3 приведены основные размеры пластической области, толщины пластического слоя h_p , нагрузок Q_x , Q_y и момента M относительно точки $(0, 1)$, приложенных

к цилиндру при скольжении по границе пластического полупространства в зависимости от угла наклона касательной α_A и коэффициентов контактного трения $\mu = 0$ и $\mu = 0.1$. Линейные размеры отнесены к длине полуоси гиперболы по оси y . Нагрузки и момент отнесены к единице длины по оси цилиндра при напряжении текучести σ_Y принятом за единицу. При увеличении угла α_A угол веера линий скольжения ψ уменьшается. Распределение контактного давления на большой длине около точки A приближается к однородному. При приближении угла α_A к углу наклона асимптоты гиперболы α^* криволинейная часть контактной границы стягивается в угловую точку O клина с углом наклона границы α^* , разрывом скорости на жесткопластической границе $ODCB$ и наклонной прямолинейной границей AB при скольжении клина по границе пластического полупространства [4].

Заключение. Приведено моделирование стационарного пластического течения поверхностного слоя идеально пластического полупространства при скольжении жесткого гиперболического цилиндра на основе численного интегрирования дифференциальных уравнений теории плоской деформации с учетом контактного трения по Прандтлю. Условия стационарности пластического течения на криволинейной границе пластической области выполняются с точностью $10^{-3} \div 10^{-2}$ при параболической аппроксимации распределения давления на границе контакта в зависимости от угла наклона касательной и изменении угла веера линий скольжения в сингулярной точке. Вычисляются напряжения и деформации в пластической области при движении материальных точек по линиям тока.

Показано изменение пластической области, толщины пластического слоя и нагрузки на цилиндр в зависимости от угла наклона касательной на границе контакта и контактного трения. При малых углах контакта задача приближается к скольжению плоского штампа с уменьшением толщины пластического слоя и пластических деформаций с контактным давлением по Прандтлю и сдвигом по границе контакта при наличии трения. При увеличении длины границы контакта и приближении угла наклона касательной к углу наклона асимптоты гиперболы задача приближается к скольжению клина с однородным распределением контактного давления. Криволинейный участок границы стягивается в вершину клина с разрывом скорости по жесткопластической границе при наклонной прямолинейной свободной границей пластической области.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шнейдер Ю.Г. Технология финишной обработки давлением: Справочник. Политехника, 1998.
- [2] Справочник по процессам поверхностного пластического деформирования / под ред. С.А. Зайдес. ИРНИТУ, 2021.
- [3] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [4] Непершин Р.И. О скольжении тупого клина по границе идеально пластического полупространства // Доклады РАН. 2001. Т. 381, № 4. с. 496.
- [5] Challen J., Oxley P. Some new thoughts on the mechanisms of sliding and sticking friction in metal working processes // Advanced Technology of Plasticity. 1984. Vol. 1. p. 127.
- [6] Непершин Р.И. Качение и скольжение цилиндра по границе идеально пластического полупространства // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. с. 326.
- [7] Непершин Р.И. Скольжение эллиптического цилиндра по границе идеально пластического полупространства // Проблемы механики (к 90 – летию академика А.Ю. Ишлинского). Физматлит, 2003. с. 584.
- [8] Nepershin R. Applied Problems of Plasticity. MSTU “STANKIN”, 2016.

R. I. Nepershin

SLIDING OF THE HYPERBOLIC CYLINDER ALONG IDEAL PLASTIC HALF-SPACE BOUNDARY

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Numerical simulation of surface layer steady-state plastic flow during sliding of rigid hyperbolic cylinder along ideal plastic half-space boundary with Prandtl's contact friction consideration is presented. Slip lines and velocities on the hodograph plane are defined by numerical integration of differential equations for stresses and velocities of plane strain plastic flow theory with Mises yield criterion. Plastic region with curved boundary before sliding cylinder is found from the steady-state plastic flow condition defined by pressure distribution on cylinder contact boundary. Loads and torque applied to cylinder, stream lines, stresses and plastic strains distributions in the plastic layer are calculated. The simulation can be used in technology of surface layer plastic work hardening to increase of machine parts wear and strength resistance.

Keywords: ideal plastic half-space, steady-state plastic flow, sliding of hyperbolic cylinder, plane strain theory, contact friction, slip lines, velocities hodograph, stream lines.

REFERENCES

- [1] Shneider Y. Technology of final working by pressure: Handbook. Politechnica, 1998. p. 414. In Russian.
- [2] Handbook of surface plastic deformation processes / Ed. by S. Zides. IRNITU, 2021. p. 504. In Russian.
- [3] Ishlinskii A., Ivlev D. Mathematical Theory of Plasticity. Fizmatlit, 2001. p. 704. In Russian.
- [4] Nepershin R. On sliding an obtuse wedge along the boundary of a perfectly plastic half-space // Doklady Physics. 2001. Vol. 46, no. 12. p. 885.
- [5] Challen J., Oxley P. Some new thoughts on the mechanisms of sliding and sticking friction in metal working processes // Advanced Technology of Plasticity. 1984. Vol. 1. p. 127.
- [6] Nepershin R. Rolling and sliding of rigid cylinder along the rigid-plastic half-space boundary // J. Appl. Maths. Mechs. 2003. Vol. 67, no. 2. p. 293.
- [7] Nepershin R. Sliding of elliptical cylinder along the ideal plastic half-space boundary // Problems of Mechanics. A.Yu. Ishlinskii 90th Anniversary. Fizmatlit, 2003. p. 582. In Russian.
- [8] Nepershin R. Applied Problems of Plasticity. MSTU "STANKIN", 2016. p. 310.

Nepershin Rostislav Ivanovich, Doctor of technical sciences, Professor of the Plastic Deformation Systems Dep., Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.

Д. В. Христич

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Сформулирована постановка обратной термомеханической задачи, состоящей в определении отклика в виде деформаций анизотропного упругого тела на процесс нагружения и изменения температуры в случае конечных деформаций. Решение термомеханической задачи выполнено в рамках обобщений частного постулата изотропии А.А. Ильюшина на случай конечных деформаций анизотропных тел. На основе термодинамического потенциала Гиббса построены нелинейные определяющие соотношения в виде, разрешённом относительно деформаций.

Ключевые слова: нелинейные определяющие соотношения, анизотропные материалы, частный постулат изотропии, потенциал Гиббса.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.002

УДК: 539.3

1. Обратная термомеханическая задача Многие современные материалы обладают анизотропией свойств и проявляют нелинейное механическое поведение, наблюдаемое уже при малых деформациях [1–3]. В опытах по исследованию упругих свойств часто задаётся программа нагружения образца, а его деформации регистрируются как отклик материала, то есть определяются экспериментальные зависимости вида $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T)$. Возможность выполнения и обработки таких экспериментов позволяет разрабатывать нелинейные зависимости деформаций от напряжений [4, 5] и программы их конкретизации. Целью работы является построение термодинамически обоснованных соотношений, определяющих зависимость конечных деформаций от напряжений и температуры в анизотропных упругих материалах.

Рассмотрим процесс деформирования и нагружения в некоторой фиксированной точке пространства, которые описываются тензором деформаций Коши–Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$, имеющим в отсчётном декартовом базисе $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ диадное разложение $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j$, и

© Христич Д. В., 2023

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Поступила 01.12.2023

сопряжённым с ним энергетическим тензором напряжений (вторым тензором Пиолы–Кирхгофа) $\mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j$, $\mathbf{T} = e^\theta \mathbf{\Phi}^{-T} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}$, где $e^\theta = \frac{dV}{dV_0}$ — относительное изменение элементарного материального объёма, $\mathbf{\Phi}$ — тензор-аффиноид деформаций, \mathbf{S} — тензор истинных напряжений Коши.

Поставим в соответствие тензору $\boldsymbol{\varepsilon}$ его векторный образ

$$\vec{e} = e_\alpha \vec{i}_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 5$$

в шестимерном декартовом пространстве с ортонормированным базисом \vec{i}_α .

При произвольном ортогональном преобразовании векторных образов в шестимерном пространстве (вращении или отражении) длина векторных образов тензоров деформаций не изменяется, то есть сохраняет своё значение квадратичный инвариант, определяемый свёрткой

$$e^2 = \vec{e} \cdot \vec{e} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Базисным векторам \vec{i}_α шестимерного пространства соответствуют тензоры \mathbf{I}^α трёхмерного пространства, обладающие тем свойством, что любой симметричный тензор второго ранга в пространстве E_3 можно разложить по этим тензорам с коэффициентами, равными координатам его векторного образа в пространстве E_6 , то есть тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ можно представить в виде $\boldsymbol{\varepsilon} = e_\alpha \mathbf{I}^\alpha$. Тензоры \mathbf{I}^α образуют обобщённый канонический тензорный базис А.А. Ильюшина [6] и представляются диадными разложениями в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}^1 \vec{e}^1 + \vec{e}^2 \vec{e}^2 + \vec{e}^3 \vec{e}^3), & \mathbf{I}^1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}^3 \vec{e}^3 - \vec{e}^1 \vec{e}^1 - \vec{e}^2 \vec{e}^2), & \mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^1 \vec{e}^1 - \vec{e}^2 \vec{e}^2), \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^1 \vec{e}^2 + \vec{e}^2 \vec{e}^1), & \mathbf{I}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^2 \vec{e}^3 + \vec{e}^3 \vec{e}^2), & \mathbf{I}^5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^3 \vec{e}^1 + \vec{e}^1 \vec{e}^3). \end{aligned}$$

Этот базис является ортонормированным, так как образующие его тензоры удовлетворяют условию $\mathbf{I}^\alpha \cdot \mathbf{I}^\beta = \delta^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$.

Как и тензору деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, тензору напряжений \mathbf{T} ставится в соответствие его шестимерный векторный образ

$$\vec{\sigma} = \sigma_\alpha \vec{i}_\alpha \quad \alpha = 0, 1, \dots, 5,$$

связанный с тензором \mathbf{T} соотношением

$$\sigma^2 = \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}.$$

Описание процессов деформирования и нагружения в шестимерном пространстве с помощью векторов \vec{e} и $\vec{\sigma}$ упрощает анализ связей между этими процессами и носит универсальный характер, так как образ процесса может быть построен с использованием и других сопряжённых пар тензоров конечных деформаций и напряжений [7].

Будем исследовать образ термомеханического процесса, построенный в шестимерном пространстве E_6 и состоящий из законов деформирования $\vec{e}(t)$ и нагружения $\vec{\sigma}(t)$ и закона изменения температуры $T(t)$. При рассмотрении упругих материалов в качестве времени может быть использован любой другой монотонно изменяющийся параметр. Рассмотрим однородный неизотермический процесс нагружения некоторого представительного макрообъёма анизотропного материала.

При задании процесса нагружения $\vec{\sigma}(t)$ и закона изменения температуры $T(t)$ в случае, когда откликом упругого тела являются конечные деформации, требуется

установить связь в виде функции

$$\vec{\epsilon}(t) = \vec{f}[\vec{\sigma}(t), T(t)], \quad (1)$$

то есть

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{F}_\epsilon[\mathbf{T}(t), T(t)]. \quad (2)$$

Мера деформаций $\boldsymbol{\epsilon}$ является инвариантной относительно наложения на процесс деформирования жёсткого поворота, поэтому использование её в определяющих соотношениях позволяет тождественно удовлетворить требованию материальной объективности [7–11]:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{R}^{-1}(t) \cdot \mathbf{F}_\epsilon[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{R}^{-1}(t), T(t)] \cdot \mathbf{R}(t), \quad (3)$$

где \mathbf{R} — ортогональный тензор поворота, входящий в полярное разложение аффинора деформаций.

Реакция однородной среды на процессы деформирования и изменения температуры может быть изотропной и анизотропной. Среда называется изотропной, если для любого ортогонального преобразования материального базиса $\vec{x}'_i = \vec{x}_i \cdot \mathbf{Q}$ выполняется требование

$$\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{T}(\vec{x}, t) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H} \left\{ [\mathbf{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{Q}]_{t_0}^t, T(\vec{x}, t), \vec{x} \right\} \quad \forall \mathbf{Q} \in g, \quad (4)$$

где \mathbf{H} — функционал процесса деформирования и функция температуры, g — полная группа ортогональных преобразований материального пространства, а вместо \mathbf{T} и $\boldsymbol{\epsilon}$ могут использоваться другие пары энергетически сопряжённых тензоров.

Если условие (4) выполняется не при всех \mathbf{Q} , то среда называется анизотропной. Анизотропная среда обладает симметрией свойств при выполнении условия

$$\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{T}(\vec{x}, t) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H} \left\{ [\mathbf{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{Q}]_{t_0}^t, T(\vec{x}, t), \vec{x} \right\} \quad \forall \mathbf{Q} \in g_A, \quad (5)$$

где g_A — подгруппа полной ортогональной группы, называемая группой анизотропии [7].

Разные анизотропные материалы могут обладать симметрией свойств различного типа. Тип анизотропии (симметрии свойств) среды полностью определяется группой g_A .

Установление связи (1) при удовлетворении требованиям постулатов (3), определениям изотропного или анизотропного материала (4) или (5), составляет обратную термомеханическую задачу.

В случае бесконечно малых деформаций такой процесс определяется законами изменений тензора истинных напряжений $\mathbf{S}(t)$ и абсолютной температуры $T(t)$, а определению подлежит линейный тензор бесконечно малых деформаций $\boldsymbol{\epsilon}^\Lambda(t)$:

$$\boldsymbol{\epsilon}^\Lambda(t) = \mathbf{F}[\mathbf{S}(t), T(t)]. \quad (6)$$

В линейной теории термоупругости [12, 13] соотношение (6) принимает вид

$$\boldsymbol{\epsilon}^\Lambda = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{S} + \mathbf{A} \cdot (T - T_0), \quad (7)$$

где тензор второго ранга \mathbf{A} определяет температурные деформации материала и образован коэффициентами температурных расширений.

В изотермических процессах из (7) получаются соотношения, обратные закону Гука,

$$\boldsymbol{\epsilon}^\Lambda = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{S}, \quad (8)$$

поэтому тензор четвёртого ранга \mathbf{C} является тензором упругих податливостей.

2. Формулировки обобщения частного постулата изотропии А.А. Ильюшина Рассмотрим образ термомеханического процесса в шестимерном пространстве. Согласно частному постулату изотропии [8], образ процесса деформирования начально-изотропного тела инвариантен не только относительно ортогональных преобразований, связанных с выбором начальной системы координат, но и относительно произвольных преобразований вращения и отражения в пятимерном девiatorном подпространстве. Так как при таких преобразованиях изменяются третьи инварианты тензоров напряжений и деформаций, то частный постулат требует, чтобы инварианты такого типа явно не входили в функционалы, определяющие свойства материала.

Для формулировки обобщения частного постулата на случай начально-анизотропных тел используется понятие собственных упругих подпространств анизотропных материалов. По определению Я. Рыхлевского [14] собственным упругим состоянием называется тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$, для которого

$$\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha = (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha,$$

где \mathbf{N} — тензор упругости четвёртого ранга, связанный с тензором \mathbf{C} соотношением $\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{I}_2$, где $\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \vec{e}^i \vec{e}^j \vec{e}^k \vec{e}^l$ — изотропный тензор четвёртого ранга [7, 15], обладающий тем свойством, что для любого тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ второго ранга $\mathbf{I}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}$.

В шестимерном пространстве это определение принимает вид

$$\mathbf{n} \cdot \vec{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{\omega}_\alpha,$$

причём тензор \mathbf{n} является образом тензора \mathbf{N} в шестимерном пространстве, вектор $\vec{\omega}_\alpha$ — образом тензора $\boldsymbol{\omega}_\alpha$.

Если для некоторого материала все шесть собственных значений λ_α различны, то разложение тензора \mathbf{n} по собственному базису имеет вид

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda_\alpha \vec{\omega}_\alpha \vec{\omega}_\alpha.$$

В общем случае разложение тензора \mathbf{n} по собственному базису представляется в виде

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \boldsymbol{\Omega}_\alpha, \quad (9)$$

где n — число различных корней характеристического уравнения, базисные тензоры $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$, соответствующие однократному корню λ_α , имеют вид $\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \vec{\omega}_\alpha \vec{\omega}_\alpha$, а соответствующие корню кратности k — $\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \vec{\omega}_\alpha \vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_{\alpha+1} \vec{\omega}_{\alpha+1} + \dots + \vec{\omega}_{\alpha+k-1} \vec{\omega}_{\alpha+k-1}$.

Для изотропного и анизотропных материалов различных типов собственные значения и собственные векторы определены в работе [7].

Запишем закон Гука, используя разложение (9), в виде

$$\vec{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \vec{e}_{(\alpha)}, \quad (10)$$

где $\vec{e}_{(\alpha)} = \vec{e} \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha$ — проекция вектора деформации в собственное подпространство, соответствующее λ_α .

Вследствие линейности и взаимной однозначности соотношения (10) оно может быть представлено в виде

$$\vec{e} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\lambda_\alpha} \vec{\sigma}_{(\alpha)}, \quad (11)$$

где $\vec{\sigma}_{(\alpha)} = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha$ — проекция вектора напряжений в собственное подпространство, соответствующее λ_α .

Из сравнения выражений (11) и (8) следует возможность разложения тензора упругих податливостей по собственным базисам

$$\mathbf{c} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\lambda_\alpha} \mathbf{\Omega}_\alpha, \quad (12)$$

из которого следует, что собственные подпространства тензоров упругости и податливости совпадают.

Представления для структурных тензоров анизотропии можно получить, исходя из разложений тензоров упругостей (9) и податливостей (12) по собственным базисам. В силу инвариантности собственных значений и собственных тензоров относительно преобразований, входящих в группу анизотропии материала, инвариантными оказываются и базисные тензоры собственных подпространств $\mathbf{\Omega}_\alpha$.

Линейные инварианты относительно группы симметрии материала тензоров деформаций и напряжений можно получить как скалярные произведения их шестимерных образов \vec{e} и $\vec{\sigma}$ и единичного собственного вектора $\vec{\omega}_\alpha$:

$$e_\alpha = \vec{e} \cdot \vec{\omega}_\alpha, \quad \sigma_\alpha = \vec{\sigma} \cdot \vec{\omega}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m$$

или как скалярные произведения векторов \vec{e} и $\vec{\sigma}$ и базисных векторов линейного инвариантного подпространства:

$$e_\alpha = \vec{e} \cdot \vec{i}_\alpha, \quad \sigma_\alpha = \vec{\sigma} \cdot \vec{i}_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (13)$$

Квадратичные инварианты тензоров деформаций и напряжений можно определить через базисные тензоры квадратичных инвариантных подпространств $\mathbf{\Omega}_\alpha$ выражениями [7]

$$s_{(\alpha)}^2 = \vec{e} \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha \cdot \vec{e}, \quad t_{(\alpha)}^2 = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{\Omega}_\alpha \cdot \vec{\sigma}. \quad (14)$$

Каждый из собственных базисных тензоров $\mathbf{\Omega}_\alpha$ инвариантен относительно преобразований вращения и отражения в соответствующем собственном подпространстве, которые в дальнейшем будем называть собственными преобразованиями. Из разложений (9) и (12) следует инвариантность тензоров \mathbf{n} и \mathbf{c} относительно собственных преобразований. Например, для изотропного материала тензоры \mathbf{n} и \mathbf{c} инвариантны относительно всех вращений и отражений в пятимерном девиаторном подпространстве. Таким образом, закон Гука в силу своей линейности удовлетворяет требованиям частного постулата изотропии.

В работах [16, 17] было предложено обобщение частного постулата на процессы нелинейного деформирования начально-анизотропных тел: образ термомеханического процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве материала, инвариантен относительно группы собственных ортогональных преобразований.

Из этого обобщения следует, что термомеханический процесс в каждом неодномерном собственном подпространстве определяется только внутренней геометрией траектории и не зависит от ориентации относительно базисных векторов этого подпространства.

Приведём формулировку предельной формы обобщения частного постулата [16, 17]: образ термомеханического процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве, также расположен в этом подпространстве. В этом случае связь между напряжениями, деформациями и температурой может быть представлена в виде

$$\vec{e}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^m \tilde{A}_{(\alpha)}^i \vec{r}_i^{(\alpha)}, \quad (15)$$

где $\tilde{A}_{(\alpha)}^i [\vec{\sigma}_{(\alpha)}(t), T(t)]$ — функционал процесса нагружения $\vec{\sigma}_{(\alpha)}(t)$ и функция температуры $T(t)$, m и $\vec{r}_i^{(\alpha)}$ — размерность и базис собственного подпространства.

В соответствии с ограничениями, накладываемыми на определяющие соотношения предельной формой частного постулата изотропии в виде (15), связь между напряжениями, деформациями и температурой должна содержать только линейные и квадратичные инварианты, характеризующие материалы различных типов.

3. Решение обратной термомеханической задачи Рассмотрим применение потенциала Гиббса в качестве термодинамического потенциала. Использование потенциала Гиббса позволяет получить нелинейные определяющие соотношения в виде разрешённом относительно деформаций. Это значительно облегчает обработку экспериментов на растяжение, сжатие и кручение образцов.

Потенциал Гиббса в шестимерном пространстве записывается в виде [7]

$$G = U - ST - \frac{1}{\rho_0} \vec{\sigma} \cdot \vec{e}, \quad (16)$$

где U — удельная внутренняя энергия, S — удельная энтропия, ρ_0 — плотность среды в начальной конфигурации.

С учётом выражения (16) основное термомеханическое соотношение в форме Гиббса принимает вид [7]

$$dG = -\frac{1}{\rho_0} \vec{e} \cdot d\vec{\sigma} - SdT.$$

Из этого выражения с учётом формулы для дифференциала потенциала G

$$dG = \frac{\partial G}{\partial \vec{\sigma}} \cdot d\vec{\sigma} + \frac{\partial G}{\partial T} dT$$

следуют выражения вектора деформаций и энтропии:

$$\vec{e} = -\rho_0 \frac{\partial G}{\partial \vec{\sigma}}, \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T}. \quad (17)$$

Для конкретизации выражений (17) меры деформаций и энтропии через меру напряжений и температуру зададим конкретный вид потенциала Гиббса $G = G(\vec{\sigma}, T)$.

Если предположить, что реакция материала удовлетворяет предельной форме частного постулата изотропии, то потенциал Гиббса следует представить в форме квадратичной зависимости следующего вида:

$$\rho_0 G = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^n D^\gamma t_{(\gamma)}^2 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \sigma_\alpha (T - T_0) + \rho_0 G^{(0)}(T), \quad (18)$$

где σ_α — линейные инварианты напряжений (13), $t_{(\gamma)}^2$ — квадратичные инварианты напряжений (14), $c^{\alpha\beta}$, D^γ , a^α — константы материала, m и n — соответственно количество линейных и квадратичных инвариантов для некоторого материала.

В соответствии с выражениями (17) и (18) получим

$$\vec{e} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta} \sigma_\beta \vec{i}_\alpha + \sum_{\gamma=1}^n 2D^\gamma \vec{s}_{(\gamma)} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \vec{i}_\alpha (T - T_0), \quad (19)$$

$$S = \frac{1}{\rho_0} \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \sigma_\alpha - \frac{dG^{(0)}}{dT}.$$

Слагаемое $G^{(0)}(T)$ в представлении потенциала Гиббса (18), зависящее только от температуры, имеет вид $G^{(0)} = -c_\sigma T_0 \left(\frac{T}{T_0} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{T}{T_0} + 1 \right)$, а энтропия определяется выражением

$$S = \frac{1}{\rho_0} \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \sigma_\alpha + c_\sigma \ln \frac{T}{T_0}.$$

Соотношение $c_\sigma = c_\epsilon + \vec{\alpha} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{\alpha}$ связывает теплоёмкость при постоянных напряжениях c_σ с теплоёмкостью при постоянных деформациях c_ϵ [7, 13].

Рассмотрим термомеханический процесс, в котором напряжения отсутствуют. Возникающие в таком процессе деформации называются температурными. Определяемые соотношениями (19) температурные деформации имеют вид

$$\vec{e}^T = \vec{e}|_{\vec{\sigma}=\vec{0}} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \vec{i}_\alpha (T - T_0), \quad (20)$$

откуда следует, что a^α — константы, характеризующие температурные деформации. Из выражения (20) следует, что вектор температурных деформаций содержит в своём разложении только инвариантные относительно группы симметрии данного анизотропного материала базисные векторы.

Если рассматривается изотермический процесс, то из выражения (19) получаются линейные выражения для деформаций:

$$\vec{e} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta} \sigma_\beta \vec{i}_\alpha + \sum_{\gamma=1}^n 2D^\gamma \vec{s}_{(\gamma)}.$$

Запишем соотношения (19) для изотропного материала, когда $m = 1$, $\vec{i}_\alpha = \vec{i}_0$, $\sigma_0 = \vec{\sigma} \cdot \vec{i}_0$, $n = 1$, $\vec{s}_{(1)} = \vec{\sigma} \cdot (\vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3 + \vec{i}_4 \vec{i}_4 + \vec{i}_5 \vec{i}_5) = \vec{\tau}$ — вектор нагружения:

$$\vec{e} = c^{00} \sigma_0 \vec{i}_0 + 2D\vec{\tau},$$

где $c^{00} = \frac{1}{K}$, $D = \frac{1}{4G}$, K — модуль объёмной упругости, G — модуль сдвига. Полученное соотношение при бесконечно малых деформациях является записью закона Гука.

Для трансверсально-изотропного материала при $m = 2$ $\vec{i}_\alpha: \vec{i}_0, \vec{i}_1$, $\sigma_0 = \vec{\sigma} \cdot \vec{i}_0$, $\sigma_1 = \vec{\sigma} \cdot \vec{i}_1$; $n = 2$, $\vec{s}_{(1)} = \vec{\sigma} \cdot (\vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3) = \sigma_2 \vec{i}_2 + \sigma_3 \vec{i}_3$, $\vec{s}_{(2)} = \vec{\sigma} \cdot (\vec{i}_4 \vec{i}_4 + \vec{i}_5 \vec{i}_5) = \sigma_4 \vec{i}_4 + \sigma_5 \vec{i}_5$ соотношения (19) принимают вид

$$\vec{e} = (c^{00} \sigma_0 + c^{01} \sigma_1) \vec{i}_0 + (c^{01} \sigma_0 + c^{11} \sigma_1) \vec{i}_1 + 2D^1 (\sigma_2 \vec{i}_2 + \sigma_3 \vec{i}_3) + 2D^2 (\sigma_4 \vec{i}_4 + \sigma_5 \vec{i}_5).$$

Запишем соотношения (19) в виде

$$\vec{e} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} (c^{\alpha\beta} \sigma_\beta + a^\alpha (T - T_0)) \vec{i}_\alpha + \sum_{\gamma=1}^n 2D^\gamma \vec{s}_{(\gamma)}. \quad (21)$$

В соответствии с постановкой обратной термомеханической задачи (2) соотношение (21) записывается в тензорно-линейной форме следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} (C^{\alpha\beta} T_\beta + a^\alpha (T - T_0)) \mathbf{I}^\alpha + \sum_{\gamma=1}^n 2D^\gamma \mathbf{T}_{(\gamma)},$$

а для изотропного материала в изотермических процессах

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{K} \sigma_0 \mathbf{E} + \frac{1}{2G} \tilde{\mathbf{T}}.$$

Более сложную термомеханическую модель анизотропного материала, построенную в рамках предельной формы частного постулата, можно получить на основании представления потенциала Гиббса в виде

$$\rho_0 G = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} c^{\alpha\beta} (\sigma_\alpha, \sigma_\beta) \sigma_\alpha \sigma_\beta - \sum_{\gamma=1}^n D^\gamma (t_{(\gamma)}^2) t_{(\gamma)}^2 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \sigma_\alpha (T - T_0) + \rho_0 G^{(0)}(T), \quad (22)$$

где коэффициенты, определяющие упругие свойства материала, полагаются функциями инвариантов напряжений, причём $c^{\alpha\beta}$ зависят только от линейных инвариантов, а D^γ зависят от квадратичных инвариантов в соответствующих неодномерных собственных подпространствах.

Определим деформации и энтропию, исходя из выражений (17) и (22):

$$\begin{aligned} \vec{e} &= -\rho_0 \frac{\partial G}{\partial \vec{\sigma}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} \left(\frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_\alpha} \cdot \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \vec{\sigma}} \sigma_\alpha \sigma_\beta + \frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_\beta} \cdot \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \vec{\sigma}} \sigma_\alpha \sigma_\beta + 2c^{\alpha\beta} \sigma_\beta \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \vec{\sigma}} \right) + \\ &\quad + \sum_{\gamma=1}^n \left(\frac{\partial D^\gamma}{\partial t_{(\gamma)}^2} \cdot \frac{\partial t_{(\gamma)}^2}{\partial \vec{\sigma}} t_{(\gamma)}^2 + D^\gamma \frac{\partial t_{(\gamma)}^2}{\partial \vec{\sigma}} \right) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \vec{\sigma}} (T - T_0), \\ \vec{e} &= \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} \left(\frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_\alpha} \sigma_\alpha \sigma_\beta \vec{i}_\alpha + c^{\alpha\beta} \sigma_\beta \vec{i}_\alpha + a^\alpha \vec{i}_\alpha (T - T_0) \right) + \sum_{\gamma=1}^n \left(2 \frac{\partial D^\gamma}{\partial t_{(\gamma)}^2} t_{(\gamma)}^2 \vec{\sigma}_{(\gamma)} + 2D^\gamma \vec{\sigma}_{(\gamma)} \right), \\ \vec{e} &= \sum_{\alpha, \beta=0}^{m-1} \left(\frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_\alpha} \sigma_\alpha \sigma_\beta + c^{\alpha\beta} \sigma_\beta + a^\alpha (T - T_0) \right) \vec{i}_\alpha + 2 \sum_{\gamma=1}^n \left(D^\gamma + \frac{\partial D^\gamma}{\partial t_{(\gamma)}^2} t_{(\gamma)}^2 \right) \vec{\sigma}_{(\gamma)}, \quad (23) \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{\rho_0} \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \sigma_\alpha + c_\sigma \ln \frac{T}{T_0}.$$

Определяющие соотношения (23) удовлетворяют предельной форме частного постулата изотропии, так как процесс нагружения в каждом не одномерном собственном подпространстве $\vec{\sigma}_{(\gamma)}$ не оказывает влияния на процессы в других собственных подпространствах и не зависит от них. Это и позволяет утверждать, что модель (23) удовлетворяет именно предельной форме частного постулата. Если $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{(\gamma)}$, то $\vec{e} = \vec{e}_{(\gamma)}$; если $\vec{\sigma} = \sigma^\alpha \vec{i}_\alpha$, то и $\vec{e} = e^\alpha \vec{i}_\alpha$. Например, для трансверсально-изотропного материала это означает, что нагружение в плоскости изотропии, заданное тензором напряжений $\mathbf{T} = T_{12}(\vec{e}^1 \vec{e}^2 + \vec{e}^2 \vec{e}^1)$ и соответствующим ему вектором напряжений $\vec{\sigma} = \sigma_3 \vec{i}_3$, когда процесс происходит в не одномерном собственном подпространстве с базисным тензором $\mathbf{\Omega} = \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3$, не приведёт к появлению составляющих деформаций, выходящих из этого подпространства, так как $\vec{e} = 2\vec{\sigma} \left(G^1 + \frac{\partial G^1}{\partial t_{(1)}^2} t_{(1)}^2 \right)$. Кроме того, в этом случае векторы напряжений и деформаций коллинеарны.

Если в соотношении (22) считать, что $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = c_0^{\alpha\beta} + \bar{c}^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$, а $D^\gamma(t_{(\gamma)}^2) = D^\gamma + \bar{D}^\gamma t_{(\gamma)}$, где $c_0^{\alpha\beta}$, $\bar{c}^{\alpha\beta}$, D^γ , \bar{D}^γ — константы, то получим следующее выражение для потенциала Гиббса:

$$\begin{aligned} \rho_0 G = & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} \left(c_0^{\alpha\beta} + \bar{c}^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \sigma_\alpha \sigma_\beta \right) - \\ & - \sum_{\gamma=1}^n (D^\gamma + \bar{D}^\gamma t_{(\gamma)}) t_{(\gamma)}^2 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} a^\alpha \sigma_\alpha (T - T_0) + \rho_0 G^{(0)}(T). \end{aligned}$$

Определим деформации, исходя из этого представления потенциала Гиббса:

$$\begin{aligned} \vec{e} = & \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} \left(c_0^{\alpha\beta} \sigma_\beta + 2\bar{c}^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta + \bar{c}^{\alpha\beta} \sigma_\beta^2 + a^\alpha (T - T_0) \right) \vec{i}_\alpha + \\ & + 2 \sum_{\gamma=1}^n \left(D^\gamma + \frac{3}{2} \bar{D}^\gamma t_{(\gamma)} \right) \vec{\sigma}_{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (24)$$

При малых деформациях в случае изотермических процессов эти соотношения представляют собой обобщённый закон Гука:

$$\vec{e} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{m-1} c_0^{\alpha\beta} \sigma_\beta \vec{i}_\alpha + 2 \sum_{\gamma=1}^n D^\gamma \vec{\sigma}_{(\gamma)},$$

то есть константы $c_0^{\alpha\beta}$, D^γ образуют тензор упругих податливостей, обратный тензору упругости материала.

В случае изотропного материала, который имеет один линейный инвариант σ_0 , e_0 ($m = 1$) и один квадратичный инвариант $t_{(1)}^2 = \tau^2 = \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}$, $s_{(1)}^2 = \vec{e} \cdot \vec{e}$ ($n = 1$), при постоянной температуре соотношения (24) принимают вид

$$\vec{e} = (c_0^{00} \sigma_0 + 3\bar{c}^{00} \sigma_0^2) \vec{i}_0 + 2 \left(D^1 + \frac{3}{2} \bar{D}^1 \tau \right) \vec{\sigma}_1$$

и представляют собой четырёхконстантную квадратичную модель упругого изотропного тела. При этом зависимости объёмной деформации от гидростатического напряжения и интенсивности формоизменения от интенсивности напряжений описываются следующими выражениями:

$$e_0 = c_0^{00} \sigma_0 + 3\bar{c}^{00} \sigma_0^2, \quad s_{(1)} = 2D^1 \tau + 3\bar{D}^1 \tau^2.$$

Константы этой модели c_0^{00} , \bar{c}^{00} , D^1 , \bar{D}^1 можно определить из двух экспериментов на всестороннее сжатие и на сдвиг, аппроксимируя экспериментальные кривые параболой.

Таким образом, предложенные определяющие соотношения являются решениями обратной термомеханической задачи. С использованием потенциала Гиббса можно построить и более сложные модели, которые удовлетворяют обобщениям частного постулата изотропии и при этом учитывают взаимное влияние процессов, происходящих в различных собственных подпространствах.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jones R. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
- [2] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [3] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // Composites. 1977. Vol. 8, no. 4. P. 237–243.
- [4] Трещёв А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. Москва, Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. 328 с.
- [5] Трещёв А.А., Лисицкий В.С. Потенциал деформаций для нелинейно ортотропных разносопротивляющихся материалов // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики: сборник научных трудов 9-й Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики. 2013. Т. 2. С. 454–458.
- [6] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика конечного деформирования анизотропных тел // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2001. Т. 7, № 2. С. 130–137.
- [7] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: Физматлит, 2013. 320 с.
- [8] Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
- [9] Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. Москва: Наука, 1986. 232 с.
- [10] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. 311 с.
- [11] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. Москва: Мир, 1975. 592 с.
- [12] Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 370 с.
- [13] Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.
- [14] Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, № 3. С. 420–435.
- [15] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. Москва: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
- [16] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, № 4. С. 587–594.
- [17] Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38–45.

D. V. Khristich

CONSTRUCTION OF NONLINEAR CONSTITUTIVE RELATIONS FOR ELASTIC ANISOTROPIC MATERIALS

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. The inverse thermomechanical problem, which consists in determining the response in the form of deformations of an anisotropic elastic body to the process of loading and temperature changes is formulated in the case of finite strains. The thermomechanical problem is solved within the framework of generalizations of the particular postulate of isotropy by A.A. Ilyushin for the case of finite strains of anisotropic bodies. On the basis of the Gibbs thermodynamic potential, nonlinear constitutive relations are constructed in the form resolved with respect to strains.

Keywords: nonlinear constitutive relations, anisotropic materials, the particular postulate of isotropy, Gibbs potential.

REFERENCES

- [1] Jones R. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
- [2] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [3] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // Composites. 1977. Vol. 8, no. 4. P. 237–243.
- [4] Treschev A. Theory of deformation and strength of materials with initial or induced sensitivity to the type of stress state. Constitutive relations. Moscow, Tula: RAASN; TulSU, 2016. 328 p. (in Russian).
- [5] Treschev A., Lisitskii V. Deformation potential for non-linearly orthotropic multiresistance materials // Socio-economic and environmental problems of mining, construction and energy: collection of scientific papers of the 9th International Conference on Mining, Construction and Energy. 2013. Vol. 2. P. 454–458. (in Russian).
- [6] Markin A., Sokolova M. Thermomechanics of finite deformation of anisotropic bodies // Izvestiya TulGU. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2001. Vol. 7, no. 2. P. 130–137. (in Russian).
- [7] Markin A., Sokolova M. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 p. (in Russian).
- [8] Ilyushin A. Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory. Moscow: USSR Academy of Sciences Publishers, 1963. 272 p. (in Russian).
- [9] Pozdeev A., Trusov P., Nyashin Y. Large elastoplastic deformations: theory, algorithms, applications. Moscow: Nauka, 1986. 232 p. (in Russian).
- [10] Prager V. Introduction to Continuum Mechanics. Moscow: Publishing House of foreign literature, 1963. 311 p. (in Russian).
- [11] Truesdell C. The initial course of rational continuum mechanics. Moscow: Mir Publishers, 1975. 592 p. (in Russian).
- [12] Kovalenko A. Fundamentals of thermoelasticity. Kiev: Naukova dumka, 1970. 370 p. (in Russian).
- [13] Novatsky V. Theory of elasticity. Moscow: Mir Publishers, 1975. 872 p. (in Russian).
- [14] Rychlewsky Y. On the Hooke's law // Applied mathematics and mechanics. 1984. Vol. 48, no. 3. P. 420–435. (in Russian).
- [15] Ilyushin A. Continuum mechanics. Moscow: MSU Publishers, 1990. 310 p. (in Russian).
- [16] Markin A., Sokolova M. Nonlinear relations of anisotropic elasticity and the particular postulate of isotropy // Applied mathematics and mechanics. 2007. Vol. 71, no. 4. P. 587–594. (in Russian).
- [17] Markin A., Sokolova M., Khristich D. A.A. Ilyushin's postulate for anisotropic materials and a variant of constitutive relations // Mechanics of solids. 2011. no. 1. P. 38–45. (in Russian).

Khristich Dmitrii Viktorovich

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

А. П. Кержаев¹, И. В. Меньшова^{1,2}, А. В. Никитин³

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ТОРЦЕ

¹Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН,
г. Москва, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Россия

³Чебоксарский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В статье рассмотрена краевая задача теории упругости для полуполосы со смешанными граничными условиями на ее торце. Граничные условия на длинных сторонах соответствуют периодическому продолжению решения в полуплоскость, т.е. решение представляется в виде тригонометрических рядов Фурье. Построено точное решение задачи, основанное на использовании сопряженных тригонометрических рядов.

Ключевые слова: смешанная задача, полуполоса, тригонометрические ряды Фурье, сопряженные ряды.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.003

УДК: 539.374

1. Введение. Смешанные краевые задачи теории упругости относятся к числу наиболее трудных. Им посвящено огромное количество исследований, обзор которых можно найти, например, в [1–4]. Классическим примером является задача для полуполосы со свободными длинными сторонами, часть торца которой жестко закреплена,

© Кержаев А. П., Меньшова И. В., Никитин А. В., 2023

Кержаев Александр Петрович

e-mail: alex_kerg@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия.

Меньшова Ирина Владимировна

e-mail: menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва, Россия; доцент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Никитин Андрей Витальевич

e-mail: ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий, Чебоксарский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, г. Чебоксары, Россия

Поступила 20.10.2023

а к другой части приложена нагрузка. Общих методов построения точных решений (не сводящих краевую проблему к бесконечным системам алгебраических уравнений) такого рода задач, насколько нам известно, нет.

Предлагаемый в этой статье метод решения смешанных краевых задач в полуполосе не зависит от вида однородных граничных условий на ее длинных сторонах (свободные стороны, жестко защемленные, подкрепленные ребрами жесткости). Это могут быть тригонометрические ряды или, в общем случае, ряды по собственным функциям Папковича–Фадля [5]. Метод основан на использовании сопряженных рядов. Для перехода к сопряженным рядам вводятся аналитические функции (например, [5]). Окончательное решение задачи будет представляться двойными рядами по собственным функциям краевой задачи.

Чтобы максимально упростить задачу и избежать непринципиальных трудностей, будем считать, что граничные условия на длинных сторонах полуполосы выбраны так, что собственными функциями являются хорошо известные тригонометрические системы функций.

2. Постановка краевой задачи. Рассмотрим полуполосу $\{П : x \geq 0, |y| \leq 1\}$. Будем считать, что на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ поперечные перемещения и касательные напряжения равны нулю, т.е.

$$v(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0. \quad (1)$$

На торце полуполосы заданы следующие граничные условия:

при $|y| \leq \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) заданы нормальное и нулевое касательное напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad (2)$$

а на участках $\alpha < |y| \leq 1$ граничные условия соответствуют скользящей заделке, т.е.

$$u(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad (3)$$

где $u(x, y)$ – перемещение в направлении оси x (схема задачи показана на рис. 1). Из (2), (3) следует, что на всем отрезке $|y| \leq 1$

$$\tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (4)$$

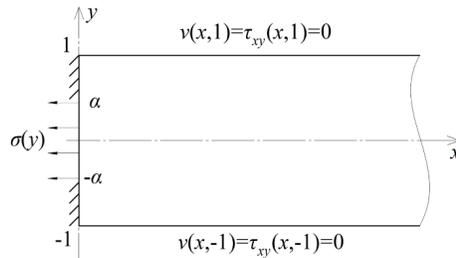


Рис. 1. Схема смешанной задачи для полуполосы

Решение задачи ищется в виде следующих рядов [6]:

$$\sigma_x(x, y) = a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)a_k q_k^3 + 2b_k q_k^2 + x(1 + \nu)b_k q_k^3] e^{q_k x} \cos q_k y,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x, y) &= \nu a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)a_k q_k^3 + 2(2 + \nu)b_k q_k^2 + x(1 + \nu)b_k q_k^3] e^{q_k x} \cos q_k y, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)a_k q_k^3 + (3 + \nu)b_k q_k^2 + x(1 + \nu)b_k q_k^3] e^{q_k x} \sin q_k y, \\
U(x, y) &= b_0 + \frac{1 - \nu}{2} a_0 x - \frac{1 + \nu}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k q_k^2 + b_k q_k + x b_k q_k^2] e^{q_k x} \cos q_k y, \\
V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 + \nu}{2} a_k q_k^2 + 2b_k q_k + x \frac{1 + \nu}{2} b_k q_k^2 \right] e^{q_k x} \sin q_k y.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $U(x, y)$, $V(x, y)$ – умноженные на модуль сдвига перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$ соответственно; ν – коэффициент Пуассона; a_0 , b_0 , a_k , b_k – неизвестные коэффициенты; $q_k = -k\pi$.

3. Решение задачи. Примем вначале, что $a_0 = b_0 = 0$. Используя, например, [5], введем функцию

$$F(y) = - \left[(1 + \nu) \frac{\partial U(0, y)}{\partial y} + \frac{1 - \nu}{2} \tau_{xy}(0, y) \right] - i \sigma_x(0, y). \tag{6}$$

Подставив сюда (5), получим

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F(y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)a_k q_k + 2b_k] q_k^2 \sin q_k y, \\
\operatorname{Im} F(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu)a_k q_k + 2b_k] q_k^2 \cos q_k y.
\end{aligned} \tag{7}$$

Выразим с помощью (4) b_k через a_k ,

$$b_k = - \frac{1 + \nu}{3 + \nu} a_k q_k, \tag{8}$$

и подставим в (7). Тогда получим

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F(y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_k \sin q_k y, \\
\operatorname{Im} F(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k q_k \cos q_k y, \quad A_k = \frac{(1 + \nu)^2}{3 + \nu} a_k q_k^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Ряды (7) или (9) называются сопряженными [7, 8]. Если, скажем, первый ряд (9) продифференцировать или проинтегрировать по переменной y , то полученный ряд по-прежнему называется сопряженным ко второму ряду (9). Например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos q_k y \tag{10}$$

сопряжен к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k q_k \cos q_k y. \tag{11}$$

Обозначим ($k, m = 1, 2, \dots$)

$$C_{km} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos q_k y \cos q_m y dy = \begin{cases} \alpha + \frac{\sin \alpha(q_k + q_m)}{q_k + q_m} & (k = m), \\ \frac{\sin \alpha(q_k + q_m)}{q_k + q_m} + \frac{\sin \alpha(q_k - q_m)}{q_k - q_m} & (k \neq m) \end{cases} \quad (12)$$

и вместо (10), (11) введем сопряженные ряды ($|y|, |t| \leq 1$)

$$\begin{aligned} F_U(y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \cos(q_k t), \\ F_{\sigma}(y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \cos(q_k t). \end{aligned} \quad (13)$$

Их можно рассматривать как аналоги рядов (10) и (11). Представление сопряженных рядов с дополнительным параметром t позволяет сделать их не зависящими от вида раскладываемой функции.

Умножим второй ряд (13) на функцию $\sigma(t)$, фигурирующую в (2), и проинтегрируем по t от -1 до 1 . В результате получим представление функции

$$\sigma_x(0, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \sigma_k, \quad \sigma_k = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma(t) \cos q_k t dt \quad (14)$$

при $|y| \leq 1$ такое, что при $|y| < \alpha$

$$\sigma(y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \sigma_k. \quad (15)$$

Учитывая, что в формуле (6) касательные напряжения равны нулю, заключаем, что ряд, сопряженный к ряду (15), является представлением функции $U(0, y)$, т.е.

$$U(0, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(q_m y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \sigma_k. \quad (16)$$

Из сравнения рядов (10), (16) и (11), (15) видно, что

$$A_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{km}}{q_k} \sigma_k. \quad (17)$$

Функция (16) равна нулю при $|y| \geq \alpha$ (это становится очевидным после перестановки порядков суммирования). Но фактически она будет равна некоторой постоянной, что обусловлено самоуравновешенностью базисных функций при $|y| \leq 1$. По этой причине кривая (16) будет лежать выше или ниже оси y и, следовательно, не будет равна нулю при $|y| \geq \alpha$ вопреки граничному условию (3). Сдвинем ее так, чтобы $U(0, \pm\alpha) = 0$. Тогда вместо (17) получим формулу

$$A_k^* = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_m}{q_m} \left(C_{km} - \frac{2 \sin q_k \alpha}{q_k} \cos q_m \alpha \right). \quad (18)$$

Поэтому, согласно (9), (8),

$$a_k = -\frac{3 + \nu}{(1 + \nu)^2} \frac{A_k^*}{q_k^2}, \quad b_k = \frac{1}{1 + \nu} \frac{A_k^*}{q_k}. \quad (19)$$

Так как на торце полуполосы нормальные напряжения $\sigma_x(0, y)$ всегда самоуравновешены, то $a_0 = 0$, а коэффициент b_0 можно считать равным $-U(0, 1)$.

Подставляя (19) в (5), получим решение краевой задачи (1)–(3).

4. Пример. Пусть $\sigma(y)$ самоуравновешена и

$$\sigma(y) = y^4 - \frac{6}{5}\alpha^2 y^2 + \frac{1}{5}\alpha^4. \quad (20)$$

Найдем числа σ_m из (14), затем числа A_k^* по формуле (18) и, наконец, коэффициенты (19), входящие в решение (5).

Примем $\alpha = 0.5$, $\nu = 0.3$ и приведем некоторые графики, иллюстрирующие полученное решение (рис. 2, 3). Напряжения определялись в сечении $x = 0.01$, а перемещения – при $x = 0$. В формулах для напряжений и перемещений при суммировании удерживалось 100 членов ряда.

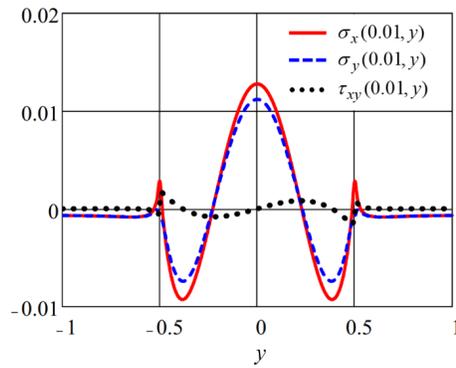


Рис. 2. Распределение напряжений при $x = 0.01$

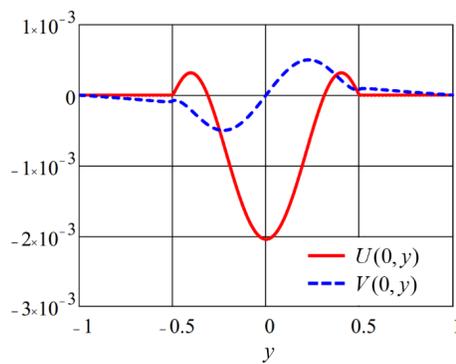


Рис. 3. Распределение перемещений при $x = 0$

Обратим внимание на график функции $U(0, y)$ (рис. 3). Производная этой функции в точках $y = \pm\alpha$ имеет не равное нулю конечное значение. Поэтому напряжения $\sigma_x(\pm\alpha, y)$ и $\sigma_y(\pm\alpha, y)$ будут иметь при $x = \pm\alpha$ логарифмические особенности. Если в

формуле (20) заменить α на β и считать, что $\beta < \alpha$, т.е. что ненулевые нормальные напряжения $\sigma(y)$ заданы строго внутри интервала $|y| \leq \alpha$, то производная функции $U(0, y)$ при $y = \pm\alpha$ будет равна нулю и, значит, нормальные напряжения в этих точках будут ограничены.

Для того чтобы посчитать напряжения при очень маленьких значениях переменной x , в том числе при $x = 0$, нужно взять больше членов ряда. Однако решающее значение имеет точность собственных значений.

5. Выводы.

- (1) Основным недостатком полученного решения является то, что коэффициенты разложений в смешанной краевой задаче не выражаются через элементарные функции, а представляются в виде бесконечных рядов. Это приводит к определенным трудностям вычислительного характера при подсчете напряжений на торце полуполосы, т.к. в этом случае требуется высокая точность в определении собственных значений (десятки значащих цифр после запятой).
- (2) Несомненным достоинством решения является то, что оно представляется в простом замкнутом виде. При этом не возникает необходимости в исследовании и решении интегральных уравнений или бесконечных систем алгебраических уравнений.
- (3) Аналогично решаются более сложные задачи, например, когда часть торца полуполосы жестко закреплена, а на другой части действуют нагрузки, когда на торце полуполосы имеются одномерные упругие накладки, через которые передается нагрузка и т.д.
- (4) Метод применим для любых однородных граничных условий на длинных сторонах полуполосы (свободные стороны, жестко закрепленные и т.д.). В общем случае вместо тригонометрических функций в представлении решений будут фигурировать собственные функции Папковича–Фадля, теория которых была развита в статьях [9–12].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] The plane mixed problem for an elastic semi-strip under different load types at its short edge / O. Menshykov, O. Reut, V. Reut et al. // International Journal of Mechanical Sciences. 2018. Vol. 144. P. 526–530.
- [2] Pozhylenkov O., Vaysfeld N. Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions // Procedia Structural Integrity. 2020. Vol. 28. P. 458–463.
- [3] Ngoc N. V. On a mixed boundary value problem for the biharmonic equation in a strip // Acta Mathematica Vietnamica. 2017. Vol. 42. P. 395–411.
- [4] Read W. W. An analytic series method for Laplacian problems with mixed boundary conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. Vol. 209, no. 1. P. 22–32.
- [5] A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, A. P. Kerzhaev et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. Vol. 71, no. 6. p. 199.
- [6] Меньшова И. В. О периодических решениях Файлона–Рибьера в двумерной задаче теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 106–131.
- [7] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [8] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1, 2.
- [9] Kerzhaev A. P., Kovalenko M. D., Menshova I. V. Borel transform in the class W of quasi-entire functions // Complex Analysis and Operator Theory. 2018. Vol. 12, no. 3. P. 571–587.

- [10] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2018. Vol. 69, no. 5. p. 121.
- [11] Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // *Изв. РАН. МТТ*. 2013. № 5. С. 121–144.
- [12] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // *Изв. РАН. МТТ*. 2011. № 5. С. 78–98.

A. P. Kerzhaev¹, I. V. Menshova^{1,2}, A. V. Nikitin³

ON SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR AN ELASTIC HALF-STRIP WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS AT THE END

¹*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

³*Cheboksary Cooperative Institute (Branch) of the Russian University of Cooperation, Cheboksary, Russia*

Abstract. The paper deals with a boundary value problem of the theory of elasticity for a half-strip with mixed boundary conditions at its end. The boundary conditions on the long sides correspond to the periodic continuation of the solution into a half-plane, i.e. the solution is represented in the form of trigonometric Fourier series. An exact solution to the problem based on the use of conjugate trigonometric series is constructed.

Keywords: mixed problem, half-strip, trigonometric Fourier series, conjugate series.

REFERENCES

- [1] The plane mixed problem for an elastic semi-strip under different load types at its short edge / O. Menshykov, O. Reut, V. Reut et al. // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 144. P. 526–530.
- [2] Pozhylenkov O., Vaysfeld N. Stress state of a rectangular domain with the mixed boundary conditions // *Procedia Structural Integrity*. 2020. Vol. 28. P. 458–463.
- [3] Ngoc N. V. On a mixed boundary value problem for the biharmonic equation in a strip // *Acta Mathematica Vietnamica*. 2017. Vol. 42. P. 395–411.
- [4] Read W. W. An analytic series method for Laplacian problems with mixed boundary conditions // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007. Vol. 209, no. 1. P. 22–32.
- [5] A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions / M. D. Kovalenko, I. V. Menshova, A. P. Kerzhaev et al. // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2020. Vol. 71, no. 6. p. 199.
- [6] Menshova I. V. On periodic Filon–Ribiere solutions in a two-dimensional problem of elasticity theory // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2015. no. 1 (23). P. 106–131.
- [7] Bari N. K. A treatise on trigonometric series. Oxford: Pergamon Press, 1964. Vol. I, II.

Kerzhaev Alexander Petrovich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Menshova Irina Vladimirovna, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.
Nikitin Andrey Vitalievich, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Cheboksary Cooperative Institute (Branch) of the Russian University of Cooperation, Cheboksary, Russia.

- [8] Zygmund A. Trigonometric series. Cambridge: Cambridge University Press, 1959. Vol. I, II.
- [9] Kerzhaev A. P., Kovalenko M. D., Menshova I. V. Borel transform in the class W of quasi-entire functions // Complex Analysis and Operator Theory. 2018. Vol. 12, no. 3. P. 571–587.
- [10] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69, no. 5. p. Art. 121.
- [11] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadde–Papkovich functions: examples of solutions in a half-strip // Mechanics of Solids. 2013. Vol. 48, no. 5. P. 584–602.
- [12] Kovalenko M. D., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadde–Papkovich functions in a strip. Theory foundations // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, no. 5. P. 721–738.

А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова

ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено многослойное вязкоупругое сферическое тело с наполнителем сложной структуры при динамическом деформировании. Дана общая постановка задачи. Получены точные решения для полей напряжений, деформаций и перемещений в упругой, пластической и вязкой областях.

Ключевые слова: вязкоупругость, пластичность, сложная реология, многослойное сферическое тело, осесимметричное состояние, напряжения, перемещения.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.004

УДК: 539.3

Элементами многих технологических объектов являются сферические оболочки [1–3]. При этом они могут испытывать динамические нагрузки. Для безопасной эксплуатации таких оболочек необходимо производить расчеты их поведения при динамическом нагружении. Работа [4] посвящена исследованию динамического деформирования сферической вязкоупругой оболочки с упругопластическим наполнителем [5], упруговязкопластический наполнитель [6] рассматривался в работе [7]. В [4] получено точное аналитическое решение, в работе [7] получено приближенное решение в интегральной форме. В данной работе рассматривается квазистатическая постановка задачи динамического деформирования многослойного вязкоупругого тела с наполнителем сложной структуры.

© Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д., 2023

Спорыхин Анатолий Николаевич

e-mail: anatoli.sporuhin@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Щеглова Юлия Дмитриевна

e-mail: scheglova@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.12.2023

Постановка задачи

Рассмотрим сферическое многослойное вязкоупругое тело с заполнителем толщины h . По внутренней полости тела радиуса a равномерно распределена динамическая нагрузка P . По внешней оболочке радиуса b равномерно распределена нагрузка p . Выражения для этих нагрузок имеют вид

$$P = P_0 e^{\hat{a}t}, \quad p = p_0, \quad t_* \leq t < t_0, \quad (1)$$

где \hat{a} - известная константа.

Для определения напряженно-деформированного состояния данного тела будем использовать соотношения геометрически линейной теории.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_i \sigma_j^i = 0, \quad (2)$$

где ∇_i обозначает ковариантную производную по i - компоненте.

Граничные условия в напряжениях на внутренней и внешней оболочках в общем виде таковы

$$\sigma_i^j n_j = p_i, \quad (3)$$

где n_j -- орты нормали к поверхности тела, p_i -- составляющие вектора поверхностных сил.

В качестве геометрических соотношений будем использовать соотношения Коши

$$\varepsilon_i^j = \frac{1}{2} (\nabla_i w^j + \nabla_j w^i). \quad (4)$$

Будем считать, что заполнитель может находиться в упругопластическом состоянии. Следовательно, на границе γ раздела упругой и пластической областей будут выполняться условия сплошности. Эти же условия выполняются и на границе $b - h$ контакта заполнитель-оболочка

$$[w_i] | = 0, \quad (5)$$

$$[\sigma_i^j] | = 0. \quad (6)$$

Такие же условия справедливы и на границах жесткого контакта вязкоупругих слоев, то есть при

$$r = a + h + \sum_{\alpha=1}^m h_\alpha, \quad (7)$$

где α - определяет количество вязкоупругих слоев сферического тела.

Зарождение пластической зоны в заполнителе начинается от границы внутренней полости, что соответствует моменту времени $t = t_*$. Тогда начальные условия будут иметь форму

$$\gamma|_{t=t_*} = a, \quad \varepsilon_{ij}^p|_{t=t_*} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^\alpha|_{t=t_*} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Определим уравнения состояния в упругой, пластической и вязкоупругих зонах деформирования.

В упругой зоне будем моделировать среду несжимаемым телом Гука

$$S_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{kk}^e = 0. \quad (9)$$

В пластической зоне заполнителя примем соотношения упруговязкопластического тела Спорыхина [6], для которого функция нагружения имеет вид

$$\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right) \left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right) = k^2 . \quad (10)$$

И ассоциированный закон пластического течения будет следующим

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \bar{\lambda} \left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right) , \quad (11)$$

где η - коэффициент вязкости, c - коэффициент упрочнения, k - предел текучести, $\bar{\lambda}$ - положительный скалярный множитель.

Полная деформация в пластической области включения является суммой упругой ε_{ij}^e и пластической ε_{ij}^p составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p . \quad (12)$$

Также как в упругой зоне примем, что объемная деформация удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{kk} = 0 . \quad (13)$$

В пластической зоне в качестве второго варианта среды будем также использовать модель [5] с поверхностью нагружения вида

$$\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p\right) \left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p\right) = k^2 \quad (14)$$

и ассоциированным законом пластического течения в форме

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \bar{\lambda} \left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p\right) . \quad (15)$$

Очевидно, что соотношения (14) и (15) следуют из (10) и (11) при $\eta = 0$.

Вязкоупругие слои оболочки будем представлять несжимаемым телом Кельвина-Фойхта [8]

$$S_{ij}^\alpha = 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^\alpha + 2\eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^\alpha , \quad \varepsilon_{kk}^\alpha = 0 , \quad (16)$$

где нет суммирования по $\alpha = 1, 2, \dots, m$, и каждый слой имеет свои физико-механические параметры.

Системы уравнений (1)-(13) и (16) или (1)-(9) и (12)-(16) представляют собой замкнутые математические задачи для определения напряженно-деформированного состояния неоднородного вязкоупругого сферического тела с включением.

Общий вид решения при осесимметричном состоянии

Для решения поставленной задачи воспользуемся сферической системой координат r, θ, φ . В силу осесимметричности поставленной задачи ее решение будет следующим.

В упругой области включения V^e из соотношений (2), (4) и (9) будем иметь

$$\sigma_r = -4\mu \frac{A_1}{r^3} + A_2 , \quad \sigma_\theta = 2\mu \frac{A_1}{r^3} + A_2 , \quad w = \frac{A_1}{r^2} . \quad (17)$$

В пластической области включения V^p из соотношений (2), (4) и (9)-(13) с учетом начального условия (8) получим

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2\mu \left[3\tilde{k}E \ln r + 2B_1(1 - 2\mu E) \frac{1}{r^3} \right] + B_2, \\ \sigma_\theta &= -3\mu\tilde{k}E(1 + 2 \ln r) + 2\mu B_1(1 - 2\mu E) \frac{1}{r^3} + B_2, \\ \varepsilon_r^p &= \left(\tilde{k} + \frac{4\mu B_1}{r^3} \right) E,\end{aligned}\tag{18}$$

где

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{2}{3}}k, \quad E = \left(1 - e^{\frac{2\mu+c}{\eta}t_*} e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t} \right) \left(\frac{1}{2\mu+c} \right).\tag{19}$$

Для тела Ишлинского-Ивлева, представленного (14) и (15), решение будет также определяться соотношениями (18), где

$$E = \frac{1}{2\mu+c}.\tag{20}$$

Для вязкоупругих слоев оболочки из соотношений (2), (4) и (16) получим напряженно-деформированное состояние в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r^\alpha &= -\frac{4(\mu_\alpha C_1^\alpha + \eta_\alpha \dot{C}_1^\alpha)}{r^3} + C_2^\alpha, \quad \sigma_\theta^\alpha = \frac{2(\mu_\alpha C_1^\alpha + \eta_\alpha \dot{C}_1^\alpha)}{r^3} + C_2^\alpha, \\ w^\alpha &= \frac{C_1^\alpha}{r^2}, \quad \varepsilon_r^\alpha = -\frac{2C_1^\alpha}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta^\alpha = \varepsilon_\varphi^\alpha = \frac{C_1^\alpha}{r^3}, \quad \dot{C}_1^\alpha = \frac{dC_1^\alpha}{dt},\end{aligned}\tag{21}$$

где нет суммирования по $\alpha = 1, 2, \dots, m$.

Неизвестные интегрирования $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1^\alpha, C_2^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$), а также радиус упругопластической границы заполнителя γ определяются из условий (1), (3), (5), (6) и (8), которые будут иметь вид

- граничные условия

$$\begin{aligned}\sigma_r^p &= -P_0 e^{\hat{a}t} \quad \text{при } r = a, \\ \sigma_r^m &= -p_0 \quad \text{при } r = b,\end{aligned}\tag{22}$$

- условия сопряжения на упругопластической границе

$$\begin{aligned}w^e &= w^p \quad \text{при } r = \gamma, \\ \sigma_r^e &= \sigma_r^p \quad \text{при } r = \gamma, \\ \sigma_\theta^e &= \sigma_\theta^p \quad \text{при } r = \gamma,\end{aligned}\tag{23}$$

- условия контакта на границе оболочка-включение

$$\begin{aligned}w^1 &= w^e \quad \text{при } r = a + h, \\ \sigma_r^1 &= \sigma_r^e \quad \text{при } r = a + h,\end{aligned}\tag{24}$$

- условия на поверхностях контакта вязкоупругих слоев

$$\begin{aligned}w^\alpha &= w^{\alpha+1} \quad \text{при } r = a + h + \sum_{\alpha=1}^m h_\alpha, \\ \sigma_r^\alpha &= \sigma_r^{\alpha+1} \quad \text{при } r = a + h + \sum_{\alpha=1}^m h_\alpha,\end{aligned}\tag{25}$$

- начальные условия

$$\begin{aligned} \gamma &= a \quad \text{при} \quad t = t_* , \\ \varepsilon_r^\alpha &= 0 \quad \text{при} \quad t = t_* \quad \alpha = 1, 2, \dots, m . \end{aligned} \quad (26)$$

Решение задачи для двухслойной оболочки

Рассмотрим случай двухслойной оболочки, когда $m = 2$. В этом случае для определения постоянных интегрирования и границы γ из (22)-(26) получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\delta_2}{b^3} - p_0 &= C_2^2 , \quad -\frac{\delta_1}{(a+h+h_1)^3} + C_2^1 = -\frac{\delta_2}{(a+h+h_1)^3} + C_2^2 , \\ -2\mu \left[3\tilde{k}E \ln a + 2C_1^1(1-2\mu E)\frac{1}{a^3} \right] + B_2 &= -P_0 e^{\hat{a}t} , \\ 4\mu \frac{C_1^1}{\gamma^3} + A_2 &= -2\mu \left[3\tilde{k}E \ln \gamma + 2C_1^1(1-2\mu E)\frac{1}{\gamma^3} \right] + B_2 , \\ -\frac{4\delta_1}{(a+h+h_1)^3} + C_2^1 &= -\frac{4\delta_2}{(a+h+h_1)^3} + C_2^2 , \\ 2\mu \frac{C_1^1}{\gamma^3} + A_2 &= -\mu \left[3\tilde{k}E(1+2\ln \gamma) - 2C_1^1(1-2\mu E)\frac{1}{\gamma^3} \right] + B_2 , \end{aligned} \quad (27)$$

где $A_1 = B_1 = C_1^1 = C_1^2$ и введены обозначения

$$\delta_1 = 4 \left(\mu_1 C_1^1 + \eta_1 \dot{C}_1^1 \right) , \quad \delta_2 = 4 \left(\mu_2 C_1^1 + \eta_2 \dot{C}_1^1 \right) .$$

Неизвестная интегрирования C_1^1 определяется из дифференциального уравнения

$$\dot{C}_1^1 + \alpha_1 C_1^1 = \alpha_2 - \frac{1}{4\alpha_0} P_0 e^{\hat{a}t} , \quad (28)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \eta_1 \xi_1 + \eta_2 \xi_2 , \quad \xi_1 = \frac{1}{(a+h+h_1)^3} - \frac{1}{(a+h)^3} , \quad \xi_2 = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h+h_1)^3} , \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0} \left[(\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2) + \mu \left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) + \mu(1-2\mu E) \left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3} \right) \right] , \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4\alpha_0} \left[p_0 + 6\mu\tilde{k}E (\ln a - \ln \gamma) \right] . \end{aligned}$$

В этих соотношениях E определено формулой (19), когда пластическая область заполнителя моделируется телом Спорыхина [6]. В этом случае согласно [7] решение уравнения (28) представляется в интегральной форме. Если же пластическая область есть тело Ишлинского-Ивлева [5], то E вычисляется по формуле (20), и тогда уравнение (28) имеет точное решение следующего вида [9]

$$C_1^1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{P_0 e^{\hat{a}t}}{4\alpha_0(\hat{a} + \alpha_1)} + e^{-\alpha_1 t} \tilde{C}_1^1 . \quad (29)$$

Неизвестная \tilde{C}_1^1 определяется из условия (26) и имеет вид

$$\tilde{C}_1^1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{\alpha_1 t_*} + \frac{P_0}{4\alpha_0(\hat{a} + \alpha_1)} e^{(\hat{a} + \alpha_1)t_*}. \quad (30)$$

Таким образом, в случае модели Ишлинского-Ивлева [5] из соотношений (27) неизвестные интегрирования $A_1 = B_1 = C_1^1 = C_1^2$, A_2 , B_2 , C_2^1 , C_2^2 определяются в аналитическом виде и, следовательно, аналитический вид имеют решения (17), (18) и (21) поставленной задачи.

Последнее уравнение (27) путем ряда преобразований можно привести к уравнению для определения радиуса поверхности, разделяющей упругую и пластическую области деформирования включения

$$4\eta_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \dot{C}_1^1 + \left\{ 4\mu_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) - \frac{4\mu}{(a+h)^3} - 4\mu(1-2\mu E) \frac{1}{a^3} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\gamma^3} [\mu - \mu(1-2\mu E)] \right\} C_1^1 + 3\mu\tilde{k}E(1+2\ln\gamma) - 6\mu\tilde{k}E \ln a - p_0 + P_0 e^{\hat{a}t} = 0. \quad (31)$$

Откуда, полагая в соотношении (29) $\gamma = a$ при $t = t_*$, приходим к уравнению

$$4\eta_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \left[\alpha_2^* + P_0 e^{\hat{a}t_*} \left(1 - \frac{\hat{a}}{4\alpha_0^*(\hat{a} + \alpha_1^*)} + \frac{\alpha_1^*}{4(\hat{a} + \alpha_1^*)} \right) \right] + 3\mu\tilde{k}E - p_0 = 0,$$

где

$$\alpha_0^* = \frac{\eta_2}{b^3} - \frac{\eta_1}{(a+h)^3}, \quad \alpha_1^* = \frac{1}{\alpha_0^*} \left[\frac{\mu_2}{b^3} - \frac{\mu_1}{(a+h)^3} + \mu \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+h)^3} \right) \right], \quad \alpha_2^* = \frac{p_0}{4\alpha_0^*},$$

из которого можно определить нагрузки, при которых при заданных геометрических и физико-механических параметрах на внутренней поверхности включения сферического тела возникает пластическое состояние.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Н. Спорыхин А. И. Шашкин. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. Москва: Физматлит, 2004. 232 с.
- [2] Спорыхин А. Н. Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. 372 с.
- [3] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 4(42). С. 21–24.
- [4] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование кусочно-неоднородного сферического тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 110–114.
- [5] А. Ю. Ишлинский Д. Д. Ивлев. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 701 с.
- [6] Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.
- [7] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование сферического вязкоупругого тела с упруговязкопластическим наполнителем // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 99–105.
- [8] Рейнер М. Реология. Москва: Наука, 1965. 223 с.
- [9] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (4-е издание). Москва: Наука, 1971. 589 с.

A. N. Sporykhin, Yu.D. Shcheglova

**DEFORMATION OF A MULTILAYER VISCOELASTIC SPHERICAL BODY
WITH AN INCLUSION UNDER DYNAMIC LOADING**

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The paper considers a multilayer viscoelastic spherical body with a filler of complex structure under dynamic deformation. The general formulation of the problem is given. Exact solutions were obtained for the fields of stresses, strains and displacements in the elastic, plastic and viscous regions.

Keywords: viscoelasticity, plasticity, complex rheology, multilayer spherical body, axisymmetric state, stresses, displacements.

REFERENCES

- [1] A. N. Sporykhin A. I. Shashkin. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of rock mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2004. 232 c.
- [2] Sporykhin A. N. Non-conservative problems of the three-dimensional theory of inelastic stability in geomechanics. Voronezh: VSU Publishing House, 2015. 372 c.
- [3] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a half-space with a spherical cavity // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 4(42). C. 21–24.
- [4] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a piecewise inhomogeneous spherical body // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2022. № 1(51). C. 110–114.
- [5] A. Yu. Ishlinsky D. D. Ivlev. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 701 c.
- [6] Sporykhin A. N. On the stability of deformation of elastoviscoplastic bodies // PMTF. 1967. № 4. C. 52–58.
- [7] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a spherical viscoelastic body with an elastoviscoplastic filler // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2022. № 2(52). C. 99–105.
- [8] Rayner M. Rheology. Moscow: Science, 1965. 223 c.
- [9] Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations (4th Edition). Moscow: Science, 1971. 589 c.

Sporykhin Anatoliy Nikolaevich, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Shcheglova Yuliya Dmitrievna, Candidate Sci. Phys. and Math., Ass. Professor of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

В. Э. Богачева

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛА УПРУГОСТИ ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ КОМПОЗИТА ПРИ ЕГО НАГРУЖЕНИИ НОРМАЛЬНЫМ ОТРЫВОМ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Исследуется деформирование под действием нормального отрыва композитной пластины, состоящей из двух консолей, связанных адгезионным слоем в состоянии плоской деформации. Из общей вариационной постановки с учетом теории Миндлина—Рейсснера получена постановка в дифференциальном виде. Исследуется аналитическое решение, полученное при комплексных корнях характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений второго порядка. Используя критерий Треска—Сен-Венана, найдено значение внешней нагрузки, соответствующее пределу упругости и началу пластических деформаций в адгезионном слое.

Ключевые слова: адгезионный слой, композит, слой взаимодействия, нормальный отрыв, упругое деформирование, критерий Треска—Сен-Венана.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.005

УДК: 539.375

Введение. В настоящее время происходит активное развитие такого раздела механики деформируемого твердого тела как механика композиционных материалов. При проведении экспериментов на трещиностойкость адгезионных слоев обычно исследуют двухконсольную балку (ДКБ-образец), а слой моделируют в виде математического разреза.

Однако адгезивы наряду с упругими свойствами могут проявлять и выраженные пластические свойства, поэтому необходимо использовать критерий перехода из упругого деформирования в упругопластическое. В этом случае рассмотрение определяющих соотношений адгезионного слоя приведет к более корректной постановке упругопластической задачи, что возможно только при конечной толщине адгезива [1–5]. В

© Богачева В. Э., 2023

Богачева Виктория Эдуардовна

e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, аспирант кафедры вычислительной механики и математики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Поступила 10.12.2023

данной работе используется модель, в которой адгезионный слой заменяют "слоем взаимодействия" [5] с механическими свойствами адгезива и толщиной в виде линейного параметра δ_0 .

1. Постановка задачи. Рассматривается образец в виде слоистого композита, общая длина которого $\ell + a$ (рис. 1). Пластины 1 и 2 идентичны по механическим свойствам и имеют толщину h . По участку длиной ℓ консоли связаны адгезионным слоем 3, толщина которого δ_0 . Правый торец композита закреплен от перемещений, на левых торцах пластин 1 и 2 действует антисимметричная распределенная нагрузка интенсивностью P .

Предполагается жесткое сцепление границ слоя с пластинами, а также равенство противоположность векторов напряжений по границам слоя.

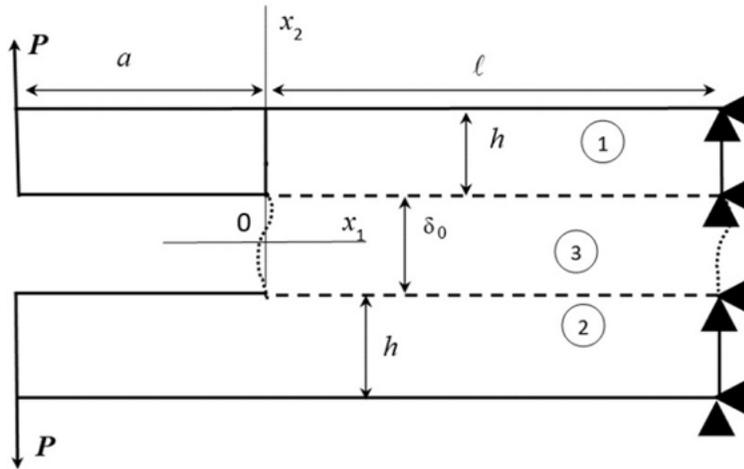


Рис. 1. Схема нагружения образца

На остальную поверхность композита не приложена внешняя нагрузка. Образец находится в состоянии плоской деформации. Поведение консолей 1 и 2 рассматриваем в рамках линейной теории упругости, а материал адгезионного слоя 3 считаем упругопластическим.

Для описания взаимодействия адгезионного слоя 3 с консолями 1 и 2 применим концепцию "слоя взаимодействия" [5]. В силу симметрии рассматриваемого образца получим следующее поле перемещений границ адгезива: $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = -u_2^-$, где u_n^+ , u_n^- — соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ, $n = 1, 2$ здесь и далее, и нулевое касательное напряжение в слое $\bar{\sigma}_{12} = 0$. Поэтому запишем уравнение равновесия в вариационной форме только для пластины 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

где $\cdot \cdot$ — двойное скалярное умножение; \cdot — скалярное умножение; S_1 — площадь поперечного сечения тела 1; L_1 — граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$,

ε — тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ — тензоры средних напряжений и деформаций адгезионного слоя с компонентами: $\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11} dx_2$, $\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22} dx_2$, $\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21} dx_2$, $\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+}{dx_1}$, $\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+}{\delta_0}$, $\bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{21} = 0$.

Уравнение (1) замкнем законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \delta_{ij} \right), \bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1+\nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1-2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (2)$$

где E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона консоли 1; E_3 , ν_3 — модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя 3; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}$ — объемные деформации; δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для того чтобы найти аналитическое решение вариационного уравнения (1), определяем поле перемещений в пластине 1 согласно теории Миндлина [6]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \\ u_2(x_1, x_2) &= u_2^+(x_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая теорию Миндлина—Рейсснера [7], из (2) получим вариант определяющих соотношений для консоли 1:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{d\varphi}{dx_1}(x_2 - \delta_0/2) \right), \sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad (4)$$

где $L = k \frac{E}{2(1+\nu)}$; $k = \frac{5}{6}$; $D = \frac{E}{(1-\nu^2)}$,
и слоя взаимодействия:

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D_2 u_2^+, \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \bar{\sigma}_{33} = \nu_3 (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}), \quad (5)$$

где $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$; $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$; $C_1 = \frac{2D_1}{\delta_0}$; $C_2 = \frac{\delta_0 D_2}{2}$.

Таким образом, приходим к двум системам дифференциальных уравнений для пластины 1:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; & \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0; & x_1 \in [-a; 0), \\ \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; & \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; & x_1 \in (0; \ell], \end{cases} \quad (6)$$

где $Q_{11} = Dh \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx_1} \right)$, $Q_{12} = Lh \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right)$, $M_{11} = Dh^2 \left(\frac{1}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h}{3} \frac{d\varphi}{dx_1} \right)$ — обобщенные силы и обобщенный момент.

Система (6) замкнута граничными условиями:

$$u_n^+|_{x_1=\ell} = 0, \varphi|_{x_1=\ell} = 0, M_{11}|_{x_1=-a} = 0, Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad (7)$$

где $Q_2 = P/b$, b — толщина образца в направлении нормали к рассматриваемому сечению (рис. 1),

и условия сопряжения в точке $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} u_n^+|_{x_1=-0} &= u_n^+|_{x_1=+0}, \varphi|_{x_1=-0} = \varphi|_{x_1=+0}, M_{11}|_{x_1=-0} = M_{11}|_{x_1=+0}, \\ Q_{11}|_{x_1=-0} &= (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, Q_{12}|_{x_1=-0} = Q_{12}|_{x_1=+0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для анализа напряженно-деформированного состояния слоя можно ограничиться рассмотрением только участка $(0; \ell]$, используя следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_n^+|_{x_1=\ell} = 0, \varphi|_{x_1=\ell} = 0, M_{11}|_{x_1=+0} = -Q_2 a, \\ (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0} = 0, Q_{12}|_{x_1=+0} = -Q_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение поставленной задачи определяет три неизвестные функции u_1^+ , u_2^+ , φ .

2. Решение упругой задачи. В работе [8] найдено общее решение системы (6) на участке $(0; \ell]$ для таких толщин адгезионного слоя 3 , при которых дискриминант характеристического уравнения системы (6) отрицательный $d = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4 < 0$, где $m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2}$; $m_2 = \frac{1}{Lh} \left(C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2} \right)$; $m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}$; $S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1$. Данное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1^+ = \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ + R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ - \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ + R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ + \left[\frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2 (C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2)} + \frac{1}{S_2} \right] \tilde{C}_1 x_1 + \tilde{C}_6, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_2^+ = \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) - \\ - R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ - \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ - \frac{C_2}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2 C_2} \tilde{C}_1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varphi = -\tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ + \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\alpha = \frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{-d}}{2}$; $R_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha}{2}}$; $R_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha}{2}}$; $R_3 = \frac{m_2 - R_1^2 + R_2^2}{m_1}$; $R_4 = \frac{2R_1 R_2}{m_1}$; $R_5 = \frac{Dh^2(R_1 R_3 + R_2 R_4) + \delta_0 D_2 R_1}{2S_2}$; $R_6 = \frac{Dh^2(R_2 R_3 - R_1 R_4) + \delta_0 D_2 R_2}{2S_2}$; $R_7 = \frac{R_1}{R_1^2 + R_2^2}$; $R_8 = \frac{R_2}{R_1^2 + R_2^2}$; $R_9 = R_5 R_7 + R_6 R_8$; $R_{10} = R_6 R_7 - R_5 R_8$.

Чтобы найти константы интегрирования $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, \tilde{C}_5, \tilde{C}_6$, нужно решить систему из 6 уравнений (9).

Рассмотрим образец с геометрическими характеристиками: $a = 0.055$ м, $h = 0.0127$ м, $b = 0.025$ м, $\delta_0 = 10^{-3}$ м, $\ell = 0.2$ м. Механические свойства консоли примем следующими: $E = 2.04 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.33$, а механические и прочностные характеристики для

адгезионного слоя 3 приведены в таблице 1 [9], где τ_0 — предел текучести; P_{cr} — экспериментальное значение внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве толщиной $\delta_0 = 10^{-3}$ м [9].

Адгезив	E_3 , Па	ν_3	τ_0 , МПа	P_{cr} , Н
Araldite AV138	$4.9 \cdot 10^9$	0.35	25.1	1100
Araldite 2015	$1.85 \cdot 10^9$	0.33	14.6	1500
Sikaforce 7752	$0.49 \cdot 10^9$	0.3	5.2	3100

Таблица 1. Механические и прочностные характеристики адгезивов

На рис. 2 построены графики напряжений адгезионного слоя (5) Araldite AV138, на рис. 3 — Araldite 2015, на рис. 4 — Sikaforce 7752. Кривая 1 (сплошная линия) соответствует $\bar{\sigma}_{22}$, кривая 2 (пунктирная линия) — $\bar{\sigma}_{11}$, кривая 3 (линия из точек) — $\bar{\sigma}_{33}$.

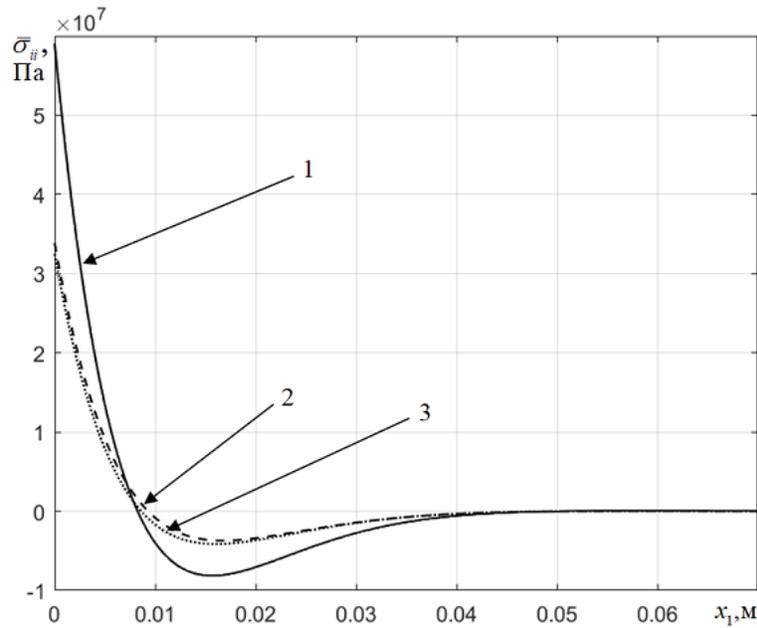


Рис. 2. Напряжения в адгезионном слое Araldite AV138

Из рис. 2–4 видно, что свойства адгезива и значение внешней нагрузки существенно влияют на напряженное состояние в адгезионном слое 3.

3. Нахождение предела упругости. Будем считать, что адгезив начинает проявлять пластические свойства, когда выполняется условие Треска—Сен-Венана [10]. В силу антисимметрии касательных компонент тензора напряжений для рассматриваемого образца (рис. 1) тензор средних напряжений слоя будет иметь диагональный вид. При нагружении нормальным отрывом композита в состоянии плоской деформации максимальным главным напряжением является $\bar{\sigma}_{22}$. А минимальное главное напряжение $\bar{\sigma}_m$ определим из решения упругой задачи. Из рис. 2–4 видно, что $\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_{33}$. Получим условие текучести в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33} = 2\tau_0. \quad (13)$$

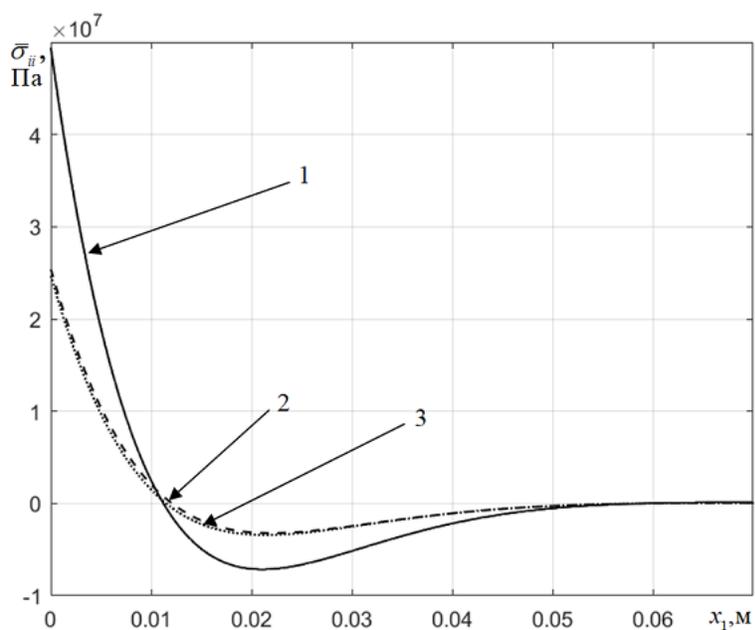


Рис. 3. Напряжения в адгезионном слое Araldite 2015

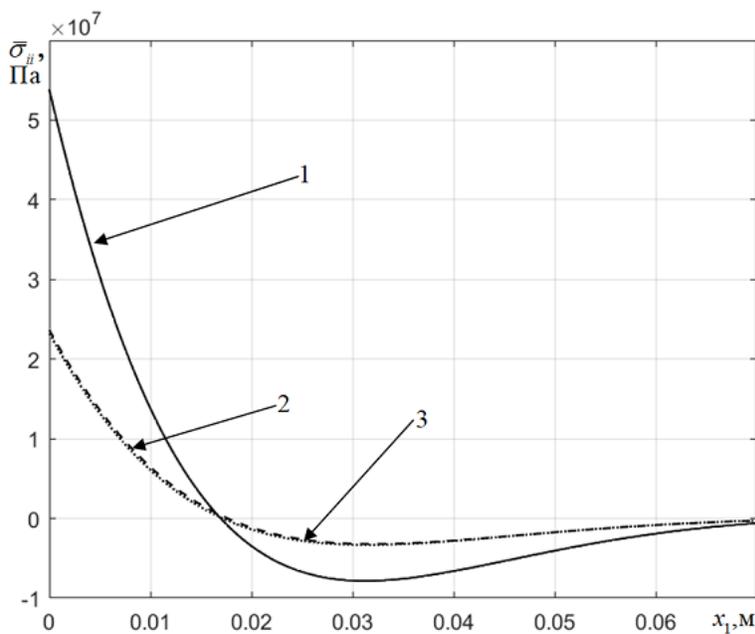


Рис. 4. Напряжения в адгезионном слое Sikaforce 7752

Для нахождения постоянных интегрирования и силы Q_2 , обеспечивающей переход адгезионного слоя в состояние пластического деформирования, необходимо решить систему из 7 уравнений (9), (13).

В результате получаем для адгезива Araldite AV138 значение $P = 1096$ Н, для Araldite 2015 – $P = 911$ Н, для Sikaforce 7752 – $P = 534$ Н. Сравнивая полученные

результаты с экспериментальными значениями внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве P_{cr} (таблица 1), видим, что в хрупком адгезионном слое Araldite AV138 пластические деформации только начинаются и в целом ими можно пренебречь, ограничившись рассмотрением только упругой постановки задачи. А для умеренно пластичного адгезива Araldite 2015 и пластичного полиуретана Sikaforce 7752 необходимо рассмотреть постановку задачи с пластикой, для того чтобы получить результаты, соответствующие проведенному эксперименту [9].

В статье [11] приводится решение упругопластической задачи для случая плоского деформируемого и плоского напряженного состояния адгезионного слоя при относительно больших значениях $\ell/\delta_0 \rightarrow \infty$.

Заключение. На основе вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, сопряженных тонким слоем получена упрощенная постановка задачи в дифференциальном виде. Приведено аналитическое решение. Используя критерий Треска—Сен-Венана, найдено значение внешней нагрузки, соответствующее пределу упругости и началу пластических деформаций в адгезионном слое. Для адгезива Araldite AV138 можно ограничиться полученным аналитическим решением упругой задачи, для Araldite 2015 и Sikaforce 7752 нужно рассмотреть упругопластическую постановку задачи, для того чтобы получить корректные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
- [2] Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 87–99.
- [3] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2015. № 2. С. 24–33.
- [4] Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение. Москва: Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.
- [5] Напряженное состояние и условия иницирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 3. С. 22–34.
- [6] Mindlin R. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. P. 31–38.
- [7] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
- [8] Богачева В. Э. Исследование деформирования тонкого адгезионного слоя композита при воздействии нормальным отрывом // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 7. С. 38–45.
- [9] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111.
- [10] Tresca H. Memoires sur l'ecoulement des corps solides // Memoires presentes par divers savants a l'Academie royaledes sciences. 1868. Vol. 18, no. 1864. P. 733–799.
- [11] О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 2. Упругопластическое деформирование / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 3. С. 30–42.

V.E. Bogacheva

INVESTIGATION OF THE ELASTIC LIMIT OF A THIN ADHESIVE LAYER OF A COMPOSITE UNDER NORMAL SEPARATION LOADING

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. Deformation under the action of normal separation of a composite plate consisting of two consoles connected by an adhesive layer in a state of flat deformation is investigated. From the general variational formulation, taking into account the Mindlin—Reissner theory, a differential formulation is obtained. An analytical solution obtained with complex roots of the characteristic equation of a system of second-order differential equations is investigated. Using the Tresca—Saint-Venant criterion, the value of the external load corresponding to the elastic limit and the onset of plastic deformations in the adhesive layer was found.

Keywords: adhesive layer, composite, interaction layer, normal separation, elastic deformation, Tresca—Saint-Venant criterion.

REFERENCES

- [1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
- [2] Entov V. M., Salganik R. L. To the Prandtl model of brittle fracture // Izv. AN SSSR. MTT. 1968. no. 6. P. 87–99. (in Russian).
- [3] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed // Journal of Mining Science. 2015. no. 2. P. 24–33. (in Russian).
- [4] Makkintok F. Plastic aspects of destruction // Razrushenie. Moscow: Mir, 1975. Vol. 3. P. 67–262. (in Russian).
- [5] Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // PNRPU Mechanics Bulletin. 2021. no. 3. P. 22–34. (in Russian).
- [6] Mindlin R. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. P. 31–38.
- [7] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
- [8] Bogacheva V. E. Investigation of deformation of a thin adhesive layer of a composite under the influence of a normal separation // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki. 2023. no. 7. P. 38–45. (in Russian).
- [9] Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes, R. D. S. G. Campilho, F. J. G. da Silva et al. // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111.
- [10] Tresca H. Memories on the collapse of solidus bodies // Memoirs presented by various scholars at the Royal Academy of Sciences. 1868. Vol. 18, no. 1864. P. 733–799. (in French).
- [11] On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 2. Elastic-plastic deformation / V. E. Bogacheva, V. V. Glagolev, L. V. Glagolev et al. // PNRPU Mechanics Bulletin. 2023. no. 3. P. 30–42. (in Russian).

Bogacheva Viktoriya Eduardovna, Postgraduate, Department of Computational Mechanics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russia.

А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина

ОБ УЧЕТЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИИ ТРУБЫ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье представлено решение задачи о термомодеформировании упругопластической трубы, находящейся под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений. Предел текучести материала при этом предполагался зависящим от температуры. Согласно методу возмущений, представлено решение в нулевом и первом приближениях. Получено выражение для радиуса упругопластической границы. Рассматривался случай общей плоской задачи.

Ключевые слова: напряжение, упругость, пластичность, сжимаемость, температура.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.006

УДК: 539.374

Введение. Физические свойства материала при охлаждении или нагреве могут существенно изменяться. Поэтому при решении задач термомодеформирования необходимо учитывать влияние температуры на характеристики материала. В работах [1–3] представлено исследование температурных напряжений, для случая, когда предел текучести имеет линейную и квадратичную зависимость от температуры.

В данной работе рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния упругопластической трубы, находящейся под действием всестороннего давления, при учете температуры и упругой сжимаемости. Предел текучести при этом зависит от температуры.

1. Постановка задачи. Пусть имеется упругопластическая толстостенная труба радиусов a и b , ($a < b$), находящаяся под действием равномерного внутреннего

© Ковалев А. В., Малыгина Ю. В., 2023

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Малыгина Юлия Владимировна

e-mail: ymkahavren@gmail.com, старший преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 12.12.2023

– p и внешнего – q давлений, а также стационарного поля температуры. Материал трубы будем считать упруго сжимаемым. Модуль упругости и коэффициент Пуассона предполагаем не зависящими от температуры. Предел текучести имеет линейную температурную зависимость.

Система уравнений для поставленной задачи имеет вид:

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \quad (1)$$

где σ_r, σ_θ – компоненты тензора напряжений;

– соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

где e_r, e_θ – компоненты тензора полных деформаций, u – компонента радиального перемещения;

– выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{cases} e_r^e = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T(r), \\ e_\theta^e = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T(r), \\ e_z^e = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T(r), \end{cases} \quad (3)$$

где e_r^e, e_θ^e, e_z^e – компоненты тензора деформаций в упругой области; E – модуль упругости, σ_z – компонента тензора напряжений, μ – коэффициент Пуассона, $T(r)$ – температура, которая определяется из решения стационарного уравнения теплопроводности с заданными краевыми условиями, α – коэффициент температурного расширения [4, 5];

– условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 = 6k^2, \quad (4)$$

– ассоциированный закон пластического течения

$$\begin{aligned} de_r^p &= \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z), \\ de_\theta^p &= \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z), \\ de_z^p &= \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

где e_r^p, e_θ^p, e_z^p – компоненты тензора пластических деформаций, $d\lambda$ – скалярный положительный множитель;

– граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=a} &= -p, \\ \sigma_r \Big|_{r=b} &= -q, \end{aligned} \quad (6)$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [u] = 0, \quad (7)$$

— выражение полных деформаций тела в пластической области

$$e_r = e_r^e + e_r^p, e_\theta = e_\theta^e + e_\theta^p, e_z = e_z^e + e_z^p. \quad (8)$$

Далее, предположим, что осевая деформация e_z будет постоянной и имеет в упругой и пластической областях одинаковое значение равно: $e_z = e_1 = const$. Поскольку деформации в упругой области определяются соотношением (3), а в пластической — (5), то выражение полных деформаций тела в пластической области можно представить в виде:

$$\begin{aligned} de_r &= \frac{1}{E} [d\sigma_r - \mu(d\sigma_\theta + d\sigma_z)] + d(\alpha T(r)) + \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z), \\ de_\theta &= \frac{1}{E} [d\sigma_\theta - \mu(d\sigma_r + d\sigma_z)] + d(\alpha T(r)) + \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z), \\ de_1 &= \frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu(d\sigma_r + d\sigma_\theta)] + d(\alpha T(r)) + \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Метод решения. Для решения поставленной задачи, воспользуемся методом возмущений. Данный метод заключается в разложении искомых величин в ряд по малому параметру δ . В данном случае ограничимся только нулевым и первым приближениями. Запишем необходимые величины в виде рядов по малому параметру:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)}, u = u^{(0)} + \delta u^{(1)}, \\ \alpha &= \alpha^{(0)} + \delta\alpha^{(1)}, \mu = \mu^{(0)} + \delta\mu^{(1)}, e_1 = \delta e_1^{(1)}, \\ \lambda &= \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(1)}, k = k^{(0)} + \delta k^{(1)}, r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^{(1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mu^{(0)} = \frac{1}{2}, \mu^{(1)}$ — известная постоянная; $k^{(0)}$ — значение предела текучести при постоянной температуре; $k^{(1)}$ — функция, зависящая от температуры; верхние индексы (0), (1) определяют нулевое и первое приближения соответственно.

3. Решение и результаты. Подставим, представленные в (11), разложения в уравнения (1), (2), (4), (6), (7), (9) и, приравняв выражения при одинаковых степенях малого параметра, получим в каждом приближении систему дифференциальных уравнений для определения искомых соотношений.

Решение задачи в нулевом приближении, при $\alpha^{(0)} = 0$, известно [6] и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{p(0)} &= -p + 2k^{(0)} \ln\left(\frac{r}{a}\right), \sigma_\theta^{p(0)} = -p + 2k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right), \\
 \sigma_z^{p(0)} &= -p + k^{(0)} \left(1 + 2\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right), \\
 u^{p(0)} = u^{e(0)} &= \frac{3k^{(0)}r_s^{(0)2}}{2Er}, \\
 \sigma_r^{e(0)} &= -q + k^{(0)}r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right], \sigma_\theta^{e(0)} = -q + k^{(0)}r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right], \\
 \sigma_z^{e(0)} &= -q + \frac{k^{(0)}r_s^{(0)2}}{b^2}, \\
 r_s^{(0)2} &= \frac{b^2}{k^{(0)}} \left[-p + q + k^{(0)} \left(1 + 2\ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right)\right) \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Далее, запишем систему уравнений в первом приближении:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}}{r}, \tag{12}$$

— соотношения Коши

$$e_r^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}, e_\theta^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{r}, \tag{13}$$

— выражения для деформаций в упругой области

$$\begin{aligned}
 e_r^{e(1)} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma_\theta^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T(r), \\
 e_\theta^{e(1)} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T(r), \\
 e_z^{e(1)} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2} (\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}) - \mu^{(1)} (\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}) \right] + \alpha^{(1)} T(r),
 \end{aligned} \tag{14}$$

— условие пластичности

$$\begin{aligned}
 (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) (\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}) + (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}) (\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)}) + \\
 + (\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}) (\sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)}) = 6k^{(0)}k^{(1)},
 \end{aligned} \tag{15}$$

— выражение полных деформаций в пластической области

$$\begin{aligned}
de_r^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_\theta^{(1)} + d\sigma_z^{(1)} \right) - \mu^{(1)} \left(\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3} \left[2\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)} \right] + \frac{d\lambda^{(1)}}{3} \left[2\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)} \right], \\
de_\theta^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)} \right) - \mu^{(1)} \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3} \left[2\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)} \right] + \frac{d\lambda^{(1)}}{3} \left[2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)} \right], \\
de_z^{(1)} &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)} \right) - \mu^{(1)} \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)} \right) \right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
&\quad + \frac{d\lambda^{(0)}}{3} \left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} \right] + \frac{d\lambda^{(1)}}{3} \left[2\sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} \right],
\end{aligned} \tag{16}$$

— граничные условия

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=a} = \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = 0, \tag{17}$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$\left[\sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = \left[\sigma_\theta^{(1)} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = \left[u^{(1)} + \frac{du^{(0)}}{dr} r_s^{(1)} \right] = 0. \tag{18}$$

Получим соотношение для определения компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$. Рассмотрим третье уравнение выражения (16):

$$\begin{aligned}
d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2} \left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)} \right) - \mu^{(1)} \left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)} \right) + E\alpha^{(1)} dT(r) + \\
+ \frac{d\lambda^{(0)}}{3} \left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Введем обозначение $\chi^{(1)} = 2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}$. С учетом введенного обозначения, предыдущее выражение примет вид

$$\frac{d\chi^{(1)}}{d\lambda^{(0)}} + \frac{2E}{3}\chi^{(1)} = 4\mu^{(1)} \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)} \frac{dT(r)}{d\lambda^{(0)}}. \tag{20}$$

Решив дифференциальное уравнение (20), получим:

$$\chi^{(1)} = e^{-\frac{2}{3}E\lambda^{(0)}} \int_0^{\lambda^{(0)}} \left[4\mu^{(1)} \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)} \frac{dT(r)}{d\lambda^{(0)}} \right] e^{\frac{2}{3}E\lambda^{(0)}} d\lambda^{(0)} + \chi_e^{(1)}, \tag{21}$$

где $\chi_e^{(1)} = 4\mu^{(1)}\sigma_z^{(0)} - 2E\alpha^{(1)}T(r) + 2Ee_1^{(1)}$.

Таким образом, компонента напряжений $\sigma_z^{(1)}$ определяется из введенного обозначения и уравнения (21):

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)} + \chi^{(1)} \right). \tag{22}$$

Выражения, определяющие компоненты деформаций $e_r^{(1)}, e_\theta^{(1)}$ в упругой области, можно получить, если просуммировать первые два уравнения соотношения (14), при учете уже полученного решения в нулевом приближении.

$$\begin{aligned} e_r^{(1)} + e_\theta^{(1)} &= \frac{6\mu^{(1)}}{E} \sigma_z^{(0)} + 3\alpha^{(1)} T(r) - e_1^{(1)}, \\ e_r^{(1)} - e_\theta^{(1)} &= \frac{1}{2E} \left[3 \left(\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} \right) + 2\mu^{(1)} \left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Компоненту радиального перемещения в упругой области получим, если подставим в первое уравнение (23) соотношения Коши и решим получившееся дифференциальное уравнение:

$$u^{e(1)} = \frac{3}{E} \mu^{(1)} \left(q - \frac{k^{(0)} r_s^{(0)}}{b^2} \right) r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r} \int T(r) r dr - \frac{1}{2} e_1 r + \frac{D}{r}. \quad (24)$$

Напряжения $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ в упругой области, определим из второго уравнения соотношения (23). Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{e(1)} &= -\frac{2}{3} \mu^{(1)} k^{(0)} r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2ED}{3} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right] - \\ &\quad - 4E\alpha^{(1)} \int_r^b \frac{1}{r^3} \int T(r) r dr dr + 2E\alpha^{(1)} \int_r^b \frac{T(r)}{r} dr, \\ \sigma_\theta^{e(1)} &= -\frac{2}{3} \mu^{(1)} k^{(0)} r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2ED}{3} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right] - \\ &\quad - 4E\alpha^{(1)} \int_r^b \frac{1}{r^3} \int T(r) r dr dr + 2E\alpha^{(1)} \int_r^b \frac{T(r)}{r} dr + \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2} \int T(r) r dr - 2E\alpha^{(1)} T. \end{aligned} \quad (25)$$

Разность компонент напряжений $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ в пластической области получим из условия пластичности (15), с учетом введенного обозначения, а также полученного нулевого решения:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} = 2k^{(1)}. \quad (26)$$

Поскольку величина предела текучести в первом приближении $k^{(1)}$ зависит от температуры, которая, в свою очередь, изменяется в зависимости от радиуса трубы, то это величина является функцией радиуса. Поэтому, в дальнейшем при вычислении компонент напряжений в пластической области, данную величину будет нельзя вынести за знак интеграла.

Подставив (26) в уравнение равновесия (12) и учитывая граничные условия (17), получим соотношения для определения компонент напряжений в пластической области:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{p(1)} &= \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr, \\ \sigma_\theta^{p(1)} &= 2k^{(1)} + \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr. \end{aligned} \quad (27)$$

Для того, чтобы получить уравнение для радиальной компоненты перемещения в пластической области просуммируем первые два уравнения соотношения (16) и решим получившееся дифференциальное уравнение. В итоге получим:

$$u^p(1) = -\frac{3}{E}\mu^{(1)}\left(-p + 2k^{(0)}\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r}\int T(r)rdr - \frac{1}{2}e_1r + \frac{N}{r}. \quad (28)$$

Константу D получим из условия сопряжения (18) компонент напряжений $\sigma_r^{(1)}$ в упругой и пластической областях:

$$D = \frac{\mu^{(1)}}{E}k^{(0)}r_s^{(0)2} + \frac{3}{2E}\left[4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r)r drdr - 2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r}dr - \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r}dr\right] \frac{r_s^{(0)2}b^2}{r_s^{(0)2} - b^2}. \quad (29)$$

Константу N получим из условия сопряжения (18) компонент перемещений в упругой и пластической областях:

$$N = -\frac{2\mu^{(1)}}{E}k^{(0)}r_s^{(0)2} + \frac{3}{2E}\left[4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r)r drdr - 2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r}dr - \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r}dr\right] \frac{r_s^{(0)2}b^2}{r_s^{(0)2} - b^2}. \quad (30)$$

Выражение радиуса упругопластической границы получим из условия сопряжения (18) компонент напряжений $\sigma_\theta^{(1)}$ в упругой и пластической областях:

$$r_s^{(1)} = \left\{ \left[4E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3}\int T(r)r drdr - 2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r}dr \right] \frac{2b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} - \frac{4E\alpha^{(1)}}{r_s^{(0)}}\int_{r=r_s^{(0)}}^b T(r)rdr + 2E\alpha^{(1)}\int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r}dr - 2E\alpha^{(1)}T(r_s^{(0)}) - 2k^{(1)}(r_s^{(0)}) - \frac{2r_s^{(0)2}}{r_s^{(0)2} - b^2}\int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r}dr \right\} \frac{r_s^{(0)}}{4k^{(0)}}. \quad (31)$$

Согласно принятому методу решения, можем представить выражения компонент напряжений и уравнение радиуса упругопластической границы для поставленной задачи. Тогда, из (11), (19), (33), (34) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_r^p &= -p + 2k^{(0)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \delta \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr, \\ \sigma_\theta^p &= -p + 2k^{(0)} \left(1 + \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \delta \left(2k^{(1)} + \int_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr\right), \\ \sigma_r^e &= -q + k^{(0)} r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right] + \\ &+ \delta \left\{ \left[4E\alpha^{(1)} \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3} \int T(r) r dr dr - 2E\alpha^{(1)} \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r} dr - \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr \right] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 - b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} - \right. \\ &\left. - 4E\alpha^{(1)} \int_r^b \frac{1}{r^3} \int T(r) r dr dr + 2E\alpha^{(1)} \int_r^b \frac{T(r)}{r} dr \right\}, \\ \sigma_\theta^e &= -q + k^{(0)} r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right] + \\ &+ \delta \left\{ \left[4E\alpha^{(1)} \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{1}{r^3} \int T(r) r dr dr - 2E\alpha^{(1)} \int_{r_s^{(0)}}^b \frac{T(r)}{r} dr - \int_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr \right] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 + b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} - \right. \\ &\left. - 4E\alpha^{(1)} \int_r^b \frac{1}{r^3} \int T(r) r dr dr + 2E\alpha^{(1)} \int_r^b \frac{T(r)}{r} dr + \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2} \int T(r) r dr - 2E\alpha^{(1)} T(r) \right\}, \\ r_s &= r_s^{(0)} + \delta r_s^{(1)}.\end{aligned}$$

Заключение. Таким образом, согласно принятому методу малого параметра, было определено напряженно-деформированное состояние упругопластической трубы, находящейся под действием равномерного всестороннего сжатия и учета температурных эффектов, для случая, когда предел текучести материала зависит от температуры. Кроме того, если положить в приведенных выше соотношениях коэффициент температурного расширения или величину $k^{(1)}$ равными нулю, то получим выражения, представленные в работах [7] или [8–11] соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ткачева А. В. Влияние выбора зависимости предела текучести от температуры на объёмы необратимого деформирования в материалах сборки, полученной в результате горячей посадки // Материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. Томск: В-Спектр, 2015. С. 34–37.
- [2] Дац Е. П., Ткачева А. В. Математическая модель процесса горячей посадки цилиндрических деталей // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого

- тела. Чебоксары: Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2014. С. 198–200.
- [3] Даниловская В. И. Упругопластическая симметричная деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса // Прикладная механика. 1965. № 6. С. 8–13.
- [4] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. Москва: Физматлит, 1963. 253 с.
- [5] Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Москва: Физматгиз, 1958. 167 с.
- [6] Д. Д. Ивлев Л. В. Ершов. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [7] Ивлев Д. Д., Макаров Е. В., Марушкой Ю. М. Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 1978. № 4. С. 80–87.
- [8] Андреева Ю. В., Ковалев А. В., Внуков А.Н. К определению напряженного состояния в упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева. Чебоксары: Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2015. С. 167–172.
- [9] Андреева Ю. В., Ковалев А. В., Внуков А.Н. К расчету сжимаемой упругопластической трубы // Механика деформируемого твердого тела : сборник трудов 9 Всероссийской конференции в рамках Международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". Воронеж: Воронежский государственный университет, 2016. С. 153–155.
- [10] Ковалев А.В., Малыгина Ю.В. Об определении напряженно-деформированного состояния в упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научно-технической конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2017. С. 1079–1082.
- [11] Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Malygina Y.V. Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressibility of the material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. № 973. с. 012004.

A. V. Kovalev, Y.V. Malygina

**ON TAKING INTO ACCOUNT THE DEPENDENCE OF THE YIELD
STRENGTH ON TEMPERATURE WHEN SOLVING THE PROBLEM OF
THERMAL DEFORMATION OF A PIPE**

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The paper considers the problem of uniform compression of an elastoplastic pipe under the influence of temperature effects. The yield strength depends on temperature. According to the perturbation method, the solution is presented in the zero and first approximations. The radius of the elastoplastic boundary is determined. The case of a general plane problem was considered.

Keywords: stress, elasticity, plasticity, compressibility, temperature.

REFERENCES

- [1] Tkacheva A. V. The influence of the choice of the dependence of the yield strength on temperature on the volume of irreversible deformation in the materials of the assembly obtained as a result of shrink fit // Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists. Tomsk: V-Spectrum, 2015. C. 34–37.
- [2] Dats E. P., Tkacheva A. V. Mathematical model of the process of hot fitting of cylindrical parts // Proceedings of the VIII All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solids. Cheboksary: Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics, 2014. C. 198–200.
- [3] Danilovskaya V. I. Elastoplastic symmetric deformation of a thick-walled tube with consideration of non-uniform temperature distribution along the radius // Applied Mechanics. 1965. № 6. C. 8–13.
- [4] Parkus G. Nonsteady Temperature Stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 253 c.
- [5] Melan E., Parkus G. Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields. Moscow: Fizmatgiz, 1958. 167 c.
- [6] Ivlev D.D., Yershov L.V. Perturbing approximation in theory of elastoplastic body. Moscow: Science, 1978. 208 c.
- [7] Ivlev D. D., Makarov E. V., Marushkey Yu. M. On the plasticity conditions of a compressible elastoplastic material under plane strain // A Journal of Russian Academy of Sciences. 1978. № 4. C. 80–87.
- [8] Andreeva Y. V., Vnukov A. N., Kovalev A. V. Determining the stress state of elastoplastic pipe considering temperature effects and compressibility // All-Russian Scientific School-Conference "Mechanics of Marginal State and Related Issues dedicated to the 85th anniversary of Professor D.D. Ivlev. Чебоксары: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2015. C. 167–172.
- [9] Andreeva Y. V., Vnukov A. N., Kovalev A. V. To the calculation of a compressible elastic-plastic pipe // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2016. C. 153–155.
- [10] Kovalev A.V., Malygina Y.V. On the determination of the stress-strain state in an elastic plastic pipe, taking into account the temperature and compressibility of the material // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh: Voronezh State University, 2017. C. 1079–1082.
- [11] Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Malygina Y.V. Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressibility of the material // Journal of Physics: Conference Series. 2018. № 973. C. 1–10.

Kovalev Alexey Victorovich, Dr. Sci. Phys. and Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia, Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Voronezh, Russia.

Malygina Yuliya Vladimirovna, Lecturer of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

А. А. Азаров¹, А. Л. Попов^{1,2}, Д. А. Челюбеев²

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОСЕВОЙ НАГРУЗКИ В БАЛОЧНЫХ ОБРАЗЦАХ

¹Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Оценка усилий и жёсткости соединений имеет важное значение для контроля стержневых элементов. Существующие методы оценки подразделяются на статические и динамические. В работе рассмотрена методика динамической оценки продольного усилия в закреплённом стержне по спектру его изгибных колебаний путём сравнения экспериментально зарегистрированных частот колебаний с теоретическим спектром частот, полученным на основе модели балки Тимошенко. Для согласования результатов по теоретической модели с набором экспериментальных частот использован алгоритм basin-hopping. Выявлена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации.

Ключевые слова: стержень Тимошенко, продольная сила, акустический спектр, алгоритм basin-hopping, экспериментальная верификация.

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.007

УДК: 539.3

Введение

В последнее время в литературе появляется все больше исследований, посвященных развитию динамических подходов к определению продольных усилий в стержневых стержнях как по одной, так и по нескольким характерным собственным частотам изгибных колебаний [1–11]; некоторые из подходов требуют определения модальных форм [6–9]; для этого также используются дополнительные массы, проводится сравнение с результатами МКЭ и оптимизация на основе генетических алгоритмов [1].

© Азаров А. А., Попов А. Л., Челюбеев Д. А., 2023

Азаров Артур Александрович

e-mail: azaartale@mail.ru, аспирант, Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Попов Александр Леонидович

e-mail: popov@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Челюбеев Дмитрий Анатольевич

e-mail: da-ch@yandex.ru, ведущий инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Поступила 10.12.2023

Перечисленные и ряд других работ посвящены, как правило, анализу измерений на реальных объектах со стержнями, имеющими многократное превышение свободной длины по сравнению с габаритами поперечного сечения. Естественной моделью для описания изгиба и поперечных колебаний таких стержней является модель Эйлера-Бернулли. Ниже использована более общая модель колебаний стержня на основе балки Тимошенко, которая подходит для стержней с более широким диапазоном отношения длины к габаритам поперечного сечения. При определении осевой нагрузки стержня используется алгоритм basin-hopping — стохастический алгоритм, с помощью которого находится глобальный минимум гладкой скалярной функции, - в данном случае, - неизвестной продольной силы в сочетании с граничными условиями. Проведена экспериментальная верификация динамической методики на стержневой модели с заданными в испытательной машине значениями продольного усилия. Отмечена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации.

Теоретическая модель

Рассмотрим поперечные колебания балки, нагруженной заранее неизвестной продольной силой при неизвестных угловых жёсткостях закреплений. Расчётная схема такой балки представлена на рис. 1. Для описания свободных поперечных колебаний

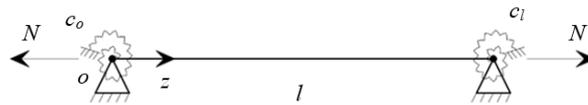


Рис. 1

балки используем модель колебаний балки Тимошенко в обозначениях [12] с учетом продольного усилия N:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{GF}{\alpha EI} \left(1 - \frac{\alpha N}{GF}\right) \left(\theta - \frac{\partial x}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\alpha \rho}{G} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{\alpha N}{GF}\right) \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

($x(z, t)$ – поперечное смещение центра тяжести сечения, $\theta(z, t)$ – угол поворота поперечного сечения, α – коэффициент, учитывающий неравномерность касательных напряжений по сечению, зависящий от формы сечения, E – модуль упругости, G – модуль сдвига, I – момент инерции сечения в плоскости изгиба, F – площадь поперечного сечения, ρ – плотность материала). Граничные условия для балки с упругими связями - пружинными шарнирами с угловыми жесткостями c_0, c_1 :

$$x \Big|_{z=0,l} = 0, c_0 \theta \Big|_{z=0} = EI \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0}, c_1 \theta \Big|_{z=l} = -EI \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=l} \tag{2}$$

Решение системы уравнений может быть представлено в виде:

$$X(z) = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z + C_3 \operatorname{ch} \mu z + C_4 \operatorname{sh} \mu z,$$

$$\Theta(z) = C_1 \sin \lambda z \left(\frac{\alpha \rho \omega^2}{G \lambda} - \lambda \right) + C_2 \cos \lambda z \left(\lambda - \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \lambda} \right) + C_3 \operatorname{sh} \mu z \left(\mu + \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \mu} \right) + C_4 \operatorname{ch} \mu z \left(\mu + \frac{\alpha \rho \omega^2}{G \mu} \right) \quad (3)$$

где

$$\lambda = \left(\frac{(\rho I \omega^2 (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} + \sqrt{\left(\frac{(\rho I \omega^2 (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2 (\alpha (I \omega^2 \rho + N) - GF)}{EGI}} \right)^{1/2},$$

$$\mu = \left(-\frac{(\rho I \omega^2 (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} + \sqrt{\left(\frac{(\rho I \omega^2 (\alpha E + G) - GN) F + \alpha N^2}{2EGFI} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2 (\alpha (I \omega^2 \rho + N) - GF)}{EGI}} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Оценка производится по минимуму функции ошибок, называемой квадратичной функции потерь, при сравнении теоретических и экспериментальных частот:

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{exp,i} - f_{th,i})^2 \quad (5)$$

где $f_{exp,i}$ – i -ая экспериментальная частота, $f_{th,i}$ – i -ая теоретическая частота.

При заданных параметрах балки, действующей продольной силе и жесткостях заделки выписанные частотные уравнения обеспечивают однозначное определение собственных частот, соответствующих определённым формам колебаний балки. В то же время, решение обратной задачи исходя из известных собственных частот балки может быть неоднозначным. Для поиска усилия N в модели балки Тимошенко были применены алгоритмы глобальной оптимизации (basin-hopping) и локальной оптимизации – метод Нелдера-Мида подобно тому, как это реализовано в [2, 11] на модели балки Эйлера-Бернулли.

Экспериментальная верификация

Предметом экспериментального изучения были послеударные колебания стального стержня круглого поперечного сечения 1 (рис. 2а), закрепленного в разрывной машине МИМ.2 двумя цилиндрическими зубчатыми захватами 2, имитирующими упругие заделки, при различном статическом растяжении силами 0.1, 5, 10, 15.2 кН. Длина стержня между захватами $l = 197$ мм, диаметр 10 мм. Для построения диаграммы растяжения образца использовался навесной экстензометр 3 ДД-25.1. Поперечные колебания стержня возбуждались ударом металлического шарика в двух местах: посередине и на четверти длины стержня, что обеспечивало регистрацию как симметричных, так и антисимметричных форм колебаний. Регистрация осуществлялась бесконтактно с помощью лабораторного микрофона 4 (рис. 2б), соединённого со спектроанализатором типа А19-У2, данные из которого поступали в ЭВМ. В табл. 1 приведены

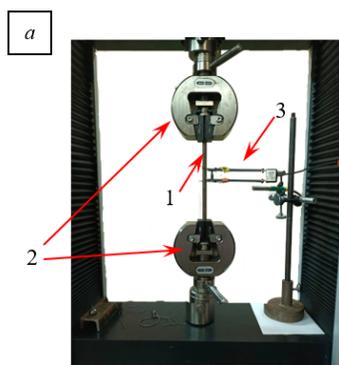


Рис. 2а

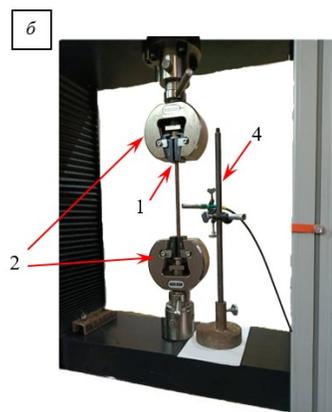


Рис. 2б

по четыре первых собственных частот поперечных колебаний стержня при разных значениях растягивающей силы.

N, кН	0.1	5	10	15.2
f_1	936	948	963	999
f_2	2521	2524	2526	2582
f_3	4835	4809	4765	4896
f_4	7828	7766	7701	7788

Таблица 1. Собственные частоты стержня f , Гц в зависимости от растягивающей силы N , кН

Ниже приведена диаграмма (рис. 3), показывающая изменения частот собственных колебаний с увеличением растягивающей силы, из которой видно, что с увеличением значения силы при растяжении стержня происходит увеличение значения первой собственной частоты на всех уровнях растяжения, однако эта тенденция с ростом порядкового номера частоты не продолжается.



Рис. 3

Наблюдаемый эффект можно объяснить последовательным снижением значения модуля упругости с ростом растягивающей силы. На Рис. 4 приведена диаграмма

растяжения образца, показанного на Рис. 2 в диапазоне от 0 до 30 кН. Видно, что наклон касательной к кривой нагружения уменьшается с ростом нагрузки, что означает снижение модуля упругости материала образца по сравнению со значением при малых нагрузках. Данное обстоятельство обычно не учитывается при расчёте собственных частот поперечных колебаний стержня со значительной растягивающей продольной нагрузкой [2].

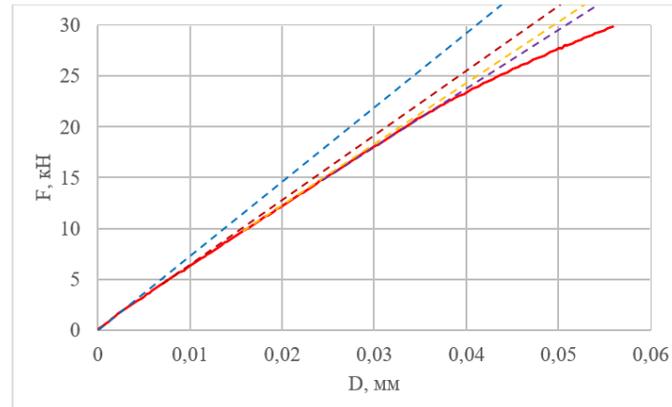


Рис. 4

В качестве обоснования рассмотрим колебания шарнирно-опертого стержня, растянутого продольной силой, по более простой модели Эйлера-Бернулли [2, 13]. Для шарнирно-опертого стержня с натягом частоты колебаний определяются по формуле [12]:

$$f_i = \frac{i}{2l} \sqrt{\frac{N}{m} + \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \frac{EI}{m}} \quad (6)$$

из которой выводится связь изменения частоты с изменением натяжения и изменением модуля упругости:

$$\Delta f_i = \frac{-\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 EI \Delta E + N \Delta N}{2\left(\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 EI + N\right)} \quad (7)$$

№ частоты	Частота, Гц (Ненатянутый стержень, E=200 ГПа)	Частота, Гц (Натянутый стержень, E=195 ГПа)	Разность частот, Гц
1	512	555	43
2	2050	2075	25
3	4611	4605	-6
4	8198	8147	-51

Таблица 2. Сравнение расчетных частот

Из этой формулы видно, что увеличение натяга приводит к повышению частоты, но относительное влияние этого фактора снижается с ростом порядкового номера частоты. Напротив, влияние сниженного модуля упругости возрастает с ростом порядкового номера частоты. В табл. 2 приведены результаты расчётов, показывающие

поведение первых четырёх частот для стержня со параметрами: длина 197 мм, диаметр 10 мм, материал – сталь, плотность 7800 кг/м³, модуль упругости первоначальный 200 ГПа, затем (при большом растяжении) - 195 ГПа. Первый расчёт сделан для ненапрянутого стержня с модулем 200 ГПа, второй – для силы натяжения 5 кН при модуле 195 ГПа.

Из приведенных результатов видно, что тенденция, отмеченная при экспериментальном определении частот поперечных колебаний растянутого стержня, наблюдается и в расчётном случае.

Заключение В работе представлены теоретический подход и некоторые результаты сопоставлений расчётных с экспериментальными значениями продольных усилий в растянутом упругом стержне. По полученным результатам можно судить о достаточно высокой согласованности теоретических и экспериментальных результатов. Выявлена и объяснена особенность разнонаправленного изменения собственных частот изгибных колебаний при растяжении стержня в области слабо нелинейной зависимости напряжения от деформации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gentilini C., Marzani A., Mazzotti M. Nondestructive Characterization of Tie-Rods by Means of Dynamic Testing, Added Masses and Genetic Algorithms. No. V.332. 2013. P. 76–101.
- [2] Lagomarsino S., Calderini C. The Dynamical Identification of the Tensile Force in Ancient Tie-Rods. No. V.27. 2005. P. 846–856.
- [3] Collini L., Garziera R., Riabova K. Vibration Analysis for Monitoring of Ancient Tie-Rods. No. V.2017. 2017. P. 1–12.
- [4] Dynamical Assessment of the Work Conditions of Reinforcement Tie-Rods in Historical Masonry Structures / E. Coisson, L. Collini, L. Ferrari et al. No. V.13. 2019. P. 1–13.
- [5] Dynamic Identification of Tensile Force in Tie-Rods by Interferometric Radar Measurements / D. Camassa, A. Castellano, A. Fraddosio et al. // Appl. Sci. 2021. no. V.11.
- [6] Estimation of Axial Load in Tie-Rods Using Experimental and Operational Modal Analysis / S. Campagnari, F. di Matteo, S. Manzoni et al. No. V.139(4). 2017.
- [7] Cescatti E., Porto F. D., Modena C. Axial Force Estimation in Historical Metal Tie-Rods: Methods, Influencing Parameters, and Laboratory Tests. No. V.13. 2019. P. 317–328.
- [8] Tullini N., Rebecchi G., Laudiero F. Reliability of the Tensile Force Identification in Ancient Tie-Rods Using One Flexural Mode Shape. No. V.13. 2019. P. 402–410.
- [9] Determination of Axial Force in Tie Rods of Historical Buildings Using the Model-Updating Technique / I. Duvnjak, S. Ereiz, D. Damjanovi'c et al. No. V.10. 2020.
- [10] Rainieri C., Aenlle M. The influence of parameter estimation error on the accuracy of a vibration based tensile load estimation technique. 2016. p. 1697–1710.
- [11] C. Resta G. Chellini A. D. F. Dynamic Assessment of Axial Load in Tie-Rods by Means of Acoustic Measurements. No. V.10. 2020.
- [12] Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. Москва, 1980. 408 с.
- [13] Крутиков О.В., Гершуни И.Ш. Определение усилий в канатах пролетного строения Ворошиловского моста в городе Ростов-на-Дону // Институт Гипростроймост. 2015. № 9. С. 107–111.

A.A. Azarov¹, A.L. Popov^{1,2}, D.A. Chelyubeev²

SOME FEATURES OF FREQUENCY IDENTIFICATION OF AXIAL LOAD IN BEAM SPECIMENS

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The evaluation of forces and joint stiffness is important for the inspection of rod elements. The existing evaluation methods are divided into static and dynamic methods. The paper considers a method of dynamic evaluation of longitudinal force in a fixed rod based on its bending vibration spectrum by comparing the experimentally recorded vibration frequencies with the theoretical frequency spectrum obtained from the Timoshenko beam model. The basin-hopping algorithm is used to harmonize the results of the theoretical model with the set of experimental frequencies. The peculiarity of multidirectional variation of the natural frequencies of bending vibrations during rod stretching in the region of weakly nonlinear stress-deformation dependence is revealed.

Keywords: Timoshenko beam, longitudinal force, acoustic spectrum, basin hopping algorithm, experimental verification.

REFERENCES

- [1] Gentilini C., Marzani A., Mazzotti M. Nondestructive Characterization of Tie-Rods by Means of Dynamic Testing, Added Masses and Genetic Algorithms. No. V.332. 2013. P. 76–101.
- [2] Lagomarsino S., Calderini C. The Dynamical Identification of the Tensile Force in Ancient Tie-Rods. No. V.27. 2005. P. 846–856.
- [3] Collini L., Garziera R., Riabova K. Vibration Analysis for Monitoring of Ancient Tie-Rods. No. V.2017. 2017. P. 1–12.
- [4] Dynamical Assessment of the Work Conditions of Reinforcement Tie-Rods in Historical Masonry Structures / E. Coisson, L. Collini, L. Ferrari et al. No. V.13. 2019. P. 1–13.
- [5] Dynamic Identification of Tensile Force in Tie-Rods by Interferometric Radar Measurements / D. Camassa, A. Castellano, A. Fraddosio et al. // Appl. Sci. 2021. no. V.11.
- [6] Estimation of Axial Load in Tie-Rods Using Experimental and Operational Modal Analysis / S. Campagnari, F. di Matteo, S. Manzoni et al. No. V.139(4). 2017.
- [7] Cescatti E., Porto F. D., Modena C. Axial Force Estimation in Historical Metal Tie-Rods: Methods, Influencing Parameters, and Laboratory Tests. No. V.13. 2019. P. 317–328.
- [8] Tullini N., Rebecchi G., Laudiero F. Reliability of the Tensile Force Identification in Ancient Tie-Rods Using One Flexural Mode Shape. No. V.13. 2019. P. 402–410.
- [9] Determination of Axial Force in Tie Rods of Historical Buildings Using the Model-Updating Technique / I. Duvnjak, S. Ereiz, D. Damjanovi'c et al. No. V.10. 2020.
- [10] Rainieri C., Aenlle M. The influence of parameter estimation error on the accuracy of a vibration based tensile load estimation technique. 2016. p. 1697–1710.
- [11] Resta C., Chellini G., Falco A. D. Dynamic Assessment of Axial Load in Tie-Rods by Means of Acoustic Measurements. No. V.10. 2020.
- [12] Biderman V. L. Theory of mechanical vibrations. Moscow, 1980. 408 c. (in Russian).
- [13] Krutikov O.V., Gershuni I.S.H. Determination of progress in the lifting ropes of the Voroshilovsky Bridge in the city of Rostov-on-Don // Institut Giprostrojmst. 2015. № 9. C. 107–111. (in Russian).

Azarov Artur Alexandrovich, Postgraduate student, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Popov Alexander Leonidovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia.

Chelyubeyev Dmitriy Anatol'evich, Leading engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia.

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ПРЕДЕЛЬНО-УПРУГИЙ ИЗГИБ N -СЛОЙНОГО ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОГО БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

³ *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. В данной работе рассматривается задача изгиба многослойного стержня поперечными нагрузками при наличии зон упругого и нелинейно-неупругого деформирования, получены соотношения для определения границы раздела упругой и нелинейно-неупругой областей деформирования стержня. Получены численные расчеты для случаев совпадения и несовпадения нейтральной линии с осью стержня. Приведены численные расчеты предельных нагрузок: первой (деформация достигает значения предельной неупругой) и второй (деформация достигает значения деформации предразрушения).

Ключевые слова: бетонные стержни, аналитические решения, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки, нейтральная линия

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.008

УДК: 539.374

Рассмотрим n -слойный бетонный стержень поперечного сечения ($n \geq 2$), симметричный относительно осей координат (рис. 1), где через h_i обозначена высота i -го слоя, причем будем считать $h_0 = 0$. Через $b_i(z)$ обозначим функцию, описывающую толщину i -го слоя. Начало координат поместим в центр поперечного сечения стержня, ось Ox направим вдоль оси стержня, ось Oz вертикально вверх. На рисунке 1 цифрами 1, 2, ..., i , ..., n обозначены номера соответствующих слоев.

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2023

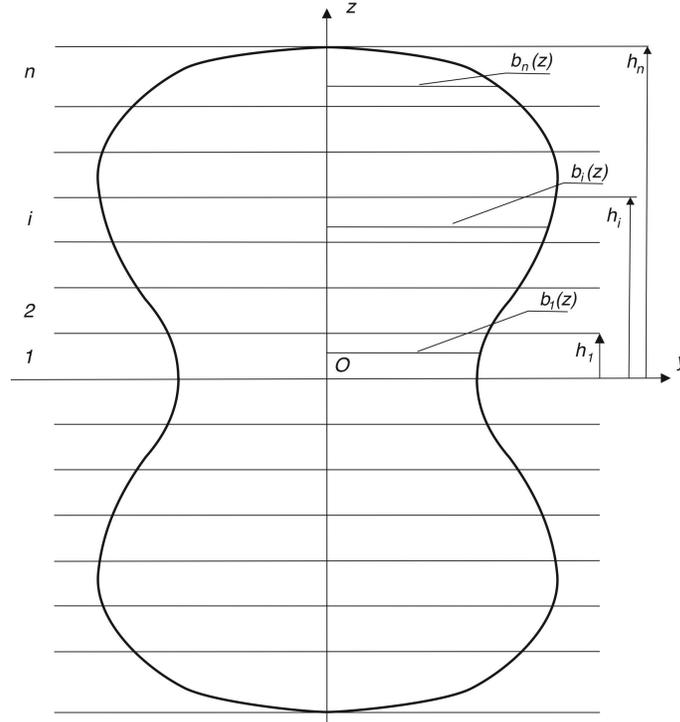
Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiyury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.09.2023

Рис. 1. Поперечное сечение n -слойного бетонного стержня

Примем, что имеет место упругое деформирование при деформациях, не превышающих значений предельных упругих [1–5] $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad (1)$$

а при превышающих значениях $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$ имеет место нелинейное квази-упругое деформирование бетонного стержня, определяемое соотношениями

$$\sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2. \quad (2)$$

Перейдем к безразмерным величинам, используя соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l} = 1, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i}{l}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l^2 \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l \sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где обезразмеривающие величины такие: σ_{1*}^- – предел прочности при сжатии бетона марки В10, l – длина стержня, q – величина распределенной нагрузки, Q – величина перерезывающей силы, M – величина изгибающего момента, N – продольного усилия, w – величина прогиба стержня.

Предельные упругие деформации и деформации предразрушения бетона существенно меньше при растяжении, чем при сжатии. Если нагрузки на стержень направлены вертикально вниз и стержень шарнирно оперт (рис. 2), то верхняя часть

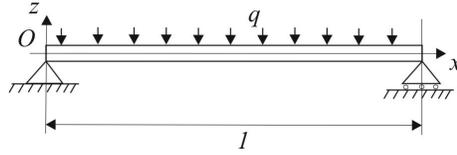


Рис. 2. Шарнирно-опертый стержень под действием равномерно-распределенной нагрузки

стержня будет находиться в области сжатия, а нижняя – в области растяжения. Из-за наличия разносопротивляемости бетона растяжению и сжатию, даже при наличии симметрии поперечного сечения, нейтральная линия не совпадает с осью стержня. Очевидно, что для положения нейтральной линии в данном поперечном сечении справедливо $z_0(x) > 0$. В общем случае нейтральная линия в зависимости от положения поперечного сечения может переходить из одного слоя в другой вдоль оси стержня.

В зависимости от физических параметров стержня и нагрузок в стержне возможны области упругого деформирования, нелинейного квазиупругого деформирования и области, где проходит граница раздела упругого и нелинейного квазиупругого деформирования. Введем следующие обозначения:

- A_e – индексы слоев, соответствующих линейному упругому деформированию;
- A_n – индексы слоев, соответствующих нелинейному квазиупругому деформированию;
- A_z – индексы слоев, где проходит граница раздела упругого и нелинейного квазиупругого деформирования,

причем множества A_e, A_n, A_z должны удовлетворять соотношению

$$A_e \cup A_n \cup A_z = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Положим, что имеет место одноосное напряженное состояние и справедливы классические кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява, тогда величины изгибающего момента M_y и продольного усилия N будут равны

$$M_y(x) = -2 \sum_{i \in A_e} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy - 2 \sum_{i \in A_n} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n z dy - \quad (4)$$

$$-2 \sum_{i \in A_z} \left(\int_{-h_i}^{z_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n z dy + \int_{z_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e z dy,$$

$$N(x) = -2 \sum_{i \in A_e} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy - 2 \sum_{i \in A_n} \int_{-h_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n dy - \quad (5)$$

$$-2 \sum_{i \in A_z} \left(\int_{-h_i}^{z_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^n dy + \int_{z_i}^{-h_{i-1}} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \sigma_i^e dy.$$

Граница раздела упругого деформирования и нелинейного квазиупругого деформирования $z_i(x)$ для всех индексов i из A_z должна удовлетворять соотношениям

$$-h_i \leq z_1(x) \leq -h_{i-1}. \quad (6)$$

Для деформации справедливы соотношения

$$\varepsilon(x, z) = z_0(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - z \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (7)$$

где $w_0(x)$ – величина прогиба осевой линии стержня.

Задача, изображенная на рис. 2, является статически определимой, тогда значения изгибающих моментов и продольных усилий имеют вид

$$M_y(x) = q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right), \quad N(x) = 0. \quad (8)$$

На границе раздела областей упругого и нелинейного квазиупругого деформирования $z = z_i(x)$ деформация будет равна предельной упругой деформации для i -го слоя ε_{0i}^+

$$\varepsilon_{0i}^+ = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - z_i(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2},$$

откуда можно получить выражение для второй производной прогиба

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{0i}^+}{1 - z_i(x)}. \quad (9)$$

Если множество A_z состоит из k индексов, т.е. $A_z = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, тогда равенство (9) будет справедливо для всех элементов из A_z , т.е. имеем

$$\frac{\varepsilon_{0j_1}^+}{1 - z_{j_1}(x)} = \frac{\varepsilon_{0j_2}^+}{1 - z_{j_2}(x)} = \dots = \frac{\varepsilon_{0j_k}^+}{1 - z_{j_k}(x)}. \quad (10)$$

Из уравнений (5)-(8), (10) при известных множествах A_e, A_n, A_z можно определить неизвестные $z_0, z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}$, которые полностью определяют распределение усилий и деформаций в стержне.

Для удобства возможную конфигурацию A_e, A_n, A_z будем обозначать в виде вектора (i_1, i_2, \dots, i_n) , где для каждого номера слоя $j = 1, \dots, n$ компонент вектора i_j может принимать значения 0, 1, 2, соответствующие слою с упругим деформированием, нелинейным квазиупругим и слою, где проходит граница раздела упругого и нелинейного квазиупругого деформирования. Из вектора (i_1, i_2, \dots, i_n) легко получить множества A_e, A_n, A_z . Для заданного количества слоев n количество возможных векторов (i_1, i_2, \dots, i_n) будет равно 3^n .

Можно существенно сузить область поиска конфигураций (i_1, i_2, \dots, i_n) , которые возможны при заданных физических параметрах стержня и нагрузке q , определив нижнюю и верхнюю границы нагрузок q_{min} и q_{max} соответственно.

В данной постановке задачи мы учитываем только деформирование на участке $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}$, что соответствует восходящей ветви диаграммы растяжения бетона. Соответственно, функция $\sigma(\varepsilon)$, описывающая эту диаграмму, будет, исходя из вида диаграммы, монотонно возрастающей.

Рассмотрим j -й слой стержня, в котором находится граница раздела областей упругого и нелинейного деформирования. Тогда для данного слоя справедливо, согласно уравнению (7), неравенство

$$\varepsilon(x, -h_{j-1}) < \varepsilon(x, z_j) < \varepsilon(x, -h_j). \quad (11)$$

Из условия монотонного возрастания функции $\sigma(\varepsilon)$ и (11) следует

$$\sigma(\varepsilon(x, -h_{j-1})) < \sigma(\varepsilon(x, z_j)) < \sigma(\varepsilon(x, -h_j)). \quad (12)$$

Из соотношений для изгибающего момента (5) и (12) следует, что наибольшее по модулю значение момента будет достигаться на верхней границе слоя. Тогда из (8) будет справедливо

$$|q(x, -h_{j-1})| < |q(x, z_j)| < |q(x, -h_j)|. \quad (13)$$

Для каждого i -го слоя в области упругого деформирования деформация находится в интервале $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{0i}^+$, а для области нелинейного квазиупругого деформирования в интервале $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon < \varepsilon_{*i}^+$.

Для заданного набора (i_1, i_2, \dots, i_n) в данном сечении x определим нижнюю границу нагрузки q_{min} как максимальное значение из минимальных нагрузок для каждого слоя

$$q_{min} = \min\{q_{min,1}, q_{min,2}, \dots, q_{min,n}\}. \quad (14)$$

Значение нагрузки $q_{min,j}$ из соотношения (14) определим для заданного набора (i_1, i_2, \dots, i_n) согласно алгоритму:

- найдем значение кривизны $\frac{d^2 w_0(x)}{dx}$ из соотношения (7)
 - если слой j находится в области упругого деформирования (значение параметра конфигурации $i_j = 0$) или нахождения границы раздела z_j в указанной области (значение параметра конфигурации $i_j = 2$) при значении деформации, равной $\varepsilon = 0$ и $z = -h_{j-1}$;
 - если слой j находится в области нелинейного квазиупругого деформирования (значение параметра конфигурации $i_j = 1$) при значении деформации, равной $\varepsilon = \varepsilon_{0j}^+$ и $z = -h_{j-1}$;
- определим значения $z_0, q = q_{min}$ из системы уравнений (4), (5), (7), (8).

Аналогично находится значение нагрузки q_{max}

$$q_{max} = \max\{q_{max,1}, q_{max,2}, \dots, q_{max,n}\}. \quad (15)$$

Значение нагрузки $q_{max,j}$ из соотношения (15) определим для заданного набора (i_1, i_2, \dots, i_n) согласно алгоритму:

- найдем значение кривизны $\frac{d^2 w_0(x)}{dx}$ из соотношения (7)
 - если слой j находится в области упругого деформирования (значение параметра конфигурации $i_j = 0$) при значении деформации, равной $\varepsilon = \varepsilon_{0j}^+$ и $z = -h_j$;
 - если слой j находится в области нелинейного квазиупругого деформирования или нахождения границы раздела z_j в указанной области (значение параметра конфигурации $i_j = 1$ или $i_j = 2$) при значении деформации, равной $\varepsilon = \varepsilon_{*j}^+$ и $z = -h_j$;
- определим значения $z_0, q = q_{max}$ из системы уравнений (4), (5), (7), (8).

Для исключения заведомо недостижимых предельных нагрузок проверим, чтобы деформация находилась при заданной предельной нагрузке в случае, если слой в области упругого деформирования, в интервале

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{0k}^+, \quad (16)$$

а для слоя в области нелинейного деформирования

$$\varepsilon_{0k}^+ \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{*k}^+, \quad (17)$$

при наличии границы раздела областей в интервале

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{*k}^+, \quad (18)$$

причем указанные неравенства должны выполняться для всех слоев $k = 1, 2, \dots, n$.

Подробно рассмотрим алгоритм проверки соответствия деформации неравенствам (16), (17) для нагрузки $q_{min,j}$ из (14).

Если $q_{min,j}$ определяется для j -го слоя, который находится в области упругого деформирования ($i_j = 0$) или области, содержащей границу раздела областей ($i_j = 2$), тогда, так как при определении указанной нагрузки, будет использовано предположение $\varepsilon = 0$ при $z = -h_{j-1}$, откуда из соотношения (7) следует, что $\varepsilon = 0$ вдоль всей толщины стержня в заданном сечении. Равенство $\varepsilon = 0$ для всех слоев $k = 1, 2, \dots, n$ возможно только если ни один из слоев не находится в области нелинейного квазиупругого деформирования

$$i_1 \neq 1, i_2 \neq 1, i_3 \neq 1, \dots, i_n \neq 1. \quad (19)$$

В случае нарушения равенства (19) для данного набора (i_1, i_2, \dots, i_n) соотношение q_j исключаем из (14).

Если $q_{min,j}$ определяется для j -го слоя, который находится в области нелинейного квазиупругого деформирования ($i_j = 1$), тогда, так как при определении указанной нагрузки было использовано предположение $\varepsilon = \varepsilon_{0j}^+$ при $z = -h_{j-1}$, откуда из соотношения (7) следует

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{0j}^+}{z_0 + h_{j-1}},$$

то при известной кривизне можно получить значение деформации вдоль всего сечения из (7)

$$\varepsilon = \frac{z_0 - z}{z_0 + h_{j-1}} \varepsilon_{0j}^+. \quad (20)$$

Соответственно, если рассматриваемая область i_k находится в области упругого деформирования ($i_k = 0$), необходимо, чтобы наибольшее по модулю значение деформации в k -ом слое (достигается на верхней границе слоя $z = -h_k$) было меньше предельно-упругого значения для данного слоя $\varepsilon = \varepsilon_{0k}^+$, т. е.

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_{j-1}} \varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при} \quad i_k = 0. \quad (21)$$

Если рассматриваемая область i_k находится в области нелинейного квазиупругого деформирования ($i_k = 1$), необходимо, чтобы наименьшее по модулю значение деформации в k -ом слое (достигается на нижней границе слоя $z = -h_{k-1}$) было больше предельно-упругого значения для данного слоя $\varepsilon = \varepsilon_{0k}^+$, т. е.

$$\frac{z_0 + h_{k-1}}{z_0 + h_{j-1}} \varepsilon_{0j}^+ \geq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при} \quad i_k = 1, \quad (22)$$

а наибольшее по модулю значение деформации (достигается на верхней границе слоя $z = -h_k$) было меньше значения предельного предразрушения для данного слоя

$\varepsilon = \varepsilon_{*k}^+$, причем указанное должно быть справедливо, если рассматриваемая область находится в области наличия границы раздела областей ($i_k = 2$)

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_{j-1}} \varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon_{*k}^+ \quad \text{при } i_k = 1, 2. \quad (23)$$

Аналогично определяются значения $q_{max,j}$ из соотношения (15).

Если $q_{max,j}$ определяется для j -го слоя, который находится в области нелинейного квазиупругого деформирования ($i_j = 1$) или области, содержащей границу раздела областей ($i_j = 2$), тогда, так как при определении указанной нагрузки было использовано предположение $\varepsilon = \varepsilon_{*k}^+$ при $z = -h_j$, то получим

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{*j}^+}{z_0 + h_j},$$

тогда при известной кривизне можно получить значение деформации вдоль всего сечения из (7)

$$\varepsilon = \frac{z_0 - z}{z_0 + h_j} \varepsilon_{*j}^+. \quad (24)$$

Соответственно необходимо, чтобы найденное значение деформации удовлетворяло неравенствам на верхней грани слоев для всех $k = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_j} \varepsilon_{*j}^+ \leq \varepsilon_{*k}^+ \quad \text{при } i_k = 1, 2, \quad (25)$$

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_j} \varepsilon_{*j}^+ \leq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при } i_k = 0, \quad (26)$$

а на нижней грани соотношениям

$$\frac{z_0 + h_{k-1}}{z_0 + h_j} \varepsilon_{*j}^+ \geq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при } i_k = 1, 2. \quad (27)$$

Если $q_{max,j}$ определяется для j -го слоя, который находится в области упругого деформирования ($i_j = 0$), тогда, так как при определении указанной нагрузки было использовано предположение $\varepsilon = \varepsilon_{0k}^+$ при $z = -h_j$, то получим

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{\varepsilon_{0j}^+}{z_0 + h_j},$$

тогда при известной кривизне можно получить значение деформации вдоль всего сечения из (7)

$$\varepsilon = \frac{z_0 - z}{z_0 + h_j} \varepsilon_{0j}^+. \quad (28)$$

Соответственно необходимо, чтобы найденное значение деформации удовлетворяло неравенствам на верхней грани слоев для всех $k = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_j} \varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon_{*k}^+ \quad \text{при } i_k = 1, 2, \quad (29)$$

$$\frac{z_0 + h_k}{z_0 + h_j} \varepsilon_{0j}^+ \leq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при } i_k = 0, \quad (30)$$

а на нижней грани – соотношениям

$$\frac{z_0 + h_{k-1}}{z_0 + h_j} \varepsilon_{0j}^+ \geq \varepsilon_{0k}^+ \quad \text{при} \quad i_k = 1, 2. \quad (31)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары: Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.
- [2] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
- [3] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск: НГАСУ, 2004. 488 с.
- [4] Немировский Ю. В., Батулин А. А. Метод расчета деформативности и прочности одноставровых и двуставровых железобетонных стержней // Известия вузов. Строительство. 2015. № 10. С. 82–93.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок при поперечном изгибе многослойных предельно-упругих бетонных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 86–101. DOI: 10.37972/chgru.2023.55.1.0010.

Yu. V. Nemirovskii^{1,2}, S. V. Tikhonov³

**ON DETERMINING THE POSITION OF THE NEUTRAL LINE IN THE CASE
OF EXTREMELY ELASTIC BENDING OF MULTILAYER PHYSICALLY
NONLINEAR CONCRETE RODS**

¹*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

³*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. This paper considers the problem of bending a multilayer rod under transverse loads in the presence of zones of elastic and nonlinear-inelastic deformation, and relations are obtained to determine the interface between the elastic and nonlinear-inelastic deformation regions of the rod. The resulting numerical calculations for cases of coincidence and non-coincidence of the neutral line with the axis of the rod. Numerical calculations of the limiting loads are presented: the first (the deformation reaches the limiting inelastic value) and the second (the deformation reaches the value of the pre-fracture strain).

Keywords: concrete rods, analytical solutions, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads, neutral line

REFERENCES

- [1] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Load-bearing capacity of multilayer concrete bars. Cheboksary: Publishing house of Chuvash University, 2022. 180 p.
- [2] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of Belgorod State Technological University named after. V.G. Shukhova. 2015. no. 6. p. 125–129.
- [3] Mishchenko A. V., Nemirovsky Y. V., Vokhmyanin I. T. Rational and optimal design of layered rod systems. Novosibirsk: NSASU, 2004. 488 p.
- [4] Nemirovsky Y. V., Baturin A. A. Method for calculating the deformability and strength of single-T and I-beam reinforced concrete rods // News of universities. Construction. 2015. no. 10. P. 82–93.
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Determination of ultimate loads during transverse bending of multilayer extremely elastic concrete rods // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2023. no. 1(55). P. 86–101. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.0010.
- [6] Nemirovsky Y. V. Ultimate deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2018. no. 3(37). P. 26–37.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Е. В. Мурашкин

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ФИГУР НАЯ В АСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ ДЕМИТРОПНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОСТИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе процедура построения двумерных фигур Ная модифицируется для асимметричных матриц и применяется для представления определяющих псевдотензоров демитропных микрополярных упругих континуумов. Указанные матричные представления используются для упрощения тензорной записи уравнений анизотропных тел. Метод матричного представления Ная позволяет изобразить тензоры и псевдотензоры четвертого и второго рангов в виде своеобразных двумерных фигур. Получена матричная форма асимметричных определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела. Основное изложение статьи проводится в декартовой прямоугольной системе координат в терминах инвариантного элемента объема.

Ключевые слова: псевдотензор, микрополярная среда, упругий потенциал, определяющий псевдотензор, демитропный микрополярный континуум, фигура Ная, матричное представление

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.009

УДК: 539.374

1. Введение и предварительные сведения В современной инженерной практике все большее применение находят конструкционные метаматериалы и биокompозиты, обладающие сложной микроструктурой [1–3]. Микро- и наноструктурные состояния таких материалов зачастую реагируют на изменение ориентации координатного базиса трехмерного пространства. Математическое моделирование указанных метаматериалов требует привлечения аппарата микрополярной термомеханики. Классические модели микрополярных тел описаны в следующих публикациях [4–8]. Фундаментальным определяющим параметром характеризующим микро- и наноструктурные состояния материала в подобных теориях является характерная микродлина

© Мурашкин Е. В. 2023
Мурашкин Евгений Валерьевич
e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262). <https://rscf.ru/project/23-21-00262/>

Поступила 20.10.2023

L^1 [9, 10, 17], связанная с характерным размером микроструктуры (гранулы, волокна, соты, диполи жидких кристаллов, полимерные молекулы и т.д.). При этом в стандартных длинах: для макромеханики следует положить $L \sim 1$ м, для микромеханики — $L \sim 10^{-6}$ м, а для наномеханики — $L \sim 10^{-9}$ м. Важно отметить, что характерная микродлина микрополярной теории L — важнейший из модулей, которому может быть естественным образом приписан алгебраический целый нечетный вес, т.е. ее можно трактовать как определяющий псевдоскаляр, реагирующий на изменение ориентации координатного базиса. Основные сведения, касающиеся алгебры и анализа псевдотензоров можно найти в некоторых книгах по тензорному исчислению [18–25].

Вывод уравнений динамики упругого поведения демитропных микрополярных упругих тел основывается на квадратичных формах микрополярных упругих потенциалов силовых и моментных напряжений [6–10, 17, 26–29]. Квадратичные представления таких потенциалов, в общем анизотропном случае, требуют привлечения формализма псевдотензорной алгебры и анализа [11, 12, 16, 19–25]. Компоненты определяющих псевдотензоров демитропных потенциалов силовых и моментных напряжений проявляют чувствительность к преобразованиям, меняющим ориентацию координатного базиса трехмерного пространства. Как было показано в работах [30–32] объемные плотности экстенсивных термодинамических параметров, в том числе, объемная плотность упругого потенциала оказывается псевдоинвариантом, алгебраический вес которого зависит от псевдотензорного веса элементарного объема. В настоящей статье изложение будет проведено в терминах инвариантного элемента объема. В общем анизотропном случае упругий потенциал задается суммой произведений сбалансированной в соответствии с правилом баланса алгебраических весов.

Линейное анизотропное микрополярное тело, характеризующееся 171 определяющими постоянными, может быть редуцировано с помощью специальных координатных представлений [26, 27, 33] к демитропному, характеризующемуся девятью определяющими псевдоскалярами. В конвенциональном случае, такими псевдоскалярами будут: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микродлина, и 6 псевдоскаляров, не имеющих физической размерности. Характерная микродлина оказывается псевдоскаляром отрицательного веса -1 и проявляет чувствительность к отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

В настоящей работе метод матричного представления Ная [34–38] модифицируется и применяется к асимметричным тензорам и псевдотензорам четвертого и второго рангов. Построены фигуры Ная для асимметричной модели демитропного микрополярного тела. Получена матричная форма асимметричных определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела.

2. Микрополярный упругий потенциал силовых и моментных напряжений. Рассмотрим трехмерное Евклидово пространство с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат x_i . Зададим микрополярный упругий потенциал \mathcal{U} , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема $d\tau$,

¹Существует небольшое количество литературных источников, которые используют характерную микродлину при построении микрополярной теории. К таким работам относятся, например, публикации Нейбера [9, 10], в которых характерная микродлина обозначалась l . Определяющая постоянная l отличается от L , используемой в работах [11–14], и связана с ней прямой пропорциональной зависимостью, что было продемонстрировано в работах [15, 16]. Последнее обстоятельство подтверждает возможную неоднозначность при математическом описании микро- и наномасштабов.

с естественными псевдотензорными асимметричными аргументами в виде

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{sm}, \kappa_{sm}^{[+1]}), \quad (1)$$

где ϵ_{sm} — асимметричный тензор деформации; $\kappa_{sm}^{[+1]}$ — асимметричный псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал в случае использования инвариантного элемента объема является абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим ни от каких преобразований трехмерного пространства.

Определяющие уравнения микрополярного континуума в этом случае примут вид

$$t_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \mu_{ik}^{[-1]} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa_{ik}^{[+1]}}. \quad (2)$$

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела энергетическая форма в произвольной системе координат можно принять в виде:

$$2\mathcal{U} = H_1^{[+1]} \epsilon_{ism} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{[-2]} \kappa_{ism}^{[+1]} \kappa_{is}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[-1]} + H_3^{[-1]} \epsilon_{ism} \epsilon_s \kappa_{lm}^{[+1]}. \quad (3)$$

Отметим, что единственным определяющим псевдотензором четвертого ранга компоненты которого оказываются чувствительными к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства является определяющий псевдотензор $H_3^{[-1]}$ отрицательного нечетного алгебраического веса -1 .

Воспользовавшись определяющими соотношениями (2), получим

$$\begin{aligned} t_{is} &= H_1^{[+1]} \epsilon_{ism} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]} \kappa_{ism}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[-1]}, \\ \mu_{is}^{[-1]} &= H_2^{[-2]} \kappa_{ism}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[-1]} + \frac{1}{2} H_3^{[-1]} \kappa_{lms} \epsilon_{lm}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для определяющих демитропных тензоров и псевдотензоров координатные представления [33] инвариантные относительно группы вращений получаются в форме [27]

$$\begin{aligned} H_1^{[+1]} &= a g_{is} g_{lm} + b g_{il} g_{sm} + c g_{im} g_{sl}, \\ H_2^{[-2]} &= \frac{a}{2} g_{is} g_{lm} + \frac{b}{2} g_{il} g_{sm} + \frac{c}{2} g_{im} g_{sl}, \\ H_3^{[-1]} &= \frac{a}{3} g_{is} g_{lm} + \frac{b}{3} g_{il} g_{sm} + \frac{c}{3} g_{im} g_{sl}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\frac{[g]}{a}, \frac{[g]}{b}, \frac{[g]}{c}$, ($a = 1, 2, 3; g = 0, -1, -2$) — девять определяющих псевдоскаляров демитропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс” \mathbf{a} — нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры $\frac{[g]}{a}, \frac{[g]}{b}, \frac{[g]}{c}$, как минимум, являются демитропными (демитропными) инвариантами.

Подставив координатные представления (5) в определяющие соотношения (2), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{is} = (a g_{is} g_{lm} + b g_{il} g_{sm} + c g_{im} g_{sl}) \epsilon_{lm} + \\ \quad + \frac{1}{2} (\overset{[-1]}{a} g_{is} g_{lm} + \overset{[-1]}{b} g_{il} g_{sm} + \overset{[-1]}{c} g_{im} g_{sl}) \overset{[+1]}{\kappa}_{lm}, \\ \overset{[-1]}{\mu}_{is} = (\overset{[-2]}{a} g_{is} g_{lm} + \overset{[-2]}{b} g_{il} g_{sm} + \overset{[-2]}{c} g_{im} g_{sl}) \overset{[+1]}{\kappa}_{lm} + \\ \quad + \frac{1}{2} (\overset{[-1]}{a} g_{is} g_{lm} + \overset{[-1]}{b} g_{il} g_{sm} + \overset{[-1]}{c} g_{im} g_{sl}) \epsilon_{lm}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Вместо определяющих псевдоскаляров $\overset{[g]}{a}$, $\overset{[g]}{b}$, $\overset{[g]}{c}$ можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам, таким как: G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности скаляры (см. [17]). В этом случае характерная микродлина L будет псевдоскаляром отрицательного веса -1 .

в итоге получим

$$\begin{aligned} \overset{[g]}{a}_1 &= 2G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, & \overset{[g]}{b}_1 &= G(1 + c_1), & \overset{[g]}{c}_1 &= G(1 - c_1), \\ \overset{[-2]}{a}_2 &= 2G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c_3, & \overset{[-2]}{b}_2 &= G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} (1 + c_2), \\ \overset{[-2]}{c}_2 &= G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} (1 - c_2), & \overset{[-1]}{a}_3 &= 2G \overset{[-1]}{L} c_4, \\ \overset{[-1]}{b}_3 &= G \overset{[-1]}{L} (c_5 - c_6), & \overset{[-1]}{c}_3 &= G \overset{[-1]}{L} (c_5 + c_6). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислим компоненты определяющих псевдотензоров (5) в декартовой системе координат. Для демитропного упругого тела ненулевыми компонентами будут:

$$\begin{aligned} \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{1111} &= \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{2222} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{3333} = \overset{[g]}{a} + \overset{[g]}{b} + \overset{[g]}{c}, \\ \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{1122} &= \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{2211} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{1133} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{3311} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{2233} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{3322} = \overset{[g]}{a}, \\ \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{1221} &= \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{2112} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{1331} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{3113} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{2332} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{3223} = \overset{[g]}{b}, \\ \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{1212} &= \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{2121} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{1313} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{3131} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{2323} = \overset{[g]}{\mathcal{H}}_a^{3232} = \overset{[g]}{c}. \end{aligned} \quad (8)$$

Оставшиеся 60 компонент в каждом из определяющих псевдотензоров, не указанные в (8), будут равны нулю.

3. Фигуры Ная для определяющих псевдотензоров демитропного континуума. Для компактности записи тензорных уравнений иногда выгодно использовать матричные обозначения [34, pp. 113–115], которые позволяют представить компоненты тензора четвертого ранга элементами матрицы, уменьшив количество

пары тензорных индексов (is, lm)	11	22	33	12	13	23	21	31	32
матричные индексы (K, N)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Таблица 1. Соответствие пар тензорных и матричных индексов. (Correspondence of pairs of tensor and matrix indices).

индексов с 4 до 2, а тензоры второго ранга — векторами. Однако, необходимо помнить, что двухиндексные экстенсивы, соответствующие тензорам четвертого ранга, не преобразуются по тензорным правилам.

Заменим компоненты асимметричного тензора деформаций согласно следующей схеме

$$\epsilon_{is} \rightarrow \epsilon_K = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_4 & \epsilon_5 \\ \epsilon_7 & \epsilon_2 & \epsilon_6 \\ \epsilon_8 & \epsilon_9 & \epsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Аналогичным образом представим тензор изгиба-кручения:

$$\kappa_{is} \rightarrow \kappa_K = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_4 & \kappa_5 \\ \kappa_7 & \kappa_2 & \kappa_6 \\ \kappa_8 & \kappa_9 & \kappa_3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для тензоров силовых и моментных напряжений введем следующую замену

$$t_{is} \rightarrow t_K = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_1 & t_4 & t_5 \\ t_7 & t_2 & t_6 \\ t_8 & t_9 & t_3 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mu_{is} \rightarrow \mu_K = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_4 & \mu_5 \\ \mu_7 & \mu_2 & \mu_6 \\ \mu_8 & \mu_9 & \mu_3 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Преобразование определяющих тензоров \mathcal{H}_a^{islm} ($a = 1, 2, 3$) в (13) к виду двумерных матриц будем производить заменой индексов согласно таблице 1. Метаиндексы \mathbf{a} и \mathbf{s} не являются тензорными индексами и нумеруют определяющие тензоры.

В итоге, матричная форма определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела принимает вид

$$\begin{cases} t_K = \mathcal{H}_1^{KN} \epsilon_N + \frac{1}{2} \mathcal{H}_3^{KN} \kappa_N, \\ \mu_K = \mathcal{H}_2^{KN} \kappa_N + \frac{1}{2} \mathcal{H}_3^{KN} \epsilon_N. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим матрицу \mathcal{H}_1^{KN} , из первого слагаемого в квадратичной форме упругого потенциала напряжений (3). Компоненты определяющей матрицы \mathcal{H}_1^{KN} связаны с

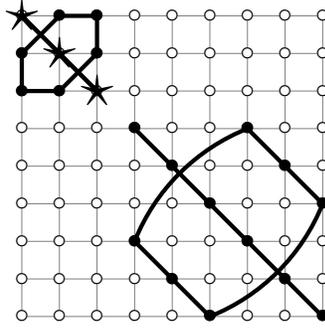


Рис. 1. Двумерная фигура Ная матрицы определяющего псевдотензора $\mathcal{H}_a^{[g]KN}$ демитропного микрополярного упругого тела. \circ — нулевые компоненты, \bullet — компоненты отличные от нуля, $\star = (\mathcal{H}_a^{[g]12} + \mathcal{H}_a^{[g]44} + \mathcal{H}_a^{[g]47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

определяющими постоянными A_a при учете (5) следующим образом

$$\mathcal{H}_a^{[g]KN} = \begin{bmatrix} \frac{[g]}{a} + \frac{[g]}{b} + \frac{[g]}{c} & \frac{[g]}{a} & \frac{[g]}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{[g]}{a} & \frac{[g]}{a} + \frac{[g]}{b} + \frac{[g]}{c} & \frac{[g]}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{[g]}{a} & \frac{[g]}{a} & \frac{[g]}{a} + \frac{[g]}{b} + \frac{[g]}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{[g]}{c} & 0 & 0 & \frac{[g]}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[g]}{c} & 0 & 0 & \frac{[g]}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[g]}{c} & 0 & 0 & \frac{[g]}{b} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{[g]}{b} & 0 & 0 & \frac{[g]}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[g]}{b} & 0 & 0 & \frac{[g]}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[g]}{b} & 0 & 0 & \frac{[g]}{c} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Отметим, что матрица $\mathcal{H}_a^{[g]KN}$ симметрична относительно главной диагонали. Результат построения фигуры Ная для определяющего демитропного псевдотензора представлен на рис. 1.

Двумерная фигура Ная для демитропного микрополярного упругого тела может быть получена путем объединения элементарных фигур для определяющих матриц (см. рис. 1). На рис. 2 представлена фигура Ная для определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела. Пересечение жирных линий на рисунках не говорит о связи соответствующих компонент определяющих матриц.

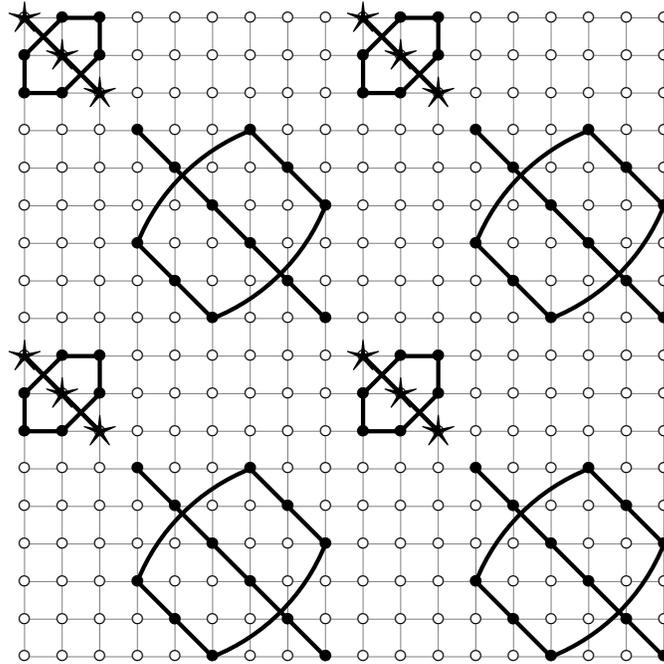


Рис. 2. Двумерная фигура Ная демитропного микрополярного упругого тела. \circ — нулевые компоненты, \bullet — компоненты отличные от нуля, $\star = (\mathcal{H}_{12} + \mathcal{H}_{44} + \mathcal{H}_{47})_a$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

4. Заключение В работе рассматривается процедура построения двумерных фигур Ная, адаптированная к представлению асимметричных определяющих тензоров и псевдотензоров.

- (1) Приведена псевдотензорная форма упругого потенциала и определяющих уравнений в терминах асимметричных тензоров и псевдотензоров.
- (2) Общая анизотропная форма микрополярного упругого потенциала напряжений редуцирована к демитропной форме с помощью специальных координатных представлений.
- (3) Получена матричная форма определяющих уравнений демитропного микрополярного упругого тела.
- (4) Построены двумерные фигуры Ная для асимметричных определяющих тензоров и псевдотензоров демитропного упругого микрополярного тела.
- (5) Получена диаграмма Ная, графически представляющая демитропное микрополярное упругое тело и связями между компонентами асимметричных определяющих тензоров и псевдотензоров.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] DeValck T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
- [2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.

- [3] Lakes R. Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
- [5] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [6] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
- [7] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [8] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. doi: 10.1007/BF01176729.
- [10] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. doi: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [11] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [13] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 4. С. 16–24. doi: 10.37972/chgpru.2020.89.81.031.
- [14] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Т. 58, № 3. С. 802–813. doi: 10.3103/s0025654423700127.
- [15] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 1(55). с. 110–121. doi: 10.37972/chgpru.2023.55.1.012.
- [16] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. doi:10.14498/vsgtu1799.
- [17] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [18] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // *Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie* / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [19] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [20] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Trans. Am. Math. Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [21] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [22] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
- [23] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [24] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [25] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007.
- [26] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). с. 106–115. doi: 10.37972/chgpru.2022.52.2.012.

- [27] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. doi: 10.37972/chgru.2022.52.2.013.
- [28] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3(53). с. 86–100. doi: 10.37972/chgru.2022.53.3.010.
- [29] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). с. 108–115. doi: 10.37972/chgru.2022.54.4.009.
- [30] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Т. 58, № 9. С. ???–???
- [31] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2023. Т. 165, № 4. С. ???–???
- [32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3(57). с. 100–111. doi: 10.37972/chgru.2023.57.3.010.
- [33] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [34] Nye J. F. *Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv p.
- [35] Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 116+vi p.
- [36] Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Fachmedien, Wiesbaden: Springer, 1966. 116+vi p.
- [37] Standards on Piezoelectric Crystals // *Proceedings of the I.R.E.* New York: IRE, 1960. p. 18.
- [38] Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // *Int. J. Engng Sci.* 2021. Vol. 31, no. 4. P. 617–635.

E. V. Murashkin

ON A METHOD OF CONSTRUCTING NYE FIGURES FOR ASYMMETRIC THEORIES OF MICROPOLAR ELASTICITY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In this work, the process of constructing two-dimensional figures is modified for asymmetric matrices and is used to represent the defining pseudotensors of demitropic micropolar elastic continua. The specified matrix representations are used to simplify the tensor representation of the material of anisotropic bodies. This method allows us to represent tensors and pseudotensors of the fourth and second ranks in the form of peculiar two-dimensional figures. A matrix form is obtained that defines the basis of a demitropic micropolar elastic body. The main presentation of the article is carried out in a Cartesian rectangular coordinate system.

Keywords: pseudotensor, micropolar medium, elastic potential, defining pseudotensor, demitropic micropolar continuum, Nye figure, matrix representation

REFERENCES

- [1] DeValck T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
- [2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.
- [3] Lakes R. *Composites and metamaterials*. Singapore: World Scientific, 2020.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
- [5] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [6] Nowacki W. *Theory of micropolar elasticity*. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
- [7] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [8] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. doi: 10.1007/BF01176729.
- [10] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. doi: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [11] Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and plasticity*. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [13] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. no. 4. P. 16–24. doi:10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [14] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. T. 58, № 3. C. 802–813. doi: 10.3103/s0025654423700127.
- [15] Murashkin E. V. On the relations between micropolar defining parameters of thermodynamic state potentials // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im.*

Murashkin Evgenii Valeryevich, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

- IYa Yakovleva. *Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 1(55). p. 110–121. doi:10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [16] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. doi:10.14498/vsgtu1799.
- [17] Radayev Y. N. The rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. doi:10.14498/vsgtu1635. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [18] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [19] Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
- [20] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Trans. Am. Math. Society*. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [21] Veblen O. *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [22] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
- [23] Synge J. L., Schild A. *Tensor calculus*. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [24] Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
- [25] Das A. J. *Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007.
- [26] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. T. 58, № 9. С. ???–???
- [27] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three–Dimensional Space // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2023. T. 165, № 4. С. ???–???
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). p. 106–115. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). P. 118–127. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the two main natural forms of the potential of asymmetric tensors of force and moment stresses in the mechanics of hemitropic solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. № 3(53). с. 86–100. doi: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
- [31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. № 4(54). с. 108–115. doi: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
- [32] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. № 3(57). с. 100–111. doi: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [33] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [34] Nye J. F. *Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+*xv* p.
- [35] Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1957. 116+*vi* p.
- [36] Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Fachmedien, Wiesbaden: Springer, 1966. 116+*vi* p.
- [37] Standards on Piezoelectric Crystals // *Proceedings of the I.R.E.* New York: IRE, 1960. p. 18.

- [38] Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // Int. J. Engng Sci. 2021. Vol. 31, no. 4. P. 617–635.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

К ПОЛИВАРИАНТНОСТИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕЛА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена исследованию поливариантности динамических уравнений теории полуизотропной микрополярной термоупругости. Рассмотрены и проанализированы различные варианты присвоения целых весов полевым переменным с последующим детерминированием алгебраических весов псевдовекторных уравнений динамики полуизотропного термоупругого тела. Этим целям удастся достичь, используя псевдоинвариантные элементы объема и площади нечетных целых весов. Кроме того, показано, что нечетный вес может быть приписан псевдовектору спинорных перемещений. В результате чего, тепловой поток, тензор силовых напряжений, массовая плотность, теплоемкость, модуль сдвига также оказываются псевдотензорными величинами нечетного веса, т.е. чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Обсуждается постулат абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры. Получены различные варианты связанной системы дифференциальных уравнений динамики и уравнения теплопроводности для полуизотропного микрополярного термоупругого тела. Обсуждаются вопросы взаимовлияния алгебраических весов определяющих псевдоскаляров с целью учета их реакции на преобразования трехмерного пространства, меняющих его ориентацию на противоположную.

Ключевые слова: поливариантность, наномасштаб, микромасштаб, наноструктурное состояние, характерная микродлина, модуль сдвига, теплопроводность, микрополярность, тензорный элемент объема, псевдовектор потока тепла, псевдотензор, зеркальное отражение, полуизотропное тело, гиротропное тело

DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010

УДК: 539.374

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2023

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”)

Поступила 20.09.2023

1. Введение и предварительные сведения. Конструкционные метаматериалы и биоконпозиты обладают сложной микроструктурой [1–3]. Зачастую микро- и наноструктурные состояния таких материалов оказываются чувствительными к преобразованиям трехмерного пространства, меняющим его ориентацию на противоположную (с левой на правую, и, наоборот, с правой на левую). Моделирование термомеханического отклика указанных материалов следует выполнять средствами теорий микрополярной термомеханики [4–8]. Фундаментальным определяющим параметром характеризующим микроструктурные особенности материала в таких теориях является характерная микродлина L^2 [9, 10, 17], связанная с характерным размером микроструктуры (гранулы, волокна, соты, диполи жидких кристаллов, полимерные молекулы и т.д.). При этом в стандартных длинах: для макромеханики следует положить $L \sim 1$ м, для микромеханики — $L \sim 10^{-6}$ м, а для наномеханики — $L \sim 10^{-9}$ м. Важно отметить, что характерная микродлина микрополярной теории L — важнейший из модулей, которому может быть естественным образом приписан алгебраический вес, т.е. ее можно трактовать как определяющий псевдоскаляр, реагирующий на изменение ориентации координатного базиса. Основные сведения, касающиеся алгебры и анализа псевдотензоров можно найти в некоторых книгах по тензорному исчислению [18–25].

Отметим исключительную важность порядка малости характерной микродлины. Связанная система дифференциальных уравнений в частных производных микрополярной термоупругости состоит из трех уравнений: двух псевдовекторных уравнений динамики для силовых и моментных напряжений и уравнения теплопроводности. При формулировке указанных дифференциальных уравнений в терминах трансляционных и спинорных перемещений нетрудно заметить, что уравнение для моментов имеет порядок малости L^2 , в то время как уравнение для силовых напряжений — L^0 . Отмеченное следует учитывать при численных расчетах, т.к. в случае $L^2 \sim 10^{-18}$ м погрешность вычислений может оказаться больше чем вклад соответствующих слагаемых. Указанная особенность позволяет применить к исследованию системы дифференциальных уравнений микрополярной термоупругости теорию сингулярных возмущений.

Вывод связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных микрополярной термоупругости следует начинать с определения весов элементарного объема и псевдовектора спинорных перемещений. Такой выбор существенным образом влияет на алгебраический вес приписываемый основным характеристикам микро-, нано- термомеханических состояний микрополярного континуума. Детерминирование алгебраических весов элементов объема и площади, а также веса псевдовектора спинорных перемещений требует особой аккуратности, т.к. это приводит к тому, что определяющие постоянные оказываются псевдоскалярами, а характеристики микро- и нано- структурных термомеханических состояний проявляют псевдотензорные свойства. Ранее были исследованы отдельные случаи развития теорий микрополярной термоупругости в терминах псевдотензоров. Так например, если при выводе основных уравнений теории микрополярной термоупругости использовать естественные

²В работах Нейбера [9, 10] характерная микродлина обозначалась l . Определяющая постоянная l отличается от L , используемой в работах [11–14], и связана с ней прямой пропорциональной зависимостью [15, 16] с точностью до безразмерного множителя. Последнее обстоятельство подтверждает, что микро- и наномасштаб может быть введен в микрополярную модель неоднозначным способом.

элементы объема и площади,³ как было показано ранее в работе [28] тепловой поток, тензор силовых напряжений, плотность массы и теплоемкость также оказываются псевдотензорными величинами положительного нечетного веса. С другой стороны, при выборе дублетного элемента объема и соответствующего элемента площади тензор силовых напряжений оказывается псевдотензором отрицательного веса -1 , тензор моментных напряжений — псевдотензором отрицательного веса -2 , тепловой поток — псевдовектором алгебраического веса -1 , массовая плотность — псевдоскаляром алгебраического веса -1 , что было продемонстрировано в работе [29]. Несмотря на то, что тензорные элементы объема и площади даже в N -мерном пространстве наиболее просто задаются в терминах псевдотензоров [18, 30–33], описание обычно проводится с использованием формализма кососимметричных дифференциальных форм [34–37], существенно искажающих очевидные свойства указанных объектов и их псевдотензорную природу.

Как отмечалось выше, алгебраический вес приписываемый элементам объема и площади влияет на веса объемных плотностей характеристик термодинамического процесса: внутренней энергии, энтропии, массовой плотности, теплового потока, а также — на веса связанных с ними определяющих псевдоскаляров. При этом, экстенсивные термодинамические параметры, проявляющие свойства физической аддитивности, задаваемые в объеме, являются абсолютными скалярами, что является фундаментальным термодинамическим принципом. С другой стороны, приписывание веса псевдовектору спинорных перемещений, также приводит к изменению сопутствующих алгебраических весов, приписываемых определяющим псевдоскалярам. При этом, задание кинематики микрополярного тела, базируется на одной из трех знаменитых теоремах Шаля [38]. Из трех теорем Шаля по-существу только вторая применяется в формулировках основных положений линейной микрополярной теории упругости [4, 7, 8]. Литературный поиск показывает скудность информации об использовании при математическом моделировании микрополярного континуума винтовой (третьей) теоремы Шаля–Моцци, в которой кинематика микрополярного тела представляется как скользящий поворот. В конвенциональных микрополярных теориях упругости и термоупругости [5–8] обычно оперируют с двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротов), последнее из которых наиболее просто задается псевдовектором нечетного алгебраического веса. Возможны различные способы задания псевдовектора спинорных перемещений. В частности, представлению с помощью контравариантного псевдовектора $\phi^{[+1]k}$ положительного веса $+1$ посвящены работы [11–14], а моделям микрополярных тел, в которых использовался ковариантный псевдовектор $\phi_k^{[-1]}$ отрицательного веса -1 , посвящены работы [39, 40]). Указанные псевдовекторы легко преобразуются к абсолютным векторам спинорных перемещений ϕ^k (или ϕ_k).

2. Элементарные тензорные объемы и площади в трехмерном пространстве. Настоящая статья существенным образом опирается на результаты, терминологию и понятия современной геометрии и тензорного анализа [20, 41]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора

³Отметим, что использование естественных элементов объема характерно для вариационных функционалов физических теорий поля [26, 27].

в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут.

Дальнейшие рассуждения будем проводить в трехмерном Евклидовом пространстве. Введем в ковариантный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Смешанное произведение векторов базиса [41] позволяет ввести понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e и из двух псевдоскалярных единиц согласно [40]:

$$e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \quad \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} = e, \quad \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} = e^{-1}, \quad (1)$$

тем самым, разделив локальные базисные системы на право- и лево- ориентированные. Отметим, что знак псевдоскалярной единицы в (1) определяет ориентации координатных систем, т. е. для правоориентированных — $\begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} > 0$, для левоориентированных — $\begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} < 0$.

Кроме того, целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, т. е.

$$\nabla_k \begin{matrix} [\pm g] \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [\pm g] \\ 0 \end{matrix},$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

В дальнейшем изложении припишем функции w.g.t значение веса псевдотензора, на который действует эта функция. Например,

$$\text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [g] \\ 1 \end{matrix} \right) = g.$$

Псевдотензор $\begin{matrix} [g] \\ T \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\begin{matrix} T \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots = \begin{matrix} [-g] \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} [g] \\ T \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots. \quad (2)$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [42–44]. Действительно, имеем

$$\text{w.g.t} \left(\begin{matrix} T \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots \right) = \text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [-g] \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} [g] \\ T \\ (n) \end{matrix} h_1 h_2 \dots h_s \dots \right) = -g + g = 0.$$

Далее в качестве многообразия выберем двумерную поверхность, заданную естественной (Гауссовой) параметризацией u^1, u^2 . В этом случае контравариантный тензорный элемент площади поверхности принимает вид [30, 31]

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1} x^i \partial_{\alpha_2} x^j du^1 du^2 = 2 \partial_1 x^{[i} \partial_2 x^{j]} du^1 du^2. \quad (3)$$

Ковариантный тензорный элемент площади $d\tau_{ij}$ можно получить, опустив индексы у $d\tau^{ij}$ в (3).

Антисимметричным абсолютным тензорам $d\tau^{ij}$ и $d\tau_{ij}$ сопутствуют ковариантный и контравариантный псевдовекторы

$$dA_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} d\tau^{ij}, \quad dA^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} d\tau_{ij}, \quad (4)$$

где символы перестановок ϵ_{kij} и ϵ^{kij} удовлетворяют равенству

$$\begin{matrix} [-1] \\ \epsilon \end{matrix}_{kij} = \begin{matrix} [+1] \\ \epsilon \end{matrix}_{kij}. \quad (5)$$

Отметим, что равенство (5) нарушает принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и весов псевдотензоров. Кроме того, что для символов перестановок требуются специальные правила жонглирования индексами:

$$\epsilon_{kij} = e^{-2} g_{kl} g_{is} g_{jm} \epsilon^{lsm}. \quad (6)$$

Абсолютные векторные элементы площади поверхности можно определить, домножив псевдовекторные элементы площади на соответствующую степень псевдоскалярной единицы

$$dA_k = \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ dA_k \end{matrix}, \quad dA^k = \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} [+1] \\ dA^k \end{matrix}. \quad (7)$$

Псевдоскалярные элементы площади поверхности задаются следующими формулами

$$\begin{matrix} [-1] \\ dA \end{matrix} = (\text{sgn } e) \sqrt{g^{sk} \begin{matrix} [-1] \\ dA_s \end{matrix} \begin{matrix} [-1] \\ dA_k \end{matrix}}, \quad \begin{matrix} [+1] \\ dA \end{matrix} = (\text{sgn } e) \sqrt{g_{sk} \begin{matrix} [+1] \\ dA^s \end{matrix} \begin{matrix} [+1] \\ dA^k \end{matrix}}. \quad (8)$$

Оба элемента площади в (8) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. И тот, и другой элемент площади (8) чувствительны к изменению ориентации координатной системы, что обусловлено знаком фундаментального ориентирующего.

Инвариантный элемент площади поверхности определяются согласно

$$dA = \sqrt{dA^k dA_k} > 0. \quad (9)$$

Использував введенные выше определения для элементов площади (8) и (9), можно показать, что

$$\left(\begin{matrix} [\pm 1] \\ dA \end{matrix} \right)^2 = \frac{1}{2} \begin{matrix} [\pm 2] \\ 1 \end{matrix} d\tau^{is} d\tau_{is}, \quad (dA)^2 = \frac{1}{2} d\tau^{is} d\tau_{is}.$$

3. Постулат абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры. Как отмечалось ранее, выбор способа измерения элементарных объемов и площадей, т.е. процедура приписывания алгебраического веса псевдоинвариантным элементам объема и площади, существенным образом влияет на алгебраический вес основных характеристик микро- и нано- структурных термомеханических состояний микрополярного континуума, в особенности, проявляющих свойства термодинамической аддитивности. Основываясь на результатах предыдущих разделов настоящей статьи, следует отметить, что существует три варианта развития моделей микрополярной термоупругости, различающихся элементарными объемами:

$\begin{matrix} [+1] \\ d\tau \end{matrix}$, $\begin{matrix} [-1] \\ d\tau \end{matrix}$, $d\tau$. Их можно определить следующей диаграммой весов элементарных объемов, элементарных площадей, и характеристик микро- и нано- структурных термомеханических состояний, реагирующих на эти веса:

$$\begin{array}{l} (1) \quad d\tau \quad dA \quad h^k \quad \lambda \quad c \quad G \quad t^{ik} \\ (2) \quad \begin{matrix} [+1] \\ d\tau \end{matrix} \quad \begin{matrix} [+1] \\ dA \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ h \end{matrix}^k \quad \begin{matrix} [-1] \\ \lambda \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ c \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ G \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ t \end{matrix}^{ik} \\ (3) \quad \begin{matrix} [-1] \\ d\tau \end{matrix} \quad \begin{matrix} [-1] \\ dA \end{matrix} \quad \begin{matrix} [+1] \\ h \end{matrix}^k \quad \begin{matrix} [+1] \\ \lambda \end{matrix} \quad \begin{matrix} [+1] \\ c \end{matrix} \quad \begin{matrix} [+1] \\ G \end{matrix} \quad \begin{matrix} [+1] \\ t \end{matrix}^{ik} \end{array}$$

Представленная диаграмма построена с использованием правила баланса алгебраических весов и отражает возможную чувствительность определяющих псевдоскаляров (таких как, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, модуль сдвига), к преобразованиям, меняющим ориентацию координатного базиса. Последнее обстоятельство играет исключительно важную роль в микрополярных теориях термоупругости, развиваемых в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади.

Введем обозначение для алгебраического веса, ассоциированного с элементарными объемом и площадью согласно правилу

$$g = \begin{cases} +1, & \text{для } \begin{matrix} [-1] & [-1] \\ d\tau, & dA; \end{matrix} \\ -1, & \text{для } \begin{matrix} [+1] & [+1] \\ d\tau, & dA; \end{matrix} \\ 0, & \text{для } d\tau, \quad dA. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда для измерения псевдоинвариантных элементов площадей и объемов запишем:

$$\begin{matrix} [-g] & [-g] & [-g] \\ dA, & dA_k, & d\tau. \end{matrix} \quad (11)$$

Отдельного обсуждения требует алгебраический вес псевдотензора моментных напряжений $\mu_{,k}^i$, т.к. на него также оказывает влияние вес псевдовектора спинорных перемещений. По аналогии с (10) примем обозначение для алгебраического веса, ассоциированного с псевдовектором спинорных перемещений

$$w = \begin{cases} +1, & \text{для } \begin{matrix} [+1] \\ \phi^i; \end{matrix} \\ -1, & \text{для } \begin{matrix} [-1] \\ \phi_i; \end{matrix} \\ 0, & \text{для } \phi^i \text{ или } \phi_i, \end{cases} \quad (12)$$

тогда согласно правилу баланса весов для псевдотензора моментных напряжений получим

$$w.g.t(\mu_{,k}^i) = g - w. \quad (13)$$

Алгебраические веса ассоциированных (сопутствующих) псевдовекторов силовых и моментных напряжений вычисляются в соответствии с правилом баланса весов согласно равенствам

$$\begin{aligned} w.g.t \left(\begin{matrix} [g-1] \\ \tau^i \end{matrix} \right) &= w.g.t(\epsilon_{ijk} t^{[g]jk}) = g - 1, \\ w.g.t \left(\begin{matrix} [g-w+1] \\ \mu^i \end{matrix} \right) &= w.g.t(\epsilon^{iks} \mu_{[ks]}^{[g-w]}) = g - w + 1, \end{aligned}$$

откуда немедленно можно получить соотношения в весах

$$2 \begin{matrix} [g-1] \\ \tau^i \end{matrix} = -\epsilon_{ijk} t^{[g]jk}, \quad 2 \begin{matrix} [g-w+1] \\ \mu^i \end{matrix} = \epsilon^{iks} \mu_{[ks]}^{[g-w]}.$$

Рассмотрим процесс теплопередачи в телах, микро-, наноструктурные характеристики термомеханических состояний которых реагируют на изменение ориентации трехмерного пространства. Количество тепла Q , поступающее через фиксированную

замкнутую поверхность ∂ в единицу времени является абсолютным скаляром и в условиях принятых обозначений (10) будет определяться интегральным соотношением

$$Q = \oint_{\partial} [g]_k n_k dA = \oint_{\partial} [g]_k [-g] dA_k, \quad (14)$$

где $[g]_k$ — псевдовектор потока тепла, n_k — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂ .⁴

Баланс весов в (14) базируется на фундаментальном утверждении

$$\text{w.g.t}(Q) = 0,$$

означающем невозможность приписать какой-бы то ни было целый алгебраический вес количеству тепла Q . Отсюда немедленно следует, что

$$\text{w.g.t}\left([g]_k [-g] dA_k\right) = 0.$$

Откуда видно, что в вектор потока тепла в условиях использования псевдовекторных элементов площади оказывается псевдовектором нечетного алгебраического веса.

С процессом теплопроводности связана важная термодинамическая переменная состояния — абсолютная термодинамическая температура. Рассмотрим возможность приписать ей целый алгебраический вес, т.е. рассматривать ее как псевдоинвариант⁵. В качестве термодинамического потенциала сначала выберем внутреннюю энергию u как функцию термодинамических переменных состояния:

$$u = \bar{u}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[w]}, \varphi^{[w]_i}, \kappa_i, s).$$

Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. В качестве аргументов потенциала состояния выбраны: энтропия, симметричные части асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k} u_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \quad \kappa_{(kl)}^{[w]} = \nabla_{(k} \phi_{l)}^{[w]} = \frac{1}{2}(\nabla_k \phi_l^{[w]} + \nabla_l \phi_k^{[w]}), \quad (15)$$

а также сопутствующие им псевдовекторы:

$$\varphi^{[w]_i} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\kappa^{[w][kl]}. \quad (16)$$

Абсолютная термодинамическая температура θ в термомеханике сплошных сред определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциала состояния (внутренней энергии \bar{u}) по энтропии s согласно формуле:

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[w]}, \varphi^{[w]_i}, \kappa_i, s)}{\partial s}. \quad (17)$$

⁴Абсолютность вектора внешней нормали к поверхности, а также способы приписывания ему алгебраического веса в условиях когда поверхность задается псевдоскалярной функций [32, 45]

⁵В классической термомеханике континуума абсолютная термодинамическая температура θ — всегда абсолютный инвариант, не зависящий ни от поворотов, ни от зеркальных отражений пространства.

Для удобства введем в рассмотрение плотности в расчете на единицу псевдоинвариантного объема $d\tau$:

$$\overset{[g]}{S} = \overset{[g]}{\rho} s, \quad \overset{[g]}{U} = \overset{[g]}{\rho} u. \quad (18)$$

В этом случае, производную в (17) можно преобразовать в соответствии с (18) к виду

$$\theta = \frac{\partial \overset{[g]}{U}(\epsilon_{(kl)}, \overset{[w]}{\kappa}_{(kl)}, \overset{[w]}{\varphi}_i, \kappa_i, \overset{[g]}{S})}{\partial \overset{[g]}{S}}. \quad (19)$$

Кроме того, следует принимать во внимание фундаментальное термодинамическое неравенство

$$\inf \theta > 0, \quad (20)$$

постулирующее как положительность абсолютной температуры⁶, так и невозможность достичь абсолютного нуля ни при каком допустимом термодинамическом процессе.

Из определения (17) и правила баланса весов нетрудно заметить, что независимо от выбора веса элементарного объема, веса плотности внутренней энергии и веса плотности энтропии следует⁷

$$\text{w.g.t}(\theta) = \text{w.g.t} \left(\frac{\overset{[g]}{U}}{\overset{[g]}{S}} \right) = \text{w.g.t} \left(\frac{\overset{[g]}{1} U}{\overset{[g]}{1} S} \right) = \text{w.g.t} \left(\frac{U}{S} \right) = 0.$$

Последовательность равенств (3) немедленно приводит заинтересованного читателя к фундаментальному утверждению, что абсолютная температура является абсолютным инвариантом, сохраняющим неизменным свое значение при поворотах и отражениях пространства. Последнее обстоятельство подтверждает принципиальную нереализуемость приписывания какого-бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре. Последнее обстоятельство обусловлено различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).

4. Различные “сценарии” уравнений микрополярной термоупругости

Уравнения динамики микрополярного континуума наиболее корректно можно получить из вариационного принципа виртуальных перемещений. Формулировка этого принципа существенным образом зависит от выбора способа измерения элементарных объемов и площадей подробно изложенных в предыдущем разделе. Дифференциальные псевдовекторные уравнения динамики, общие для всех микрополярных теорий,

⁶Положительность абсолютной температуры может быть доказана, исходя из канонического распределения Гиббса для ансамбля элементарных термодинамических систем. Отметим, что неравенство (20) запрещает любые изменения термодинамической температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства, что собственно следует из $\text{w.g.t}(\theta) = 0$, и, кроме всего прочего, говорит о невозможности приписать температуре как бы то ни было нечетный алгебраический вес.

⁷В данном контексте подразумевается, что плотности берутся в расчете на единицу объема.

с учетом принятых обозначений (10) и (12) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \nabla_k [g] t^{ki} &= -\rho [g] (f^i - \partial..u^i), \\ \nabla_k [g-w] \mu_{.i} &- 2 \tau_i = -\rho [g-1] (l_i - \mathfrak{I} \partial.. \phi_i), \end{aligned} \quad (21)$$

Важно отметить, что второе псевдовекторное дифференциальное уравнение в системе (21), записанное в произвольной системе координат, не всегда удовлетворяет правилу баланса весов. Однако, правило баланса весов не нарушается в случае когда вес псевдотензора спинорных перемещений равен +1 или для координатных систем с ограничением $\sqrt{g} = 1$.⁸

Определяющие уравнения полуизотропной микрополярной среды записываются в принятых обозначениях можно принять в виде [17]:

$$\begin{aligned} [g] t^{(is)} &= 2G [g] (\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}) \epsilon_{(lm)} + G [g] L^{[-w]} (c_4 g^{is} g_{lm} [w] \kappa^{(lm)} + c_5 [w] \kappa^{(is)}) - \\ &\quad - 2G \alpha \frac{1+\nu}{*1-2\nu} \theta, \\ [g-w] \mu_{(is)} &= 2G [g] L^{[-w]} L^{[-w]} (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) [w] \kappa^{(lm)} + G [g] L^{[-w]} (c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}) - \\ &\quad - 2G [g] L^{[-w]} L^{[-w]} \beta \theta, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} [g-1] \tau_i &= 2G [g] c_1 g_{is} \varphi^s + \frac{1}{2} G [g] L^{[-w]} c_6 \kappa_i, \\ [g-w+1] \mu_{.i} &= 2G [g] L^{[-w]} L^{[-w]} c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G [g] L^{[-w]} c_6 \varphi^i, \end{aligned}$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; α — коэффициент линейного теплового расширения; β — коэффициент теплового изгиб-кручения (см. [11, 17]).

Возвращаясь к записи в терминах асимметричных псевдотензоров силовых и моментных напряжений получим

$$\begin{aligned} [g] t_{is} &= G [g] \left[(1+c_1) \nabla_i u_s + (1-c_1) \nabla_s u_i + 2\nu(1-2\nu)^{-1} g_{is} \nabla_k u^k - \right. \\ &\quad \left. - 2c_1 e_{isl} [w] \phi^l + L [g-w] c_4 g_{is} \nabla_l [w] \phi^l + L [g-w] c_5 \nabla_{(i} [w] \phi_{s)} - \frac{1}{2} L [g-w] c_6 \nabla_{[i} [w] \phi_{s]} - 2\alpha \frac{1+\nu}{*1-2\nu} \theta \right], \\ [g-w] \mu_{is} &= G [g] L^{[-w]} L^{[-w]} \left[(1+c_2) \nabla_i [w] \phi_s + (1-c_2) \nabla_s [w] \phi_i + 2c_3 g_{is} \nabla_l [w] \phi^l + \right. \\ &\quad \left. + L [g-w] \left(c_4 g_{is} \nabla_l u^l + c_5 \nabla_{(i} u_{s)} - \frac{1}{2} c_6 \nabla_{[i} u_{s]} + \frac{1}{2} c_6 \epsilon_{isl} [w] \phi^l \right) - 2\beta \theta \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

⁸Ограничение $\sqrt{g} = 1$ часто используется не только в теории относительности [46], но и в математической теории пластичности [47]. На страницах 135–142 монографии [46] условие $\sqrt{g} = 1$ используется при выводе уравнений теории гравитации в четырехмерном пространстве–времени, что существенно упрощает уравнения теории относительности.

Подставив полученные определяющие уравнения (23) в уравнения динамики (21), дополнив их уравнением теплопроводности [28, 29] для полуизотропного микрополярного тела получим замкнутую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & G^{[g]}[(1 + \mathbf{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - \mathbf{c}_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2^{[-w-1]} \mathbf{c}_1 \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l + \\
 & \quad + \frac{[-w]}{L} c'_4 \nabla^i \nabla_k \phi^k + \frac{[-w]}{L} c'_5 \nabla^k \nabla_k \phi^i] - 2G \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \nabla_i \theta = -\rho (f^i - \partial..u^i), \\
 & G^{[g]} L^{[-w]} L^{[-w]} [(1 + \mathbf{c}_2)\nabla^s\nabla_s \phi_i + (1 - \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3)\nabla_i\nabla_k \phi^k + \\
 & \quad + \frac{[-w]}{L} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + \frac{[-w]}{L} c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + \frac{[-w]}{L} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^l] - \\
 & \quad - 2eG \mathbf{c}_1^{[g]} (2\phi_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - 2G \frac{[-w]}{L} L^{[-w]} \beta \nabla_i \theta = -\rho (l_i - \mathfrak{I} \partial.. \phi_i), \\
 & \lambda \nabla_s \nabla^s \theta - c \rho \partial.. \theta - 2G \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \theta_0 \nabla_s \partial.. u^s - 2G \frac{[-w]}{L} L^{[-w]} \beta \theta_0 \nabla_s \partial.. \phi^s = 0,
 \end{aligned} \tag{24}$$

где f^i — вектор массовых сил, l_i — псевдовектор массовых моментов, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость на единицу массы. В этом случае характерная микродлина L будет псевдоскаляром алгебраического веса $-w$, а модуль сдвига G — псевдоскаляр алгебраического веса g .

Рассмотрим некоторые наиболее интересные случаи детерминирования алгебраических весов элементарных объемов, площадей и псевдовектора спинорных перемещений. В начале выпишем систему (24) в терминах абсолютных тензоров, т.е. $g = 0$, $w = 0$. В этом случае получим

$$\begin{aligned}
 & G[(1 + \mathbf{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - \mathbf{c}_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\mathbf{c}_1 \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l \\
 & \quad + Lc'_4 \nabla^i \nabla^k \phi_k + Lc'_5 \nabla^k \nabla_k \phi^i] - 2G \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \nabla^i \theta = -\rho (f^i - \partial..u^i), \\
 & GL^2[(1 + \mathbf{c}_2)\nabla^s\nabla_s \phi_i + (1 - \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3)\nabla_i\nabla^k \phi_k \\
 & \quad + L^{-1} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + L^{-1} c'_5 \nabla_k \nabla^k u_i - L^{-1} c'_6 \epsilon_{i..l} \nabla_s \phi_l] \\
 & \quad - 2G \mathbf{c}_1 (2\phi_i + \epsilon_{i..l} \nabla_k u_l) - 2GL^2 \beta \nabla_i \theta = -\rho (l_i - \mathfrak{I} \partial.. \phi_i), \\
 & \nabla_s \nabla^s \theta - \frac{c\rho}{\lambda} \partial.. \theta - 2G \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial.. u^s - 2GLL \beta \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial.. \phi_s + \frac{\rho q}{\lambda} = 0.
 \end{aligned}$$

Система (24) в терминах естественного элемента объема ($g = +1$) и псевдовектора спинорных перемещений положительного веса ($w = +1$) примет вид:

$$\begin{aligned}
& G^{[+1]} [(1 + \mathbf{c}_1) \nabla^s \nabla_s u^i + (1 - \mathbf{c}_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k + 2 \mathbf{c}_1^{[-2]} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l + \\
& \quad + L c_4'^{[-1]} \nabla^i \nabla_k \phi^k + L c_5'^{[-1]} \nabla^k \nabla_k \phi^i] - 2 G \alpha \frac{1 + \nu}{* 1 - 2\nu} \nabla_i \theta = - \rho^{[+1]} (f^i - \partial..u^i), \\
& G^{[+1]} L^{[-1]} L^{[-1]} [(1 + \mathbf{c}_2) \nabla^s \nabla_s \phi_i + (1 - \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3) \nabla_i \nabla_k \phi^k + \\
& \quad + L^{-1} c_4'^{[-1]} \nabla_i \nabla^k u_k + L^{-1} c_5'^{[-1]} \nabla^k \nabla_k u_i + L^{-1} c_6'^{[-1]} \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^l] - \\
& \quad - 2e G \mathbf{c}_1^{[+1]} (2 \phi_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - 2 G L \beta \nabla_i \theta = - \rho^{[+1]} (l_i - \mathfrak{I} \partial.. \phi_i), \\
& \lambda \nabla_s \nabla^s \theta - c \rho^{[+1]} \partial.. \theta - 2 G \alpha \frac{1 + \nu}{* 1 - 2\nu} \theta_0 \nabla_s \partial.. u^s - 2 G L \beta \theta_0 \nabla_s \partial.. \phi^s + \rho^{[+1]} q = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

При использовании дублетного элемента объема ($g = -1$) и псевдовектора спинорных перемещений отрицательного веса ($w = -1$) система дифференциальных уравнений (24) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
& G^{[-1]} [(1 + \mathbf{c}_1) \nabla^s \nabla_s u^i + (1 - \mathbf{c}_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k + 2\mathbf{c}_1 \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l + \\
& \quad + L c_4'^{[+1]} \nabla^i \nabla_k \phi^k + L c_5'^{[+1]} \nabla^k \nabla_k \phi^i] - 2 G \alpha \frac{1 + \nu}{* 1 - 2\nu} \nabla_i \theta = - \rho^{[-1]} (f^i - \partial..u^i), \\
& G^{[-1]} L^{[+1]} L^{[+1]} [(1 + \mathbf{c}_2) \nabla^s \nabla_s \phi_i + (1 - \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3) \nabla_i \nabla_k \phi^k + \\
& \quad + L^{-1} c_4'^{[+1]} \nabla_i \nabla^k u_k + L^{-1} c_5'^{[+1]} \nabla^k \nabla_k u_i + L^{-1} c_6'^{[+1]} \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^l] - \\
& \quad - 2e G \mathbf{c}_1^{[-1]} (2 \phi_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - 2 G L \beta \nabla_i \theta = - \rho^{[-1]} (l_i - \mathfrak{I} \partial.. \phi_i), \\
& \lambda \nabla_s \nabla^s \theta - c \rho^{[-1]} \partial.. \theta - 2 G \alpha \frac{1 + \nu}{* 1 - 2\nu} \theta_0 \nabla_s \partial.. u^s - 2 G L \beta \theta_0 \nabla_s \partial.. \phi^s = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

5. Детерминирование весов определяющих скаляров в полуизотропном теле. Полученные в предыдущем разделе настоящей статьи системы дифференциальных уравнений демонстрируют важное свойство термомеханических характеристик полуизотропных микрополярных термоупругих тел — определяющие постоянные, имеющие физическую размерность, оказываются псевдоскалярами нечетного алгебраического веса, т.е. проявляют чувствительность к преобразованиям трехмерного пространства, меняющим его ориентацию на противоположную. К таким псевдоскалярам относятся: модуль сдвига G , зависящий от алгебраического веса псевдоинвариантного элемента площади, и характерная микродлина L , вес которой определяется весом псевдовектора спинорных перемещений, а также коэффициент теплопроводности λ и массовая плотность ρ .

Следует отметить, что указанные выше псевдоскаляры ковариантно постоянны, т.е., например, для модуля сдвига G и характерной микродлины L будут выполнены следующие дифференциальные условия

$$\nabla_k \overset{[g]}{G} = 0, \quad \nabla_k \overset{[-w]}{L} = 0. \quad (27)$$

Условия (27) можно преобразовать к виду дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \partial_k \overset{[g]}{G} - g \overset{[g]}{G} \frac{\partial_k e}{e} &= 0, \\ \partial_k \overset{[-w]}{L} + w \overset{[-w]}{L} \frac{\partial_k e}{e} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

или

$$\begin{cases} \partial_k (\ln |\overset{[g]}{G}| - g \ln |e|) = 0, \\ \partial_k (\ln |\overset{[-w]}{L}| + w \ln |e|) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Интегрируя полученные уравнения (29), заключаем, что

$$\overset{[g]}{G} = e^g G = \overset{[g]}{1} G, \quad \overset{[-w]}{L} = e^{-w} L = \overset{[-w]}{1} L, \quad (30)$$

где G и L — абсолютные инварианты, более того, абсолютные постоянные.

6. Заключение и выводы. В работе получены поливариантные уравнения теории полуизотропной микрополярной термоупругости. В рамках предложенного подхода вектор потока тепла имеет нечетный алгебраический вес, а псевдоинварианты, связанные с распространением тепла, оказываются чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

- (1) Получены три основных варианта уравнений динамики и уравнения теплопроводности полуизотропного микрополярного термоупругого тела.
- (2) Рассмотрены элементарные тензорные площади и объемы. Исследовано влияние весов тензорных элементов площади и объема на веса объемных плотностей характеристик термодинамического процесса: внутренней энергии, энтропии, массовой плотности, теплового потока, а также — на веса связанных с ними определяющих псевдоскаляров.
- (3) Сформулирован фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, обусловленный правилом частного для алгебраических весов плотности внутренней энергии и плотности энтропии.
- (4) Получены и проанализированы различные варианты связанной системы дифференциальных уравнений динамики и уравнения теплопроводности для полуизотропного микрополярного термоупругого тела.
- (5) Установлена принципиальная нереализуемость приписывания какого-бы то ни было алгебраического веса абсолютной термодинамической температуре, обусловленная различной природой внутренней энергии (аддитивность) и температуры (неаддитивность).

- (6) Исследована проблема детерминирования алгебраических весов определяющих псевдоскаляров с целью учета их реакции на преобразования трехмерного пространства, меняющих его ориентацию на противоположную. Указаны варианты, когда такая чувствительность проявляется.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] DeValk T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338.
- [2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697.
- [3] Lakes R. *Composites and metamaterials*. Singapore: World Scientific, 2020.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
- [5] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [6] Nowacki W. *Theory of micropolar elasticity*. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
- [7] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [8] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69.
- [10] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158.
- [11] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [13] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 4. С. 16–24.
- [14] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Т. 58, № 3. С. 802–813.
- [15] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 1(55). с. 110–121.
- [16] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [17] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [18] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [19] Sokolnikoff I. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [20] Synge J. L., Schild A. *Tensor calculus*. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [21] Truesdell C., Toupin R. *The Classical Field Theories* // *Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie* / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.

- [22] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [23] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [24] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [25] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007.
- [26] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
- [27] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.
- [28] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Т. 58, № 9. С. ???–???
- [29] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. Т. 165, № 4. С. ???–???
- [30] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополяром континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.
- [31] Murashkin E., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 205–213.
- [32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84, № 4. С. 545–558.
- [33] Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Schouten Force Stresses in Continuum Mechanics Formulations // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 1. P. 153–160.
- [34] Фиников Сергей Павлович. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М.: ОГИЗ, 1948. 432 с.
- [35] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
- [36] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 88 с.
- [37] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
- [38] Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.
- [39] Murashkin E. V., Radaev Y. N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449.
- [40] Radaev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527.
- [41] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.
- [42] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения однотоочечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). с. 17–26.
- [43] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). с. 106–115.
- [44] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127.
- [45] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3D материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). с. 114–121.
- [46] Korf A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
- [47] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON THE POLYVARIANCE OF THE BASE EQUATIONS OF COUPLED MICROPOLAR THERMOELASTICITY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to the study of dynamic equations polyvariance of the theory of semiisotropic micropolar thermoelasticity. Several variants for assigning integer weights to field variables with subsequent determination of algebraic weights of pseudo-vector equations for the dynamics of a semiisotropic thermoelastic solid are considered and analyzed. For this aim elementary volumes and areas assumed as pseudoinvariants of odd integer weights. In addition, it is shown that odd weights can be assigned to the pseudovector of spinor displacements. As a result, heat flux, force stress tensor, mass density, heat capacity, and shear modulus also can be treated as pseudotensor quantities of odd weights, i.e. manifest itself sensitivity to mirror reflections and inversions of three-dimensional spaces. The fundamental principle of absolute invariance of absolute thermodynamic temperature is discussed. Some variants of the coupled system of differential equations of dynamics and heat conduction equations for a semiisotropic micropolar thermoelastic solid are obtained. The problems of mutual influence of algebraic weights of constitutive pseudoscalars are discussed in order to taking account of their response to transformations of three-dimensional space that change its orientation to the opposite.

Keywords: polyvariance, nanoscale, microscale, nanostructural state, characteristic microlength, shear modulus of elasticity, thermal conductivity, micropolarity, tensor volume element, heat flux pseudovector, pseudotensor, specular reflection, semiisotropic solid, gyrotropic solid

REFERENCES

- [1] DeValk T., Hestetune J., Lakes R. S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. p. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
- [2] Aouadi M., Ciarletta M., Tibullo V. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.
- [3] Lakes R. *Composites and metamaterials*. Singapore: World Scientific, 2020.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
- [5] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [6] Nowacki W. *Theory of micropolar elasticity*. Berlin: Springer. Berlin: Springer Science & Business Media, 1972.
- [7] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [8] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. doi:10.1007/BF01176729.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [10] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. doi:10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [11] Radayev Y. N. The rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. doi:10.14498/vsgtu1635. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [12] Radayev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and plasticity. 2020. T. 82, № 4. C. 399–412. URL: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
- [13] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. doi:10.14498/vsgtu1792.
- [14] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2020. no. 4. P. 16–24. doi:10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [15] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. T. 58, № 3. C. 802–813. doi:10.3103/s0025654423700127.
- [16] Murashkin E. V. On the relations between micropolar defining parameters of thermodynamic state potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 1(55). p. 110–121. doi:10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. doi:10.14498/vsgtu1799.
- [18] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858. doi:10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [19] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
- [20] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [21] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
- [22] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. doi:10.1007/978-0-387-69469-6.
- [23] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
- [24] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [25] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
- [26] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Elements of field theory: variational symmetries and geometric invariants. Moscow: Fizmatlit, 2009. 156 p.
- [27] Kovalev V. A., Radaev Y. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 2010. 328 p.
- [28] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. T. 58, № 9. C. ???–???
- [29] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. T. 165, № 4. C. ???–???
- [30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Schouten force stress tensor and positive weight affinor densities // Problems of strength and plasticity. 2022. Vol. 84, no. 4. P. 545–558. doi:10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558.
- [31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Schouten Force Stresses in Continuum Mechanics Formulations // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 1. P. 153–160. doi:10.3103/s0025654422700029.
- [32] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the coordination of the orientations of tensor area elements in a micropolar continuum immersed in an external flat space // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2021. Vol. 25, no. 4. P. 776–786. doi:10.3103/s0025654422700029.

- [33] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 205–213. doi:10.3103/s0025654422020108.
- [34] Finikov S. P. *Cartan's method of external forms in differential geometry*. Л., Moscow: OGIZ, 1948. 432 p.
- [35] Cartan H. *Differential calculus. Differential forms*. Moscow: Mir, 1971. 392 p.
- [36] Efimov N. V. *Introduction to the Theory of External Forms*. Moscow: Nauka, 1977. 88 p.
- [37] Arnold V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. Moscow: Nauka, 1979. 431 p.
- [38] Pars L. A. *Analytical dynamics*. Moscow: Nauka, 1971. 636 p.
- [39] Murashkin E. V., Radaev Y. N. A Negative Weight Pseudotensor Formulation of Coupled Hemitropic Thermoelasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. doi:10.1134/S1995080223060392.
- [40] Radaev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. doi:10.3103/S0025654423700206.
- [41] Rozenfeld B. A. *Multidimensional spaces*. Moscow: Nauka, 1966. 648 p.
- [42] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 1(51). p. 17–26. doi:10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
- [43] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). p. 106–115. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [44] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). P. 118–127. doi:10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [45] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On the formulation of boundary conditions in problems of synthesis of woven 3D materials // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2021. no. 1(47). p. 114–121. doi:10.37972/chgpu.2021.1.47.010.
- [46] Kopff A. *Mathematical Theory of Relativity*. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 p.
- [47] Radaev Y. N. *Spatial problem of the mathematical theory of plasticity*. Samara: Samarskiy universitet, 2006. 340 p.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru, dean@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки**

на русском и английском языках; сведения о всех авторах на русском и английском языках: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля `prede1.sty`. Стиль `prede1.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Салихова Н. К., Дудин Д. С., Келлер И. Э., Пермяков Г. Л., Трушников Д. Н.</i> Модель искривления стенки на подложке, наращиваемой проволочно-дуговой наплавкой, и ее экспериментальная апробация для алюминиевого сплава.....	5
<i>Непершин Р. И.</i> Скольжение гиперболического цилиндра по границе идеально пластического полупространства.....	25
<i>Христич Д. В.</i> Построение нелинейных определяющих соотношений для упругих анизотропных материалов.....	40
<i>Кержаев А. П., Меньшова И. В., Никитин А. В.</i> О решении краевых задач для упругой полуполосы со смешанными граничными условиями на торце.....	51
<i>Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д.</i> Деформирование многослойного вязкоупругого сферического тела с включением при динамическом нагружении.....	59
<i>Богачева В. Э.</i> Исследование предела упругости тонкого адгезионного слоя композита при его нагружении нормальным отрывом.....	66
<i>Ковалев А. В., Малыгина Ю. В.</i> Об учете зависимости предела текучести от температуры при решении задачи о термдеформировании трубы.....	74
<i>Азаров А. А., Попов А. Л., Челобеев Д. А.</i> Некоторые особенности частотной идентификации осевой нагрузки в балочных образцах.....	84
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Предельно-упругий изгиб n -слойного физически-нелинейного бетонного стержня.....	91
<i>Мурашкин Е. В.</i> Об одном способе построения фигур Ная в асимметричных теориях демитропной микрополярной упругости.....	100
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела.....	112
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	129
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	132
СОДЕРЖАНИЕ.....	134

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2023. № 3 (57)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 27.12.2023. Выход в свет 29.12.2023.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 17,2.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 223

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38