

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 2(60)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев
(Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2024

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 2(60)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev
(Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

Т. А. Патрина, С. К. Степанов

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ КОНИЧЕСКОГО РЕДУКТОРА ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. Авторами статьи выполнен проверочный расчет на контактную выносливость поверхностей зубьев и выносливость на изгиб конического косозубого редуктора с учетом динамической нагрузки. Редуктор применяется в агротехнике для преобразования крутящего момента, изменения частоты вращения и передачи его другим агрегатам. В статье представлен анализ результатов прочностного расчета деталей механизма с применением компьютерного моделирования усталостного разрушения в САПР Компас 3D, САЕ-системе АРМ WinMachine, начиная с возникновения первых микротрещин на поверхности, внутри деталей и заканчивая разрушением от усталости. Прочностные свойства деталей зависят от геометрических размеров, состояния поверхности, способа обработки поверхностей и ряда других факторов. Предложенная авторами статьи методика прочностного анализа на основе динамических расчетов максимальных, контактных и изгибных напряжений, переменных во времени в материалах деталей редуктора с учетом состояния поверхности зубьев в процессе эксплуатации, с применением аналитических и компьютерных методов позволяет уменьшить вероятность зарождения усталостных трещин, остановить их дальнейший рост.

Ключевые слова: механика деформированного твердого тела, теория механизмов и машин, усталостное разрушение, прочность материалов при переменных напряжениях, трехмерное проектирование в Компас 3D V.21, САЕ-система АРМ WinMachine, статический и динамический прочностной анализ материалов по контактным напряжениям и напряжениям при изгибе

Патрина Татьяна Александровна, кандидат технических наук, доцент;
email: nessionok@gmail.com

Степанов Сергей Константинович, кандидат технических наук, доцент;
email: Stepser00@mail.ru

для цитирования: Патрина Т. А. Степанов С. К. Расчеты на прочность конического редуктора при напряжениях, переменных во времени // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 5–23. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.001 EDN: XWGILD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

T. A. Patrina, S. K. Stepanov

STRENGTH CALCULATIONS OF THE CONICAL GEARBOX AT STRESSES VARIABLE OVER TIME

St. Petersburg State Electrotechnical University "LETI" named after V.I. Ulyanov (Lenin), Saint-Petersburg, Russia

Abstract. The authors of the article conducted a verification calculation on the contact fatigue endurance of gear tooth surfaces and the bending fatigue endurance of a bevel helical gearbox considering dynamic loads. The gearbox is used in agricultural machinery to transform torque, change rotational speed, and transmit it to other units. The article presents an analysis of the strength calculation results of the mechanism's parts using computer modeling of fatigue failure in the CAD system Kompas 3D and the CAE system APM WinMachine, from the occurrence of the first microcracks on the surface and within the parts to fatigue failure. The strength properties of the parts depend on geometric dimensions, surface condition, processing method, and several other factors. The methodology proposed by the authors for strength analysis, based on dynamic calculations of maximum, contact, and bending stresses varying over time in the materials of the gearbox parts, considering the surface condition of the teeth during operation, using analytical and computer methods, allows reducing the probability of fatigue crack initiation and stopping their further growth.

Keywords: mechanics of deformed solid body, theory of mechanisms and machines, fatigue failure, material strength under variable stresses, three-dimensional design in Compass 3D V.21, CAE system APM WinMachine, static and dynamic strength analysis of materials under contact stresses and bending stresses

Patrina Tatiana Aleksandrovna, PhD, Associate professor; e-mail: nessionok@gmail.com

Stepanov Sergey Konstantinovich, PhD, Associate professor; e-mail: Stepser00@mail.ru

to cite this article: Patrina T. A., Stepanov S. K. Strength calculations of the conical gearbox at stresses variable over time // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 5–23. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.001 EDN: XWGILD

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Эксплуатация оборудования и техники в сельском хозяйстве происходит в неблагоприятных климатических условиях, на непокрытых и незащищенных территориях, при повышенной влажности и запыленности. Что может привести к усилению рабочего шума, перегреву, преждевременному износу и выходу из строя агротехники. Поэтому качество изготовления деталей и высокая производительность агротехники имеют большое значение и требуют совершенствования и модернизации их конструкций. Широкое применение в сельском хозяйстве получили редукторы конической передачи, преобразующие крутящий момент, изменяя частоту вращения и передающие его другим агрегатам. Можно выделить основные преимущества конических колес с круговыми зубьями: относительная бесшумность, плавность работы и высокая несущая способность. Зацепление деталей конической передачи происходит по некоторой площадке контакта, благодаря которой идет распределение контактной нагрузки по ней.

Редуктор конической передачи работает в основном при переменных напряжениях, которые многократно изменяются во времени. Работа в таком режиме может привести к разрушению деталей при значительно меньших напряжениях, чем при статическом напряжении. Экспериментальные исследования механических свойств материалов при напряжениях, переменных во времени, показали, что разрушение начинается с появлением микротрещин в наиболее нагруженной зоне, микротрещины постепенно развиваются и множатся, и далее приводят к разрушению от усталости.

Увеличение размеров и числа этих трещин сокращают объем полноценного материала детали. Конец каждой трещины образует зону возникновения больших напряжений, что приводит к появлению новых трещин. Прочностные свойства деталей зависят от геометрических размеров, состояния поверхности, способа обработки поверхностей и ряда других факторов. Процесс образования трещин сложен при переменных напряжениях. Иногда зона появления трещин возникает на поверхности детали, в других случаях — внутри материала.

Рентгенологические исследования металлов не обнаруживают значительных различий в механизме усталостного разрушения при статическом и динамическом напряжениях. Данные исследования позволяют проследить изменения в структуре при небольших нагружениях, выявить заметные деформации в структуре материалов при увеличении значений напряжений.

Аналитические расчеты на основе методов теории машин и механизмов позволяют выполнить проверочный расчет на контактную выносливость активных поверхностей зубьев и выносливость при изгибе, учитывая динамическую нагрузку. Данные исследования являются трудоемкими.

Применение систем автоматизированного проектирования (САПР) упрощает прочностные исследования материалов при переменных напряжениях. Путем построения геометрических и расчетных моделей деталей стало возможно проводить многовариантные динамические и статические исследования роста трещин, давать прогнозы прочности материалов с учетом различных случайных

причин. Данные исследования являются актуальными, так как для повышения несущей способности и увеличения сроков эксплуатации агротехники крайне важно вовремя провести ряд мероприятий для повышения прочностных свойств материалов.

Экспериментальные исследования прочностных характеристик образца из стали марки 40Х с концентраторами напряжений выполнены при поддержке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова». Для реализации поставленных целей были задействованы система автоматизированного проектирования (САПР) Компас 3D отечественной компании АСКОН и российская САЕ-система АРМ WinMachine.

1. Зависимость прочности деталей редуктора при переменных напряжениях от структуры их материалов Технические металлы и сплавы, из которых изготавливают конические редукторы, например, сталь марки 40Х, состоят из множества зерен-кристаллитов произвольно ориентированных относительно друг друга. Наиболее прочные материалы с мелкозернистой структурой. При изучении механических свойств больших размеров образцов, деталей считают материал изотропным, однородным и без пустот. Металлы небольших объемов не считают однородными с сохранением механических свойств при различном делении, свойства отдельных зерен проявляются в зависимости от ориентации кристаллических осей и зависят от того, как они соединены друг с другом. Пластическая деформация при такой структуре складывается из пластической деформации кристаллитов. Разрушение связей по границам зерен ведет к хрупкому разрушению. Положение плоскостей, по которым атомные слои имеют более легкую возможность скольжения относительно направления внешней нагрузки, в разных кристаллитах различно, поэтому они не все одновременно пластически деформируются. Например, наибольшее число зерен одновременно вступает в пластическую деформацию посредством скольжения в поликристаллическом металле, кристаллиты которого имеют кубическую гранцентрированную решетку [1, с. 22]. Пластическая деформация поликристалла может переходить из одного зерна в другое при благоприятном положении плоскостей скольжения.

Дислокации в кристаллитах зарождаются при образовании на границе микротрещины, которая представляет собой концентратор напряжений, способный создать новую дислокацию в соседнем зерне [2, с. 13]. Чем больше разориентация зерен, тем сложнее переход дефекта из одного из них в соседнее. Так пластическая деформация переходит из одного кристаллита в другой, и ею захватывается целая область поликристаллического сплава. Это объясняет более высокую прочность мелкозернистой структуры поликристаллического металла, по сравнению с крупнозернистой.

Трещины могут появляться не только внутри кристаллических зерен. Источником их появления могут быть внешние причины - надрезы, дефекты структуры материала, сечения, содержащие концентраторы напряжений конструктивного характера. Часто первые трещины возникают в местах действия внешних сил.

Прочностные свойства материалов в свою очередь зависят от значений самоуравновешенных внутренних напряжений ненагруженных тел [1, с. 24]. Они возникают на начальном этапе – при изготовлении элемента или конструкции (во время проката материала и остывания его после проката; при остывании отливки; в процессе соединения частей конструкции посредством сварки и т. п.).

Внутренние напряжения могут возникнуть во время работы механизма. Например, в результате деформации изделия с доведением напряжений до величины, сравнимой с пределом текучести, и последующей разгрузки.

Эффект Баушингера имеет важное практическое значение при циклической деформации металлов и сплавов, влияя на появление трещин на поверхности конических зубчатых колес редуктора [3].

После нагружения тела до возникновения в некоторых кристаллитах пластических деформаций и разгрузки, возникают остаточные напряжения. Далее, при приложении к телу нагрузки противоположного знака, возникшие уже в теле начальные напряжения снижают сопротивление пластическим деформациям.

В рабочем режиме редуктор конической передачи работает так, что контактной поверхностью является выпуклая сторона эвольвентной поверхности зуба. А в режиме запуска двигателя контакт происходит по противоположной вогнутой стороне.

Таким образом, здесь реализуется ситуация, описанная в эффекте Баушингера: после нагружения материала до текучести, разгрузка и нагружение напряжениями противоположного знака явление текучести начнется уже при более низком уровне напряжений из-за действия остаточных напряжений, появившихся в материале зубчатого колеса. Предварительная химико-термическая обработка освобождает зубчатые колеса от остаточных напряжений, возникших при их изготовлении. Но остаточные напряжения, связанные с эффектом Баушингера будут возникать при каждом запуске двигателя.

Авторы металлографических и фрактографических исследований Всероссийского научно-исследовательского института авиационных материалов Государственного научного центра РФ представили микроструктуру вогнутой поверхности в области контакта после повреждения в результате наволакивания, локального налипания и выкрашивания материала, что говорит о высоких контактных нагрузках.

На основе выполненных исследований выявлено, что усталостное разрушение происходит от поверхностных дефектов в виде рисок от абразивного инструмента глубиной примерно 17 мкм, ориентированных в направлении межзубцовой впадины в зоне фасок со стороны малого модуля (рис. 1) [3].

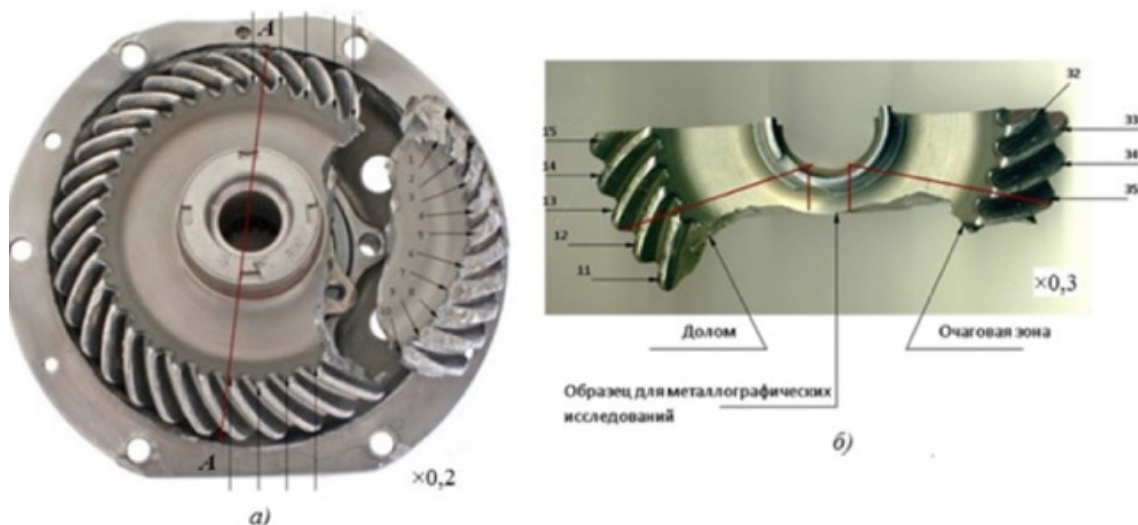


Рис. 1. Трещины усталостного разрушения по зубцовым впадинам

Как видно на рисунке 1, типичный излом, вызванный усталостью детали, имеет две различные зоны: гладкую поверхность, где развитие трещины проходило медленно и края трещины сглаживались путем трения при увеличении нагрузки; шероховатую поверхность, по которой стремительно шло разрушение [4, с. 422].

Для снижения твердости материалов, получения однородной структуры и снятия внутреннего напряжения материалов применяют отпуск сталей.

Авторами статьи были проведены экспериментальные испытания на ударный изгиб стандартных образцов сечением 10x10 мм с концентратором U-образной формы радиусом 1 мм из стали 40Х, чтобы проверить как влияет температура отпуска на ударную вязкость: образец без отпуска, образцы с температурой отпуска 350 °С и 600 °С. В результате испытания было отмечено, что отпуск до 350 °С мало влияет на ударную вязкость, которая без отпуска и при температуре 350 составляет 57 и 59 Дж/см². С дальнейшим увеличением температуры ударная вязкость падает, происходит понижение механических свойств, а после температурного отпуска 500 °С ударная вязкость растет. Зерна материала укрупняются с повышением температуры и времени выдержки. При температуре 600 °С ударная вязкость материала равна 69 Дж/см². Прочностные свойства материала падают с увеличением температуры, а пластичность увеличивается. Результаты эксперимента совпадают с подобными исследованиями, освещенными в отечественных и зарубежных научных источниках [5–8].

2. Аналитический расчет прочности материалов конической косо-зубой передачи при переменных напряжениях Исходные данные:

1. Передаточное число $u=1,86$.
2. Частота вращения шестерни $n_1 = 50$ об/сек и колеса $n_2 = 27$ об/сек.
3. Вращающие моменты на шестерне $M_1 = 550$ Н·м и колеса $M_2 = 967$ Н·м.
4. Ресурс работы 4000 часов за срок службы.
5. Межосевой угол $\Sigma = 45^\circ$.
6. Коэффициент перегрузки $K_n = 1,5$.
7. $z_1 = 21$ — количество зубьев шестерни, $z_2 = 39$ — количество зубьев колеса.

2.1. Энерго-кинематический расчет привода

$M_1 = 550$ Н·м — крутящий момент на валах привода. $n_2 = 27$ об/сек — частота вращения выходного вала. 1. Общий КПД двигателя: $\eta_{\text{общ}} = \eta_{\text{подшип}}^m \cdot \eta_{\text{конич.з.}}$, где $\eta_{\text{подшип}}^m$ — КПД пары подшипников, m — число пар подшипников привода ($\eta_{\text{подшип}}^m = 0,99^2$); $\eta_{\text{конич.з.}}$ — КПД конической передачи ($\eta_{\text{конич.з.}} = 0,97$). $\eta_{\text{общ}} = 0,99^2 \cdot 0,97 = 0,95$.

1. Общий КПД двигателя: $\eta_{\text{общ}} = \eta_{\text{подшип}}^m \cdot \eta_{\text{конич.з.}}$, где $\eta_{\text{подшип}}^m$ — КПД пары подшипников, m — число пар подшипников привода ($\eta_{\text{подшип}}^m = 0,99^2$); $\eta_{\text{конич.з.}}$ — КПД конической передачи ($\eta_{\text{конич.з.}} = 0,97$). $\eta_{\text{общ}} = 0,99^2 \cdot 0,97 = 0,95$.

2. Передаточное число механизма $U_{1-k} = z_2/z_1$, $U_{1-k} = 39/21 = 1,86$. Крутящий момент на выходном валу равен: $M_2 = M_1 \cdot u_{1-k} \cdot \eta_{\text{общ}} \cdot M_2 = 550 \cdot 1,86 \cdot 0,95 = 967$ Н·м.

3. Частота вращения вала электродвигателя равна $n_1 = n_2 \cdot U_{1-k}$. $n_1 = 27 \cdot 1,86 = 50$ об/сек.

4. Мощность на выходном валу $N_{\text{вых}} = 2 \cdot \pi \cdot n_2 \cdot M_2$. $N_{\text{вых}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 27 \cdot 967 = 164$ кВт.

5. Требуемая (расчетная) мощность электродвигателя $N_1 = N_{\text{вых}}/\eta_{\text{общ}}$. $N_1 = 164/0,95 = 172,6$ кВт. По условиям расчета можно выбрать двигатель АИС355SMA2 250 кВт 3000 об/мин, АИР355S2 250 кВт 2980 об/мин, электродвигатель на 300 кВт.

2.2. Проектировочный расчет на контактную выносливость

1. Материалы и способы термообработки зубчатых колес. Материал шестерни сталь 40Х, колеса — сталь 40Х; Способ термической обработки: шестерни — объемная закалка; твердость поверхностей зубьев 40HRC - 372 HV - 392 HV; колеса — закалка при нагреве ТВЧ, закаленный слой повторяет очертания впадины 43 HRC - 410HV - 424HV;

2. Коэффициент ширины зубчатого венца $K_{be} = 1,2/(u + 0,6) = 1,2/(1,86 + 0,6) = 0,49$. Так как $K_{be} > 0,3$, принимаем $K_{be} = 0,3$.

3. Коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий, $K_{H\beta} = 1,25$.

4. Предварительное значение коэффициента $K'_{H\nu}$, учитывающего динамическую нагрузку, определяется по формуле: $K'_{H\nu} = 0,97 + 0,00014 \cdot n_1 = 0,97 + 0,00014 \cdot 3000 = 1,39$.

5. Коэффициенты запаса прочности: для шестерни при объемной закалке и колеса с поверхностным упрочнением зубьев принимаем $S_{H1} = 1,1$ и $S_{H2} = 1,2$.

6. Предел контактной выносливости $\sigma_{H \lim b}$, МПа: для закаленной шестерни $\sigma_{H \lim b1} = 17 \cdot H_{HRC} + 200 = 17 \cdot 40 + 200 = 880$ МПа; для колеса: $\sigma_{H \lim b2} = 17 \cdot H_{HRC} + 200 = 17 \cdot 43 + 200 = 931$ МПа.

7. Суммарное число циклов перемены напряжений N_K при постоянной нагрузке определяется следующим образом: $N_K = 60 \cdot c \cdot n \cdot t$, где c – число зубчатых колес, сцепляющихся с рассчитываемым зубчатым колесом, n – частота вращения, рассчитываемого зубчатого колеса, об/мин, t – срок службы передачи, в часах. $N_{K2} = 60 \cdot c \cdot n_2 \cdot t = 60 \cdot 1 \cdot 1621 \cdot 4000 = 333000000 = 38,9 \cdot 10^7$ циклов. $N_{K1} = 60 \cdot c \cdot n_1 \cdot t = 60 \cdot 1 \cdot 3000 \cdot 4000 = 72 \cdot 10^7$ циклов.

8. Базовые числа циклов напряжений, соответствующие пределу выносливости, определяются по формулам [9, с. 8–10]:

$$N_{H \lim 1} = 30 \cdot H_{HB1}^{2,4} = 30 \cdot 372^{2,4} = 4,43 \cdot 10^7 \text{ циклов.}$$

$$N_{H \lim 2} = 30 \cdot H_{HB2}^{2,4} = 30 \cdot 410^{2,4} = 55,95 \cdot 10^6 \text{ циклов.}$$

9. Так как $N_{K1} > N_{H \lim 1}$ определяем коэффициент долговечности Z_{N1} :

$$Z_{N1} = \sqrt[20]{\frac{N_{H \lim 1}}{N_{K1}}} = \sqrt[20]{\frac{4,43 \cdot 10^7}{72 \cdot 10^7}} = 0,86.$$

При $N_{K2} < N_{H \lim 2}$ коэффициент долговечности находится следующим образом:

$$Z_{N2} = \sqrt[6]{\frac{N_{H \lim 2}}{N_{K2}}} = \sqrt[6]{\frac{55,95 \cdot 10^6}{38,9 \cdot 10^7}} = 1,06.$$

10. Используя полученные данные, найдем допускаемые контактные напряжения σ_{HP} , МПа:

$$\sigma_{HP1} = \frac{\sigma_{H \lim b1}}{S_{H1}} \cdot Z_{N1} \cdot 0,9 = \frac{880}{1,1} \cdot 0,86 \cdot 0,9 = 619;$$

$$\sigma_{HP2} = \frac{\sigma_{H \lim b2}}{S_{H2}} \cdot Z_{N2} \cdot 0,9 = \frac{931}{1,2} \cdot 1,06 \cdot 0,9 = 740.$$

В качестве допускаемого напряжения в проектном расчете принимают наименьшее, т.е. $\sigma_{HP} = \sigma_{HP1} = 619$ МПа.

11. Полученные данные подставим в формулу по определению начального диаметра:

$$d_{\omega e1} \geq \frac{770}{1-0,5 \cdot K_{be}} \cdot \sqrt[3]{\frac{M_1 \cdot K_{H\beta} \cdot K'_{H\nu}}{0,85 \cdot K_{be} \cdot \sigma_{HP}^2}} = \frac{770}{1-0,5 \cdot 0,3} \cdot \sqrt[3]{\frac{550 \cdot 1,25 \cdot 1,39}{0,85 \cdot 0,3 \cdot 619^2}} = 128 \text{ мм.}$$

2.3. Расчет геометрических размеров деталей конической передачи

1. Количество зубьев шестерни $z_1 = 21$. Число зубьев колеса $z_2 = 39$.

2. Внешний окружной модуль по ГОСТ 9563-80 $m_e = 6$ мм.

3. Тогда уточненное значение внешнего делительного диаметра шестерни: $d_{e1} = m_e \cdot z_1 = 6 \cdot 21 = 128$ мм. Тогда внешний делительный диаметр колеса [10, с. 182]: $d_{e2} = m_e \cdot z_2 = 6 \cdot 39 = 234$ мм.

4. Внешнее конусное расстояние

$$R_e = 0,5 \cdot m_e \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 0,5 \cdot 6 \cdot 44,3 = 133 \text{ мм, где}$$

$$\delta_1 = \arctg(u) = 28,393^\circ. \delta_2 = 45 - \delta_1 = 45 - 28,393 = 16,607^\circ.$$

5. Ширина зубчатого венца $b_\omega = R_e \cdot K_{be} = 133 \cdot 0,3 = 39,9$ мм.

6. Среднее конусное расстояние $R_m = R_e - 0,5 \cdot b_\omega = 133 - 0,5 \cdot 39,9 = 113$ мм.

7. Средний окружной модуль $m_m = m_e \cdot R_m / R_e = 6 \cdot 113 / 133 = 5$ мм.

8. Средние делительные диаметры: $d_{m1} = m_m \cdot z_1 = 5 \cdot 21 = 105$ мм, $d_{m2} = m_m \cdot z_2 = 5 \cdot 39 = 195$ мм.

9. Определим окружную скорость зубчатых колес, м/с: $\nu_m = (\pi \cdot d_{m1} \cdot n_1)/1000 = (3,14 \cdot 105 \cdot 50)/1000 = 16,5$ м/с. По окружной скорости колес назначаем 6-ю степень точности зубчатых колес [11, с. 39].

10. Внешний торцовый модуль: $m_{te} = d_{e1}/z_1 = 128/21 = 6$ мм.

11. Внешняя высота зуба: $h_e = 2m_{te}(\cos \beta + 0,1) = 2 \cdot 6 \cdot (0,8 + 0,1) = 10,8$ мм, где средний угол наклона зуба $\beta_n = 30..40^\circ$.

12. Коэффициент радиального смещения с учетом передаточного числа и числа зубьев шестерни $x_1 = 0,22$.

Внешняя высота головки зуба: $h_{ae1} = m_{te} \cos \beta \cdot (1 + x_1) = 6 \cdot 0,8 \cdot (1 + 0,22) = 5,86$ мм; $h_{ae2} = 2m_{te} \cos \beta - h_{ae1} = 3,74$ мм.

13. Внешняя высота ножки зуба: $h_{fe1} = h_e - h_{ae1} = 10,8 - 5,86 = 4,94$ мм; $h_{fe2} = h_e - h_{ae2} = 10,8 - 3,74 = 7,06$ мм.

2.4. Проверочный расчет на контактную выносливость активных поверхностей зубьев

Определение расчетного контактного напряжения

1. Коэффициент Z_ε , учитывающий суммарную длину контактных линий:

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{0,95 \cdot [1,88 - 3,2 \cdot (\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2})]}} = \sqrt{\frac{1}{0,95 \cdot [1,88 - 3,2 \cdot (\frac{1}{21} + \frac{1}{39})]}} = 0,8,$$

2. Коэффициент Z_H , учитывающий форму сопряженных поверхностей зубьев в полюсе зацепления, с учетом того, что колеса изготовлены без смещения, принимаем $Z_H = 1,76$.

3. Удельная окружная динамическая сила $\omega_{H\nu}$, $\omega_{H\nu} = \delta_H \cdot g_0 \cdot \nu_m \sqrt{\frac{d_{m1} + d_{m2}}{2 \cdot u}} = 0,04 \cdot 4,2 \cdot 16,5 \cdot \sqrt{\frac{105 + 195}{2 \cdot 1,86}} = 24,9$, где $\delta_H = 0,04$ – коэффициент, учитывающий влияние зубчатой передачи и модификации профиля головок зубьев; $g_0 = 4,2$ – коэффициент, учитывающий влияние разности шагов зацепления зубьев шестерни и колеса.

Коэффициент $K_{H\nu}$, учитывающий динамическую нагрузку в зацеплении:

$$K_{H\nu} = 1 + \frac{\omega_{H\nu} \cdot b_\omega \cdot d_{m1}}{2000 \cdot M_1 \cdot K_{H\beta}} = 1 + \frac{24,9 \cdot 39,9 \cdot 105}{2000 \cdot 550 \cdot 1,25} = 1,075.$$

4. Удельная расчетная нагрузка ω_{Ht} :

$$\omega_{Ht} = \frac{2000 \cdot M_1 \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\nu}}{b_\omega \cdot (1 - 0,5K_{be}) \cdot d_{\omega e1} \cdot \cos \delta_1} = \frac{2000 \cdot 550 \cdot 1,25 \cdot 1,075}{39,9 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,3) \cdot 128 \cdot \cos 28,393^\circ} = 387 \text{ МПа.}$$

Z_E – коэффициент, учитывающий механические свойства материалов сопряженных зубчатых колес для стали, равен 190.

Контактное напряжение в полюсе зацепления σ_H (МПа):

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\varepsilon \sqrt{\frac{\omega_{Ht} \sin \Sigma}{0,85(1 - 0,5K_{be})d_{\omega e1} \sin \delta_2}} = 1,76 \cdot 190 \cdot 0,8 \sqrt{\frac{387 \cdot \sin 45^\circ}{0,85(1 - 0,5 \cdot 0,3) \cdot 128 \cdot \sin 16,607^\circ}} = 665.$$

Допускаемые контактные напряжения в проверочном расчете

1. Коэффициент, учитывающий влияние исходной шероховатости сопряженных поверхностей зубьев $Z_R = 0,9$.

2. Коэффициент Z_ν , учитывающий окружную скорость, при $H > 350$ НВ

$$Z_{\nu 1} = Z_{\nu 2} = 0,925 \cdot \nu^{0,05} = 0,925 \cdot 16,5^{0,05} = 1,07.$$

3. Коэффициент Z_L , учитывающий влияние смазки, при отсутствии экспериментальных данных принимаем $Z_L = 1$.

4. Коэффициент Z_X , учитывающий размер зубчатого колеса: так как $d_1 < 700$ и $d_2 < 700$, то $Z_{X1} = 1$ и $Z_{X2} = 1$.

5. Тогда допускаемые контактные напряжения, МПа [13, с. 150]:

$$\sigma_{HP1} = \frac{\sigma_{H\lim 1} Z_{N1}}{S_{H1}} Z_R Z_{\nu 1} Z_L Z_{X1} = \frac{880 \cdot 0,86}{1,1} 0,9 \cdot 1,07 \cdot 1 \cdot 1 = 662,55 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{HP2} = \frac{\sigma_{H\lim 2} Z_{N2}}{S_{H2}} Z_R Z_{\nu 2} Z_L Z_{X2} = \frac{931 \cdot 1,06}{1,2} 0,9 \cdot 1,07 \cdot 1 \cdot 1 = 792 \text{ МПа}.$$

6. В качестве допускаемого контактного напряжения передачи, которое сопоставляют с расчетным, принимают наименьшее: $\sigma_{HP} = \sigma_{HPmin} = \sigma_{HP1} = 662,55$ МПа.

Проверочный расчет на контактную выносливость при действии максимальной нагрузки

1. Действительное напряжение σ_{Hmax} :

$$\sigma_{Hmax} = \sigma_H \sqrt{K_{пер}} = 665 \sqrt{1,5} = 815 \text{ МПа}.$$

2. Допускаемое контактное напряжение при максимальной нагрузке, не вызывающее остаточных деформаций или хрупкого разрушения поверхностного слоя σ_{HPmax} , зависит от способа химико-термической обработки зубчатого колеса и от характера изменения твердости по глубине зуба. Для зубьев, подвергнутых цементации или поверхностной закалке, принимают [9, с. 18–28]:

$\sigma_{HPmax} = 2,8 \cdot \sigma_T$, где σ_T – предел текучести материала; тогда $\sigma_{HPmax1} = 2,8 \cdot 746 = 2089$ МПа, $\sigma_{HPmax2} = 44 \cdot H_{HRC2} = 44 \cdot 43 = 1892$ МПа.

3. Проверка условия прочности:

$$\sigma_{Hmax} \leq \sigma_{HPmax1} \rightarrow 815 \leq 2089, \text{ МПа} - \text{условие выполнено};$$

$$\sigma_{Hmax} \leq \sigma_{HPmax2} \rightarrow 815 \leq 1892, \text{ МПа} - \text{условие выполнено}.$$

2.5. Расчет зубьев на выносливость при изгибе

1. $\omega_{F\nu}$ – удельная окружная динамическая сила находится по формуле:

$$\omega_{F\nu} = 0,16 \cdot g_0 \cdot \nu_m \cdot \sqrt{\frac{d_{m1} + d_{m2}}{2u}} = 0,16 \cdot 4,2 \cdot 16,5 \cdot \sqrt{\frac{105 + 195}{2 \cdot 1,86}} = 97.$$

2. $K_{F\nu}$ – коэффициент, учитывающий динамическую нагрузку в зацеплении:

$$K_{F\nu} = 1 + \frac{\omega_{F\nu} \cdot b_\omega \cdot d_{m1}}{2000 \cdot M_1 \cdot K_{F\beta}} = 1 + \frac{97 \cdot 39,9 \cdot 105}{2000 \cdot 550 \cdot 1,4} = 1,26,$$

$K_{F\beta} = 1,4$ – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий.

3. Удельная расчетная окружная сила

$$\omega_{Ft} = \frac{2000 \cdot M_1}{b_\omega \cdot (1 - 0,5 \cdot K_{\beta e}) \cdot d_{\omega e 1}} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\nu} = \frac{2000 \cdot 550}{39,9 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,3) \cdot 128} \cdot 1,4 \cdot 1,26 = 450,5.$$

$Y_{FS} = 3,71$ – коэффициент, учитывающий форму зуба и концентрацию напряжений.

4. Расчетное местное напряжение при изгибе [12, с. 291]:

$$\sigma_F = Y_{FS} \cdot \cos \delta_1 \cdot \frac{\omega_{Ft}}{0,85 \cdot (1 - 0,5 \cdot K_{\beta e}) \cdot m_e} = 3,71 \cdot 0,88 \cdot \frac{450,5}{0,85^2 \cdot 6} = 340,2 \text{ МПа}.$$

Допускаемые напряжения в проверочном расчете на изгиб

1. Для закаленной шестерни из стали марки 40X $S_{F1} = 1,7$, для колеса закаленного при нагреве в ТВЧ из стали марки 40X $S_{F2} = 1,7$.

2. $N_{F\lim}$ – базовое число циклов переменных напряжений, $N_{F\lim} = 4 \cdot 10^6$ циклов;

Суммарное число циклов переменных напряжений $N_{K1} = 72 \cdot 10^7$, $N_{K2} = 38,9 \cdot 10^7$

Так как $N_{K1} > N_{F\lim} = 4 \cdot 10^6$ и $N_{K2} > N_{F\lim} = 4 \cdot 10^6$, то $Y_{N1} = Y_{N2} = 1$.

3. Коэффициент Y_δ , учитывающий градиент напряжения и чувствительность материала к концентрации напряжений, находится в зависимости от значения модуля m_e

$$Y_\delta = 1,082 - 0,172 \cdot \lg m_e = 1,082 - 0,172 \cdot \lg 6 = 0,948.$$

4. Коэффициент Y_R , учитывающий шероховатость переходной поверхности выбираем в зависимости от вида обработки

$$\text{для шестерни } Y_{R1} = 1,05, \text{ для колеса } Y_{R2} = 1,05.$$

5. Коэффициент Y_X , учитывающий размер зубчатого колеса:

$$Y_{X1} = 1,05 - 0,000125 \cdot d_{e1} = 1,05 - 0,000125 \cdot 128 = 1,034,$$

$$Y_{X2} = 1,05 - 0,000125 \cdot d_{e2} = 1,05 - 0,000125 \cdot 234 = 1,02.$$

6. Предел выносливости при отнулевом цикле изгиба $\sigma_{F\lim b}^\circ$, выбирается в зависимости от способа термической или химико-термической обработки

$$\text{для закаленной шестерни из стали 40X } \sigma_{F\lim b1}^\circ = 400 \text{ МПа,}$$

$$\text{для колеса закаленного с нагревом ТВЧ из стали 40X } = 464 \text{ МПа.}$$

7. Коэффициент учитывающий технологию изготовления принимают $Y_{T1} = Y_{T2} = 1$

8. Коэффициент Y_Z , учитывающий способ получения заготовки зубчатого колеса: для поковки $Y_{Z1} = 1$ и $Y_{Z2} = 1$.

9. Коэффициент, учитывающий влияние шлифования переходной поверхности зуба, $Y_{g1} = 1$, $Y_{g2} = 1$.

10. Коэффициент, учитывающий влияние деформационного упрочнения или электрохимической обработки переходной кривой, $Y_{d1} = Y_{d2} = 1,1$.

11. Коэффициент, учитывающий влияние двустороннего приложения нагрузки, $Y_A = 1$, так как происходит одностороннее приложение нагрузки.

12. Предел выносливости при отнулевом цикле изгиба:

$$\sigma_{F\lim b1} = \sigma_{F\lim b1}^\circ \cdot Y_T \cdot Y_Z \cdot Y_g \cdot Y_d \cdot Y_A = 400 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,1 \cdot 1 \cdot 1 = 440 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{F\lim b2} = \sigma_{F\lim b2}^\circ \cdot Y_T \cdot Y_Z \cdot Y_g \cdot Y_d \cdot Y_A = 464 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,1 \cdot 1 \cdot 1 = 510,4 \text{ МПа.}$$

13. Допускаемые напряжения σ_{FP} определяются по формуле:

$$\sigma_{FP1} = \frac{\sigma_{F\lim b1}^\circ}{S_{F1}} Y_{N1} Y_\delta Y_{R1} Y_{X1} = \frac{440}{1,7} \cdot 1 \cdot 0,948 \cdot 1,05 \cdot 1,034 = 266,4 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_{FP2} = \frac{\sigma_{F\lim b2}^\circ}{S_{F2}} Y_{N2} Y_\delta Y_{R2} Y_{X2} = \frac{510,4}{1,7} \cdot 1 \cdot 0,948 \cdot 1,05 \cdot 1,02 = 304,8 \text{ МПа.}$$

Расчет на прочность при изгибе максимальной нагрузкой

1. Расчетное местное напряжение σ_{Fmax} , определяют по формуле:

$$\sigma_{Fmax1} = \sigma_{F1} \cdot K_{пер} = 340,2 \cdot 1,5 = 510 \text{ МПа, } \sigma_{Fmax2} = \sigma_{F2} \cdot K_{пер} = 340,2 \cdot 1,5 = 510 \text{ МПа.}$$

2. $S_{FSt} = 1,7$ – коэффициент запаса прочности;

Y_X – коэффициент, учитывающий размер зубчатого колеса, определяется по формуле: $Y_{X1} = 1,0125 \cdot Y_{X2} = 1,034$, коэффициент $Y_{RSt} = 1$ и отношение $\frac{Y_{\delta St}}{Y_{\delta St}} = 1$.

σ_{FSt}° – базовое значение предельного напряжения зубьев при изгибе максимальной нагрузкой:

$$\sigma_{FSt1}^{\circ} = 1800 \text{ МПа}, \sigma_{FSt2}^{\circ} = 1620 \text{ МПа}.$$

Y_{gSt} – коэффициент, учитывающий влияние шлифования переходной поверхности зуба = 1,05, $Y_{gSt2} = 0,95$;

$Y_{dSt1} = 1, Y_{dSt2} = 1$ – коэффициент, учитывающий влияние деформационного упрочнения.

3. Допускаемое напряжение σ_{FPmax} определяют отдельно для зубчатых колес (шестерни и колеса) по формуле. Тогда:

$$\sigma_{FSt1} = \sigma_{FSt1}^{\circ} \cdot Y_{gSt1} \cdot Y_{dSt1} = 1800 \cdot 1,05 \cdot 1 = 1890 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{FSt2} = \sigma_{FSt2}^{\circ} \cdot Y_{gSt2} \cdot Y_{dSt2} = 1620 \cdot 0,95 \cdot 1 = 1539 \text{ МПа}.$$

4. Максимальное местное напряжение при изгибе [14]:

$$\sigma_{FPmax1} = \frac{\sigma_{FSt1}}{S_{FSt}} \cdot Y_{RSt} \cdot Y_{X1} \cdot \frac{Y_{\delta St}}{Y_{\delta StT}} = \frac{1890}{1,7} \cdot 1 \cdot 1,0125 \cdot 1 = 1125,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{FPmax2} = \frac{\sigma_{FSt2}}{S_{FSt}} \cdot Y_{RSt} \cdot Y_{X2} \cdot \frac{Y_{\delta St}}{Y_{\delta StT}} = \frac{1620}{1,7} \cdot 1 \cdot 1,0125 \cdot 1 = 964,85 \text{ МПа}.$$

Проверка условия прочности:

$$\sigma_{Fmax1} \leq \sigma_{FPmax1} \rightarrow 510 \leq 1125,7, \text{ МПа} \text{ – условие выполнено;}$$

$$\sigma_{Fmax2} \leq \sigma_{FPmax2} \rightarrow 510 \leq 964,85, \text{ МПа} \text{ – условие выполнено.}$$

3. Компьютерное моделирование конической косозубой передачи при переменных напряжениях Используя возможности пакета Компас 3D, были получены твердотельные модели деталей конического косозубого редуктора (рис. 2).

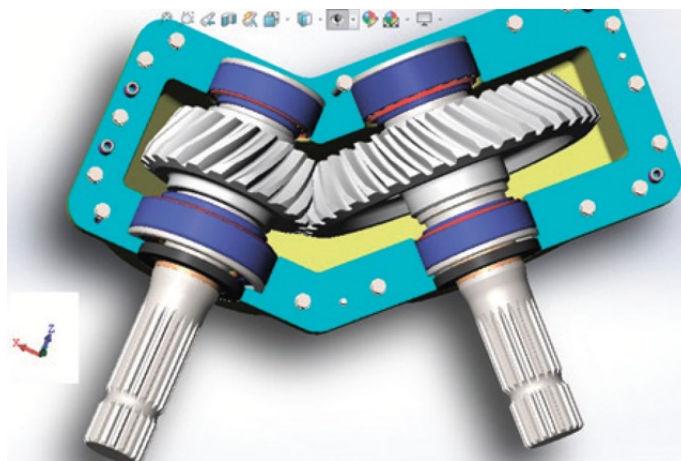


Рис. 2. Твердотельные модели конического редуктора

Большинство аварийных разрушений деталей машин и изделий связаны с усталостным разрушением или хрупким разрушением по причине наличия усталостной трещины. Поэтому был проведен сравнительный анализ прочностных характеристик конической косозубой передачи с наличием трещины и без трещины из низколегированной стали 40X с U-образным концентратором при переменных во времени нагрузках. Уравнение Пэриса для стали 40X с U-образным концентратором напряжений было использовано в виде $dl/dN = 10^{-9} \Delta K^{3,1}$, где

N - количество трещин до разрушения детали, ΔK – коэффициент интенсивности напряжения у устья трещины, dl - длина зоны усталостного развития трещины.

На рисунке 3 приведен скриншот результата расчета максимального главного напряжения (Maximum principal stress) для модели ведущего колеса без трещины и на рисунке 4 - с трещиной. Нагружение модели начиналось с крутящего момента 550 Н·м и каждую секунду увеличивалось на 750 Н·м.

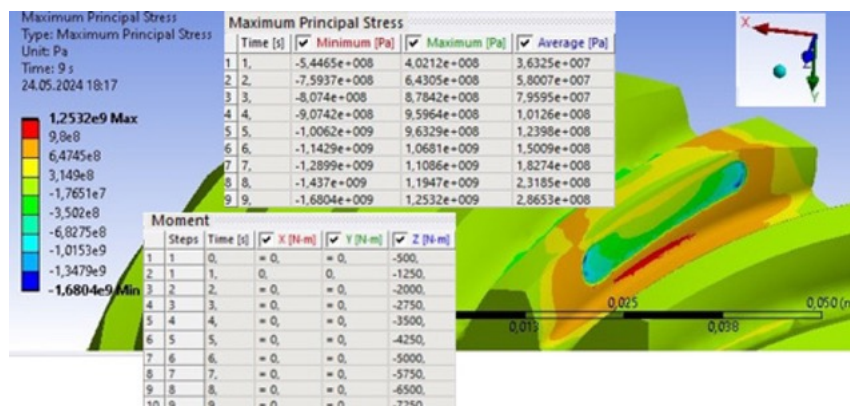


Рис. 3. Расчет главных напряжений в модели конического колеса без трещины

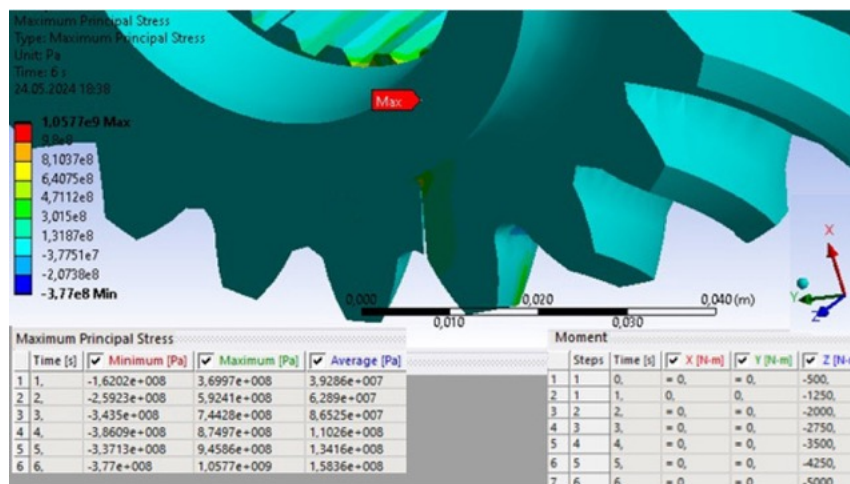


Рис. 4. Расчет главных напряжений в модели конического колеса с трещиной

Анализируя результаты моделирования усталостного разрушения (рис. 5), сделаем вывод, что мельчайшие микротрещины постепенно ослабляют материал во время работы при переменных нагрузках. Судя по значениям максимального главного напряжения и полной деформации, постепенное разрушение при небольших значениях напряжений происходит очень медленно, но скорость роста трещины прогрессивно возрастает, а перед самым разрушением процесс развивается значительно быстрее.

Рассмотрим подробнее рисунок 3 и 4. Согласно теории упругости, упругая деформация - удлинение и сдвиги элементов материала, которые исчезают после разгрузки. При больших значениях крутящего момента изменяется связь между атомами в кристаллических зернах по плоскостям скольжения. Новые образования в материале становятся наиболее прочными, для разрушения которых требуется большая нагрузка. На модели с трещиной (рис. 4) в местах ее роста напряжения резко возрастают с увеличением нагрузки. При сравнении значений максимального главного напряжения для моделей с трещиной и без трещины при небольших нагрузках сделаем вывод, что заметных изменений в структуре материала не происходит. Максимальное, минимальное, среднее значения главных напряжений в материале модели без трещины даже больше при крутящем моменте до 3500 Н·м, чем в материале с трещиной, так как концентратором напряжения являемся небольшая площадка у ножки зуба. Но при значении крутящего момента 4250 Н·м на 5-ой секунде нагружения ситуация меняется. Минимальные и средние значения Maximum principal stress в материале колеса с трещиной значительно больше, чем без трещины. И разница в данных значениях прогрессивно увеличивается.

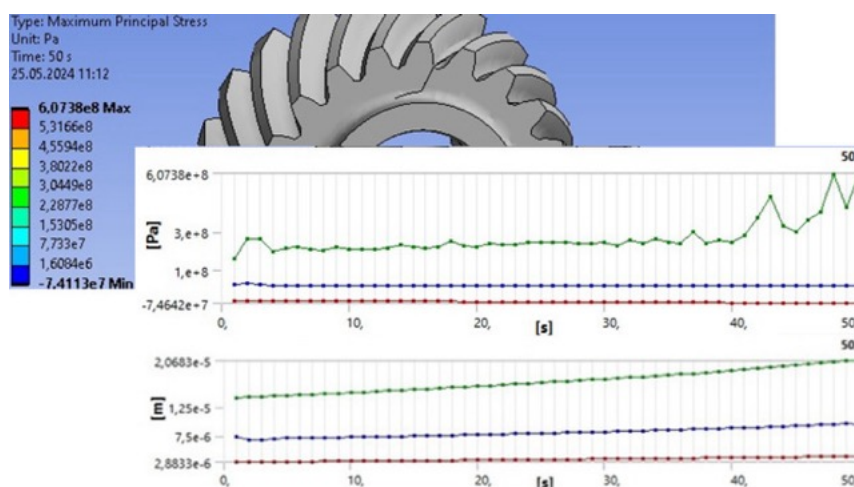


Рис. 5. Расчет максимальных главных напряжений в модели колеса с усталостным разрушением

Сравнивая результаты расчета значений главных напряжений для модели конического колеса без выкрашивания поверхности колеса и для дефектной шестерни (рис. 6, рис. 7), приходим к выводу, что крутящий момент для достижения предела прочности почти на 50% выше. Для бездефектного колеса данное состояние достигнуто при значении крутящего момента 5516,7 Н·м, а с выкрашиванием поверхности - 3861,1 Н·м.

На рисунке 8 видно, что максимальные напряжения по Мизесу при крутящем моменте 3861,1 Н·м локализуется у основания ножки зуба, где наблюдается U-образный концентратор напряжений.

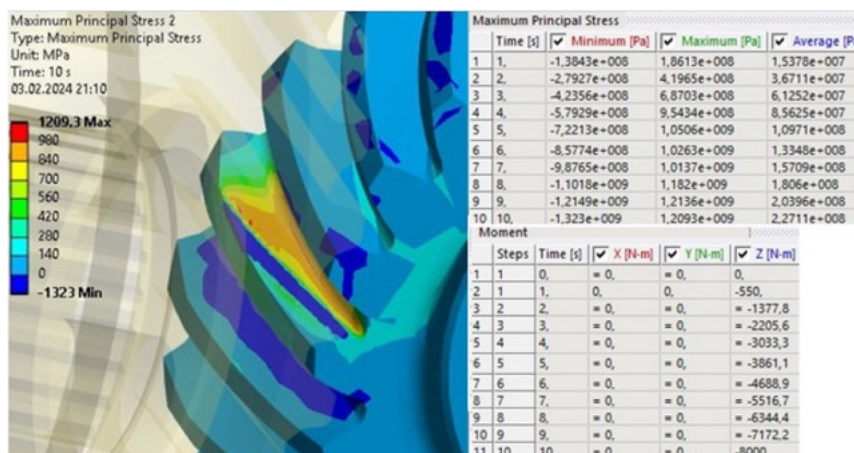


Рис. 6. Расчет максимальных главных напряжений в модели колеса без выкрашивания поверхности зуба

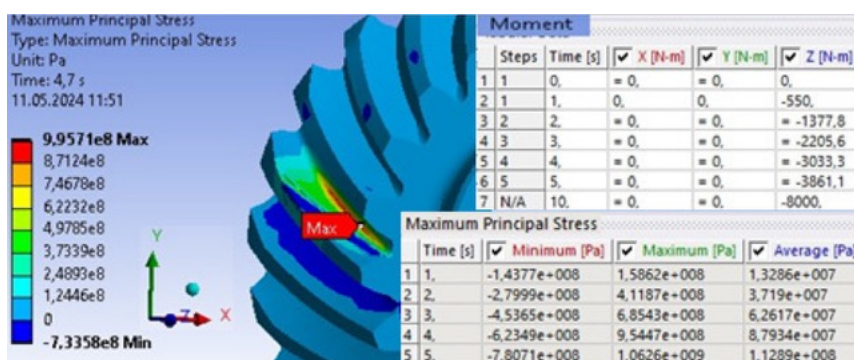


Рис. 7. Расчет максимальных главных напряжений в модели колеса с выкрашиванием поверхности зуба

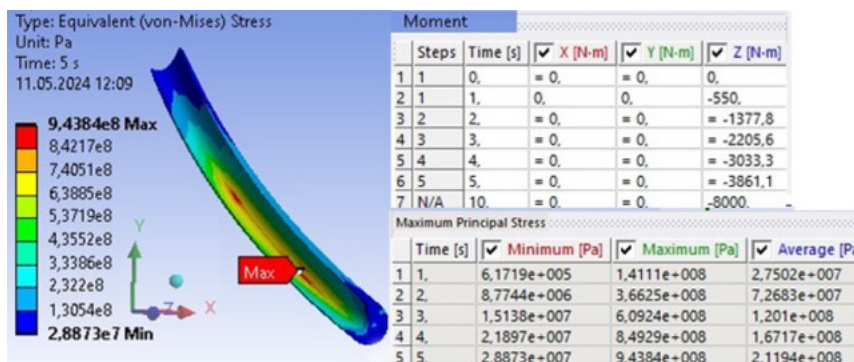


Рис. 8. Расчет напряжений по Мизесу на поверхности основания ножки зуба колеса

4. Выводы На основе расчетов методами компьютерного моделирования следует отметить, что на концентрацию напряжений в деталях конической передачи с типичными дефектами и без дефектов влияет радиус закругления поверхности зуба. Для снижения создаваемых напряжений в зубе данный радиус следует увеличить. Результаты экспериментальных исследований Всероссийского научно-исследовательского института авиационных материалов Государственного научного центра РФ полностью совпадают с расчетами, выполненными авторами статьи с помощью компьютерного моделирования усталостного разрушения.

Авторами статьи показана связь структуры и физико-механических свойств конструкционных материалов при эксплуатации в экстремальных условиях динамических знакопеременных нагрузок. Рассмотрение этих процессов с учетом эффекта Баушингера позволяет более полно представить этапы образования и роста трещин, интерпретировать вид поверхности разрушения конических зубчатых колес редукторов. Итоги проведенного эксперимента совместно с Балтийским государственным техническим университетом «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова по исследованию влияния температур отпуска на ударную вязкость хорошо согласуются с подобными исследованиями, опубликованных в отечественных и зарубежных научных источниках.

Созданная авторами в системах Компас 3D и APM WinMachine компьютерная модель конической косозубой передачи адекватно описывает процессы, происходящие в материале деталей при различных условиях нагружения и различных состояниях рабочих поверхностей зубьев колес. Рассчитанные аналитическими методами значения контактных и изгибных напряжений в материале модели бездефектного колеса при крутящем моменте 550 Н·м приближены к значениям максимальных главных напряжений, полученных компьютерными методами (рис. 3). Что говорит о правильности построения расчетной модели конического колеса в программных пакетах. Следовательно, предложенная авторами методика исследования напряженно-деформированного состояния материалов деталей при переменных напряжениях с применением аналитических и компьютерных методов, позволяет в короткие сроки, без затрат денежных средств на изготовление элементов, прогнозировать работоспособность деталей конического редуктора с учетом различных факторов. По данной методике можно виртуально подбирать наиболее подходящие геометрические размеры деталей, способы обработки их поверхностей, проигрывать различные варианты нагружений колес с трещинами и с дефектами контактной поверхности.

5. Заключение Результаты компьютерного моделирования и экспериментальных исследований показали, что долговечность и прочность конического редуктора в рабочих условиях зависят от усталостной прочности его составных деталей, т.е. от их геометрических размеров, состояний и способа обработки поверхностных слоев, выбора материала. Для повышения несущей способности и увеличения сроков эксплуатации необходимо провести ряд мероприятий для

преобразований форм деталей для более равномерного распределения внутренних сил в конструкциях. Также требуется тщательная обработка поверхностей деталей, использование антикоррозийного покрытия, создание остаточных напряжений в деталях путем предварительного нагружения за предел текучести для повышения прочностных свойств. Для не возникновения трещин требуется периодический осмотр состояний поверхностей деталей, замена износившихся деталей, либо деталей с истекшим сроком службы.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Т. А. Патриной выполнено написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи; предложен комплексный подход по исследованию выносливости поверхностей зубьев детали редуктора. С. К. Степановым произведен обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи; проведение эксперимента; показана связь структуры и физико-механических свойств конструкционных материалов при динамическом нагружении с учетом эффекта Баушингера.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. T. A. Patrina wrote the manuscript text, coordinated the final version of the manuscript, and proposed a comprehensive approach for investigating the endurance of gear tooth surfaces. S. K. Stepanov conducted a literature review on the topic of the article, edited the manuscript text, carried out the experiment, and demonstrated the relationship between the structure and the physical-mechanical properties of structural materials under dynamic loading, taking into account the Bauschinger effect.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кормилицын О. П., Шукейло Ю. А. Механика материалов и структур нано- и микротехники. М.: Академия, 2008. 224 с.
- [2] Кузнецов В. В., Рубцов Э. Р., Шкуряков Н. П. Материаловедение. Железоуглеродистые сплавы. Строение. Структура. Свойства: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ" 2013. 80 с.
- [3] Морозова М. Р., Орлов М. Р. Исследование причин разрушения зубчатых колес в процессе эксплуатации // Авиационные материалы и технологии. 2015. № S1. С. 37–38.
- [4] Пономарев С. Д., Видерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Калинин Н. Н., Федосьев В. И. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1952. 884 с.
- [5] Ткачев Е. С., Федорова И. Ф. Влияние температуры отпуска на механические свойства стали 11Х9К3В2НМАФБР // XV международная научно-техническая Уральская школа-семинар металловедов-молодых ученых (Екатеринбург, 8–12 декабря 2014 г.): сб. науч. тр. Екатеринбург, 2014. С. 315–317.
- [6] Кайбышев Р. О., Скоробогатых В. Н., Щенкова И. А. Новые стали мартенситного класса для тепловой энергетики. Жаропрочные свойства // ФММ. 2010. Т. 109. С. 200–215.
- [7] Abe F., Taneike M., Sawada K. Alloy design of creep resistant 9Cr steel using a dispersion of nano-sized carbonitrides // Int. J. Pressure Vessels Piping. 2007. Vol. 84. P. 3–12.

- [8] Fedorova I., Kipeliva A., Belyakov A., Kaibyshev R. Microstructure evolution in an advanced 9pct Cr martensitic steel during creep at 650°C // Metall. Mater. Trans. A. 2012. Vol. 44. P. 128–135.
- [9] Мельников П. А., Пахоменко А. Н. Расчет и проектирование цилиндрических зубчатых передач: метод. указания к выполнению курсовой работы по дисциплине "Детали машин". Тольятти: Изд-во ТГУ, 2004. 63 с.
- [10] Первицкий Ю. Д. Расчет и конструирование точных механизмов. Л.: Машиностроение, 1976. 456 с.
- [11] Воробьев С. В., Кормилицын О. П., Лобачева Д. А., Степанов С. К., Патрина Т. А. Расчет основных кинематических параметров и проектирование приборных механизмов. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ 2020. 57 с.
- [12] Чернавский С. А., Боков К. Н., Черний И. М., Ицкович Г. М., Козинцов В. П. Курсовое проектирование деталей машин: учеб. пособие для учащихся К93 машиностроительных специальностей техникумов. М.: Машиностроение, 1988. 416 с.
- [13] Кузьмин А. В., Чернин И. М., Козинцов Б. С. Расчеты деталей машин. Справочное пособие. Изд. 3-е, перераб. и доп. Минск: ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА, 1986. 400 с.
- [14] Мельников П. А., Пахоменко А. Н. Расчет и проектирование конических зубчатых передач с прямыми зубьями: метод. указания к выполнению курсовой работы по дисциплине "Детали машин". Тольятти: Изд-во ТГУ, 2004. 51 с.

REFERENCES

- [1] Kormilitsyn O.P., Shukeilo Yu.A. Mechanics of materials and structures of nano- and microtechnologies. Moscow: Academy, 2008. 224 p. (In Russian).
- [2] Kuznetsov V.V., Rubtsov E.R., Shkuryakov N.P. Materials science. Iron-carbon alloys. Structure. Properties. St. Petersburg: SPbGETU "LETI" Publ., 2013. 80 p. (In Russian).
- [3] Morozova M.R., Orlov M.R. Study of the causes of destruction of gear wheels during operation. Aviation materials and technologies. 2015; (S1):37–38. (In Russian).
- [4] Ponomarev S.D., Viderman V.L., Likharev K.K., Makushin V.M., Malinin N.N., Fedosiev V.I. Fundamentals of modern methods of strength calculation in mechanical engineering. Moscow: MASHGIZ, 1952. 884 p. (In Russian).
- [5] Tkachev E.S., Fedorova I.F. Effect of tempering temperature on the mechanical properties of steel 11Kh9K3V2NMAFBR. XV International Scientific and Technical Ural School-Seminar of Metallurgists-Young Scientists (Yekaterinburg, December 8–12, 2014). 2014; 315–317. (In Russ.).
- [6] Kaibyshev R.O., Skorobogatikh V.N., Shchenkova I.A. New martensitic steels for thermal power engineering. Heat resistant properties. FMM. 2010; 109:200–215. (In Russian).
- [7] Abe F., Taneike M., Sawada K. Alloy design of creep resistant 9Cr steel using a dispersion of nano-sized carbonitrides. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2007; 84:3–12.
- [8] Fedorova I., Kipeliva A., Belyakov A., Kaibyshev R. Microstructure evolution in an advanced 9pct Cr martensitic steel during creep at 650°C. Metallurgical and Materials Transactions A. 2012; 44:128–135.
- [9] Melnikov P.A., Pakhomenko A.N. Calculation and design of cylindrical gears: Methodical instructions for the coursework on the discipline "Machine parts". Tolyatti: Publ. House of TGU, 2004. 63 p. (In Russian).
- [10] Pervitsky Yu.D. Calculation and design of precise mechanisms. Leningrad: Mechanical Engineering Publ. House, 2008. 456 p. (In Russian).
- [11] Vorobyov S.V., Kormilitsyn O.P., Lobacheva D.A., Stepanov S.K., Patrina T.A. Calculation of basic kinematic parameters and design of instrumental mechanisms. St. Petersburg: SPbGETU "LETI 2020. 57 p. (in Russian).

-
- [12] Chernavsky S.A., Bokov K.N., Chernii I.M., Itskovich G.M., Kozintsov V.P. Course design of machine parts: A manual for students of K93 engineering specialties of technical schools. Moscow: Mechanical Engineering Publ. House, 1988. 416 p. (in Russian).
- [13] Kuzmin A.V., Chernin I.M., Kozintsov B.S. Calculations of machine parts: Reference manual. 3rd ed., revised and additional. Minsk: Higher School, 1986. 400 p. (in Russian).
- [14] Melnikov P.A., Pakhomenko A.N. Calculation and design of bevel gears with straight teeth: Methodical instructions for coursework in the discipline "Machine parts". Tolyatti: Publ. House of TGU, 2004. 51 p. (in Russian).

А. В. Ткачева¹, А. А. Евстигнеева²

ОБ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ СТЕПЕНИ ОХВАТА ОПОРНЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ СФЕРИЧЕСКОЙ КЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПРОКАЛКИ НА УРОВЕНЬ НАПРЯЖЕНИЙ В МАТЕРИАЛЕ ФОРМЫ ПРИ ЗАЛИВКЕ И ЗАТВЕРДЕВАНИИ В НЕЙ ОТЛИВКИ

¹ *Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН Хабаровского федерального исследовательского центра, Комсомольск-на-Амуре, Россия*

² *Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия*

Аннотация. Рассчитываются температурные напряжения в сферической керамической оболочковой форме в процессе заливки и затвердевания металла. Поставлена и решена соответствующая задача теории температурных напряжений в упругих материалах. Изменяемыми параметрами задачи принимаются степень разогрева (прокалки) оболочковой формы и высота ее посадки в опорный наполнитель (ОН). Зависимостью упругих модулей от температуры пренебрегается. В качестве контактных условий на границе контактирующего металла с внутренней поверхностью формы принимаются равенства напряжений нормальных и касательных к граничной поверхности. ОН принимается не деформируемым, его контакт с материалом оболочковой формы полагается жестким. Отмечается незначительное увеличение уровня напряжений в форме за счет присутствия опорного наполнителя и заметное влияние на него предварительного ее нагрева.

Ключевые слова: упругость, температурные напряжения, литье по выплавляемым моделям, оболочковая форма.

Ткачева Анастасия Валерьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: 4nansi4@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-1795-0021>; AuthorID: 644039

Евстигнеева Анна Алексеевна, студент кафедры прикладной математики; e-mail: annka.ewstic@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0667-2468>; AuthorID: 1183470

для цитирования: Ткачева А. В., Евстигнеева А. А. Об оценке влияния степени охвата опорным наполнителем сферической керамической оболочки и предварительной прокалки на уровень напряжений в материале формы при заливке и затвердевании в ней отливки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 24–34. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.002 EDN: YGLJBE

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. V. Tkacheva¹, A. A. Evstigneeva²

**ON ASSESSING THE INFLUENCE OF THE DEGREE OF
COVERAGE OF A SPHERICAL CERAMIC SHELL BY THE
SUPPORTING FILLER AND PRELIMINARY CALCINATION ON
THE LEVEL OF STRESS IN THE MOLD MATERIAL DURING
POURING AND HARDENING OF THE CASTING IN IT**

¹*Institute of Mechanical Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk Federal Research Center, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

²*Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

Abstract. Thermal stresses in a spherical ceramic shell mold are calculated during the process of pouring and solidifying the metal. The corresponding problem of the theory of temperature stresses in elastic materials is formulated and solved. The variable parameters of the problem are the degree of heating (calcination) of the shell mold and the height of its seating in the support filler (SF). The dependence of elastic moduli on temperature is neglected. As contact conditions at the boundary of the contacting metal with the inner surface of the mold, the equality of stresses normal and tangential to the boundary surface is taken. OH is assumed to be non-deformable, its contact with the shell-shaped material is assumed to be rigid. There is a slight increase in the level of stress in the mold due to the presence of the supporting filler and a noticeable influence on it from its preliminary heating.

Keywords: elasticity, temperature stresses, lost wax casting, shell form.

Anastasia V. Tkacheva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at the Laboratory of Problems of Creation and Processing of Materials and Products, e-mail: 4nansi4@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1795-0021>, AuthorID: 644039

Anna A. Evstigneeva, student of the Department of Applied Mathematics, e-mail: annka.ewstic@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0667-2468>; AuthorID: 1183470

to cite this article: Tkacheva A. V., Evstigneeva A. A. On assessing the influence of the degree of coverage of a spherical ceramic shell by the supporting filler and preliminary calcination on the level of stress in the mold material during pouring and hardening of the casting in it // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 24–34. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.002 EDN: YGLJBE

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение В производстве и технике часто встречаются детали в виде сферы. Получение шаровой заготовки с помощью литья по выплавляемым моделям, экономически выгодней, чем при обработке металла давлением. Поэтому в этой области проведено много исследований [1–13], направленных на улучшение процесса формирования отливки. В ряде работ изучалось влияние геометрии оболочкой формы на ее напряжённо-деформированное состояние (НДС) [1–3], толщины стенки керамики [4–9], материала отливок [10, 11] и материала оболочковой формы [12]. Поскольку керамическая оболочка деформируется упруго, то о ее способности выдержать нагрузку, исходящую от заливаемого металла, можно судить по уровню и характеру возникающих напряжений, учитывая при этом, что сжимающие напряжения предпочтительнее растягивающих. В данной работе исследуется влияние, оказываемое со стороны ОН, на напряжения, возникающие в процессе затвердевания металла в сферической керамической оболочковой форме. Для этой цели рассматривается различный уровень погружения оболочкой формы в опорный наполнитель. Наряду с этим изучается также влияние предварительного подогрева (прокалки) формы.

Образуемый в ходе распределения температуры и охлаждения металл и керамическую форму считаем упругими, деформацию малой. Соотношение Дюамеля-Неймана описывает связь между напряжением упругой деформацией и температурой

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (1)$$

λ , μ , $K = \frac{2}{3}\mu + \lambda$ упругие модули, α – коэффициент линейного температурного расширения.

Полагаем, что температура не зависит от скорости деформаций, и распространяется благодаря закону Фурье

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \quad (2)$$

λ – теплопроводность В/(Вт $^{\circ}$ C), c – удельная теплоемкость Дж/(кг $^{\circ}$ C), ρ – плотность кг/м 3 .

Зависимостью упругих модулей и теплофизических характеристик пренебрегаем. Дополняет систему уравнений (1, 2) уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (3)$$

2. Постановка задачи. В сферическую керамическую оболочковую форму, размерами ($R \leq r \leq R_s$), прогретую до температуры T_*° C заливают расплавленную сталь температурой $T = 1550^{\circ}$ C. Следует найти распределение напряжений в течении времени кристаллизации металла. Введем сферическую систему координат (r, φ, θ) и свяжем ее с центром формы, которая может

быть как в свободном состоянии, так и помещена в опорный наполнитель частично или полностью (рис. 1). Примем сферу сплошной, полагая, что наличием воронки в материале оболочковой формы можно пренебречь. Распределение температуры $T(r, t)$ для каждого момента времени t определяется из решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T(r, \theta, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 T(r, \theta, t)) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} T(r, \theta, t) \right) \right) \quad (4)$$

совместно с начальными

$$T(r, 0) = 1550^\circ C \text{ для } r \in [0 \ R_s]; T(r, \theta, 0) = T_*^\circ C \text{ для } r \in [R_s \ R] \quad (5)$$

и граничными условиями:

в центре сферы $\frac{\partial T(r, \theta, t)}{\partial r} = 0$ для $r = 0$

на поверхности контакта между твердой фазой и керамической оболочкой $r = R$

$$\begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial T^{<1>}(R, \theta, t)}{\partial r} = -\lambda_2 \frac{\partial T^{<2>}(R, \theta, t)}{\partial r}; \\ T^{<1>}(R, \theta, t) = T^{<2>}(R, \theta, t) \end{cases} \quad (6)$$

на границе жидкой и твердой фазы $r = G(t)$

$$\begin{cases} -\lambda_2 \frac{\partial T^{<2>}(G, \theta, t)}{\partial r} = -\lambda_3 \frac{\partial T^{<3>}(G, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial \Delta}{\partial t} L \rho_*; \\ T^{<2>}(G, \theta, t) = T^{<3>}(G, \theta, t) \end{cases} \quad (7)$$

в случае опорного наполнителя $\beta_* \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial T(R_s, \theta, t)}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

для свободной поверхности $0 \leq \theta \leq \beta_*$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T(R_s, \theta, t)}{\partial r} = k(T(R_s, \theta, t) - T^e) \quad (9)$$

на плоскости симметрии $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial T(r, \theta, t)}{\partial \theta} = 0; \quad (10)$$

В приведённых выше соотношениях $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – коэффициенты теплопроводности; k – коэффициент теплообмена керамической оболочки с окружающей средой; β – угол погружения формы в ОН; L – скрытая удельная теплота кристаллизации; ρ – плотность металла.

Решение температурной задачи (4-10) проводим численно методом прогонки.

Деформации в сферической системе координат зависят только от перемещений $u_r(r, \theta, t)$ и $u_\theta(r, \theta, t)$ потому, что по координате φ симметрично, а следовательно, по φ нет перемещений,

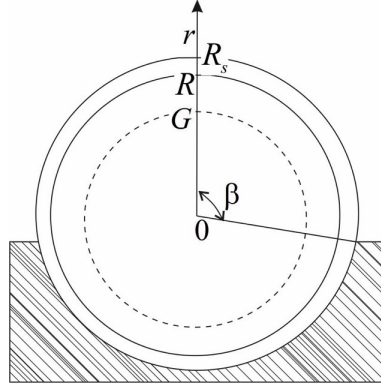


Рис. 1 Схема задачи

$$e_{rr} = u_{r,r}, e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} (u_{\theta,\theta} + u_r), e_{\varphi\varphi} = u_{\theta} \frac{1}{r} \operatorname{ctg}(\theta) + u_r \frac{1}{r}, \quad (11)$$

$$e_{r\theta} = 0.5 \left(u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_{\theta} + \frac{1}{r} u_{r,\theta} \right), e_{r\varphi} = e_{\varphi\theta} = 0.$$

Подставляя (11) в (1) перепишем соотношения Дюамеля-Неймана в сферической системе координат для нашего случая

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) u_{r,r} + \lambda \frac{1}{r} (u_{\theta,\theta} + 2u_r + u_{\theta} \operatorname{ctg}(\theta)) - 3K\alpha (T - T_0);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} (u_{\theta,\theta} + u_r) + \lambda \left(u_{r,r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_{\theta} \operatorname{ctg}(\theta) \right) - 3K\alpha (T - T_0); \quad (12)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} (u_{\theta} \operatorname{ctg}(\theta) + u_r) + \lambda \left(u_{r,r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_{\theta,\theta} \right) - 3K\alpha (T - T_0);$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_{\theta} + \frac{1}{r} u_{r,\theta} \right).$$

Уравнение равновесия

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg}(\theta)) = 0, \quad (13)$$

$$\sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} ((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg}(\theta) + 3\sigma_{r\theta}) = 0.$$

Для решения уравнения равновесия (13) запишем граничные условия: на границе жидкой и твердой фазы $r = G(t)$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{<1>} = -p; & p = \rho gh \\ \sigma_{r\theta}^{<1>} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

на поверхности контакта между твердой фазой и керамической оболочкой $r = R$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{<1>} = \sigma_{rr}^{<2>} \\ \sigma_{r\theta}^{<1>} = \sigma_{r\theta}^{<2>} \\ u_r^{<1>} = u_r^{<2>} \\ u_\theta^{<1>} = u_\theta^{<2>} \end{cases} \quad (15)$$

для свободной поверхности $0 \leq \theta \leq \beta_*$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{<2>} = 0; \\ \sigma_{r\theta}^{<2>} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

в случае опорного наполнителя $\beta_* \leq \theta \leq \pi$

$$\begin{cases} u_r^{<2>} = 0 \\ u_\theta^{<2>} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

на плоскости симметрии $\theta = 0, \theta = \pi$

Уравнения (13-17) представляем в перемещениях и решаем полученную систему линейных уравнений одним из возможных численных методов: простых итераций либо Гаусса.

3. Обсуждение результатов Принятые физико-механические характеристики сред:

для жидкого металла плотность 7800 кг/м^3 , теплоемкость $900 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{C)}$, скрытая удельная теплота кристаллизации $270 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}$, коэффициент теплопроводности $2,98 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$

для твердого металла плотность 7860 кг/м^3 , теплоемкость $460 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{C)}$, коэффициент теплопроводности $29 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, коэффициент линейного расширения $11,0 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, параметры Ламе $\lambda = 121,1 \text{ ГПа}$, $\mu = 80,7 \text{ ГПа}$

для оболочковой формы плотность 2000 кг/м^3 , теплоемкость $840 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{C)}$, коэффициент теплопроводности $0,812 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, коэффициент линейного расширения $0,51 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, параметры Ламе $\lambda = 172,6 \text{ ГПа}$, $\mu = 259,0 \text{ ГПа}$.

Рассмотрим процесс деформирования керамической формы в течение времени затвердевания залитого жидкого металла. При размерах внешнего радиуса $0,05 \text{ м}$ толщиной $0,005 \text{ м}$ это займет не более двух минут. Разбивая временной интервал на малые временные промежутки, произведем расчет поставленной задачи.

Рассмотрим случай, когда оболочка перед заливкой металла разогрета до температуры $800 \text{ }^\circ\text{C}$. На рис. 2 показано движение границы, разделяющей жидкую фазу от твердой, как видно это не линейное движение с запаздыванием на границе контакта с керамической формой. Сжимающие напряжения высокие на внутренней поверхности формы рис. 3, как же с временем уменьшают свои значения.

В случае свободной внешней поверхности задача становится симметрична относительно φ и θ , по этой причине напряжения σ_φ и σ_θ на рис. 3 равны.

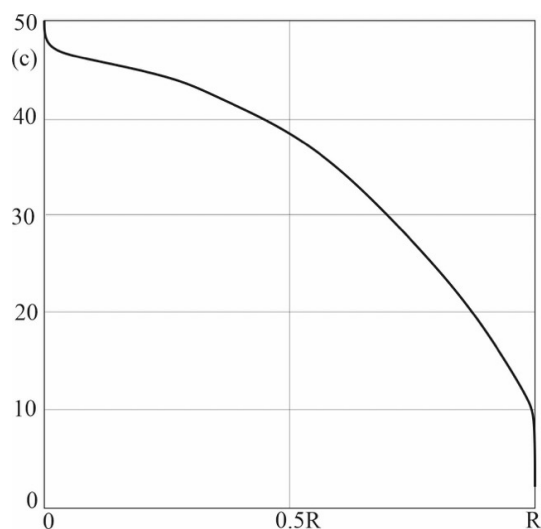


Рис. 2 Движение границы разделяющей твердую и жидкую фазы

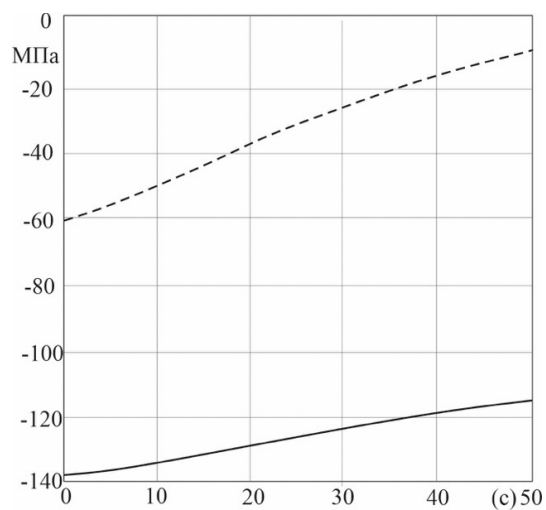


Рис. 3 Распределение сжимающих напряжений на поверхности контакта металл - ОФ. Прямой обозначено радиальное напряжение, пунктирной σ_φ и σ_θ .

На рис. 4 приведены напряжения на внешней поверхности керамической оболочки для разных случаев погружения в опорный наполнитель, угол β принимался равным $\pi/4$, $\pi/2$ и $3\pi/4$. Опорный наполнитель создает сжимающие напряжения на внешней поверхности формы, при этом контактные напряжения на внутренней поверхности не возрастает.

Для более детального изучения вопроса рассмотрим температуру прокаливания керамической формы. На рис. 5 продемонстрирована зависимость максимального напряжения в керамической форме от температуры прокаливания в первый временной интервал. Чем выше температура прокаливания, тем меньше максимальные напряжения зарождаются в керамической форме при кристаллизации отливки.

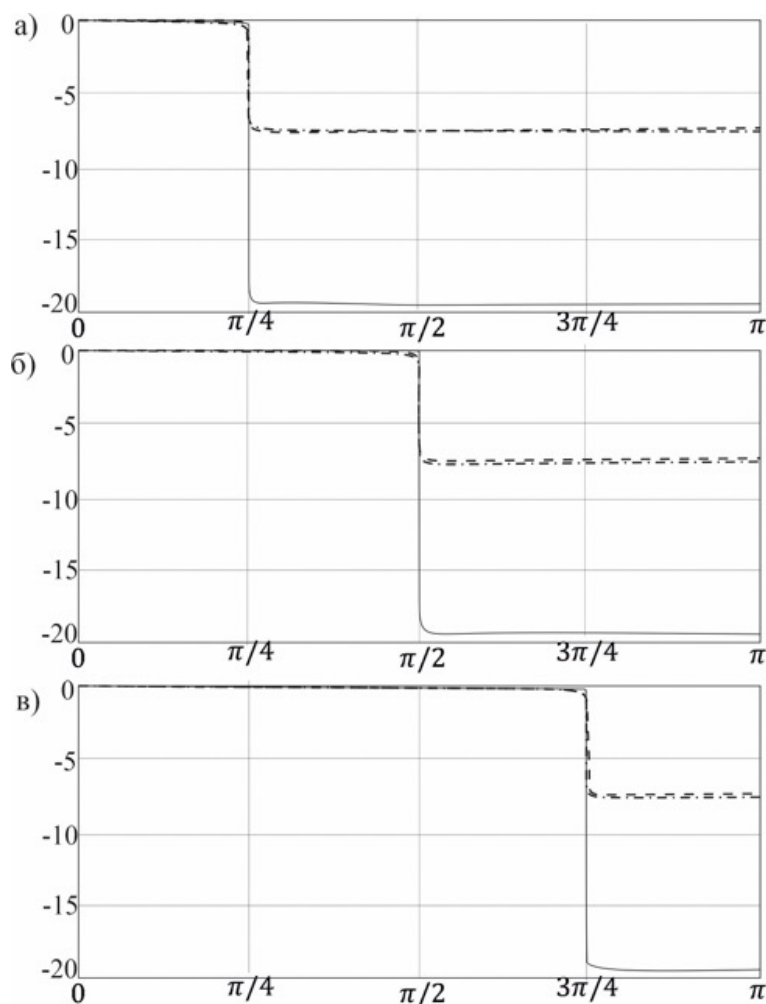


Рис. 4. Распределение напряжений на внешней поверхности формы погруженной на угол β : а) $\pi/4$; б) $\pi/2$, в) $3\pi/4$

Заключение. В первые секунды заливки металла в сферическую керамическую форму опорный наполнитель оказывает негативное влияние на образование отрицательных напряжений на внешней поверхности оболочки. Степень погружения в опорный наполнитель не увеличивает напряжения на свободной

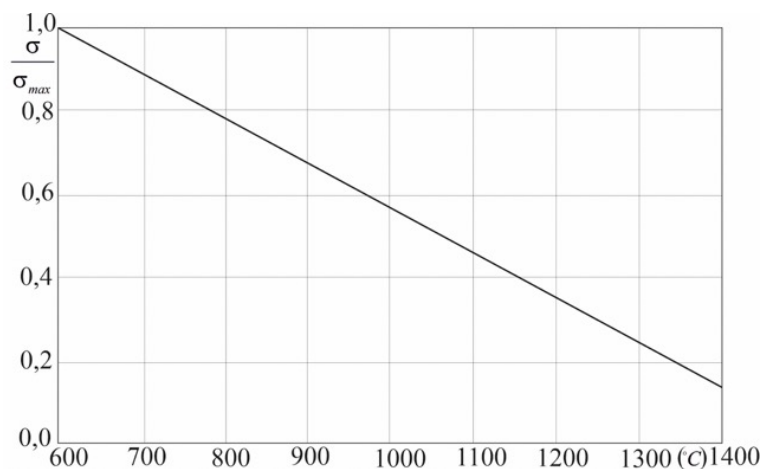


Рис. 5. Зависимость максимального напряжения в керамической форме от температуры прокаливания

внешней поверхности формы. С момента начала заливки до кристаллизации стальной заготовки в материале формы образуются сжимающие напряжения, значения которых со временем понижаются.

Максимальное напряженное состояние керамическая форма испытывает в первые доли секунд заливки, при этом самые высокие сжимающие напряжения образуются на внутренней поверхности формы. На их значения опорный наполнитель практически не оказывает влияния, чего нельзя сказать о температуре предварительного подогрева оболочки. Чем выше температура прокалики, тем меньше напряжения и вероятность растрескивания формы.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. В. Ткачева написание текста рукописи, построение математической модели и получение решения, согласование финальной версии рукописи, А. А. Евстигнеева обзор литературы по теме статьи, постановка задачи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. A. V. Tkacheva writing the text of the manuscript, constructing a mathematical model and obtaining a solution, agreeing on the final version of the manuscript, A. A. Evstigneeva reviewing the literature on the topic of the article, setting the problem, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation №24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Singh R. Mathematical modeling for surface hardness in investment casting applications . // Journal of mechanical science and technology. 2012. № 26. С. 3625–3629.
- [2] Liu C. Influence of complex structure on the shrinkage of part in investment casting process // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2015. № 77. С. 1191–1203.
- [3] Khan M. A. A., Sheikh A. K. Simulation tools in enhancing metal casting productivity and quality: A review. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B // Journal of Engineering Manufacture. 2016. № 230(10). С. 1799–1817.
- [4] Dong Y.W., Li X.L., Zhao Qi и др. Modeling of shrinkage during investment casting of thin walled hol-low turbine blades // Journal of Materials Processing Technology. 2017. № 244. С. 190 – 203.
- [5] Bansode S. N., Phalle V. M., Mantha S. S. Optimization of process parameters to im-prove dimensional accuracy of investment casting using Taguchi approach // Advances in Mechanical Engineering. 2019. № 11(4). С. 1 – 12.
- [6] Bansode S. N., Phalle V. M., Mantha S. Taguchi approach for optimization of parameters that reduce dimensional variation in investment casting // Archives of Foundry Engineering. 2019. № 19(1). С. 5 – 12.
- [7] Rakoczy L., Cygan R. Analysis of temperature distribution in shell mould during thin-wall superalloy casting and its effect on the resultant microstructure // Archives of Civil and Mechanical Engineering. 2018. № 18. С. 1441 – 1450.
- [8] Banerjee S., Sutradhar G. Analysis of Casting Defects in Investment Casting by Simula-tion .Advances in Materials // Mechanical and Industrial Engineering: Selected Contribu-tions from the First International Conference on Mechanical Engineering. Kolkata India : Jadavpur University Springer International Publishing, 2019. С. 247 – 271.
- [9] Kanyo Janos E., Schafföner Stefan, Uwanyuze R. Sharon, Leary Kaitlynn S. An overview of ceramic molds for investment casting of nickel super-alloys // Journal of the European Ceramic Society. 2020. № 40(15). С. 4955–4973.
- [10] Liu G. The effects of microstructure and microtexture generated during solidifica-tion on deformation micromechanism in IN713C nickelbased superalloy // Acta Materialia. 2018. № 148. С. 391 – 406.
- [11] Wang Guoxiang. Investment Casting Process Design of Large-Size Superalloy Castings // Precision Forming Technology of Large Superalloy Castings for Aircraft Engines. Springer Singapore, 2021. P. 33–65. ISBN: 9789813362208. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-981-33-6220-8_2.
- [12] Pattnaik S., Karunakar D. B., Jha P. K. Developments in investment casting process—a review // Journal of Materials Processing Technology. 2012. № 212(11). С. 2332–2348.
- [13] Евстигнеев А. И., Дмитриев Э.А., Чернышева Д.В., Одинокоев В.И. Моделирование внеш-него силового воздействия на стойкость оболочковой формы при заливке в нее стали // Математическое моделирование. 2022. № 34(5). С. 61–72.

REFERENCES

- [1] Singh R. Mathematical modeling for surface hardness in investment casting applications . // Journal of mechanical science and technology. 2012. № 26. С. 3625–3629.
- [2] Liu C. Influence of complex structure on the shrinkage of part in investment casting process // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2015. № 77. С. 1191–1203.
- [3] Khan M. A. A., Sheikh A. K. Simulation tools in enhancing metal casting productivity and quality: A review. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B // Journal of Engineering Manufacture. 2016. № 230(10). С. 1799–1817.

-
- [4] Dong Y.W., Li X.L., Zhao Qi и др. Modeling of shrinkage during investment casting of thin walled hol-low turbine blades // *Journal of Materials Processing Technology*. 2017. № 244. C. 190 – 203.
- [5] Bansode S. N., Phalle V. M., Mantha S. S. Optimization of process parameters to improve dimensional accuracy of investment casting using Taguchi approach // *Advances in Mechanical Engineering*. 2019. № 11(4). C. 1 – 12.
- [6] Bansode S. N., Phalle V. M., Mantha S. Taguchi approach for optimization of parameters that reduce dimensional variation in investment casting // *Archives of Foundry Engineering*. 2019. № 19(1). C. 5 – 12.
- [7] Rakoczy L., Cygan R. Analysis of temperature distribution in shell mould during thin-wall superalloy casting and its effect on the resultant microstructure // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2018. № 18. C. 1441 – 1450.
- [8] Banerjee S., Sutradhar G. Analysis of Casting Defects in Investment Casting by Simulation. *Advances in Materials // Mechanical and Industrial Engineering: Selected Contributions from the First International Conference on Mechanical Engineering*. Kolkata India : Jadavpur University Springer International Publishing, 2019. C. 247 – 271.
- [9] Kanyo Janos E., Schafföner Stefan, Uwanyuze R. Sharon, Leary Kaitlynn S. An overview of ceramic molds for investment casting of nickel super-alloys // *Journal of the European Ceramic Society*. 2020. № 40(15). C. 4955–4973.
- [10] Liu G. The effects of microstructure and microtexture generated during solidification on deformation micromechanism in IN713C nickelbased superalloy // *Acta Materialia*. 2018. № 148. C. 391 – 406.
- [11] Wang Guoxiang. Investment Casting Process Design of Large-Size Superalloy Castings // *Precision Forming Technology of Large Superalloy Castings for Aircraft Engines*. Springer Singapore, 2021. P. 33–65. ISBN: 9789813362208. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-981-33-6220-8_2.
- [12] Pattnaik S., Karunakar D. B., Jha P. K. Developments in investment casting process—a review // *Journal of Materials Processing Technology*. 2012. № 212(11). C. 2332–2348.
- [13] Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Chernysheva D.V., Odinkov V.I. Modeling of external force influence on the resistance of a shell mold when steel is poured into it // *Math modeling*. 2022. no. 34(5). P. 61–72.

В. Н. Орлов¹, А. Я. Корнилов², А. В. Воробьева²

ОПТИМИЗАЦИЯ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

²Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (ПКУ), Москва, Россия

Аннотация. В работе представлено решение задачи влияния возмущения начальных данных на аналитическое приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в области аналитичности. Результаты работы позволяют осуществлять аналитическое продолжение решения рассматриваемого класса нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности. В работе получена априорная оценка аналитического приближенного решения и дана технология ее оптимизации с помощью апостериорной оценки погрешности. Полученные результаты сопровождаются численными экспериментами.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, аналитическое приближенное решение, априорная оценка, оптимизация.

Орлов Виктор Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент; e-mail: orlovvn@mgsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7606-5490>; AuthorID: 711175

Корнилов Александр Яковлевич, кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: a.kornilov@mgutn.ru; <https://orcid.org/0009-0003-5435-2941>; AuthorID: 161334

Воробьева Алла Викторовна, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики; e-mail: a.vorobiova@mgutn.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3897-9560>; AuthorID: 221781

для цитирования: Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Воробьева А. В. Оптимизация априорной оценки аналитического приближенного решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 35–50. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.003 EDN: YWVSZG

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

© Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Воробьева А. В. 2024

Поступила: 01.06.24; принята в печать: 29.11.24; опубликована: 18.12.24.

V. N. Orlov¹, A. Ya. Kornilov², A. V. Vorobyeva²

OPTIMIZATION OF AN A PRIORI ESTIMATE OF AN ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF ONE CLASS OF NONLINEAR THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN THE FIELD OF ANALYTICS

¹*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.*

²*Moscow State University of Technology and Management. K.G. Razumovsky (PKU), Moscow, Russia.*

Abstract. The paper presents a solution to the problem of the influence of a disturbance of the initial data on the analytical an approximate solution of one class of nonlinear differential equations in the domain of analyticity. The results of the work allow us to carry out the analytical continuation of the solution of the considered class of nonlinear differential equation in the domain of analyticity. In this work, an a priori estimate of the analytical approximate solution is obtained and a technology for its optimization using an a posteriori error estimate is given. The results obtained are accompanied by numerical experiments.

Keywords: nonlinear differential equation, Cauchy problem, analytical approximate solution, a priori assessment, optimization.

Victor N. Orlov, Doctor of Physical and Mathematics, Docent; e-mail: orlovvn@mgsu.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7606-5490>; AuthorID: 711175

Alexander Ya. Kornilov, Candidate of Physics and Mathematics, Docent; e-mail: a.kornilov@mgutm.ru; <https://orcid.org/0009-0003-5435-2941>; AuthorID: 161334

Alla V. Vorobyeva, Candidate of Technical Sciences, Docent; e-mail: a.vorobiova@mgutm.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3897-9560>; AuthorID: 221781

to cite this article: Orlov V. N., Kornilov A. Ya., Vorobyeva A. V. Optimization of an a priori estimate of an analytical approximate solution of one class of nonlinear third order differential equation in the field of analytics // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 35–50. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.003 EDN: YWVSZG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Нелинейные дифференциальные уравнения имеют приложения: при исследовании волновых процессов в эластичных балках [1, 2], в строительных конструкциях [3, 4], в исследованиях эволюционных процессов [5–7]. Особенностью нелинейных дифференциальных уравнений является наличие подвижных особых точек алгебраического типа. На данный момент существует два варианта разрешимости таких уравнений: разрешимость в квадратурах в частных случаях, как предлагается в работах [8–26], второй вариант связан с авторским методом аналитического приближенного решения. Этот метод состоит из решения ряда математических задач, некоторые из которых представлены в работах [27–30]. В данной работе представлено решение одной из задач авторского метода: исследование влияния возмущения начальных данных на аналитическое приближенное решение. Актуальность решения данной задачи связано с аналитическим продолжением решения в области аналитичности для рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения.

Методы исследования

В работе [31] доказана теорема существования решения задачи Коши:

$$y''' = y^3 + r(x), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2 \quad (2)$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$,

$$\text{где } \rho_2 = \min\left\{\rho_1, \sqrt[3]{\frac{1}{(M+1)^2}}\right\}, \quad M = \max\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!}\},$$

ρ_1 – радиус области аналитичности функции $r(x)$.

Если на первом этапе для получения аналитического приближенного решения задачи Коши (1)-(2)

$$Y_n(x) = \sum_{n=0}^N C_n(x - x_0)^n, \quad (3)$$

можно воспользоваться результатом работы [31], то на втором этапе, при осуществлении аналитического продолжения решения (3) требуется решить задачу влияния возмущения начальных данных на аналитическое приближенное решение.

Рассмотрим задачу Коши:

$$y''' = y^3 + r(x), \quad (4)$$

$$y(x_0) = \tilde{y}_0, \quad y'(x_0) = \tilde{y}_1, \quad y''(x_0) = \tilde{y}_2 \quad (5)$$

Решением задачи (4)-(5), вместо структуры аналитического приближенного решения (3), будем иметь

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_n(x - x_0)^n, \quad (6)$$

где \tilde{C}_n - возмущенное значение коэффициентов.

Теорема 1. Пусть $r(x)$ - аналитическая функция в области

$$|x - x_0| < \rho_1; \quad \Delta M < 1.$$

Тогда для аналитического приближенного решения (6), задачи Коши (4)-(5) справедлива оценка погрешности

$$\Delta \tilde{y}_1(x) \leq \Delta_0 + \Delta_1.$$

В области

$$|x - x_0| < \rho_2,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\leq \Delta M(1 + |x - x_0| + |x - x_0|^2) + \\ &+ \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^3 |x - x_0|^3}{1 - (M + \Delta M + 1)^2 |x - x_0|^3} \left(\frac{1}{120} + \frac{|x - x_0|}{24} + \frac{|x - x_0|^2}{60} \right), \\ \Delta_1 &\leq \frac{(M + 1)^{\frac{2N+5}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N + 1)(1 - (M + 1)^2) |x - x_0|^3} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N - 1)} + \frac{|x - x_0|}{N(N + 2)} + \frac{|x - x_0|^2}{(N + 2)(N + 3)} \right), \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 3n$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{(M + 1)^{\frac{2N+3}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N + 1)(1 - (M + 1)^2) |x - x_0|^3} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N - 1)} + \frac{|x - x_0|}{N(N + 2)} + \frac{|x - x_0|^2 (M + 1)^2}{(N + 2)(N + 3)} \right), \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 3n + 1$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{(M + 1)^{\frac{2N+1}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N + 1)(1 - (M + 1)^2) |x - x_0|^3} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N - 1)} + \frac{|x - x_0| (M + 1)^2}{N(N + 2)} + \frac{|x - x_0|^2 (M + 1)^2}{(N + 2)(N + 3)} \right), \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 3n + 2$,

$$M = \max \left\{ |\tilde{y}_0|, |\tilde{y}_1|, |\tilde{y}_2|, \sup_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Delta M = \max\{\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2\}, \quad \rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \sqrt[3]{\frac{1}{(M + \Delta M + 1)^2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{(M + 1)^2}} \right\}.$$

Доказательство.

$$\Delta \tilde{y}_N(x) = |y(x) - \tilde{y}_N(x)| \leq |y(x) - \tilde{y}(x)| + |\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)|.$$

Или, с учетом выражений (3) и (6)

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{y}_N(x) &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(x - x_0)^n \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(x - x_0)^n - \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n(x - x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} (C_n - \tilde{C}_n)(x - x_0)^n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \tilde{C}_n(x - x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x - x_0|^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{C}_n| |x - x_0|^n = \Delta_0 + \Delta_1, \end{aligned}$$

где

$$\Delta \tilde{C}_n = |C_n - \tilde{C}_n|.$$

Оценка для Δ_1 следует на основании работы [31]:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{(M + 1)^{\frac{2N+5}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N + 1)(1 - (M + 1)^2) |x - x_0|^3} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{N(N - 1)} + \frac{|x - x_0|}{N(N + 2)} + \frac{|x - x_0|^2}{(N + 2)(N + 3)} \right) \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 3n$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{(M + 1)^{\frac{2N+3}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N + 1)(1 - (M + 1)^2) |x - x_0|^3} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{N(N - 1)} + \frac{|x - x_0|}{N(N + 2)} + \frac{|x - x_0|^2 (M + 1)^2}{(N + 2)(N + 3)} \right) \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 3n + 1$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{(M + 1)^{\frac{2N+1}{3}} |x - x_0|^{N+1}}{(N + 1)(1 - (M + 1)^2) |x - x_0|^3} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{N(N - 1)} + \frac{|x - x_0| (M + 1)^2}{N(N + 2)} + \frac{|x - x_0|^2 (M + 1)^2}{(N + 2)(N + 3)} \right) \end{aligned}$$

в случае $N + 1 = 3n + 2$.

В области

$$|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt[3]{(M + 1)^2}}.$$

При этом

$$M = \max \left\{ |\tilde{y}_0|, |\tilde{y}_1|, |\tilde{y}_2|, \sup_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Напомним оценки для коэффициентов C_n , полученные в работе [31]

$$|C_{3n}| \leq \frac{1}{3n(3n-1)(3n-2)}(M+1)^{2n+1},$$

$$|C_{3n+1}| \leq \frac{1}{(3n+1)(3n)(3n-1)}(M+1)^{2n+1},$$

$$|C_{3n+2}| \leq \frac{1}{(3n+2)(3n+1)3n}(M+1)^{2n+1}.$$

Докажем оценки для $\Delta\tilde{C}_n$ с учетом значений его индекса:

$$\Delta\tilde{C}_{3n} \leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2n+1}}{3n(3n-1)(3n-2)} = \vartheta_{3n}, \quad (7)$$

$$\Delta\tilde{C}_{3n+1} \leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-1)} = \vartheta_{3n+1}, \quad (8)$$

$$\Delta\tilde{C}_{3n+2} \leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2n+1}}{(3n+2)(3n+1)(3n)} = \vartheta_{3n+2}. \quad (9)$$

Докажем вариант оценки (7) с учетом рекуррентного соотношения для коэффициентов C_n , полученный в работе [31]:

$$n(n-1)(n-2)C_n = C_{n-3}^{**} + A_{n-3}$$

для $n \geq 3$, где

$$C_n^{**} = \sum_{i=0}^n C_i \cdot C_{n-i}^*, \quad C_n^* = \sum_{i=0}^n C_i \cdot C_{n-i}.$$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{C}_{3n+3} &= |C_{3n+3} - \tilde{C}_{3n+3}| = \\ &= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} |C_n^{**} + A_{3n} - \tilde{C}_{3n}^{**} - A_{3n}| = \\ &= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} |C_n^{**} - \tilde{C}_{3n}^{**}| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \times \\
&\times \left| \sum_{i=1}^n C_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} C_{3j} C_{3n-3i-3j} \right) - \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \tilde{C}_{3j} \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \sum_{i=1}^n (\tilde{C}_{3i} + \Delta \tilde{C}_{3i}) \times \right. \\
&\times \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} (\tilde{C}_{3j} + \Delta \tilde{C}_{3j}) (\tilde{C}_{3n-3i-3j} + \Delta \tilde{C}_{3n-3i-3j}) \right) - \\
&\left. - \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \tilde{C}_{3j} \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) \right|.
\end{aligned}$$

После раскрытия скобок в последнем выражении и приведения подобных, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{C}_{3n+3} &\leq \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \left| \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \tilde{C}_{3j} \Delta \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \Delta \tilde{C}_{3j} \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \Delta \tilde{C}_{3j} \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \tilde{C}_{3j} \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \tilde{C}_{3j} \Delta \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) + \\
&\left. + \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \Delta \tilde{C}_{3j} \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{3i} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \Delta \tilde{C}_{3j} \Delta \tilde{C}_{3n-3i-3j} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Подставим в последнее выражение оценки (7), (8), (9), а также оценки для \tilde{C}_{3n} , \tilde{C}_{3n+1} , \tilde{C}_{3n+2} из работы [31]:

$$\begin{aligned}
|\tilde{C}_{3n}| &\leq \frac{1}{3n(3n-1)(3n-2)} (M+1)^{2n+1}, \\
|\tilde{C}_{3n+1}| &\leq \frac{1}{(3n+1)(3n)(3n-1)} (M+1)^{2n+1}, \\
|\tilde{C}_{3n+2}| &\leq \frac{1}{(3n+2)(3n+1)(3n)} (M+1)^{2n+1},
\end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{C}_{3n+3} &\leq \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \left| \sum_{i=1}^n \frac{(M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \times \right. \\
&\times \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{(M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-2j-2}}{(3n)(3n+2)(3n+1)} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{(M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \times \\
&\times \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \frac{(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-2j-2}}{(3n-3i-3j)} \times \right. \\
&\times \left. \frac{1}{(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{(M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \times \\
&\quad \times \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-1-2j-1}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{(M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times \right. \\
&\quad \times \left. \frac{(M+1)^{2n+3-2i-1-2j-1}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-2)(3n-3i-3j-1)} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+3-2i-1-2j-2}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \times \\
&\quad \times \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times \right. \\
&\quad \times \left. \frac{(M+1)^{2n+3-2i-1-2j-1}}{(3n-3i-3j)(3n-3i-3j-1)(3n-3i-3j-2)} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2i+1}}{(3i)(3i-1)(3i-2)} \left(\sum_{j=1}^{n+1-i-j} \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{2j+1}}{(3j)(3j-1)(3j-2)} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2n+3-2i-1-2j-1}}{(3n - 3i - 3j)(3n - 3i - 3j - 1)(3n - 3i - 3j - 2)} \Big|.$$

После ряда преобразований в последнем получим оценку

$$\Delta \tilde{C}_{3n+3} \leq \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2n+3}}{(3n + 3)(3n + 2)(3n + 1)}.$$

Переходим к оценке Δ_0 .

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n |x - x_0|^n, \quad (10)$$

мажорантный для ряда

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x - x_0|^n, \quad (11) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n |x - x_0|^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2k+1}}{(3k)(3k-1)(3k-2)} |x - x_0|^{3k} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2k+1}}{(3k)(3k+1)(3k-1)} |x - x_0|^{3k+1} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2k+1}}{(3k+2)(3k+1)(3k)} |x - x_0|^{3k+2}. \end{aligned}$$

Для каждого ряда в правой части последнего равенства имеем, на основании достаточного признака сходимости рядов, область

$$|x - x_0| < \sqrt[3]{\frac{1}{(M + \Delta M + 1)^2}};$$

На основании связи рядов (10) и (11) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tilde{C}_n |x - x_0|^n \leq \\ &\leq \Delta \tilde{C}_0 + \Delta \tilde{C}_1 |x - x_0| + \Delta \tilde{C}_2 |x - x_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{3k} |x - x_0|^{3k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{3k+1} |x - x_0|^{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \tilde{C}_{3k+2} |x - x_0|^{3k+2} \leq \\ &\leq \Delta \tilde{C}_0 + \Delta \tilde{C}_1 |x - x_0| + \Delta \tilde{C}_2 |x - x_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k} |x - x_0|^{3k} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k+1} |x - x_0|^{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k+2} |x - x_0|^{3k+2}. \quad (12)$$

С учетом оценок (7), (8), (9) и

$$\Delta \tilde{C}_0 = \Delta \tilde{y}_0, \quad \Delta \tilde{C}_1 = \Delta \tilde{y}_1, \quad \Delta \tilde{C}_2 = \Delta \tilde{y}_2,$$

$$\Delta \tilde{M} = \max\{\Delta \tilde{y}_0, \Delta \tilde{y}_1, \Delta \tilde{y}_2\},$$

из (12) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\leq \Delta M(1 + |x - x_0| + |x - x_0|^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2k+1} |x - x_0|^{3k+1}}{(3k)(3k+1)(3k-1)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2k+1} |x - x_0|^{3k+2}}{(3k+2)(3k+1)(3k)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^{2k+1} |x - x_0|^{3k+3}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \leq \\ &\leq \Delta M(1 + |x - x_0| + |x - x_0|^2) + \frac{\Delta M(M + \Delta M + 1)^3 |x - x_0|^3}{1 - (M + \Delta M + 1)^2 \cdot |x - x_0|^3} \times \\ &\times \left(\frac{1}{120} + \frac{|x - x_0|}{24} + \frac{|x - x_0|^2}{60} \right). \end{aligned}$$

Таким образом завершаем доказательство оценки для $\Delta \tilde{y}_n(x)$ в области

$$|x - x_0| < \rho_2,$$

где

$$\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \sqrt[3]{\frac{1}{(M+1)^2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{(M+\Delta M+1)^2}} \right\}.$$

Численный эксперимент.

Для задачи Коши (1)-(2), работе [31], $r(x) = 0$,

$$C_3 = \frac{1}{6}(C_0^3 + A_0); \quad C_4 = \frac{1}{24}(3C_0^2 \cdot C_1 + A_1),$$

$$C_5 = \frac{1}{60}(3C_0 \cdot C_1^2 + 3C_0^2 \cdot C_2 + A_2),$$

$$C_6 = \frac{1}{120}(3C_0^2 \cdot C_3 + 6C_0 \cdot C_1 \cdot C_2 + C_1^3 + A_2),$$

$$C_7 = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5}(C_4^{**} + A_4) = \frac{1}{120}(C_0 \cdot (2C_0 \cdot C_4 + 2C_1 \cdot C_3 + C_2^2) + C_1 \cdot (2C_0 \cdot C_3 +$$

$$+2C_1 \cdot C_2) + C_2 \cdot (2C_0 \cdot C_2 + C_1^2) + C_3(2C_0 \cdot C_1) + C_4 \cdot C_0^2 + A_4).$$

$$y(1) = \sqrt{2}; \quad y'(1) = 0,05; \quad y''(1) = 0,1.$$

Вычислим значение в точке $x_1 = 1,1$. Значение x_1 - попадает в область $|x - x_0| < \rho_2$. В соответствии с результатом работы [31],

$$\rho_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^2}} = 0,555567.$$

№	x_i	y_6	Δy_6	Δ_2
1	1,1	1,4206855093	0,0000000545	0,0000000002

Таблица 1. Характеристика численного расчета первого этапа.

Обозначения:

y_6 - приближенное аналитическое решение (3);

Δy_6 - априорная оценка приближенного решения (3);

Δ_2 - апостериорная оценка для приближенного решения (3).

Для апостериорной погрешности оценки Δ_2 в структуре аналитического приближенного решения (3) требуется $N = 9$. Слагаемые с 6 по 9 в общей сумме не превышают требуемую точность. Следовательно аналитическое приближенное решение $\tilde{y}_6(1,1)$ имеет точность $\Delta_6 = 0,0000000002$.

На втором этапе осуществляем аналитическое продолжение.

Задача Коши (1)-(2): $r(x) = 0$,

$$\tilde{y}(1,1) = \tilde{y}_0 = 1,4206855093; \quad \Delta \tilde{y}_0 = 0,0000000002;$$

$$\tilde{y}'(1,1) = \tilde{y}_1 = 0,0841653262; \quad \Delta \tilde{y}_1 = 0,0000000037;$$

$$\tilde{y}''(1,1) = \tilde{y}_2 = 0,4836180225; \quad \Delta \tilde{y}_2 = 0,0000002212;$$

$$x_2 = 1,2.$$

В соответствии с результатом настоящей работы

$$\rho_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{(M + \Delta M + 1)^2}} = 0,554678.$$

Точка $x_2 = 1,2$ удовлетворяет условию результата данной работы. Результаты расчетов представлены в таблице 2.

Обозначения:

$\tilde{y}_6(x)$ - приближенное аналитическое решение (6);

$\Delta \tilde{y}_6$ - априорная оценка приближенного решения (6);

№	x	$\tilde{y}_6(x)$	$\Delta_{\tilde{y}_6}$	Δ_3
1	1,2	1,4344187718	0,0000002994	0,00000025

Таблица 2. Характеристика численного расчета второго этапа.

Δ_3 - апостериорная оценка для приближенного решения (6).

Для заданного Δ_3 в структуре аналитического приближенного решения (6) требуется $N = 9$. Слагаемые с 7 по 9 в общей сумме не превышают требуемой точности Δ_3 . Следовательно приближенное решение \tilde{y}_6 в точке (1, 2) имеет точность Δ_3 .

Выводы

В работе установлена зависимость аналитического приближенного решения задачи Коши (1)-(2) от возмущенных начальных данных. Эта зависимость возникает при осуществлении аналитического продолжения решения задачи Коши (1)-(2) в области аналитичности. Теоретические результаты сопровождаются численным экспериментом. Априорная оценка погрешности решения (6) зависит от двух составляющих. Первая Δ_0 зависит от погрешности начальных данных (5), вторая Δ_1 от структуры решения (6). Вторая составляющая Δ_1 , эффективна при условии $\Delta_1 > \Delta_0$. В противном случае требуется уменьшить величину Δ_0 .

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. Н. Орлов написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, А. Я. Корнилов проведение экспериментов, набор и редактирование текста рукописи, А. В. Воробьева обзор литературы по теме статьи, согласование финальной версии рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V. N. Orlov writing the text of the manuscript, approving the final version of the manuscript, A. Ya. Kornilov conducting experiments, typing and editing the text of the manuscript, A. V. Vorobyeva literature review on the topic of the article, approving the final version of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Feng Yuqiang. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. Vol. 56. P. 2507–2514.
- [2] Чугайнова А. П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2013. Т. 281. С. 204–212. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968513020179>.
- [3] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) // *18 Modelling and Methods of Structural Analysis, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 1425. IOP Publishing, 2020. P. 012127.
- [4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 456. IOP Publishing, 2018. P. 012122.
- [5] Kudryashov N. A., Biswas A., Borodina A. G. et al. Painlevé analysis and optical solitons for a concatenated model // *Optik*. 2023. Vol. 272. P. 170255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170255>.
- [6] Kudryashov N. A. Optical solitons of the Schrödinger–Hirota equation of the fourth order // *Optik*. 2023. Vol. 274. P. 170587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170587>.
- [7] Kudryashov N. A. Dispersive optical solitons of the generalized Schrödinger–Hirota model // *Optik*. 2023. Vol. 272. P. 170365. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170365>.
- [8] Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 1425. IOP Publishing, 2020. P. 012107. DOI: [10.1088/1742-6596/1425/1/012107](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012107).
- [9] Вересович П. П., Яблонский А. И. О подвижных особых точках систем дифференциальных уравнений третьего порядка // *Дифференц. уравнения*. 1977. Т. 13, № 11. С. 1932–1939.
- [10] Писаренко В. П., Яблонский А. И. Дифференциальное уравнение, имеющее решения с алгебраическими подвижными особыми точками // *Дифференц. уравнения*. 1976. Vol. 12, no. 5. P. 928–930.
- [11] Соболевский С. Л. Подвижные особые точки полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения*. 2004. Т. 40, № 6. С. 756–762. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e>.
- [12] Соболевский С. Л. Подвижные особые точки алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения*. 2005. Т. 41, № 8. С. 1092–1099. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9>.
- [13] Filipuk G., Kecker T. On Singularities of Certain Non-linear Second-Order Ordinary Differential Equations // *Results Math*. 2022. Vol. 77. P. 41. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00025-021-01577-1>.
- [14] Filipuk G., Halburd R. G. Movable algebraic singularities of second-order ordinary differential equations // *J. Math. Phys.* 2009. Vol. 50. P. 023509. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3068414>.
- [15] Яблонский А. И., Корзюк А. Ф. Метод построения систем нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка с подвижными полярными особыми точками // *Дифференц. уравнения*. 1987. Т. 23, № 12. С. 2074–2079.
- [16] Яблонский А. И., Корзюк А. Ф. Классы систем третьего порядка с квадратичными правыми частями без подвижных критических точек // *Дифференц. уравнения*. 1989. Т. 25, № 4. С. 635–640.
- [17] Яблонский А. И., Корзюк А. Ф., Мызгаева С. А. О подвижных существенно особых точках решений системы Эйлера // *Дифференц. уравнения*. 1991. Т. 27, № 5. С. 906–909.

- [18] Мартынов И. П., Берёзкина Н. С., Пронько В. А. Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем. Гродно: ГрГУ, 2009. Р. 395.
- [19] Martynov I. P., Chichurin A. V. On the solution of the Chazy system of equations // *Nonlinear Oscillations*. 2009. Vol. 12. P. 94–100.
- [20] Мартынов И. П., Можджер Г. Т. О первых интегралах одного уравнения четвертого порядка // *Дифференц. уравнения*. 2004. Т. 40, № 12. С. 1701–1704.
- [21] Березкина Н. С., Мартынов И. П., Пронько В. А. Об одной системе третьего порядка с кубической нелинейностью // *Дифференц. уравнения*. 1997. Т. 33, № 3. С. 416–417.
- [22] Мартынов И. П. Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве // *Дифференц. уравнения*. 1988. Т. 24, № 9. С. 1640–1641.
- [23] Sasagawa T. On the finite escape phenomena for matrix Riccati equations // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1982. Vol. 27, no. 4. P. 977–979.
- [24] Jackson K. R., Kvaerno A., Nersett S. P. The use of Butcher series in the analysis of Newton-like iterations in Runge-Kutta formulas // *Appl. Numer. Math.* 1994. Vol. 15, no. 3. P. 341–356.
- [25] Данилова Е. И. Исследование характера подвижных особых точек нелинейных дифференциальных систем двух уравнений : Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук / Е. И. Данилова. Минск, 1974. С. 12.
- [26] Dukhnovsky S. A. New exact solutions for the time fractional Broadwell system // *Adv. Stud. Euro-Tbil. Math. J.* 2022. Vol. 15. P. 53–66.
- [27] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. МПГУ, 2013. С. 174.
- [28] Orlov V. Moving Singular Points and the Van der Pol Equation, as Well as the Uniqueness of Its Solution // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 4.
- [29] Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // *Fractal Fract.* 2023. Vol. 7, no. 3.
- [30] Orlov V., Chichurin A. The Influence of the Perturbation of the Initial Data on the Analytic Approximate Solution of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // *Symmetry*. 2023. Vol. 15, no. 6.
- [31] Орлов В. Н., Кудряшова Н. В. Теорема существования решения одного нелинейного дифференциального уравнения. МПГУ, 2013.

REFERENCES

- [1] Feng Yuqiang. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // *Computers and Mathematics with Applications*. 2008. Vol. 56. P. 2507–2514.
- [2] Chugainova A.P. Nonstationary solutions of the generalized Korteweg–de Vries–Burgers equation // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2013. Vol. 281. P. 204–212. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968513020179>. (in Russian).
- [3] Orlov V.N., Kovalchuk O.A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // *Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 1425. IOP Publishing, 2020. P. 012127.
- [4] Orlov V.N., Kovalchuk O.A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. Vol. 456. IOP Publishing, 2018. P. 012122.
- [5] Kudryashov Nikolay A., Biswas Anjan, Borodina Agniya G. et al. Painlevé analysis and optical solitons for a concatenated model // *Optik*. 2023. Vol. 272. P. 170255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170255>.
- [6] Kudryashov Nikolay A. Optical solitons of the Schrödinger–Hirota equation of the fourth order // *Optik*. 2023. Vol. 274. P. 170587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170587>.

- [7] Kudryashov Nikolay A. Dispersive optical solitons of the generalized Schrödinger–Hirota model // *Optik*. 2023. Vol. 272. P. 170365. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170365>.
- [8] Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 1425. 2020. P. 012107. DOI: [10.1088/1742-6596/1425/1/012107](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012107).
- [9] Veresovich P.P., Yablonsky A.I. On moving singular points of systems of differential equations of the third order // *Differential Equations*. 1977. Vol. 13, no. 11. P. 1932–1939. (in Russian).
- [10] Pisarenok V.P., Yablonsky A.I. A differential equation having solutions with algebraic movable singular points // *Differential Equations*. 1976. Vol. 12, no. 5. P. 928–930. (in Russian).
- [11] Sobolevsky S.L. Movable singular points of polynomial ordinary differential equations // *Differents. equations*. 2004. Vol. 40, no. 6. P. 756–762. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e>. (in Russian).
- [12] Sobolevsky S.L. Movable singular points of algebraic ordinary differential equations // *Differents. equations*. 2005. Vol. 41, no. 8. P. 1092–1099. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0260-9>. (in Russian).
- [13] Filipuk G., Kecker T. On Singularities of Certain Non-linear Second-Order Ordinary Differential Equations // *Results Math*. 2022. Vol. 77. P. 41. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00025-021-01577-1>.
- [14] Filipuk G., Halburd R.G. Movable algebraic singularities of second-order ordinary differential equations // *J. Math. Phys.* 2009. Vol. 50. P. 023509. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3068414>.
- [15] Yablonsky A.I., Korzyuk A.F. Method of constructing systems of nonlinear differential equations of arbitrary order with movable polar singular points // *Differents. equations*. 1987. Vol. 23, no. 12. P. 2074–2079. (in Russian).
- [16] Yablonsky A.I., Korzyuk A.F. Classes of third-order systems with quadratic right-hand sides without moving critical points // *Differents. equations*. 1989. Vol. 25, no. 4. P. 635–640. (in Russian).
- [17] Yablonsky A.I., Korzyuk A.F., Myzgaeva S.A. On movable essentially singular points of solutions of the Euler system // *Differents. equations*. 1991. Vol. 27, no. 5. P. 906–909. (in Russian).
- [18] Martynov I.P., Berezkina N.S., Pronko V.A. Analytical theory of nonlinear equations and systems. Grodno: GrGU, 2009. P. 395. (in Russian).
- [19] Martynov I.P., Chichurin A.V. On the solution of the Chazy system of equations // *Nonlinear Oscillations*. 2009. Vol. 12. P. 94–100.
- [20] Martynov I.P., Mozher G.T. On the first integrals of one fourth-order equation // *Differents. equations*. 2004. Vol. 40, no. 11. P. 1559–1564. (in Russian).
- [21] Tsyganov S.K. Exact solutions of the two-dimensional Riccati equation // *Doklady Mathematics*. 2000. Vol. 61. P. 295–299.
- [22] Dubrovsky V.G., Krivonosov S.K. Symmetry analysis and exact solutions of third-order evolution equations // *Mathematics*. 2023. Vol. 11. P. 632. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11030632>.
- [23] Sasagawa T. On the finite escape phenomena for matrix Riccati equations // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1982. Vol. 27, no. 4. P. 977–979.
- [24] Jackson K.R., Kvaerno A., Nersett S.P. The use of Butcher series in the analysis of Newton-like iterations in Runge-Kutta formulas // *Appl. Numer. Math.* 1994. Vol. 15, no. 3. P. 341–356.
- [25] Danilova E.I. Investigation of the nature of mobile singular points of nonlinear differential systems of two equations. 1974. P. 12. Abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Minsk.
- [26] Dukhnovsky S.A. New exact solutions for the time fractional Broadwell system // *Adv. Stud. Euro-Tbil. Math. J.* 2022. Vol. 15. P. 53–66.

- [27] Orlov V.N. The method of approximate solution of the first and second differential equations of Painlevé and Abel. Moscow: MPGU, 2013. P. 174. (in Russian).
- [28] Orlov V. Moving Singular Points and the Van der Pol Equation, as Well as the Uniqueness of Its Solution // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 4.
- [29] Orlov V., Chichurin A. About Analytical Approximate Solutions of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Fractal Fract. 2023. Vol. 7, no. 3.
- [30] Orlov V., Chichurin A. The Influence of the Perturbation of the Initial Data on the Analytic Approximate Solution of the Van der Pol Equation in the Complex Domain // Symmetry. 2023. Vol. 15, no. 6.
- [31] Orlov V.N., Kudryashova N.V. The theorem of the existence of a solution to a third-order nonlinear differential equation with a polynomial right-hand side of the third degree in the field of analyticity // Bulletin of the I. Ya. Yakovlev ChSPU Series: Mechanics of the limit state. 2016. Vol. 27, no. 1. P. 141–149. (in Russian).

Д. А. Чернышов¹, А. С. Бондарев¹, А. В. Ковалев¹

О СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЯ

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе доказана равномерная сходимость функциональных рядов, использованных в более ранних работах при определении напряженно-деформированного состояния сплошного шара, выполненного из упрочняющегося упруговязкопластического материала и подвергнутого равномерному тепловому воздействию, вместе с их частными производными. Кроме того, выполнена оценка остатков указанных рядов, что позволяет определить конечное количество их членов, достаточное для проведения численного анализа результатов.

Ключевые слова: температурные напряжения, упругость, пластичность, вязкость, функциональный ряд, равномерная сходимость.

Чернышов Данил Алексеевич, преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования; e-mail: chernyshov.danil@gmail.com;
<https://orcid.org/0000-0003-4460-6656>; AuthorID: 1149996

Бондарев Андрей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений; e-mail: bondarev@math.vsu.ru;
AuthorID: 900361

Ковалев Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования; e-mail: kav-mail@mail.com;
<https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

для цитирования: Чернышов Д. А., Бондарев А. С., Ковалев А. В. О сходимости функциональных рядов, применяемых при решении задач термодформирования // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 51–59. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.004
EDN: AFGMNA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. A. Chernyshov¹, A. S. Bondarev¹, A. V. Kovalev¹

ON THE CONVERGENCE OF FUNCTIONAL SERIES USED IN SOLVING THERMAL DEFORMATION PROBLEMS

¹ Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, the uniform convergence of functional series with their partial derivatives is approved. These series are used in previous researches to determine of the stress-strain state of a solid sphere which is made of the elastoviscoplastic material with hardening and subjected to uniform heat exposure. The remainder term of the series is also estimated. This fact makes it possible to to determine the enough finitesimal number of terms to carry out a numerical analysis of the results.

Keywords: thermal stress, elasticity, plasticity, viscosity, functional series, uniform convergence

Danil A. Chernyshov, Academic of the Department of Mechanics and Computer Modeling; e-mail: chernyshov.danil@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-4460-6656>; AuthorID: 1149996

Andrei S. Bondarev, PhD. Sci. Phys. & Math., Associate Professor of the Department of Functional Analysis and Operation Equations; e-mail: bondarev@math.vsu.ru;

AuthorID: 900361

Alexey V. Kovalev, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling; e-mail: kav-mail@mail.com;

<https://orcid.org/0000-0002-3730-9621>; AuthorID: 11051

to cite this article: Chernyshov D. A., Bondarev A. S., Kovalev A. V. On the Convergence of Functional Series Used in Solving Thermal Deformation Problems // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 51–59. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.004 EDN: AFGMNA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В работе [1] были получены аналитические решения начально-краевой задачи о деформировании сплошного шара, подверженного воздействию нестационарного температурного поля и проявляющего упругие, пластические, упрочняющиеся и вязкие свойства. Позже данные результаты были подтверждены в [2] посредством проведения численного моделирования методом конечных элементов.

Однако решения в указанных выше работах были получены в предположении, что выполняются условия применимости формулы Грина [3, с. 123, замечание 2]. В свою очередь, это связано с непрерывностью решения со своими частными производными первого порядка по пространственной координате в замкнутой области $r \in [0, R], t \geq 0$ и непрерывностью частных производных второго порядка в интервале $r \in (0, R)$. Здесь r — радиальная координата, $R > 0$ — радиус шара, t — время.

Таким образом, необходимо проведение дополнительного исследования сходимости полученных функциональных рядов с целью подтверждения их соответствия начально-краевой задаче.

Доказательство. Уравнение теплопроводности вместе с краевыми условиями для рассматриваемой задачи в случае сферической симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} &= \vartheta \left(\frac{2}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \right), \\ T(r, 0) &= T_0, \\ \frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} &= 1 - e^{-xt}, \\ T(0, t) &\neq \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $T(r, t)$ — распределение температуры шара по радиусу; T_0 — начальная температура тела; T_m — температура окружающей среды; $\vartheta > 0$ — коэффициент теплопроводности; $x > 0$ — скорость нагрева поверхности.

Согласно [1], решение начально-краевой задачи (1) в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, t) &= \frac{T(\xi, t) - T_0}{T_m - T_0} = \\ &= 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right], \end{aligned} \tag{2}$$

где $\xi = r/R$ — безразмерный радиус.

Докажем равномерную сходимость функционального ряда (2), воспользовавшись мажорантным признаком Вейерштрасса [4, с. 86, теорема 4]. Для этого проведем оценку сверху его членов $u_n(\xi, t)$ ($n \geq 1$) по абсолютной величине

$$\begin{aligned}
|u_n(\xi, t)| &= \left| 2(-1)^n \cdot \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \cdot \frac{x \cdot \left[e^{-\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} t} - e^{-xt} \right]}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \right| = \\
&= 2x e^{-xt} \cdot \left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| \cdot \frac{\left| e^{-\left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x\right)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned}
e^{-xt} &\leq 1, \\
\left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| &\leq 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда из (3) с учетом (4) следует, что

$$2x e^{-xt} \cdot \left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| \cdot \frac{\left| e^{-\left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x\right)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|} \leq 2x \cdot \frac{\left| e^{-\left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x\right)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|}. \tag{5}$$

Рассмотрим последний множитель в правой части (5). Введем замену $\rho = t \cdot \left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right)$ и проверим, является ли точка $\rho = 0$ точкой разрыва.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t = t. \tag{6}$$

Поскольку предел в (6) существует и конечен, то точка $\rho = 0$ является точкой устранимого разрыва.

Далее определим поведение рассматриваемой функции на луче $\rho > -x \cdot t$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho} \left(\frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t \right) &= \frac{\operatorname{sgn}(e^{-\rho} - 1) (-e^{-\rho}) |\rho| - |e^{-\rho} - 1| \operatorname{sgn}(\rho)}{|\rho|^2} \cdot t = \\
&= t \cdot \frac{1 - (\rho + 1)e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot \operatorname{sgn}(\rho) \cdot \operatorname{sgn}(e^{-\rho} - 1) = \\
&= \frac{t \cdot e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot [e^{\rho} - (\rho + 1)] \cdot \begin{cases} 1 \cdot (-1), & \rho > 0 \\ (-1) \cdot 1, & \rho < 0 \end{cases} = \frac{t \cdot e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot [(\rho + 1) - e^{\rho}].
\end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, что первый множитель в правой части (7) неотрицателен. Кроме того, можно показать, что $[(\rho + 1) - e^{\rho}]$ обращается в нуль при $\rho = 0$, возрастает при $\rho < 0$ и убывает при $\rho > 0$, т.е. для любого ρ справедливо неравенство $[(\rho + 1) - e^{\rho}] \leq 0$. Таким образом,

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t \right) \leq 0. \tag{8}$$

Тогда максимум функции $\frac{|e^{-\rho}-1|}{|\rho|} \cdot t$ достигается на левом конце интервала, на котором определено ρ , т.е. при $n = 1$.

Таким образом, из (6)–(8) следует, что все множители в правой части (5) принадлежат множеству $\mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$. Далее без ограничения общности будем рассматривать члены ряда, начиная с такого n_0 , что $\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x > 0$. При этом сумма первых $n_0 - 1$ членов будет конечным числом. Тогда можно оценить правую часть в (5)

$$2x \cdot \frac{\left| e^{-(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|} \leq \frac{2x}{\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x} = \frac{2 \cdot \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}{n^2 - \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}. \quad (9)$$

Из выше изложенного следует, что члены исходного функционального ряда, начиная с некоторого n_0 могут быть мажорированы числовым рядом

$$|u_n(\xi, t)| \leq \frac{2 \cdot \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}{n^2 - \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}} = a_n. \quad (10)$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши-Маклорена [4, с. 26, теорема 10] для доказательства сходимости ряда, составленного из правых частей (10). Введем замену вида $\tau = \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}$ и вычислим несобственный интеграл

$$I = \int_{n_0}^{+\infty} \frac{2\tau^2}{n^2 - \tau^2} dn = \tau \cdot \ln \left(\frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau} \right). \quad (11)$$

Поскольку n_0 выбирался таким образом, что $n_0 - \tau > 0$, а $\tau \in \mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$, то и $I \in \mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$, т.е. несобственный интеграл I сходится. Следовательно, мажорантный числовой ряд также сходится согласно интегральному признаку Коши-Маклорена, а исходный функциональный ряд сходится равномерно согласно мажорантному признаку Вейерштрасса. Кроме того, можно утверждать, что данный функциональный ряд достаточное количество раз дифференцируем и интегрируем согласно [4, с. 99, теорема 9] и [4, с. 102, теорема 10] соответственно.

Проведем оценку остаточного члена функционального ряда. Пусть r_n — остаток мажорантного числового ряда, s_n — остаток исходного функционального ряда. Тогда

$$|u_n(\xi, t)| \leq a_n \implies r_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n(\xi, t)| \geq \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(\xi, t) \right| = |s_n|. \quad (12)$$

Следствием признака интегральной сходимости Коши-Маклорена [4, с. 26, теорема 10] является оценка остатка ряда

$$r_n \leq I \leq \varepsilon, \quad (13)$$

где $\varepsilon > 0$ — требуемая точность.

Подберем такое n_0 , чтобы выполнялось условие (13):

$$\tau \cdot \ln \left(\frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau} \right) \leq \varepsilon \implies n_0 \geq \left\lceil \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}} - 1} \right\rceil. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что оценка (14) не противоречит исходному предположению касательно выбора порядкового номера члена ряда n_0 .

Таким образом, доказана равномерная сходимость полученного функционального ряда температуры и, как следствие, применимость формулы Грина для задачи теплопроводности.

Следуя [1], можно показать, что выражения для напряжений, перемещений и деформаций в различных областях шара в общем виде являются линейными комбинациями величин

$$\Theta \left(\frac{r}{R}, t \right), \quad \frac{1}{r_2^3} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot \Theta \left(\frac{r}{R}, t \right) dr, \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Theta \left(\frac{r}{R}, t \right)}{r} dr, \quad (15)$$

где r_1 и r_2 — некоторые координаты на отрезке $r \in [0, R]$.

Оценим функциональные ряды, входящие во второе и третье выражения, последовательно применяя теорему о почленном интегрировании рядов [4, с. 99, теорема 9] и теорему о среднем [5, с. 604, теорема 1].

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{r_2^3} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{r}{R}, t \right) dr \right| = \frac{1}{r_2^3} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot u_n \left(\frac{r}{R}, t \right) dr \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{r_2^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cdot u_n \left(\frac{r}{R}, t \right) dr \right| = \frac{1}{r_2^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left| r_c^2 \cdot u_n \left(\frac{r_c}{R}, t \right) \cdot (r_2 - r_1) \right| = \\ & = \frac{r_c^2 \cdot (r_2 - r_1)}{r_2^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \left(\frac{r_c}{R}, t \right) \right| \leq \frac{r_2^2 \cdot r_2}{r_2^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{r}{R}, t \right) dr \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} \frac{u_n \left(\frac{r}{R}, t \right)}{r} dr \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{u_n \left(\frac{r}{R}, t \right)}{r} dr \right| = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{u_n \left(\frac{r_c}{R}, t \right)}{r_c} \cdot (r_2 - r_1) \right| = \frac{r_2 - r_1}{r_c} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \left(\frac{r_c}{R}, t \right) \right| \leq \frac{r_2}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $r_c \in [r_1; r_2]$ — некоторая точка, согласно теореме о среднем.

Таким образом, функциональные ряды, входящие в выражения (15), мажорируются сходящимися числовыми рядами и, как следствие, сходятся, а их остаточные члены не превышают по модулю величин r_n , r_n и $\frac{r_2}{r_1} \cdot r_n$ соответственно.

Как было отмечено ранее, выражения для напряжений, перемещений и деформаций являются линейными комбинациями величин (15). Поэтому их остаточные члены по абсолютной величине будут не превосходить линейной комбинации остаточных членов указанных рядов с коэффициентами, взятыми по модулю. В краткой форме данный факт запишется в виде

$$A \cdot r_n + B \cdot r_n + C \cdot r_n \leq \varepsilon. \quad (18)$$

Здесь A , B , C — неотрицательные числа, являющиеся суммами абсолютных значений коэффициентов линейного разложения относительно величин вида (15) соответственно.

С учетом оценки остаточного члена ряда r_n (13) подберем такое n_0 , чтобы выполнялось условие (18):

$$D \cdot \tau \cdot \ln \left(\frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau} \right) \leq \varepsilon \implies n_0 \geq \left[\frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon}{D \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}} + 1}}{e^{\frac{\varepsilon}{D \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}} - 1}} \right], \quad (19)$$

где $D = A + B + C$ — суммарный передаточный коэффициент.

На рис. 1 представлена зависимость оценки вида (19) остатка функциональных рядов, описывающих напряжения, перемещения и деформации в теле, от выбранного количества их членов для различных значений комплекса τ и передаточного коэффициента D в двойных логарифмических координатах. Нетрудно видеть, что при увеличении каждой из этих характеристик, зависящих от физико-механических свойств материала шара, его геометрических размеров и параметров нагрева (охлаждения), для достижения одной и той же точности требуется вычисление большего количества членов.

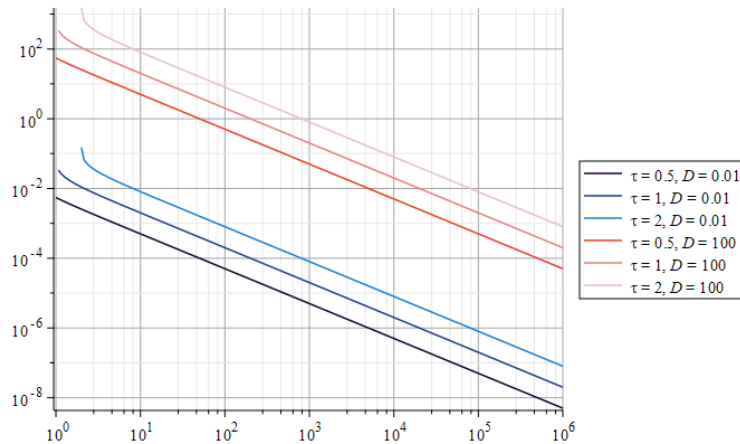


Рис. 1. Зависимость оценки остаточного члена ряда от количества его членов

Следует также заметить, что полученные оценки достаточного количества членов ряда (14) и (19) могут быть уточнены и существенно зависят от текущего момента времени. Например, при малых t функциональные ряды (15) сходятся медленно. В этом случае решение (2) может быть преобразовано с использованием свойств тэта-функции Якоби [6], формулы суммирования Пуассона [7] или операторным методом [3, глава IV]. Однако, начиная с некоторого момента времени t^* , ряды (15) становятся настолько быстроходящимися, что их первый член преобладает над суммой всех остальных членов. В таком случае можно утверждать, что $n_0 = 1$.

Заключение. В ходе выполнения исследования была доказана равномерная сходимости функциональных рядов, применяемых при определении напряженно-деформированного в задаче термодетормирования сплошного шара, выполненного из упрочняющегося упруговязкопластического материала, вместе с их частными производными, что подтверждает выполнения условий применимости формулы Грина и, как следствие, корректность полученного решения. Кроме того, проведена оценка остаточных членов указанных рядов с учетом их зависимости от комплекса $\frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}$ и передаточного коэффициента, возникающего при переходе от ряда, описывающего температуру тела, к рядам для напряжений, перемещений и деформаций, и получено выражение для определения количества членов ряда, достаточного для вычислений с заданной точностью.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Д. А. Чернышов написание текста рукописи, А. С. Бондарев обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи, А. В. Ковалев согласование финальной версии рукописи

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. D. A. Chernyshov writing the text of the manuscript, A. S. Bondarev reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript, A. V. Kovalev agreeing on the final version of the manuscript

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чернышов Д. А., Ковалев А. В. Термодетормирование тела со сложной реологией в условиях сферической симметрии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 4. С. 70–84. EDN: IGJKZT. DOI: 10.31857/S0572329922030059.
- [2] Чернышов Д. А., Малыгина Ю. В., Ковалев А. В. К моделированию поведения упрочняющегося упруговязкопластического шара под воздействием температурного поля // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. 2024. Р. 1213–1220.

- [3] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. Москва: Высшая школа, 1979. P. 415.
- [4] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 2-е издание. Том 2. Москва: Высшая школа, 1988. P. 588. ISBN: 5-06-001452-5.
- [5] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 2-е издание. Том 1. Москва: Высшая школа, 1988. P. 712. ISBN: 5-06-001290-5.
- [6] Градштейн И. М., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физматгиз, 1963. P. 1100.
- [7] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Москва: Наука, 1964. P. 488.

REFERENCES

- [1] Chernyshov D. A., Kovalev A. V. Thermal Deformation Of a Body With Complex Rheology Under Conditions Of Spherical Symmetry // Mechanics of Solids. 2022. no. 4. P. 740–753. EDN: PEJUSP. DOI: 10.3103/s0025654422040045.
- [2] Chernyshov D. A., Malygina Y. V., Kovalev A. V. Modeling Of Behavior Of the Elastoviscoplastic Sphere With Hardening Under the Influence Of Temperature Field // Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. 2024. P. 1213–1220. in russian.
- [3] Kartashov E. M. Analytical Methods for Thermal Conductivity Theory Of Solid Bodies. Moscow: High School, 1979. P. 415. in russian.
- [4] Kudryavcev L .D. The Course Of Mathematical Analysis. 2nd edition. Vol. 2. Moscow: High School, 1988. P. 588. ISBN: 5-06-001452-5. in russian.
- [5] Kudryavcev L .D. The Course Of Mathematical Analysis. 2nd edition. Vol. 1. Moscow: High School, 1988. P. 712. ISBN: 5-06-001290-5. in russian.
- [6] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of Integrals, Series, and Products. Moscow: Fizmatgiz, 1963. P. 1100. in russian.
- [7] Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction Of Heat In Solids. Moscow: Nauka, 1964. P. 488. in russian.

М. А. Бахмисова, Е. Г. Гоник, Л. А. Сакмарова

РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНОЙ ОГРАЖДАЮЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ СТЕНЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНИХ СИЛ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе выполнен расчет на несущую способность многослойной ограждающей конструкции стены с жесткими связями при действии внешних сил и температуры. Для исследования и расчета была запроектирована и рассчитана наружная ограждающая конструкция нового здания. Расчет выполнен согласно [4-7].

Ключевые слова: многослойная ограждающая конструкция, несущая способность, расчет, нагрузки.

Сакмарова Лариса Алексеевна, кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой архитектуры и дизайна среды, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия; e-mail: lara.sakmarova@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-1457-7383>; AuthorID: 733505

Гоник Екатерина Григорьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия; e-mail: katty.gonik@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6021-1390>; AuthorID: 841879

Бахмисова Мария Алексеевна, аспирант кафедры архитектуры и дизайна среды, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия; e-mail: masha_a94@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2066-7932>; AuthorID: 923740

для цитирования: Бахмисова М. А., Гоник Е. Г., Сакмарова Л. А. Расчет многослойной ограждающей конструкции стены при воздействии внешних сил и температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 60–70. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.005 EDN: BRASJN

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

M. A. Bakhmisova, E. G. Gonik, L. A. Sakmarova

THE CALCULATION OF A MULTILAYER ENCLOSING WALL STRUCTURE UNDER THE INFLUENCE OF EXTERNAL FORCES AND TEMPERATURE

I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The study presents a calculation of the load-bearing capacity of a multi-layer wall enclosure structure with rigid connections under the influence of external forces and temperature. For the purpose of analysis and calculation, the external enclosing structure of a new building was designed and calculated. The calculation was performed in accordance with [4-7].

Keywords: Multilayer enclosure structure, load-bearing capacity, calculation, loads.

Larisa A. Sakmarova, Ph. D.; e-mail: lara.sakmarova@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-1457-7383>; AuthorID: 733505

Ekaterina Gonik G., Ph. D.; e-mail: katya.gonik@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-6021-1390>; AuthorID: 841879

Maria Bakhmisova A., Post Graduate Student; e-mail: masha_a94@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-2066-7932>; AuthorID: 923740

to cite this article: *Bakhmisova M. A., Gonik E. G., Sakmarova L. A.* The calculation of a multilayer enclosing wall structure under the influence of external forces and temperature // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60), p. 60–70. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.005 EDN: BRASJN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В настоящее время наружные стены зданий необходимо проектировать таким образом, чтобы они обеспечивали требуемую несущую способность, теплотехнические характеристики конструкций и температурно-влажностный режим согласно [1–8]. Наружные несущие стены, состоящие из нескольких слоев, могут разрушаться в процессе эксплуатации при несоблюдении требований [4].

1. Цель работы. Определение несущей способности наружной стены жилого здания с жесткими связями при действии внешних нагрузок и температуры.

Объектом для исследования было выбрано здание, построенное в г. Чебоксары. Объемно-планировочные решения жилого дома разработаны в соответствии с градостроительными, функциональными и технологическими требованиями [5]. Проектируемый объект имеет размеры в плане по осям 56,23x71,69м. Конфигурация здания имеет блочную структуру и состоит из 4 блок-секций. В блок-секциях “А-Г” – 9 жилых этажей. Высота типового этажа – 2,7 м (от пола до низа перекрытия), высота 9-го этажа – 3,0 м (от пола до низа перекрытия).

Наружные ограждающие конструкции – стены надземных этажей выполнены из крупноформатных пустотных керамических камней Римкер 2,15 НФ М150 F50 ($\gamma = 900 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_B = 0,23 \text{ Вт/м}^\circ\text{С}$). Перевязка лицевого слоя с основной кладкой – жесткая, один тычковый ряд на 4 ряда лицевой кладки. Толщина наружных стен 640 мм.

Перекрытия и покрытия выполнены из сборных железобетонных плит - многопустотных предварительно напряженных стенового без опалубочного формирования по серии ИЖ 998 выпуск 1, 2, 3 толщиной 220мм. Плиты опираются на наружную ограждающую конструкцию.

Кровля над чердаком – инверсионная с внутренним водостоком, из наплавленного рулонного битумно-полимерного материала “Техноэласт” в 2 слоя; утеплитель кровли – экструдированный пенополистирол ($\gamma = 35 \text{ кг/м}^3$, $\lambda/B = 0,032 \text{ Вт/м}^\circ\text{С}$), пароизоляция - наплаваемый рулонный битумно-полимерный материал “Технониколь”, для создания уклона используется керамзитовый гравий ($\gamma = 400 \text{ кг/м}^3$), поверх которого устраивается армированная стяжка из цементно-песчаного раствора М150.

2. Расчет простенка наружной стены первого этажа. Проанализировав всю наружную стену здания рис.1, к расчету был принят простенок 1 этажа шириной 1160 мм, обозначенный узлом 1. Стена является несущей. Нормативная объемная масса (плотность) кладки: $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3 = 12 \text{ кН/м}^3$.

3. Сбор нагрузок на простенок. Расчетные нагрузки для простенка определены согласно [6] и приведены в таблице 1.

Расчет ведется по методике, описанной в [4].

Расчетная высота:

$$H = H_{ЭТ} - 300(\text{толщина пола этажа}) = 3000 - 300 = 2700 \text{ мм.} \quad (1)$$

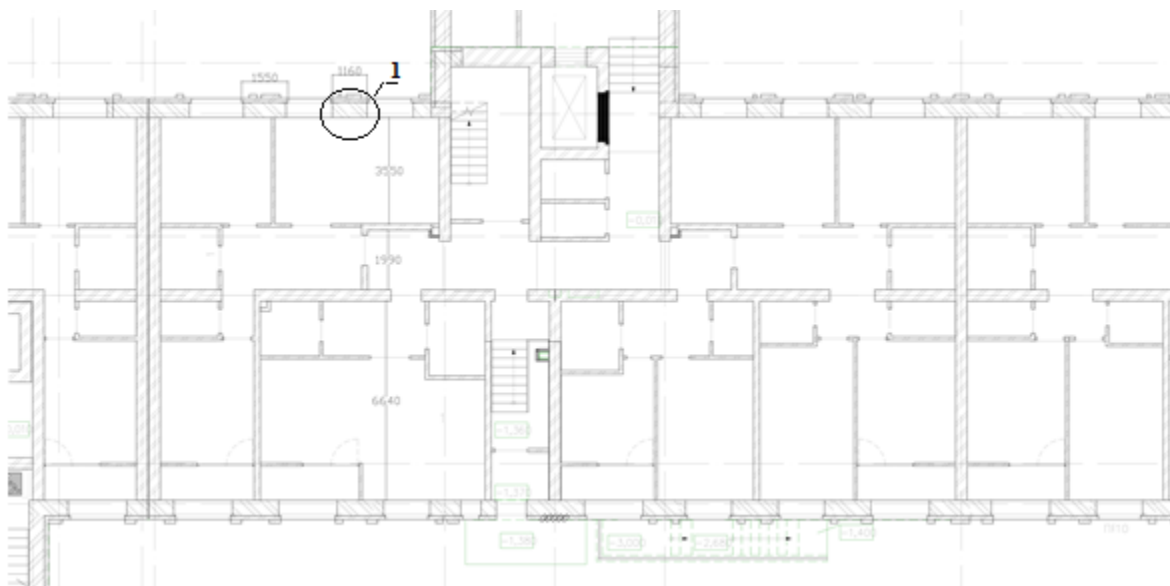


Рис. 1. Фрагмент плана секционного многоквартирного жилого дома.

Длина расчетного участка будет, согласно рис.1:

$$L_k = 1550/2 + 1160 + 1550/2 = 2710 \text{ мм.} \quad (2)$$

Глубина грузовой площади сбора нагрузок на простенок с покрытия и перекрытий каждого этажа:

$$L_{\text{пр}} = \frac{3550 + 200 + 1990}{2} = 2870 \text{ мм.} \quad (3)$$

Грузовая площадь:

$$S = L_{\text{пр}} \cdot L_{\text{п}} = 2,87 \cdot 2,71 = 7,78 \text{ м}^2. \quad (4)$$

Вес от покрытия:

$$N_{\text{покр}} = 9462 \cdot 7,78 = 73,6 \text{ кН} \quad (5)$$

Вес от перекрытий, рис.2:

$$N_{\text{перекр}} = 8980 \cdot 7,78 \cdot 9 (\text{кол-во этажей}) = 628,8 \text{ кН.} \quad (6)$$

Вес стены:

– вес парашетной части $\delta = 510$ мм с высотных отметок от +29,080 до +30,955:

$$0,51 \cdot (30,955 - 29,080) \cdot 2,71 \cdot 12 = 31,1 \text{ кН} \quad (7)$$

– вес стены за вычетом проемов для остекления:

$$0,64 \cdot (2,71 \cdot (29,080 - 2,46) - 1,79 \cdot 1,55 \cdot 8) \cdot 12 = 383,6 \text{ кН} \quad (8)$$

– вес кладки стены

$$N_{\text{кл}} = 31,1 + 383,6 = 414,7 \text{ кН.} \quad (9)$$

Нагрузки	Нормативная нагрузка, Па	Коэффициент надежности по нагрузке	Расчетная нагрузка, Па
Покрытие			
Собственный вес железобетонных плит покрытия $\delta = 220$ мм	4000	1,1	4400
Пароизоляция - наплаваемый рулонный битумно-полимерный материал "Технониколь"	2	1,3	2,6
Утеплитель- пенополистирол ($\gamma = 35$ кг/м ³ , $\lambda/B = 0,032$ Вт/м ^{°C}), $\delta = 280$ мм	90	1,3	117
Разуклонка -керамзитовый гравий 400кг/м ³ , $\delta = 10-150$ мм	40	1,3	52
Стяжка из цементно-песчаного раствора М150 ($\delta = 40$ мм), армированная сеткой	800	1,3	1040
Гидроизоляция - наплаваемый рулонный битумно-полимерный материал "Техноэласт" в 2 слоя	108	1,3	140,4
Итого:	5040	–	5752
Временная нагрузка в чердачном помещении	700	1,3	910
Снеговая нагрузка	2000	1,4	2800
Итого:	2700	–	3710
ВСЕГО:	7740	–	9462
Междуэтажные перекрытия			
Железобетонная плита $\delta = 220$ мм	4000	1,1	4400
Утеплитель- пенополистирол ($\gamma = 35$ кг/м ³ , $\lambda/B = 0,032$ Вт/м ^{°C}), $\delta = 50$ мм	20	1,3	26
Стяжка из цементного раствора толщиной $\delta = 25$ мм	450	1,3	585
Линолеум на мастике $\delta = 5$ мм	52	1,3	67,6
Вес от перегородок	1500	1,3	1950
Итого:	6022	–	7030
Временная нагрузка	1500	1,3	1950
ВСЕГО:	7522	–	8980

Таблица 1.

Вес стены с учетом штукатурки и заполнения оконных проемов:

$$N_{СТ} = 1,075 \cdot 414,7 = 445,8 \text{ кН.} \quad (10)$$

Суммарная нормальная сила N в расчетном сечении H простенка:

$$N = 73,6 + 628,8 + 445,8 = 1148,2 \text{ кН.} \quad (11)$$

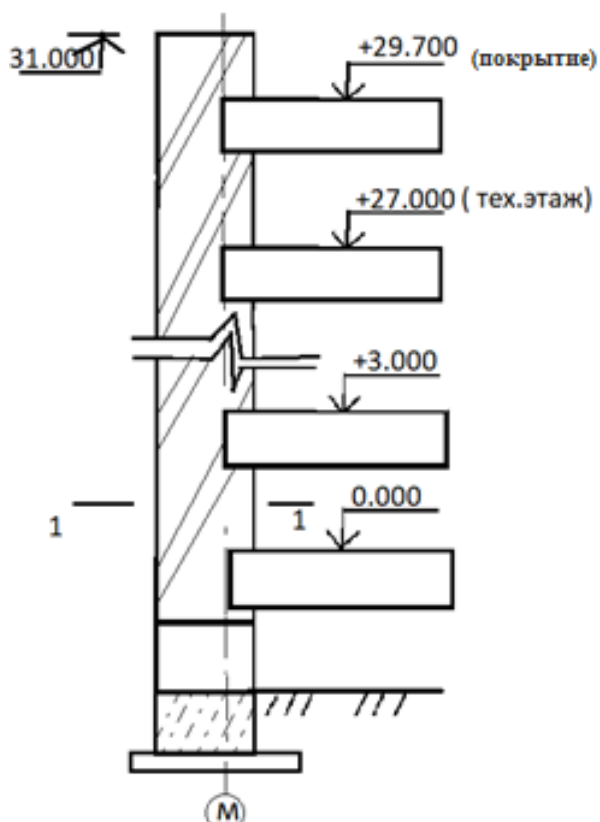


Рис. 2. Разрез по вертикали наружной стены.

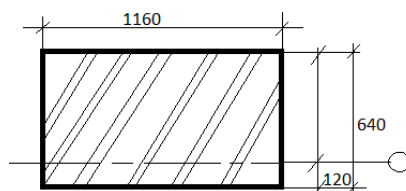


Рис. 3. Разрез простенка. Расчетное сечение.

Определение изгибающего момента M и эксцентриситета e_0 в расчетном сечении 1-1

Нагрузка от перекрытия 1 этажа:

$$N_{1ЭТ} = 8980 \cdot 7,78 = 69,86 \text{ кН.} \quad (12)$$

Изгибающий момент M пер в уровне опирания плиты перекрытия 1 этажа:

$$M_{\text{пер}} = N_{1ЭТ} \cdot e = 69,86 \cdot 0,28 = 19,6 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (13)$$

Расчетная высота простенка: $H = 2,7 \text{ м}$

Момент M в расчетном сечении 1-1 от нагрузки с перекрытия и с учетом момента от веса пояса стены над окнами 1 этажа.

$$M = 19,6 \cdot (1,8/2,7) = 13,07 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad (14)$$

где $H_1 = 1,8$ – расстояние до сечения 1-1.

Эксцентриситет e_0 в сечении 1-1:

$$e_0 = 13,07/1148,2 = 0,011 \text{ м} \leq 0,35h = 0,35 \cdot 0,64 = 0,224 \text{ м}. \quad (15)$$

Условие выполняется, следовательно расчет простенка необходимо производить только по несущей способности.

Расчет простенка выполняется согласно [4] по формуле 7.4 как внецентренно сжатых элементов неармированных каменных конструкций:

$$N \leq m_g \cdot \varphi_1 \cdot R_{\text{ТР}} \cdot A_c \cdot \omega. \quad (16)$$

Из 4 находим требуемое расчетное сопротивление неармированной кладки:

$$R_{\text{ТР}} = N / (m_g \cdot \varphi_1 \cdot R_{\text{ТР}} \cdot A_c), \quad (17)$$

где $\omega = 1$ – коэффициент, принимаемый по таблице 7.2 [4], $m_g = 1$ – коэффициент, учитывающий влияние длительной нагрузки при $h \geq 30 \text{ см}$.

Коэффициент продольного изгиба по 7.6 [4]:

$$\varphi_1 = (\varphi + \varphi_c) / 2. \quad (18)$$

Упругая характеристика $\alpha = 1200 \cdot 0,7 = 840$ для кладки из крупноформатных керамических камней при марках раствора 25-200.

Гибкость приведенного простенка:

$$\lambda_h = (H/h) = 2,7/0,64 = 4,22 \quad (19)$$

Гибкость сжатой части сечения простенка:

$$\lambda_{hc} = H / (h - 2e_0) = 2,7 / (0,64 - 2 \cdot 0,011) = 4,37 \quad (20)$$

По таблице 7.1 [4] находим:

$$\varphi = 0,959 (\lambda_{hc} = 4,22)$$

$$\varphi_c = 0,962 (\lambda_{bc} = 4,37)$$

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \varphi_c}{2} = \frac{0,959 + 0,962}{2} = 0,96. \quad (21)$$

Площадь сжатой части сечения A_c при прямоугольной эпюре напряжений, определяется из условия, что ее центр тяжести совпадает с точкой приложения расчетной продольной силы N .

$$A_c = A \left(1 - \frac{2e_0}{h} \right) = 0,742 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0,011}{0,64} \right) = 0,716 \text{ м}^2 \quad (22)$$

Площадь простенка, рис.3.:

$$A = 1,16 \cdot 0,64 = 0,742 \text{ м}^2.$$

Требуемое расчетное сопротивление кладки:

$$R_{\text{тр}} = \frac{N}{m_g \cdot \varphi_1 \cdot A_c \cdot \omega} = \frac{1148,2}{1 \cdot 0,96 \cdot 0,716 \cdot 1} = 1,67 \text{ МПа.} \quad (23)$$

В принятой наружной стене использовали крупноформатный керамический камень марки М150 на растворе марки М100. По таблице 1 [4] расчетное сопротивление сжатию кладки: $R = 2,4$ МПа. Принятое сопротивление больше требуемого расчетного сопротивления.

$$R_{\text{тр}} \leq R, \quad (24)$$

$$1,67 \leq 2,4.$$

Условие выполняется, следовательно несущая способность наружной стены при действии вертикальных силовых внешних нагрузок обеспечивается.

Дополнительное напряжение будет также создаваться от действия температуры. Напряжения будут максимальными в зимний период года от низких температур. При действии температуры напряжение будет считаться по формулам [9]:

$$\sigma_t = E\alpha\Delta t = 0,49 \text{ МПа,} \quad (25)$$

где $\alpha = 0,0000065 \text{ град}^{-1}$ – коэффициент линейного расширения кладки.

Модуль деформации кладки

$$E = 0,5E_0 = 1663 \text{ МПа.} \quad (26)$$

Модуль упругости кладки

$$E_0 = aR_u = 3326 \text{ МПа,} \quad (27)$$

где $a = 840$ – упругая характеристика по таблице 1 [4].

Изменение температуры по толщине стены определим по графику изополя температур, построенным в ПК Лира-САПР, рис.4.

$$\Delta t = 28,03 + 17,52 = 45,55^\circ\text{C}.$$

Напряжения, возникающие от внешних сил и температуры меньше, чем расчетное сопротивление кладки наружной стены. Следовательно, прочность наружной стены с жесткими связями обеспечивается.

Расчет наружной стены на действие внешних сил и температуры, был выполнен в программном комплексе Лира-САПР рис.5.

Мозаика температур

Единицы измерения - °C

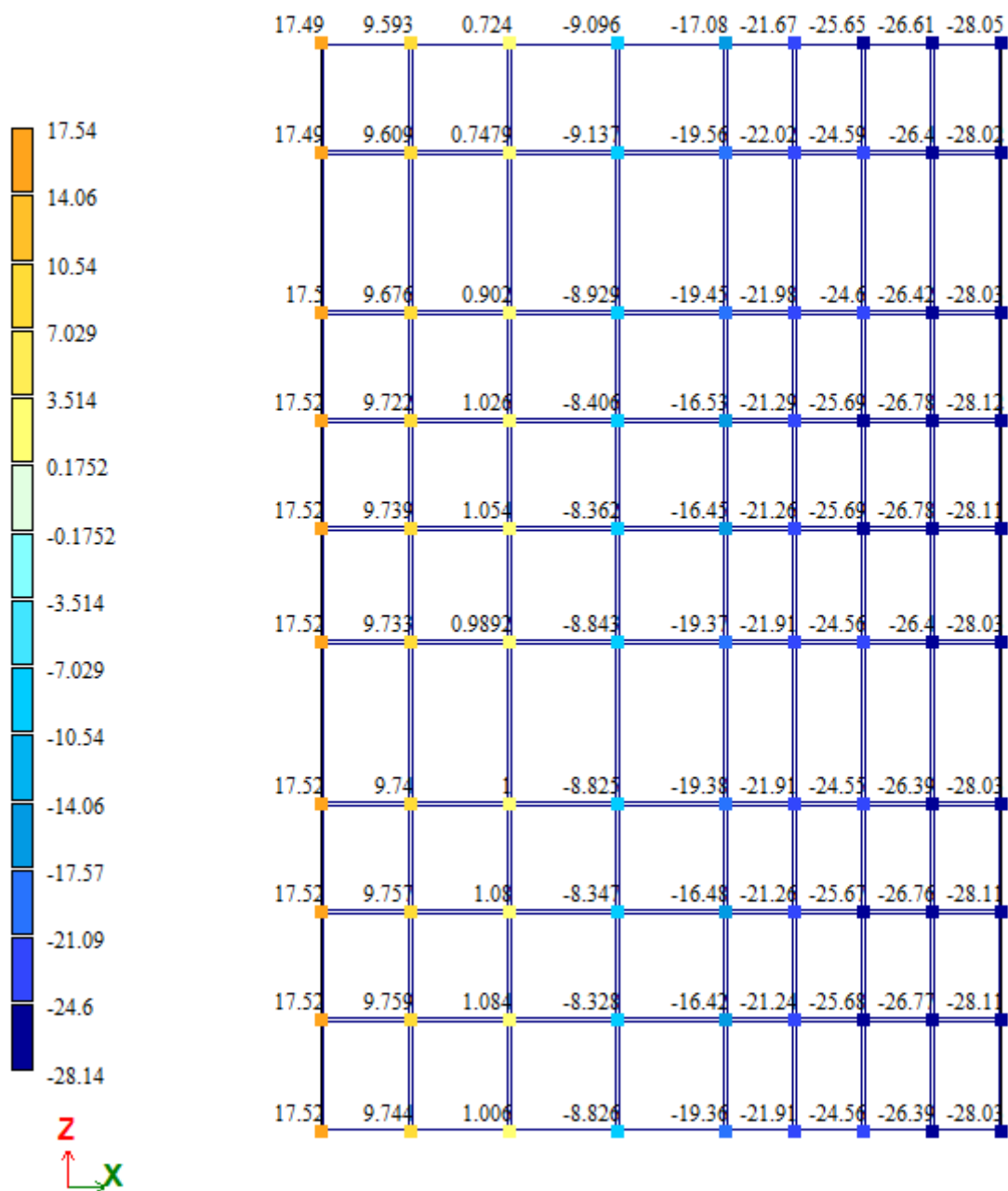


Рис. 4. Изополя температур (фрагмент).

Максимальное напряжение возникает в уровне первого этажа здания и равно 1,488МПа. Полученные данные отличаются на 11% от вышеприведенного

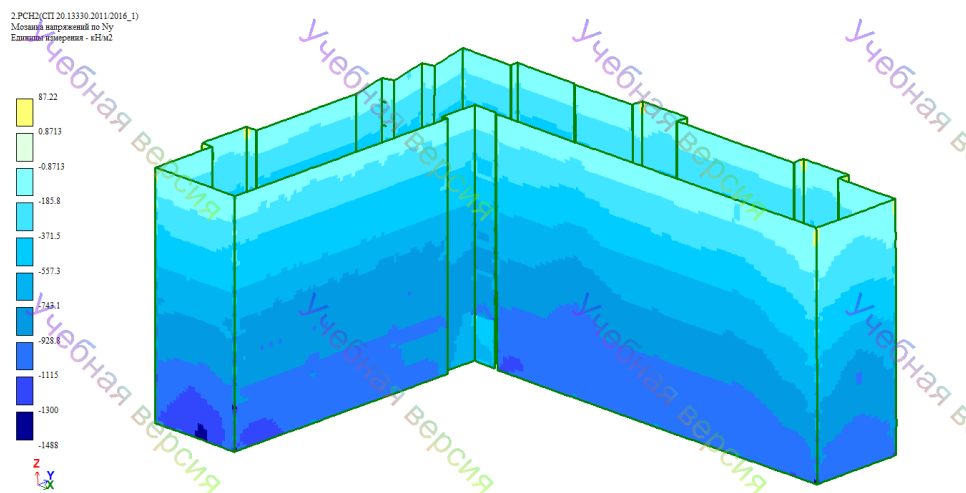


Рис. 5. Мозаика напряжений от действия внешних сил и температуры.

расчета. Принятое расчетное сопротивление кладки больше, чем напряжения, возникающие от действия внешних сил и температуры.

4. Выводы.

- (1) Рассчитан простенок с учетом требований [4-7]. Условие по несущей способности выполняется.
- (2) Совместное напряжение, возникающие от внешних сил и температуры меньше, чем расчетное сопротивление кладки наружной стены. Следовательно, прочность наружной стены с жесткими связями обеспечивается.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors' contributions are equal.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Петров М.В., Бахмисова М.А. Разработка многослойной ограждающей конструкции и проверка прочности подсистемы при температурных воздействиях // Строительство и застройка: жизненный цикл – 2020: Материалы V Междунар. (XI Всерос.) конф. Чебоксары : ИД «Среда», 2020. С. 97–104.

- [2] Бахмисова М.А., Сакмарова Л.А. Цифровизация, информационное моделирование и проектирование в учебном процессе // Новые компетенции цифровой реальности: теория и практика их развития у обучающихся. Чебоксары : Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, 2022. С. 22–30.
- [3] Бахмисова М.А., Гоник Е.Г., Сакмарова Л.А., Плотников А.Н. Гибкие связи в многослойной ограждающей конструкции // Строительство и застройка: жизненный цикл - 2022: Материалы VI Международной (XII Всероссийской) конференции. Чебоксары : Общество с ограниченной ответственностью «Издательский дом «Среда», 2022. С. 30–37.
- [4] СП 15.13330.2020. Каменные и армокаменные конструкции. Актуализированная редакция СНиП П-22-81*. 2020.
- [5] СП 42.13330.2016. Градостроительство. Планировка и застройка городских и сельских поселений. Актуализированная редакция СНиП 2.07.01-89*. 2016.
- [6] СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. 2016.
- [7] СП 327.1325800.2017 «Стены наружные с лицевым кирпичным слоем. Правила проектирования, эксплуатации и ремонта». 2017.
- [8] Ищук М.К. Прочность и трещиностойкость каменной кладки наружных многослойных стен : Дисс... кандидата наук / М.К. Ищук ; Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.23.01 – строительные конструкции, здания и сооружения. 2020.
- [9] Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. 3-е изд. испр. изд. Москва : Высш. шк., 2003. 560 с.

REFERENCES

- [1] Petrov M.V., Bakhmisova M.A. Development of a Multilayer Enclosure Structure and Subsystem Strength Check under Temperature Effects // Construction and Development: Life Cycle – 2020: Proceedings of the V International (XI Russian) Conference. Cheboksary : ID "Sreda 2020. P. 97–104.
- [2] Bakhmisova M.A., Sakmarova L.A. Digitalization, Information Modeling and Design in the Educational Process // New Competencies of Digital Reality: Theory and Practice of Their Development in Students: Proceedings of the III All-Russian Scientific and Practical Conference. Cheboksary : Chuvash State University named after I.N. Ulyanov, 2022. P. 22–30.
- [3] Bakhmisova M.A., Gonik E.G., Sakmarova L.A., Plotnikov A.N. Flexible Connections in a Multilayer Enclosure Structure // Construction and Development: Life Cycle - 2022: Proceedings of the VI International (XII Russian) Conference. Cheboksary : LLC "Publishing House Sreda 2022. P. 30–37.
- [4] SP 15.13330.2020. Stone and Reinforced Stone Structures. Updated Version of SNiP P-22-81*. 2020.
- [5] SP 42.13330.2016. Urban Planning. Layout and Development of Urban and Rural Settlements. Updated Version of SNiP 2.07.01-89*. 2016.
- [6] SP 20.13330.2016. Loads and Impacts. Updated Version of SNiP 2.01.07-85*. 2016.
- [7] SP 327.1325800.2017. External Walls with a Facing Brick Layer. Design, Operation, and Repair Guidelines. 2017.
- [8] Ishuk M.K. Strength and Crack Resistance of Masonry of External Multilayer Walls : Ph.D. thesis / M.K. Ishuk ; Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences, specialty 05.23.01 - Structural Engineering, Buildings, and Constructions. 2020.
- [9] Alexandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Strength of Materials: A Textbook for Universities. 3rd ed., revised edition. Moscow : Vysshaya Shkola, 2003. 560 p.

С. А. Рытов¹, А. Н. Панфилов¹, Т. Г. Рытова², Б. Ю. Антонов³,
Л. А. Максимова^{4, 5}

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ УСТРОЙСТВА СВАЙ МАЛОГО ДИАМЕТРА (МИКРОСВАЙ) И ОПЫТ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

¹ *Научно-исследовательский, проектно-изыскательский и конструкторско-технологический институт оснований и подземных сооружений им. Н.М. Герсеванова, Москва, Россия*

² *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

³ *Липецкая трубная компания «Свободный Союз», Липецк, Россия*

⁴ *Российский университет транспорта, Москва, Россия*

⁵ *Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия*

Аннотация. В статье выполнен анализ наиболее эффективных отечественных и зарубежных современных методов устройства микросвай в том числе с применением электроразрядной геотехнической технологии (ЭРТ), и трубчатых свай, изготавливаемых из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом (ВЧШГ). Показана тенденция развития методов устройства микросвай.

Ключевые слова: буроинъекционные сваи, технология устройства свай, микросваи, электроразрядная геотехническая технология, разрядно-импульсная технология РИТ, свайные трубы из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом (ВЧШГ).

Рытов Сергей Александрович, кандидат технических наук, начальник центра исследования свайных фундаментов; e-mail: rytovsa@gmail.com; AuthorID: 868685.

Панфилов Алексей Николаевич, аспирант; e-mail: lab38@mail.ru.

Рытова Татьяна Георгиевна, кандидат технических наук, доцент кафедры металлических и деревянных конструкций; e-mail: rytovatg@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-8835-4393>; AuthorID: 856792.

Антонов Борис Юрьевич, заместитель генерального директора; e-mail: antonov_by@svsokol.ru.

Максимова Людмила Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и естественных наук; e-mail: maximova_ng@mail.ru; AuthorID: 14131.

для цитирования: Рытов С. А., Панфилов А. Н., Рытова Т. Г., Антонов Б. Ю., Максимова Л. А. Эффективные методы устройства свай малого диаметра (микросвай) и опыт их применения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 71–86. DOI: 10.37972/chgru.2024.60.2.006 EDN: CQOFMS

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

S. A. Rytov¹, A. N. Panfilov¹, T. G. Rytova², B. Yu. Antonov³,
L. A. Maksimova^{4, 5}

EFFECTIVE METHODS OF SMALL DIAMETER PILES (MICRO PILES) AND THE EXPERIENCE OF THEIR APPLICATION

¹*Research, design, survey and design-technological Institute of Foundations and Underground Structures (NIIOSP) named after N.M. Gersevanov, Moscow, Russia*

²*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

³*Lipetsk pipe company "Free Union Lipetsk, Russia*

⁴*Russian University of Transport, Moscow, Russia*

⁵*I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. The article analyzes the most effective domestic and foreign modern methods of micropiles, including those using electric discharge geotechnical technology (ERGT), and tubular piles made of high-strength cast iron with spherical graphite (HCG). The trend of development of microswire device methods is shown.

Keywords: drilling-injection piles, pile construction technology, microswitches, electric discharge geotechnical technology, discharge pulse technology of RET, pile pipes made of high-strength cast iron with spherical graphite (HCG).

Sergey A. Rytov, Candidate of Technical Sciences; e-mail: rytovs@gmail.com; AuthorID: 868685.

Alexey N. Panfilov, Postgraduate Student; e-mail: lab38@mail.ru.

Tatyana G. Rytova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor; e-mail: rytovatg@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-8835-4393>; AuthorID: 856792.

Boris Y. Antonov, Deputy General Director; e-mail: antonov_by@svsokol.ru.

Lyudmila A. Maksimova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: maximova_ng@mail.ru; AuthorID: 14131.

to cite this article: Rytov S. A., Panfilov A. N., Rytova T. G., Antonov B. Yu., Maksimova L. A. Effective Methods of Small Diameter Piles (Micro Piles) and the Experience of Their Application // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 71–86. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.006 EDN: CQOFMS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Состояние вопроса. В строительной практике в последние годы при строительстве и реконструкции различных зданий и сооружений, магистральных трубопроводов, опор ЛЭП и мачт, усиления фундаментов, а так же для устройства подпорных стен в местах возможных оползней, укрепления склонов и откосов активно применяют сваи малого диаметра. Современное название свай, принятое в зарубежной литературе – “micropile” (микросваи). Термин “micropile” (микросваи) отражает характерные особенности такой разновидности свай, а именно:

- большая гибкость $L/D = 80-120$;
- диаметр до 300 мм.

Объем применения свай малого диаметра существенно вырос. Обогатился опыт решения с их помощью сложных задач фундаментостроения. Разработаны новые технологические схемы устройства свай, создано новое отечественное и зарубежное оборудование, позволившее кардинально изменить ряд технологических операций и на этой базе резко повысить несущую способность свай. В данной статье рассмотрены наиболее эффективные современные технологии устройства свай.

К таким сваям можно отнести:

- (1) буроинъекционные сваи, которые являются разновидностью буронабивных свай [1–5];
- (2) свайные трубы, изготавливаемые из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом (ВЧШГ) и погружаемые с помощью вибропогружателей или молотов [6–10].

Для свай из ВЧШГ мало исследован вопрос коэффициентов трения по боковой поверхности. Данные коэффициенты трения планируется уточнить при дальнейших исследованиях.

2. Буроинъекционные сваи (микросваи). Изготовление буроинъекционных свай производится в следующем порядке:

- бурение скважины (с креплением стенок или без);
- устройство уширения пяты механическим способом или трамбованием (при необходимости);
- погружение арматурного каркаса (несущего элемента);
- заполнение скважины бетоном или цементным раствором методом вертикально перемещающейся трубы;
- извлечение обсадной трубы (при ее наличии);
- инъекционная опрессовка ствола.

К наиболее эффективным способом изготовления свай обеспечивающих стремление к объединению выше указанных технологических операций в одну с обеспечением необходимого уровня качества и надежности, можно отнести использование буровых штанг, оставляемых в скважине в качестве трубчатой арматуры (рис. 1). Технология применяется в том числе при устройстве анкерных систем «Атлант».

Кроме того, применяется высокопрочная арматура винтового профиля для упрощения армирования микросвай (рис. 2, 3).

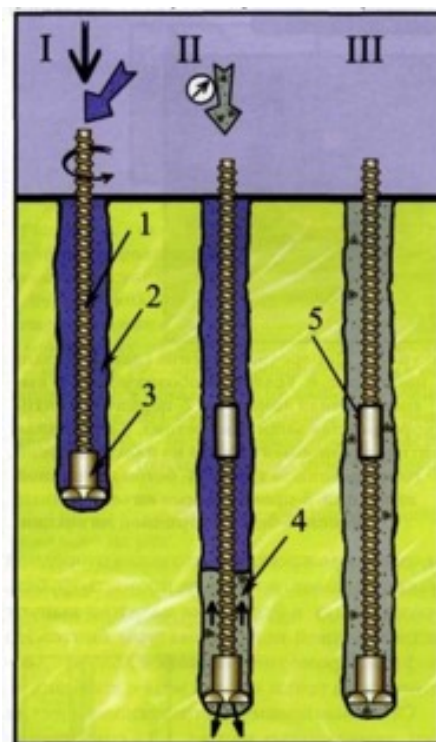


Рис. 1. Технологическая схема устройства микросвай.

I – Бурение скважины с промывкой; II – Замещение бурового раствора бетоном; III – микросвая.

1 – винтовая полая арматура, 2 – буровой раствор, 3 – буровая коронка, 4 – мелкозернистый бетон, 5 – муфта.

Для повышения несущей способности сваи применяют вторичную опрессовку через инъекционные трубки с клапанами.

Основные преимущества технологических схем, приведенных на рис. 1, 2 – уменьшение сроков устройства микросвай путем упрощения технологической схемы, снижение времени стыковки арматурного каркаса при применении муфт. Недостатки - армирование свай одиночным стержнем менее эффективно, чем пространственным каркасом. Кроме того, теряемое долото с экономической точки зрения менее выгодно.

В связи с тем, что при устройстве скважины грунт разуплотняется, такие сваи уступают другим видам и прежде всего забивным по показателю отношения расхода материала к несущей способности. Для снижения влияния технологии устройства скважины на несущую способность микросвай применяется

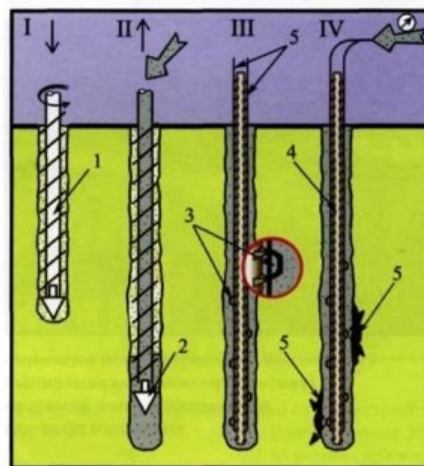


Рис. 2. Технологическая схема устройства микросвай с применением арматуры винтового профиля.

I, II – бурение скважины и заполнение ее мелкозернистым бетоном; III – армирование арматурой винтового профиля; IV – инъекция мелкозернистого бетона через инъекционные трубки. 1 – шнек, 2 – клапан, 3 – инъекционный клапан, 4 – арматура с винтового профиля, 5 – трубки для инъекции.

электроразрядная геотехническая технология (ЭРГТ). В технической литературе данные сваи называются сваи РИТ. Технология основана на использовании энергии электрических разрядов в скважинах, заполненных мелкозернистым бетоном (рис. 3).

Данная технология создает ударные волны в твердеющем мелкозернистом бетоне, что позволяет уплотнить стенки скважины. Основное преимущества технологической схемы, приведенной на рис. 3 – снижение влияния технологии бурения скважины на несущую способность сваи за счет уплотнение околосвайного пространства.

Данная технология была применена для реконструкции с надстройкой многоквартирного жилого дома в г. Москва. По первоначальному варианту предусматривалось устройство буровых свай диаметром 600 и 800 мм под опоры надстройки вплотную к существующим конструкциям, и был практически не реализуем. НИИОСП выполнил анализ инженерно-геологических условий и предложил переход на буроинъекционные сваи.

Расчетная схема здания с учетом надстройки приведено на рис. 5.

Примыкание свай опор надстройки к существующему реконструируемому зданию показан на рис. 6.

Была выполнена оценка влияния свайных фундаментов опор надстройки на реконструируемое здание (рис. 7). Прогнозируемые деформации не превысили допустимых величин.

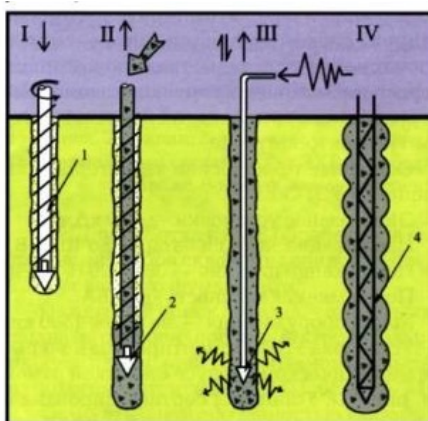


Рис. 3. Технологическая схема устройства свай РИТ.

I – Бурение; II - Заполнение скважины мелкозернистым бетоном; III – ЭРГТ обработка ствола сваи; IV – Погружение арматурного каркаса в твердеющий мелкозернистый бетон. 1 – шнек, 2 - клапан, 3 – излучатель для обработки по ЭРГТ, 4 – арматурный каркас.

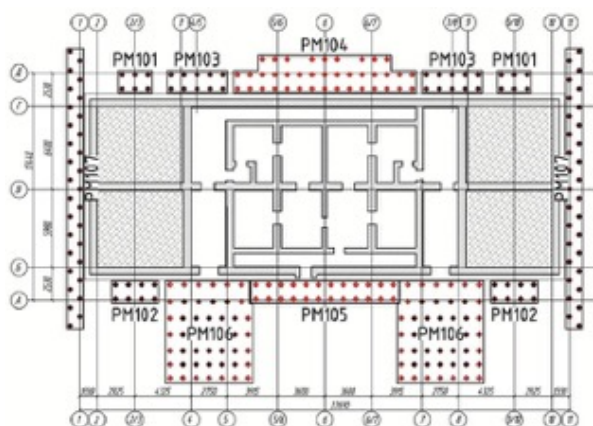


Рис. 4. План-схема свайных кустов под опоры надстройки (PM101-PM107). Серым показано надстраиваемое здание.

В процессе проведения работ был организован геотехнический мониторинг.

3. Сваи из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом (ВЧШГ). В строительной практике в связи с началом производства свайных труб из ВЧШГ, имеющих в своём составе шаровидный графит, начали применять сваи при устройстве фундаментов различного назначения.

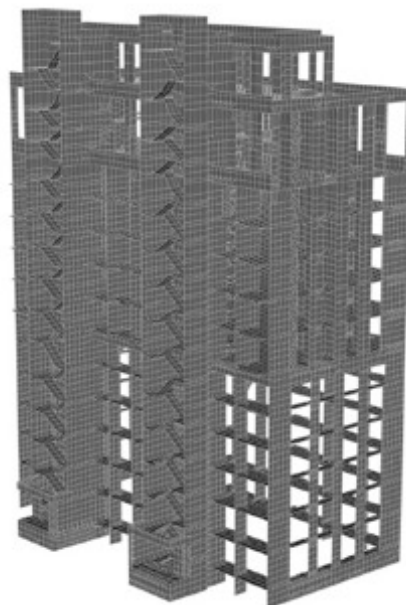


Рис. 5. Расчетная схема здания с учетом надстройки.

Сравнительные механические характеристики ВЧШГ и низко-углеродистой стали приведены в таблице 1.

Механические характеристики	Материал труб	
	Низко-углеродистая сталь	ВЧШГ
Предел прочности, МПа	320-410	≥ 400
Предел текучести, МПа	216-240	≥ 300

Таблица 1.

Небольшая скорость коррозии объясняется наличием тонкой пленки на поверхности, состоящей из оксидов и карбидов железа. В странах Европы сваи из ВЧШГ достаточно часто используются [6-7].

ООО «Свободный сокол» освоила изготовление свайных труб из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом (ВЧШГ). Данные сваи изготавливаются по ТУ 1461-079-90910065-2014 и соответствуют европейскому стандарту ONORM B 2567:2012. Свайные трубы имеют два размера: внешний диаметр, равный 118 или 170 мм, различную толщину стенки (7,6; 9,0; 10,6 мм) и мерную длину (без учета раструба), равную 5500 или 5900 мм. Необходимая общая проектная длина достигается за счет равнопрочного с основным сечением сопряжения свай через раструбное соединение (рис. 13).

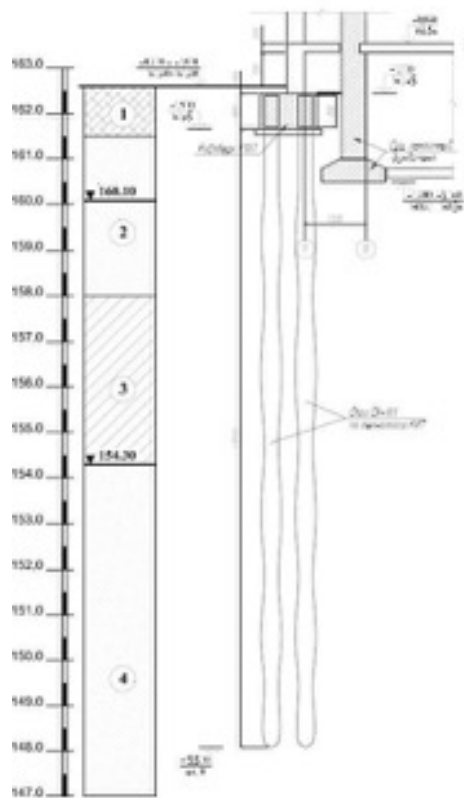


Рис. 6. Примыкание свай опор надстройки к существующему реконструируемому зданию.

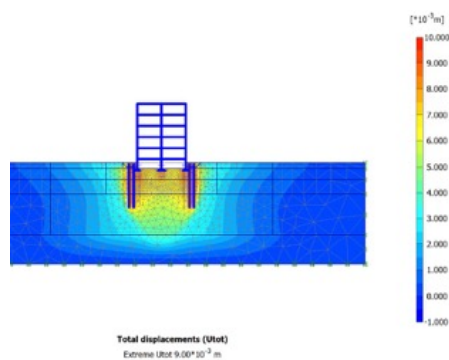


Рис. 7. Дополнительные осадки фундамента [м] реконструируемого здания от свайных фундаментов опор надстройки.

Существует два варианта погружения свай. Первый предполагает забивку свай с открытым нижним концом (рис. 14), а второй – с закрытым нижним



Рис. 8. Устройство монолитного ростверка под опоры надстройки.



Рис. 9. Частично возведенные конструкции надстройки.



Рис. 10. Полностью возведенные конструкции надстройки.

концом свайным башмаком (рис. 15) и последующим бетонированием. Вибропогружатели и сваедавливающие установки также могут быть применены для погружения трубчатых свай.

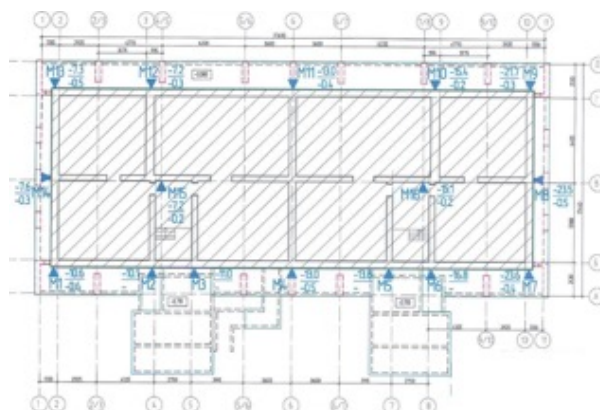


Рис. 11. План-схема марок для наблюдений за осадками фундаментов реконструируемого здания.

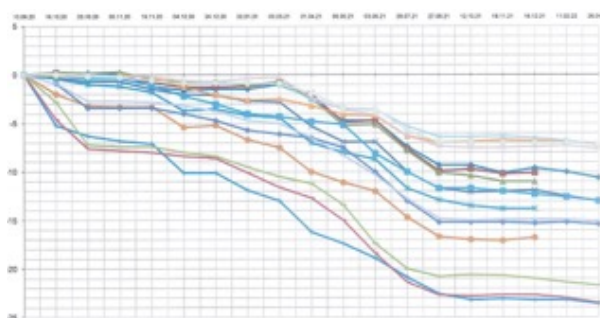


Рис. 12. График осадок фундаментов реконструируемого здания. По оси X – время, по Y – осадка в мм.

В случае применения бетонирования внутренней полости и затрубного пространства при забивке свай применяется башмак большего диаметра чем диаметр поперечного сечения трубы, а свайная труба в нижней части должна иметь отверстия для прохождения бетона в затрубное пространство. Для погружения свай может использоваться экскаватор с навесным оборудованием (высокочастотный гидравлический молот с адаптером под раструб сваи). В процессе забивки сваи гидромолотом в раструб забитой трубы устанавливается следующая свайная труба, и в процессе забивки создается жесткое неподвижное ее соединение за счет запрессовывания конуса в конус. В процессе чередования серии ударов гидромолота может подаваться в затрубное пространство мелкозернистый бетон для повышения несущей способности сваи по грунту и коррозионной стойкости. Затем устанавливаются опорные плиты и арматура для соединения с ростверком.

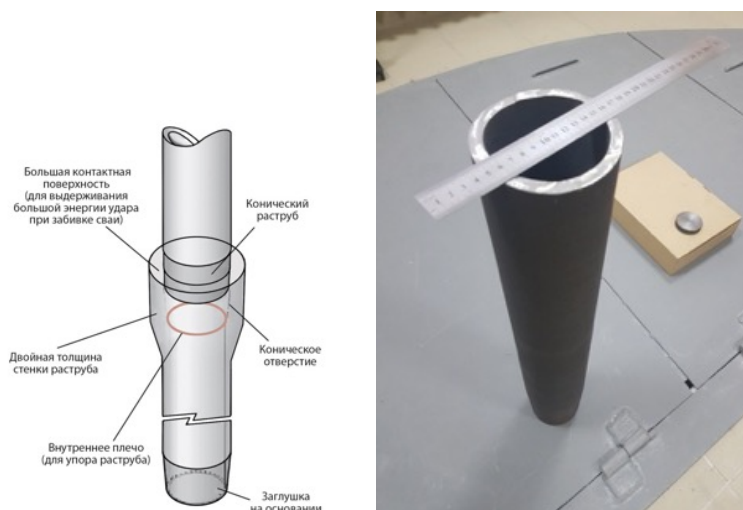


Рис. 13. Схема сопряжения свай. Фото фрагмента ствола свай.

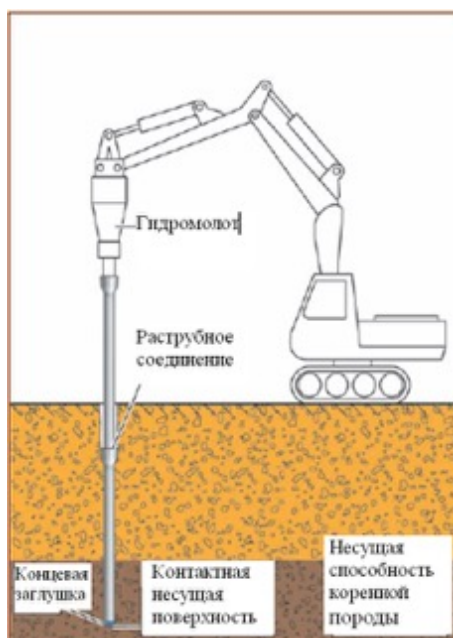


Рис. 14. Схема погружения свай с открытым нижним концом.

Основное преимущество таких свай - сокращение времени устройства свай за счет простоты монтажа и экономичность (стыковка труб за счет раструбного соединения, отсутствие отходов, возможность использования обычного легкого экскаватора для погружения свай); увеличенная несущая способность за счет

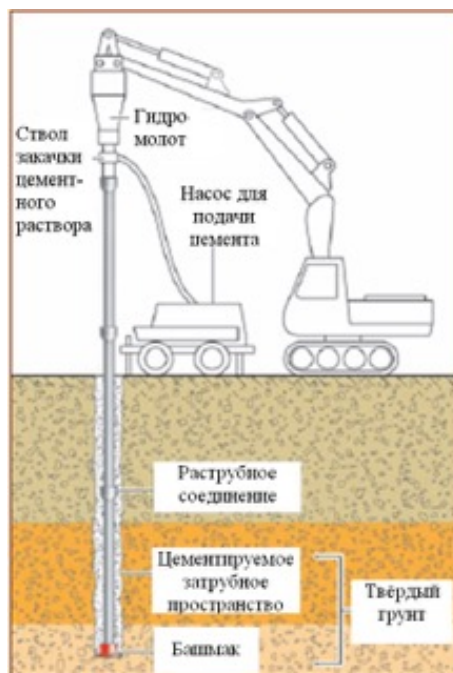


Рис. 15. Схема погружения сваи с закрытым нижним концом (со свайным башмаком).

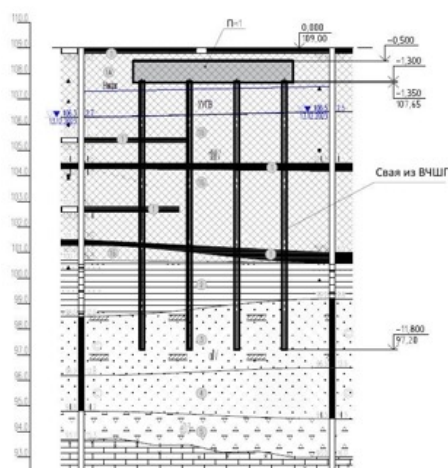


Рис. 16. Инженерно-геологический разрез под свайный фундамент под оборудование. Условные обозначения: Пм-1 – фундамент под оборудование, ИГЭ 1,1Б – насыпные грунты, ИГЭ 2 – глина полутвердая, ИГЭ 3,4 – песок средней крупности, средней плотности, ИГЭ 5 – щебенистый грунт, ИГЭ 6 – известняк. План свай приведен на рис. 17.

Показаны отличительные особенности технологий устройства буроинъекционных свай. В дальнейших исследованиях планируется усовершенствовать методику расчета свай ВЧШГ по грунту путем уточнения коэффициентов трения по боковой поверхности. Показана тенденция развития методов устройства микросвай.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors declare that they have no competing interests.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рытов С.А. Метод расчета несущей способности буроинъекционных свай, выполняемых с применением электроразрядной технологии // Жилищное строительство. 2010. no. 2. P. 20–21.
- [2] Рытов С.А. Эффективность применения электроразрядных технологий для устройства геотехнических конструкций // Жилищное строительство. 2010. no. 5. P. 47–50.
- [3] Рытов С.А. Устройство буроинъекционных свай с применением электроразрядной технологии в различных грунтовых условиях : Диссертация кандидата технических наук / С.А. Рытов ; 05.23.02. Москва, 2009. P. 223.
- [4] Соколов Н.С. Опыт использования буроинъекционных свай // Мировые стратегии развития науки и образования в новой реальности: междисциплинарные исследования. Москва : Издательство "Научная парадигма 2024. P. 169–172.
- [5] Соколов Н.С. Использование электроразрядной технологии при усилении основания реконструируемого объекта // General question of world science. Collection of Scientific Papers based on the results of an XXII international scientific conference. Florence, 2024. P. 54–60.
- [6] Ефремов И.В., Антонов Б.Ю. Применение свайных труб из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом // Фундаменты. 2023. no. 3 (13). P. 48–51.
- [7] Бабаев В.Н. Высокопрочный чугун с шаровидным графитом - материал для производства свай // Проблемы строительного производства и управления недвижимостью: Материалы VI Международной научно-практической конференции. Кемерово : Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, 2020. P. 211–220.
- [8] Уваров Л.А. Определение напряжений и высоты грунтового ядра в погруженной свае-оболочке // Морские инженерные изыскания и портовое гидротехническое строительство. 1989. P. 63–66.
- [9] Bohn C., Santos A.A., Frank R. Development of axial pile load transfer curves based on instrumented load tests // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2017. Vol. 143, no. 1. P. 04016081–1–04016081–15.
- [10] Hayden M. Pile HAY-Proof-System® (Pile H-P-S) - New Test Method for Static Load Test of Slender Piles // Proc. 11th ISM int. Workshop on Micropiles. Milan, 2011.

REFERENCES

- [1] Rytov S.A. Method for calculating the insignificant abilities of drilled injection piles performed using electric discharge technology // Housing Construction. 2010. no. 2. P. 20–21.
- [2] Rytov S.A. Efficiency of using electric discharge technologies for the construction of geotechnical structures // Housing Construction. 2010. no. 5. P. 47–50.
- [3] Rytov S.A. Construction of drilled injection piles using electric discharge technology in various soil conditions : PhD Thesis / S.A. Rytov ; 05.23.02. Moscow, 2009. P. 223.
- [4] Sokolov N.S. Experience in using drilled injection piles // World strategies for the development of science and education in the new reality: interdisciplinary research. Moscow : Scientific Paradigm Publishing House, 2024. P. 169–172.
- [5] Sokolov N.S. The use of electric discharge technology in strengthening the base of a reconstructed object // General question of world science. Collection of Scientific Papers based on the results of an XXII international scientific conference. Florence, 2024. P. 54–60.
- [6] Efremov I.V., Antonov B.Yu. Application of pile pipes made of high-strength cast iron with nodular graphite // Foundations. 2023. no. 3 (13). P. 48–51.
- [7] Babaev V.N. High-strength cast iron with nodular graphite - a material for the production of piles // Problems of construction production and real estate management: Proceedings of the VI International Scientific and Practical Conference. Kemerovo : Kuzbass State Technical University named after T.F. Gorbachev, 2020. P. 211–220.
- [8] Uvarov L.A. Determination of stresses and heights of the soil core in a submerged pile-shell // Marine engineering surveys and port hydraulic engineering. 1989. P. 63–66.
- [9] Bohn C., Santos A.A., Frank R. Development of axial pile load transfer curves based on instrumented load tests // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2017. Vol. 143, no. 1. P. 04016081–1–04016081–15.
- [10] Hayden M. Pile HAY-Proof-System® (Pile H-P-S) - New Test Method for Static Load Test of Slender Piles // Proc. 11th ISM int. Workshop on Micropiles. Milan, 2011.

Е. В. Мурашкин¹, Н. Э. Стадник¹

МУЛЬТИВЕСОВАЯ ТЕОРИЯ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПОЛУИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ

¹*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия*

Аннотация. В настоящей работе рассматривается мультивесовая теория слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Предлагаемая к рассмотрению математическая теория существенным образом опирается на достижения современного псевдотензорного исчисления. Приводятся определения мультивесовых псевдотензорных элементов площади и объема. Выводится общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на волновой поверхности, распространяющейся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Исследуются слабые разрывы решений связанной системы псевдовекторных дифференциальных уравнений в частных производных полуизотропной микрополярной термоупругости. С этой целью геометрические и кинематические условия Адамара–Томаса обобщены на псевдотензорный случай с учетом псевдотензорной геометрии распространяющейся поверхности слабых разрывов. Найдены скорости распространения волновых поверхностей трансляционных и спинорных перемещений. Проведена классификация слабых разрывов температуры, трансляционных и спинорных перемещений и исследованы их пространственные поляризации. Установлены условия атермичности, распространяющихся волновых поверхностей слабых разрывов.

Ключевые слова: наномасштаб, микромасштаб, микрополярность, термодинамическая температура, спин-вектор, трансляция, слабый разрыв, поверхность распространения, волна.

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Стадник Никита Эдуардович, младший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: nik-122@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0187-8048>; AuthorID: 961836

для цитирования: Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э. Мультивесовая теория слабых разрывов, распространяющихся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 87–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.007 EDN: ETVJRV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

E. V. Murashkin¹, N. E. Stadnik¹

MULTIWEIGHT THEORY OF WEAK DISCONTINUITIES PROPAGATING IN SEMI-ISOTROPIC THERMOELASTIC MICROPOLAR MEDIUM

¹*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. In this paper, we consider a multiweight theory of weak discontinuities of the temperature increment, translational and spinor displacements in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium. The mathematical theory proposed for consideration is substantially based on the achievements of modern pseudotensor calculus. Definitions of multiweight pseudotensor elements of area and volume are revisited. A general multiweight form of a pseudotensor equation on a wave surface propagating in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium is derived. Weak discontinuities of solutions of the coupled system of pseudovector partial differential equations of semi-isotropic micropolar thermoelasticity are studied. For this aim the geometric and kinematic Hadamard–Thomas conditions are generalized to the pseudotensor case taking account of the pseudotensor geometry of the propagating surface of weak discontinuities. The propagation velocities of wave surfaces of translational and spinor displacements are found. A classification of weak discontinuities of temperature, translational and spinor displacements is carried out and their spatial polarizations are studied. The conditions of athermality of propagating wave surfaces of weak discontinuities are established.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, micropolarity, pseudotensor volume element, multiweight formulation, constitutive pseudotensor function, growing surface, rational pseudoinvariant.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Nikita E. Stadnik, MD, Minor Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: nik-122@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0187-8048>; AuthorID: 961836

to cite this article: Murashkin E. V., Stadnik N. E. Multiweight theory of weak discontinuities propagating in semi-isotropic thermoelastic micropolar medium // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 87–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.007 EDN: ETVJRV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Термодинамика физико-механических процессов зачастую связана с распространением волновых поверхностей в трехмерном пространстве, при прохождении через которые физические поля претерпевают слабые разрывы, т.е. сами поля и их первые производные непрерывны, а их производные, начиная со второй, вообще говоря, разрывны. Изучение указанных процессов, протекающих в современных конструкционных материалах, т.к. они могут обладать микроструктурными особенностями и моделирование их поведения требует привлечения неклассических моделей механики сплошных сред [1–5]. Простейшей из таких моделей является, например, полуизотропная микрополярная термоупругость. Подобные среды характеризуются чувствительностью своих определяющих псевдоскаляров к преобразованиям, меняющим ориентацию трехмерного пространства на противоположную. Практическая значимость указанных исследований связана с моделированием поведения биоматериалов, используемых в медицине, клеточных структур, керамики, гранулированных материалов.

Следует отметить, что математические модели, учитывающие характерные нано/микродлины микрополярных материалов, могут быть сконструированы различными способами [6–15]. Фундаментальные определяющие параметры, связанные с характерным размером нано/микроструктур (гранул, ячеек, сот, пен, жидкокристаллических диполей, полимерных молекул и т. д.), обычно обозначаются как L в работах [9–15] или l в работах Нейбера [6–8]. Как было показано ранее [16, 17] отношение определяющих констант l и L является физически безразмерным постоянным множителем. Было показано, что L может иметь алгебраические веса $-1, 0, +1$. Важно отметить, что характерная длина микрополярной теории L имеет решающее значение, как масштабный фактор в теориях полуизотропных сред, которому естественным образом может быть назначен нечетный алгебраический вес, т.е. его можно рассматривать как определяющий псевдоскаляр, чувствительный к зеркальным отражениям координатного базиса.

Волновые задачи механики микрополярных сред возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как: УЗИ, сонография и спектральная доплерография. Теоретической основой для указанных методов могут служить задачи о распространении слабых разрывов в твердом теле [18, 19]. Литературный поиск показал актуальность волновых задач термомеханики микрополярных сплошных сред [1, 20–30]. В настоящей работе рассматривается задача распространения слабых разрывов в полуизотропном термоупругом микрополярном континууме.

Изложение настоящей статьи базируется на результатах, терминологии и понятиях предыдущих публикаций [9–15, 24–32].

1. Псевдотензорные элементы объема и площади в трехмерном пространстве. Терминология и понятия современной геометрии и тензорного

анализа наиболее полно изложены в монографиях [33–35]. В дальнейшем изложении, где это не очевидно, сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес, а снизу в круглых скобках его ранг. Нулевой вес абсолютных тензоров и веса некоторых фундаментальных псевдотензоров в обозначениях отражаться не будут. Зададим функцию $w.g.t$ равную весу псевдотензора, на который действует эта функция, т.е. для псевдотензора $T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ имеем

$$w.g.t \left(T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} \right) = g.$$

Псевдотензор $T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r}$ алгебраического веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней псевдоскалярной единицы можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$T_{(n)}^{h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} = 1 \begin{matrix} [-g] \\ 1 \end{matrix} T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r}. \quad (1)$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (the weights balance rule) [36–38]. Действительно, имеем

$$w.g.t \left(T_{(n)}^{h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} \right) = w.g.t \left(1 \begin{matrix} [-g] \\ 1 \end{matrix} T_{(n)}^{[g]h_1h_2\dots h_s\dots k_1k_2\dots k_r} \right) = -g + g = 0.$$

Псевдоскалярные единицы и фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр определяются согласно следующим соотношениям [39]:

$$e = \mathbf{z}_1 \cdot (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3), \quad \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} = e, \quad \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} = e^{-1}, \quad (2)$$

где $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ векторы ковариантного ортогонального базиса в трехмерном Евклидовом пространстве.

Целые степени псевдоскалярных единиц обладают свойством ковариантного постоянства, т. е.

$$\nabla_k \begin{matrix} [\pm g] \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [\pm g] \\ 0 \end{matrix}, \quad (3)$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

Символы перестановок Леви–Чивита являются фундаментальными псевдотензорами, непосредственно связанными с ориентацией трехмерного пространства, позволяющими дискриминировать правые и левые тройки базисных векторов согласно правилу

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } i, j, k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{для троек } i, j, k = 132, 213, 321; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что символы перестановок обладают аномальными тензорными свойствами, нарушающими общепринятые правила псевдотензорной алгебры. Во-первых они являются одновременно ковариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса -1 и контравариантным псевдотензором третьего ранга нечетного алгебраического веса $+1$. Последнее, в силу (4), может быть выражено соотношением

$${}^{[-1]}_{\epsilon_{lsk}} = {}^{[+1]}_{\epsilon^{lsk}}.$$

Во-вторых, для символов перестановок необходимы специальные правила, по которым следует поднимать/опускать индексы:

$${}^{[-1]}_{\epsilon_{ijk}} = {}^{[-2]}_1 g_{il} g_{js} g_{kr} {}^{[+1]}_{\epsilon^{lsr}}, \quad {}^{[+1]}_{\epsilon^{ijk}} = {}^{[+2]}_1 g^{il} g^{js} g^{kr} {}^{[-1]}_{\epsilon_{lsr}}. \quad (5)$$

Символы перестановок позволяют ввести тензорные элементы объема наиболее простым и понятным способом, что соответствует подходу, предложенному в классических работах Пуанкаре [40, 41], без привлечения теории внешних дифференциальных форм [42–45]. Заметим, что литературный поиск показывает скудное количество работ, обсуждающих указанное обстоятельство. Тензорный элемент объема в трехмерном пространстве можно принять в форме

$$d\tau^{mns} = d\tau^{123} {}^{[-1]}_{\epsilon^{[+1]}mns}, \quad (6)$$

где ${}^{[-1]}d\tau^{123}$ — естественный элемент объема,¹ представляющий собой псевдоскаляр веса -1 , который определяется следующим образом

$${}^{[-1]}d\tau^{123} = dx^1 dx^2 dx^3. \quad (7)$$

Опустив в формуле (6) индексы, т. е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (5), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{mns} = {}^{[+2]}_1 {}^{[-1]}d\tau^{123} {}^{[-1]}_{\epsilon_{mns}} = {}^{[+1]}d\tau_{123} {}^{[-1]}_{\epsilon_{mns}}, \quad (8)$$

где ${}^{[+1]}d\tau_{123}$ — дублетный элемент объема [35], представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров ${}^{[-1]}d\tau^{123}$, ${}^{[+1]}d\tau_{123}$ и псевдоскалярных единиц ${}^{[\mp 1]}_1$ можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = {}^{[+1]}_1 {}^{[-1]}d\tau^{123} = {}^{[-1]}_1 {}^{[+1]}d\tau_{123}.$$

¹Отметим, что важную роль естественные элементы объема играют при формулировке вариационных функционалов физических теорий поля [46, 47].

В дальнейшем изложении примем упрощенные обозначения для псевдоинвариантных элементов объема

$${}^{[-1]}d\tau = d\tau^{123}, \quad {}^{[+1]}d\tau = d\tau_{123}.$$

Аналогичным способом, с тем различием, что рассуждения (6) должны быть проведены для двумерной поверхности, задаются псевдоинвариантные элементы площади

$${}^{[-1]}A = A^{12}, \quad {}^{[+1]}A = A_{12}.$$

Введем в рассмотрение мультивесовые характеристики [14, 15, 31], принимающие дискретные значения в зависимости от используемого элемента объема, т.е.:

$$\boxtimes = \begin{cases} +1, & \text{для } {}^{[+1]}d\tau; \\ 0, & \text{для } d\tau; \\ -1, & \text{для } {}^{[-1]}d\tau; \end{cases} \quad \boxtimes = \begin{cases} +1, & \text{для } {}^{[+1]}dA; \\ 0, & \text{для } dA; \\ -1, & \text{для } {}^{[-1]}dA. \end{cases} \quad (9)$$

$$\square = \begin{cases} -1, & \text{для } {}^{[+1]}d\tau; \\ 0, & \text{для } d\tau; \\ +1, & \text{для } {}^{[-1]}d\tau. \end{cases} \quad \square = \begin{cases} -1, & \text{для } {}^{[+1]}dA; \\ 0, & \text{для } dA; \\ +1, & \text{для } {}^{[-1]}dA. \end{cases} \quad (10)$$

$$\boxminus = \begin{cases} -2, & \text{для } {}^{[+1]}d\tau; \\ -1, & \text{для } d\tau; \\ 0, & \text{для } {}^{[-1]}d\tau, \end{cases} \quad \boxminus = \begin{cases} -2, & \text{для } {}^{[+1]}dA; \\ -1, & \text{для } dA; \\ 0, & \text{для } {}^{[-1]}dA. \end{cases} \quad (11)$$

Соотношения (9)–(11) позволяют немедленно заключить

$$\boxtimes = -\square = -\boxminus - 1.$$

2. Дифференцирование по псевдоскалярному мультивесовому времени и кинематические условия совместности первого порядка.

Рассмотрим поверхность Σ , распространяющуюся в трехмерном евклидовом пространстве, заданную псевдоскалярной функцией

$$\boxtimes t = \boxtimes f(x^i), \quad (12)$$

где $\boxtimes t$ — мультивесовое псевдоскалярное время, причем

$$\boxtimes t = \boxtimes 1t. \quad (13)$$

Рассмотрим следующие друг за другом положения поверхности $\boxtimes \Sigma$: $\boxtimes \Sigma(t)$ и $\boxtimes \Sigma(t + \delta t)$. Построим вектор единичной нормали n^k в некоторой точке P поверхности $\boxtimes \Sigma$, а через P' обозначим точку, в которой нормаль n^k пересекает

поверхность $\Sigma(t + \delta t)$. Пусть точка P имеет координаты x^k , а P' — координаты $x^k + \delta x^k$.

Вектор единичной нормали \mathbf{n} к поверхности Σ , направленный в сторону ее распространения, можно определить, с учетом (1), с точностью до множителя согласно формуле

$$Nn_i = \partial_i(\square f). \quad (14)$$

Отметим, что для абсолютного скаляра a справедливо равенство

$$\nabla_i a = \partial_i a. \quad (15)$$

Тогда выражение (14) с учетом (3) и (15) преобразуется к виду

$$Nn_i = \partial_i(\square f) = \nabla_i(\square f) = \square \nabla_i f. \quad (16)$$

Вводя в рассмотрение псевдовектор нормали согласно формуле

$$\square n_i = e^W n_i, \quad (17)$$

получим

$$N\square n_i = \nabla_i \square f. \quad (18)$$

Учитывая соотношение (w.g.t. $(g^{ij}) = 0$)

$$g^{ij} \square n_i \square n_j = \square 1 \quad (19)$$

несложно заключить, что

$$N^2 \square 1 = g^{ik} \nabla_i \square f \nabla_k \square f, \quad (20)$$

откуда для множителя N следует выражение

$$\pm N = \square \sqrt{g^{ik} \nabla_i \square f \nabla_k \square f}, \quad (21)$$

Окончательно, псевдовектор нормали к поверхности уровня Σ псевдоскалярного поля $\square f$ вычисляется по формуле

$$\square n_i = \square \frac{\nabla_i \square f}{\sqrt{g^{ik} \nabla_i \square f \nabla_k \square f}} \quad (22)$$

Линейная скорость поверхности наращивания в направлении псевдовектора нормали $\square \mathbf{n}$ вычисляется согласно

$$\square G = \left(\sqrt{g^{ik} \nabla_i \square f \nabla_k \square f} \right)^{-1}. \quad (23)$$

Абсолютный вектор нормали к поверхности уровня Σ псевдоскалярного поля $\boxtimes f$ можно вычислить по формуле

$$n_i = G \nabla_i \boxtimes f. \quad (24)$$

Устремляя к нулю расстояние между поверхностями $\Sigma(t)$ и $\Sigma(t + \delta t)$, т.е. устремляя δt к нулю, можно получить следующие выражения для δ -производных

$$\frac{\delta \varphi_k^{[\pm g]}}{\delta t} = \delta_+ \varphi_k^{[\pm g]}, \quad \frac{\delta \varphi_k^{[\pm g]}}{\delta t} = \delta_- \varphi_k^{[\pm g]}, \quad \frac{\delta A^k}{\delta t} = \delta A^k, \quad (25)$$

откуда не сложно получить кинематические условия совместности первого порядка

$$\begin{aligned} \delta_+ \varphi_k^{[\pm g]} &= \delta_+ \varphi_k^{[\pm g]} - \delta_- \varphi_k^{[\pm g]} = \delta A^k, \\ \delta x^i &= 1 G n^i, \\ \delta_+ \varphi_k^{[\pm g]} &= -1 B^k G + \delta A^k, \end{aligned} \quad (26)$$

Используя полученные соотношения первого порядка не сложно получить условия совместности второго и более высоких порядков.

3. Мультивесовые слабые разрывы трансляционных и спинорных перемещений Исследуем закономерности распространения слабых разрывы трансляционных u^k и спинорных ϕ^k перемещений в микрополярном теле. Отметим, что система уравнений динамики содержит частные производные не выше второго порядка. Пусть в трехмерном пространстве с нормальной скоростью $\boxtimes \mathfrak{G}$ распространяется фронт (волновая поверхность) Σ слабых разрывов перемещений u^k и микровращений ϕ^k . Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара—Томаса (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned} [\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{u}] &= 1 \boxtimes \mathbf{n} \otimes \boxtimes \mathbf{A}, & [\nabla \otimes \nabla \otimes \phi] &= 1 \boxtimes \mathbf{n} \otimes \boxtimes \mathbf{S}^{[+1]}, \\ [\nabla \otimes \partial \cdot \mathbf{u}] &= -\boxtimes \mathfrak{G} \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [\nabla \otimes \partial \cdot \phi] &= -\boxtimes \mathfrak{G} \mathbf{n} \otimes \mathbf{S}^{[+1]}, \\ [\partial \cdot \partial \cdot \mathbf{u}] &= 1 \boxtimes \mathfrak{G}^2 \mathbf{A}, & [\partial \cdot \partial \cdot \phi] &= 1 \boxtimes \mathfrak{G}^2 \mathbf{S}^{[+1]}, \\ [\nabla \otimes \nabla \theta] &= 1 B \boxtimes \mathbf{n} \otimes \boxtimes \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (27)$$

где квадратные скобки обозначают скачок, заключенного в них физического поля, при переходе через поверхность слабого разрыва. B , \mathbf{A} , $\mathbf{S}^{[+1]}$ — физические поля, определенные на волновой поверхности, причем равенства $B = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}^{[+1]} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность действительно является поверхностью слабого разрыва.

Отметим, что выражение $1 \overset{2\Box}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\Box}{\mathbf{n}}$ можно преобразовать к виду $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$. Последнее позволяет провести дальнейшие рассмотрения в терминах абсолютного вектора нормали к волновой поверхности.

4. Слабые разрывы температурного инкремента, трансляционных перемещений, спинорных перемещений и температурного инкремента в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Замкнутая мультивесовая система дифференциальных уравнений для полуизотропного микрополярного термоупругого тела записывается в следующей векторной форме [14, 15]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + c_1) \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2c_1 \nabla \times \overset{[+1]}{\phi} + \\ \quad + L \overset{[-1]}{c'_4} \nabla \nabla \cdot \overset{[+1]}{\phi} + L \overset{[-1]}{c'_5} \nabla \cdot \nabla \overset{[+1]}{\phi} - 2\alpha \frac{1 + \nu}{* 1 - 2\nu} \nabla \theta = \overset{\Box}{\rho} \overset{\Box}{G}^{-1} (\partial \cdot)^2 \mathbf{u}, \\ (1 + c_2) \nabla \cdot \nabla \overset{[+1]}{\phi} + (1 - c_2 + 2c_3) \nabla \nabla \cdot \overset{[+1]}{\phi} + L^{-1} \overset{[-1]}{c'_4} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \\ \quad + L^{-1} \overset{[-1]}{c'_5} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + L^{-1} \overset{[-1]}{c'_6} \nabla \times \overset{[+1]}{\phi} - 2 L^{-2} c_1 (2 \overset{[+1]}{\phi} - \nabla \times \mathbf{u}) - \\ \quad - 2 \overset{[+1]}{\beta} \nabla \theta = \overset{\Box}{\rho} \overset{[-2]}{\mathcal{I}} \overset{\Box}{G}^{-1} L^{-2} (\partial \cdot)^2 \overset{[+1]}{\phi}, \\ \nabla \cdot \nabla \theta - \overset{\Box}{C} \lambda^{-1} \partial \cdot \theta - 2 \overset{\Box}{G} \lambda^{-1} \alpha \frac{1 + \nu}{* 1 - 2\nu} \nabla \cdot \partial \cdot \mathbf{u} - 2 \overset{\Box}{G} \lambda^{-1} L^2 \overset{[-1]}{\beta} \overset{[+1]}{\nabla} \cdot \partial \cdot \overset{[+1]}{\phi} = 0, \end{array} \right. \quad (28)$$

где $\overset{\Box}{G}$ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; α — коэффициент линейного теплового расширения; $\overset{[+1]}{\beta}$ — коэффициент теп-

лового изгиба-кручения; $\overset{\Box}{\lambda}$ — коэффициент теплопроводности, $c = \overset{\Box}{C} \overset{\Box}{\rho}$ — теплоемкость на единицу массы. В этом случае характерная микродлина L и модуль сдвига G являются псевдоскалярами нечетного алгебраического веса.

Исследуем закономерности распространения слабых разрывы трансляционных \mathbf{u} , спинорных $\overset{[+1]}{\phi}$ перемещений и температурного инкремента θ в полуизотропной среде. Отметим, что связанная система уравнений динамики и уравнения теплопроводности (1) содержит частные производные не выше второго

порядка, что означает возможность применения теории слабых разрывов Адамара—Томаса.

Уравнения (1) вместе с (27) после ряда преобразований дают следующие соотношения, связывающие скачки частных производных второго порядка от трансляционных \mathbf{u} , спинорных $\overset{[+1]}{\phi}$ перемещений и температурного инкремента θ при переходе через волновую поверхность:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(1+c_1) - \overset{\square\square}{\rho} G^{-1} \mathfrak{G}^2] \mathbf{A} + (1-c_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1}) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + \\ \quad \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{c'_4} \mathbf{S} + \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{c'_5} \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = 0, \\ [(1+c_2) - \overset{\square\square}{\rho} \overset{[-2]}{\mathfrak{J}} G^{-1} \overset{[-1]}{L}^{-2} \mathfrak{G}^2] \mathbf{S} + (1-c_2 + 2c_3) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) + \\ \quad \overset{[-1]}{L}^{-1} \overset{[+1]}{c'_4} \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + \overset{[-1]}{L}^{-1} \overset{[+1]}{c'_5} \mathbf{A} = 0, \\ B + \overset{\square\square}{\mathfrak{G}} 2G\lambda^{-1} \overset{\square\square}{\alpha} \frac{1+\nu}{*1-2\nu} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + \overset{\square\square}{\mathfrak{G}} 2G\lambda^{-1} \overset{[-1]}{L}^2 \overset{[+1]}{\beta} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = 0. \end{array} \right. \quad (29)$$

Представим векторы поляризации слабых разрывов в виде суммы проекций на вектор $\boldsymbol{\tau}$, лежащий на волновой поверхности Σ , и нормаль \mathbf{n} к ней:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{\perp} \boldsymbol{\tau} + A_{\parallel} \mathbf{n}, & \mathbf{S} &= S_{\perp} \boldsymbol{\tau} + S_{\parallel} \mathbf{n}, \\ A_{\perp} &= \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}, & A_{\parallel} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \\ S_{\perp} &= \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\tau}, & S_{\parallel} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставим (30) в систему (29) и сгруппируем слагаемые при касательном векторе $\boldsymbol{\tau}$ и векторе нормали \mathbf{n} :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((1+c_1) - \overset{\square\square}{\rho} G^{-1} \mathfrak{G}^2) A_{\perp} + \overset{[+1]}{L} c'_4 S_{\perp} \boldsymbol{\tau} + \\ \quad + [(2 - \overset{\square\square}{\rho} G^{-1} \mathfrak{G}^2 + 2\nu(1-2\nu)^{-1}) A_{\parallel} + L(c'_4 + c'_5) S_{\parallel}] \mathbf{n} = 0, \\ ((1+c_2) - \overset{\square\square}{\rho} G^{-1} \overset{[-2]}{\mathfrak{J}} \overset{[-1]}{L}^{-2} \mathfrak{G}^2) S_{\perp} + \overset{[-1]}{L}^{-1} c'_5 A_{\perp} \boldsymbol{\tau} + \\ \quad + ((2 - \overset{\square\square}{\rho} G^{-1} \overset{[-2]}{\mathfrak{J}} \overset{[-1]}{L}^{-2} \mathfrak{G}^2 + 2c_3) S_{\parallel} + \overset{[+1]}{L}^{-1} (c'_4 + c'_5) A_{\parallel} \mathbf{n} = 0, \\ B + \overset{\square\square}{\mathfrak{G}} 2G\lambda^{-1} \overset{\square\square}{\alpha} \frac{1+\nu}{*1-2\nu} A_{\parallel} + \overset{\square\square}{\mathfrak{G}} 2G\lambda^{-1} \overset{[-1]}{L}^2 \overset{[+1]}{\beta} S_{\parallel} = 0. \end{array} \right. \quad (31)$$

В силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} первые два уравнения системы (31) будут справедливы только в случае равенства нулю, соответствующих коэффициентов при указанных векторах. Последнее обстоятельство позволяет

получить условия распространения поверхностей слабых разрывов в полужизотропной микрополярной термоупругой среде:

$$\begin{aligned}
& [(1 + c_1) - \rho G^{-1} \mathfrak{G}^2] A_{\perp} + L c_4' S_{\perp}^{[+1]} = 0, \\
& [(1 + c_2) - \rho G^{-1} \mathfrak{J} L^{-2} \mathfrak{G}^2] S_{\perp}^{[+1]} + L^{-1} c_5' A_{\perp} = 0, \\
& \left(2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} - \rho G^{-1} \mathfrak{G}^2 \right) A_{\parallel} + L (c_4' + c_5') S_{\parallel}^{[+1]} = 0, \\
& (2 - \rho G^{-1} \mathfrak{J} L^{-2} \mathfrak{G}^2 + 2c_3) S_{\parallel}^{[+1]} + L^{-1} (c_4' + c_5') A_{\parallel} = 0, \\
& B + \mathfrak{G} 2G \lambda^{-1} \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} A_{\parallel} + \mathfrak{G} 2G \lambda^{-1} L^2 \beta S_{\parallel}^{[+1]} = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Систему линейных однородных уравнений (32), в некоторых случаях, удобно представить в виде

$$\begin{aligned}
& \{[(1 + c_1) - \rho G^{-1} \mathfrak{G}^2][(1 + c_2) - \rho G^{-1} \mathfrak{J} L^{-2} \mathfrak{G}^2] - c_4' c_5'\} A_{\perp} = 0, \\
& \{[(1 + c_1) - \rho G^{-1} \mathfrak{G}^2][(1 + c_2) - \rho G^{-1} \mathfrak{J} L^{-2} \mathfrak{G}^2] - c_4' c_5'\} S_{\perp}^{[+1]} = 0,
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} - \rho G^{-1} \mathfrak{G}^2 \right) [2(1 + c_3) - \rho G^{-1} \mathfrak{J} L^{-2} \mathfrak{G}^2] - (c_4' + c_5')^2 \right] A_{\parallel} = 0, \\
& \left[\left(2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} - \rho G^{-1} \mathfrak{G}^2 \right) [2(1 + c_3) - \rho G^{-1} \mathfrak{J} L^{-2} \mathfrak{G}^2] - (c_4' + c_5')^2 \right] S_{\parallel}^{[+1]} = 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

$$B = -\mathfrak{G} 2G \lambda^{-1} \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} A_{\parallel} - \mathfrak{G} 2G \lambda^{-1} L^2 \beta S_{\parallel}^{[+1]}. \tag{35}$$

Возможные случаи распространения поверхностей слабых разрывов представлены в таблице.

No.	A		^[+1] S		B
I	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = 0$
II	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = 0$
III	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	см. (35)
IV	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = 0$
V	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	см. (35)
VI	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = 0$
VII	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	см. (35)
VIII	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	см. (35)
IX	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	см. (35)
X	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	см. (35)
XI	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	см. (35)
XII	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	см. (35)
XIII	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	см. (35)
XIV	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	см. (35)
XV	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	см. (35)
XVI	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	см. (35)

Рассмотрим каждый вариант распространения поверхности слабого разрыва, представленный в таблице, по отдельности. Распространение поверхностей слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в каждом из представленных шестнадцати случаев возможно только при выполнении следующих ограничений, наложенных на определяющие параметры среды:

- I. Поверхность Σ не является поверхностью слабого разрыва. Поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений — непрерывны.

- II. Реализация волновой картины возможна только если $c'_5 = 0$, тогда скорость распространяющейся поверхности слабого разрыва трансляционных перемещений вычисляется согласно:

$$\mathfrak{G} = v_{\perp}^{\mu} = \sqrt{\frac{\overset{\square}{G}(1 + c_1)}{\overset{\square}{\rho}}}.$$

Заметим, что при равенстве нулю определяющей микрополярной постоянной c_1 скорость \mathfrak{G} в точности совпадет со скоростью чисто упругой поперечной волны $v_{\perp} = \overset{\square}{G}/\overset{\square}{\rho}$.

- III. Условие распространения волновой поверхности: $c'_4 + c'_5 = 0$. Скорость распространяющейся поверхности слабого разрыва трансляционных перемещений равна скорости распространения чисто упругой продольной волны:

$$\mathfrak{G} = v_{\parallel} = \sqrt{\frac{\overset{\square}{2G}(1 - \nu)}{\overset{\square}{\rho}(1 - 2\nu)}}.$$

- IV. Распространение волновой поверхности возможно только если $c'_4 = 0$. Скорость распространяющейся поверхности слабого разрыва спинорных перемещений:

$$\mathfrak{G} = v_{\perp}^{\mu\mu} = \overset{[-1]}{L} \sqrt{\frac{\overset{\square}{G}(1 + c_2)}{\overset{\square}{\rho} \overset{[-2]}{\mathfrak{J}}}}.$$

В этом случае скорость \mathfrak{G} является абсолютным скаляром и не проявляет чувствительность к зеркальным отражениям.

- V. Условие распространения: $c'_4 + c'_5 = 0$. Скорость распространяющейся поверхности слабого разрыва спинорных перемещений равна скорости распространения чисто упругой продольной волны:

$$\mathfrak{G} = v_{\parallel}^{\mu\mu} = \overset{[-1]}{L} \sqrt{\frac{\overset{\square}{2G}(1 + c_3)}{\overset{\square}{\rho} \overset{[-2]}{\mathfrak{J}}}}.$$

В этом случае скорость \mathfrak{G} является абсолютным скаляром и не проявляет чувствительность к зеркальным отражениям.

- VI. Анализируя соотношения (33) вычислим скорость распространения поверхности слабого разрыва трансляционных и спинорных перемещений:

$$\sqrt{2}\mathfrak{G}_{\pm} = \sqrt{(v_{\perp}^{\mu})^2 + (v_{\perp}^{\mu\mu})^2} \pm \sqrt{4\tilde{c}'_4\tilde{c}'_5 + ((v_{\perp}^{\mu})^2 - (v_{\perp}^{\mu\mu})^2)^2},$$

$$\tilde{c}'_4 = \rho^{-1}Gc'_4, \quad \tilde{c}'_5 = \rho^{-1}\mathfrak{J}^{-1}GL^2c'_5,$$

VII. Анализируя соотношения (34) вычислим скорость распространения поверхности слабого разрыва трансляционных и спинорных перемещений:

$$\sqrt{2}\mathfrak{G}_{\pm\parallel} = \sqrt{(v_{\parallel})^2 + (v_{\parallel}^{\mu\mu})^2 \pm \sqrt{4(c'_4 + c'_5)^2 \rho^{-2} \mathfrak{J}^{-1} G^2 L^2 + ((v_{\parallel})^2 - (v_{\parallel}^{\mu\mu})^2)^2}},$$

- VIII. Условие распространения волновой поверхности: $c'_4 = c'_5 = 0$ и $v_{\perp}^{\mu} = v_{\parallel}$.
 IX. Условие распространения волновой поверхности: $c'_4 = c'_5 = 0$ и $v_{\perp}^{\mu\mu} = v_{\parallel}^{\mu\mu}$.
 X. Условие распространения волновой поверхности: $c'_4 = c'_5 = 0$ и $v_{\perp}^{\mu\mu} = v_{\parallel}$.
 XI. Условие распространения волновой поверхности: $c'_4 = c'_5 = 0$ и $v_{\perp}^{\mu} = v_{\perp}^{\mu\mu}$.
 XII. Условия распространения волновой поверхности: $c'_4 = 0$. Скорость волны: $\sqrt{2}\mathfrak{G}_{\pm\parallel} = v_{\parallel}^{\mu\mu}$.
 XIII. Условия распространения волновой поверхности: $c'_4 + c'_5 = 0$ и $\sqrt{2}\mathfrak{G}_{\pm\perp} = v_{\parallel}^{\mu\mu}$.
 XIV. Условия распространения волновой поверхности: $c'_5 = 0$ и $\sqrt{2}\mathfrak{G}_{\pm\parallel} = v_{\perp}^{\mu}$.
 XV. Условие распространения волновой поверхности: $c'_4 + c'_5 = 0$ и $\sqrt{2}\mathfrak{G}_{\pm\parallel} = v_{\parallel}$.
 XVI. Условие распространения волновой поверхности: $\mathfrak{G}_{\pm\perp} = \mathfrak{G}_{\pm\parallel}$

Следует отметить, что случаи II, IV и VI соответствуют распространению атермических поперечных волн. Для случаев III, V, VII–XVI характерно наличие слабого разрыва температурного инкремента. Связь скачков температурного инкремента и скачков трансляционных и спинорных перемещений дается зависимостью (35).

Важно отметить, что в случаях (VII), (XII), (XIV), (XVI), слабый разрыв приращения температуры может быть выведен из последнего уравнения в (32). В этих случаях распространение атермических волн возможно, если нормальные проекции векторов поляризации разрывов \mathbf{A} и \mathbf{S} удовлетворяют следующему псевдотензорному соотношению

$$\frac{A_{\parallel}}{S_{\parallel}} = -L \frac{^{[-1]}_2}{\alpha} \frac{^{[+1]}_{\beta}}{*} \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}.$$

5. Заключение. В настоящей работе рассмотрены вопросы распространения поверхностей слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Построена мультивесовая теория слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Предлагаемая математическая теория существенно образом опирается на достижения современного псевдотензорного

исчисления. Получена общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на волновой поверхности, распространяющейся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. С этой целью геометрические и кинематические условия Адамара–Томаса обобщены на псевдотензорный случай с учетом псевдотензорной геометрии распространяющейся поверхности слабых разрывов. Возможные варианты распространения слабых разрывов сведены в таблицу и проанализированы. Для возможной реализации каждого случая указаны ограничения накладываемые на определяющие постоянные полуизотропной термоупругой микрополярной среды. Изучены возможные соотношения между амплитудными факторами слабого разрыва температурного поля и векторов разрывов трансляционных и спинорных перемещений. Указаны случаи соответствующие распространению термических и атермических волновых поверхностей.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [2] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
- [3] Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.
- [4] Altenbach H. Eremeyev V. A. (eds.). Generalized continua—from the theory to engineering applications. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 541. XVII+387 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.
- [5] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
- [6] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.

- [7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [8] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [9] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [10] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [11] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [15] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [16] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. DOI: 10.14498/vsgtu1799.
- [18] Whitham G. B. *Linear and nonlinear waves*. New York : John Wiley & Sons, 2011. 660 p.
- [19] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. *Linear and nonlinear waves*. М. : Наука, 1982. 335 с.
- [20] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // *Int. J. Eng. Sci.* 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [21] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [22] Achenbach J. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 с.
- [23] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *International Journal of Engineering Science*. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.

- [24] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2014. T. 18, № 4. С. 85–97. DOI: 10.14498/vsgtu1331.
- [25] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [26] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [28] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [29] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [30] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [31] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [32] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [33] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М. : Наука, 1966. 648 с.
- [34] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [35] Гуревич Г. В. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. V. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [36] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1(51). С. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
- [37] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [38] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.

- [39] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.
- [40] Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // *Acta math*. 1887. Vol. 6. P. 321–380.
- [41] Poincaré Henri. *Analysis situs* // *J. Ecole Polytech*. 1895. Vol. 1. P. 1–123.
- [42] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Л., М. : ОГИЗ, 1948. 432 с.
- [43] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М. : Мир, 1971. 392 с.
- [44] Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М. : Наука, 1977. 88 с.
- [45] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979. 431 с.
- [46] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
- [47] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

REFERENCES

- [1] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [2] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). *Mechanics of generalized continua*. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
- [3] Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. *Foundations of micropolar mechanics*. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.
- [4] Altenbach H. Eremeyev V. A. (eds.). *Generalized continua—from the theory to engineering applications*. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 541. XVII+387 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.
- [5] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
- [6] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [8] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [9] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [10] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and ductility*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im.*

- IYa Yakovleva. *Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [16] Murashkin E. V. On the relationship between micropolar determining parameters of thermodynamic state potentials // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 1(55). P. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. DOI: 10.14498/vsgtu1799.
- [18] Whitham G. B. *Linear and nonlinear waves*. New York : John Wiley & Sons, 2011. 660 p.
- [19] Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. *Linear and nonlinear waves*. Moscow : NAUKA, 1982. 335 p.
- [20] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // *Int. J. Eng. Sci.* 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [21] Willson A.J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [22] Achenbach Jan. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 p.
- [23] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *International Journal of Engineering Science*. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [24] Murashkin Evgenii V, Radayev Yuri N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2014. Vol. 18, no. 4. P. 85–97. DOI: 10.14498/vsgtu1331.
- [25] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [26] Kovalev Vladimir Aleksandrovich, Murashkin Eugenio Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

- [28] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [30] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [31] Murashkin E. V., Radayev Yu N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [32] Murashkin EV, Radayev YN. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [33] Rosenfeld B. A. Multidimensional spaces. Moscow : Nauka, 1966. 648 p.
- [34] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [35] Gurevich G. B. Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants. Moscow : GITTL, 1948. 408 p.
- [36] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 1(51). P. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
- [37] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Elements of Theory // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). P. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [38] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Applications to Continuum Mechanics // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. no. 2(52). P. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [39] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.
- [40] Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // Acta math. 1887. Vol. 6. P. 321–380.
- [41] Poincaré Henri. Analysis situs // J. Ecole Polytech. 1895. Vol. 1. P. 1–123.
- [42] Finikov S. P. Cartan's Method of External Forms in Differential Geometry. Moscow : OGIZ, 1948. 432 p.
- [43] Cartan A. Differential Calculus. Differential Forms. Moscow : Mir, 1971. 392 p.
- [44] Efimov N. V. Introduction to the Theory of External Forms. Moscow : Nauka, 1977. 88 p.
- [45] Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Moscow : Наука, 1979. 431 p.
- [46] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Elements of field theory: variational symmetries and geometric invariants. Moscow : Fizmatlit, 2009. 156 p.
- [47] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov : Publishing House of Saratov University, 2010. 328 p.

Б. Г. Миронов

К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Российский университет транспорта, Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано предельное состояние стержней из идеального жестко-пластического неоднородного материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей стержня. Рассмотрены основные соотношения, описывающие предельное состояние неоднородных стержней. Определены характеристики исследуемых соотношений и соотношения вдоль характеристик. Получены интегралы основных соотношений при различных условиях предельного состояния. Рассмотрена задача о предельном состоянии неоднородного призматического стержня с прямоугольным сечением под внешним давлением, с предположением линейной зависимости предела текучести от координат.

Ключевые слова: кручение, неоднородность, пластичность, напряжение, деформация, линия разрыва напряжений, условие пластичности

Миронов Борис Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и естественных наук; e-mail: mbg.chspu@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2116-8908>; AuthorID: 13384

для цитирования: Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных призматических стержней, находящихся под действием внешнего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 107–115. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.009 EDN: FTWGTW

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

B. G. Mironov

ON THE THEORY OF TORSION OF HETEROGENEOUS PRISMATIC RODS UNDER EXTERNAL PRESSURE

Russian University of Transport, Moscow, Russia

Abstract. The study investigates the ultimate state of rods made of ideally rigid-plastic heterogeneous material under external pressure linearly varying along the rod's generatrix. The primary relationships describing the ultimate state of heterogeneous rods are considered. Characteristics of the studied relationships and equations along these characteristics are determined. Integrals of the main equations are derived for various conditions of the rod's ultimate state. The problem of the ultimate state of a heterogeneous prismatic rod with a rectangular cross-section under external pressure is studied, assuming that the yield strength linearly depends on the coordinate of the point.

Keywords: torsion, heterogeneity, plasticity, stress, deformation, stress discontinuity line, plasticity condition

Boris G. Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor; e-mail: mbg.chspu@yandex.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-2116-8908>; AuthorID: 13384

to cite this article: Mironov B. G. On the Theory of Torsion of Heterogeneous Prismatic Rods Under External Pressure // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 107–115. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.009 EDN: FTWGTW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Неоднородность механических свойств пластических тел в различных точках вызвана различными причинами: неоднородностью состава, неоднородным упрочнением материала, влиянием потоков элементарных частиц, воздействием температурных градиентов и т.п. Кручение цилиндрического стержня с односвязным поперечным сечением, в предположении, что предел текучести является произвольной функцией координат x и y точки, исследовалась в [1]. Показано, что, как и в случае однородности [2] о чисто пластическом кручении сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка в частных производных. При этом характеристики, вообще говоря, не являются прямыми. Для случая, когда предел текучести меняется вдоль какого-то направления, найдены интегралы исследуемого соотношения. В работе [3] исследована задача о кручении круглого пластического стержня с кусочно-постоянной неоднородностью. Предполагается, что в сечении стержня есть линия раздела материала с различными пределами текучести. Показано, что в случае, когда линия раздела выходит на контур сечения то это приводит к появлению дополнительных линий разрыва напряжений в области с более высоким пределом текучести. Найдены характеристики, линии разрыва напряжений, определен предельный момент. В [4] рассмотрено предельное состояние неоднородных цилиндрических и призматических стержней при линейаризованном условии пластичности. Кручение изотропных и анизотропных стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей, изучено в [5] и [6]. Определены характеристики исследуемых соотношений и найдены соотношения вдоль них. Задача о кручении стержней из упрочняющегося материала не является статически определимой. Отдельные случаи кручения стержней из упрочняющегося материала, находящихся под действием переменного внешнего давления в линейаризованной постановке рассмотрены в работах [7] и [8]. Предельное состояние неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала, находящихся под действием внешнего давления, исследовано в [9]. В работе рассмотрены общие соотношения. Найдены интегралы исследуемых соотношений для различных случаев условий пластичности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние неоднородного стержня из идеального жесткопластического материала. Предположим, что образующие стержня параллельны оси z . Стержень находится под действием переменного внешнего давления линейно меняющегося вдоль образующей стержня. Предположим также, что стержень закручивается вокруг своей оси. При этом боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

2. Построение решений. Компоненты тензора напряжений σ_{ij} в стержне определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu \quad (\lambda, \mu - const) \\ \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \quad (2)$$

условия пластичности

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}, x, y) = 0. \quad (3)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций ε_{ij} в стержне определяются следующими соотношениями

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (4)$$

и соотношением ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \quad (5)$$

Граничное условие на контуре поперечного сечения стержня имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad (6)$$

Согласно соотношению (6), на контуре поперечного сечения вектор $\tau = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ касательного напряжения направлен по касательной к нему.

Продифференцируем соотношение (3) по переменной x и получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Из уравнения равновесия (2) и соотношения (7) имеем

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}. \quad (8)$$

Следовательно, для определения характеристик уравнения (8) и соотношений вдоль этих характеристик получим соотношения

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} \quad (9)$$

В соответствии с (9) характеристики уравнения (8) определяются из соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} dx + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} dy = 0 \quad (10)$$

и соотношения вдоль характеристик находим из уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right) dx = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{yz} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right) dy = 0. \quad (11)$$

Аналогично, из соотношения (3), продифференцированного по переменной y , и уравнение равновесия (2) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}. \quad (12)$$

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \quad (13)$$

И в соответствии с соотношениями (13) имеем, что вдоль характеристик (10) имеют место соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{xz} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) dx = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) dy = 0. \quad (14)$$

Интегралы соотношений (10), (11) и (14), в общем случае, возможно получить только численно. В некоторых случаях, есть возможность проинтегрировать эти уравнения.

Рассмотрим случай, когда условие пластичности (3) имеет вид:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k(x, y) \quad (15)$$

В соответствии с (15) уравнение характеристик (10) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}}, \quad (16)$$

а соотношения (14) запишутся в виде

$$\tau_{yz} d\tau_{xz} = \left(-k \frac{\partial k}{\partial y} + \lambda \tau_{yz} \right) dx, \quad \tau_{xz} d\tau_{yz} = \left(-k \frac{\partial k}{\partial x} + \lambda \tau_{xz} \right) dy. \quad (17)$$

В частности, при $k = k(y)$ из (17) получим

$$\tau_{yz} = \lambda y + c_1, \quad \tau_{xz} = \pm \sqrt{k^2(y) - (\lambda y + c_1)^2}. \quad (18)$$

где $c_1 = const$ вдоль каждой характеристики.

Согласно (18) из уравнения (16) получим

$$x = \mp \int \frac{\lambda y + c_1}{\sqrt{k^2(y) - (\lambda y + c_1)^2}} dy + c_2 \quad (19)$$

где $c_2 = const$ вдоль каждой характеристики.

Аналогично, при $k = k(x)$ из соотношения (17) имеем

$$\tau_{xz} = \lambda x + c_3, \quad \tau_{yz} = \pm \sqrt{k^2(x) - (\lambda x + c_3)^2}. \quad (20)$$

где $c_3 = const$ вдоль каждой характеристики.

В соответствии с (20) из (16) следует

$$y = \mp \int \frac{\lambda x + c_3}{\sqrt{k^2(x) - (\lambda x + c_3)^2}} dy + c_4 \quad (21)$$

где $c_4 = const$ вдоль каждой характеристики.

Рассмотрим призматический стержень с прямоугольным сечением $ABCD$ со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 1). Предположим, что условие пластичности (15) имеет вид

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = (k_0 \operatorname{sign} \tau_{yz} + \lambda y)^2. \quad (22)$$

При этом из (18) получим соотношения для компонент напряжения

$$\tau_{yz} = \lambda y + c_1, \tau_{xz} = \pm \sqrt{(k_0 - c_1)(2\lambda y + k_0 + c_1)}. \quad (23)$$

Уравнения характеристик (19) примут вид

$$x = \mp \frac{\sqrt{2\lambda y + k_0 + c_1}}{3\lambda\sqrt{k_0 - c_1}} (\lambda y - k_0 + 2c_1) + c_2 \quad (24)$$

Вдоль отрезка AB $x = a$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = k_0 + \lambda y$ В области, примыкающей к отрезку AB , компоненты тензора напряжений также имеют вид

$$\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = k_0 + \lambda y \quad (25)$$

Характеристиками являются прямые параллельные оси x .

Вдоль отрезка BC $y = -b$, $\tau_{xz} = k_0 - \lambda b$, $\tau_{yz} = 0$ В области, примыкающей к отрезку BC , компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\tau_{xz} = \sqrt{(k_0 - \lambda b)(2\lambda y + k_0 + \lambda b)}, \tau_{yz} = \lambda(y + b). \quad (26)$$

Характеристиками являются линии, уравнения которых имеют вид

$$\sqrt{2\lambda y + k_0 + \lambda b} (\lambda y - k_0 + 2\lambda b) = -3\lambda\sqrt{k_0 - \lambda b}x + c_{21}, \quad (27)$$

где $c_{21} = const$ вдоль каждой характеристики.

Линия разрыва напряжений, выходящая из вершины B поперечного сечения стержня, определяется уравнением

$$(2\lambda y + k_0 + \lambda b)^3 = (k_0 - \lambda b)(k_0 - \lambda b - 3\lambda(x - a))^2 \quad (28)$$

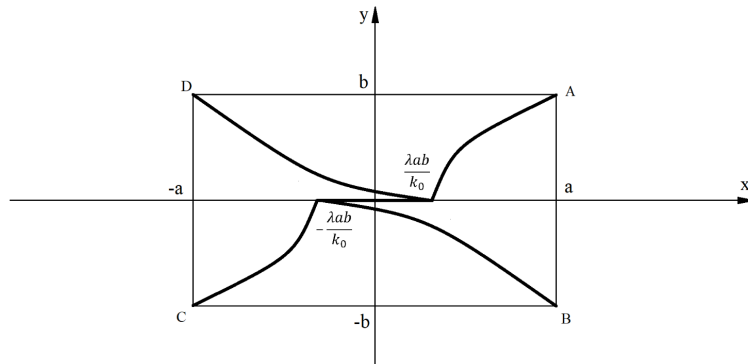


Рис. 1. Расположение линий разрыва напряжений на поперечном сечении стержня

Вдоль отрезка CD $x = -a$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = -k_0 + \lambda y$ В области, примыкающей к отрезку CD , компоненты тензора напряжений также имеют вид

$$\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = -k_0 + \lambda y \quad (29)$$

Характеристиками являются прямые параллельные оси x

Линия разрыва напряжений, выходящая из вершины C поперечного сечения стержня, определяется уравнением

$$(k_0 - \lambda b)(2\lambda y + k_0 + \lambda b)^3 = ((k_0 - \lambda b)^2 + 3\lambda(k_0 + \lambda b)(x + a))^2 \quad (30)$$

Вдоль отрезка DA $y = b$, $\tau_{xz} = -k_0 + \lambda b$, $\tau_{yz} = 0$ В области, примыкающей к отрезку DA , компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\tau_{xz} = -\sqrt{(k_0 - \lambda b)(-2\lambda y + k_0 + \lambda b)}, \tau_{yz} = \lambda(y - b). \quad (31)$$

Характеристиками являются линии, уравнения которых имеют вид

$$\sqrt{-2\lambda y + k_0 + \lambda b}(-\lambda y - k_0 + 2\lambda b) = 3\lambda\sqrt{k_0 - \lambda b}x + c_{22}, \quad (32)$$

где $c_{22} = const$ вдоль каждой характеристики.

Линия разрыва напряжений, выходящая из вершины D поперечного сечения стержня, определяется уравнением

$$(-2\lambda y + k_0 + \lambda b)^3 = (k_0 - \lambda b)(k_0 - \lambda b - 3\lambda(x + a))^2 \quad (33)$$

А линия разрыва напряжений, выходящая из вершины A поперечного сечения стержня, определяется уравнением

$$(k_0 - \lambda b)(-2\lambda y + k_0 + \lambda b)^3 = ((k_0 - \lambda b)^2 + 3\lambda(k_0 + \lambda b)(x - a))^2 \quad (34)$$

3. Заключение. Таким образом в работе

- (1) исследованы основные соотношения, описывающие предельное состояние неоднородных стержней, находящихся под действием линейно меняющегося вдоль образующей внешнего давления;
- (2) определены характеристики исследуемых соотношений и интегралы основных соотношений при различных условиях предельного состояния стержня;
- (3) изучена задача о предельном состоянии неоднородного призматического стержня с прямоугольным сечением, находящегося под внешним давлением, в предположении, что предел текучести линейно зависит от ординаты точки;
- (4) определено поле характеристик исследуемой задачи, найдены линии разрыва напряжений и компоненты тензора напряжений.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кузнецов А. И. The problem of torsion and plane of non-homogeneous body // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. 1958. Vol. 10, no. 4. P. 447–462.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва : Наука, 1966. С. 232.
- [3] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва : Мир, 1964. С. 156.
- [4] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. Кручение неоднородных цилиндрических и призматических стержней из идеально пластического материала при линеаризованном условии пластичности // *Известия РАН. МТТ*. 2020. № 6. С. 65–72. DOI: 10.31857/S0572329920060100.
- [5] Миронов Б. Г., Козлова Л. С. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // *Известия РАН. МТТ*. 2014. № 3. С. 107–113.
- [6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу кручения анизотропных стержней, находящихся под действием внешнего давления // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2023. № 2. С. 160–165. DOI: 10.31857/S0572329922600530.
- [7] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу о кручении стержней из упрочняющегося материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, при линеаризованном условии пластичности // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2022. № 2. С. 82–89. DOI: 10.31857/S0572329922020143.
- [8] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. О кручении стержней из упрочняющегося материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, при линеаризованном законе пластического течения // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2023. № 6. С. 83–88. DOI: 10.31857/S0572329923600226.
- [9] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу кручения неоднородных стержней, находящихся под действием внешнего давления // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2021. № 3 (49). С. 42–46. DOI: 10.37972/chgru.2021.49.3.005.

REFERENCES

- [1] Kuznetsov A. I. The problem of torsion and plane of non-homogeneous body // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. 1958. Vol. 10, no. 4. P. 447–462.
- [2] Ivlev D. D. Theory of Ideal Plasticity. Moscow : Nauka, 1966. P. 232.
- [3] Olshak V., Rykhlevsky Y., Urbanovsky V. Theory of Plasticity of Heterogeneous Bodies. Moscow : Mir, 1964. P. 156.
- [4] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of Heterogeneous Cylindrical and Prismatic Rods Made of Perfectly Plastic Material Under Linearized Plasticity Condition // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT)*. 2020. no. 6. P. 65–72. DOI: 10.31857/S0572329920060100.
- [5] Mironov B. G., Kozlova L. S. Torsion of Prismatic Rods Under Pressure Linearly Varying Along the Generator // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT)*. 2014. no. 3. P. 107–113.
- [6] Mironov B. G., Mironov Y. B. On the Torsion of Anisotropic Rods Under External Pressure // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT)*. 2023. no. 2. P. 160–165. DOI: 10.31857/S0572329922600530.
- [7] Mironov B. G., Mironov Y. B. On the Torsion of Rods Made of Hardening Material Under Variable External Pressure Under Linearized Plasticity Condition // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT)*. 2022. no. 2. P. 82–89. DOI: 10.31857/S0572329922020143.
- [8] Mironov B. G., Mironov Y. B. On the Torsion of Rods Made of Hardening Material Under Variable External Pressure with a Linearized Law of Plastic Flow // *Proceedings*

- of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids (Izvestiya RAN. MTT). 2023. no. 6. P. 83–88. DOI: 10.31857/S0572329923600226.
- [9] Mironov B. G., Mironov Y. B. On the Torsion of Heterogeneous Rods Under External Pressure // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2021. no. 3 (49). P. 42–46. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.005.

Е. В. Мурашкин¹, Ю. Н. Радаев¹

ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В УЛЬТРАГЕМИТРОПНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ ТЕЛЕ

¹ *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

Аннотация. Работа посвящена проблемам, связанным с распространением плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в ультрагемитропном микрополярном термоупругом теле. Приводится замкнутая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно температурного инкремента и перемещений (трансляционных и спинорных). Найдены и проанализированы характеристические уравнения для волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих волн. Получены алгебраические выражения для корней характеристических уравнений и отделены нормальные волновые числа с положительной действительной частью. Для продольной волны комплексные амплитуды температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений оказываются связанными, в отличие от атермической по своей природе поперечной волны.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, ультрагемитропное тело, трансляционное смещение, спинорное смещение, плоская гармоническая по времени волна, продольная волна, поперечная волна, волновое число, комплексная амплитуда, фазовая плоскость, дисперсионное уравнение, вектор поляризации.

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116

для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Плоские гармонические термоупругие волны в ультрагемитропном микрополярном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 2(60). С. 116–128. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.008 EDN: EUXBUD

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

E. V. Murashkin¹, Y. N. Radayev¹

PLANE HARMONIC THERMOELASTIC WAVES IN ULTRAHEMITROPIC MICROPOLAR SOLID

¹*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The study is devoted to problems associated with propagation of plane harmonic coupled waves of temperature increment, translational and spinor displacements in an ultrahemitropic micropolar thermoelastic solid. A closed system of differential equations in partial derivatives of the second order with respect to the temperature increment and displacements (translational and spinor) is revisited. Characteristic equations for wavenumbers of plane harmonic coupled thermoelastic waves are found and analyzed. Algebraic expressions for the roots of the characteristic equations are obtained and normal wavenumbers with a positive real part are separated. For a longitudinal wave, complex amplitudes of the temperature increment, translational and spinor displacements are coupled, in contrast to a transverse wave, which is athermal in nature.

Keywords: micropolar thermoelasticity, ultrahemitropic solid, translational displacement, spinor displacement, plane time-harmonic wave, longitudinal wave, transverse wave, wavenumber, complex amplitude, phase plane, dispersion equation, polarization vector.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116

to cite this article: *Murashkin E. V., Radayev Y. N. Plane harmonic thermoelastic waves in ultrahemitropic micropolar solid // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 2(60). p. 116–128. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.008 EDN: EUXBUD*

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Модели микрополярных континуумов основаны на понятиях спинорных и трансляционных перемещений, определяющих движение элемента деформируемой среды. Указанный способ моделирования микрополярного тела впервые был описан в работе братьев Коссера [1]. Последующие многочисленные работы по микрополярной упругости появились только через 50 лет. Среди них следует отдельно отметить работы отечественных ученых [2, 3], а также работы немецких авторов [4–7]. Векторы спинорных и трансляционных перемещений могут быть введены в теорию способами известными в теоретической механике как теоремы Шаля о поворотах твердого тела. В известных авторам публикациях построение микрополярных теорий основывается на второй теореме Шаля, позволяющей рассматривать векторы спинорных и трансляционных перемещений как независимые векторные/псевдовекторные поля.

Важным классом задач в теориях волновой термомеханики микрополярных сред являются задачи распространения плоских гармонических волн в термоупругих средах. Этот класс задач подготавливает к идентификации полуизотропных микрополярных тел. Волновым задачам термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [8–18]. Тем не менее следует отметить, что некоторые проблемы, существенные как для теории, так и для прикладных вопросов, до сих пор остаются не исследованными. В первую очередь это касается вопросов ориентации в пространстве (поляризаций) для плоских гармонических волн, что препятствует применению теории микрополярной термоупругости в экспериментах и не позволяет говорить о завершенности рассматриваемых исследований. Следует отдельно отметить, что предмет настоящей работы, связанный с распространением гармонических волн в ультрагеомитропной среде, никогда ранее не исследовался. Изложение материала настоящей статьи в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, изложенные в предыдущих статьях [13–27].

2. Распространение плоских связанных гармонических волн в ультрагеомитропном термоупругом микрополярном теле. Связанная система уравнений ультрагеомитропной микрополярной термоупругости может быть записана векторной форме [28]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-2\nabla\times\boldsymbol{\phi}+L(c_4+c_5)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}- \\ \quad -2\alpha_*(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\nabla\theta=\rho G^{-1}(\partial\cdot)^2\mathbf{u}, \\ 2(1+c_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}(c_4+c_5)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-2L^{-1}c_5\nabla\times\boldsymbol{\phi}+ \\ \quad +2L^{-2}(2\boldsymbol{\phi}-\nabla\times\mathbf{u})-2\beta_*\nabla\theta=\rho\mathcal{J}G^{-1}L^{-2}(\partial\cdot)^2\boldsymbol{\phi}, \\ \nabla\cdot\nabla\theta-C\lambda^{-1}\partial\cdot\theta-2G\lambda^{-1}\alpha_*\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\cdot\partial\cdot\mathbf{u}-2G\lambda^{-1}L^2\beta_*\nabla\cdot\partial\cdot\boldsymbol{\phi}=0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микро-длина; c_3, c_4, c_5 , — не имеющие физической размерности псевдоскаляры; α_* —

коэффициент линейного теплового расширения; β — коэффициент теплового искажения; C — теплоемкость на единицу объема (см. [19, 20]). В (1) выполнена замена $C\theta_0^{-1} \rightarrow C$, $\lambda\theta_0^{-1} \rightarrow \lambda$.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1), записанная в терминах вектора трансляционных перемещений \mathbf{u} , вектора спинорных перемещений ϕ и температурного инкремента θ служит основой для исследования сильных и слабых разрывов в микрополярной гемитропной среде, а также волновых процессов, которые в рассматриваемом случае характеризуются одновременным распространением прямых и зеркальных мод.

Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической плоской волны с частотой ω . В этом случае поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений можно представить в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\Phi, \quad \phi = \mathbf{S}\Phi, \quad \theta = B\Phi, \quad \Phi = e^{i \arg \Phi}, \quad \arg \Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \quad (2)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор; \mathbf{r} — радиус вектор; ω — циклическая частота гармонической волны; \mathbf{A} , \mathbf{S} — векторы комплексных амплитуд трансляционных и спинорных перемещений соответственно; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента; Φ — фазовый множитель; $\arg \Phi$ — фаза плоской волны. $\arg \Phi = \text{const}$ — фазовые плоскости. При этом, для существования связанной термоупругой волны необходимо выполнение следующего условия

$$B \neq 0. \quad (3)$$

Отметим, что $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$, где k — комплексное число, \mathbf{s} — вещественный единичный вектор.

После подстановки (2) в систему уравнений (1), связывающую волновой вектор \mathbf{k} , циклическую частоту ω , векторы поляризации плоской волны \mathbf{A} , \mathbf{S} и амплитуду B , получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho G^{-1} \omega^2 \mathbf{A} - 2[1 - \nu](1 - 2\nu)^{-1} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - \\ - L(c_4 + c_5) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) - 2\alpha(1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1} i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathcal{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}] \mathbf{S} - 2(1 + c_3) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) - 2L^{-1} c_5 i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - \\ - L^{-1} (c_4 + c_5) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - 2L^{-2} i\mathbf{k} \times \mathbf{A} - 2\beta i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ (C\lambda^{-1} i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1} \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - 2G\lambda^{-1} L^2 \beta \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Представим векторы комплексных амплитуд трансляционных (\mathbf{A}) и спинорных (\mathbf{S}) перемещений в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}, \quad (5)$$

где векторы \mathbf{A}_\perp и \mathbf{S}_\perp расположены в плоскости перпендикулярной волновому вектору \mathbf{k} , т.е. в плоскости постоянной фазы $\arg \Phi = \text{const}$.

Подставив представление (5) в систему (4), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} [\rho G^{-1} \omega^2] (\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1} A_\parallel k^2 \mathbf{k} - \\ - 2i \mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp - L(c_4 + c_5) S_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2\alpha_* (1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1} i \mathbf{k} B = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}] (\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 + c_3) S_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-1} c_5 i \mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp - \\ - L^{-1} (c_4 + c_5) A_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-2} i \mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp - 2\beta_* i \mathbf{k} B = \mathbf{0}, \\ (C \lambda^{-1} i \omega - k^2) B - 2G \lambda^{-1} \alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \omega A_\parallel k^2 - 2G \lambda^{-1} L^2 \beta_* \omega S_\parallel k^2 = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что система (6) распадается на две независимые системы уравнений, отдельно для продольных и поперечных волн.

3. Волновые числа связанной продольной плоской гармонической волны. Проекция уравнений системы (4) на волновой вектор \mathbf{k} представляет собой замкнутую систему трех линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\omega^2 - \frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)} k^2 \right) A_\parallel - (c_4 + c_5) \rho^{-1} G L k^2 S_\parallel - 2\alpha_* \frac{G(1 + \nu)}{\rho(1 - 2\nu)} i B = 0, \\ [\omega^2 + 4(\rho \mathfrak{J})^{-1} G - 2(1 + c_3)(\rho \mathfrak{J})^{-1} G L^2 k^2] S_\parallel - \\ - (c_4 + c_5)(\rho \mathfrak{J})^{-1} G L k^2 A_\parallel - 2\beta_* (\rho \mathfrak{J})^{-1} G L^2 i B = 0, \\ (C \lambda^{-1} i \omega - k^2) B - 2G \lambda^{-1} \alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \omega A_\parallel k^2 - 2G \lambda^{-1} L^2 \beta_* \omega S_\parallel k^2 = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Для существования нетривиального решения алгебраической системы (7) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \omega^2 - [V_\parallel]^2 k^2 & -a_1 k^2 & -i a_2 \\ -a_1 \mathfrak{J}^{-1} k^2 & \omega^2 + \Omega - (V_\parallel^{\mu\mu})^2 k^2 & -i a_3 \\ -a_4 \omega k^2 & -a_5 \omega k^2 & i a_6 \omega - k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} [V_\parallel]^2 &= \frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)}, & [V_\parallel^{\mu\mu}]^2 &= \frac{2GL^2(1 + c_3)}{\rho \mathfrak{J}}, & a_2 &= 2\alpha_* \frac{G(1 + \nu)}{\rho(1 - 2\nu)}, \\ \rho \mathfrak{J} \Omega &= 4G, & \rho a_1 &= (c_4 + c_5) GL, & \rho \mathfrak{J} a_3 &= 2\beta_* GL^2, \\ \lambda a_4 &= 2G \alpha_* \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}, & \lambda a_5 &= 2GL^2 \beta_*, & \lambda a_6 &= C. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что уравнение (8) совпадает по форме с аналогичным для полуйзотропного термоупругого тела, а матрица \mathbf{A} качественно совпадает с аналогичной для гемитропного тела [29, 30]. Поэтому корни уравнения будем искать аналогичным способом.

Алгебраическое уравнение (8) представляет собой бикубическое уравнение относительно, подлежащего определению, волнового числа k :

$$Q_6 k^6 + Q_4 k^4 + Q_2 k^2 + Q_0 = 0, \quad (10)$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} Q_6 &= a_1^2 \mathfrak{J} - [V_{\parallel} V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2, & Q_0 &= i a_6 \omega^3 (\omega^2 + \Omega), \\ Q_4 &= \left([V_{\parallel}]^2 + [V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2 \right) \omega^2 + [V_{\parallel}]^2 \Omega + i [a_1 (a_3 a_4 + a_2 a_5 \mathfrak{J}) - \\ &\quad - (a_6 Q_6 + a_3 a_5 [V_{\parallel}]^2 + a_2 a_4 [V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2)] \omega, \\ Q_2 &= -\omega^2 \Omega - \omega^4 + i [a_2 a_4 + a_3 a_5 - a_6 ([V_{\parallel}]^2 + [V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2)] \omega^3 - \\ &\quad - i (a_6 [V_{\parallel}]^2 - a_2 a_4) \omega \Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (10) не имеет вещественных корней, т.е. $\text{Im } k \neq 0$, иначе продольная волна оказалась бы не затухающей, что для связанных термоупругих волн невозможно. Указанное обстоятельство связано с неэлиминирующей термической составляющей в связанной термоупругой волне.

Корни уравнения (10) будут иметь вид

$$\begin{aligned} k_{1,2,3} &= \sqrt{Y_{1,2,3} - \frac{Q_4}{3Q_6}}, \\ k_4 &= -k_1, & k_5 &= -k_2, & k_6 &= -k_3. \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$Y_1 = a + b, \quad Y_{2,3} = -\frac{1}{2}(a + b) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b), \quad (13)$$

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

$$p = \frac{2Q_6 Q_2 - Q_4^2}{Q_6^2}, \quad q = \frac{2Q_4^3 - 9Q_6 Q_4 Q_2 + 27Q_6^2 Q_0}{27Q_6^3}. \quad (14)$$

Достаточно выбрать одно из значений квадратного корня $\sqrt{\mathfrak{D}_1}$, а для каждого из трех значений величины a необходимо подбирать такое значение b , для которого выполняется условие

$$ab = -p/3.$$

Значения волновых чисел (12), полученные при исследовании бикубического (10) уравнения, можно впоследствии использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости $k = \text{Re } k + i \text{Im } k$ ($\text{Re } k > 0$).

4. Волновые числа холодной атермической поперечной плоской гармонической волны. Рассмотрим проекции системы линейных уравнений (6) ортогональные направления в фазовой плоскости $\arg \Phi = \text{const}$. Введем в рассмотрение два единичных взаимно ортогональных вектора \mathbf{i} и \mathbf{j} , расположенных в фазовой плоскости. Тогда векторы \mathbf{A}_\perp и \mathbf{S}_\perp можно представить в форме

$$\mathbf{A}_\perp = A_{1\perp} \mathbf{i} + A_{2\perp} \mathbf{j}, \quad \mathbf{S}_\perp = S_{1\perp} \mathbf{i} + S_{2\perp} \mathbf{j}. \quad (15)$$

Проекция системы линейных уравнений (6) на орты \mathbf{i} и \mathbf{j} примут вид

$$\begin{aligned} \omega^2 A_{1\perp} + 2i\rho^{-1} Gk S_{2\perp} &= 0, \\ \omega^2 A_{2\perp} - 2i\rho^{-1} Gk S_{1\perp} &= 0, \\ [\mathfrak{J}\omega^2 + 4\rho^{-1} G] S_{1\perp} + 2iLc_5\rho^{-1} Gk S_{2\perp} + 2i\rho^{-1} Gk A_{1\perp} &= 0, \\ [\mathfrak{J}\omega^2 + 4\rho^{-1} G] S_{2\perp} - 2iLc_5\rho^{-1} Gk S_{1\perp} - 2i\rho^{-1} Gk A_{2\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений (16) необходимо и достаточно, чтобы следующий определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{P}) = \begin{vmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & -ia_8k \\ 0 & \omega^2 & ia_8k & 0 \\ 0 & -ia_8k & \omega^2\mathfrak{J} + 2a_8 & ia_9k \\ ia_8k & 0 & -ia_9k & \omega^2\mathfrak{J} + 2a_8 \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

где введены обозначения:

$$a_8\rho = 2G, \quad a_9\rho\mathfrak{J} = 2Lc_5G. \quad (18)$$

Отметим, что в отличие от аналогичного уравнения для полуизотропного термоупругого тела [29, 30] волновые числа k не присутствуют в элементах главной диагонали \mathbf{P} . Кроме того, видим, что характерные определяющие числа $[V_\perp^\mu]^2 = G(1 + c_1)\rho^{-1}$ и $[V_\perp^{\mu\mu}]^2 = G(1 + c_2)(\rho\mathfrak{J})^{-1}$ равны нулю для ультрагемиотропного тела.

Волновые числа поперечных волн вещественны $\text{Im } k = 0$, что физически очевидно для атермических волн, т.е. связано с холодностью, “атермичностью” поперечной волны и с отсутствием потери энергии при ее распространении и элиминированием термической составляющей. В этом случае транспонированная матрица (17) комплексно-сопряжена исходной, т.е. является Эрмитовой.

Алгебраическое уравнение (17) представляет собой биквадратное уравнение относительно квадрата волнового числа k :

$$a_8^4 k^4 - \omega^2(4a_8^3 + (a_9^2 + 2a_8^2\mathfrak{J})\omega^2)k^2 + \omega^4(2a_8 + \mathfrak{J}\omega^2)^2 = 0 \quad (19)$$

или

$$(a_8^2 k^2 - a_9 k \omega^2 - \omega^2(2a_8 + \mathfrak{J}\omega^2))(a_8^2 k^2 + a_9 k \omega^2 - \omega^2(2a_8 + \mathfrak{J}\omega^2)) = 0 \quad (20)$$

Корни уравнения вычисляются согласно соотношениям:

$$2a_8^2 k_{1,2,3,4} = \pm a_9 \omega^2 \pm \omega \sqrt{8a_8^3 + \omega^2(a_9^2 + 4a_8^2 \mathcal{J})}, \quad (21)$$

где знаки \pm не согласованны. В силу того, что неравенство

$$\omega^2(a_9^2 + 4a_8^2 \mathcal{J}) \geq -8a_8^3, \quad (22)$$

справедливо при любых не отрицательных определяющих постоянных, корни (21) будут вещественными.

Среди корней (21) нормальным волновым числом всегда будет являться

$$2a_8^2 k = a_9 \omega^2 + \omega \sqrt{8a_8^3 + \omega^2(a_9^2 + 4a_8^2 \mathcal{J})}, \quad (23)$$

а корни

$$\begin{aligned} 2a_8^2 k_1 &= -a_9 \omega^2 + \omega \sqrt{8a_8^3 + \omega^2(a_9^2 + 4a_8^2 \mathcal{J})}, \\ 2a_8^2 k_2 &= a_9 \omega^2 - \omega \sqrt{8a_8^3 + \omega^2(a_9^2 + 4a_8^2 \mathcal{J})}, \end{aligned} \quad (24)$$

только при определенных значениях определяющих постоянных.

5. Заключение. В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в ультрагеомитропном термоупругом теле.

- (1) Получена связанная система дифференциальных уравнений с частными производными, записанная в терминах вектора трансляционных перемещений, вектора спинорных перемещений и температурного инкремента для микрополярного ультрагеомитропного тела.
- (2) Указаны алгебраические уравнения для волновых чисел продольных (бикубическое уравнение) и поперечных связанных волн (биквадратное уравнение).
- (3) Волновые числа продольных гармонических волн оказываются комплексными, что соответствует связанности комплексных амплитуд температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений.
- (4) Отмечены характерные отличия дисперсионных соотношений от аналогичных, полученных ранее для полуизотропного тела.
- (5) Вычислены волновые числа поперечных гармонических волн, которые оказываются вещественными. Отделены нормальные волновые числа поперечных волн.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // *Soviet Physics-Solid State*. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
- [3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
- [4] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [5] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // *Int. J. Eng. Sci.* 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [10] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [11] Achenbach J. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
- [12] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *International Journal of Engineering Science*. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.

- [13] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [15] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [18] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [19] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [20] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.

- [27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Thermoelastic Waves in an Ultrahemitropic Micropolar Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 5. P. ??
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. DOI: 10.14498/vsgtu2087.
- [30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Plane Waves in a Semi-Isotropic Thermoelastic Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 4. P. 2387–2394. DOI: 10.1134/S0025654424700316.

REFERENCES

- [1] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // *Soviet Physics-Solid State*. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
- [3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
- [4] G unther W. *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums* // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [5] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // *Int. J. Eng. Sci.* 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [10] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [11] Achenbach J. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
- [12] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *International Journal of Engineering Science*. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [13] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [15] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.

- [18] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [19] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki.* 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [20] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and ductility.* 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [22] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya.* 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids.* 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya.* 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [25] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya.* 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids.* 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids.* 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Thermoelastic Waves in an Ultrahemitropic Micropolar Medium // *Mechanics of Solids.* 2024. Vol. 59, no. 5. P. ??
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Plane Waves in a Semi-Isotropic Thermoelastic Medium // *Mechanics of Solids.* 2024. Vol. 59, no. 4. P. 2387–2394. DOI: 10.1134/S0025654424700316.
- [30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. DOI: 10.14498/vsgtu2087.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mch.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mch.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mch.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трецев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы `Latex 2e` с использованием стиля `predel.sty`. Стил `predel.sty` и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки `VibTeX`. Рисунки представляются отдельно в формате `pdf`, `jpg` с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Патрина Т. А., Степанов С. К.</i> Расчеты на прочность конического редуктора при напряжениях, переменных во времени.....	5
<i>Ткачева А. В., Евстигнеева А. А.</i> Об оценке влияния степени охвата опорным наполнителем сферической керамической оболочки и предварительной проковки на уровень напряжений в материале формы при заливке и затвердевании в ней отливки.....	24
<i>Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Воробьева А. В.</i> Оптимизация априорной оценки аналитического приближенного решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности.....	35
<i>Чернышов Д. А., Бондарев А. С., Ковалев А. В.</i> О сходимости функциональных рядов, применяемых при решении задач термомодеформирования.....	51
<i>Бахмисова М. А., Гоник Е. Г., Сакмарова Л. А.</i> Расчет многослойной ограждающей конструкции стены при воздействии внешних сил и температуры	60
<i>Рытов С. А., Панфилов А. Н., Рытова Т. Г., Антонов Б. Ю., Максимова Л. А.</i> Эффективные методы устройства свай малого диаметра (микросвай) и опыт их применения.....	71
<i>Мурашкин Е. В., Стадник Н. Э.</i> Мультивесовая теория слабых разрывов, распространяющихся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде....	87
<i>Мионов Б. Г.</i> К теории кручения неоднородных призматических стержней, находящихся под действием внешнего давления.....	107
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Плоские гармонические термоупругие волны в ультрагеомитропном микрополярном теле.....	116
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	129
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ.....	132
СОДЕРЖАНИЕ.....	134

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2024. № 2 (60)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 12.12.2024. Выход в свет 18.12.2024.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 16,8.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 397

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38