

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 3(61)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместитель ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

Международный совет: В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев
(Белоруссия)

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2024

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 3(61)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

International Council: V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev
(Belorussia)

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>

В. В. Мыльцин

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ НАГРЕТОЙ ПЛАСТИНКИ

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

Аннотация. В работе приведена математическая модель изотропной пластины, подкреплённой ребрами. Уравнения лицевых поверхностей пластины содержат сингулярные функции Хевисайда. Для учета тонких ребер сделан предельный переход к функциям Дирака. Геометрически нерегулярная изотропная пластина находится в стационарном температурном поле. За основу взята континуальная модель геометрически нерегулярной пластинки. Система дифференциальных уравнений, начальные и краевые условия получены из вариационного принципа Остроградского – Гамильтона. Тангенциальные усилия, входящие в термодинамический потенциал найдены из условия безмоментного состояния пластинки. Функция прогиба ищется в виде двойного тригонометрического ряда с переменными временными коэффициентами. Из дифференциального уравнения для этих коэффициентов найдена собственная частота колебаний, исследование которой проводится при малых прогибах. Анализ собственных частот колебаний пластинки проведен для различных геометрических и термомеханических параметрах.

Ключевые слова: геометрически нерегулярная пластинка, свободные колебания, собственная частота колебаний, метод Бубнова-Галёркина, дельта функция Дирака

Мыльцин Владимир Викторович, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: vova.mylytsin@yandex.ru;
<https://orcid.org/0009-0007-0746-5512>; AuthorID: 15556

для цитирования: Мыльцин В. В. Исследование собственных частот колебаний изотропной геометрически нерегулярной нагретой пластинки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 5–17. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.001 EDN: JEDNSL

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

V. V. Myltsin

INVESTIGATION OF NATURAL FREQUENCIES OF VIBRATIONS OF ISOTROPIC GEOMETRICALLY IRREGULAR HEATED PLATE

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. The paper presents a mathematical model of vibrations of an isotropic plate supported by ribs in a stationary temperature field. The continuum model of a geometrically irregular plate is taken as a basis. The system of differential equations, initial and boundary conditions are obtained from the Ostrogradsky-Hamilton principle. The tangential forces included in the thermodynamic potential are found from the momentless condition of the plate. The deflection function is found as a double trigonometric series with variable time coefficients. From the differential equation for these coefficients, the natural frequency of vibration is found, the study of which is carried out at small deflections. The analysis of the natural frequencies of vibration of the plate is carried out for various geometric and thermomechanical parameters.

Keywords: geometrically irregular plate, free oscillations, natural frequency of vibrations, Bubnov-Galerkin method, Dirac delta function.

Vladimir V. Myltsin, postgraduate student, Faculty of Mathematics and Mechanics; e-mail: vova.myltsin@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0007-0746-5512>; AuthorID: 15556

to cite this article: Myltsin V. V. Investigation of natural frequencies of vibrations of isotropic geometrically irregular heated plate // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 5–17. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.001 EDN: JEDNSL

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Инновационные технологии производства позволяют расширить пространство проектирования, открывая новые возможности для создания конструкций. Еще несколько лет назад многие из этих возможностей были нежизнеспособны с точки зрения производства. Появление этих технологий способствовало переходу к монолитному проектированию летательных аппаратов, морских судов и частей этих конструкций. Возникает вопрос о континуальном рассмотрении таких пластин и оболочек, в которых изменение формы происходит не за счет сборки большого количества механически скрепленных деталей. Рассмотрение таких конструкций и в частности пластинок, укрепленных ребрами, и, являющимися непрерывными моделями, занимались еще в прошлом веке. В [1] в пределах классических гипотез Кирхгофа-Лява построена континуальная модель термоупругой ортотропной системы «оболочка-ребра», выведены уравнения движения подкрепленной ребрами оболочки. В [2] дано решение ряда задач термоустойчивости изотропных и ортотропных прямоугольных пластинок, подкрепленных ребрами жесткости. Дифференциальное уравнение искривления срединной плоскости пластинки получено с использованием дельта функции Дирака. Кроме прямых подкрепляющих элементов, расположенных вдоль осей координат, используются и криволинейные элементы. Часто целью использования криволинейных элементов жесткости является изучение связи изгиба с кручением, что может быть использовано для управления собственными частотами и формами мод, как в [3]. В [4] с позиции нелинейной динамики рассмотрены пластины подкрепленные ребрами. Для решения задачи используется комбинация методов конечных разностей и Рунге-Кутты.

Свободным колебаниям гладких пластинок различной геометрии посвящено много работ, например [5] – [11]. В работе [5] предложен приближенный метод расчета спектра частот собственных колебаний прямоугольных пластин, основанный на эффективном задании аппроксимирующих функций. Для их построения используются самосопряженные одномерные дифференциальные уравнения, параметры которых оптимизируются. Для вычисления собственных частот колебаний прямоугольных металлических пластин в работе [6] применялись расчетные методы: аналитический и метод конечных элементов. В [7] получено аналитическое решение задачи о колебаниях ребристой пластины и абсолютно жесткого штампа, образующих стенки целевого канала, заполненного слоем вязкой несжимаемой жидкости при заданном гармоническом законе вибрации основания канала. В работе [8] вычислена первая собственная частота колебаний прямоугольной пластины с периодически изменяющейся толщиной методом осреднения. В работах [9] – [11] найдены собственные частоты и формы колебаний пластины, жестко закрепленной по всем сторонам или защемленной по двум противоположным краям и свободной по двум другим краям. На примере расчета квадратной пластины проведен анализ ее собственных частот и форм, выполнена оценка влияния граничных условий на колебания различных точек пластины.

В данной работе исследуются собственные колебания геометрически нерегулярной изотропной пластинки с шарнирно опертым краем. Дифференциальное уравнение для функции прогиба геометрически нерегулярной пластины получено вариационным путем и решено с использованием метода Бубнова-Галеркина. Проведен анализ влияния числа ребер, их высоты и ширины, и температуры предварительного нагрева на значения собственных частот колебаний.

1. Основные предположения и допущения. Рассмотрим прямоугольную пластинку со сторонами a и b , подкрепленную ребрами жесткости симметричными относительно срединной плоскости. Материал пластинки упругий, однородный, изотропный. Пластинка находится в постоянном температурном поле θ_0 .

Модель подчиняется следующим гипотезам:

- 1) Гипотеза Кирхгофа.
- 2) Гипотеза «сжатого ребра» – скоростью изменения всех функций по пространственной координате, перпендикулярной ребру, в зоне возмущения толщины пренебрегают.
- 3) Гипотеза температурного поля – нормаль к срединной плоскости не деформируется и не поворачивается при нагреве, отсутствуют внутренние источники тепла.
- 4) Гипотеза Дюгамеля-Неймана – при наличии перепада температур тела изменяют свои размеры прямо пропорционально этому перепаду.

Систему координат введем вдоль двух соседних сторон пластинки. Относительно ребер сделаем предположения [2]:

- 1) Действия ребер сосредоточены по линиям, совпадающим с координатными линиями срединной плоскости $x_1 = x_1^i$ (Рис. 1).
- 2) Деформация пластинки с ребрами происходит без изломов и разрывов на линиях их соединения.
- 3) Считаем, что ребра работают только на изгиб в плоскости $x_2 O x_3$.

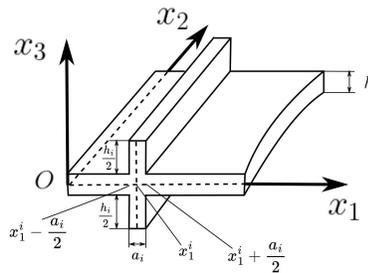


Рис. 1. Геометрически нерегулярная пластинка

Лицевые поверхности пластинки опишем функциями

$$Z^{\pm}(x_1) = \pm \left(\frac{h}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{2} \chi_i \right), \quad (1)$$

где $\chi_i = 1$ при $x \in (x_1^i - \frac{a_i}{2}; x_1^i + \frac{a_i}{2})$, иначе $\chi_i = 0$ или

$$\chi_i(x_1, x_1^i, a_i) = H \left(x_1 - \left(x_1^i - \frac{a_i}{2} \right) \right) - H \left(x_1 - \left(x_1^i + \frac{a_i}{2} \right) \right),$$

здесь $H(x_1 - x)$ – функция Хевисайда в точках $x_1^i \pm \frac{a_i}{2}$ не определена, но ограничена, причем

$$a_i \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\chi_i}{a_i} = a_i \delta(x_1 - x_1^i),$$

$\delta(x_1 - x_1^i)$ – дельта функция Дирака, n – число ребер, которые расположены вдоль прямых $x_1 = x_1^i$, a_i и h_i – ширина и высота i -го ребра.

2. Вывод и решение уравнения изгиба геометрически нерегулярной пластинки. Для вывода дифференциального уравнения применяется вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, тогда для истинного движения системы между двумя конфигурациями имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) потенциальная и кинетическая энергия термоупругой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^a \int_0^b \left\{ D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \right. \\ & + T_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + T_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + T_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n T_{22}^p \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \delta(x_1 - x_1^i) + \\ & \left. + \sum_{i=1}^n D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \delta(x_1 - x_1^i) \right\} dx_1 dx_2 \\ K = & \frac{\gamma}{g} \int_0^a \int_0^b \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^n h_i a_i \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \delta(x_1 - x_1^i) \right) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

а элементарная работа A внешних сил равна

$$A = \int_0^a \int_0^b q w dx_1 dx_2.$$

После преобразований и интегрирования получим дифференциальное уравнение для прогиба геометрически нерегулярной изотропной пластинки в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w + \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \Phi_{3i} w_{,2222} a_i \delta(x_1 - x_1^i) - \frac{T_{22}}{D} w_{,22} + \sum_{i=1}^n \frac{T_{22}^p}{D} a_i w_{,22} \delta(x_1 - x_1^i) + \\ + \frac{\gamma h}{gD} w_{,tt} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma h_i a_i}{gD} w_{,tt} \delta(x_1 - x_1^i) = \frac{q}{D}, \end{aligned} \quad (3)$$

в котором $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, $\Phi_{3i} = 1 + 3\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$, n – число ребер, которые расположены вдоль прямых $x_1 = x_1^i$, a_i – ширина i -го ребра, h_i – высота i -го ребра $\delta(y - y_i)$ – дельта функция Дирака, γ – удельный вес, g – интенсивность поля тяжести.

Уравнение (3) будем решать при краевых условиях

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad w = 0, M_{11} = 0; \quad (4)$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad w = 0, M_{22} = 0; \quad (5)$$

и начальных условиях

$$\text{при } t = 0, \quad w = \varphi(x_1, x_2), \quad \dot{w} = 0. \quad (6)$$

Усилия T_{11} , T_{22} , T_{11}^p , T_{22}^p , T_{12}^p возникающие в пластинке [12], когда она имеет плоскую форму равновесия, то есть находится в безмоментном состоянии, найдены из системы

$$\begin{aligned} T_{11,1} + T_{12,2} + \sum_{i=1}^n a_i T_{12,2}^p \delta(x_1 - x_1^i) = 0, \\ T_{22,2} + T_{12,1} + \sum_{i=1}^n a_i T_{22,2}^p \delta(x_1 - x_1^i) = 0, \end{aligned}$$

которая решена при следующих краевых условиях

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad T_{12} = T_{11} = 0,$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad T_{12} = 0, v = 0.$$

Для решения безмоментной системы усилия выражены через компоненты поля перемещений и принимают вид

$$T_{11} = B(u_{,1} + \nu v_{,2} - (1 + \nu)\alpha\theta_0),$$

$$T_{22} = B(v_{,2} + \nu u_{,1} - (1 + \nu)\alpha\theta_0),$$

$$T_{12} = Gh(u_{,2} + v_{,1}),$$

здесь $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. А краевые условия имеют вид

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a : u_{,2} + v_{,1} = 0, \quad u_{,1} + \nu v_{,2} = (1 + \nu)\alpha\theta_0,$$

при $x_2 = 0, x_2 = b : u_{,2} + v_{,1} = 0, v = 0$.

Таким образом T_{22} и T_{22}^p принимают вид

$$T_{22} = -Eh\alpha\theta_0, \quad T_{22}^p = -Eh_i\alpha\theta_0.$$

Здесь α коэффициент теплового линейного расширения материала.

После **перехода к безразмерным переменным** по следующим формулам:

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \eta = \frac{x_2}{b}, \quad \xi_i = \frac{x_1^i}{a}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad \tau = \frac{hc_1}{ab}t, \quad (7)$$

$$c_1^2 = \frac{E}{12(1-\nu^2)\rho}, \quad \rho = \frac{\gamma}{g}, \quad \theta_0^* = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \alpha\theta_0,$$

получаем уравнение в безразмерной форме, в котором сразу заменили W^* на W

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \left(\frac{a}{b}\right)^4 \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i} \frac{a_i}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \delta(\xi - \xi^i) - \\ - 12(1-\nu^2)\theta_0 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 12(1-\nu^2)\theta_0 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \delta(\xi - \xi^i) + \\ + 12(1-\nu^2) \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 12(1-\nu^2) \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \delta(\xi - \xi^i) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь использовано свойство дельта функции $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

Решение уравнения (8), в случае шарнирного опирания краев пластинки, ищем в виде

$$w(\xi, \eta, \tau) = \sum_{k,m} \zeta_{km}(\tau) \sin(k\pi\xi) \sin(m\pi\eta), \quad (9)$$

при краевых условиях

$$\text{при } \xi = 0, \xi = 1 \quad w = 0, \quad w_{,11} = -\alpha\theta_0(1+\nu) \left(\frac{a}{h}\right)^2, \quad (10)$$

$$\text{при } \eta = 0, \eta = 1 \quad w = 0, \quad w_{,22} = -\alpha\theta_0(1+\nu) \left(\frac{a}{h}\right)^2, \quad (11)$$

и начальных условиях

$$\text{при } \tau = 0 : \quad w = A \sin(\pi\xi) \sin(\pi\eta), \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0. \quad (12)$$

Переход в краевых и начальных условиях (4), (5), (6) к условиям (10), (11), (12) осуществлен по формулам (7).

Подстановка решения (9) в дифференциальное уравнение (8) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\zeta_{km}''(\tau) + \omega_{0,km}^2 \zeta_{km}(\tau) = 0,$$

$\omega_{0,km}^2$ принимают вид

$$\omega_{0,km}^2 = \frac{1}{12(1-\nu^2)\left(\frac{a}{b}\right)^2\beta_i^s} \left(\left((k\pi)^2 + (m\pi)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right)^2 + \right. \quad (13)$$

$$\left. + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^4 (m\pi)^4 \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a} \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i} \sin^2(k\pi\xi^i) - 12(1-\nu^2)\theta_0 \left(\frac{a}{b}\right)^2 (m\pi)^2 \beta_i^s \right),$$

где $\beta_i^s = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h} \frac{h_i}{h} \sin^2(k\pi\xi^i)$.

3. Численный эксперимент и анализ. Численный эксперимент состоит в вычислении значений собственных частот и построении функции прогиба при различных геометрических параметрах и температуры. На рисунке 2 показано расположение ребер относительно срединной плоскости пластинки, для случаев одного а), двух б) и трех в) ребер.

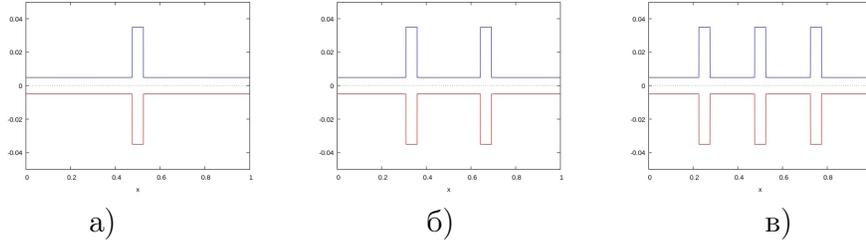


Рис. 2. Профиль пластинки

Для выяснения **достоверности** полученных результатов сравнили значения собственных частот колебаний пластин, подкрепленных ребрами двумя методами: Бубнова — Галеркина и методом конечных разностей второго порядка точности. По оси Ox отложены отношения объема присоединенных ребер V_m к объему пластины V , по оси Oy значение первой частоты. Для наглядности точки соединены линиями. Из приведенных графиков на рисунке 3 следует, что получено хорошее совпадение результатов принципиально разными по своей природе методами: конечно-разностный и вариационный методы. Предварительно исследовалась сходимость метода конечных разностей в зависимости от количество участков деления пластины по осям Ox и Oy .

Исследование приведем для материала со следующими механическими параметрами: $E = 330 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $\nu = 0,320$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{°C}}$, $\rho = 1500 \text{ кг/м}^3$ и геометрическими параметрами, если не указано иного, то $a = b$, $a/h = 80$, $a = 50$, одно ребро, и примем дополнительные параметры $p = \frac{h_i}{h} = 1, 3, 5, 10$, $a_i = h \cdot j$, j - параметр толщины ребра, $z = \frac{a}{b}$ - параметр отношения сторон пластинки

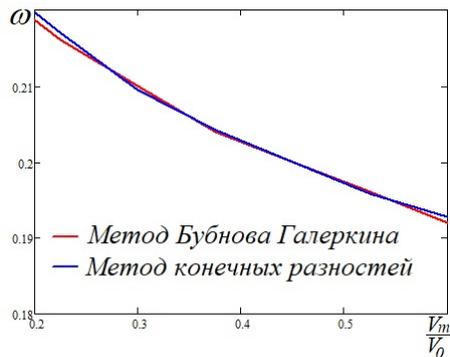


Рис. 3. Сравнение частоты ω_{11} разными методами

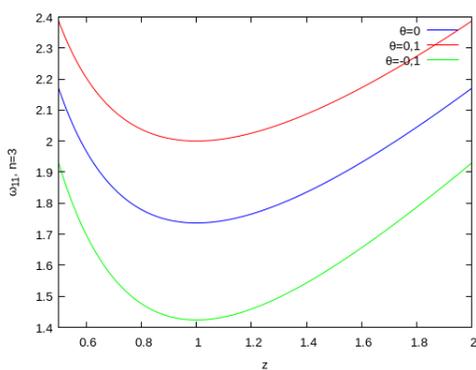


Рис. 4. Зависимость ω_{11} от отношения a/b

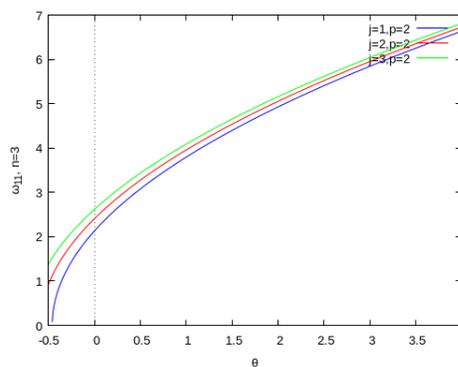


Рис. 5. Зависимость ω_{11} от температуры θ_0 при различных значениях h_i/h

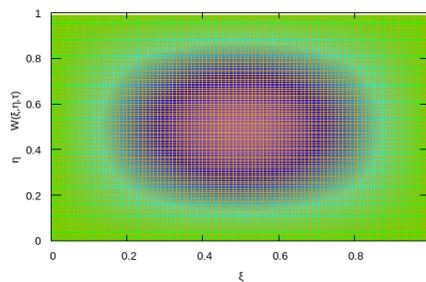
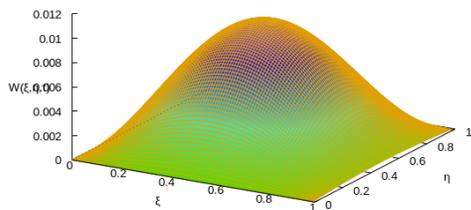
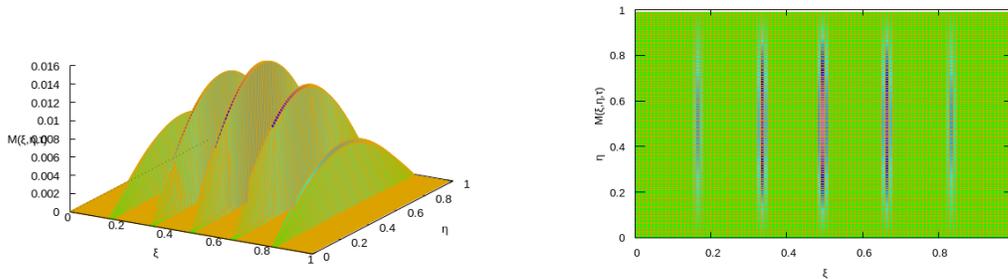


Рис. 6. $w(\xi, \eta)$

В результате исследований был проведен анализ влияния геометрических параметров и температуры на поведение собственных частот колебаний и сделаны следующие **выводы**:

Рис. 7. $M^p(\xi, \eta)$

- 1) Получена формула для вычисления собственной частоты методом Бубнова-Галёркина и проведено сравнение с результатами полученными методом конечных разностей второго порядка точности в сочетании с методом Рунге-Кутты четвертого порядка.
- 2) При отсутствии ребер и температуры частоты собственных колебаний, полученных по формуле (13), совпадают с частотами в классическом случае [13].
- 3) При удлинении пластинки частота изменяется в соответствии с рисунком 4. Наименьшие значения частота принимает у квадратной пластинки.
- 4) При увеличении температуры частоты собственных колебаний увеличивается с ростом параметров. Графики поведения значений собственной частоты ω_{11} , для различных значений отношения высоты ребра к толщине пластинки, приведены на рисунке 5.
- 5) Собственная частота колебаний с увеличением числа ребер и с увеличением их высоты увеличивается не по линейному закону.
- 6) Сходимость метода исследована двумя способами: стандартным и змейкой [14], и подтверждается значением абсолютной погрешности, которое не превосходит 0,07. В таблице 1 приведены значения функции прогиба для пластинки с одним и тремя ребрами. Это сравнение построенных функций в зависимости от членов ряда (9) позволяет сделать вывод что достаточно взять одно или два слагаемых.
- 7) На рисунках 6 – 7 приведена визуализация поверхности прогиба и распределения моментов на пластинке с ребрами и соответствующие им линии уровней.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100 %.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

$W(0, 3; 0, 7)$, одно ребро, $\tau = 26$, $b = 2a$			
способ сложения \ число слагаемых	4	9	16
стандартное	-0,1135	-0,1095	-0,0923
змейкой	-0,1128	-0,0942	-0,0800
$W(0, 3; 0, 7)$, три ребра, $\tau = 26$, $b = 2a$			
способ сложения \ число слагаемых	4	9	16
стандартное	-0,1218	-0,1039	-0,0790
змейкой	-0,1098	-0,0834	-0,0928

Таблица 1. Значение функции прогиба при разном числе слагаемых ряда и способе сложения

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100 %.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белосточный Г.Н., Рассудов В.М. Континуальная модель термоупругой ортотропной системы «оболочка - ребра» с учетом влияния больших прогибов // Механика деформируемых сред. Т.8, 1983. С. 10-22. EDN: UTEGRD
- [2] Белосточный Г.Н., Рассудов В.М. Устойчивость нагретых пластинок, подкрепленных ребрами жесткости // Механика деформируемых сред. Т.5, 1978. С. 124-137. EDN: VCLKCD
- [3] Locatelli D, Mulani SB, Karania RK. Wing-box weight optimization using curvilinear spars and ribs (SpaRibs) // J Aircraft 2011; 48(5):1671–1684. DOI:10.2514/1.C031336
- [4] Awrejcewicz J., Krysko A. V., Krysko V. A., Babenkova V. V., Mrozowski J., Papkova I. V. Chaos vibrations of two-layered beams and plates with design nonlinearities // Bifurcation and Chaos. – 2011; Vol. 21, No. 10: 2837-2851. DOI:10.1142/S0218127411030179
- [5] Власова Е.В. Об определении частот собственных колебаний прямоугольных пластин с одной свободной кромкой // Вестник ВГУ, серия: Физика. Математика, 2007, № 1. С. 42-45. EDN: OYXODL
- [6] Морозов Н.А., Гребенюк Г.И., Максак В.И., Гаврилов А.А. Исследования собственных колебаний прямоугольных пластин // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2023. Т. 25. № 3. С. 96–111. DOI:10.31675/1607-1859-2023-25-3-96-111. EDN: IBTUVQ
- [7] Скородумов Е.С., Кондратов Д.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания геометрически нерегулярной пластины и штампа, взаимодействующих друг с другом через слой вязкой жидкости // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 11-2, 2016. С. 37-53. EDN: XDYLUX
- [8] Наумова Н.В., Иванов Д. Н., Дорофеев Н.П. Колебания пластины с периодически изменяющимися параметрами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8. Вып. 4. С. 661–669. DOI:10.21638/spbu01.2021.412
- [9] Еремьянц В.Э., Панова Л.Т., Асанова А.А. Анализ собственных частот и форм колебаний прямоугольной пластины, заземленной по двум противоположным краям // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2009. Т. 9. № 1. С. 64-70.

- [10] Крылова Е.Ю. Поведение гибкой сетчатой пластины, находящейся в электростатическом поле // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16. № 3. С. 387-400. DOI:10.7242/1999-6691/2023.16.3.33
- [11] Крылова Е.Ю., Саркисян С.О. Изучение электромеханического поведения графена на основе моментно-мембранной теории упругих пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 4. С. 54-67. DOI:10.15593/perm.mech/2023.4.06
- [12] Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Часть I. Том 1. М.: Морской транспорт, 1945. 618 с.
- [13] Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: «Наука», 1967. – 964 с.
- [14] Бессонов Л. В. Численная реализация метода последовательного возмущения параметров при расчете напряжённо-деформированного состояния оболочечной конструкции в случае жесткого закрепления краев оболочки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. Т. 15, № 1, 2015. С. 74-79. DOI:10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79

REFERENCES

- [1] Belostochny G. N., Rassudov V. M. Continuum model of thermoelastic orthotropic system «shell - ribs» taking into account the effect of large deflections // Mechanics of deformable mediums. 1983. no. 8. P. 10–22. EDN: UTEGRD. (in Russian).
- [2] Belostochny G. N., Rassudov V. M. Stability of heated plates supported by stiffeners // Mechanics of deformable mediums. 1978. no. 5. P. 124–137. EDN: VCLKCD. (in Russian).
- [3] Locatelli D., Mulani SB., Kapania RK. Wing-box weight optimization using curvilinear spars and ribs (SpaRibs) // J Aircraft. 2011. no. 48(5). P. 1671–1684. DOI: 10.2514/1.C031336.
- [4] Awrejcewicz J., Krysko A. V., Krysko V. A. et al. Chaos vibrations of two-layered beams and plates with design nonlinearities // Bifurcation and Chaos. 2011. no. 21(10). P. 2837–2851. DOI: 10.1142/S0218127411030179.
- [5] Vlasova E.V. Determination of characteristic vibration frequencies for the rectangular plate with a free boundary // Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2007. no. 1. P. 42–45. EDN: OYXODL. (in Russian).
- [6] Morozov N.A., Grebenyuk G.I., Maksak V.I., Gavrilov A.F. Free vibrations of rectangular plates // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2023. no. 25(3). P. 96–111. EDN: IBTUVQ. DOI: 10.31675/1607-1859-2023-25-3-96-111. (in Russian).
- [7] Skorodumov E.S., Kondratov D.V., Kuznetsova E.L. et al. The oscillations of geometrically irregular plate and stamp, interacting through the viscous liquid layer // News of the Tula state university. Technical sciences. 2016. no. 11 (2). P. 37 – 53. EDN: XDYLUX. (in Russian).
- [8] Naumova N. V., Ivanov D. N., Dorofeev N. P. Plate vibrations with periodically changing parameters // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. 2021. no. Vol 8, № 4. P. 661 – 669. DOI: 10.21638/spbu01.2021.412. (in Russian).
- [9] Eremyants V.E., Panova L.T., Asanova A.A. Analysis of natural frequencies and forms of vibrations of a rectangular plate pinned at two opposite edges // Herald of KRSU. 2009. no. Vol. 9, No. 1. P. 64 – 70. EDN: LLALVF. (in Russian).
- [10] Krylova E.Yu. Behavior of a flexible mesh plate placed in an electrostatic field // Computational Continuum Mechanics. 2023. no. 16(3). P. 387 – 400. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.3.33. (in Russian).

- [11] Krylova E.Yu., Sargsyan S.H. Studying Graphene Electromechanical Behavior Based on the Elastic Plates Moment-Membrane Theory // PNRPU Mechanics Bulletin. 2023. no. 4. P. 54 – 67. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.06. (in Russian).
- [12] Папкович П.Ф. The structural mechanics of a ship. Part I. Vol. 1. М. : Sea transport, 1945. 618 p. (in Russian).
- [13] Волмир А.С. Stability of deformable systems. М. : Nauka, 1967. 964 p. (in Russian).
- [14] Бессонов Л.В. Numerical Implementation of Method of Subsequent Perturbation of Parameters for Computation of Stress-Strain State of a Shell Rigidly Fixed on the Boundaries // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2015. no. Vol. 15, № 1. P. 74 – 79. EDN: TMMCLX. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79. (in Russian).

В. А. Худякова, С. Г. Жилин, В. В. Предеин, Н. А. Богданова

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МИКРОТВЕРДОСТИ ЖЕЛЕЗОАЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ ОТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАГРЕВА ИСХОДНЫХ ШИХТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ АЛЮМОТЕРМИТНОГО ПЕРЕПЛАВА

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре,
Россия*

Аннотация. В машиностроении, металлургии и электротехнике различные фазы интерметаллидных железоалюминиевых сплавов, ввиду высокой стойкости к коррозии и абразивному износу, находят применение в качестве покрытий элементов конструкций, эксплуатирующихся в условиях сложного нагружения и высоких температур. Относительно невысокая стоимость и распространенность компонентов таких сплавов определяет экономическую целесообразность их применения. Промышленное получение таких сплавов и покрытий на их основе, как правило, осуществляется в ходе значительного числа технологических операций, что затрудняет расширение номенклатуры изделий и определяет пути поиска альтернативных методов. Применение алюмотермитного перепада шихтовых материалов, состоящих из смеси фракций окислы и алюминидных сплавов, позволяет свести процесс получения интерметаллидных сплавов на основе Fe-Al практически до одной стадии. Ввиду недостатка практических сведений о таком процессе, прогнозирование свойств итоговых сплавов в настоящее время представляется затруднительным. В ходе серии предварительных исследований удалось получить сплавы с содержанием Al, превышающим 50 %. В работе представлены результаты экспериментов по определению влияния дополнительного тепла, вносимого в исходные материалы, на ряд характеристик и значения микротвердости железоалюминиевых сплавов, получаемых экзотермическим перепадом термитных шихт.

Ключевые слова: термитная шихта, теплофизическое воздействие, алюминиды железа, прочность материала, твердость интерметаллидного сплава.

Худякова Вилена Александровна, аспирант; e-mail: ms.viliena@mail.ru; AuthorID: 1216752

Жилин Сергей Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: sergeyzhilin1@rambler.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0865-7109>; AuthorID: 177858

Предеин Валерий Викторович, кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: predein3@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-5808-2104>; AuthorID: 508510

Богданова Нина Анатольевна, младший научный сотрудник лаборатории проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: joyful289@inbox.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8769-8194>; AuthorID: 644043

для цитирования: Худякова В. А., Жилин С. Г., Предеин В. В., Богданова Н. А. Экспериментальное определение зависимости микротвердости железоалюминиевых сплавов от предварительного нагрева исходных шихтовых материалов, предназначенных для алюмотермитного переплава // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 18–31. DOI: 10.37972/chgru.2024.61.3.003 EDN: KKT SAM

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

V. A. Khudyakova, S. G. Zhilin, V. V. Predein, N. A. Bogdanova

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE DEPENDENCE OF MICROHARDNESS OF IRON-ALUMINUM ALLOYS ON PRE-HEATING OF INITIAL CHARGE MATERIALS INTENDED FOR ALUMOTHERMITIC REMELTING

Institute of Mechanical Science and Metallurgy Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. In mechanical engineering, metallurgy and electrical engineering, various phases of intermetallic iron-aluminum alloys, due to their high resistance to corrosion and abrasive wear, are used as coatings for structural elements operating under conditions of complex loading and high temperatures. The relatively low cost and prevalence of the components of such alloys determine the economic feasibility of their use. Industrial production of such alloys and coatings based on them, as a rule, is carried out in the course of a significant number of technological operations, which complicates the expansion of the product range and determines the paths to find alternative methods. The use of aluminothermic remelting of charge materials consisting of a mixture of scale fractions and aluminum alloys makes it possible to reduce the process of obtaining intermetallic alloys based on Fe-Al to practically one stage. Due to the lack of practical information on such a process, predicting the properties of the final alloys currently seems difficult. A series of preliminary studies made it possible to obtain alloys with an Al content exceeding 50%. The paper presents the results of experiments to determine the effect of additional heat introduced into the source materials on a number of characteristics and microhardness values of iron-aluminum alloys obtained by exothermic remelting of thermite batches.

Keywords: thermite charge, thermophysical effect, iron aluminides, material strength, hardness of intermetallic alloy

Vilena A. Khudyakova, graduate student; e-mail: ms.viliena@mail.ru;
<https://orcid.org/0009-0001-5695-3447>; AuthorID: 1216752

Sergey G. Zhilin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Laboratory for the Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: mail1@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-0865-7109>; AuthorID: 177858

Valery V. Predein, Candidate of Technical Sciences, Researcher, Laboratory for the Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: predein3@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-5808-2104>; AuthorID: 508510

Nina A. Bogdanova, Junior Researcher, Laboratory of Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: joyful289@inbox.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-8769-8194>; AuthorID: 644043

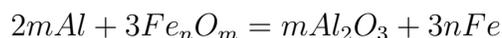
to cite this article: Khudyakova V. A., Zhilin S. G., Predein V. V., Bogdanova N. A. Experimental determination of the dependence of microhardness of iron-aluminum alloys on pre-heating of initial charge materials intended for aluminothermic remelting // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 18–31. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.003 EDN: KKTSAM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Достижение конкурентоспособности предприятий машиностроения и металлургии в современных условиях определяется взаимоувязкой таких факторов, как эффективное использование материалов, энергии, времени и экологичности применяемых технологий [1, 2]. Мировая практика устойчивого функционирования предприятий, специализирующихся на выпуске и обработке металлопродукта, формируемого из черных и цветных сплавов сводится, преимущественно, к реализации рационального производства, базирующегося на вариациях рециклинга металлосодержащих материалов [3].

Так, например, в прокатной железной окалине, образующейся в результате технологических переделов в металлургии, содержание железа иногда превышает 70 % по массе [4]. Для извлечения железа из отходов промышленного производства применяют как традиционные (брикетирование, переплав), так и инновационные (например, обжиг с последующей магнитной сепарацией) методы [5–7]. Эффективность применения таких методов, определяется реализацией повторного вовлечения металлов в производственный цикл. Следует, однако, отметить, что процессы переработки, осуществляемые в ходе значительного числа технологических операций, представляются энергетически затратными.

Перспективу повышения эффективности переработки железосодержащего сырья представляют одностадийные окислительно-восстановительные процессы экзотермического переплава шихтовых материалов. Такие материалы состоят из различных комбинаций соотношения фракций окалины и сплавов на основе алюминия [8]. Процесс расплавления компонентов термитной шихты протекает по реакции:



В целом, для получения железосодержащего сплава, в термитной шихте должно быть 17-25 % активного алюминия (остальное окалина). По завершении реакции, ввиду разности плотностей, происходит произвольное разделение продуктов реакции: в нижней части слитка – железосодержащий сплав, в верхней – шлак (оксид алюминия Al_2O_3).

Экзотермическая реакция в термитных шихтах такого состава протекает с выделением тепла, что обуславливает необходимость использования высокоогнеупорных материалов реактора и форм, пригодных для кратковременных условий эксплуатации при температуре более 2500 °С [9]. Для осуществления экспериментов, связанных с получением алюмотермитных железосодержащих расплавов в лабораторных условиях Института машиноведения и металлургии ДВО РАН (г. Комсомольск-на-Амуре) используется реактор, выполненный из графитированного электрода марки ЭГ15. Однако, в результате эксплуатации, ввиду увеличения числа теплосмен и активного воздействия расплава, элементы конструкции даже такого реактора разрушаются, что обуславливает поиск вариантов снижения негативного воздействия отмеченных выше факторов. Также, в результате ранее проведенных экспериментов, связанных с экзотермическим получением железоуглеродистых сплавов, установлена целесообразность предварительного подогрева термитных шихт, содержащих 20-24 % по

массе активного алюминия до температуры 400 °С, что позволяет более точно прогнозировать химический состав итоговых сплавов, а также повысить выход металлической фазы [10].

В ходе предварительных исследований вариацией соотношений исходных компонентов в термитных шихтах определена возможность применения алюмотермии для получения интерметаллидных железоалюминиевых соединений на основе Fe и Al с различным содержанием этих компонентов в итоговых сплавах [11]. Так, при алюмотермическом переплаве термитных шихт с содержанием активного алюминия 17,24-47,41 % удается получать железоалюминиевые сплавы с итоговым содержанием алюминия в них 0,009-47,9, а железа 99,4-48,2 % соответственно. Увеличение содержания Al в итоговом сплаве при обычных условиях формирования слитка оказывается затруднительным и обуславливает необходимость поиска альтернативных технологических вариантов, среди которых дополнительное внесение тепла в исходные материалы перед активацией алюмотермического процесса до настоящего времени не рассматривалось [12]. Новизна исследований определяется возможностью управления результатами процессов формирования Fe-Al сплавов в условиях кратковременного взаимодействия компонентов в образующихся расплавах, что пока представляется изученным в недостаточной мере.

В этой связи целью работы является определение влияния содержания алюминия в исходных термитных шихтах на характеристики интерметаллидных сплавов на основе Fe и Al, получаемых алюмотермией, а также значения их микротвердости. Результаты исследования направлены в том числе на реализацию возможности снижения влияния факторов теплофизического воздействия на материалы реактора для повышения срока его эксплуатации.

1. Методы и подходы. Экспериментальные железоалюминиевые сплавы различного состава получали путем алюмотермического переплава термитных шихт, компонентами которых являются равные по размерам частицы (фракции 0,2-1,5 мм) металлургической окалины и алюминиевого сплава [2], что позволяет снизить сепарацию разноплотностных компонентов термитных шихт. Переплав производили в реакторе, выполненном в виде полого глухонного цилиндра с толщиной стенки 10 мм, снабженного в верхней части крышкой с газоотводным патрубком, а в донной части сливным отверстием и втулкой. Внутренний объем реактора составляет 0,0008 м³, что позволяет гарантированно размещать в нем 1 кг термитных шихт вне зависимости от соотношения в них компонентов. Содержание активного Al в термитных шихтах изменялось в диапазоне 25-60 % по массе (остальное окалина). С целью удаления влаги из огнеупорных и шихтовых материалов, а также снижения разницы температур между началом процесса и его завершением, термитные шихты подвергали нагреву до температуры 400 °С и выдержке в течение 1 часа в термической печи SNOL 12/1300.

Реактор соосно устанавливали над литейной формой, конфигурация внутренней полости которой позволяет получать цилиндрическую отливку диаметром

28 мм и протяженностью до 150 мм (в зависимости от массового выхода металлической фазы). В термитной шихте, размещенной в реакторе, осуществляли окислительно-восстановительный процесс, по завершении которого железоалюминиевый расплав выпускали в литейную форму. В процессе выпуска осуществляли регистрацию температуры расплава посредством бесконтактного инфракрасного пирометра ASP Swift 350 PL. Образцы железоалюминиевых сплавов (металлическую фазу) взвешивали, и подвергали исследованиям:

- на химический состав (путем анализа образцов, выполненных, согласно ГОСТ 7565-81 «Чугун, сталь и сплавы. Метод отбора проб для определения химического состава» при помощи энергодисперсионного рентгеновского флуоресцентного спектрометра EDX-8000);
- микроструктуру (в ходе визуальной регистрации, осуществляемой при помощи цифровой камеры, совмещенной с металлографическим инструментальным микроскопом Axio Vert.A1 MAT, поверхности микрошлифов наиболее характерных экспериментальных образцов, обработанных реактивом Келлера [13]);
- микротвердость (согласно ГОСТ 9450-76 «Измерение микротвердости вдавливанием алмазных наконечников» при помощи цифрового стационарного микротвердомера HVS-1000).

2. Основное содержание. В ходе проведенных в настоящей работе экспериментов устанавливали особенности влияния дополнительного внесения тепла в исходные термитные шихты, размещенные в реакторе, на температуру струи расплава, образующегося в результате экзотермической реакции, массовый выход металлических фаз, структуру и содержание элементов в итоговых сплавах, а также значения микротвердости HV, характерные для ряда структурных составляющих образующихся железоалюминиевых фаз. Результаты эксперимента, представленные в графической части работы, отражают зависимости ряда рассмотренных выше параметров от содержания активного алюминия в исходных термитных шихтах.

На рис.1. представлены результаты эксперимента по определению влияния предварительного нагрева термитных шихт до 400 °С на температуру струи расплава, образующегося в ходе экзотермического переплава последних. Результаты представлены в виде сравнения степенных зависимостей температур, характерных для переплава «холодных» термитных шихт, активируемых без предварительного подогрева (кривая 1), и шихт с дополнительно внесенным теплом перед активацией процесса расплавления (кривая 2). На рис.1 и на рис.3 дополнительно представляются значения R^2 величин достоверности аппроксимации для каждой из зависимостей и уравнения этих зависимостей.

На рис.1 в виде линейной зависимости 3 также представлены результаты термогравиметрического анализа (TGA) материала реактора, полученные при помощи термографического дифференциально-термического анализатора DTG-60H (Shimadzu, Япония). Линия 3 на рис.1 отображает температуру 630 °С,

при превышении которой материал реактора начинает окисляться со средней скоростью 0,023 %/с [2]. Очевидно, что чем выше значения температур расплавов, образующихся в ходе алюмотермического передела, тем с большей интенсивностью будет протекать процесс перехода материала в газовую фазу, что в конечном итоге будет определять время пригодности реактора к эксплуатации.

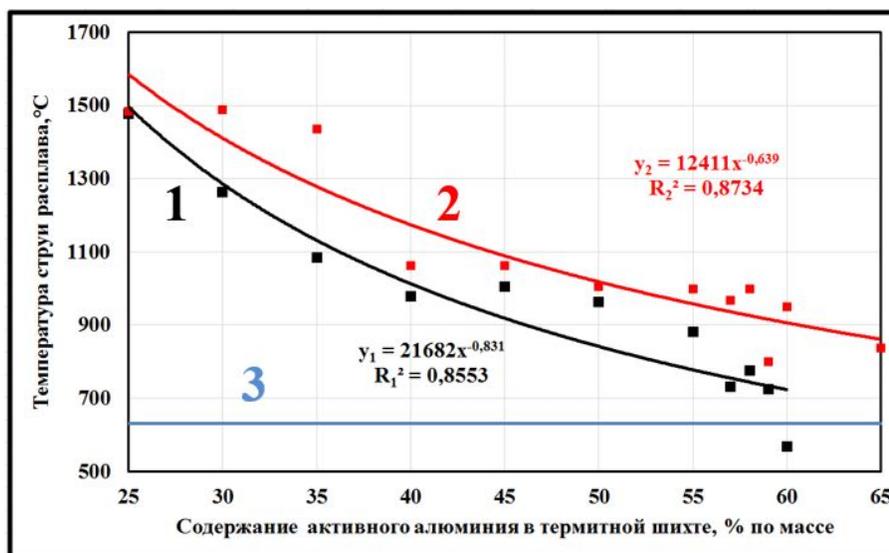


Рис. 1. Сравнение зависимостей экспериментальных температур от содержания активного алюминия в термитных шихтах: 1 – струи металла, полученного алюмотермитным переделом термитных шихт без нагрева; 2 – струи металла полученного алюмотермитным переделом термитных шихт после предварительного нагрева до 400 °С; 3 – температура окисления материала реактора.

Из рис.1 видно, что предварительный нагрев термитных шихт до 400 °С (зависимость 2) обуславливает рост температуры реакции, что в целом сказывается на повышении температуры струи железоалюминиевого расплава в среднем на 5-10 %, по сравнению с данными, характерными для зависимости 1. Установлено, что предварительный нагрев обеспечивает не только стабильное разделение металлической и шлаковой фаз, образующихся при экзотермическом переделе термитных шихт, содержащих активный алюминий в диапазоне значений 25-58 %, но и возможность реализации экзотермической реакции в термитных шихтах с содержанием до 65 % активного алюминия. Из анализа данных, представленных на рис. 1 становится очевидным, что такое содержание активного алюминия в термитных шихтах сказывается на итоговой температуре расплава и позволяет значительно сократить температурное и механическое воздействие на материал реактора.

Сравнительным анализом данных, полученных в ходе эксперимента, установлено, что 70 % массового выхода металлической фазы конечного интерметаллидного сплава удается достичь при экзотермическом переплаве предварительно нагреваемых термитных шихт, содержащих 50 % активного алюминия. При этом максимальный выход металлической фазы после переплава термитных шихт, не подвергающихся предварительному нагреву, не превышал 63 % по массе. Стоит, однако, отметить, что при таких высоких значениях массового выхода металлической фазы корректное определение Al в итоговых сплавах становится затруднительным, так как плотности металлической и шлаковой фаз сравниваются. Установлено, что при переплаве нагреваемых термитных шихт, располагающих 25-60 % активного алюминия в своем составе, содержание Al в итоговых сплавах соответствует диапазону значений 7,3-58,5 % по массе.

Содержание Al в исходных термитных шихтах и условия осуществления экзотермического процесса обуславливают соотношение элементов в итоговых железоалюминиевых сплавах, их микроструктуру, а также во многом определяют их механические характеристики, среди которых практический интерес представляет диапазон значений микротвердости HV, характерных для поверхностей поперечного среза протяженных образцов (использованных в настоящем эксперименте для определения микроструктур). На рис.2. представлено сравнение геометрии отпечатков, полученных при определении микротвердости HV в форме ромбических пирамид, характерных для экспериментальных железоалюминиевых сплавов. Отпечаток, сформированный ромбическим индентором в образцах с поверхностью, обладающей большей твердостью, имеет меньшую глубину проникновения. Из рис.2 видно, что наибольшей глубиной отпечатка обладают образцы железоалюминиевых сплавов, сформированные из термитных шихт с меньшим содержанием активного алюминия. Выявлено, например, что для образцов (рис.2,а) характерно значение микротвердости HV210 при глубине отпечатка 18,957 мкм; для образцов (рис.2,б) - HV943 при глубине отпечатка 8,955 мкм; далее, при увеличении содержания активного Al в термитных шихтах для образцов (рис.2,б) микротвердость составляет HV875 при глубине отпечатка 9,295 мкм.

На рис. 3 в полиномиальных кривых третьего порядка представлено сравнение значений микротвердости HV, характерных для экспериментальных образцов железоалюминиевых сплавов, полученных экзотермическим переплавом термитных шихт (без нагрева – 1 и нагреваемых до 400 °С – 2), в зависимости от содержания в них активного Al.

Анализ данных, представленных на рис.3, позволяет установить, что предварительный нагрев термитных шихт до 400 °С перед началом их экзотермического переплава позволяет несколько увеличить значения микротвердости HV в случаях, когда железоалюминиевый сплав формируется из термитных шихт с содержанием 55-60 % Al по массе. Для отмеченного диапазона содержания Al в шихте, характерно более стабильное разделение металлической и шлаковой фаз

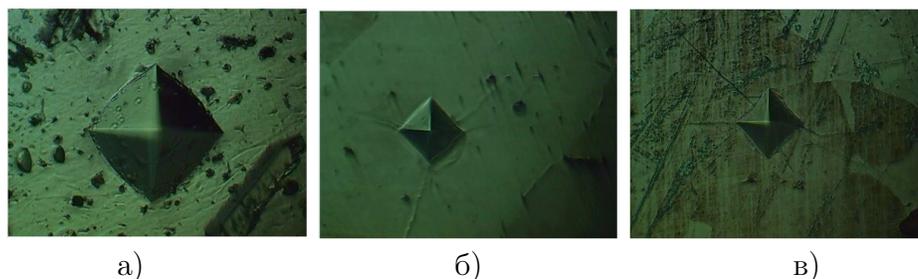


Рис. 2. Сравнение глубины отпечатка ромбического индентора, сформированного при определении микротвердости HV образцов железоалюминиевых сплавов, полученных из термитных шихт с различным содержанием Al (% по массе) при увеличении x100: а – 25; б – 57; в – 60.

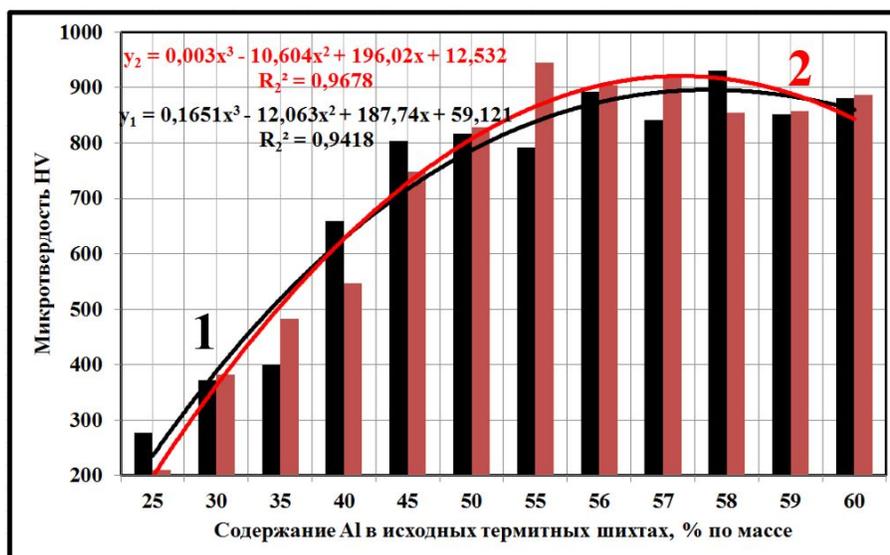


Рис. 3. Сравнение значений микротвердости HV от содержания активного алюминия в термитных шихтах: 1 - железоалюминиевых сплавов, полученных алюмотермитным переплавом термитных шихт без нагрева; 2 - после предварительного нагрева до 400 °С.

в продуктах реакции, а значения микротвердости HV соответствуют интервалу 850-950.

Технологически становятся доступными варианты получения сплавов из термитных шихт с большим содержанием в них алюминия, что обуславливает возможность экспериментального определения ряда их физико-механических параметров. Однако рост алюминия в исходных термитных шихтах (например, до 65 % по массе) приводит к снижению значений микротвердости HV до 716.

Согласно диаграмме состояния сплавов системы железо-алюминий [14–16] в указанном выше диапазоне содержания Al 7,3–58,5 % по массе в итоговых сплавах при различных температурах образуются интерметаллидные фазы следующих типов: Fe_3Al , $FeAl_2$, Fe_2Al_5 и $FeAl_3$, каждую из которых характеризует свой набор физико-механических свойств. Как правило, сплавы такой системы отличаются повышенной хрупкостью, вследствие чего определение таких параметров, как временное сопротивление разрыву σ_b или предел текучести σ_T по результатам измерения микротвердости HV вызывает ряд затруднений. Методы расчета указанных параметров по аналогии со стандартами, применяемыми к сталям, для интерметаллидных сплавов подходят не в полной мере и нуждаются в корректировке.

3. Заключение В ходе проведенных исследований установлено, что предварительный нагрев термитных шихт до 400 °С с последующей активацией экзотермической реакции, обеспечивает рост скорости их горения в интервале содержания Al 25–65 % по массе в исходных материалах, по сравнению с переплавными процессами, протекающими в ненагреваемых термитных шихтах.

Предварительный нагрев термитных шихт позволяет на 5–10 % увеличить температуру струи расплавов, образующихся в результате экзотермических реакции, и обеспечивает гарантированное разделение металлической и шлаковой частей продуктов реакции при содержании активного алюминия в исходных материалах до 60 %, а максимально возможный выход металлической фазы составил 70% по массе.

Максимальные значения микротвердости HV соответствующие диапазону 850–950 характерны для сплавов, полученных экзотермическим переплавом термитных шихт содержащих 55–60 % Al по массе.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. А. Худякова, В. В. Предеин подготовка и проведение экспериментальной части работы, согласование финальной версии рукописи. С. Г. Жилин, Н. А. Богданова обзор литературы, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, редактирование текста.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания Института машиноведения и металлургии Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. V. A. Khudyakova, V. V. Predein preparation and implementation of the experimental part of the work, approval of the final version of the manuscript. S. G. Zhilin, N. A. Bogdanova literature review, writing the manuscript text, approval of the final version of the manuscript, editing the text.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Khabarovsk Federal Research Center of the FEB RAS.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Xu M., Lin B. Energy efficiency gains from distortion mitigation: A perspective on the metallurgical industry // *Resources Policy*. 2022. Vol. 77. 102758. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.102758>
- [2] Худякова В. А., Жилин С. Г., Предеин В. В., Комаров О. Н. Повышение износостойкости графитового реактора, предназначенного для расплавления термитной шихты // *Металлург*. 2024. № 9. С. 70–77. EDN: DNZLMS. DOI: 10.52351/00260827 2024 9 70.
- [3] Di Maria A., Merchán M., Marchand M., Eguizabal D., De Cortázar M. G., Van Acker K. Evaluating energy and resource efficiency for recovery of metallurgical residues using environmental and economic analysis // *Journal of Cleaner Production*. 2022. Vol. 356. 131790. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2022.131790>
- [4] Аникин А. Е., Галевский Г. В., Руднева В. В. Исследование технологических режимов эффективной металлизации оксиджелезосодержащих отходов металлургического производства // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия*. 2020. Т. 63. № 5. С. 335–343. EDN: BAVLIJ. DOI: 10.17073/0368-0797-2020-5-335-343.
- [5] Ling J., Yang H., Tian G., Cheng ., Wang X., Yu X. Direct reduction of iron to facilitate net zero emissions in the steel industry: A review of research progress at different scales // *Journal of Cleaner Production*. 2024. Vol. 441. 140933. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2024.140933>.
- [6] El-Shiekh H., El-Fawakhry M. K., Mitwally M. E., Shash A. Y. Production of reduced iron from mill scale waste using tilting rotary furnace // *Results in Materials*. 2023. Vol. 19. 100429. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinma.2023.100429>.
- [7] Cheng H., Zhuo R., Li G., Yan H., Ding K., Zhao G., Qiu T. Iron recovery from lead smelting water-quenching slag by “roasting–grinding–magnetic separation” method // *Powder Technology*. 2024. Vol. 439. 119708. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2024.119708>.
- [8] Komarov O. N., Zhilin S. G., Predein V. V., Popov A. V. Mechanisms for forming iron-containing intermetallics prepared by aluminothermy and the effect of special treatment methods on their properties // *Metallurgist*. 2020. Т. 64. № 7-8. С. 810–821. DOI: 10.1007/s11015-020-01058-w
- [9] Барсукова Н. В., Комаров О. Н., Жилин С. Г., Предеин В. В., Попов А. В., Худякова В. А. Управление свойствами железоуглеродистых сплавов, полученных алумотермией, варьированием технологическими факторами // *Металлург*. 2023. № 8. С. 94–107. EDN: PNIVSY. DOI: 10.52351/00260827 2023 08 94.
- [10] Предеин В. В. Управление структурой и свойствами стальных отливок из термитных материалов при алумотермии: дис. ... канд. техн. наук: 05.16.04: защищена 08.02.2018: - Комсомольск-на-Амуре., 2018. — 269 с.
- [11] Комаров О. Н., Предеин В. В., Жилин С. Г., Худякова В. А., Барсукова Н. В. Способ получения железоалюминиевого сплава // Патент на изобретение RU 2803881 C1, 21.09.2023. Заявка № 2023102640 от 07.02.2023.
- [12] Худякова В. А., Жилин С. Г., Предеин В. В., Богданова Н. А. Влияние предварительного нагрева термитной шихты и реактора на свойства получаемого железоалюминиевого сплава методом алумотермии // *Вычислительные технологии и прикладная математика: Материалы III научной конференции с международным участием (7–11 октября 2024 г., Комсомольск-на-Амуре) / ред.: Э. А. Дмитриев, А. И. Евстигнеев, С. А. Гордин, И. В. Зайченко. – Комсомольск-на-Амуре: Изд.-во Комсомольского-на-Амуре гос. университета, 2024. – С. 404-406.*

- [13] Атлас микроструктур черных и цветных металлов: учебное наглядное пособие / сост.: А. А. Андрушевич [и др.]. – Минск: БГАТУ. 2012. 100 с.
- [14] Дресвянников А. Ф., Колпаков М. Е. Синтез интерметаллида Fe₃Al // Вестник Казанского технологического университета. 2010. № 5. С. 7-10. EDN: MOTXSN
- [15] Panda D., Kumar L., Alam S. N. Development of Al-Fe₃Al Nanocomposite by Powder Metallurgy Route // Materialstoday: Proceedings. 2015. Vol. 2, Is. 4–5. P. 3565–3574. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2015.07.070>
- [16] Cubero-Sesin J. M., Horita Z. Age Hardening in Ultrafine-Grained Al-2PctFe Alloy Processed by High-Pressure Torsion // Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science. 2015. Vol. 46. P. 2614–2624. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11661-015-2876-6>

REFERENCES

- [1] Xu M., Lin B. Energy efficiency gains from distortion mitigation: A perspective on the metallurgical industry // Resources Policy. 2022. Vol. 77. 102758. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.102758>
- [2] Khudyakova V. A., Zhilin S. G., Predein V. V., Komarov O. N. Increasing the wear resistance of a graphite reactor intended for melting thermite charge // Metallurg. 2024. № 9. P. 70–77. EDN: DNZLMS. DOI: 10.52351/00260827 2024 9 70. (in Russian).
- [3] Di Maria A., Merchán M., Marchand M., Eguizabal D., De Cortázar M. G., Van Acker K. Evaluating energy and resource efficiency for recovery of metallurgical residues using environmental and economic analysis // Journal of Cleaner Production. 2022. Vol. 356. 131790. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2022.131790>
- [4] Anikin A. E., Galevsky G. V., Rudneva V. V. Research of technological modes of effective metallization of iron oxide-containing wastes of metallurgical production // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Chernaya metallurgiya. 2020. T. 63. № 5. P. 335–343. EDN: BAVLIJ. DOI: 10.17073/0368-0797-2020-5-335-343. (in Russian).
- [5] Ling J., Yang H., Tian G., Cheng J., Wang X., Yu X. Direct reduction of iron to facilitate net zero emissions in the steel industry: A review of research progress at different scales // Journal of Cleaner Production. 2024. Vol. 441. 140933. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2024.140933>.
- [6] El-Shiekh H., El-Fawakhry M. K., Mitwally M. E., Shash A. Y. Production of reduced iron from mill scale waste using tilting rotary furnace // Results in Materials. 2023. Vol. 19. 100429. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinma.2023.100429>.
- [7] Cheng H., Zhuo R., Li G., Yan H., Ding K., Zhao G., Qiu T. Iron recovery from lead smelting water-quenching slag by “roasting–grinding–magnetic separation” method // Powder Technology. 2024. Vol. 439. 119708. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2024.119708>.
- [8] Komarov O. N., Zhilin S. G., Predein V. V., Popov A. V. Mechanisms for forming iron-containing intermetallics prepared by aluminothermy and the effect of special treatment methods on their properties // Metallurgist. 2020. T. 64. № 7-8. С. 810–821. DOI: 10.1007/s11015-020-01058-w
- [9] Barsukova N. V., Komarov O. N., Zhilin S. G., Predein V. V., Popov A. V., Khudyakova V. A. Control of the properties of iron-carbon alloys obtained by aluminothermy, varying technological factors // Metallurg. 2023. No. 8. pp. 94–107. EDN: PNIVSY. DOI: 10.52351/00260827 2023 08 94. (in Russian)
- [10] Predein V. V. Control of the structure and properties of steel castings from thermite materials during aluminothermy: dis. ...cand. tech. Sciences: 16.05.04: protected 02.08.2018: - Komsomolsk-on-Amur., 2018. - 269 p.(in Russian)

- [11] Komarov O. N., Predein V. V., Zhilin S. G., Khudyakova V. A., Barsukova N. V. Method for producing iron-aluminum alloy // Patent for invention RU 2803881 C1, 09.21.2023. Application No. 2023102640 dated 02.07.2023. (in Russian)
- [12] Khudyakova V. A., Zhilin S. G., Predein V. V., Bogdanova N. A. Effect of preliminary heating of the thermite charge and reactor on the properties of the obtained iron-aluminum alloy by the aluminothermy method // Vychislitel'nyye tekhnologii i prikladnaya matematika: Materialy III nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiyem (October 7-11, 2024, Komsomolsk-on-Amur) / ed.: E. A. Dmitriev, A. I. Evstigneev, S. A. Gordin, I. V. Zaychenko. - Komsomolsk-on-Amur: Publishing house of Komsomolsk-on-Amur State University. 2024. - P. 404-406. (in Russian)
- [13] Atlas of microstructures of ferrous and non-ferrous metals: a teaching aid / compiled by: A. A. Andrushevich [et al.]. – Minsk: BGATU. 2012. 100 p. (in Russian)
- [14] Dresvyannikov A. F., Kolpakov M. E. Synthesis of intermetallic compound Fe₃Al // Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta. 2010. № 5. P. 7-10. EDN: MOTXSN (in Russian)
- [15] Panda D., Kumar L., Alam S. N. Development of Al-Fe₃Al Nanocomposite by Powder Metallurgy Route // Materialstoday: Proceedings. 2015. Vol. 2, Is. 4–5. P. 3565–3574. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2015.07.070>
- [16] Cubero-Sesin J. M., Horita Z. Age Hardening in Ultrafine-Grained Al-2PctFe Alloy Processed by High-Pressure Torsion // Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science. 2015. Vol. 46. P. 2614–2624. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11661-015-2876-6>

Р. И. Изюмов, А. Л. Свистков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОДПОВЕРХНОСТНЫХ СТРУКТУР НАПОЛНЕННЫХ ЭЛАСТОМЕРОВ В ПОЛУКОНТАКТНОМ РЕЖИМЕ АТОМНО-СИЛОВОГО МИКРОСКОПА

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Аннотация. Целью работы являлось разработать методику построения структуры приповерхностного слоя исследуемого материала методами атомно-силовой микроскопии. Метод подходит для изучения мягких наполненных материалов и заключается в построении трехмерного изображения скрытой под поверхностью структуры жесткого наполнителя с использованием данных полуконтактного режима атомно-силового микроскопа (АСМ): фазового портрета и карты рельефа поверхности образца. В модели зонд АСМ рассматривается как пружинный маятник с заданными (жесткость и резонансная частота) и расчетными (эффективная масса и внутренняя вязкость) параметрами. Параметры численной модели описывают реальную экспериментальную установку. Поведение материала описывается упругой моделью, диссипация реализуется силами адгезии, которые втягивают зонд в материал после контакта с его поверхностью. Для заданного материала и параметров эксперимента полученная карта фазового сдвига интерпретируется как результат воздействия жестких объектов, расположенных на определенной глубине. Значения этих глубин преобразуются в рельеф скрытых подповерхностных структур.

Ключевые слова: атомно-силовая микроскопия, полуконтактный режим, математическая модель, фазовый сдвиг, подповерхностная структура.

Изюмов Роман Игоревич, м.н.с. лаборатории микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН; e-mail: izumov@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2083-039X>; AuthorID: 642321

Свистков Александр Львович, доктор физико-математических наук, зав. лаб. микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН; e-mail: svistkov@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4754-5214>; AuthorID: 3604

для цитирования: Изюмов Р.И., Свистков А.Л. Математическая модель исследования подповерхностных структур наполненных эластомеров в полуконтактном режиме атомно-силового микроскопа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 32–42. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.004 EDN: MWK GK L

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

© Изюмов Р.И., Свистков А.Л. 2024

Поступила: 21.09.24; принята в печать: 29.11.24; опубликована: 24.12.24.

R. I. Izyumov A. L. Svistkov

MATHEMATICAL MODEL OF INVESTIGATION OF SUBSURFACE STRUCTURES OF FILLED ELASTOMERS IN SEMI-CONTACT MODE OF ATOMIC FORCE MICROSCOPE

Institute of Continuous Media Mechanics, Perm, Russia

Abstract. The aim of the work was to develop a method of constructing the structure of the near-surface layer of the investigated material by atomic force microscopy. The method is suitable for the study of soft filled materials and consists in creating a three-dimensional image of the structure of a stiff filler hidden under the surface using data from the semi-contact mode of the atomic force microscope (AFM): phase portrait and relief map of the sample surface. In the model, the AFM probe is treated as a spring pendulum with specified (stiffness and resonant frequency) and calculated (effective mass and internal viscosity) parameters. The parameters of the numerical model describe a real experimental setup. The behaviour of the material is described by an elastic model, dissipation is represented by adhesion forces that pull the probe into the material after contact with its surface. For a given material and experiment parameters, the resulting phase shift map is interpreted as the result of rigid objects located at a certain depth. The values of these depths are converted into the topography of hidden subsurface structures.

Keywords: Atomic Force Microscopy, Tapping Mod, Mathematical Model of Interaction, Phase Shift, Subsurface Structure.

Roman I. Izyumov, junior researcher of the lab of micromechanics of structurally inhomogeneous media of ICMM UB RAS; e-mail: izumov@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2083-039X>; AuthorID: 642321

Alexander L. Svistkov, Doctor of physical and mathematical sciences, head of the lab of micromechanics of structurally inhomogeneous media of ICMM UB RAS; emailsvistkov@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4754-5214>; AuthorID: 3604

to cite this article: Izyumov R. I., Svistkov A. L. MATHEMATICAL MODEL OF INVESTIGATION OF SUBSURFACE STRUCTURES OF FILLED ELASTOMERS IN SEMI-CONTACT MODE OF ATOMIC FORCE MICROSCOPE // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 32–42. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.004 EDN: MWKGKL

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Атомно-силовой микроскоп - это инструмент для изучения физических свойств и структуры объектов нанометрового масштаба. В так называемом полуконтактном режиме острый зонд, расположенный на свободном конце балки, касается образца [1, 2]. Закрепленный конец алки совершает при этом гармонические колебания. АСМ регистрирует разность (сдвиг) фаз между колебаниями кончика кантилевера и его основания.

Первой задачей данной работы являлось теоретическое обоснование гипотезы о том, что фазовый портрет может содержать информацию о структуре приповерхностного слоя. Известны исследования в этом направлении [3–5]; преимуществом нашего метода являются скорость и малое воздействие на образец. Вторая задача заключалась в разработке алгоритма получения информации о структуре подповерхности. Полученная методика должна позволить изучать мягкие неоднородные материалы, такие как наполненные эластомеры.

1. Фазовый сдвиг и эффективная жесткость. В чем может быть причина сдвига фаз? Сдвиг фаз отражает диссипацию энергии. Причинами этого может быть: вязкое или пластическое поведение материала, разрушение поверхности, капиллярные явления и т.д.

В нашем случае исследуемый материал является чисто упругим. Поэтому важным фактором диссипации является изменение границ между средами, сопровождающееся изменением поверхностной энергии. Поверхностные эффекты играют значительную роль при взаимодействии на нанометровом уровне. Приведем несколько примеров работ, в которых такие эффекты изучались экспериментально и теоретически [6–9].

На рис. 1 красным цветом отмечены участки поверхности зонда и образца. До контакта это были границы «воздух-зонд» и «воздух-образец», которые имели энергии γ_{31} и γ_{32} соответственно. После вдавливания эти границы исчезают, а вместо них появляется граница «зонд-образец» с энергией γ_{12} .

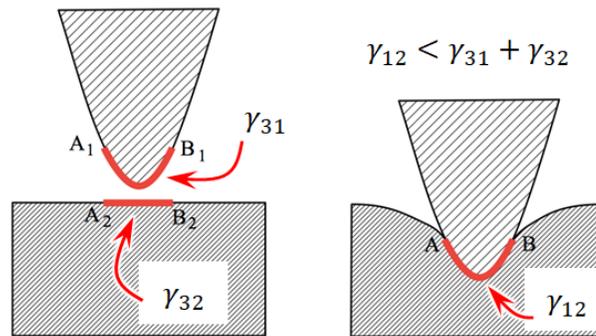


Рис. 1. Преобразование границ двух сред (A_1B_1 и A_2B_2) в одну (AB) в результате контакта

Если выполняется условие $\gamma_{12} < \gamma_{31} + \gamma_{32}$, то энергетически выгодно увеличивать границу «зонд-образец», и это будет продолжаться до тех пор, пока силы

втягивания не уравновесится силами упругой реакции образца на проникновение. Это очень быстрый процесс, который выглядит как нисходящий скачок на кривой вдавливания.

Существует также взаимодействие до контакта, но оно имеет гораздо меньший эффект. В работе [10] было показано, что для зонда с радиусом кончика 6 нм скачок в полимерный материал составит около 0.57 нм, хотя в экспериментах регистрировались скачки в десятки нм. При обратном движении зонда в модели без прилипания скачка не будет. Поэтому возникнут диссипативные потери энергии. Они приведут к появлению фазового сдвига.

Важной особенностью при подготовке поверхности образца является то, что эксперимент проводится с наноккомпозитом с активным наполнителем. Частицы наполнителя имеют высокую степень взаимодействия с эластомером. При подготовке образца создается новая чистая поверхность. Это достигается путем разрезания или разрыва. Процесс образования новой поверхности связан с ростом трещины, которой энергетически выгодно обойти агрегаты активных частиц наполнителя на определенном расстоянии. Поэтому вновь созданная поверхность будет иметь везде одинаковую поверхностную энергию (рис. 2).

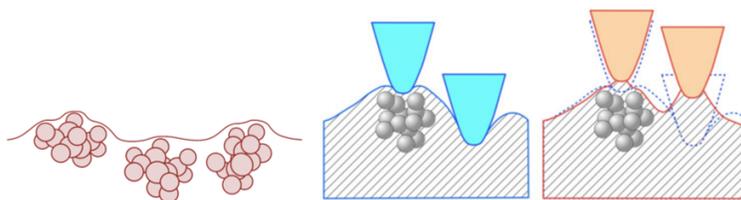


Рис. 2. Поверхность покрыта слоем полимерного материала - поверхностная энергия везде одинакова. Фактором, обеспечивающим изменение фазового сдвига, будет наличие неоднородного распределения «эффективной жесткости»

Поэтому диссипация зависит только от глубины скачка, совершаемого при введении зонда в материал. А глубина скачка зависит от «эффективной жесткости материала», то есть от того, насколько глубоко под поверхность находится частица наполнителя (рис. 2).

2. Уравнение движения. Динамический отклик системы кантилевер-зонд, управляемого внешним синусоидальным сигналом, моделировался различными авторами [11–14]. Доминирующими вкладками в уравнение движения кантилевера являются его упругий отклик, гидродинамическое демпфирование со средой, взаимодействие острия с образцом и сила возбуждения.

Для описания движения зонда используется модель пружинного маятника с постоянной жесткостью k , резонансной угловой частотой ω_0 , эффективной массой $m = k/\omega_0^2$.

Движение зонда z описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m \frac{dz^2}{dt^2} = -kd - \mu \frac{dz}{dt} - F, \quad (1)$$

где: b – положение основания кантилевера, d – изгиб кантилевера, μ – коэффициент диссипации, F – сила взаимодействия между зондом и образцом.

$$b = B_0 + B \cos \omega_0 t \quad (2)$$

$$d = z - b \quad (3)$$

Колебания передаются основанию в соответствии с уравнением (2), которое входит в уравнение (1) через соотношение (3). Это связь между изгибом кантилевера и положением его кончика и основания.

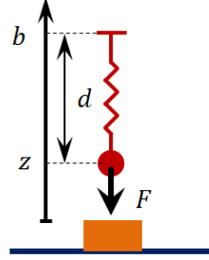


Рис. 3. Схема модели – пружинный маятник

В первом приближении нашей работы взаимодействие с образцом задается моделью Дерягина-Мюллера-Топорова (ДМТ) [15]:

$$F = c(-z)^{1.5} - F_A, \text{ если } z \leq 0 \text{ иначе: } F = 0, \quad (4)$$

где: $c = 4/3ER^{1/2}/(1 - \nu^2)$, $F_A = 2\pi R\gamma_{12} = 2\pi R\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}$. Плотность поверхностной энергии γ_{12} на границе контакта зонд-образец определяется по упрощенной формуле из работы [16].

2.1. Однократное вдавливание для образцов с различной жесткостью. На примере численного эксперимента, моделирующего вдавливание с небольшой скоростью, можно показать, как жесткость материала влияет на рассеивание энергии в системе. На рис. 4 представлены кривые вдавливания, полученные при прямом и обратном движении кантилевера. Параметры кантилевера CSG30 взяты из источника [17]: $R = 10$ нм, $k = 0.6$ Н/м, $f_0 = 48$ кГц.

Согласно этим результатам, можно отметить существенное влияние жесткости образца на гистерезис: при индентировании материала с модулем упругости $E = 10$ МПа гистерезис на 40% больше, чем для материала с $E = 100$ МПа.

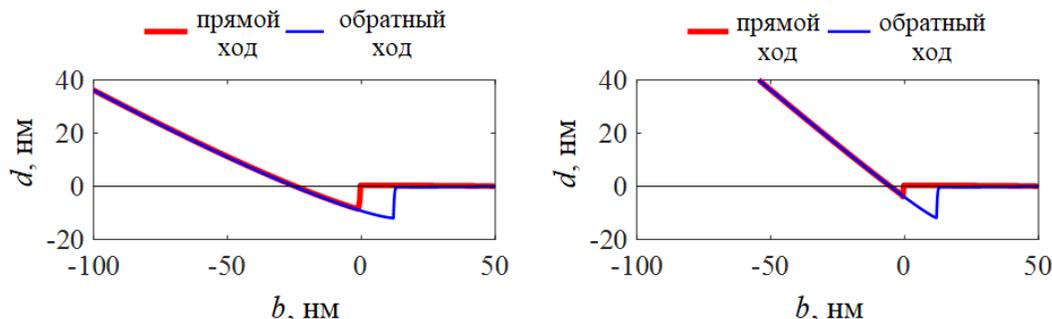


Рис. 4. Кривые индентирования образца с модулем упругости $E = 10$ МПа (слева) и 100 МПа (справа)

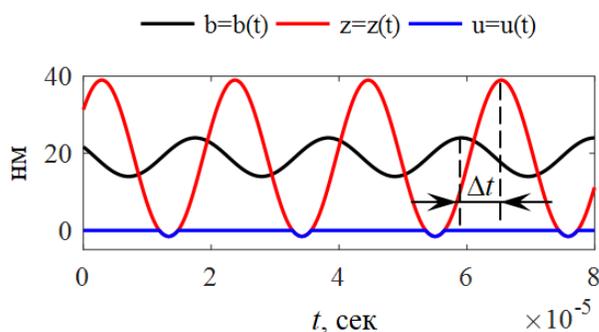


Рис. 5. Реализация модели в полуконтактном режиме АСМ. Черная линия обозначает перемещение основания, красная - положение зонда, а синяя - глубину вдавливания

2.2. Полуконтактный режим. Для моделирования полуконтактного режима использовались те же параметры кантилевера (CSG30) и образца с модулем $E = 10$ МПа.

На рис. 5 видно, что влияние адгезии не очень заметно. Это связано с тем, что при увеличении частоты колебаний зонда в нашей модели начинает преобладать очень высокий динамический эффект запаздывания. При частоте 100 Гц наблюдается классическая картина вдавливания. Но зонд должен работать на частотах в десятки кГц, где мы можем отслеживать только фазовый сдвиг (рис. 6).

На рис. 6 показано влияние жесткости образца на фазовый сдвиг. Дополнительными параметрами модели являются: $B = 5$ нм, $A = 44$ нм, $B_0 = A/2$.

Анализ модели позволяет сделать вывод, что, используя экспериментальные данные по фазовому сдвигу, можно получить однозначную информацию о жесткости (или эффективной жесткости, если речь идет о неоднородном образце) поверхностного слоя образца из полученных результатов моделирования с заданными параметрами колебаний.

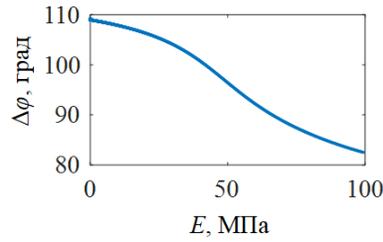


Рис. 6. Зависимость фазового сдвига от жесткости образца

3. Алгоритм преобразования данных. Таким образом, алгоритм преобразования данных можно сформулировать в виде следующих четырех этапов: Этап 1. Для первого этапа необходимо иметь экспериментальные данные и получить теоретические данные с помощью предложенной модели (рис. 7). Для наглядности рассмотрим поперечное сечение карты фазового сдвига в области 200 нм. Используя разработанную модель, была рассчитана зависимость фазового сдвига от жесткости образца. Данные получены для кантилевера с $k = 35$ Н/м, $R = 10$ нм. Параметры колебаний: $B = 0.6$ нм, $A = 51.4$ нм, $B_0 = A/2$.

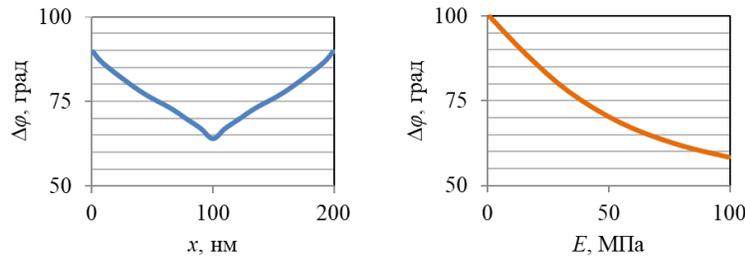


Рис. 7. Экспериментальные данные: фазовый портрет (слева) и теоретическая зависимость $\Delta\phi(E)$ (справа)

Этап 2. Преобразование осуществляется путем замены значений фазового сдвига на значения жесткости $K(x)$ в соответствии с теоретической зависимостью $\Delta\phi(E)$. Кроме того, производится нормализация данных. Для этого используется значение жесткости E_0 ненаполненного образца: $K(x) = E(x)/E_0$. Результат второго этапа представлен на рис. 8.

Этап 3. Для получения окончательного результата необходимо провести исследование с использованием конечно-элементного (КЭ) моделирования, которое позволит установить соответствие между структурой приповерхностного слоя и его эффективной жесткостью.

Для исследования в КЭ модели необходимо описать взаимодействие зонда с наполненным упругим материалом (рис. 9). Необходимо учитывать различные размеры включений R_i и их глубину H . Зонд вдавливается на фиксированную

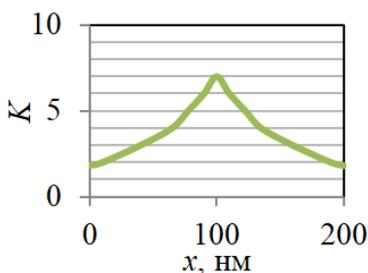


Рис. 8. Преобразованные и нормализованные данные

глубину H в различных точках поверхности x , и определяется необходимое для этого усилие F_h . Результатом моделирования является распределение силы по поверхности образца $F_h(x)$. Конечный результат также нормируется по отношению к значению силы F_0 для случая с ненаполненным образцом.

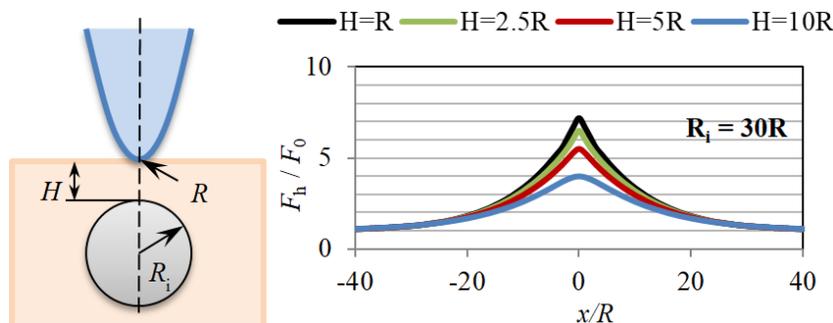


Рис. 9. Схематическое изображение геометрии из КЭ-модели (слева) и результат моделирования

Предварительные исследования [18] показывают, что каждой паре параметров (R_i, H) соответствует единственная зависимость $F_h(x)/F_0$ с уникальной формой кривой (рис. 9). Физический смысл полученного результата - эффективная жесткость поверхности $K(x) = F_h(x)/F_0$.

Этап 4. Для завершения необходимо объединить данные, полученные на этапах 2 и 3: из $\Delta\phi(E)$ $\Delta\phi(x)$ получаем $K(x) = E(x)/E_0$ с другой стороны, зная (R_i, H) , получаем $F_h(x)/F_0 = K(x)$. Таким образом, получаем соответствие между парой параметров, определяющих форму и глубину подповерхностного рельефа, и фазовым портретом поверхности. Для построения окончательного рельефа необходимо совместить полученную поверхность с экспериментальными АСМ-данными о рельефе образца.

Пример работы предложенного алгоритма показан на рис. 10. Для наглядности в качестве математического преобразования фазового сдвига используется простое линейное преобразование.

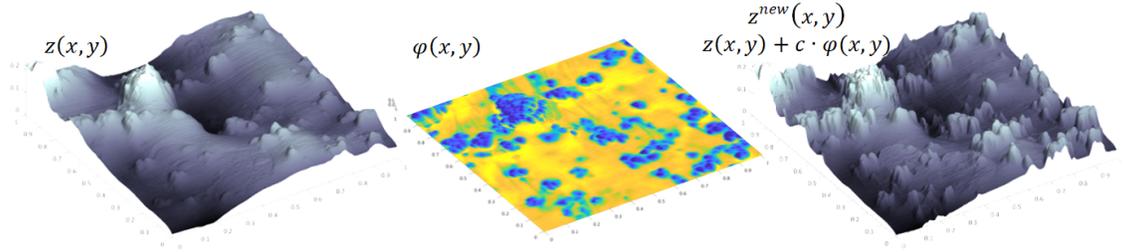


Рис. 10. Рельеф поверхности $z(x, y)$ (размер 1×1 мкм), фазовый портрет $\phi(x, y)$ и новая поверхность $z^{new}(x, y)$, которая является линейной комбинацией рельефа и фазового портрета. В первом приближении фазовый портрет, умноженный на константу, просто добавлялся к рельефу

На рис. 10 показано, как на относительно гладких участках появляются новые детали рельефа. Это можно сравнить с тем, как прорисовывается подводный рельеф с помощью эхолота.

4. Заключение. В результате исследования было дано теоретическое обоснование возможности использования фазового портрета для изучения подповерхностной структуры мягких наполненных материалов. Для этого была разработана математическая модель движения и взаимодействия АСМ-зонда с поверхностью образца. Эта модель используется в предложенном алгоритме преобразования карты фазового сдвига и получения информации о структуре приповерхностного слоя. Показана схема работы этого алгоритма.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Р.И. Изюмов: написание текста рукописи, обзор литературы, согласование финальной версии рукописи, проведение экспериментов, программирование, А.Л. Свистков: концептуальная постановка, программирование, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края, проект № 20-48-596013 и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках госбюджетной темы (рег. номер АААА-А20-120022590044-7).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. R.I. Izyumov: writing the text of the manuscript, reviewing the literature, agreeing on the final version of the manuscript, conducting experiments, programming, A.L. Svistkov: conceptual production, programming, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The reported study was funded by RFBR and Perm Territory, project number 20-48-596013 and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. АААА- А20-120022590044-7).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Martin Y., Williams C. C., Wickramasinghe H. K. Atomic force microscope–force mapping and profiling on a sub 100-Å scale // *Journal of Applied Physics*. 1987. no. 61. 4723. DOI: 10.1063/1.338807.
- [2] Meyer G., Nabil M. Erratum: Novel optical approach to atomic force microscopy // *Applied Physics Letters*. 1988. no. 53. 1045. DOI: 10.1063/1.100425.
- [3] Sharahi H. J., et. al. Contrast mechanisms on nanoscale subsurface imaging in ultrasonic AFM: scattering of ultrasonic waves and contact stiffness of the tip–sample // *Nanoscale*. 2017. no. 9 (6). P. 2330–2339. DOI: 10.1039/c6nr09124e.
- [4] Soliman M., et al. Nanoscale subsurface imaging // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2017. no. 29. 173001. DOI: 10.1088/1361-648X/aa5b4a.
- [5] Verbiest G. J., et. al. Subsurface-AFM: sensitivity to the heterodyne signal // *Nanotechnology*. 2013. no. 24. 365701. DOI: 10.1088/0957-4484/24/36/365701.
- [6] Svistkov A. L., Izyumov R. I. Influence of interface phenomena on the features of interaction between the probe of atomic force microscope and soft material // *Mechanics of Materials*. 2020. no. 148. 103500. DOI: 10.1016/j.mechmat.2020.103500.
- [7] Izyumov R. I., Svistkov A. L. Effect of surface tension forces on changes in the surface relief of the elastomer nanocomposite // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2019. no. 10 (1), P. 51–66. DOI: 10.1615/NANOSCITECHNOLINTJ.2018029558.
- [8] Rimai D., Quesnel D., Busnaina A. The adhesion of dry particles in the nanometer to micrometer-size range // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2000. no. 165 (1–3), P. 3–10. DOI: 10.1016/S0927-7757(99)00439-2.
- [9] Style R. W., et. al. Surface tension and contact with soft elastic solids // *Nature Communications*. 2013. no. 4, P. 2728–2733. DOI: 10.1038/ncomms3728.
- [10] Svistkov A. L., Izyumov R. I. Influence of intermolecular interaction force on the jump magnitude of the atomic force microscope probe during indentation of soft material // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2020. no. 11 (1). P. 55–71. DOI: 10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020032629.
- [11] Eslami S., Jalili N. A comprehensive modeling and vibration analysis of AFM microcantilevers subjected to nonlinear tip-sample interaction forces // *Ultramicroscopy*. 2012. no. 117. P. 31–45. DOI: 10.1016/j.ultramicro.2012.03.016.
- [12] Li Z., Shi T., Xia Q. Design optimization of high performance tapping mode AFM probe // *Microsystem Technologies*. 2018. no. 24(2). P. 979–987. DOI: 10.1007/s00542-017-3442-5.
- [13] Sahoo D. R., et. al. High-throughput intermittent-contact scanning probe microscopy // *Nanotechnology*. 2010. no. 21 (7). 075701. DOI: 10.1088/0957-4484/21/7/075701.
- [14] Vatankhah R. Nonlinear vibration of AFM microcantilevers with sidewall probe // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2017. no. 39. P. 4873–4886. DOI: 10.1007/s40430-017-0823-8.
- [15] Derjaguin B. V., Muller V. M., Toporov Y. P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1975. no. 53 (2). P. 314–326. DOI: 10.1016/0021-9797(75)90018-1.
- [16] Marshall J. S., Li Sh. *Adhesive particle flow: a discrete-element approach*. New York: Cambridge University Press, 2014. 342 p. DOI: 10.1017/CBO9781139424547.
- [17] NTMDT, CSG30, Homepage, <https://ntmdt-russia.com/product/csg30>
- [18] Izyumov R. I., Sokolov A. K., Svistkov A. L. Indentation of soft material containing filler particles // *Procedia Structural Integrity*. 2021. no. 32. P. 87–92. DOI: 10.1016/j.prostr.2021.09.013.

REFERENCES

- [1] Martin Y., Williams C. C., Wickramasinghe H. K. Atomic force microscope–force mapping and profiling on a sub 100-Å scale // *Journal of Applied Physics*. 1987. no. 61. 4723. DOI: 10.1063/1.338807.
- [2] Meyer G., Nabil M. Erratum: Novel optical approach to atomic force microscopy // *Applied Physics Letters*. 1988. no. 53. 1045. DOI: 10.1063/1.100425.
- [3] Sharahi H. J., et. al. Contrast mechanisms on nanoscale subsurface imaging in ultrasonic AFM: scattering of ultrasonic waves and contact stiffness of the tip–sample // *Nanoscale*. 2017. no. 9 (6). P. 2330–2339. DOI: 10.1039/c6nr09124e.
- [4] Soliman M., et al. Nanoscale subsurface imaging // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2017. no. 29. 173001. DOI: 10.1088/1361-648X/aa5b4a.
- [5] Verbiest G. J., et. al. Subsurface-AFM: sensitivity to the heterodyne signal // *Nanotechnology*. 2013. no. 24. 365701. DOI: 10.1088/0957-4484/24/36/365701.
- [6] Svistkov A. L., Izyumov R. I. Influence of interface phenomena on the features of interaction between the probe of atomic force microscope and soft material // *Mechanics of Materials*. 2020. no. 148. 103500. DOI: 10.1016/j.mechmat.2020.103500.
- [7] Izyumov R. I., Svistkov A. L. Effect of surface tension forces on changes in the surface relief of the elastomer nanocomposite // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2019. no. 10 (1), P. 51–66. DOI: 10.1615/NANOSCITECHNOLINTJ.2018029558.
- [8] Rimai D., Quesnel D., Busnaina A. The adhesion of dry particles in the nanometer to micrometer-size range // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2000. no. 165 (1–3), P. 3–10. DOI: 10.1016/S0927-7757(99)00439-2.
- [9] Style R. W., et. al. Surface tension and contact with soft elastic solids // *Nature Communications*. 2013. no. 4, P. 2728–2733. DOI: 10.1038/ncomms3728.
- [10] Svistkov A. L., Izyumov R. I. Influence of intermolecular interaction force on the jump magnitude of the atomic force microscope probe during indentation of soft material // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2020. no. 11 (1). P. 55–71. DOI: 10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020032629.
- [11] Eslami S., Jalili N. A comprehensive modeling and vibration analysis of AFM microcantilevers subjected to nonlinear tip-sample interaction forces // *Ultramicroscopy*. 2012. no. 117. P. 31–45. DOI: 10.1016/j.ultramicro.2012.03.016.
- [12] Li Z., Shi T., Xia Q. Design optimization of high performance tapping mode AFM probe // *Microsystem Technologies*. 2018. no. 24(2). P. 979–987. DOI: 10.1007/s00542-017-3442-5.
- [13] Sahoo D. R., et. al. High-throughput intermittent-contact scanning probe microscopy // *Nanotechnology*. 2010. no. 21 (7). 075701. DOI: 10.1088/0957-4484/21/7/075701.
- [14] Vatankhah R. Nonlinear vibration of AFM microcantilevers with sidewall probe // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2017. no. 39. P. 4873–4886. DOI: 10.1007/s40430-017-0823-8.
- [15] Derjaguin B. V., Muller V. M., Toporov Y. P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1975. no. 53 (2). P. 314–326. DOI: 10.1016/0021-9797(75)90018-1.
- [16] Marshall J. S., Li Sh. *Adhesive particle flow: a discrete-element approach*. New York: Cambridge University Press, 2014. 342 p. DOI: 10.1017/CBO9781139424547.
- [17] NTMDT, CSG30, Homepage, <https://ntmdt-russia.com/product/csg30>
- [18] Izyumov R. I., Sokolov A. K., Svistkov A. L. Indentation of soft material containing filler particles // *Procedia Structural Integrity*. 2021. no. 32. P. 87–92. DOI: 10.1016/j.prostr.2021.09.013.

Р. И. Непершин

ПОПЕРЕЧНОЕ СДАВЛИВАНИЕ ЦИЛИНДРА ШТАМПОМ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”,
Москва, Россия

Аннотация. Приведено численное моделирование поперечного сдавливания жесткопластического цилиндра штампом с гладкой криволинейной границей. Рассматривается плоское пластическое течение при вогнутовыпуклой границе штампа с непрерывным полем скоростей на конечной стадии сдавливания. Заполнение полости штампа на вогнутом участке границы происходит без скольжения по границе контакта и моделируется линиями скольжения по Прадтлю с разрывом скоростей по жесткопластическим границам. При скольжении по выпуклой границе происходит уменьшение жесткой области на вогнутой границе контакта, переходящее в пластическое деформирование по всему сечению на конечной стадии сдавливания цилиндра. Моделирование представляет интерес для оценки предельной нагрузки при поперечном сжатии цилиндра штампами с криволинейной границей и штамповке деталей с криволинейным профилем поперечной осадкой цилиндрической заготовки.

Ключевые слова: поперечное сдавливание цилиндра, гладкий штамп, криволинейная граница, идеальная пластичность, плоская деформация, линии скольжения, скорости течения, контактное давление, предельная нагрузка, штамповка деталей.

Непершин Ростислав Иванович, доктор технических наук, профессор; e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974

для цитирования: Непершин Р. И. Поперечное сдавливание цилиндра штампом с криволинейной гладкой границей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 43–59. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.005 EDN: NDFLCK

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

R. I. Nepershin

CYLINDER TRANSVERSE COMPRESSION BY THE DIES WITH CURVILINEAR SMOOTH BOUNDARY

Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia

Abstract. Computer simulation of the rigid-plastic cylinder transverse compression by the dies with smooth boundaries is presented using plane strain ideal plastic theory. Final stage of cylinder plastic deformation by the dies with smooth concave-convex boundary and continuous velocity field is considered. Filling of the die cavity on the concave boundary part takes place without slip on this boundary at the main part of cylinder plastic deformation, and it is simulated using Prandtl's slip lines and velocity field with velocity discontinues on the rigid-plastic boundaries. But with approach to the final deformation stage slip on the convex die boundary begins, with continuous slip lines and velocity fields and decrease of the rigid region to zero at the final stage. The computer simulation can be used for the limit loads estimation in the case of cylinder transverse plastic compression by the dies with curvilinear smooth boundary, and forging of the parts with curved profiles on technological pressure equipment.

Keywords: cylinder transverse compression, curved smooth dies, ideal plasticity, plane strain, slip lines, velocities, contact pressure, contact friction, limit load, forging by curved dies.

Rostislav I. Nepershin, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: nepershin_ri@rambler.ru; AuthorID: 109974

to cite this article: *Nepershin R. I. Cylinder transverse compression by the dies with curvilinear smooth boundary // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 43–59. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.005 EDN: NDFLCK*

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В технологии массового и крупносерийного производства деталей машин применяется штамповка поковок сложной формы на высокопроизводительных кривошипных прессах пластическим сдавливанием заготовки в штампах [1, 2]. При штамповке поковок сложной формы используют предварительные переходы формообразования начальной формы заготовки из стандартного проката в ручьях штампа или в ковочных вальцах с целью обеспечения гарантированного заполнения полости штампа в чистовом ручье. При этом в условиях массового производства важной проблемой является повышение стойкости штампов, ограниченной усталостной прочностью и износом при высоких циклических нагрузках. Моделирование нестационарных процессов пластического деформирования в штампах на основе математической теории идеальной пластичности [3] решением полной системы уравнений для напряжений и скоростей с изменением жестких и пластических зон представляет практический интерес. В работах [4, 5] приведено моделирование нестационарных процессов плоского и осесимметричного пластического течения при сдавливании жесткопластического цилиндра и шара плоскими плитами с изменением пластического течения по Прандтлю от начального выдавливания металла на поверхность цилиндра или сферы до образования тонкой полосы или тонкого диска в конце процесса деформирования. В настоящей работе рассматривается плоское нестационарное пластическое течение при сдавливании жесткопластического цилиндра по нормали к его оси в штампе с гладкой вогнутовыпуклой границей, при которой поле скоростей на конечной стадии деформирования непрерывно, контактное давление и неоднородность пластического течения снижаются. Вычислены криволинейные профили штампов с двумя плоскостями симметрии, зависящие от угла наклона касательной в точке перегиба, с расчетами линий скольжения с непрерывными полями скоростей на конечной стадии сдавливания, распределения контактного давления и силы деформирования при поперечном сдавливании цилиндра. Моделирование нестационарного процесса поперечного сдавливания цилиндра в штампе с гладкой вогнутовыпуклой формой границы показывает, что заполнение полости штампа до точки перегиба при переходе от вогнутой границы к выпуклой происходит без скольжения по границе контакта с пластическим течением по линиям скольжения Прандтля и разрывом скоростей вдоль жесткопластической границы, по аналогии с процессом сдавливания цилиндра плоскими штампами [4]. На конечной стадии сдавливания цилиндра пластическое течение начинается при скольжении по выпуклой границе штампа, жесткая область с вогнутой границей контакта уменьшается до нуля с непрерывным пластическим течением по всему сечению.

1. Гладкая граница штампа и линии скольжения. Гладкую вогнутовыпуклую границу штампа с непрерывными полями напряжений и скоростей перемещений при сдавливании жесткопластического цилиндра при плоской деформации вычисляем с использованием дифференциальных уравнений линий скольжения ξ и η

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta \quad (1)$$

с уравнениями Генки для среднего напряжения σ , угла наклона касательной φ на ξ , и уравнениями Гейгингер для скоростей V_ξ, V_η на линиях скольжения ξ и η

$$d\sigma - d\varphi = 0 \quad \text{на } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \quad \text{на } \eta \quad (2)$$

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{на } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{на } \eta \quad (3)$$

где напряжения принимаем безразмерными, отнесенными к удвоенной пластической постоянной $2k$ материала цилиндра. Напряжения и скорости в декартовых координатах x, y , связаны с $\sigma, \varphi, V_\xi, V_\eta$ соотношениями

$$\sigma_x = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad (4)$$

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi. \quad (5)$$

Соотношения (5) используем для отображения сетки линий скольжения на плоскость годографа скоростей V_x, V_y и для определения граничных условий для скоростей V_ξ, V_η на границе штампа и на линиях симметрии пластической области. Гладкая граница штампа при сдавливании цилиндра совпадает с главным напряжением σ_1 , и линии скольжения наклонены к касательной к этой границе под углами $\pm\pi/4$.

Линии скольжения при сдавливании цилиндра штампом с гладкой вогнуто-выпуклой границей и двумя плоскостями симметрии показаны на рис. 1 в первом квадранте плоскости поперечного сечения x, y . Начало координат O находится в центре свободной границы OA на линии симметрии x . За единицу длины принимаем длину свободной границы OA . Границу штампа ACD с углом наклона касательной - θ_C в точке перегиба C находим интегрированием уравнения $dy/dx = -\theta$ при $0 \leq \theta \leq \theta_C$ при вычислении линий скольжения по следующему алгоритму.

В области AOB со свободной границей OA при перемещении границы штампа по направлению оси - y имеет место однородное пластическое сжатие при $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma = -0.5, \varphi = -\pi/4$, ограниченное прямой линией скольжения $\eta(AB)$, на которой задаем N точек с шагом $\Delta x = \Delta y = -1/N$. На гладкой выпуклой границе AC прямые линии скольжения η наклонены к касательной под углом $\pi/4$ и $\varphi = -(\pi/4 + \theta)$. Сетку линий скольжения вычисляем при постоянном приращении угла поворота касательной $\Delta\varphi$ к криволинейным линиям скольжения ξ , и вследствие ортогональности ξ и η линий скольжения на границе AC имеем $\Delta\varphi = \Delta\theta = \theta_C/N$. В первой точке границы AC около точки A , в которой $\theta = 0$, из соотношения (2) на линии скольжения ξ находим $\varphi = -(\pi/4 + \Delta\theta)$ и $\sigma = -(0.5 + \Delta\varphi)$. Координаты точки границы AC находим

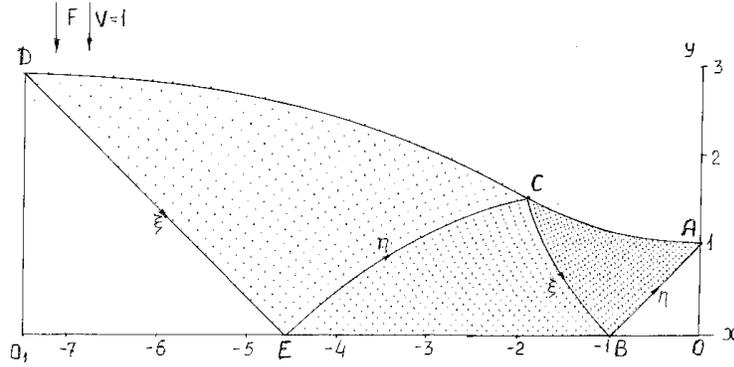


Рис. 1. Линии скольжения и гладкая граница штампа с углом наклона касательной $\theta_c = 0.5236$ в точке перегиба C на конечной стадии сдвливания цилиндра.

на пересечении прямых при конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений границы AC и линии скольжения ξ около точки A

$$y = y_A - (x - x_A)tg\tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = 0.5(\theta_A + \theta), \quad (6)$$

$$y = y_1 + (x - x_1)tg\tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = 0.5(\varphi + \varphi_1), \quad \varphi = -(\pi/4 + \theta), \quad (7)$$

где нижним индексом 1 обозначены координаты и угол φ в точке пересечения линий скольжения η и ξ вблизи границы AC . Затем от найденной точки на границе AC и начальной η линии скольжения AB вычисляем линию скольжения η , проходящую через точку на границе AC , до первой точки ξ линии скольжения BC около точки B циклической процедурой расчета регулярных точек линий скольжения при плоской деформации [6]. От найденной точки на границе AC и проходящей через нее линии скольжения η из уравнений (6) и (7) находим координаты и значения φ и $\sigma = -(0.5 + \theta)$ на границе AC и линии скольжения в области ABC , используя известные данные с индексом A в уравнениях (6) в найденных точках границы AC .

Линии скольжения в области BCE находим решением задачи смешанного типа по известным значениям σ и φ на ξ линии скольжения BC с граничным условием $\varphi = -\pi/4$, $y = 0$ на линии симметрии x . При этом циклическими процедурами определяются координаты x и значения σ в точках сетки линий скольжения на оси x и ξ линии скольжения от BC до точки E с известными значениями σ и φ на η линии скольжения CE . Линии скольжения ξ в области CDE - прямые ортогональные к η линии скольжения CE , ограниченные вогнутой границей штампа. Точки этой границы находим на пересечении прямых ξ линий скольжения с углами наклона $\varphi = -(\pi/4 + \theta)$ и прямых, определяемых уравнением (6), начиная от точки перегиба C при $\theta = \theta_c$, и уменьшении угла θ с шагом $\Delta\theta$ до нуля в точке D . Линии скольжения η , ортогональные к прямым

линиям скольжения ξ в области CDE , находим циклическими вычислениями регулярных точек линий скольжения начиная от η линии скольжения CE до точки D .

Приведенный алгоритм определяет гладкую вогнуто-выпуклую границу штампа ACD и соответствующие линии скольжения в зависимости от одного параметра - угла наклона касательной θ_C в точке перегиба C . В вычислительной программе вводится второй параметр $0 \leq cl \leq 1$, который изменяет кривизну выпуклого участка границы штампа на выходе из пластической области. При $cl < 1$ начальные точки кривых линий скольжения ξ задаем на части границы AB с шагом $\Delta y = -cl/N$. В этом случае на границе штампа появляется линейный отрезок с углом наклона θ_C , соединяющий вогнутый и выпуклый участки. При $cl \rightarrow 0$ выпуклая граница стягивается в сингулярную угловую точку A с прямой наклонной границы AC , длина которой равна двум, и граница ACD совпадает с идеальным профилем для прессования при плоской деформации [6]. При $cl = 1$ получаем идеальную границу штампа, показанную на рис.1, с минимальной кривизной выпуклой границы AC .

2. Поле скоростей. Скорости V_ξ, V_η находим интегрированием уравнений (3) после вычисления линий скольжения и гладкой границы ACD , при перемещении границы ACD по оси y со скоростью $V = -1$ относительно неподвижной горизонтальной линии симметрии x . Поле скоростей на плоскости годографа V_x, V_y находим по уравнениям (5).

В области DEO_1 с прямыми линиями скольжения ξ и η при $\varphi = \pi/4$ имеет место однородное деформированное состояние с постоянными скоростями деформации $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = 1/H$ при линейном изменении скоростей V_x, V_y в зависимости от координат x, y

$$V_x = \frac{L+x}{H}, \quad V_y = -\frac{y}{H}, \quad -L \leq x \leq -L+H, \quad 0 \leq y \leq H \quad (8)$$

где длина L проекции границы ACD на ось x и высота H по оси y определяются координатами точки D : $L = -x_D, H = y_D$. Граничные условия для скоростей V_ξ, V_η на линии скольжения DE при $\varphi = -\pi/4$ находим из уравнений (5) и (8)

$$V_\xi = \frac{V_x - V_y}{\sqrt{2}}, \quad V_\eta = \frac{V_x + V_y}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

На гладкой границе ACD при $\varphi = -(\pi/4 + \theta)$ выполняется условие непрерывности скорости по нормали к границе

$$\cos \theta + \frac{V_\eta - V_\xi}{\sqrt{2}} = 0 \quad (10)$$

и на линии симметрии x при $\varphi = -\pi/4$ и $V_y = 0$ из второго уравнения (5) следует $V_\xi = V_\eta$.

В вычислительной программе после расчета линий скольжения и границы ACD сохраняем массивы значений σ и φ на границе ACD и на ξ линии скольжения DE . Скорости перемещений в точках сетки линий скольжения находим при обратном расчете линий скольжения от границы DE к границе AB , так как уравнения (3) содержат угол φ .

В области DEC скорости находим численным решением смешанной задачи для уравнений (2), (3) с граничными условиями для скоростей (8)-(10). При этом скорости V_ξ , V_η в точках границы DC находим по известным значениям $V_{\xi 2}$, $V_{\eta 2}$ и φ_2 в точках на η линиях скольжения ближайших к границе DC , начиная от окрестности точки D , при конечноразностной аппроксимации второго уравнения (3) при граничном условии (10)

$$\begin{aligned} V_\eta &= \frac{V_{\xi 2} - \zeta(V_{\eta 2} + \sqrt{2} \cos \theta)}{1 + \zeta}, & V_\xi &= V_\eta + \sqrt{2} \cos \theta, \\ \zeta &= 0.5(\varphi - \varphi_2), & \varphi &= -(\pi/4 + \theta), \end{aligned} \quad (11)$$

с последующими вычислениями V_ξ , V_η в регулярных точках сетки линий скольжения от границы DC до η линии скольжения EC по известным значениям $V_{\xi 1}$, $V_{\eta 1}$, φ_1 и $V_{\xi 2}$, $V_{\eta 2}$, φ_2 в точках ξ и η линий скольжения и угла φ в точке пересечения линий скольжения

$$V_\xi = \frac{V_{\xi 1} + \zeta_1(V_{\eta 1} + V_{\eta 2}) - \zeta_1 \zeta_2 V_{\xi 2}}{1 + \zeta_1 \zeta_2}, \quad \zeta_1 = 0.5(\varphi - \varphi_1), \quad (12)$$

$$V_\eta = \frac{V_{\eta 2} - \zeta_2(V_{\xi 1} + V_{\xi 2}) - \zeta_1 \zeta_2 V_{\eta 1}}{1 + \zeta_1 \zeta_2}, \quad \zeta_2 = 0.5(\varphi - \varphi_2). \quad (13)$$

В области BCE скорости находим решением смешанной задачи, вычисляя скорости на оси x по известным значениям $V_{\xi 1}$, $V_{\eta 1}$, φ_1 в ближайших к оси x точках η линий скольжения, начиная от линии EC , с использованием конечноразностной аппроксимации первого уравнения (3)

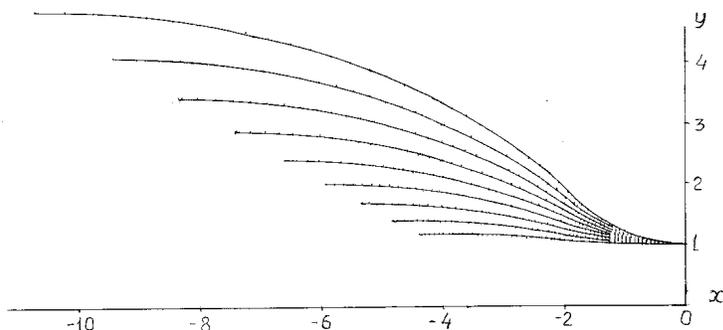
$$V_\xi = V_\eta = \frac{V_{\eta 1} + \zeta_1 V_{\eta 1}}{1 - \zeta_1}, \quad \zeta_1 = 0.5(\varphi - \varphi_1), \quad \varphi = -\pi/4. \quad (14)$$

Затем вычисляем скорости в регулярных точках сетки линий скольжения по уравнениям (12), (13). В области ABC решаем смешанную задачу с известными значениями $V_{\xi 2}$, $V_{\eta 2}$ и φ_2 на линии скольжения CB , вычисляя по уравнениям (11) скорости на границе AC и по (12), (13) в регулярных точках до линии скольжения AB . По условию пластической несжимаемости безразмерная горизонтальная скорость V_0 на границе OA равна L . В области OAB имеет место линейное изменение скоростей по осям x , y

$$V_x = L + x - 1 \leq x \leq 0, \quad V_y = -y, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (15)$$

Так как линии скольжения и скорости находим численным интегрированием уравнений (1) - (3), то после определения скоростей в области OAB равенство $V_0 = L$ используем для оценки накопленной погрешности вычислений поля скоростей.

$-x$	y	p	$-x$	y	p
0.000	1.000	1.000	2.169	1.655	1.559
0.133	1.002	1.035	2.442	1.795	1.593
0.266	1.009	1.070	2.730	1.929	1.628
0.399	1.021	1.105	3.032	2.057	1.663
0.532	1.037	1.140	3.350	2.179	1.698
0.663	1.058	1.175	3.682	2.293	1.733
0.794	1.083	1.209	4.030	2.400	1.768
0.924	1.113	1.244	4.394	2.497	1.803
1.053	1.148	1.279	4.773	2.585	1.838
1.180	1.187	1.314	5.168	2.661	1.873
1.306	1.230	1.349	5.579	2.726	1.908
1.431	1.278	1.384	6.006	2.779	1.942
1.554	1.330	1.419	6.449	2.818	1.977
1.674	1.387	1.454	6.909	2.842	2.012
1.793	1.447	1.489	7.384	2.850	2.047
1.910	1.512	1.524			

Таблица 1. Распределение давления p на границе контакта.Рис. 3. Гладкие профили штампа с углами наклона касательной в точке перегиба $\theta_C = 0.0873, 0.1745, 0.2618, 0.3491, 0.4363, 0.5236, 0.6109, 0.6981, 0.7854$.

3. Поперечное сдавливание цилиндра. Первая стадия пластического сдавливания начинается при контакте цилиндра с границей штампа в точке D и малом перемещении s границы штампа по радиусу цилиндра в направлении оси $-y$ (рис. 1). При малых углах наклона касательной θ в окрестности точки D и малых перемещениях s линии скольжения и поле скоростей определяются по Прандтлю вдавливанием штампа в пластическое полупространство с круговой границей, аналогично задаче о сдавливании цилиндра плоскими плитами [4].

Таблица 2. Зависимости параметров профилей на рис. 3 от угла наклона касательной θ_C в точке перегиба С (рис. 1)

θ_C	H	L	R	q	F
0.087	1.191	4.376	2.474	1.091	9.55
0.174	1.418	4.811	2.736	1.190	11.45
0.262	1.688	5.316	3.052	1.298	13.80
0.349	2.010	5.904	3.435	1.413	16.69
0.436	2.393	6.587	3.895	1.537	20.25
0.524	2.850	7.384	4.449	1.669	24.65
0.611	3.393	8.314	5.114	1.808	30.07
0.698	4.041	9.402	5.911	1.954	36.75
0.785	4.811	10.67	6.864	2.107	44.98

Давление на штамп q на первой стадии снижается от $1 + \pi/2$ при $s \rightarrow 0$ до 2.25, при увеличении перемещения до s_0 и переходом на вторую стадию пластического течения. На этой стадии пластическая область определяется линиями скольжения и полем скоростей по Прандтлю при сдавливании пластического слоя с отношением $h/a = 6.4$ полутолщины $h = y_A$ к полудлине $a = x_A + L$, которые определяются координатами точки A границы контакта цилиндра на вогнутой границе DC . Анализ первой стадии сдавливания цилиндра с радиусом R плоским штампом [4] показывает, что первая стадия заканчивается при безразмерных значениях $h/R = 0.988$ и $a/R = 0.154$, и весьма малом изменении круговой границы при выдавливании материала на границу цилиндра при перемещении $s_0/R = 0.012$.

При сдавливании цилиндра штампом с криволинейной границей перемещение s_0 при переходе ко второй стадии находим по координатам точки контакта A на границе цилиндра при $h/R = 0.988$ в полярных координатах с центром в точке O_1 и углом $\text{tg } \alpha = 6.4$

$$x_A = R \cos \alpha - L, \quad y_A = R \sin \alpha, \quad x_A = x_{A0}, \quad s_0 = y_{A0} - y_A, \quad \alpha = 1.416, \quad (17)$$

где x_{A0} и y_{A0} — координаты точки A_0 на смещенной границе штампа, проходящей через начальную точку контакта с цилиндром $x = -L, y = R$. По табличной функции границы штампа DC находим интервал $x_{i+1} \leq x_A \leq x_i$ для координаты x_A , линейной интерполяцией на этом интервале находим координату y_{A0} , затем из второго и третьего соотношений (17) находим перемещение штампа s_0 в конце первой стадии сдавливания цилиндра.

На второй стадии сдавливания при $s > s_0$ происходит смещение u круговой границы жесткой области деформируемого цилиндра по оси симметрии x и точки A границы контакта с заполнением полости штампа. При $s = 0$ граница штампа определяется уравнением $y(x)$ границы ACD при конечном положении, показанном на рис.1 и сдвигом по оси y на величину $R - H$ до контакта с

верхней точкой недеформированного цилиндра. При $s > s_0$ координаты точки A определяются пересечением круговой границы жесткой области со смещенной на $R - H - s$ границей $y(x)$

$$x_A = x = u + R \cos \alpha - L, \quad y_A = y + R - H - s = R \sin \alpha, \quad (18)$$

где u и α зависят от перемещения s при заполнении полости штампа и изменении границы пластической и жесткой области.

С увеличением s отношение h/a уменьшается вследствие увеличения длины $a = L + x_P$ и уменьшения высоты $h = y_A$ пластической области при перемещении точки контакта A по границе штампа ACD . При $h/a \leq 1$ пластическая область моделируется сдавливанием пластического слоя с конечным обратным отношением $a/h > 1$, пластическим течением по оси x и разрывом скорости вдоль жесткопластической границы с выпуклой свободной границей с радиусом R . При этом линии скольжения с сингулярной точкой A и вертикальной границей $x = x_A$, $0 \leq y \leq y_A$ с однородным напряженным состоянием сжатия $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$ и поле скоростей удовлетворяют условию положительности диссипативной функции.

Жесткая область в виде сегмента круга с радиусом R и центральным углом 2α перед этой границей не нагружена, и перемещается с постоянной скоростью аналогично процессам сдавливания цилиндра плоскими штампами [4] и вдавливания штампа в пластическое полупространство с выпуклой криволинейной границей [7, 8]. При приближении к конечной стадии сдавливания цилиндра при $s = R - H$ имеет место скольжение по выпуклой границе штампа AC с уменьшением веера линий скольжения в точке A и жесткой области на вогнутой границе контакта, стремящейся к точке D . Жесткая область с радиусом R и уменьшением угла α перед свободной границей $x = x_P$ сохраняется.

Из равенства площади круга с радиусом R сумме площади, ограниченной границей штампа от точки D до точки A , и площади сегмента круга с радиусом R и углом α находим нелинейное уравнение для определения s при заданных координатах x , y границы штампа ACD , связанных с координатами точки A уравнениями (18).

$$\frac{\pi}{4} + \frac{(x + L)(s - R + H) - \frac{1}{2}(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) - \int_{-L}^x y(x) dx}{R^2} = 0, \quad (19)$$

где

$$\sin \alpha = \frac{y + R - H - s}{R}. \quad (20)$$

Интегралы, зависящие от координаты x в уравнении (19), вычисляются в программе после определения границы ACD на рис. 1, и сохраняются в массиве данных на этой границе вместе с координатами x , y , фигурирующими в уравнениях (18) - (20). Значения s с погрешностью меньше 10^{-3} находим численным решением уравнения (19) с подстановкой (20) методом Ньютона от начального

значения s_0 до конечного значения $s = R - H$ при заполнении полости штампа. После вычисления s по уравнению (20) находим угол α , по уравнениям (18) находим перемещение центра круговой границы деформируемого цилиндра u и величины $a = L + x_A$ и $h = y_A$, определяющие изменения пластической и жесткой области при сдавливании цилиндра.

Ниже приведены результаты численного моделирования поперечного сдавливания цилиндра с радиусом $R = 3.435$ в гладком штампе с криволинейной границей, определяемой углом наклона касательной $\theta_C = 0.349$ в точке перегиба при $H = 2.01$, $L = 5.9$, среднем давлении $q = 1.413$ и силе $F = 16.69$ на конечной стадии сдавливания. Первая стадия сдавливания заканчивается при $s_0 = 0.031$, $a = 0.53$, $h = 3.39$, $q = 2.225$, $F = 2.36$.

На рис. 4 показаны линии скольжения по Прандтлю и годограф скоростей на второй стадии сдавливания цилиндра при перемещении штампа $s = 0.29$, $a = 1.73$, $h/a = 1.75$, $q = 1.143$ и $F = 3.36$. Центр свободной круговой границы жесткой области перемещается по оси x на $u = 0.106$ от начальной координаты $x = -L$. Пластическая область симметрична относительно границы $x = -L$, $0 \leq y \leq R - s$. Область выше границы AB перемещается со скоростью штампа $V_y = -1$, $V_x = 0$ без скольжения по границе контакта AD и нагружена до однородного напряженного состояния с прямыми линиями скольжения ξ и η при $\varphi = -\pi/4$ и давлении $q = \sigma_{01} - (2\psi + \frac{1}{2})$, где σ_{01} — среднее напряжение в центре O_1 , определяемое по условию равенства нулю горизонтальной силы, приложенной к свободной жесткой области с круговой границей [4].

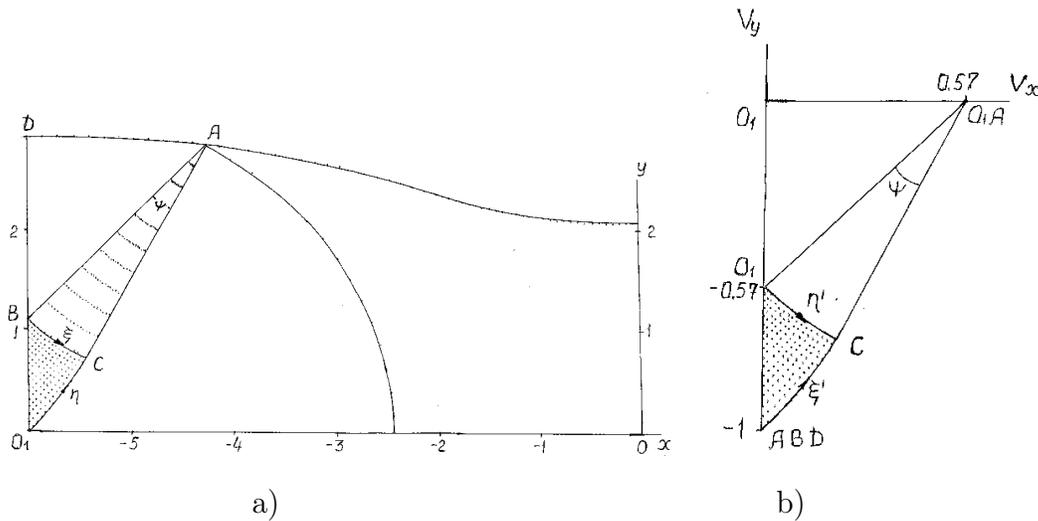


Рис. 4. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии сдавливания цилиндра. $\theta_C = 0.3491$, $R = 3.435$, $s = 0.29$.

По условиям симметрии относительно оси x и пластической несжимаемости скорость перемещения свободной жесткой области равна $a/h = 0.571$. Вдоль

жесткопластической границы ACO_1 (рис. 4а) имеет место постоянный разрыв скорости $[V] = \sqrt{2}(a/h)$, который отображается на годографе скоростей (рис. 4б) дугой окружности с центральным углом ψ , равным углу веера линий скольжения в сингулярной точке A (рис. 4а). При увеличении перемещения s пластическая область расширяется при движении точки контакта A по границе штампа, перемещении жесткопластической границы ACO с неподвижной точкой O_1 в центре полости штампа и уменьшении свободной жесткой области с круговой границей; отношение h/a уменьшается до единицы с уменьшением угла ψ до нуля и вырождением пластической области в линию сдвига с разрывом скорости $[V] = \sqrt{2}$ и однородным напряженным и деформированным состоянием пластического сжатия $\sigma = -\frac{1}{2}$ и $q = 1$ при $s = 0.597$, $a = 2.646$.

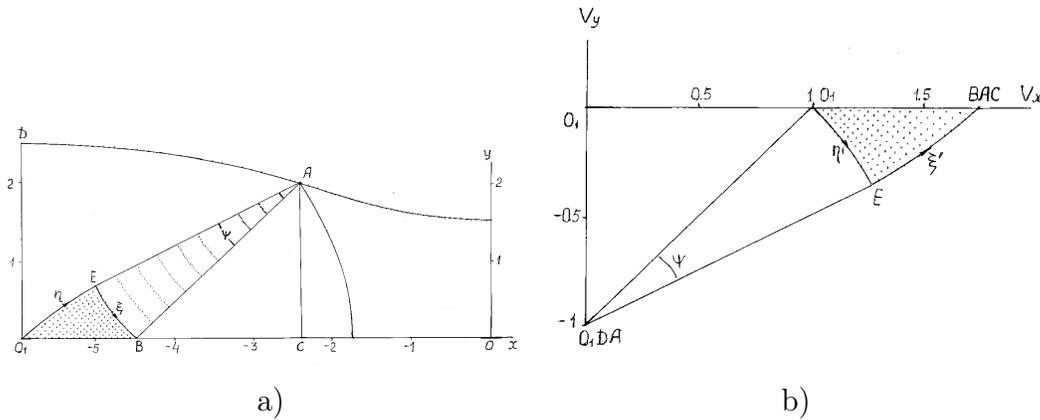


Рис. 5. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на третьей стадии сдвливания цилиндра. $\theta_C = 0.3491$, $R = 3.435$, $s = 0.88$.

При перемещениях $s > 0.6$ пластическая область переходит на третью стадию сдвливания слоя при отношении $a/h > 1$ и пластическим течением по линии симметрии x . На рис. 5 показаны линии скольжения и годограф скоростей на третьей стадии при $s = 0.88$, $a = 3.49$, $a/h = 1.71$, $q = 1.133$ и $F = 7.91$. Пластическая область (рис. 5а) ограничена жесткопластической границей AEO_1 , проходящей через центр полости штампа $x = -L$, с постоянным разрывом скорости $[V] = \sqrt{2}$, которая на плоскости годографа скоростей (рис. 5б) отображается окружностью с центральным углом ψ в сингулярной точке A на рис. 5а. Область однородного пластического сжатия ограничена линией скольжения AB и вертикальной границей AC , перемещающейся со скоростью $V_x = a/h$ вместе со свободной жесткой областью, ограниченной дугой окружности радиуса R , смещенной на $u = 0.73$ от центра O_1 по оси x . Жесткая область, ограниченная границей контакта со штампом DA и жесткопластической границей AEO_1 , перемещается со скоростью $V_y = -1$ без скольжения по границе DA . Среднее давление q и силу F находим интегрированием распределения давления $p = -(\sigma + \frac{1}{2})$ по оси x при вычислении линий скольжения.

На рис. 6 показаны линии скольжения и годограф скоростей на четвертой стадии сдвливания цилиндра при $s = 1.17$, $a = 4.52$, $a/h = 3.16$, $q = 1.376$ и $F = 12.43$. На этой стадии имеет место пластическое скольжение материала по выпуклой и вогнутой границе контакта со штампом с непрерывным полем скоростей. В области ABC со свободной границей AC (рис. 6а) имеет место напряженное состояние однородного сжатия и линейное изменение скоростей по осям координат x, y , удовлетворяющее условию $V_x = a/h$ на границе AC со свободным круговым сегментом жесткой области

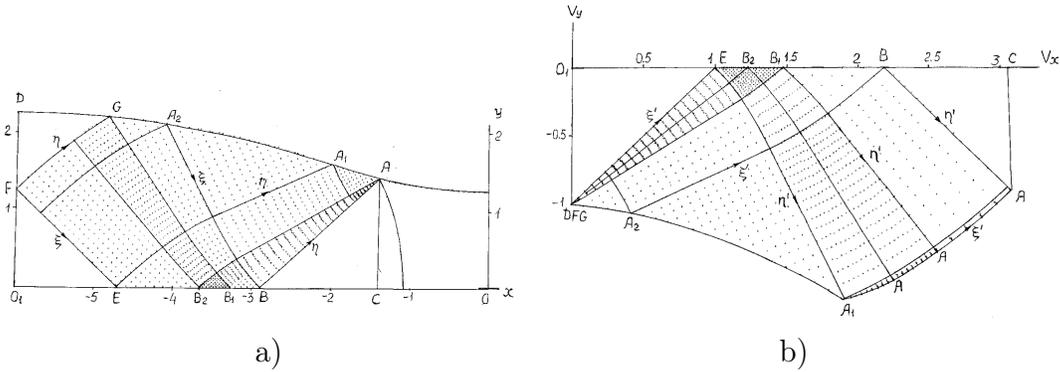


Рис. 6. Линии скольжения (а) и годограф скоростей (б) на четвертой стадии сдвливания цилиндра. $\theta_C = 0.3491$, $R = 3.435$, $s = 1.17$.

$$V_x = \frac{a}{h} + x_A - x, \quad x_B \leq x \leq x_A; \quad V_y = -y, \quad 0 \leq \frac{y}{h} \leq 1, \quad h = y_A, \quad a = L + x_A.$$

Линии скольжения в области AB_2A определяются углом веера $\psi = \theta_A$ в сингулярной точке A с углом наклона касательной $-\theta_A$ к границе штампа и условием $\varphi = -\pi/4$ на линии симметрии x . Линии скольжения в области AB_2EA_1 определяются граничными условиями $\varphi = -(\pi/4 + \theta)$ на границе штампа AA_1 и $\varphi = -\pi/4$ на линии симметрии x с известными значениями σ и φ на линии скольжения AB_2 . В области A_1EFGA_2 линии скольжения ξ прямые ортогональные к линии скольжения A_1E . В области EFO_1 имеет место напряженное состояние сжатия по оси y и линейное изменение скоростей по осям x и y

$$V_x = \frac{L + x}{L + x_E}, \quad -L \leq x \leq x_E; \quad V_y = -y, \quad 0 \leq \frac{y}{y_F} \leq 1$$

На жесткопластической границе FG скорости $V_\xi = -\sin \varphi$ и $V_\eta = -\cos \varphi$ непрерывны, и на годографе (рис. 6б) отображаются сингулярной точкой DFG с углом веера прямых ξ линий скольжения $\psi = -(\frac{\pi}{4} + \varphi_G)$. На выпуклом участке границы скольжения AA_1 , где A_1 — точка перегиба границы штампа, линии скольжения наклонены к касательной под углом $\pi/4$, при равенстве нулю контактных касательных напряжений. На вогнутом участке границы A_1A_2G ,

на рис. 6а, углы наклона ξ линий скольжения к касательной к этой границе $\alpha = -(\varphi + \theta)$ отклоняются от $\pi/4$, и на этом участке появляются малые контактные касательные напряжения $\tau = \frac{1}{2} \cos 2\alpha$, приведенные в табл. 3, которые приближаются к нулю в конце сдавливания цилиндра при $s = R - H = 1.425$. Эти напряжения приводят к повышению диссипативной функции при пластическом скольжении на участке границы A_1A_2G , которое практически не влияет на интегральные значения давления q и силы F .

На рис. 7 показаны зависимости безразмерных значений q и F от перемещения штампа s относительно оси симметрии x . На первой стадии сдавливания цилиндра до $s = 0.03$ происходит быстрое снижение q от $1 + \frac{\pi}{2}$ при давлении штампа Прандтля на пластическое полупространство до 2.225 при переходе линий скольжения по Прандтлю на второй стадии сдавливания при отношениях $h/a > 1$ до $s = 0.6$ и нелинейном возрастании силы F без скольжения жесткой области на границе контакта. При сдавливании цилиндра на участке $0.6 < s < 1$ пластическая область определяется линиями скольжения по Прандтлю с разрывным полем скоростей при отношениях $1 < a/h < 2$ с небольшим повышением q до 1.23 на третьей стадии, также без скольжения жесткой области на границе контакта. При $s > 1$ граница контакта выходит на выпуклый участок штампа на четвертой стадии сдавливания цилиндра с увеличением скольжения по границе контакта, при уменьшении жесткой области и непрерывном поле скоростей. При этом давление незначительно возрастает и увеличение силы вследствие увеличения длины границы контакта близко к линейному.

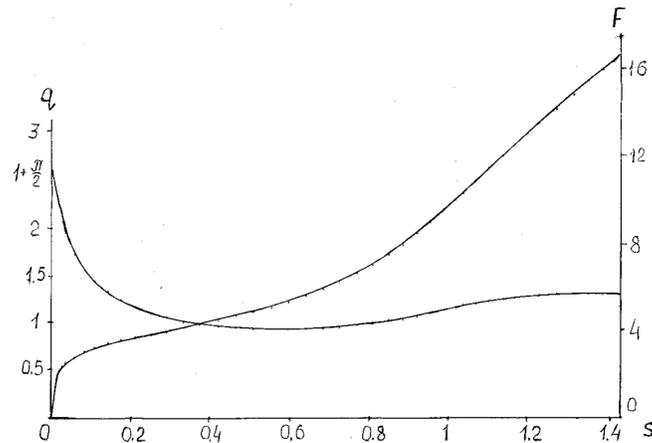


Рис. 7. Зависимости среднего давления q и силы F от перемещения s при сдавливании цилиндра. $\theta_C = 0.3491$, $R = 3.435$.

Таблица 3. Контактное давление p и касательное напряжение τ на вогнутой границе скольжения A_1A_2G (рис. 6а)

$-x$	y	p	$-\tau$	$-x$	y	p	$-\tau$
2.091	1.650	1.349	0.014	3.476	2.029	1.327	0.146
2.206	1.690	1.348	0.026	3.616	2.057	1.324	0.158
2.323	1.728	1.348	0.038	3.759	2.083	1.319	0.170
2.443	1.766	1.347	0.050	3.905	2.108	1.315	0.182
2.564	1.802	1.345	0.062	4.053	2.132	1.334	0.178
2.687	1.838	1.344	0.074	4.198	2.153	1.365	0.165
2.813	1.873	1.342	0.086	4.342	2.172	1.394	0.152
2.940	1.906	1.339	0.098	4.483	2.189	1.422	0.141
3.070	1.939	1.337	0.110	4.622	2.204	1.448	0.130
3.203	1.970	1.334	0.122	4.758	2.217	1.472	0.120
3.338	2.000	1.331	0.134				

4. Заключение. В случае поперечного сдавливания жесткопластического цилиндра штампом с криволинейной границей основным механизмом пластического течения является локализация пластической области с образованием жестких зон, моделируемая линиями скольжения по Прандтлю, начиная от давления штампа на полупространство, переходящего в сдавливание пластического слоя с уменьшением отношения толщины слоя к проекции границы контакта на горизонтальную плоскость.

В рассматриваемой выпукловогнутой границе штампа пластическое течение по Прандтлю с разрывом скорости по жесткопластическим границам удовлетворяет полной системе дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей при положительной диссипативной функции с образованием жестких зон без скольжения на вогнутой границе контакта в процессе поперечного сдавливания цилиндра. Доминирующим механизмом деформирования является пластический сдвиг, вызванный перемещением жесткопластической границы по сечению цилиндра с разрывом касательной компоненты скорости.

На конечной стадии сдавливания происходит пластическое скольжение по выпуклой границе штампа на выходе из пластической области, и в случае идеально гладкой границы устанавливается непрерывное пластическое течение по всему сечению деформируемого цилиндра при положительности диссипативной функции.

В переходной зоне деформирования перед конечной стадией происходит уменьшение жестких зон при непрерывном поле скоростей и увеличении границы скольжения на вогнутом участке границы контакта с появлением малых касательных напряжений. При этом положительность диссипативной функции в пластической области сохраняется при малом повышении среднего давления вследствие затраты энергии контактного трения скольжения.

Гладкая выпукло-вогнутая граница штампа существенно снижает контактное давление и силу деформирования по сравнению с конечной стадией штамповки с выдавливанием металла в тонкий слой (облой) при малом радиусе перехода от полости штампа к облою. При штамповке массовых деталей со сложным профилем переменного сечения рассматриваемые профили целесообразно использовать на промежуточных переходах с целью улучшения заполнения полости штампа на конечном переходе, снижения максимальных сил и повышения износостойкости и прочности штампового инструмента при высоких циклических нагрузках.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Машиностроение. Энциклопедия. Т. III-2. Технология заготовительных производств. Москва : Машиностроение, 1996. 736 с.
- [2] Машиностроение. Энциклопедия. Т. VI-4. Машины и оборудование кузнечно-штамповочного и литейного производства. Москва : Машиностроение, 2005. 926 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Москва : Физматлит, 2001. 704 с.
- [4] Непершин Р. И. Пластическое сдавливание цилиндра плоскими плитами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 101–120.
- [5] Непершин Р. И. Сдавливание жесткопластической сферы плоскими штампами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2018. № 1 (35). С. 26–38.
- [6] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow : MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [7] Быковцев Г. И., Хромов А. М. Плоская задача о вдавливании жесткого штампа в идеальное жестко-пластическое полупространство // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 6. С. 47–52.
- [8] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.

REFERENCES

- [1] Machinery Engineering. Encyclopedia. Vol. III-2. Technology of Blank Production. Moscow : Mashinostroenie, 1996. 736 c. (in Russian).
- [2] Machinery Engineering. Encyclopedia. Vol. VI-4. Machines and Equipment for Forging and Foundry Production. Moscow : Mashinostroenie, 2005. 926 c. (in Russian).
- [3] Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D. Mathematical Theory of Plasticity. Moscow : Fizmatlit, 2001. 704 c. (in Russian).
- [4] Nepershin R. I. Plastic Compression of a Cylinder by Flat Plates // Vestnik ChGPU named after I.Ya. Yakovlev. Series Mechanics of Limit State. 2020. № 1 (43). С. 101–120. (in Russian).
- [5] Nepershin R. I. Compression of a Rigid-Plastic Sphere by Flat Stamps // Vestnik ChGPU named after I.Ya. Yakovlev. Series Mechanics of Limit State. 2018. № 1 (35). С. 26–38. (in Russian).
- [6] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. Moscow : MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [7] Bykovtsev G. I., Khromov A. M. Plane Problem of Insertion of a Rigid Stamp into an Ideal Rigid-Plastic Half-Space // Izv. AN USSR, MTT. 1981. № 6. С. 47–52. (in Russian).
- [8] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 c. (in Russian).

Т. Г. Рытова¹, И. С. Игольников¹, Л. А. Максимова², З, Н. Г. Козина⁴

УМЕНЬШЕНИЕ ТОЛЩИНЫ ФЛАНЦА В СОЕДИНЕНИЯХ ИЗ ЗАМКНУТЫХ ПРОФИЛЕЙ

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

²Российский университет транспорта, Москва, Россия

³Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

⁴Казанский филиал Российского государственного университета правосудия, Казань, Россия

Аннотация. В российских нормах с целью упрощения расчета фланцевых соединений за основу взята гипотеза недеформируемой плоскости контакта фланца. Для достижения данной гипотезы приходится применять достаточно толстые фланцы и болты высокого класса прочности. Несмотря на широкое распространение фланцевого соединения, истинная механика поведения работы узла до сих пор не изучена. Предметом исследования является изучение влияния параметров узла фланцевого соединения на несущую способность.

Ключевые слова: фланцевое соединение, гнutosварные замкнутые профили, несущая способность, толщина, фланец.

Рытова Татьяна Георгиевна, кандидат технических наук, доцент кафедры металлических и деревянных конструкций; e-mail: rytovatg@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-8835-4393>; AuthorID: 856792.

Игольников Иван Сергеевич, магистр кафедры металлических и деревянных конструкций; e-mail: goldigl@bk.ru; AuthorID: 866758

Максимова Людмила Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и естественных наук; e-mail: maximova_ng@mail.ru; AuthorID: 14131.

Козина Надежда Георгиевна, кандидат исторических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных дисциплин; e-mail: nfeodorova83@mail.ru; AuthorID: 244794

для цитирования: Рытова Т. Г., Игольников И. С., Максимова Л. А., Козина Н. Г. Уменьшение толщины фланца в соединениях из замкнутых профилей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 60–69. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.006 EDN: NXAGEN

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

T. G. Rytova¹, I. S. Igolnikov¹, L. A. Maximova^{2, 3}, N. G. Kozina⁴

REDUCING THE THICKNESS OF FLANGES IN CONNECTIONS MADE OF CLOSED PROFILES

¹*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Russian University of Transport, Moscow, Russia*

³*I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

⁴*Kazan Branch of the Russian State University of Justice, Kazan, Russia*

Abstract. In Russian standards, to simplify the calculation of flange connections, the hypothesis of a non-deformable contact plane is taken as a basis. Achieving this hypothesis requires using sufficiently thick flanges and high-strength bolts. Despite the widespread use of flange connections, the true mechanics of the assembly behavior remain understudied. This study investigates the effect of flange connection assembly parameters on load-bearing capacity. The results provide insights into optimizing flange thickness while maintaining structural integrity.

Keywords: flange connection, bent-welded closed profiles, load-bearing capacity, thickness, flange.

Tatyana G. Rytova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor; e-mail: rytovatg@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-8835-4393>; AuthorID: 856792.

Ivan S. Igolnikov, Master's Student; e-mail: goldigl@bk.ru; AuthorID: 866758

Lyudmila A. Maksimova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: maximova_ng@mail.ru; AuthorID: 14131.

Nadezhda G. Kozina, Candidate of Historical Sciences, Associate Professor; e-mail: nfedorova83@mail.ru; AuthorID: 244794

to cite this article: Rytova T. G., Igolnikov I. S., Maximova L. A., Kozina N. G. Reducing the thickness of flanges in connections made of closed profiles // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 60–69. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.006 EDN: NXAGEN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Фланцевое соединение является весьма распространённым видом стыка стержневых элементов. Оно является одним из наиболее эффективных типов соединений, поскольку несущая способность болтов используется практически полностью, а контактирующие поверхности соединяемых элементов не требуют специальной обработки в период монтажа [1]. Наиболее используемые профили в строительстве являются двутавровые профили и менее используемые гнутосварные профили прямоугольного сечения.

Причины нераспространённости конструирования с применением профилей замкнутого сечения следуют из высокой стоимости по отношению к двутавровым профилям при относительно равных характеристиках в одной плоскости. Дополнительными факторами являются отсутствие возможности или нецелесообразности усиления замкнутого профиля для придания ему большей местной устойчивости (при работе на сжатие), отсутствие современных методик и пособий по расчету узлов как на сжатие, так и на растяжение, большего расхода металла по сравнению со сварными двутаврами на аналогичное здание или сооружение, но меньшего чем у прокатного.

При проектировании фланцевых соединений проектировщики используют пособия, справочники [1–9]. с учетом действующей нормативной документацией [10, 11]. Данные справочники содержат в себе в основном рекомендации по расчету фланцевых соединений двутавровых сечений, исключения составляют серия [2] полностью посвященная стальным конструкциям покрытий производственных зданий с применением гнутосварных профилей, пособие [12], где замкнутым гнутосварным прямоугольным профилям уделено внимание. Используются две модели сопряжения металлоконструкций – шарнирная или жесткая. Податливость жесткого узла в Российский нормах в настоящий момент не учитывается, в отличии от Европейских [12–20], имеются наработки в данном направлении [1].

В российских нормах с целью упрощения расчета за основу взята гипотеза недеформируемой плоскости контакта фланца при расчете отдельно фланца. Для достижения данной гипотезы приходится применять достаточно толстые фланцы и болты высокого класса прочности. Зарубежное пособие [13] с тонкими фланцами несовместимо с массивными колоннами, где толщина полки и стенки колонны существенно превышает толщину фланца [1]. Предложенная конечно-элементная модель и измененные формулы пособия, описанные в статье [1], точнее описывают реальное поведения узла и согласуются с натурными испытаниями [21–24].

Предметом исследования является изучение влияния параметров узла фланцевого соединения на несущую способность, установление зависимости несущей способности фланцевого соединения от толщины фланца.

1. Методы Для осуществления численного исследования необходимо придерживаться общепринятых правил проектирования [10, 11]. В качестве расчетного фланцевого соединения будет выбран узел стыка нижнего пояса фермы по длине (Рис. 1). При проектировании учитываются следующие конструктивные

требования: минимальная толщина стенок профиля не менее 3 мм из условий сварки и коррозионной стойкости; в целях экономической целесообразности использования фермы вместо балки, сечения труб принимаются не менее 80x3.

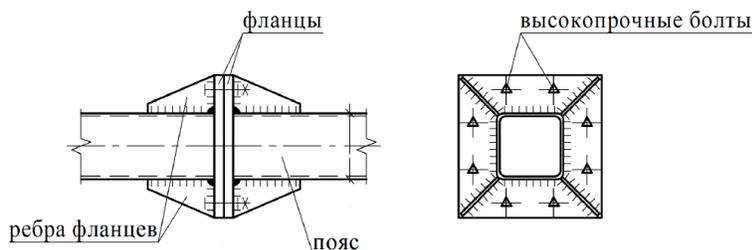


Рис. 1. Типовой фланцевый узел фермы с применением квадратных профилей.

Для построения моделей узлов выбран программный комплекс IDEA Statica, поскольку имеется возможность решения контактной задачи между двумя фланцами.

При исследовании узлового соединения варьируются геометрические параметры узла, а также продольная сила. В результате определяются напряжения во фланце и усилия в болтах. Заданы исходные параметры для обобщения результатов расчета: 8 болтов в соединении, 2 болта между ребрами жесткости, диаметр отверстия под болты на 3 мм больше диаметра болта, болты класса прочности 10.9, класс точности В, сталь фланцев, профиля, ребер жесткости С355, однозначная эпюра растягивающий напряжений, все сварные швы имеют одинаковые катеты.

Все фланцевые соединения были проверены на прочность и местную устойчивость соединяемых элементов в околофланцевой зоне, несущую способность болтов, прочность фланца, несущую способность сварных швов крепления фланца к элементам конструкции (Рис. 2).

Прочность фланца считается обеспеченной по нормативным документам [10, 11] и рекомендациям [5], если толщина фланца находится в пределах от 20 до 40 мм, сталь фланцев С355 и С390, нагрузка на болт от действия внешних усилий не превышает предельно допустимого значения. Исходя из этих условий назначается толщина фланцев 20-25 мм из стали С355 в соответствии с рекомендациями пункта 4.4 [5] (для высокопрочных болтов М20 – 20 мм, М24 – 25 мм, где болты с классом прочности не ниже 10.9 по ГОСТ Р 52644-2006, все болты являются болтами внутренней зоны).

2. Результаты. В расчете предельные пластические деформации принимаются равными 0,3% в соответствии с комментариями [9] в рамках пояснений к [6]. Результаты расчета приведены в таблице 1.

В результате анализа можно увидеть, что потенциал прочности фланца используется не полностью. Запас прочности фланца находится в диапазоне от

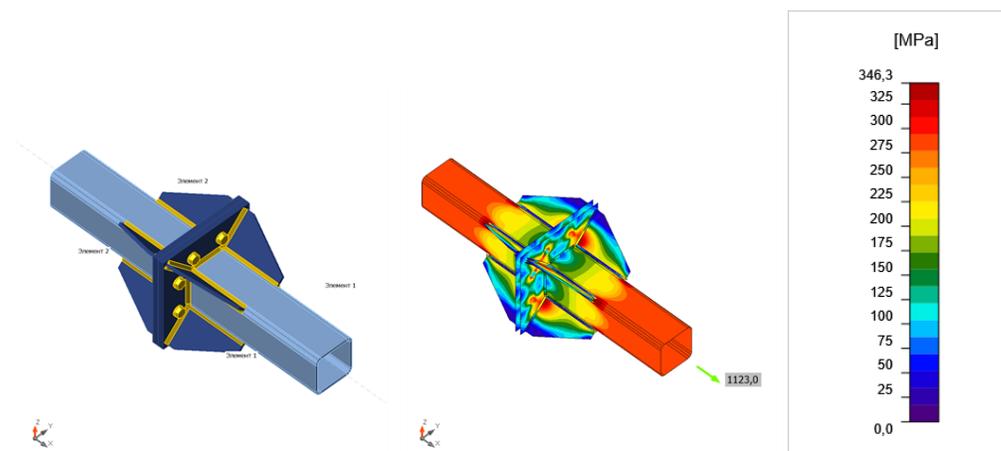


Рис. 2. Эквивалентные напряжения в фланцевом соединении в IDEA Statica.

№	Профиль	Усилие N, кН	Толщина фланца, мм	Напряжение во фланце, Н/мм ²	Расчетное сопротивление фланца, Н/мм ²	Запас прочности %
1	2	3	4	6	7	8
1	140x4	599	20	167,8	336,6	50
2	140x6	876	20	234	336,6	30
3	140x8	1123	20	288,7	336,6	14
4	150x6	943	20	249,9	336,6	26
5	150x8	1213	25	216	336,6	36
6	160x6	1011	20	275,2	336,6	18
7	160x8	1303	25	233,6	336,6	31
8	180x5	964	20	286,9	336,6	15
9	180x7	1312	25	249,4	336,6	26
10	180x9	1649	25	294,5	336,6	13

Таблица 1. Результаты расчета.

13% до 50%. Данный запас обуславливается отсутствием формулы для расчета фланца, а также гипотезой о не деформируемости плоскости контакта, что приводит к увеличению толщины фланца. Средний коэффициент запаса составляет 26%. Стоит отметить, что потенциал прочности фланца используется не полностью и подлежит дополнительному уточнению.

В качестве расчетной методики предлагается использовать метод расчета опорных плит по пункту 8.6 [10]. При расчете давления под пластиной допускается принимать его равномерно распределенным [8]. Данное допущение, дает удовлетворительные результаты расчета [7]. Одним из способов уточнения традиционной методики может быть учет совместной работы соседних участков плиты.

Так, например, для участка, опертого на 3 канта его можно рассматривать не как шарнирно опертую, а как жестко защемленную по 3 сторонам пластину. В результате совместной работы других участков фланца и податливости болтов можно сделать вывод, что фланец работает как упруго-защемленная пластинка [7]. Если рассмотреть фланцевый узел с точки зрения опирания пластины на 3 или 4 канта, во все случаях момент в пластине, опертой на 3 канта будет выше, чем на пластине опертой на 4 канта (Рис. 3.)

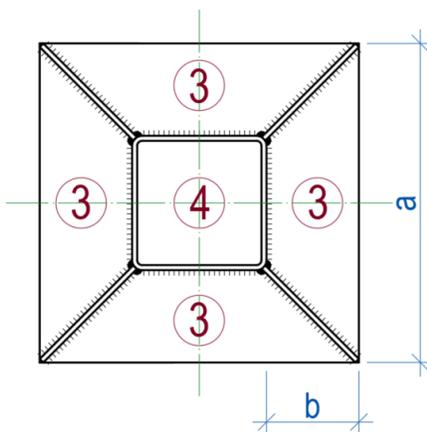


Рис. 3. Участки фланцевого соединения.

На основе проведенных расчетов в IDEA Statica определяем диапазон толщин фланца. Нижней границей толщины будет служить достижение фланцем предела текучести и 0,3% относительных деформаций элементов соединения. Верхней границей толщины будет служить напряжения во фланце, отличающиеся не более чем на 1% от предела текучести. Результаты полученных значений толщин приведены в таблице 2.

Выполнен расчет по методу расчета опорных плит [10] с скорректированными толщинами, определенными в IDEA Statica, результаты приведены в таблице 3.

При уточненной толщине фланца потенциал прочности фланца используется полностью (запас прочности фланца находится стремится к 0%).

Так как фланец подбирался по пределу текучести и относительному удлинению не более 0,3% в IDEA Statica, то потенциал возможности фланца используется максимально, что выражается в почти нулевом запасе. Толщину фланца

№	Профиль	N, кН	Минимальная толщина фланца, мм	Максимальная толщина фланца, мм
1	140x4	599	10,6	11,3
2	140x6	876	11,0	14,3
3	140x8	1123	13,9	18,5
4	150x6	943	11,7	14,8
5	150x8	1213	12,7	17,8
6	160x6	1011	12,1	14,7
7	160x8	1303	14,3	18,5
8	180x5	964	12,1	16,6
9	180x7	1312	15,0	17,8
10	180x9	1649	17,2	21,5

Таблица 2. Диапазон толщин фланца.

№	Профиль	N, кН	b, мм	a, мм	Момент в фланце, кНсм	Толщина, мм	Напряжения во фланце, Н/мм ²
1	140x4	599	80	300	6,6	11,3	346,4
2	140x6	876	80	300	9,6	13,7	346,4
3	140x8	1123	85	310	12,4	15,5	346,4
4	150x6	943	80	310	10,4	14,2	346,4
5	150x8	1213	95	340	13,3	16,1	336,7
6	160x6	1011	80	320	11,1	14,7	346,4
7	160x8	1303	95	350	14,3	16,7	336,7
8	180x5	964	80	340	10,6	14,3	346,1
9	180x7	1312	90	360	14,4	16,7	336,7
10	180x9	1649	95	370	18,1	18,7	336,7

Таблица 3. Результаты уточненного расчета.

удалось снизить на несколько толщин начиная с 11,3 мм и заканчивая 18,7 мм в рассматриваемых типоразмерах профилей. В результате снижения толщины фланцевого соединения, произошло увеличение рычажных сил для болтового соединения, в следствии чего выросла нагрузка на болты. Следовательно, в некоторых соединениях появилась необходимость замены диаметра болта на больший типоразмер.

3. Обсуждение. Несмотря на такое широкое распространение фланцевого соединения, истинная механика поведения работы узла до сих пор не изучена. Не изучена проблема восприятия момента фланцем и передачи его, считается

что фланец, абсолютно жесткий и не деформируемый и полностью воспринимает момент. Не изучена работа узла в зоне пластических деформаций [1, 25]. Вдобавок имеющиеся формулы, для расчета стыка фланцевых соединений с применением закрытых профилей, уже устарели и требуют актуализации в соответствии с нынешними нормами и правилами и дополненными сортаментами.

4. Выводы. На основании проведенных исследований работы фланцевого соединения с применением закрытых профилей были предложены уточнения в расчете толщины фланца. С учетом этого уменьшен резерв несущей способности фланцевого соединения узлов фермы.

Для повышения точности расчета аналитической модели и дальнейшего внедрения в инженерную практику необходимо исследовать фланцевое соединение в нелинейной постановке с заданными параметрами, провести натурные испытания для наилучшей корреляции с расчетными моделями.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors declare that they have no competing interests.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ведяков И.И., Конин Д.В., Олуромби А.Р., Нахвальнов П.В. Учет пластических деформаций при расчете фланцевых соединений // Промышленное и гражданское строительство. 2021. № 10. С. 9–16.
- [2] Серия 1.460.3-14. Стальные конструкции покрытий производственных зданий пролетами 18, 24 и 30 м с применением замкнутых гнутосварных профилей прямоугольного сечения типа «Молодечно». 1988.
- [3] Серия 2.440-2 выпуски с 1 по 8. Узлы стальных конструкций производственных зданий промышленных предприятий. 1989.
- [4] Руководство по проектированию, изготовлению и сборке монтажных фланцевых соединений стропильных ферм с поясами из широкополочных двутавров, 1982.
- [5] Рекомендации по расчету, проектированию, изготовлению и монтажу фланцевых соединений строительных конструкций, 1988.
- [6] СТО АРСС 11251254.001-018-3. Руководство по проектированию стальных конструкций многоэтажных зданий. Москва, 2018.
- [7] Катюшин В.В. Здания с каркасом из стальных рам переменного сечения (расчет, проектирование, строительство). Москва : Стройиздат, 2005. С. 656.
- [8] Кудишин Ю.И., Беленя Е.И., Игнатьева В.С. Металлические конструкции. Москва : Академия, 2011. С. 688.
- [9] Кузнецов В.В. Справочник проектировщика. Том 2. Стальные конструкции зданий и сооружений. Москва : АСВ, 1998. С. 512.

- [10] СП 16.13330.2017 "Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81* 2017.
- [11] СП 294.1325800.2017 Конструкции стальные. Правила проектирования, 2017.
- [12] Пресняков Н.И., Востров Е.К., Бабушкин В.М. Национальное приложение к Еврокоду EN 1993-1-8:2005. Еврокод 3: Проектирование стальных конструкций. Часть 1-8. Расчет соединений. Москва, 2011.
- [13] Joints in Steel Construction Moment Connection. London : The Steel Construction Institute, 1997. P. 163.
- [14] EN 1993-1-1:2005 Eurocode 3: Design of Steel Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, 2005.
- [15] Пресняков Н.И., Кудишин Ю.И. Техническое редактирование текста Еврокода EN 1993-1-1:2005. Еврокод 3: Проектирование стальных конструкций. Часть 1-1. Общие правила для зданий и сооружений. Москва : ЦНИИПСК им. Н.П. Мельникова, 2011.
- [16] Пресняков Н.И., Кудишин Ю.И. Национальное приложение к Еврокоду EN 1993-1-1:2005. Еврокод 3: Проектирование стальных конструкций. Часть 1-1. Общие правила для зданий и сооружений. Москва, 2011.
- [17] Пресняков Н.И., Кудишин Ю.И. Сопоставительный анализ Еврокода EN 1993-1-1:2005 "Проектирование стальных конструкций. Часть 1-1. Общие правила для зданий и сооружений" с российскими нормативными документами. Москва : ЦНИИПСК им. Н.П. Мельникова, 2011.
- [18] EN 1993-1-8:2005 Eurocode 3: Design of Steel Structures - Part 1-8: Design of Joints, 2005.
- [19] Пресняков Н.И., Востров Е.К., Бабушкин В.М. Техническое редактирование текста Еврокода EN 1993-1-8:2005. Еврокод 3: Проектирование стальных конструкций. Часть 1-8. Расчет соединений. Москва : ЦНИИПСК им. Н.П. Мельникова, 2011.
- [20] Пресняков Н.И., Востров Е.К., Бабушкин В.М. Сопоставительный анализ Еврокода EN 1993-1-8:2005 "Проектирование стальных конструкций. Часть 1-8. Расчет соединений" с российскими нормативными документами. Москва : ЦНИИПСК им. Н.П. Мельникова, 2011.
- [21] Wang X., Luo Y., Qiang X. Review on High Strength Steel Bolted End-Plate Connections // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 744–746. P. 265–273.
- [22] Abidelah A., Bouchair A., Kerdal D.E. Experimental and Analytical Behavior of Bolted End-Plate Connections with or without Stiffeners // Journal of Constructional Steel Research. 2012. no. 76. P. 13–27.
- [23] Li S., Li Q., Jiang H. et al. Experimental Study on a New Type of Assembly Bolted End-Plate Connection // Steel and Composite Structures. 2018. no. 26. P. 463–471.
- [24] Yılmaz O. Experimental Investigation of Bolted Stiffened End-Plate and Bolted Flange-Plate Connections // Latin American Journal of Solids and Structures. 2019. no. 16. P. 1–12.
- [25] Сон М.П., Конин Д.В. Фланцевые соединения балок с колоннами в стальных каркасах жилых и общественных зданий // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 6(263). С. 29–35.

REFERENCES

- [1] Vedyakov I.I., Konin D.V., Olurombi A.R., Nakhvalnov P.W. Taking into account plastic deformations when calculating flange connections // Industrial and Civil Construction. 2021. no. 10. P. 9–16.
- [2] Series 1.460.3-14. Steel roof structures of industrial buildings with spans of 18, 24 and 30 m using closed bent-welded profiles of rectangular section of the "Molodechno" type. Moscow, 1988.
- [3] Series 2.440-2 Issues from 1 to 8. Assemblies of steel structures of industrial buildings of industrial enterprises. Moscow, 1989.

- [4] Guidelines for the design, manufacture and assembly of mounting flange connections for roof trusses with chords made of wide-flange I-beams. Approved by TsNIIProektstalkonstruktziya named after Melnikov, 1982.
- [5] Recommendations for the calculation, design, manufacture and installation of flange connections of building structures. Approved by the Central Research Institute of Projectstalconstruction named after Melnikov, 1988.
- [6] STO ARSS 11251254.001-018-3 manual for the design of steel structures of multi-storey buildings. Moscow, 2018.
- [7] Katyushin V.V. Buildings with a frame made of steel frames of variable section (calculation, design, construction). Moscow : Stroyizdat, 2005. P. 656.
- [8] Kudishin Yu.I., Belenya E.I., Ignatieva V.S. Metal constructions. Moscow : Academy, 2011. P. 688.
- [9] Kuznetsov V.V. Designer's Handbook. Volume 2. Steel structures of buildings and structures. Moscow : DIA, 1998. P. 512.
- [10] SP 16.13330.2017 "Steel structures. Updated edition of SNiP II-23-81* 2017.
- [11] SP 294.1325800.2017 Steel structures. Design Rules, 2017.
- [12] Joints in steel construction moment connection. London, 1997.
- [13] EN 1993-1-1:2005 Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, 2005.
- [14] Presnyakov N.I., Kudishin Yu.I. Technical editing of the text of Eurocode EN 1993-1-1:2005. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-1. General rules for buildings and structures. Moscow : TsNIIPSK named after N.P. Melnikov, 2011.
- [15] Presnyakov N.I., Kudishin Yu.I. National Annex to Eurocode EN 1993-1-1:2005. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-1. General rules for buildings and structures. Moscow, 2011.
- [16] Presnyakov N.I., Kudishin Yu.I. Comparative analysis of Eurocode EN 1993-1-1:2005 "Design of steel structures. Part 1-1. General rules for buildings and structures" with Russian regulatory documents. Moscow, 2011.
- [17] EN 1993-1-8:2005 Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-8: Design of joints, 2005.
- [18] Presnyakov N.I., Vostrov E.K., Babushkin V.M. Technical editing of the text of Eurocode EN 1993-1-8:2005. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-8. Calculation of connections. Moscow : TsNIIPSK named after N.P. Melnikov, 2011.
- [19] Presnyakov N.I., Vostrov E.K., Babushkin V.M. National Annex to Eurocode EN 1993-1-8:2005. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-8. Calculation of connections. Moscow, 2011.
- [20] Presnyakov N.I., Vostrov E.K., Babushkin V.M. Comparative analysis of Eurocode EN 1993-1-8:2005 "Design of steel structures. Part 1-8. Calculation of connections" with Russian regulatory documents. Moscow, 2011.
- [21] Wang X., Luo Y., Qiang X. Review on high strength steel bolted end-plate connections // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 744-746. P. 265-273.
- [22] Abidelah A., Bouchair A., Kerdal D.E. Experimental and analytical behavior of bolted end-plate connections with or without stiffeners // Journal of Constructional Steel Research. 2012. Vol. 76. P. 13-27.
- [23] Li S., Li Q., Jiang H. et al. Experimental study on a new type of assembly bolted end-plate connection // Steel and Composite Structures. 2018. Vol. 26. P. 463-471.
- [24] Yılmaz O. Experimental investigation of bolted stiffened end-plate and bolted flange-plate connections // Latin American Journal of Solids and Structures. 2019. Vol. 16. P. 1-12.
- [25] Son M.P., Konin D.V. Flange connections of beams with columns in steel frames of residential and public buildings // Structural Mechanics and Calculation of Structures. 2015. no. 6(263). P. 29-35.

Н. К. Салихова¹, Д. С. Дудин¹, И. Э. Келлер¹, Д. С. Петухов¹, Е. А. Гачегова¹,
А. Б. Максимов²

СОБСТВЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПОСЛЕ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ТОЛСТОЛИСТОВОЙ СТАЛИ: ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТ

¹*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

²*Керченский государственный морской технологический университет, Керчь,
Россия*

Аннотация. Выполнено численное моделирование трех вариаций процесса градиентной термомеханической обработки стальной плиты для понимания закономерностей формирования распределения по толщине собственных деформаций и остаточных напряжений в зависимости от параметров технологического процесса. Один из таких процессов заключался в нагреве и выдержке заготовки при температуре аустенизации с последующим односторонним ускоренным охлаждением; в двух других заготовку предварительно подвергали пластическому изгибу фиксированной величины положительного либо отрицательного знака, а после одностороннего ускоренного и полного охлаждения — изгибу противоположного знака для правки заготовки. Численное решение задачи выполнено в пакете COMSOL Multiphysics. На первом этапе решалась задача теплопроводности (ускоренного одностороннего, и затем медленного полного охлаждения заготовки), далее решалась задача термоупругопластичности для моделирования эволюции упругих и пластических деформаций и остаточных напряжений при изменении температуры заготовки. В этой задаче учитывалась зависимость упругих и пластических констант от температуры. Изгиб плиты моделировался заданием подходящего распределения по толщине собственных деформаций. Для подтверждения результатов расчета были выполнены натурные эксперименты для листа судовой стали А32 толщиной 14 мм, для чего использована установка ускоренного одностороннего охлаждения горячей заготовки, созданная на базе Керченского судостроительного завода. Предложен способ определения распределения по толщине листа собственных деформаций и остаточных напряжений, развивающий метод разрезания, с помощью которого были определены данные распределения в трех заготовках, подвергнутых градиентной термомеханической обработке, и одного контрольного образца. Результаты эксперимента подтверждают полученное в расчете наблюдение, что все использованные методы градиентной термомеханической обработки обеспечивают сжимающие остаточные напряжения на обеих сторонах листа, величина которых превосходит фоновые значения, полученные на контрольном образце.

Ключевые слова: градиентная термомеханической обработки, ускоренное одностороннее охлаждение, судовая сталь, собственные деформации, остаточные напряжения, метод разрезания, численное моделирование.

Салихова Нелли Камилевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: snk021@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3147-161X>; AuthorID: 57041140700

Дудин Дмитрий Сергеевич, ведущий инженер лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: dmitryovj@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-1911-8899>; AuthorID: 57219800971

Келлер Илья Эрнстович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела, доцент; e-mail: kie@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 23028228400

Петухов Дмитрий Сергеевич, ведущий инженер лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: petuhovds@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6996-3580>; AuthorID: 57214891768

Гачегова Елена Алексеевна, инженер лаборатории термомеханики деформируемых твердых тел; e-mail: gachegova.e@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6849-9889>; AuthorID: 57483600900

Максимов Александр Борисович, кандидат технических наук, доцент кафедры машин и аппаратов пищевых производств, доцент; e-mail: aleksandrmks@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7763-5130>; AuthorID: 7101759856

для цитирования: Салихова Н. К., Дудин Д. С., Келлер И. Э., Петухов Д. С., Гачегова Е. А., Максимов А. Б. Собственные деформации и остаточные напряжения после градиентной термомеханической обработки толстолистовой стали: численное моделирование и эксперимент // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 70–91. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.007 EDN: OAHMYD

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

N. K. Salikhova¹, D. S. Dudin¹, I. E. Keller¹, D. S. Petukhov¹, E. A. Gachegova,
A. B. Maksimov²

EIGENSTRAINS AND RESIDUAL STRESSES AFTER GRADIENT THERMOMECHANICAL TREATMENT OF THICK-SHEET STEEL: NUMERICAL MODELLING AND EXPERIMENT

¹*Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia*

²*Kerch State Marine Technical University, Kerch, Russia*

Abstract. Numerical modeling of three variations of the process of gradient thermomechanical processing of a steel plate is performed to understand the patterns of thickness distribution of eigenstrains and residual stresses depending on the parameters of the technological process. One of these processes consisted in heating and holding the workpiece at the austenization temperature, followed by unilateral accelerated cooling; in the other two, the workpiece was previously subjected to plastic bending of a certain value of a positive or negative sign, and after unilateral accelerated and complete cooling, to bending of the opposite sign to straightening the workpiece. The numerical solution of the problem was performed in the COMSOL Multiphysics package. At the first stage, the problem of thermal conductivity (accelerated one-sided, and then slow complete cooling of the workpiece) was solved, then the problem of thermoelastoplasticity was solved to simulate the evolution of elastic and plastic deformations and residual stresses when the temperature of the workpiece changes. In this task, the dependence of elastic and plastic constants on temperature was taken into account. The bending and the straightening of the plate was modeled by setting a suitable thickness distribution of its eigenstrains. To confirm the calculation results, experiments were performed for a sheet of A32 marine steel with a thickness of 14 mm, for which an accelerated unilateral cooling unit for hot workpieces created on the basis of the Kerch Shipyard was used. A method is proposed for determining the distribution of eigenstrains and residual stresses over the thickness of the sheet, developing a cutting method by which these fields were determined in three specimens subjected to gradient mechanothermal treatment and one control specimen. The experimental results confirm the observation obtained in the calculation that all the methods of gradient thermomechanical treatment used provide compressive residual stresses on both sides of the sheet, the magnitude of which exceeds the background values obtained on the control sample.

Keywords: gradient thermomechanical treatment, accelerated unilateral cooling, marine steel, eigenstrains, residual stresses, cutting method, numerical modelling.

Nelli K. Salikhova, Cand. Sci. Phys.-Math, Scientific Researcher; e-mail: snk021@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3147-161X>; AuthorID: 57041140700

Dmitry S. Dudin, Leading Engineer; e-mail: dmitryovj@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-1911-8899>; AuthorID: 57219800971

Ilya E. Keller, Dr. Sci. Phys.-Math., Associated Professor, Head of Laboratory; e-mail: kie@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9914-8870>; AuthorID: 23028228400

Dmitry S. Petukhov, Leading Engineer; e-mail: petuhovds@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6996-3580>; AuthorID: 57214891768

Elena A. Gachegova, Engineer; e-mail: gachegova.e@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6849-9889>; AuthorID: 57483600900

Aleksandr B. Maksimov, Cand. Sci. Techn., Associated Professor; e-mail: aleksandrmsk@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7763-5130>; AuthorID: 7101759856

to cite this article: Salikhova N. K., Dudin D. S., Keller I. E., Petukhov D. S., Gachegova E. A., Maksimov A. B. Eigenstrains and residual stresses after gradient thermomechanical treatment of thick-sheet steel: numerical modelling and experiment // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 70–91. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.007 EDN: OAHMYD

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Формирование сжимающих остаточных напряжений на поверхности толстолистного проката металла способствует повышению его усталостного ресурса и коррозионной стойкости. Тонкий слой остаточных напряжений и улучшенной микроструктуры формируется в результате различных процессов градиентной термомеханической обработки заготовки. В числе подобных процессов используют закалку ускоренным односторонним или двухсторонним охлаждением, которую можно совмещать с предварительным изгибом заготовки и последующей правкой после термообработки [1–4]. Не касаясь здесь вопроса изменения микроструктуры и связанного с ним улучшения прочностных характеристик заготовки в результате градиентной термомеханической обработки, обратимся к процессу формирования остаточных напряжений в ходе этого процесса. Большее понимание о закономерностях его протекания в современной практике исследований достигается путем численного моделирования сопряженной задачи теплопроводности и механики термоупругопластического поведения заготовки. В частности, с его помощью можно установить знак тангенциальных остаточных напряжений на поверхностях заготовки и его чувствительность к тем или иным параметрам технологического процесса. Однако, поскольку речь идет о довольно сложной модели, часть констант которой удастся определить косвенно и с некоторой долей неопределенности, требуется экспериментальное подтверждение результатов расчета. В настоящей работе выполнен численный расчет процесса формирования остаточных напряжений, который далее независимо сопровождается их экспериментальным определением с помощью предложенного авторами метода [5], развивающего известный способ разрезания [6–12]. Данный способ наилучшим образом среди других известных методов (последующего травления вырезанных с поверхности изделия полосок с измерением их прогибов [13–16] либо среднего размера атомной решетки рентгеновской дифракцией согласно [17], пошагового сверления отверстий [18–20] либо углубления дискового разреза с измерением деформаций поверхности вблизи них [21]) подходит к длинным призматическим образцам. Для этого четыре образца, вырезанных из толстолистного проката, были подвергнуты нагреву и выдержке при температуре аустенизации, три из которых были подвергнуты последующему одностороннему ускоренному охлаждению на специальной лабораторной установке, созданной на базе Керченского судостроительного завода. Два из этих образцов предварительно подвергались пластическому изгибу фиксированной величины положительного либо отрицательного знака, а после одностороннего ускоренного и полного охлаждения — изгибу противоположного знака для правки. Оставшийся, контрольный, образец был медленно охлажден на воздухе. Распределение по толщине образцов остаточных напряжений было определено методом разрезания и сопоставлено с результатами расчетов, которые подтвердили их знак и величину вблизи поверхностей. Кроме того, остаточные напряжения вблизи поверхностей образцов определялись методом сверления отверстий, что позволило определить фоновый уровень остаточных

напряжений в контрольном образце, подтвердить знаки остаточных напряжений в образце, подвергнутом только ускоренному охлаждению, а также показало неприменимость данного достаточно тонкого метода для образцов, подвергнутых правке. Данному плану будет далее подчинено изложение результатов исследования.

1. Модель градиентной термомеханической обработки. Материалом исследования служил прокат толщиной 14 мм судовой стали А32, низколегированной с содержанием углерода не более 0,18% и бейнитно-перлитной структурой, применяемой для изготовления прочных конструкций морских судов (наружной обшивки, палуб и др.). Из листа горячей прокатки были вырезаны четыре образца 60 × 300 мм, подвергнутые выдержке в печи в течение 21 мин при температуре 900° С. Один из образцов (контрольный) после этого был медленно охлажден на воздухе. Три оставшихся были подвергнуты одностороннему душирующему охлаждению водой со скоростью 50-80°С/с на поверхности [1-4]. При этом два образца перед термообработкой подвергались трехточечному пластическому изгибу на прессе с максимальным прогибом 50 мм (приблизительно 3,9% деформации на поверхности). Один из этих образцов в ходе термообработки подвергался одностороннему ускоренному охлаждению с выпуклой стороны, а второй — с вогнутой. После термообработки и полного охлаждения этих двух образцов они правились на прессе.

Для численного моделирования термомеханических процессов, протекающих в образцах во время описанной выше процедуры, использовался метод конечных элементов, реализованный в пакете программ COMSOL Multiphysics [22]. Моделировались задачи нестационарной теплопроводности и деформирования образца, вызванного температурными деформациями, и изгиба. Сначала решалась задача теплопроводности, после которой решалась задача термоупруго-пластического деформирования образца с учетом истории изменения температуры из предыдущей задачи. Задача изгиба решалась в упругопластической постановке, где в качестве источника изгиба задавалось соответствующее распределение собственных деформаций по толщине.

В задаче нестационарной теплопроводности при одностороннем ускоренном охлаждении и последующем медленном охлаждении на воздухе бруса-образца до комнатной температуры решалось уравнение

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, t — время, T — абсолютная температура, $\rho(T)$ — плотность массы, $c_p(T)$ — коэффициент удельной теплоемкости, $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности, Ω — область образца, продольное сечение которой в постановке плоского напряженного состояния имеет форму длинного прямоугольника $0 \leq z \leq H$, $-L/2 \leq x \leq L/2$.

В течение некоторого времени на границе $z = H$ расчетной области задаётся условие ускоренного охлаждения закалочной средой (которая явно не моделируется)

$$-\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T = k_1(T - T_0), \quad (2)$$

а на остальных границах записывается условие конвективного теплообмена в воздушной среде

$$-\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T = k(T - T_0), \quad (3)$$

с коэффициентами теплопередачи k и $k_1(T)$, T_0 — температурой окружающей среды, \mathbf{n} — вектором внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Для этапа медленного охлаждения на воздухе, следующего после ускоренного, и до практического выравнивания температуры в образце по координате z на границе $z = H$ расчетной области задаётся условие (3).

В расчетах задачи теплопроводности приняты значение $k = 15$ Вт/м²·К, а также зависимости теплофизических констант от температуры, приведенные на рис. 1. В начальный момент времени температура любой точки расчетной области Ω равна температуре отжига $T_* = 1173$ К; температура окружающей среды равна комнатной температуре $T_0 = 293$ К.

В задаче деформирования была использована модель термоупругопластического материала, в рамках которой тензор малых деформаций ϵ представлен аддитивным разложением на упругую ϵ^e , пластическую ϵ^p , температурную ϵ^T и «собственную» ϵ^* составляющие:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^T + \epsilon^*, \quad (4)$$

упругая из которых связывается с напряжениями соотношениями обобщенного закона Гука

$$\epsilon^e = \frac{1 + \nu}{E} \left(\sigma - \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma \mathbf{I} \right), \quad (5)$$

где σ — тензор напряжений, $\sigma = \text{tr}(\sigma)/3$ — среднее напряжение, E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Пластическая составляющая определяется из закона пластического течения, ассоциированного с критерием текучести Мизеса

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n}}{h} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} / \left| \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right|, \quad \phi = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_u^2} - 1 = 0, \quad h = \frac{d\sigma_u}{d\epsilon_p}, \quad (6)$$

где $\sigma_M = \sqrt{3\mathbf{s} : \mathbf{s}/2}$ — интенсивность сдвиговых напряжений, $\mathbf{s} = \sigma - \sigma \mathbf{I}$ — дивизор напряжений, а для предела текучести при одноосном растяжении принят закон упрочнения Джонсона – Кука

$$\sigma_u = (A + B\epsilon_p^n) \left(1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T} \right)^m \right), \quad (7)$$

в котором $\epsilon_p = \int_0^t \dot{\epsilon}_p dt$, $\dot{\epsilon}_p = \sqrt{2\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p/3}$ — эффективная пластическая деформация, T_m — температура плавления материала, A, B, n, m — константы материала. В рамках настоящей работы соотношениями (6)-(7) закона пластического

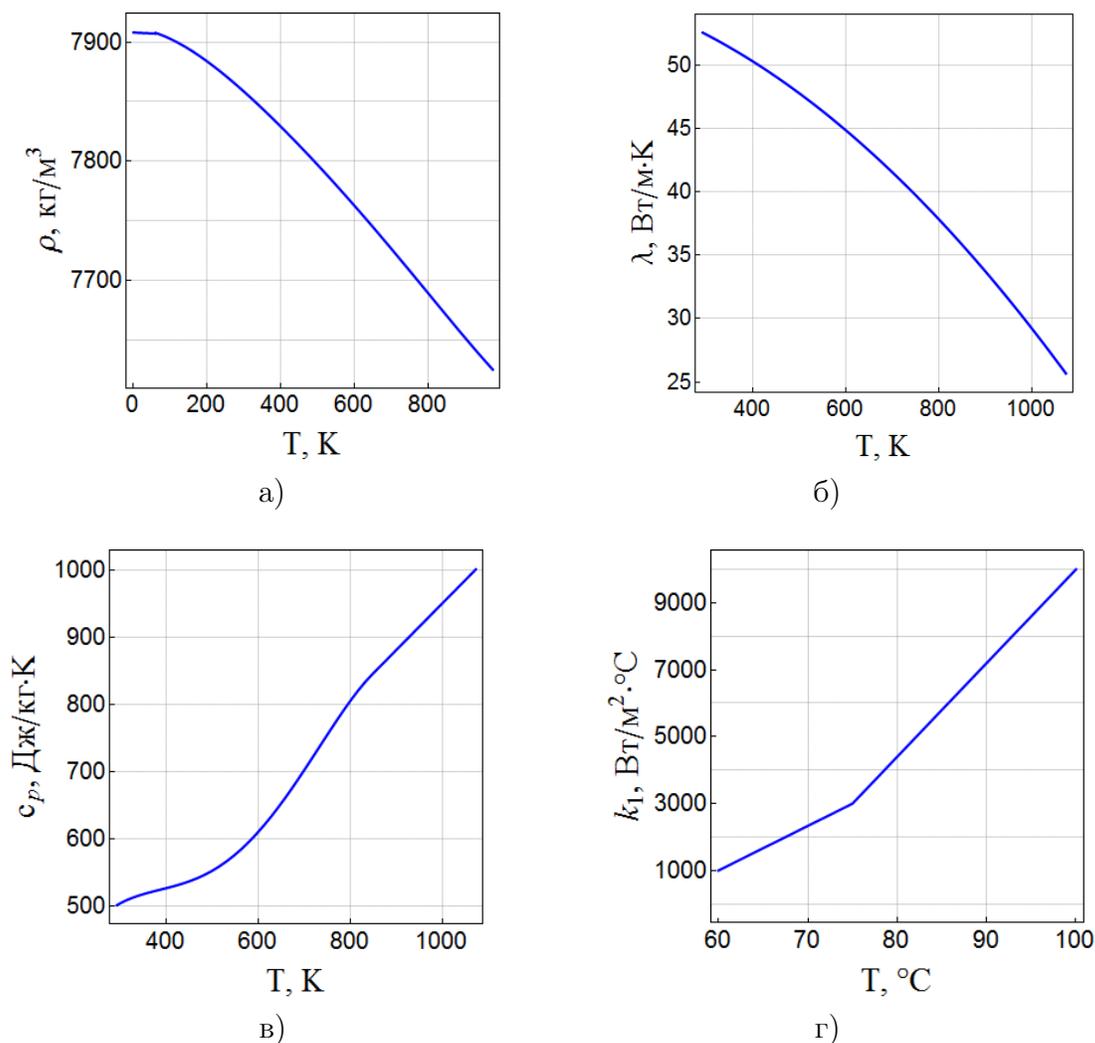


Рис. 1. Графики зависимости плотности (а) и коэффициентов теплопроводности (б), теплоемкости (в) и теплопередачи (г) от температуры.

течения описываются все неупругие деформации, происходящие в рассматриваемом материале в процессах его градиентной термомеханической обработки, независимо от физического механизма (фазовые превращения, дислокационная пластичность).

Температурная деформация определяется следующим образом

$$\epsilon^T = \alpha(T - T_*)\mathbf{I}, \quad (8)$$

где $\alpha(T)$ — коэффициент температурного расширения, T_* — температура отжига.

Уравнения равновесия и геометрические соотношения задачи деформирования выглядят следующим образом

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \quad (9)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений. Эта задача рассматривалась в постановке плоского напряженного состояния, наиболее близко отражающего особенности напряженно-деформированного состояния бруса шириной 10 мм, вырезаемого из образцов листа толщиной 14 мм в экспериментальной части работы. Границы области Ω (продольного сечения бруса, совпадающего с продольным сечением образца) полагались свободными от усилий:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Согласно (10) напряжения, возникающие в задаче деформирования — самоуравновешенные, то есть «остаточные».

Для задачи деформирования были приняты следующие значения констант $A = 315$ МПа, $B = 722$ МПа, $n = 0.8$, $m = 0.7$, $T_m = 1623$ К и зависимости от температуры, показанные на рис. 2. Принятые значения теплофизических и механических констант и зависимостей свойств от температуры взяты для судовой стали А36 из библиотеки материалов пакета программ COMSOL Multiphysics [22].

При решении задачи изгиба используются сформулированные выше уравнения деформирования (4)-(10) с однородным полем температуры $T = T_0$ и распределением по области Ω тензора собственных деформаций $\boldsymbol{\epsilon}^*(z)$. Эта составляющая тензора полных деформаций добавляется в правую часть (4). Для задачи пластического изгиба заготовки, рассматриваемой в экспериментальной части, с заданным значением прогиба, эта составляющая имеет единственную компоненту $\epsilon_x^*(z)$, распределение которой приводится на рис. 3 для прогиба выпуклостью вверх. Здесь же приводится распределение остаточных напряжений. Аналогично моделируется изгиб выпуклостью вниз.

Реализован следующий порядок решения задачи. Сначала моделировалось ускоренное одностороннее охлаждение образца в течение 18 с и следующее за ним медленное равномерное охлаждение образца на воздухе в течение 30 с в соответствии с уравнениями (1)-(3). Распределение температуры по области в этом процессе записывалось с шагом в 1 с до тех пор, пока оно не становилось практически однородным, причем его значение $T_h \neq T_0$. Далее история пошагового изменения температуры использовалась в качестве источника пластических деформаций и параметра при решении уравнений (4)-(10). При этом, если термообработке предшествовал пластический изгиб одного либо другого знака, предварительно рассчитывалась соответствующая задача, и результат ее решения в виде распределения остаточных напряжений и накопленных деформаций передавался в качестве начальных условий деформационной задаче. Расчет охлаждения образца заканчивался «большим» шагом от T_h до T_0 , не

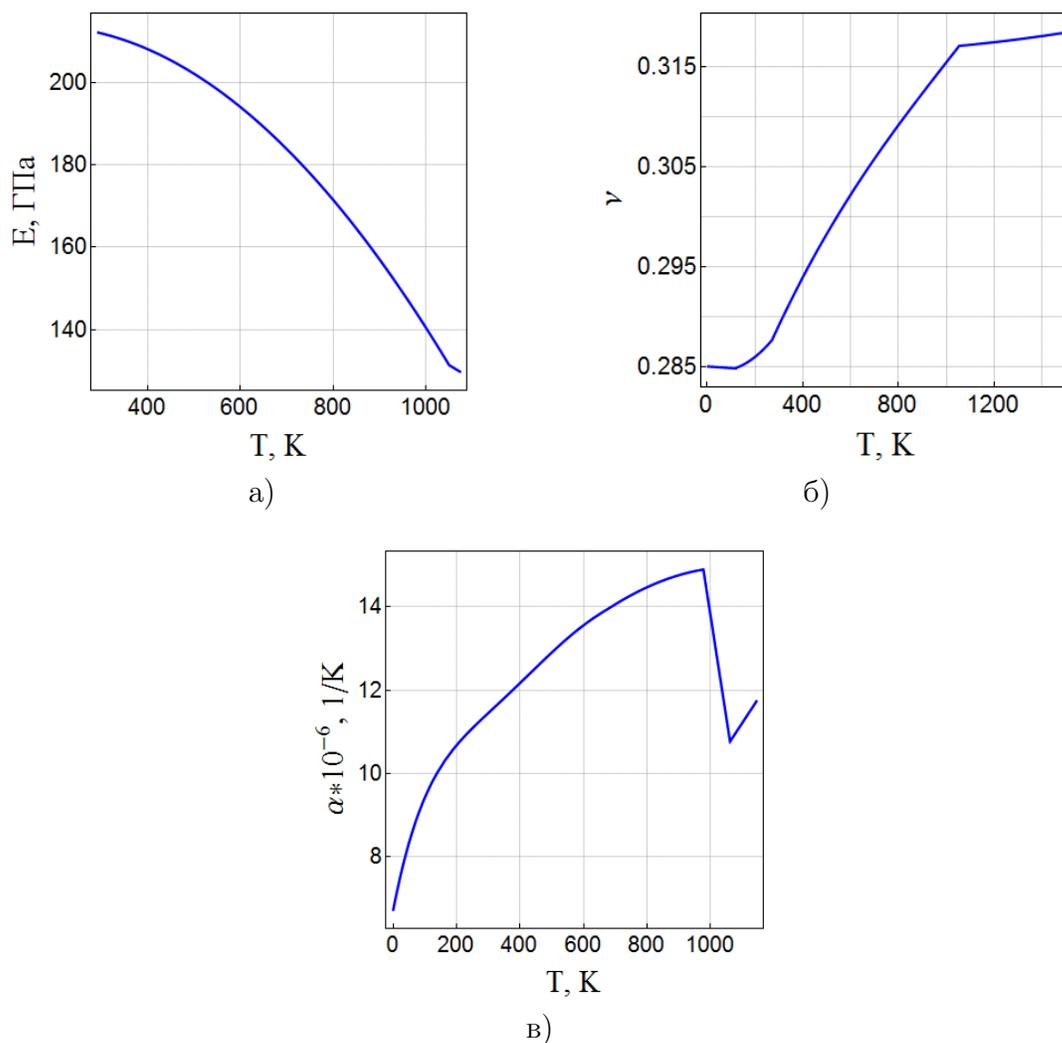


Рис. 2. Графики зависимостей модуля Юнга (а), коэффициентов Пуассона (б) и температурного расширения (в) от температуры.

сопровождающимся изменением остаточных напряжений и пластических деформаций. Если в конце технологического процесса требовалась правка образца, делался еще один шаг задачи расчета деформаций, моделирующий изгиб, обратный первоначальному (рис. 4).

2. Результаты численных расчетов. На рис. 4 приведены распределения температуры в поперечном сечении образца $x = 0$ в моменты времени этапа его одностороннего ускоренного охлаждения. Наиболее значительный градиент температур наблюдается в течение первой секунды процесса вблизи ускоренно охлаждаемой границы $z = 14$ мм («на стороне закалки»). Разность температур по толщине образца достигает максимума приблизительно в конце шестой

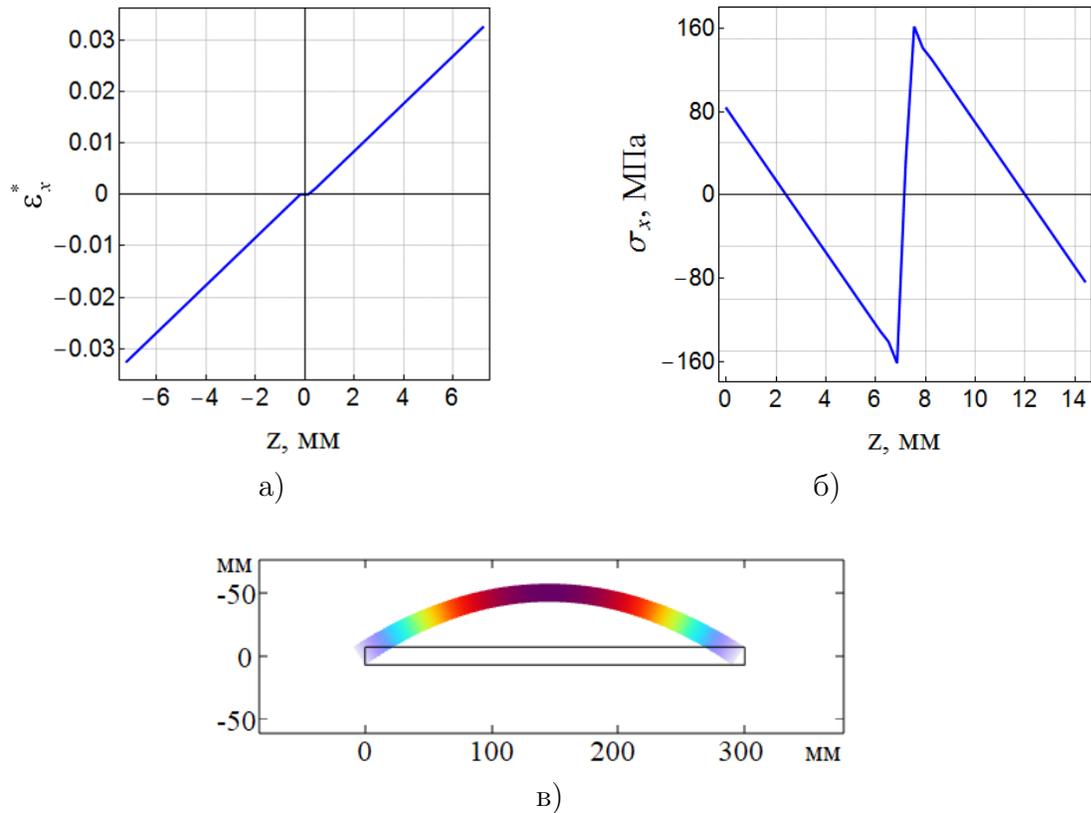


Рис. 3. Распределения собственных деформаций (а) и остаточных напряжений (б), отвечающие пластическому изгибу образца с заданным значением максимального прогиба выпуклостью вверх (в).

секунды процесса. Далее в процессе охлаждения вплоть до комнатной температуры распределение температуры по образцу постепенно выравнивается.

На рис. 5 представлены распределения в поперечном сечении образца $x = 0$ пластических деформаций и остаточных напряжений, возникших в процессе градиентной термомеханической обработки а) одностороннего ускоренного охлаждения, б) одностороннего ускоренного охлаждения образца с выпуклой стороны после пластического изгиба и в) одностороннего ускоренного охлаждения образца с вогнутой стороны после пластического изгиба. В образцах реализуется сложный сценарий возникновения остаточных (самоуравновешенных) упругих напряжений вследствие градиентного нестационарного изменения распределения температуры, который становится понятным при изучении совместной эволюции распределений всех переменных состояния.

При одностороннем ускоренном охлаждении образца без предварительного пластического изгиба одновременно работают два механизма формирования его напряженно-деформированного состояния. Первый: упругопластический изгиб образца со сжатием продольных материальных волокон на стороне закалки и

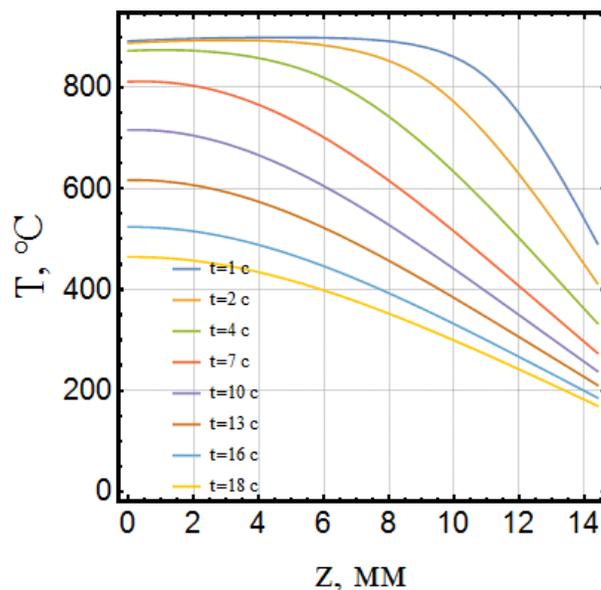
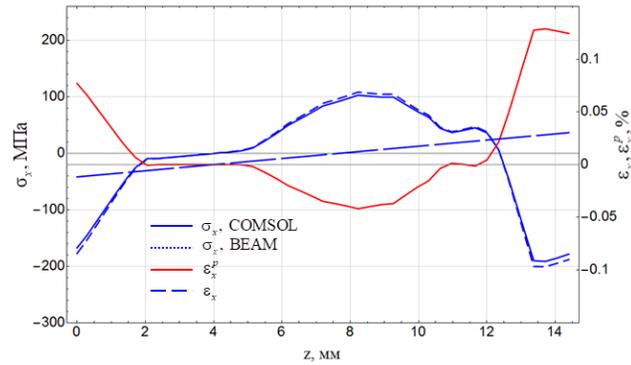


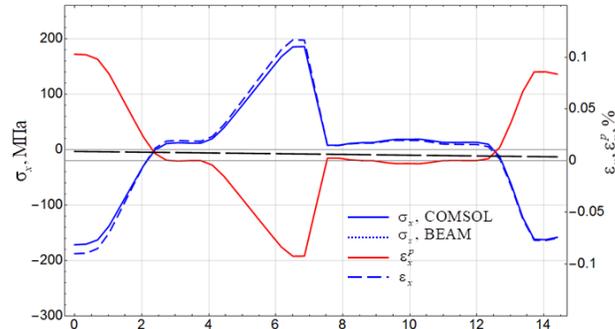
Рис. 4. Профили температуры по толщине в плоскости симметрии образца в различные моменты времени процесса односторонней закалки.

растяжением — на его тыльной части, вызываемый градиентом температуры. Напряжения, сопровождающие эту моду деформаций, имеют обратимую и необратимую части. Обратимая часть отсутствует, когда распределение температуры однородно. Это наблюдается перед началом и после приблизительно 48 с процесса охлаждения, то есть величина упругого изгиба, вызванного обратимой частью, имеет максимум в этом промежутке. Поскольку в действительности данный изгиб сопровождается несовместными пластическими деформациями, появляются вызванные им остаточные напряжения. Таким образом формируется необратимая часть изгиба. Этим механизмом объясняется появление растягивающих пластических деформаций и сжимающих остаточных напряжений вблизи границы, противоположной стороне закалки.

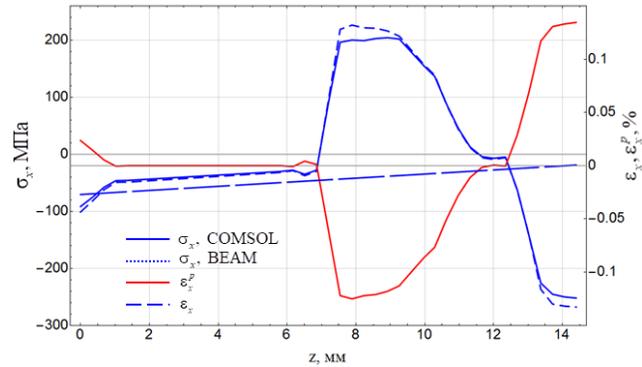
Второй механизм формирования напряженно-деформированного состояния в образце при его охлаждении связан с временными флуктуациями температуры по отношению к ее линейному (градиентному) распределению, вызывающему изгиб образца. Если температурные деформации, вызванные этими флуктуациями, в какой-то момент времени в какой-то точке приводят к упругим напряжениям, удовлетворяющим критерию текучести, появляются пластические деформации. Несовместная часть образованной в течение процесса охлаждения флуктуирующей частью поля пластических деформаций порождает остаточные напряжения, которые не исчезают после окончания процесса. Значительный градиент температуры, образующийся вблизи границы со стороны закалки



а)



б)



в)

Рис. 5. Распределение полных и собственных деформаций и остаточных напряжений по толщине образца в плоскости его симметрии после односторонней закалки а) без изгиба, б) с выпуклой стороны, в) с вогнутой стороны (расчет, сторона закалки справа).

в первые секунды процесса, создает флуктуацию, вызывающую появление растягивающих пластических деформаций и сжимающих остаточных напряжений вблизи границы со стороны закалки.

Следует заметить, что в описанном выше сценарии формирования остаточных напряжений при градиентном нестационарном изменении распределения температуры данные механизмы выделены условно для разложения сложного поля на две компоненты. В действительности уравнения пластичности не линейны по напряжениям, и компоненты такого разложения действуют совместно.

Область сжимающих пластических деформаций и растягивающих остаточных напряжений в средней части образца также появляется вследствие флуктуирующей компоненты неоднородного распределения температуры.

Отметим, что рассматриваемые процессы ускоренного охлаждения в стали А32 приводят к превращениям аустенитной (высокотемпературной) фазы в ферритно-бейнитную на охлаждаемой поверхности с постепенным переходом по толщине образца в ферритно-перлитную (низкотемпературные) фазы, и эти превращения являются механизмом неупругих деформаций. Уравнения пластичности для описания фазовых деформаций приняты здесь в качестве первого приближения.

В целом результаты численного расчета (рис. 5) показывают, что, независимо от вида градиентной термомеханической обработки (из рассмотренных) на сторонах образца всегда образуются сжимающие остаточные напряжения. В средней части образца имеется сосредоточенный слой растягивающих остаточных напряжений, располагающийся ближе либо дальше от поверхности ускоренного охлаждения в зависимости от предшествующей ему истории деформирования изгибом.

3. Экспериментальная часть. Для выполнения эксперимента из горячекатаной толстолистовой судовой стали А32 ферритного класса толщиной 14 мм были вырезаны четыре образца размерами 300 × 60 мм в плане. Образцы подвергались 21 мин выдержки в печи при температуре аустенитизации 900° С. Один (контрольный) образец был медленно охлажден на воздухе. Три образца были подвергнуты одностороннему ускоренному охлаждению со скоростью 40–60° С/мин на поверхности в душирующей лабораторной установке. Перед термообработкой два образца были подвергнуты пластическому изгибу на прессе до значений необратимого прогиба 50 мм. Образец без предварительного изгиба будет обозначаться (А), образец, подвергнутый ускоренному охлаждению с выпуклой стороны — (В), а образец, подвергнутый ускоренному охлаждению с вогнутой стороны — (С). Образцы В и С после охлаждения правились на прессе. Для определения распределения остаточных напряжений после градиентной термомеханической обработки из средней части всех образцов вырезался брус размером 300 × 10 × 14 мм.

Для определения распределения остаточных напряжений по толщине образцов А, В и С был использован способ, предложенный авторами [5] и развивающий метод разрезания. Вырезанные из этих образцов бруски последовательно



Рис. 6. Изгибы полос, нарезанных из образцов проката после градиентной термомеханической обработки (сверху вниз: С, В, А, сторона закалки сверху).

прикреплялись к опорной плите точечной сваркой по концам и нарезались по толщине (исходного листа) на 11–12 полос толщиной 1 мм на электроэрозионной установке (рис. 6). Прогиб каждой полосы определялся как среднее двух значений прогиба, которые измерялись штангенрейсмусом на расстоянии 150 мм от ее центральной точки, зафиксированной струбциной.

Для реконструкции неоднородного распределения продольной компоненты собственных (в данном случае пластических) деформаций (термин принадлежит [23]) по высоте бруса по значениям прогибов полос w_i , $i = 1, \dots, n$ определялись средние значения градиента собственной деформации $(\partial \epsilon_x^p)_i$ по координате z , совпадающие со средними значениями градиента полной деформации, в соответствии с оценкой

$$(\partial \epsilon_x^p)_i \approx 8w_i/L^2, \quad (11)$$

справедливой с точностью до малых порядка куба отношения прогиба к длине. Непрерывное распределение собственных деформаций $\epsilon_x^p(z)$ по толщине бруса $z \in [0, H]$ определялось в виде кусочно-линейной функции со значениями $(\epsilon_x^p)_i$ в узлах $z = 0, h, \dots, nh = H$ с помощью конечно-разностных формул

$$(\epsilon_x^p)_i = (\epsilon_x^p)_{i-1} + (\partial \epsilon_x^p)_i h, \quad i = 1, \dots, n, \quad (12)$$

где $(\epsilon_x^p)_0$ есть некоторая константа. Распределение продольной компоненты остаточных напряжений $\sigma_x(z)$ по толщине бруса $z \in [0, H]$ определялось с помощью выражения [24]

$$\sigma_x(z) = E(\epsilon_x(z) - \epsilon_x^p(z)), \quad \epsilon_x(z) = gz + e, \quad (13)$$

где

$$g = \frac{12}{H^3} \int_0^H \epsilon_x^p(z) z dz - \frac{6}{H^2} \int_0^H \epsilon_x^p(z) dz \quad (14)$$

— градиент полной деформации и

$$e = -\frac{6}{H^2} \int_0^H \epsilon_x^p(z) z dz + \frac{4}{H} \int_0^H \epsilon_x^p(z) dz \quad (15)$$

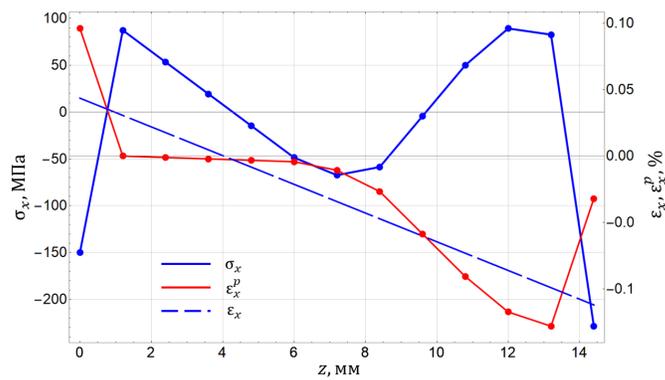
— полная деформация бруса, а $\epsilon_x(z)$ — распределение полной деформации по толщине бруса. Можно показать, что остаточные напряжения (13) не зависят от граничного значения в (12), поэтому было принято $(\epsilon_x^p)_0 = 0$.

«Балочная формула» (13)-(15) была использована для определения остаточных напряжений в образцах по рассчитанным в COMSOL Multiphysics распределениям пластических деформаций. Из рис. 5 видно соответствие этой оценки с рассчитанными в пакете программ COMSOL Multiphysics распределениями остаточных напряжений.

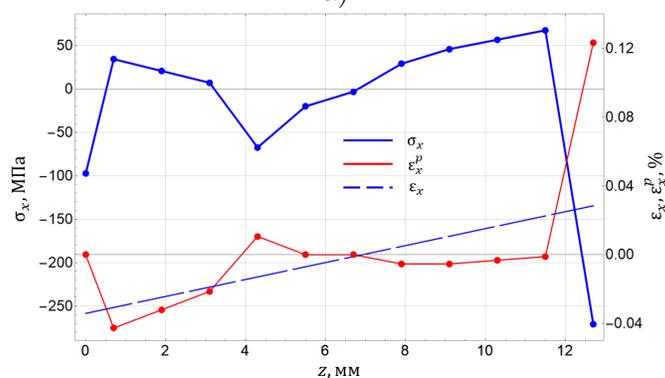
Распределения пластических и полных деформаций, а также остаточных напряжений, по толщине образцов, полученные по данным эксперимента согласно формулам (11) - (15), показаны на рис. 7. Распределения пластических деформаций на каждом графике построены с точностью до постоянной величины.

Эксперимент подтверждает наличие сжимающих напряжений вблизи краев образцов независимо от вида градиентной термомеханической обработки из здесь рассматриваемых. Подтверждаются области отсутствия пластических деформаций и наличие более высоких градиентов пластических деформаций на стороне закалки. Область растягивающих остаточных напряжений в средней части образца в двух случаях из трех оказалась двухмодальной. Однако с учетом высокой чувствительности распределения остаточных напряжений к деталям распределения пластических деформаций в соотношениях (13)-(15) эти несоответствия можно объяснить неточностью задания теплофизических и пластических свойств материала в модели (1)-(9) совместно с неточностями экспериментальной методики.

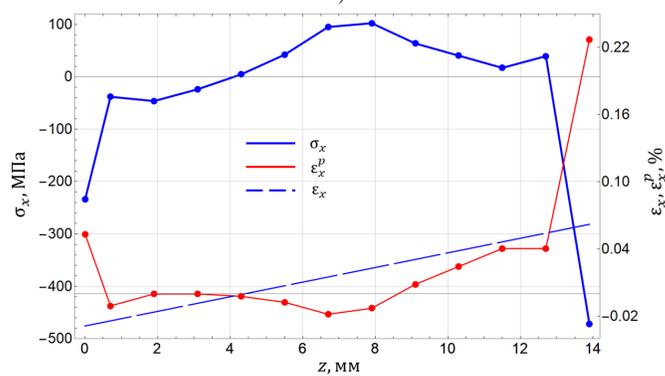
Распределение остаточных напряжений вблизи поверхностей образцов перед разрезанием последних определялось методом сверления отверстий в соответствии со стандартом ASTM E837 на установке MTS3000-Reston. Пошагово высверливалось отверстие диаметром 1 мм, глубиной 1 мм, и параллельно высокоточным тензодатчиком-розеткой регистрировалось изменение поля перемещений поверхности вблизи отверстия. В контрольном образце, подвергнутом отжигу, распределения тангенциальных компонент остаточных напряжений практически совпали между собой. Эти компоненты имели флуктуирующий характер с изменением знака, не превышая по модулю значения 70 МПа (рис. 8, а). В образце А распределения тангенциальных компонент остаточных напряжений были подобны друг другу (рис. 8, б, в), не выходя ниже значения -200 МПа на стороне закалки и -140 МПа на противоположной стороне, что в среднем соответствует и расчету, и эксперименту. В образцах В и С, подвергавшихся знакопеременному трехточечному изгибу, плоскости образцов оказались волнистыми и имели различные и флуктуирующие от -300 до +300 МПа тангенциальные компоненты остаточных напряжений, что не позволяет использовать эти результаты для контроля метода разрезания и подтверждения расчета.



а)



б)



в)

Рис. 7. Распределение полных и собственных деформаций и остаточных напряжений по толщине образца в плоскости его симметрии после односторонней заковки а) без изгиба, б) с выпуклой стороны, в) с вогнутой стороны (эксперимент, сторона заковки справа).

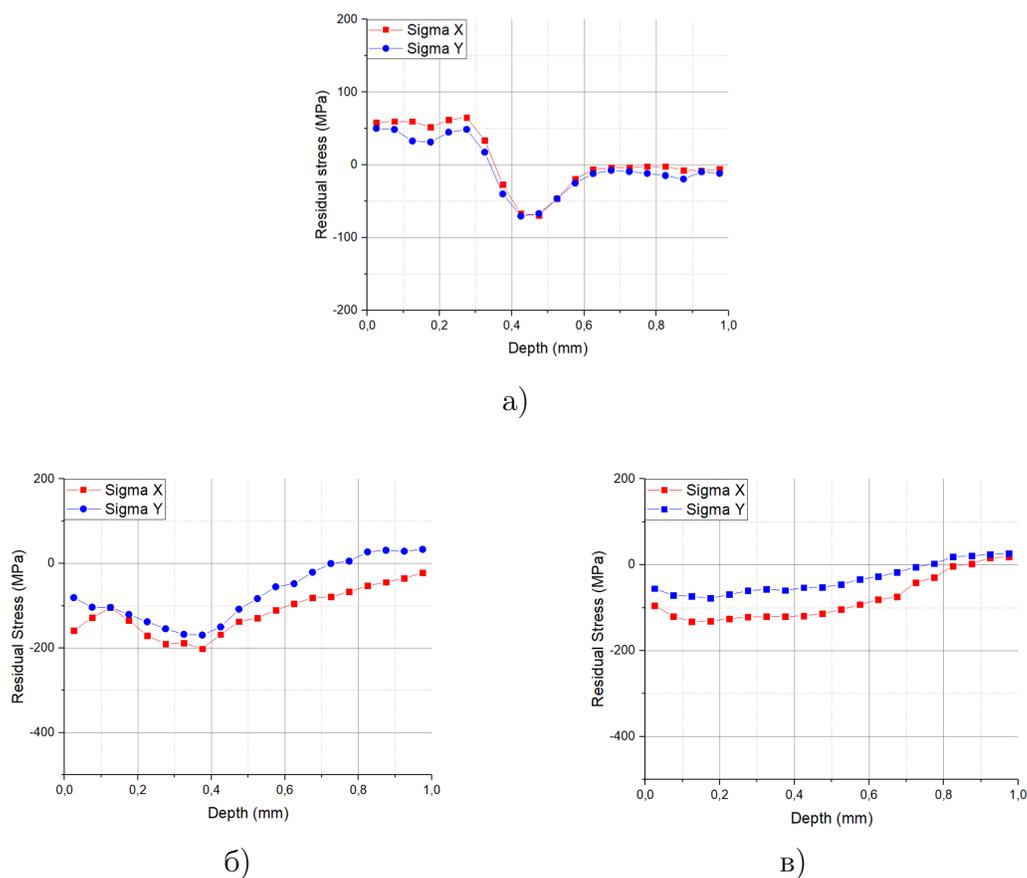


Рис. 8. Протокол измерения тангенциальных компонент остаточных напряжений образца а) на стороне закалки, б) на противоположной стороне.

4. Выводы. Выполнено численное моделирование эволюции неупругих деформаций и остаточных напряжений в процессах градиентной термомеханической обработки толстолистового стального проката. Для этого последовательно решены нестационарная задача теплопроводности и задача механики термоупругопластического тела с учетом истории изменения температурного поля в заготовке. Для подтверждения результатов расчета выполнен эксперимент, результаты которого обработаны с помощью предложенного авторами метода, развивающего способ разрезания для определения остаточных напряжений. Получено удовлетворительное соответствие знака и величины остаточных напряжений вблизи границ образцов, а расхождения распределений остаточных напряжений с экспериментальными объясняются их высокой чувствительностью к деталям распределений собственных деформаций. Для образца, подвергнутого одностороннему ускоренному охлаждению величины остаточных напряжений вблизи сторон образца совпадают с определенными методом сверления отверстий. Опыт исследования эволюции неупругих деформаций и остаточных

напряжений в процессе термомеханической обработки металлической заготовки может быть использован при решении задач аддитивного производства металлических конструкций [25, 26], сопровождающегося последовательными этапами наплавки и термоупругопластического деформирования заготовки в процессе остывания.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Н. К. Салихова — численные расчеты и редактирование текста рукописи, Д. С. Дудин — численные расчеты и обработка эксперимента, И. Э. Келлер — написание текста рукописи, Д. С. Петухов — разработка аналитических выражений метода разрезания, Е. А. Гачегова — проведение экспериментов методом сверления отверстий, А. Б. Максимов — механотермическая обработка образцов.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках госзадания по теме Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, № ГР АААА-А20-120022590044-7 (Н.К. Салихова, Д.С. Дудин, И.Э. Келлер, Д.С. Петухов) и № ГР 124020700047-3 (Е.А. Гачегова).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. N. K. Salikhova — numerical calculations and editing of the manuscript text, D. S. Dudin — numerical calculations and experimental processing, I. E. Keller — writing the manuscript text, D. S. Petukhov — development of analytical expressions of the cutting method, E. A. Gachegova — conducting experiments by drilling holes, A. B. Maximov — mechano-thermal processing of samples.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, State Registration Numbers АААА-А20-120022590044-7 (N. K. Salikhova, D. S. Dudin, I.E.Keller, D. S. Petukhov) and 124020700047-3 (E. A. Gachegova).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Максимов А.Б., Шевченко И.П., Ерохина И.С. Толстолистовой прокат с изменяющимися механическими свойствами по толщине // Известия вузов. Черная металлургия. 2019. Т. 62 (8). С. 587–593. DOI: 10.17073/0368-0797-2019-8-587-593.
- [2] Максимов А.Б., Пронина Ю.Г. Исследование изгиба толстолистого проката с градиентом прочностных свойств по толщине // Известия вузов. Черная металлургия. 2022. Т. 52 (1). С. 5–10. DOI: 10.3103/S0967091222010181.
- [3] Максимов А.Б. Исследование разрушения на модельном материале с градиентом прочности по толщине // Вестник КГМТУ. 2024. № 2. С. 147–1530. EDN: ZZTUNE.
- [4] Максимов А.Б., Пронина Ю.Г., Ерохина И.С. Пат. 2790243 Российская Федерация, МПК С21D 8/02. Способ деформационно-термической обработки листового проката.
- [5] Келлер И.Э., Петухов Д.С., Дудин Д.С. и др. Пат. 2797771 Российская Федерация, МПК G01N 3/20. Способ определения остаточных напряжений в ребре на жестком основании.
- [6] Калакуцкий Н.В. Исследование внутренних напряжений в чугунах и сталях. СПб : Типография А.М. Вольфа, 1887. 127 с.
- [7] Tebedge N., Alpsten G., Tall L. Residual-stress measurement by the sectioning method // Experimental Mechanics. 1973. Т. 13 (2). С. 88–96.

- [8] Withers P.J., Bhadeshia H.K.D.H. Residual stress. Part 1 – Measurement techniques // *Materials Science and Technology*. 2001. Т. 17 (4). С. 355–365. DOI: 10.1179/026708301101509980.
- [9] Handbook of Residual Stress and Deformation of Steel / Под ред. G. Totten, M. Howes, T. Inoue. Ohio : Materials Park, 2002. 499 с.
- [10] Pekoz T., BJORHOVDE R., Errera S.J. и др. Determination of residual stresses: Technical memorandum of ASCE No. 6 / Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures / Под ред. R.D. Ziemian. ASCE, 2010. С. 993–1002.
- [11] Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G. Methods of measuring residual stresses in components // *Materials and Design*. 2012. Т. 35. С. 572–588. DOI: 10.1016/j.matdes.2011.08.022.
- [12] Bamberg J., Hessert R. US Pat. 2015/0219444, B23K 26/34, B22F 3/105. Method and Apparatus for Determining Residual Stresses of a Component.
- [13] Davidenkov N.N. Bending deflection method // *Zeitschrift fur Metallkunde*. 1932. Т. 24 (2). С. 25–29.
- [14] Sachs G., Espey G. A new method for determination of stress distribution in thin-walled tubing // *Transactions of the AIME*. 1942. Т. 147. С. 348–360.
- [15] Биргер И.А. Остаточные напряжения. М. : Машгиз, 1963. 233 с.
- [16] Павлов В.Ф., Кирпичёв В.А., Вакулюк В.С. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых деталей по остаточным напряжениям. Самара : Издательство СНЦ РАН, 2012. 125 с.
- [17] SAE Standard HS784. Residual stress measurement by X-ray diffraction. 2003.
- [18] ASTM E837-08. Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method. 2010.
- [19] Schajer G.S. Advances in hole–drilling residual stress measurements // *Experimental Mechanics*. 2010. Т. 50 (2). С. 159–168. DOI: 10.1007/s11340-009-9228-7.
- [20] Махутов Н.А., Разумовский И.А., Косов В.С. и др. Исследования остаточных напряжений с применением электронной цифровой спекл-интерферометрии в натуральных условиях // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2008. Т. 74 (5). С. 47–51. EDN: JUHLPR.
- [21] Махутов Н.А., Разумовский И.А. Методы анализа полей остаточных напряжений в пространственных деталях // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2017. Т. 83 (1). С. 56–64. EDN: XUYZEX.
- [22] COMSOL Multiphysics User Guide / COMSOL. 2012. 1292 с.
- [23] Korsunsky A.M. A teaching essay on residual stresses and eigenstrains. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2017. 197 с.
- [24] Petukhov D., Keller I. Exact reconstruction formulas for plastic strain distribution in the surface-treated plate and their applications // *Acta Mechanica*. 2020. Т. 231. С. 1849–1866. DOI: 10.1007/s00707-020-02625-7.
- [25] Салихова Н.К., Дудин Д.С., Келлер И.Э. и др. Модель искривления стенки на подложке, наращиваемой проволочно-дуговой наплавкой, и ее экспериментальная апробация для алюминиевого сплава // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 3 (57). С. 5–24. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.012.
- [26] Dudin D.S., Keller I.E., Permyakov G.L., Trushnikov D.N. Modelling of residual stresses and distortions of the wall on a substrate built by wire-arc surfacing // *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics*. 2024. Т. 17 (1). С. 75–90. EDN: VUNMCP.

REFERENCES

- [1] Maksimov A.B., Shevchenko I.P., Erokhina I.S. Sheet metal with variable mechanical properties over its thickness // *Izvestiya VUZov. Chernaya Metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2019. Vol. 62 (8). P. 587–593. DOI: 10.17073/0368-0797-2019-8-587-593.
- [2] Maksimov A.B., Pronina Yu.G. Study of bending of plate steel with a through-the-thickness gradient of strength properties // *Steel in Translation*. 2022. Vol. 52 (1). P. 5–10. DOI: 10.3103/S0967091222010181.
- [3] Maksimov A.B. The study of fracture on a model material with a strength gradient in thickness // *Vestnik Kerchenskogo gosudarstvennogo morskogo texnologicheskogo universiteta [Bulletin of the Kerch State Marine Technological University.]*. 2024. no. 2. P. 147–153. EDN: ZZTUNE. (in Russian).
- [4] Maksimov A.B., Pronina Yu.G., Erokhina I.S. RU Pat. 2790243, C21D 8/02. Method for deformation and heat treatment of flat steel. (in Russian).
- [5] Keller I.E., Petukhov D.S., Dudin D.S. et al. RU Pat. 2797771, G01N 3/20. Method for determining residual stresses in a rib on a rigid base. (in Russian).
- [6] Kalokoutzky N.V. An Investigation into the Internal Stresses Occurring in Cast Iron and Steel. S.-Pb : A.M. Wolf, 1887. 127 p. (in Russian).
- [7] Tebedge N., Alpsten G., Tall L. Residual-stress measurement by the sectioning method // *Experimental Mechanics*. 1973. Vol. 13 (2). P. 88–96.
- [8] Withers P.J., Bhadeshia H.K.D.H. Residual stress. Part 1 – Measurement techniques // *Materials Science and Technology*. 2001. Vol. 17 (4). P. 355–365. DOI: 10.1179/026708301101509980.
- [9] Handbook of Residual Stress and Deformation of Steel / Ed. by G. Totten, M. Howes, T. Inoue. Ohio : Materials Park, 2002. 499 p.
- [10] Pekoz T., BJORHOFV R., Errera S.J. et al. Determination of residual stresses: Technical memorandum of ASCE No. 6 / Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures / Ed. by R.D. Ziemian. ASCE, 2010. P. 993–1002.
- [11] Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G. Methods of measuring residual stresses in components // *Materials and Design*. 2012. Vol. 35. P. 572–588. DOI: 10.1016/j.matdes.2011.08.022.
- [12] Bamberg J., Hessert R. US Pat. 2015/0219444, B23K 26/34, B22F 3/105. Method and Apparatus for Determining Residual Stresses of a Component.
- [13] Davidenkov N.N. Bending deflection method // *Zeitschrift fur Metallkunde*. 1932. Vol. 24 (2). P. 25–29.
- [14] Sachs G., Espey G. A new method for determination of stress distribution in thin-walled tubing // *Transactions of the AIME*. 1942. Vol. 147. P. 348–360.
- [15] Birger I.A. Residual Stresses. Moscow : Mashgis, 1963. 233 p. (in Russian).
- [16] Pavlov V.F., Kirpichev V.A., Vakuluk V.S. Prediction of fatigue resistance of surface-hardened parts based on residual stresses. Samara : Izdatelstvo SNC RAN, 2012. 125 p. (in Russian).
- [17] SAE Standard HS784. Residual stress measurement by X-ray diffraction. 2003.
- [18] ASTM E837-08. Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method. 2010.
- [19] Schajer G.S. Advances in hole-drilling residual stress measurements // *Experimental Mechanics*. 2010. Vol. 50 (2). P. 159–168. DOI: 10.1007/s11340-009-9228-7.
- [20] Makhutov N.A., Razumovskii I.A., Kosov V.S. et al. Study of residual stresses using electron digital speckle interferometry in full-scale conditions // *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. = Industrial laboratory. Diagnostics of materials*. 2008. Vol. 74 (5). P. 47–51. EDN: JUHLPR. (in Russian).

- [21] Makhutov N.A., Razumovskii I.A. Methods for analyzing residual stress fields in spatial details // Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. = Industrial laboratory. Diagnostics of materials. 2017. Vol. 83 (1-1). P. 56–64. EDN: XUYZEX. (in Russian).
- [22] COMSOL Multiphysics User Guide / COMSOL. 2012. 1292 p.
- [23] Petukhov D., Keller I. Exact reconstruction formulas for plastic strain distribution in the surface-treated plate and their applications // Acta Mechanica. 2020. Vol. 231. P. 1849–1866. DOI: 10.1007/s00707-020-02625-7.
- [24] Korsunsky A.M. A teaching essay on residual stresses and eigenstrains. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2017. 197 p.
- [25] Salikhova N.K., Dudin D.S., Keller I.E. et al. A model of deflection of the wall on a substrate during wire-arc surfacing and its experimental confirmation for an aluminum alloy // Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta Im. I. Ya. Yakovleva Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya. 2023. no. 3. P. 5–24. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.012. (in Russian).
- [26] Dudin D.S., Keller I.E., Permyakov G.L., Trushnikov D.N. Modelling of residual stresses and distortions of the wall on a substrate built by wire-arc surfacing // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. 2024. Vol. 17 (1). P. 75–90. EDN: VUNMCP.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Аннотация. Разрабатывается матричный метод для конструктивного определения полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) с постоянными коэффициентами. Отметим, что наш метод применим также, если полиномы, которые индуцируют ДУЧП, имеют постоянные слагаемые (аналогично уравнению Гельмгольца), и, следовательно, такие ДУЧП не могут иметь чисто полиномиальных решений. В этом случае разрабатываемый матричный метод обеспечивает полиномиальными решениями, умноженными на экспоненты. Более того, метод позволяет найти полиномиальное (умноженное на экспоненту) решение ДУЧП с полиномиальной (умноженной на экспоненту) правой частью. Также метод сокращает затраты на построение полиномиального (умноженного на экспоненциальное) решение ДУЧП для определения нулевого пространства дифференциального оператора алгебраической блочно-матричной линейной системы (с числовыми записями). Кроме того, используя матричный подход, можно исследовать некоторые алгебраические свойства, такие как размерность и базис пространства полиномиальных решений (в общем случае, умноженных на экспоненты). В частности, для пространства полиномиальных решений мы можем решить задачу с точностью до некоторой сколь угодно большой степени. В частности, мы обобщаем задачу о бесконечной степени полиномиальных решений многочлена ДУЧП на экспоненциальный случай. Более того, ДУЧП может содержать ненулевую правую часть многочлена (умноженную на экспоненту). Рассматриваются некоторые примеры полиномиальных решений (в общем случае умноженных на экспоненты) уравнений Лапласа, Гельмгольца и Пуассона.

Ключевые слова: системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, неоднородные дифференциальные уравнения, полиномиальное решение, экспоненциальное решение, нуль-пространство матрицы

Захаров Виктор Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник; e-mail: victor@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3179-6753>; AuthorID: 7402991130

для цитирования: Захаров В. Г. Матричный метод получения полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 92–116. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.008 EDN: OHIGUU

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

V. G. Zakharov

MATRIX METHOD OF POLYNOMIAL SOLUTIONS TO CONSTANT COEFFICIENT PDE'S

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

Abstract. In the paper, we introduce a matrix method to constructively determine polynomial (in general, multiplied by exponentials) solutions to the constant coefficient linear Partial Difference Equations (PDE's). Note our method also is applicable if the polynomials that induce PDE's have constant terms (similarly Helmholtz' equation) and consequently such PDE's cannot have pure polynomial solutions. In this case our matrix method supplies polynomial solutions multiplied by exponentials. Moreover, the method allows to find a polynomial (multiplied by an exponential) solution to PDE with polynomial (multiplied by the exponential) right-hand side. Our matrix method reduces the finding of polynomial (multiplied by an exponential) solution to PDE's to determine the differential operator null-space of algebraic block matrix linear system (with numerical entries). Furthermore, using our matrix approach, we can investigate some linear algebra properties such as dimension and basis of the space of polynomial solution (generally, multiplied by an exponential). In particular, for a polynomial solution space we can decide the problem up to some arbitrarily large degree, In particular, we generalize problem about infinite degree of polynomial solutions of polynomial PDE to exponential case. Moreover, PDE can contain a nonzero polynomial (multiplied by an exponential) right-hand side. Some examples of polynomial solutions (multiplied by exponentials, in general) to the Laplace, Helmholtz, and Poisson equations are considered.

Keywords: polynomial solution to linear constant coefficient PDE's, exponential solution to non homogeneous PDE, null-space of matrix.

Victor G. Zakharov, Cand. Phys.-Math. Sci., Scientific Researcher; e-mail: victor@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3179-6753>; AuthorID: 7402991130

to cite this article: Zakharov V. G. Matrix method of polynomial solutions to constant coefficient PDE's // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 92–116. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.008 EDN: OHIGUU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Introduction. The polynomial solutions to linear constant coefficient PDE('s) is the well-known problem of algebra; see, for example, [1–6]. The most part of the methods to find polynomial solutions to PDE's is based on complicated general algebra approaches (like a primary decomposition).

Certainly, substituting a polynomial with *unknown* (constant) coefficients to PDE('s) and equating the result to zero, we obtain a linear algebraic system that the solution of the system defines constant coefficients of the polynomial(s). However, this solution of the problem is very one-sided: in general, we do not know existence, dimension, basis of the polynomial solution.

To find polynomial solutions to linear constant coefficient PDE's we offer a matrix method. The matrix method was stimulated by a generalization of the Strang-Fix conditions, see [7, 8]. Our method enables to determine some (linear algebra) characteristics of a solution space such as dimension, basis, affine-invariance, maximal total degree of polynomials, etc.

Note our matrix method is applicable if the polynomials that induce PDE's have constant terms. In the case of constant terms the polynomials that are solutions to PDE's must be multiplied by exponential(s).

Moreover, our matrix method allows to solve PDE with polynomial (multiplied by an exponential, in general) right-hand side.

The polynomial solutions (multiplied by exponentials) to the well-known differential equations (like Laplace's equation), when we take a root of the symbol of differential operator that the root is not the origin, see also [9], can be obtained. So, the shift of a differential equation is equivalent to the multiplication, by the corresponding exponent, of a polynomial solution of the differential equation.

It is well know, see [1], that the degree of the polynomial that is a solution to constant coefficient linear PDE is arbitrary large. And our method allows to generalize this result to polynomials multiplied by exponentials.

Note that the matrix method is valid for polynomials that induce PDE's with coefficients from any algebraically closed field. Moreover, the method can be directly algorithmized.

The paper is organized as follows. Section 1 contains used in the paper notations and definitions. In particular, in Subsection 1.2, the lexicographically ordered sets of monomials and derivatives are introduced. Section 2 is devoted to the matrix of the linear system; in Subsections 2.1, a method to construct the matrix is presented, and, in Subsection 2.2, some properties of the matrix are discussed. In Section 3, the matrix method to solve (in particular, induced by inhomogeneous polynomials) PDE's is discussed. Moreover, in Subsection 3.3, the matrix method to solve PDE with a polynomial right-hand side is considered. Section 4 is devoted to polynomial solutions to some PDE's.

1. Notations and definitions

1.1. Basic notations. Let $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, be the number of independent variables.

Let I be the *identity operator*. Let $\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j, \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$ be the *Kronecker delta* and δ be the *Dirac delta-distribution*.

A *multi-index* α is a d -tuple $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ with its components being nonnegative integers, i.e., $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. The *length* of a multi-index $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ is defined as $\alpha_1 + \dots + \alpha_d$ and denoted by $|\alpha|$. For multi-indices $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_d)$, we write $\beta \leq \alpha$ if $\beta_j \leq \alpha_j$ for all $j = 1, \dots, d$. The *factorial* of $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ is $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_d!$. The *binomial coefficient* for multi-indices α, β is

$$\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

By definition, put

$$\binom{\alpha}{\beta} = 0 \quad \text{if } \beta \not\leq \alpha. \quad (1)$$

By x^α , where $x := (x_1, \dots, x_d)$, $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, denote a monomial $x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$. Note that the *total degree* of x^α is $|\alpha|$. By Π_l , $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, denote the space of (homogeneous) polynomials that the total degree of the polynomials is equal to l : $\Pi_l := \text{span} \{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, |\alpha| = l\}$; by $\Pi_{\leq l}$ denote the space of polynomials that the total degree of the polynomials is less than or equal to l : $\Pi_{\leq l} := \text{span} \{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, |\alpha| \leq l\}$.

Remark 1.1. Since the linear algebra definitions and assertions are valid for *any* field; we can consider polynomials with coefficients from an arbitrary field. On the other hand, we prefer to use algebraically closed fields (a field \mathbb{C} , for example) or we must use algebraic extensions of the fields.

So, above and in the sequel, ‘span’ means the linear span over \mathbb{C} ; and by Π we denote *all* polynomials of d variables with constant coefficients from \mathbb{C} .

The dot product of two vectors (d -tuples) $x := (x_1, \dots, x_d)$, $y := (y_1, \dots, y_d)$ is $x \cdot y := x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$. If all the polynomials from the space Π_l multiplied by an exponential $e^{ix_0 \cdot x}$, where $x_0 \in \mathbb{C}^d$ is a given point; then we shall write $e^{ix_0 \cdot x} \Pi_l$ (for $\Pi_{\leq l}$, $e^{ix_0 \cdot x} \Pi_{\leq l}$).

Let D^α imply a differential operator $D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$, where D_n , $n = 1, \dots, d$, is the partial derivative with respect to the n th coordinate. Note that $D^{(0, \dots, 0)}$ is the identity operator. Abusing notations, for a function $f = f(x)$ and *constant* point x_0 we shall write everywhere $D^\alpha f(x_0)$, meaning, in fact, $D^\alpha f(x)|_{x=x_0}$.

The multi-dimensional version of the *Leibniz rule* is

$$(fg)^{(\alpha)} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d \\ \beta \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} f^{(\beta)} g^{(\alpha - \beta)}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, \quad (2)$$

where the functions $f(x)$, $g(x)$, $x := (x_1, \dots, x_d)$, are sufficiently differentiable.

The Fourier transform \mathfrak{F} of a function $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ is defined by

$$f(x) \mapsto \hat{f}(\xi) = (\mathfrak{F}f)(\xi) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

By S' denote the *space of tempered distributions*; and note that the Fourier transform can be extended to (compactly supported) distributions from $S'(\mathbb{R}^d)$. Moreover, the domain of the Fourier transform can be extended (it is possible, in particular, for compactly supported functions) to the whole complex space \mathbb{C}^d . And the Schwartz space S (of test functions), i. e., the space of functions that all the derivatives of the functions are rapidly decreasing, also can be extended to \mathbb{C}^d .

So, for $x_0 \in \mathbb{C}^d, \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, we have the following formula

$$(\mathfrak{F}e^{ix_0 \cdot x} x^\alpha)(\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi - x_0), \quad \xi \in \mathbb{C}^d.$$

Definition 1.1. Let $f, g \in L^2(\mathbb{C}^d)$ be complex functions. Then an inner product in the space $L^2(\mathbb{C}^d)$ is

$$\langle f|g \rangle := \int_{\mathbb{C}^d} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (3)$$

Here and in the sequel, the overline $\overline{\cdot}$ denotes the complex conjugation.

In the following definition, we consider complex distributions and complex test functions, see for example [10, 11].

Definition 1.2. Let $\phi \in S(\mathbb{C}^d)$ be a *complex test function*. Let $f = f(x), x \in \mathbb{C}^d$, be a locally integrable on \mathbb{C}^d *complex function*. Then the function f induces a distribution T_f (continuous linear functional) on $S(\mathbb{C}^d)$ as follows

$$T_f(\phi) := \int_{\mathbb{C}^d} \overline{f(x)} \phi(x) dx = \overline{\langle f|\phi \rangle}, \quad (4)$$

where $\langle \cdot|\cdot \rangle$, in the right-hand side of (4), is the inner product defined by (3).

Any functional defined by (4) is a *linear functional*; in particular, the functional is *homogeneous*:

$$T_f(a\phi) = aT_f(\phi),$$

where a is a complex valued function.

In the paper, we usually denote matrices by upper-case bold symbols and (sometimes) enclose the symbols of matrices in the square brackets. On the other hand, abusing notation slightly, we shall denote a vector of some linear space by a plain lower-case symbol and interpret the vector as a column vector.

By \mathbf{I}_n , $n \in \mathbb{N}$, denote the $n \times n$ *identity matrix*.

Now recall some block matrix notions. A *block matrix* is a matrix broken into sections called *blocks* or *submatrices*. A *block diagonal matrix* is a block matrix such that the main diagonal submatrices can be non-zero and all the off-diagonal submatrices are zero matrices. The (block) diagonals can be specified by an index k measured relative to the main diagonal, thus the main diagonal has $k = 0$ and the k -diagonal consists of the entries on the k th diagonal above the main diagonal. Note that the diagonal submatrices (excepting the main block diagonal) can be non-square.

1.2. *Ordered sets* By $<_{\text{lex}}$ we denote some *lexicographical order* and by \mathcal{A}_k , $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, denote the *lexicographically ordered set of all multi-indices of length k*

$$\mathcal{A}_k := ({}^1\alpha, {}^2\alpha, \dots, {}^{d(k)}\alpha), \quad {}^q\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, \quad |{}^q\alpha| = k, \quad q = 1, \dots, d(k),$$

$${}^q\alpha <_{\text{lex}} {}^{q'}\alpha \iff q < q',$$

where

$$d(k) := \binom{d+k-1}{k} = \frac{(d+k-1)!}{k!(d-1)!}$$

is the number of k -combinations with repetition from the d elements.

By $\tilde{\mathcal{A}}_k$ we denote a *concatenated set of multi-indices*

$$\tilde{\mathcal{A}}_k := (\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k),$$

where the comma must be considered as a concatenation operator to join of two sets. Actually the order of $\tilde{\mathcal{A}}_k$ is the *graded lexicographical order*. By $\tilde{d}(k)$ denote the length of a concatenated set like $\tilde{\mathcal{A}}_k$

$$\tilde{d}(k) := d(0) + d(1) + \dots + d(k) = \frac{(d+k)!}{k!d!}.$$

By \mathcal{P}_k , $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, denote the *lexicographically ordered set of all monomials of total degree k*

$$\mathcal{P}_k(x) := (x^{1\alpha}, \dots, x^{d(k)\alpha}), \quad x = (x_1, \dots, x_d), \quad ({}^1\alpha, \dots, {}^{d(k)}\alpha) = \mathcal{A}_k.$$

Remark 1.2. In examples (see Subsection 2.1 and Section 4), we shall use the obvious order of variables: $x > y > z$ ($\zeta > \eta > \theta$, for the Fourier space variables).

By \mathcal{D}_k denote the *ordered set of differential operators*

$$\mathcal{D}_k := \left((-i)^k D^{1\alpha}, \dots, (-i)^k D^{d(k)\alpha} \right), \quad ({}^1\alpha, \dots, {}^{d(k)}\alpha) = \mathcal{A}_k, \quad (5)$$

and, for $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, by \mathcal{D}_k^β denote the following set of operators

$$\mathcal{D}_k^\beta := \left((-i)^{k-|\beta|} \binom{{}^1\alpha}{\beta} D^{1\alpha-\beta}, \dots, (-i)^{k-|\beta|} \binom{{}^{d(k)}\alpha}{\beta} D^{d(k)\alpha-\beta} \right), \quad (6)$$

$$({}^1\alpha, \dots, {}^{d(k)}\alpha) = \mathcal{A}_k.$$

Remark 1.3. If sets (5), (6) are applied to some function f , then these applications are distributive over comma: $\mathcal{D}_k f := \left((-i)^k D^{1\alpha} f, \dots, (-i)^k D^{d(k)\alpha} f \right)$.

Note that if, for some $q \in \{1, \dots, d(k)\}$, $\beta \not\leq {}^q\alpha$; then the q th entry of (6) is zero. Moreover, if $|\beta| > k$; then set (6) is zero set.

Note also that the zero entries of row-vector (6) can be interpreted as zeroizing.

By $\tilde{\mathcal{P}}_k$ denote the following *concatenated set of monomials*

$$\tilde{\mathcal{P}}_k := (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k). \quad (7)$$

The *concatenated set of derivatives* is defined similarly to (7)

$$\tilde{\mathcal{D}}_k := (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k). \quad (8)$$

2. The matrix of the linear system

2.1. *Formation of the matrix.* For some $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \leq l$, define a $\tilde{d}(l) \times d(k)$ matrix \mathbf{D}_k as follows

$$\mathbf{D}_k := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k^0 \\ \mathbf{D}_k^1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_k^k \\ \tilde{d}(l) - \tilde{d}(k) \begin{cases} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{cases} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where \mathbf{D}_k^r are $d(r) \times d(k)$, $r = 0, 1, \dots, k$, submatrices defined as

$$\mathbf{D}_k^r := \begin{bmatrix} [\mathcal{D}_k^{1\beta}] \\ [\mathcal{D}_k^{2\beta}] \\ \vdots \\ [\mathcal{D}_k^{d(r)\beta}] \end{bmatrix}, \quad ({}^1\beta, \dots, {}^{d(r)}\beta) = \mathcal{A}_r, \quad (10)$$

and the row vectors $[\mathcal{D}_k^{q\beta}]$, $q = 1, \dots, d(r)$, are given by (6).

Remark 2.1. Note that if $r > k$; then the submatrix \mathbf{D}_k^r , defined by (10), is a zero matrix.

Finally, for $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, define a $\tilde{d}(l) \times \tilde{d}(l)$ matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$ as

$$\tilde{\mathbf{D}}_l := [\mathbf{D}_0 \quad \mathbf{D}_1 \quad \dots \quad \mathbf{D}_{l-1} \quad \mathbf{D}_l] = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0^0 & \mathbf{D}_1^0 & \dots & \mathbf{D}_{l-1}^0 & \mathbf{D}_l^0 \\ 0 & \mathbf{D}_1^1 & \dots & \mathbf{D}_{l-1}^1 & \mathbf{D}_l^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}_{l-1}^{l-1} & \mathbf{D}_l^{l-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{D}_l^l \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Remark 2.2. Note that, in formulas (9), (11), the symbol ‘0’ must be considered as a zero submatrix of the corresponding size. (See Remarks 1.3.)

The component-wise form of the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, is

$$[\tilde{\mathbf{D}}_l]_{qr, 1 \leq q, r \leq \tilde{d}(l)} = \begin{cases} (-i)^{|r\alpha - q\beta|} \binom{r\alpha}{q\beta} D^{r\alpha - q\beta}, & q\beta \leq r\alpha, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (12)$$

where $({}^1\alpha, \dots, {}^{\tilde{d}(l)}\alpha) = ({}^1\beta, \dots, {}^{\tilde{d}(l)}\beta) = \tilde{\mathcal{A}}_l$.

Example The bivariate $\tilde{d}(3) \times \tilde{d}(3) = 10 \times 10$ matrix $\tilde{\mathbf{D}}_3$ is of the form:

$$\tilde{\mathbf{D}}_3 := \begin{bmatrix} I & -i\partial_x & -i\partial_y & -\partial_{xx} & -\partial_{xy} & -\partial_{yy} & i\partial_{xxx} & i\partial_{xxy} & i\partial_{xyy} & i\partial_{yyy} \\ 0 & I & 0 & -2i\partial_x & -i\partial_y & 0 & -3\partial_{xx} & -2\partial_{xy} & -\partial_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -i\partial_x & -2i\partial_y & 0 & -\partial_{xx} & -2\partial_{xy} & -3\partial_{yy} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -3i\partial_x & -i\partial_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -2i\partial_x & -2i\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -i\partial_x & -3i\partial_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

2.2. Some properties of the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$

Theorem 2.1. *Let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Let the set $\tilde{\mathcal{D}}_l$ be given by (8), the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$ be given by (11), and functions f, g be sufficiently differentiable. Then we have*

$$\left[\tilde{\mathcal{D}}_l(fg) \right] = \left[\tilde{\mathcal{D}}_l f \right] \tilde{\mathbf{D}}_l g = \left[\tilde{\mathcal{D}}_l g \right] \tilde{\mathbf{D}}_l f. \quad (13)$$

Here we omit the proof of formula (13) and note only that the formula is a direct consequence of form (12) and the Leibniz rule, see (2).

For a single function we investigate the ranks of submatrices in the upper right corner of the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ (the matrices $\mathbf{D}_m^{m'} f(x_0)$, $m' = 0, \dots, m$, $m = 0, \dots, l$, that are given by (10)); where the function $f : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ is sufficiently differentiable and $x_0 \in \mathbb{C}^d$ is a given point.

Proposition 2.2. *Let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. The submatrix $\mathbf{D}_m^{m'}$, $m' = 0, \dots, m$, $m = 0, \dots, l$, contains the derivatives of order $m - m'$ only.*

Corollary 2.3. *All the submatrices on the m th, $m = 0, \dots, l$, block diagonal of the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$, i. e., the submatrices $\mathbf{D}_m^0, \mathbf{D}_{m+1}^1, \dots, \mathbf{D}_l^{l-m}$, contain the derivatives of order m .*

It easy to see that the q th, $1 \leq q \leq d(m)$, row of the matrix \mathbf{D}_m^m , $m = 0, \dots, l$, contains only one non-zero element I , which is situated on the q th position. Consequently, $\mathbf{D}_m^m = \mathbf{I}_{d(m)}$. So, since the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ is an upper triangular matrix, we can state an obvious theorem.

Theorem 2.4. *The matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, is singular iff $f(x_0) = 0$.*

Now state a theorem about ranks of all other blocks of the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$.

Theorem 2.5. *The $d(m') \times d(m)$ submatrix $\mathbf{D}_m^{m'} f(x_0)$, $m' = 0, \dots, m - 1$, $m = 1, \dots, l$, $l \in \mathbb{N}$, has full rank, i. e., the rank of $\mathbf{D}_m^{m'} f(x_0)$ is equal to $d(m')$, if and only if there exists at least one non-zero derivative $D^\gamma f(x_0)$, $|\gamma| = m - m'$.*

The proof of Theorem 2.5 is given in A.

Hence we see that each of the submatrices $\mathbf{D}_m^{m'} f(x_0)$, $m' = 0, \dots, m$, $m = 0, \dots, l$, is either a full rank matrix or zero matrix.

The following theorem allows to determine the dimension of $\ker \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$.

Theorem 2.6. *Let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, let $f : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ be a function, and let x_0 be a point of \mathbb{C}^d . Let the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$ be given by (11). Let $D^\alpha f(x_0)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, be a non-zero derivative of the least order. Then*

$$\dim \ker \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0) = \begin{cases} \tilde{d}(l) - \tilde{d}(l - |\alpha|) & \text{if } l \geq |\alpha| > 0; \\ \tilde{d}(l) & \text{if } l < |\alpha|. \end{cases} \quad (14)$$

The theorem is a direct consequence of the following lemma.

Lemma 2.7. *Under the conditions of Theorem 2.6, we have*

$$\text{rank } \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0) = \begin{cases} \tilde{d}(l - |\alpha|) & \text{if } l \geq |\alpha| > 0; \\ 0 & \text{if } l < |\alpha|. \end{cases}$$

Sketch of the proof of Lemma 2.7. For the case $l \geq |\alpha| > 0$, by Theorem 2.5 and Corollary 2.3, each block on the $|\alpha|$ th block diagonal of the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ is a full rank matrix. However, since the blocks of $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ are not, generally, square matrices; the problem to determine $\text{rank } \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ is not trivial.

Using an analog of the Gaussian elimination algorithm (applied to columns instead of rows) and moving (actually permutating) zero columns to the left, the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ can always be transformed into a *strictly* upper triangular matrix, where the lowest non-zero diagonal goes to the lower right corner of the last submatrix $\mathbf{D}_l^{l-|\alpha|}$. So $\text{rank } \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0) = \tilde{d}(l - |\alpha|)$.

Since, in the case $l < |\alpha|$, the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ is a zero matrix; the case $l < |\alpha|$ is trivial. \square

Introduce some notation.

Definition 2.1. Let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, let a function $f : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ be sufficiently differentiable, and let x_0 be a point of \mathbb{C}^d . Let the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$ be given by (11). By V_l denote the (right) null-space of the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$:

$$V_l := \ker \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0). \quad (15)$$

The space $\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, can be considered as a space with a Cartesian coordinate system, where the dot product of the Cartesian coordinates is $x \cdot y := \sum_q x_q \overline{y_q}$. Namely, we have

$$\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)} := \text{span} \left\{ e_q : 1 \leq q \leq \tilde{d}(l) \right\},$$

where the span is over \mathbb{C} and e_q is the q th basis vector: $e_q := (\delta_{q1}, \dots, \delta_{q, \tilde{d}(l)})$; and

we can decompose $\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$ as follows

$$\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)} = {}^0\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)} \oplus {}^1\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)} \oplus \dots \oplus {}^l\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}, \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} {}^0\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)} &:= \text{span} \{e_1\}, \\ {}^m\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)} &:= \text{span} \left\{ e_q : \tilde{d}(m-1) + 1 \leq q \leq \tilde{d}(m) \right\}, \quad m = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

and the direct sums in (16) are orthogonal. Decomposition (16) corresponds to the block structure of the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, (as well as structures of $\tilde{\mathcal{P}}_l$, $\tilde{\mathcal{D}}_l$).

Definition 2.2. By \mathfrak{P}_m denote the orthogonal projection of $\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$ onto ${}^m\mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$, $m = 0, \dots, l$; and define the subspaces of the null-space V_l , see Definition 2.1, as

$${}^mV_l := \mathfrak{P}_m V_l, \quad m = 0, 1, \dots, l. \quad (17)$$

Note that generally V_l is not a sum, like (16), of mV_l . In Subsection 3.1, we shall return to this problem in respect to the affine invariance of polynomial spaces.

Now we can formulate the following theorem.

Theorem 2.8. *Let $l \in \mathbb{N}$. Let the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ be singular and the space V_l is defined by (15). Then the subspace ${}^lV_l := \mathfrak{P}_l V_l$ is non-zero.*

Proof of Theorem 2.8. If the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ is a zero matrix, there is nothing to prove.

Now let $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ be non-zero. Suppose lV_l is a zero space; then

$$\dim \ker \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0) = \dim \ker \tilde{\mathbf{D}}_{l-1} f(x_0). \quad (18)$$

Since the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ is singular and non-zero; there exists a number $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq l$, that the block r -diagonal is the lowest non-zero block diagonal. By Theorem 2.6, we have

$$\begin{aligned} \dim \ker \tilde{\mathbf{D}}_{l-1} f(x_0) &= \begin{cases} \tilde{d}(l-1) - \tilde{d}(l-1-r) & \text{if } r \leq l-1; \\ \tilde{d}(l-1) & \text{if } r > l-1 \end{cases}, \\ \dim \ker \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0) &= \tilde{d}(l) - \tilde{d}(l-r). \end{aligned}$$

Nevertheless, for all $r, l \in \mathbb{N}$, $r \leq l$, we get

$$\left(\begin{cases} \tilde{d}(l-1) - \tilde{d}(l-1-r) & \text{if } r \leq l-1; \\ \tilde{d}(l-1) & \text{if } r > l-1 \end{cases} \right) < \tilde{d}(l) - \tilde{d}(l-r).$$

This contradicts equality (18). The theorem is proved. \square

If we have several functions f_1, f_2, \dots, f_n , we must consider a block matrix

$$\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0) := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_l f_1(x_0) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{D}}_l f_n(x_0) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

where by f we denote the following column vector $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

Definition 2.3. Let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Similarly to Definition 2.1, by V_l denote the null-space of block matrix (19).

3. Solution method

3.1. One homogeneous PDE

Theorem 3.1. Let $P \in \Pi$, let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, let x_0 be a point of \mathbb{C}^d . Let the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$ be given by (11), let the space V_l be given by (15), and let the row-vector $[\tilde{\mathcal{P}}_l]$ be given by (7). Then the following function $e^{ix_0 \cdot x} [\tilde{\mathcal{P}}_l(x)] v$, $v \in \mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$, is non-zero and belongs to $\ker P(-iD)$ if and only if $P(x_0) = 0$ and $v \in V_l$.

Proof of Theorem 3.1. As it has been said, see Theorem 2.4, a necessary and sufficient condition for the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)$ to be singular is that the point x_0 be a root of the polynomial P .

For some $v \in \mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$, consider a function

$$G(x) := P(-iD) \left(e^{ix_0 \cdot x} [\tilde{\mathcal{P}}_l(x)] v \right).$$

Taking the Fourier transform of the previous function, we obtain

$$\hat{G}(\xi) := P(\xi) [\tilde{\mathcal{D}}_l \delta(\xi - x_0)] v, \quad \xi \in \mathbb{C}^d. \quad (20)$$

The adjoint operator (set of operators) $\tilde{\mathcal{D}}_l^*$ satisfies a property

$$\tilde{\mathcal{D}}_l^* = \overline{\tilde{\mathcal{D}}_l} \quad (21)$$

(the adjunction, like the complex conjugation, is distributive over the comma, see Remark 1.3).

By Definition 1.2, Theorem 2.1, and property (21); for any test function $\phi \in S(\mathbb{C}^d)$, the functional $T_{\hat{G}}(\phi)$ (where \hat{G} is distribution (20)) is of the form

$$\begin{aligned} T_{\hat{G}}(\phi) &= \overline{\left\langle P(\cdot) [\tilde{\mathcal{D}}_l \delta(\cdot - x_0)] v \middle| \phi \right\rangle} = \overline{\left\langle \delta(\cdot - x_0) \middle| [\overline{\tilde{\mathcal{D}}_l} (\overline{P\phi})] \overline{v} \right\rangle} \\ &= \left[\tilde{\mathcal{D}}_l \left(P(x_0) \overline{\phi(x_0)} \right) \right] v \stackrel{\text{by (13)}}{=} \left[\tilde{\mathcal{D}}_l \overline{\phi(x_0)} \right] \left[\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0) \right] v. \end{aligned} \quad (22)$$

Using the expression in the right-hand side of (22), the proof of the theorem is trivial. \square

Remark 3.1. Theorem 3.1 can be proved for other (linear and linear-conjugate, see for example [11]) functionals like (4).

Below present a corollary of the previous theorem.

Corollary 3.2. *Under the conditions of Theorem 3.1, we see that the following spaces are equivalent:*

$$e^{ix_0 \cdot x} \Pi_{\leq l} \cap \ker P(-iD);$$

$$e^{ix_0 \cdot x} \left\{ \left[\tilde{\mathcal{P}}_l(x) \right] v : v \in V_l \right\}.$$

Now we state a theorem that is the direct consequence of Theorem 2.6.

Theorem 3.3. *Let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Let $P \in \Pi$, let x_0 be a root of P . Let $D^\alpha P(x_0)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, be a non-zero derivative of the least order. Then we have*

$$\dim \left(e^{ix_0 \cdot x} \Pi_{\leq l} \cap \ker P(-iD) \right) = \begin{cases} \tilde{d}(l) - \tilde{d}(l - |\alpha|) & \text{if } l \geq |\alpha| > 0; \\ \tilde{d}(l) & \text{if } l < |\alpha|. \end{cases}$$

Moreover, if $l < |\alpha|$; then

$$e^{ix_0 \cdot x} \Pi_{\leq l} \cap \ker P(-iD) = e^{ix_0 \cdot x} \Pi_{\leq l}.$$

Below we state a corollary of Theorem 2.8.

Corollary 3.4. *Under the conditions of Theorem 3.1, we see that if x_0 is a root of the polynomial P , then the null-space of the operator $P(-iD)$ contains polynomials (multiplied by the exponential $e^{ix_0 \cdot x}$) up to an arbitrary large total degree.*

Remark 3.2. Corollary 3.4 generalizes a fundamental property, see [1], of polynomial solutions to a single PDE with constant coefficients.

3.2. System of homogeneous PDE's

For a system of PDE's

$$\begin{cases} P_1(-iD) \cdot = 0, \\ \vdots \\ P_n(-iD) \cdot = 0, \end{cases} \tag{23}$$

where P_1, P_2, \dots, P_n are algebraic polynomials; we have the following theorem.

Theorem 3.5. *Let $P_m \in \Pi$, $m = 1, 2, \dots, n$; let $x_0 \in \mathbb{C}^d$ be a solution to the following system of algebraic equations*

$$\begin{cases} P_1(x) = 0, \\ \vdots \\ P_n(x) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$ be given by (11). The expression $e^{ix_0 \cdot x} \left[\tilde{\mathcal{P}}_l \right] v$, where $v \in \mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$, is a non-zero solution to system (23) iff the vector v belongs to the null-space of block matrix

$$\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0) := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_l P_1(x_0) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{D}}_l P_n(x_0) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

where P is the column vector $P := [P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n]^T$.

Definition 3.1. Under the conditions of Theorem 3.5, we can define the following polynomial space

$$\mathcal{V}_l := \left\{ \left[\tilde{\mathcal{P}}_l \right] v : v \in \ker \tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0) \right\}, \quad (26)$$

where $\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)$ is block matrix (25).

Below we state an almost obvious theorem about non-zero solutions to system of PDE's (23).

Theorem 3.6. Let $P_m \in \Pi$, $m = 1, 2, \dots, n$. Let $x_0 \in \mathbb{C}^d$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, and the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)$, $P := [P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n]^T$, be given by (25). Let $D^{\alpha_m} P_m(x_0)$, $\alpha_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, $m = 1, \dots, n$, be the non-zero derivatives of the least orders. Let l th column (block) vector be in the form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_l^{l-|\alpha_1|} P_1(x_0) \\ \mathbf{D}_l^{l-|\alpha_2|} P_2(x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_l^{l-|\alpha_n|} P_n(x_0) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

where the submatrices $\mathbf{D}_l^{l-|\alpha_m|}$, $m = 1, 2, \dots, n$, are defined by (10). (If, for some $m \in \{1, \dots, n\}$, $l - |\alpha_m| < 0$; then the corresponding submatrix $\mathbf{D}_l^{l-|\alpha_m|} P_m(x_0)$ is a zero matrix, see Remark 2.1.) Suppose the polynomial space \mathcal{V}_l corresponds to block matrix (25), see Definition 3.1. Then $\mathcal{V}_l \cap \Pi_l \neq \emptyset$ iff matrix (27) is not a full-rank matrix.

Now we can state several corollaries of Theorem 3.6.

Corollary 3.7. Suppose that, for some $l \in \mathbb{N}$, matrix (27) is not full-rank; then, for all $l' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $0 \leq l' < l$, we have $\mathcal{V}_{l'} \cap \Pi_{l'} \neq \emptyset$, where $\mathcal{V}_{l'} := \ker \tilde{\mathbf{D}}_{l'} P(x_0)$, and $\tilde{\mathbf{D}}_{l'}$ is an analog of matrix (25).

Corollary 3.8. If $l < \min\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$, then $\mathcal{V}_l = \Pi_{<l}$.

Corollary 3.9. For the block matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_0^0 P_1(x_0) \\ \mathbf{D}_0^0 P_2(x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_0^0 P_n(x_0) \end{bmatrix}$$

to be no full-rank matrix it is necessary and sufficient to have

$$P_1(x_0) = \cdots = P_n(x_0) = 0. \quad (28)$$

Remark 3.3. Thus system (23) has a nonzero polynomial (multiplied by $e^{ix_0 \cdot x}$) solution iff conditions (28) are valid.

Theorem 3.10. Under the conditions of Theorem 3.5, we have

$$\mathcal{V}_{l-1} = \Pi_{\leq l-1} \cap \mathcal{V}_l, \quad (29)$$

where the polynomial spaces $\mathcal{V}_{l-1}, \mathcal{V}_l, l \in \mathbb{N}$, are defined by (26).

The proof of Theorem 3.10 is given in B.

Finally we state three remarks.

Remark 3.4.

- (1) Theorem 3.10 is valid also for single PDE.
- (2) Certainly, inclusion (29) of polynomial spaces reflects a fundamental property of differentiation to commute with translation.
- (3) Note also that if $\mathcal{V}_l \subseteq \Pi_{\leq l-1}$ (it is possible only for a system of two and more PDE's), then $\mathcal{V}_{l-1} = \mathcal{V}_l$.

3.3. PDE with a polynomial right-hand side

In the previous subsections, PDE's have zero right-hand sides. Nevertheless the matrix approach allows generalizing PDE to polynomial (multiplied by an exponential) right-hand side.

Theorem 3.11. Let polynomials $P, F \in \Pi$, $x_0 \in \mathbb{C}^d$ be a root of P , $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ be a multi-index that defines the least order derivative such that $D^\alpha P(x_0) \neq 0$. Let the polynomial F be defined as follows: $F(x) := [\tilde{\mathcal{P}}_{\deg F}(x)] w$, $w \in \mathbb{C}^{\tilde{d}(\deg F)}$. Let $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $l \geq \deg F + |\alpha|$, and the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l$ be given by (11). Let $v \in \mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$ be a column vector and $p := [\tilde{\mathcal{P}}_l] v$ be the corresponding polynomial. Then the polynomial p is a solution to PDE

$$P(-iD) (e^{ix_0 \cdot x} \cdot) = e^{ix_0 \cdot x} F(x) \quad (30)$$

iff the vector v is a solution to linear algebraic equation

$$[\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)] v = \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Remark 3.5. Under the conditions of Theorem 3.11, we can state three remarks:

- (1) $\dim \{p \in \Pi_{\leq l} : P(-iD) (e^{ix_0 \cdot x} p(x)) = e^{ix_0 \cdot x} F(x)\} = \tilde{d}(l) - \tilde{d}(l - |\alpha|)$;
- (2) for any root $x_0 \in \mathbb{C}^d$ of P , number $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, and polynomial $F \in \Pi$ such that $\deg F \leq l - |\alpha|$; algebraic system (31) is consistent;

- (3) for any root $x_0 \in \mathbb{C}^d$ of P and any polynomial $F \in \Pi$, there exists a polynomial $p \in \Pi'$ of an arbitrary large degree that p satisfies PDE (30).

Corollary 3.12. *Under the conditions of the previous theorem, and supposing $P(x_0) \neq 0$; we see that algebraic system (31) is consistent and has one solution, i. e., polynomial solution to PDE (30) is defined uniquely and does not depend on the choice of l .*

The proof of the previous results is left to the reader. Note only that the theorem and remarks are based on Theorem 2.6, Theorem 3.1, and the classical Rouché-Capelli theorem.

3.4. Affine invariance

In this short subsection, we concern affine invariance of polynomial solutions to PDE's, in particular, from the matrix point of view.

Recall that a (polynomial) space $\mathcal{V} \subset \Pi$ is *affinely invariant*, i. e., shift- and scale-invariant; if, for all $p \in \mathcal{V}$, $p(ax + b) \in \mathcal{V}$ for $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^d$. Also recall that a polynomial space \mathcal{V} is scale-invariant iff \mathcal{V} *stratifies*:

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{V} \cap \Pi_k. \quad (32)$$

Stratified form (32) of the polynomial space \mathcal{V}_l , $l \in \mathbb{N}$, implies the following conditions on the null-space V_l (see Definitions 3.1 and 3.2)

$$V_l = \bigoplus_{k=0}^l \mathfrak{P}_k V_l = \bigoplus_{k=0}^l V_l \cap {}^k \mathbb{C}^{\tilde{d}(l)},$$

cf. (16), and vice versa. Note, for affine invariance case, we have

$$\mathfrak{P}_k V_l = V_l \cap {}^k \mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}.$$

Thus the column matrix $[V_l]$ of basis vectors can be presented in a block diagonal form.

The matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)$, see (19), for the affine invariance of a polynomial space, will be the object of another paper.

4. Examples. From the practical point of view, define a system of algebraic polynomials that induces PDE's, fixing some number $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and a point $x_0 \in \mathbb{C}^{\tilde{d}(l)}$, define the null-space (using some computer symbolic algebra system) $\ker \tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)$ as a matrix $[V_l]$ of column basis vectors; then $e^{ix_0 \cdot x} \left[\tilde{\mathcal{P}}_l(x) \right] [V_l]$ is the row-vector of polynomials (multiplied by the exponential $e^{ix_0 \cdot x}$) that this vector constitutes a basis of space $[\mathcal{V}_l]$, see (26).

4.1. Homogeneous equations

First we consider three examples, presented in the paper [4], of polynomial solution to PDE's.

Example 1. The first example is 2D Laplace operator

$$L_1 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

So the polynomial that induces the operator is

$$P_1(\zeta, \eta) := -\zeta^2 - \eta^2, \quad \zeta, \eta \in \mathbb{C}. \quad (34)$$

The 10×10 matrix $\tilde{\mathbf{D}}_3 P_1(0, 0)$ is of the form

$$\tilde{\mathbf{D}}_3 P_1(0, 0) := \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (35)$$

Now, selecting the appropriate set of basis vectors

$$\left[\ker \tilde{\mathbf{D}}_3 P_1(0, 0) \right] := \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

we obtain the well-known row-vector of basis polynomials

$$\left[\tilde{\mathcal{P}}_3(x, y) \right] \left[\ker \tilde{\mathbf{D}}_3 P_1(0, 0) \right] = [1 \ x \ y \ xy \ y^2 - x^2 \ 3xy^2 - x^3 \ y^3 - 3x^2y]. \quad (36)$$

Example 2. The polynomial $P_2(\zeta, \eta) := -\zeta^2 - i\eta$ that induces the operator of this example

$$L_2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}$$

is not homogeneous. The matrix $\tilde{\mathbf{D}}_3 P_2(0, 0)$ is of the form

$$\tilde{\mathbf{D}}_3 P_2(0, 0) := \left[\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

and, using some matrix $\left[\ker \tilde{\mathbf{D}}_3 P_2(0, 0) \right]$, a basis of $\ker L_2(-iD) \cap \Pi_{\leq 3}$ can be in the form

$$\{1, x, x^2 + 2y, x^3 + 6xy\}.$$

Example 3. The third example taken from the paper [4] is interesting from two points of view. Namely we have a system of two operators: an elliptic (the Laplace operator)

$$L_3 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

and hyperbolic

$$L_4 := \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}.$$

And it is a 3D example.

Since, in [4], the third degree polynomials are considered only; therefore, we use the last (block) columns of matrices $\tilde{\mathbf{D}}_3 P_3(0, 0)$, $\tilde{\mathbf{D}}_3 P_4(0, 0)$ (it is possible only in an affine-invariant case), where P_3, P_4 are the algebraic polynomials that corresponds to the operators L_3, L_4 , respectively.

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{D}_3 P_3(0, 0) \\ \mathbf{D}_3 P_4(0, 0) \end{array} \right] = \frac{\left[\begin{array}{c} \mathbf{D}_3^0 P_3(0, 0) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_3^3 P_3(0, 0) \\ \mathbf{D}_3^0 P_4(0, 0) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_3^3 P_4(0, 0) \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \mathbf{D}_3^0 P_3(0, 0) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_3^3 P_3(0, 0) \\ \mathbf{D}_3^0 P_4(0, 0) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_3^3 P_4(0, 0) \end{array} \right]}.$$

Since other blocks of the previous matrix are zero, we have

$$\ker \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 P_3(0,0) \\ \mathbf{D}_3 P_4(0,0) \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Using a column-matrix $\left[\ker \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 P_3(0,0) \\ \mathbf{D}_3 P_4(0,0) \end{bmatrix} \right]$, we get a basis of the space $\ker L_3 \cap \ker L_4 \cap \Pi_3$:

$$\begin{aligned} & \{ 3x^2y - 3x^2z - y^3 + z^3, -x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 6xyz - 2y^3 + 3yz^2, \\ & \quad - 2x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 6xyz + 3xz^2 - y^3, \\ & \quad x^3 + 3x^2y - 3x^2z - 3xy^2 - y^3 + 3y^2z \}. \end{aligned}$$

Note that, in the paper [4], another basis is presented. (It depends on basis vectors of the null-space.) But it is not hard to see that our own and Pedersen's, see [4], basis are bases of the same space.

Secondly we present an example, where another (not the origin) root of polynomial is used.

Example 4. This example is taken from the paper [9]. Since the symbol $P_1(\zeta, \eta)$, $\zeta, \eta \in \hat{\mathbb{C}}$, of 2D Laplace operator (33) vanishes on a 2D manifold; we can take another root of P_1 than the origin. Here we take, as an example, a root $(1, i)$; and we obtain the following matrix

$$\tilde{\mathbf{D}}_3 P_1(1, i) := \begin{bmatrix} 0 & -2i & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4i & 2 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2i & 4 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

So a subspace of Laplace's operator null-space is of the form

$$\begin{aligned} & e^{ix-y} \Pi_{\leq 3} \cap \ker L_1 \\ & = e^{ix-y} \text{span} \{ 1, x + iy, x^2 + 2ixy - y^2, x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \}. \end{aligned} \quad (37)$$

Note that the real or imaginary parts of the polynomials in (37) (cf. (36) and (37)) multiplied by an exponential, do not become the solutions to the Laplace operator.

Finally we consider an operator that the operator symbol does not vanish at the origin, thus any pure polynomial must be multiplied by an exponential to be solution to PDE.

Example 5. Consider the Helmholtz operator

$$L_5 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - I.$$

The corresponding symbol is

$$P_5(\zeta, \eta) := -\zeta^2 - \eta^2 - 1, \quad \zeta, \eta \in \mathbb{C}. \quad (38)$$

P_5 vanishes, in particular, at a point $(i, 0)$; and we consider the following matrix

$$\tilde{D}_3 P_5(i, 0) := \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

And we have

$$e^{-x} \Pi_{\leq 3} \cap \ker L_5 = e^{-x} \operatorname{span} \{1, y, x + y^2, 3xy + y^3\}.$$

4.2. PDE with polynomial right-hand side

Finally we discuss PDE's with polynomial (multiplied, in general, by an exponential) right-hand sides.

Example 6. Here we present the Poisson equation in the form

$$L_1 (e^{ix-y} \cdot) = e^{ix-y} (-2xy + 3x + y^2 + 2), \quad (39)$$

where L_1 is 2D Laplace's operator (33) and the point $(1, i)$, which defines the exponential e^{ix-y} , is a root of the corresponding symbol P_1 , see (34). The polynomial in the right-hand side of PDE (39) can be presented as

$$F(x, y) := -2xy + 3x + y^2 + 2 = \left[\tilde{\mathcal{P}}_2(x, y) \right] w, \quad \text{where} \\ w := [2 \ 3 \ 0 \ 0 \ -2 \ 1]^T.$$

Since $\deg F = 2$ and $|\alpha| = 1$, where $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ is minimal degree such that $D^\alpha P_1(1, i) \neq 0$; we shall use $l = 3$.

The corresponding linear algebraic equation (31) is:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 2i & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4i & -2 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2i & -4 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6i & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4i & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2i & -6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{where } v \in \mathbb{C}^{10}. \quad (40)$$

By Item (1) of Remark 3.5, the dimension of polynomial space to solve PDE (39) (and dimension on linear space to solve (40)) is $\tilde{d}(3) - \tilde{d}(2) = d(3) = 4$. Since linear algebraic system (40) is undetermined and consistent; using the standard technics, we define the solution to (40) (column-vector v) and obtain a polynomial solution to PDE (39)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} + \frac{i}{6}\right) (-1 + (3 + 3i)v_4)x^3 + v_3 (-x^2 - 2ixy + y^2) \\ & + \left(-3v_4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) x^2y - \frac{1}{2}i(6v_4 - 1)xy^2 + v_2(x + iy) + v_4y^3 + v_1 \\ & + \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) xy + \left(\frac{5}{4} + \frac{i}{4}\right) y, \quad v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Example 7. In this example, we consider Poisson's equation. However we use a point $(1, 1)$ that is not root of P_1 . We solve the following PDE:

$$L_1 (e^{ix+iy}.) = e^{ix+iy}(3 + x - 2y), \quad (41)$$

where L_1 is Laplace operator (33). The value $l = 1$ will suffice and the linear system is very simple

$$\left[\begin{array}{c|cc} -2 & 2i & 2i \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right] v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

and the unique polynomial solution to PDE (39) is of the form

$$-\frac{x}{2} + y - \left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2}\right).$$

Conclusion. In this paper, a matrix method has been developed for the constructive determination of polynomial solutions of linear PDEs with constant coefficients. Here we will present some plans for the near future. It is of particular interest to generalize the method to the following cases:

- matrix methods of polynomial solutions to PDE('s) with *polynomial coefficients*;

- matrix methods of investigation of polynomial solutions to *systems* of constant coefficient PDE's;
- matrix methods of investigation of *affine invariance/no invariance* of polynomial solution spaces to constant coefficient PDE('s).

A. Proof of Theorem 2.5 First consider the matrix $\mathbf{D}_m^0 f(x_0)$, $m = 1, \dots, l$. We see that $\mathbf{D}_m^0 f(x_0)$ is a row vector $[(-i)^m D^{q\alpha} f(x_0)]$ ($1 \leq q \leq d(m)$). Consequently the matrix $\mathbf{D}_m^0 f(x_0)$ has non-zero rank iff there exists at least one multi-index ${}^q\alpha \in \mathcal{A}_m$ such that $D^{q\alpha} f(x_0) \neq 0$.

Secondly consider the matrices $\mathbf{D}_m^{m'} f(x_0)$, $m' = 1, \dots, m-1$, $m = 1, \dots, l$. Note that $\mathbf{D}_m^{m'} f(x_0)$ is a $d(m') \times d(m)$ matrix. By ${}^{qr}\gamma$, $1 \leq q \leq d(m')$, $1 \leq r \leq d(m)$, denote the difference ${}^q\alpha - {}^r\beta$, where $({}^1\alpha, \dots, {}^{d(m)}\alpha) = \mathcal{A}_m$ and $({}^1\beta, \dots, {}^{d(m')}\beta) = \mathcal{A}_{m'}$. Define auxiliary $d(m') \times d(m)$ matrices $\mathbf{G}_m^{m'}$, $m' = 1, \dots, m-1$, $m = 1, \dots, l$, as follows

$$[\mathbf{G}_m^{m'}]_{qr, 1 \leq q \leq d(m'), 1 \leq r \leq d(m)} = {}^{qr}\gamma. \quad (42)$$

We suppose that some entries of the matrix $\mathbf{G}_m^{m'}$ do not belong to $\mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, i. e., a tuple ${}^{qr}\gamma$ can contain negative components.

Lemma A.1. *Any multi-index $\gamma \in \mathcal{A}_{m-m'}$ appears once in each row and no more than once in each column of the matrix $\mathbf{G}_m^{m'}$. However not every column of $\mathbf{G}_m^{m'}$ contains the multi-index γ .*

Proof of Lemma A.1. For any multi-index $\gamma \in \mathcal{A}_{m-m'}$ and any row q , $q = 1, \dots, d(m')$, of the matrix $\mathbf{G}_m^{m'}$, we can always define a d -tuple $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ as $\alpha := \gamma + {}^q\beta$, where ${}^q\beta \in \mathcal{A}_{m'}$. Since ${}^q\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ and $|{}^q\beta| = m'$, $|\gamma| = m - m'$; therefore, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, $|\alpha| = m$. Consequently there exists a unique (column) number $r \in \{1, \dots, d(m)\}$ such that $\alpha = {}^r\alpha \in \mathcal{A}_m$.

Fix a column number $r \in \{1, \dots, d(m)\}$. Consider some $\gamma \in \mathcal{A}_{m-m'}$ and define a d -tuple β as $\beta := {}^r\alpha - \gamma$, where ${}^r\alpha \in \mathcal{A}_m$. If $\gamma \leq {}^r\alpha$, then $\beta = {}^q\beta \in \mathcal{A}_{m'}$ for a unique (row) number $q \in \{1, \dots, d(m')\}$; else the column r does not contain the multi-index γ . \square

Lemma A.2. *Let $({}^1\beta, \dots, {}^{d(m')}\beta) = \mathcal{A}_{m'}$, $({}^1\gamma, \dots, {}^{d(m-m')}\gamma) = \mathcal{A}_{m-m'}$, $m > m'$. Consider an entry ${}^{qr}\gamma$ of the matrix $\mathbf{G}_m^{m'}$ and suppose that ${}^{qr}\gamma$ is equal to a multi-index ${}^j\gamma \in \mathcal{A}_{m-m'}$, $j \in \{1, \dots, d(m-m')\}$; then any entry of the r th column of $\mathbf{G}_m^{m'}$ below than ${}^{qr}\gamma$, i. e., the entry ${}^{q'r}\gamma$, $q' \in \{q+1, \dots, d(m')\}$, belongs either to the set of the multi-indices $\{{}^1\gamma, \dots, {}^{j-1}\gamma\}$ or does not belong to $\mathbb{Z}_{\geq 0}^d$.*

Proof of Lemma A.2. Since the multi-indices ${}^q\beta$, $q = 1, \dots, d(m')$, are lexicographically ordered, i. e., ${}^1\beta <_{\text{lex}} {}^2\beta <_{\text{lex}} \dots <_{\text{lex}} {}^{d(m')}\beta$; using (42), we obtain the order

$${}^{1r}\gamma >_{\text{lex}} {}^{2r}\gamma >_{\text{lex}} \dots >_{\text{lex}} {}^{d(m'),r}\gamma. \quad (43)$$

Consider any ${}^{q'r}\gamma$, $q' \in \{q+1, \dots, d(m')\}$, assume ${}^{q'r}\gamma \notin \{{}^1\gamma, \dots, {}^{j-1}\gamma\}$ and ${}^{q'r}\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. Then there exists a unique number $j' \in \{j, \dots, d(m-m')\}$ such that ${}^{j'}\gamma = {}^{q'r}\gamma$. Since

$j' \geq j$, we have $j'\gamma = q'r\gamma \geq_{\text{lex}} j\gamma = q^r\gamma$. By (43), we get $q' \leq q$. This contradiction concludes the proof. \square

Finally let us prove the theorem.

Proof of Theorem 2.5. Obviously that at least one non-zero derivative $D^\gamma f(x_0)$, $|\gamma| = m - m'$, is necessary for full rank of the matrix $\mathbf{D}_m^{m'} f(x_0)$.

Sufficiency. For some $j\gamma \in \mathcal{A}_{m-m'}$, $j \in \{1, \dots, d(m - m')\}$, suppose that the derivative $D^{j\gamma} f(x_0) \neq 0$. By Lemma A.1, from $\mathbf{D}_m^{m'} f(x_0)$, we can take a $d(m') \times d(m')$ submatrix with the non-zero main diagonal $(D^{j\gamma} f(x_0), \dots, D^{j\gamma} f(x_0))$ and we denote this submatrix by \mathbf{S}_j .

Suppose, for ${}^1\gamma \in \mathcal{A}_{m-m'}$, $D^{1\gamma} f(x_0) \neq 0$; then, by Lemma A.2 and property (1), all the entries below the main diagonal of the submatrix \mathbf{S}_1 vanish. So the matrix \mathbf{S}_1 is not singular, consequently $\text{rank } \mathbf{D}_m^{m'} f(x_0) = d(m')$.

Otherwise, $D^{1\gamma} f(x_0) = 0$. Suppose there exists a multi-index $j\gamma \in \mathcal{A}_{m-m'}$, $j \in \{2, \dots, d(m - m')\}$, such that $D^{j\gamma} f(x_0) \neq 0$ and all the derivatives $D^{j'\gamma} f(x_0)$, $j' = 1, \dots, j - 1$, vanish. Since all the entries below the main diagonal of the matrix \mathbf{S}_j vanish, it follows that $\det \mathbf{S}_j \neq 0$. This concludes the proof of the sufficiency. \square

B. Proof of Theorem 3.10 We must restructure the matrices $\mathbf{D}_k f(x_0)$

(see (9)), where $f := \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$, $k = 0, \dots, l$; and introduce a notation.

Let $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \leq l$. Define the $n\tilde{d}(l) \times d(k)$ matrix $\check{\mathbf{D}}_k f(x_0)$, as follows

$$\check{\mathbf{D}}_k f(x_0) := \begin{bmatrix} \check{\mathbf{D}}_k^0 f(x_0) \\ \check{\mathbf{D}}_k^1 f(x_0) \\ \vdots \\ \check{\mathbf{D}}_k^k f(x_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{where } \check{\mathbf{D}}_k^r f(x_0) := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k^r f_1(x_0) \\ \mathbf{D}_k^r f_2(x_0) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_k^r f_n(x_0) \end{bmatrix} \quad (44)$$

and \mathbf{D}_k^r , $r = 0, \dots, k$, $k = 0, \dots, l$, is given by (10).

And formulate an analog of matrix (19) (see also (11))

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0) &:= [\check{\mathbf{D}}_0 f(x_0) \quad \check{\mathbf{D}}_1 f(x_0) \quad \dots \quad \check{\mathbf{D}}_l f(x_0)] \\ &= \begin{bmatrix} \check{\mathbf{D}}_0^0 f(x_0) & \check{\mathbf{D}}_1^0 f(x_0) & \dots & \check{\mathbf{D}}_{l-1}^0 f(x_0) & \check{\mathbf{D}}_l^0 f(x_0) \\ 0 & \check{\mathbf{D}}_1^1 f(x_0) & \dots & \check{\mathbf{D}}_{l-1}^1 f(x_0) & \check{\mathbf{D}}_l^1 f(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \check{\mathbf{D}}_{l-1}^{l-1} f(x_0) & \check{\mathbf{D}}_l^{l-1} f(x_0) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \check{\mathbf{D}}_l^l f(x_0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (45)$$

Remark A.1. Obviously, the matrices $\tilde{\mathbf{D}}_l f(x_0)$, $\check{\mathbf{D}}_l f(x_0)$ have the same null-space.

Proof of Theorem 3.10. Suppose a polynomial $p \in \mathcal{V}_{l-1}$. Then there exists a vector $v \in \ker \tilde{\mathbf{D}}_{l-1} f(x_0)$ such that $p = [\tilde{\mathcal{P}}_{l-1}] v$. Obviously,

$$p \in \Pi_{\leq l-1}. \quad (46)$$

Matrix (45) can be presented as a block matrix

$$\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0) := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{l-1} P(x_0) & \check{\mathbf{D}}_l^0 P(x_0) \\ \vdots & \check{\mathbf{D}}_l^{l-1} P(x_0) \\ 0 & \dots & 0 & \check{\mathbf{D}}_l^l P(x_0) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

where the submatrices $\check{\mathbf{D}}_l^0, \dots, \check{\mathbf{D}}_l^l$ are given by (44). Introduce an auxiliary column vector as follows

$$v^\# := \begin{bmatrix} v \\ d(l) \begin{cases} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{cases} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Then, using block form (47) of matrix $\tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)$, we get $v^\# \in \ker \tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)$. Since $p = [\tilde{\mathcal{P}}_l] v^\#$, it follows that $p \in \mathcal{V}_l$; and, by (46), we obtain $p \in \Pi_{\leq l-1} \cap \mathcal{V}_l$. Thus we have $\mathcal{V}_{l-1} \subseteq \Pi_{\leq l-1} \cap \mathcal{V}_l$.

Contrary. Suppose a polynomial $p \in \Pi_{\leq l-1} \cap \mathcal{V}_l$. Since $p \in \Pi_{\leq l-1}$, it follows that the polynomial can be presented as follows $p = [\tilde{\mathcal{P}}_l] v^\#$, where $v^\#$ is given by (48). Since $v^\# \in \ker \tilde{\mathbf{D}}_l P(x_0)$ and, arguing as above; $v \in \ker \tilde{\mathbf{D}}_{l-1} P(x_0)$. Thus $p \in \mathcal{V}_{l-1}$; i. e., we have $\mathcal{V}_{l-1} \supseteq \Pi_{\leq l-1} \cap \mathcal{V}_l$.

This concludes the proof. \square

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. В. Г. Захаров является единственным автором рукописи.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие конфликта интересов.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках госзадания по теме Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, № ГР АААА-А20-120022590044-7

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. I. I. Ivanov writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, I. V. Petrov reviewing the literature on the topic of the article, conducting experiments, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The author declares that he has no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number АААА-А20-120022590044-7).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Abramov S., Petkovšek M. On polynomial solutions of linear partial differential and (q -)difference equations // Computer Algebra in Scientific Computing. 14th International workshop LNCS 7442. 2012. P. 1–11.
- [2] Horvás J. Basic sets of polynomial solutions for partial differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 9. P. 569–575.
- [3] Karachik V.V. Polynomial solutions to the systems of partial differential equations with constant coefficients. // Yokohama Math. J. 2000. Vol. 47. P. 121–142.
- [4] Pedersen P. A basis for polynomial solutions to systems of linear constant coefficient PDE's. // Adv. Math. 1996. Vol. 117. P. 157–163.
- [5] Reznick B. Homogeneous polynomial solutions to constant coefficient PDE's. // Adv. Math. 1996. Vol. 117. P. 179–192.
- [6] Smith S.P. Polynomial solutions to constant coefficient differential equations. // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 329. P. 551–569.
- [7] de Boor C. The polynomials in the linear span of integer translates of a compactly supported function // Constr. Approx. 1987. Vol. 3. P. 199–208.
- [8] Dahmen W., Micchelli Ch. Translates of multivariate splines. // Linear Algebra Appl. 1983. Vol. 52. P. 217–234.
- [9] Zakharov V.G. Reproducing solutions to PDE's by scaling functions. // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2020. Vol. 3. P. 2050017.
- [10] Гельфанд И.М. и Шилев Г.Е. Обобщенные функции. Свойства и операторы. AMS Chelsea Publishing, 2016. Vol. 1.
- [11] С.В. Колмогоров А.Н. и Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. New York : Dover Books, 1957.

REFERENCES

- [1] Abramov S., Petkovšek M. On polynomial solutions of linear partial differential and (q -)difference equations // Computer Algebra in Scientific Computing. 14th International workshop LNCS 7442. 2012. P. 1–11.
- [2] de Boor C. The polynomials in the linear span of integer translates of a compactly supported function // Constr. Approx. 1987. Vol. 3. P. 199–208.
- [3] Dahmen W., Micchelli Ch. Translates of multivariate splines. // Linear Algebra Appl. 1983. Vol. 52. P. 217–234.
- [4] Gelfand I., Shilov G. Generalized Functions. Properties and Operations. AMS Chelsea Publishing, 2016. Vol. 1.
- [5] Horvás J. Basic sets of polynomial solutions for partial differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 9. P. 569–575.

-
- [6] Karachik V.V. Polynomial solutions to the systems of partial differential equations with constant coefficients. // *Yokohama Math. J.* 2000. Vol. 47. P. 121–142.
 - [7] Kolmogorov A., Fomin S. *Elements of the Theory of Functions and Function Analysis*. New York : Dover Books, 1957.
 - [8] Pedersen P. A basis for polynomial solutions to systems of linear constant coefficient PDE's. // *Adv. Math.* 1996. Vol. 117. P. 157–163.
 - [9] Reznick B. Homogeneous polynomial solutions to constant coefficient PDE's. // *Adv. Math.* 1996. Vol. 117. P. 179–192.
 - [10] Smith S.P. Polynomial solutions to constant coefficient differential equations. // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1992. Vol. 329. P. 551–569.
 - [11] Zakharov V.G. Reproducing solutions to PDE's by scaling functions. // *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.* 2020. Vol. 3. P. 2050017.

М. В. Полоник¹, А. А. Манцыбора¹

ПРОБЛЕМЫ ЛАЗЕРНОЙ ОЧИСТКИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

¹*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия*

Аннотация. В статье представлены результаты моделирования и численных расчетов процессов лазерного удаления красок с поверхности металлических деталей. Проведены теоретические исследования температурных полей в зоне обработки сканирующим лазерным излучением, позволяющие провести практические испытания и разработать условия, при которых физическое воздействие энергии лазера наносит минимальные повреждения тонкостенным конструкциям. Полученные результаты нашли свое отражение в технологии очистки планеров летательных аппаратов.

Ключевые слова: Лазерная очистка, лазерная абляция, тонкостенные конструкции, численное моделирование, температурные поля, лазерное излучение, воздушное судно.

Полоник Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики необратимого деформирования; e-mail: polonik@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4092-8957>; AuthorID: 5247

Манцыбора Александр Анатольевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нелинейной механики деформирования; e-mail: manzubor@iаср.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5060-5436>; AuthorID: 5243

для цитирования: Полоник М. В., Манцыбора А. А. Проблемы лазерной очистки тонкостенных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 117–127. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.002 EDN: JTNJZG

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

M. V. Polonik¹, A. A. Manzybora¹

PROBLEMS OF LASER CLEANING OF THIN-WALLED CONSTRUCTIONS

¹*M. Polonik Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia*

Abstract. The article presents the results of modeling and numerical calculations of processes of laser removal of paints from the surface of metal parts. Theoretical studies of temperature fields in the area of processing by scanning laser radiation are presented, allowing practical tests to be carried out and the conditions under which the radioactive effect of the laser radiation causes minimal damage to thin-walled structures to be developed. The results obtained are reflected in the technology for cleaning of aircraft.

Keywords: laser cleaning, laser ablation, thin-walled structures, numerical modeling, temperature fields, laser radiation, aircraft.

Marina V. Polonik, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of irreversible deformation; e-mail: polonik@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4092-8957>; AuthorID: 5247

Alexander A. Manzybora, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Nonlinear Deformation Dynamics; e-mail: manzubor@iacp.dvo.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5060-5436>; AuthorID: 5243

to cite this article: Polonik M. V., Manzybora A. A. Problems of laser cleaning of thin-walled constructions // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 117–127. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.002 EDN: JTNJZG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Летательные аппараты не могут эффективно эксплуатироваться без лакокрасочных покрытий (ЛКП), так как их поверхность подвергается сложному воздействию многих факторов: широкий диапазон температурных перепадов воздушной атмосферы, интенсивная солнечная радиация, повышенная доля ультрафиолета и высокая концентрация озона на больших высотах, эрозийный износ, воздействие горючесмазочных веществ, гидрожидкостей и многое другое [1]. Таким образом, главной функцией ЛКП является защита металлических сплавов, образующих всю конструкцию самолетов. Однако, в процессе эксплуатации воздушных судов неизбежно возникает задача контролируемого удаления ЛКП с их обшивки. Регламентируются такие процедуры инструкциями разработчиков, изготовителями оборудования, отраслевыми центрами и основаны на использовании опасных химических или абразивных материалов [2], [3], [4]. В качестве химических веществ в таких процессах используются летучие органические соединения [2], [3], что приводит к образованию большого количества опасных отходов, подлежащих высокочатратной утилизации. В настоящее время лазерная очистка рассматривается как более эффективная и экологически безопасная технологическая операция [5].

В современной промышленности наиболее востребованными и эффективными являются волоконные лазеры [6], [7], [8]. Это связано с их небольшими габаритами, удобством в эксплуатации и возможностью проникания в сложно доступные места [9]. Кроме того, волоконные лазеры нового поколения характеризуются высоким качеством оптического излучения, высокой мощностью и скоростью сканирования по обрабатываемой поверхности [10].

В основе механизмов лазерной очистки лежат физико-химические процессы лазерного нагревания, испарения и абляции материала с образованием плазмы, а также быстрое тепловое расширение и возникновение ударных волн. Таким образом, для очистки представляет интерес весь спектр процессов взаимодействия лазерного излучения с веществом, в том числе и в жидкой среде, где процессы удаления загрязнений идут гораздо более эффективно при меньших мощностях излучения [11].

Отметим, что лазерное селективное удаление ЛКП является не кинетическим энергетическим процессом. Высокий уровень поглощения энергии происходит на поверхности материала покрытия и приводит к его разложению и удалению. Приложенная энергия в основном поглощается и используется для разложения краски, что в свою очередь должно привести к минимальному увеличению температуры основы покрытия. При этом происходит полное, селективное (послойное) удаление ЛКП с поверхности металла вплоть до основного материала. При удалении выбранных участков лазерные импульсы должны быть точно направлены и контролироваться. При этом количество импульсов на пятно является решающим [12], [13]. С каждым импульсом тонкий слой удаляется. Лазер может удалить выбранные слои краски слой за слоем. Данный результат

достигается при правильно подобранном режиме обработки за счет использования специального программного обеспечения, мощности лазерного излучения и подходящей оптической линзы.

В настоящей работе, для учета множества различных факторов, влияющих на ход технологического процесса лазерной очистки ЛКП с поверхности образца [14], изготовленного из элемента крыла самолета КБ Сухого, исследуются температурные поля в зоне ЛПИ при селективном удалении тонкого слоя краски иттербиевым волоконным лазером YLR-150/1500-QCW-MM-AC [13], [14], [15], [16]. Образцы из обшивки планера самолета [14] изготовлены из алюминиевого сплава толщиной 1 мм и имеют покрытие из материалов: анодный слой (22.67 мкм); грунт (30.09 мкм); краска серо-голубая (1240 мкм). Проведенные теоретические исследования и численные расчеты позволили провести практические испытания и разработать условия, при которых физическое воздействие энергии лазера наносит минимальные повреждения сплавам и композитам образца в технологии очистки планеров летательных аппаратов.

1. Исследование температурных полей в зоне обработки ЛКП лазерным излучением. Нагревание тела лазерным излучением описывается дифференциальным уравнением теплопроводности [17], граничное условие на поверхности задает действие поверхностного источника:

$$\frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} = \nabla^2 T(r, z, t), \quad -k \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{z=0} = \begin{cases} (1-R)q(r, t), & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad (1)$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиальное расстояние от точки облучаемой поверхности до оси луча; $\{x, y, z\}$ – прямоугольные декартовы координаты с началом в центре пятна ЛПИ на поверхности материала; ось z совпадает с осью луча, перпендикулярна нагреваемой поверхности и направлена в глубь материала; ∇^2 – оператор Лапласа; t – время; $q(r, t)$ – плотность мощности излучения на поверхности тела; R – коэффициент отражения металла в зоне воздействия ЛПИ $(1-R) = A$; $(1-R)q(r, t)$ – поглощенный удельный поток ЛПИ.

При моделировании процесса удаления ЛКП с поверхности обшивки ЛА существенную роль играют теплофизические параметры краски и образца из алюминиевого сплава (таб. 1).

Таким образом, согласно (1) и исходя из теплофизических характеристик краски (таб. 1) решение может быть построено согласно [17] при условии

$$\frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=\infty} = \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\infty} = \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = T_0,$$

$q(r) = q_{max} e^{-r^2/r_0^2}$, $q(t) = const$ на поверхности $r \neq 0$, $z = 0$ и на глубине облучаемого материала $r \neq 0$, $z \neq 0$ соответственно:

$$T(r, z) = 2A\sqrt{atk}^{-1} q_{max} e^{-r^2/r_0^2} + T_0, \quad r \neq 0, \quad z = 0, \quad q_{max} = P_0 / \int_0^{r_0} 2\pi e^{-r^2/r_0^2} r dr, \quad (2)$$

№	Теплофизические характеристики	Обозначение	Краска	Образец	Единицы измерения
1	Плотность материала	ρ	2045	2800	кг/м ³
2	Теплоемкость	c	1730	797	Дж/(кг°С)
3	Теплопроводность	k	0.3	140	Вт/(м°С)
4	Температуропроводность	$a=k/(c\rho)$	$8.47973 \cdot 10^{-8}$	$6.274 \cdot 10^{-5}$	м ² /с
5	Высота (толщина краски)	h	$2 \cdot 10^{-6} - 6 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	м
	Длина	d		0.08	м
	Ширина	b		0.01	м
6	Начальная температура	T_0	20	25	°С
7	Температура плавления	T_p		660	°С
8	Температура кипения	T_k		2500	°С
9	Коэффициент поверхностного поглощения ЛИ	A	0.6	0.28	

Таблица 1. Теплофизические характеристики краски и образца из алюминиевого сплава

$$T(r, z) = 2A\sqrt{atk}^{-1}q_{max}e^{-r^2/r_0^2}erfc[z/(2\sqrt{at})] + T_0, \quad r \neq 0, \quad z \neq 0. \quad (3)$$

В (2)-(3) q_{max} – максимальное значение плотности мощности лазерного воздействия по Гауссу, $erfc[z/(2\sqrt{at})]$ – интеграл дополнительной функции интеграла вероятности, P_0 , r_0 , τ – являются параметрами лазерной обработки таб. 2. Аддитивность функций (2)-(3) позволяет определить поле температур при скоростном сканировании лазерного пучка (ЛП) по поверхности материала с заданной скоростью сканирования v .

Для заданных параметров (таб. 1) проведена серия численных расчетов. Учитывалось, что при установившемся ($v = const$) равномерном режиме сканирования ЛП по поверхности – происходит равномерное перераспределение температур и соответственно областей проплавления и испарения краски. В таб. 2 представлены численные расчеты серий 1-4. Расчеты проводились для переменных параметров радиус пятна лазерного излучения r_0 и мощности лазерного излучения P_0 (таб. 2), постоянном времени воздействия ЛП (длительность импульса) $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ с и равномерной скорости $v = 1.5$ м/с. В таб. 2 T_h – расчетная температура на глубине h материала, T_b – расчетная температура на поверхности b материала.

На рис. 2 и рис. 1 представлены графические расчеты распределения температуры вглубь h материала и на его поверхности b соответственно (серия 1, таб. 2) при установившемся и равномерном процессе сканирования ЛП по поверхности материала.

На рис. 4 и рис. 3 представлены графические расчеты распределения температуры вглубь h материала и на его поверхности b соответственно (серия 1,

№	r_0 , м	P_0 , Вт	h , мкм	T_h , °С	b , мкм	T_b , °С
1	0.00005	185	2	>1000	≤ 120	>1000
			9	200	150	60
			13.5	21	≥210	20
2	0.00005	260	2	>2000	≤ 120	>1000
			10.5	200	140	60
			14	21	≥190	20
3	0.00015	185	2	>2000	≤ 290	>2000
			8.7	200	310	200
			12	20	≥590	20
4	0.00015	260	5	>2000	≤ 270	>2000
			8.5	200	300	200
			12	21	≥ 530	20

Таблица 2. Численные расчеты при заданных параметрах лазерной обработки r_0 и P_0

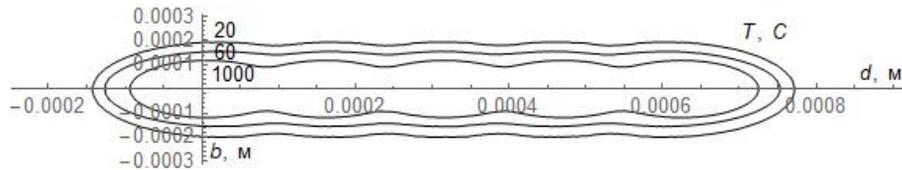


Рис. 1. Распределение температуры на поверхности b материала, при установившемся и равномерном процессе сканирования ЛП по поверхности материала

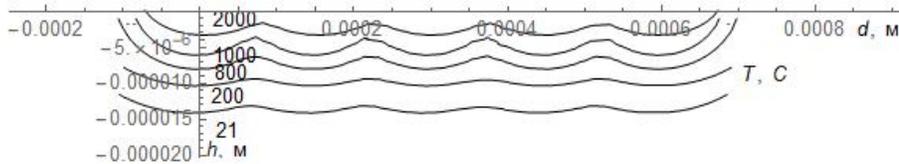


Рис. 2. Распределение температуры вглубь h материала, при установившемся и равномерном процессе сканирования ЛП по поверхности материала

таб. 2) при не установившемся и не равномерном процессе сканирования ЛП по поверхности материала.

Исследуемый материал красок является внешним защитным покрытием для конструкций. Величина теплопроводности краски мала и даже тонкий ее слой порядка 20 мкм на поверхности конструкции будет обладать достаточным тепловым сопротивлением, что и демонстрируют представленные расчеты.

Полученные численные результаты показали, не смотря на то, что температура на глубине 2 мкм выше 2000°С, на глубине 10 мкм температура составляет

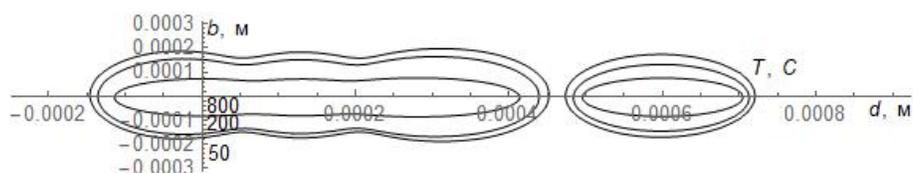


Рис. 3. Распределение температуры на поверхности b материала, при не установившемся и не равномерном процессе сканирования ЛП по поверхности материала

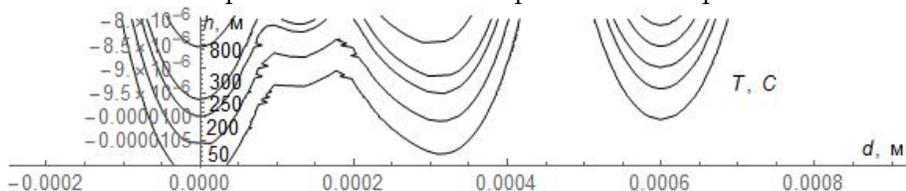


Рис. 4. Распределение температуры вглубь h материала, при не установившемся и не равномерном процессе сканирования ЛП по поверхности материала

порядка 200°C , в то время как на глубине 15 мкм температура не превосходит 20°C . Так же, согласно проведенным расчетам, температура на поверхности материала в окрестности 0.5 мм от радиуса пятна лазерного излучения не превышает 20°C , в то время как внутри лазерного пятна температура выше 2000°C . Таким образом, выбранный режим обработки лазерным воздействием, может быть безопасным для всей конструкции. Однако, при лазерной обработке многослойных материалов, необходим расчет температурного поля в каждом слое, так как теплофизические свойства и поглощательные способности контактирующих материалов не равны и изменяются скачком на границе прилегания слоев, что может приводить к смещению максимума температур от поверхности вглубь многослойного материала и перераспределению температур в зоне контакта, а, следовательно, и к перегреву одного из слоев конструкции [18], [19]. Более того, не смотря на многослойное нанесение красок, слои могут быть не равномерными и при их очистки в области лазерной абляции могут возникать области не покрытые краской - это области конструкционного алюминиевого сплава [19]. С этой целью было предложено провести расчеты, представленные ниже.

2. Распространение тепла в образце из алюминиевого сплава под воздействием лазерного излучения. Расчет распределения поля температур в обрабатываемом образце из алюминиевого сплава был выполнен с использованием метода конечных элементов системы ANSYS [20]. С использованием анализа Transient Thermal построено движение ЛП по поверхности с заданной скоростью v . Модельные соотношения (1) описывают поведение среды в температурном анализе. Для задания граничных условий в области падения ЛП:

$$T(x, y, t)|_{z=0} = \begin{cases} \frac{AP_0}{\pi r_0^2(1-e^{-r_0})} e^{-(x^2+(y-v_y t-y_0)^2)/(x_0^2+y_0^2)}, & x^2 + (y - v_y t - y_0)^2 \leq r_0^2 \\ 0, & x^2 + (y - v_y t - y_0)^2 > r_0^2 \end{cases}, \quad (4)$$

На нижней границе обрабатываемого образца задается конвективный теплообмен со средой. Расчеты проведены в рамках модели изотропной теплопроводности с параметрами материала таб. 1 и заданных $r_0=0.0001$ м, $P_0=185$ W. Результаты численного решения представлены на рис. 5 и рис. 6 в виде распределения температурных полей на образце. На рис. 5. представлено распределение температур в начале движения ЛП по поверхности образца, на рис. 6 - в конце движения ЛП по поверхности образца.

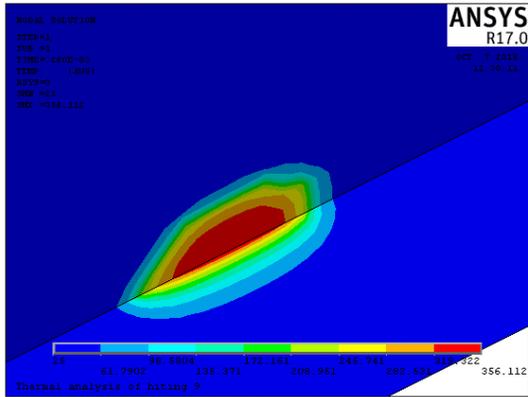


Рис 5. Распределение температур в образце из алюминиевого сплава в начале движения ЛП по поверхности образца

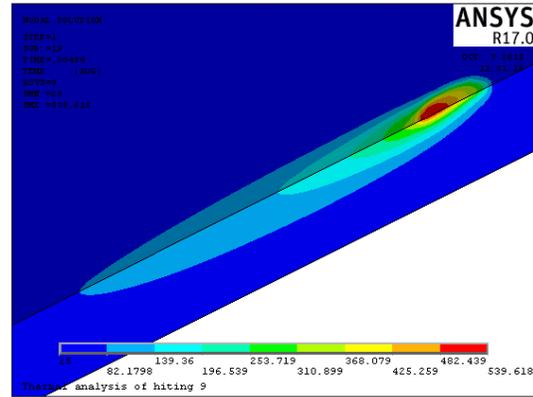


Рис 6. Распределение температур в образце из алюминиевого сплава в конце движения ЛП по поверхности образца

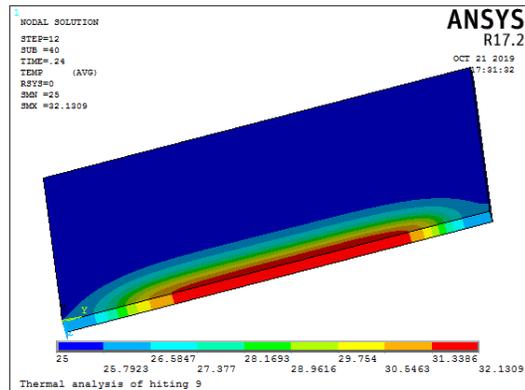
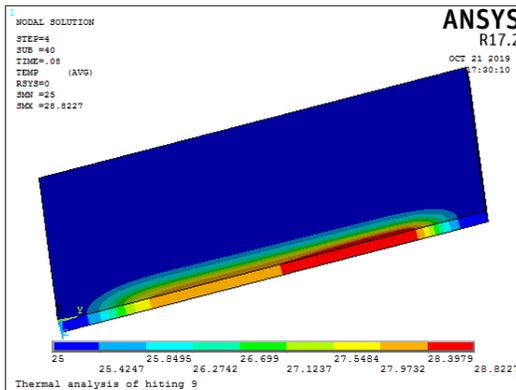


Рис 7. Распределение температур в образце из алюминиевого сплава в процессе 1 и 5 проходов ЛП по обрабатываемой поверхности

Для оценки возможного возникновения температурных деформаций, было рассчитано, на сколько градусов нагреется материал и за сколько проходов. Для увеличения точности численного решения в области движения ЛП была задана частая сетка. Пятно лазера возвращали в начало, смещали от первоначальной линии прохода на величину радиуса и начинали следующий проход. Распределение температур в образце из алюминиевого сплава в процессе 1 и 5 проходов ЛП по обрабатываемой поверхности представлены на рис. 7.

Согласно проведенным расчетом установлено, что значительный прогрев металла осуществляется только в малой окрестности падения ЛП в глубину на несколько микрон, причем на малый промежуток времени. В случае большого числа проходов ЛП, из расчетов следует, что максимальная температура в пятне практически не изменяется. Согласно проведенным вычислениям при выбранных параметрах процесса, средняя температура в процессе длительной обработки с несколькими проходами ЛП последовательно смещающегося от предыдущего прохода, растет незначительно, что не должно привести к возникновению температурных деформаций.

Таким образом, из проведенного вычислительного эксперимента следует, что при выбранных параметрах воздействия, длительность обработки не приводит к значительному повышению средней температуры образца до величин, способных вызывать нежелательные эффекты, такие как пластические деформации.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Выполнены численные расчеты процессов взаимодействия лазерного излучения с указанным лакокрасочным покрытием. Полученные результаты свидетельствуют о том, что расчетные параметры лазерного излучения не должны оказывать существенного воздействия на материал основы алюминиевого сплава толщиной 1 мм. Результаты моделирования процесса распространения тепла в металлическом образце под воздействием лазерного излучения показали, что при расчетных параметрах воздействия лазера на металлическую поверхность длительность обработки не приводит к значительному повышению средней температуры образца до величин, способных вызывать пластические деформации.

Полученные результаты нашли свое отражение в технологии очистки планеров летательных аппаратов.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. М. В. Полоник математическое моделирование, численные расчеты, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, обзор литературы по теме статьи, А. А. Манцыбора математическое моделирование и численные расчеты в ANSYS, написание текста рукописи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема No FWFw-2021-0005).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. M. V. Polonik mathematical modeling, numerical calculations, writing the text of the manuscript, agreeing of the final version of the manuscript, the literature on the topic of the article, A. A. Manzybora mathematical modeling and numerical calculations in ANSYS, writing the text of the manuscript, editing the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The research was carried out within the state assignment of IACP FEB RAS (Theme FWW-2021-0005).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кондрашов Э. К., Семенова Л. В., Кузнецова В. А., др. Развитие авиационных лакокрасочных материалов. Энциклопедический справочник. Москва : ВИАМ, 2012. С. 5.
- [2] Ицко Э. Ф., Дринберг А. С. Удаление лакокрасочных покрытий. Москва : ЛКМ-пресс, 2010. С. 116.
- [3] Ицко Э. Ф., Дринберг А. С. Смывки для удаления лакокрасочных покрытий // Промышленная окраска. 2003. № 4. С. 2–6.
- [4] Семенова Л. В., Новикова Т. А., Нефедов Н. И. Изучение смывающей способности смывок для удаления систем лакокрасочных покрытий // Авиационные материалы и технологии. 2017. № 1(46). С. 32–37.
- [5] Лазерная очистка // РИТМ машиностроения. 2019. № 7.
- [6] Ion J. Laser Processing of Engineering Materials: Principles, Procedure and Industrial Application. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [7] Morey B. Laser welding applications expand // Manufacturing Engineering. 2014. no. 152(3). P. 81–93.
- [8] Kawahito Y., Mizutani M., Katayama S. High quality welding of stainless steel with 10 kW high power fibre laser // Science and Technology of Welding and Joining. 2009. no. 14(4). P. 288–294.
- [9] Вейко В. П., Шахно Е. А. Сборник задач по лазерным технологиям. Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2007. С. 66.
- [10] Рыкалин Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. Москва : Машиностроение, 1951. С. 297.
- [11] Вейко В. П., Смирнов В. Н., Чирков А. М., др. Лазерная очистка в машиностроении и приборостроении. Санкт-Петербург : НИУ ИТМО, 2013. С. 103.
- [12] Анисимов С. И., Лукьянчук Б. С. Избранные задачи теории лазерной абляции // Успехи физических наук. 2002. № 172. С. 301–333.
- [13] Polonik M. V., Dudko O. V. Selection of the Optimal Parameters of the Process for Thermal Laser Treatment of Metals for Creating the Molten Pool with a Required Depth // CEUR-WS. No. 1623. 2016. P. 768–778.
- [14] Кульчин Ю. Н., Анисимов Н. Ю., Ионов А. А., др. Роботизированная лазерная влажная очистка тонкостенных конструкций // Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук. 2021. № 4. С. 30–39.
- [15] Yatskom D. S., Polonik M. V., Dudko O. V. Optimization of the fiber laser parameters for local high-temperature impact on metal // Proc. SPIE. No. 10176. 2016.
- [16] Кульчин Ю. Н., Змеу С. Б., Субботин Е. П., др. Волоконные лазеры // Вестник ДВО РАН. 2015. № 3(181). С. 67–78.
- [17] Малащенко А. А., Мезенов А. В. Лазерная сварка в металлах. Москва : Машиностроение, 1984. С. 44.

- [18] Рыкалин Н. Н., Углов А. А. Температурное поле разнородных материалов при сварке встык поверхностным источником // Физика и химия обработки материалов. 1969. № 5. С. 12–22.
- [19] Рыкалин Н. Н., Углов А. А., др. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: Справочник. Москва : Машиностроение, 1985. С. 496.
- [20] ANSYS Theory Reference, Structures. SAS IP, Inc.

REFERENCES

- [1] Kondrashov E. K., Semenova L. V., Kuznetsova V. A. et al. Development of Aircraft Paintwork Materials. No. 5. Moscow : Science and Technologies, 2012. P. 49–54.
- [2] Itcko E. F., Drinberg A. S. Removal of Paint Coatings. Moscow : LKMP-Press, 2010. P. 116.
- [3] Itcko E. F., Drinberg A. S. Removers for Removing Paint and Varnish Coatings // Industrial Painting. 2003. no. 4. P. 2–6.
- [4] Semenova L. V., Novikova T. A., Nefedov N. I. Study of Removing Ability of Removers for Paint Systems Removal // Aviation Materials and Technologies. 2017. no. 1(46). P. 32–37.
- [5] Laser Cleaning // Rhythm of Machinery. 2019. no. 7.
- [6] Ion J. Laser Processing of Engineering Materials: Principles, Procedure and Industrial Application. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [7] Morey B. Laser Welding Applications Expand // Manufacturing Engineering. 2014. no. 152(3). P. 81–93.
- [8] Kawahito Y., Mizutani M., Katayama S. High-Quality Welding of Stainless Steel with 10 kW High Power Fibre Laser // Science and Technology of Welding and Joining. 2009. no. 14(4). P. 288–294.
- [9] Veiko V. P., Shakhno E. A. Collection of Problems on Laser Technologies. Saint Petersburg : Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, 2007. P. 66.
- [10] Rykalin N. N. Calculations of Thermal Processes During Welding. Moscow : Innovative Engineering, 1951. P. 297.
- [11] Veiko V. P., Smirnov V. N., Chirkov A. M., Shakhno E. A. Laser Cleaning in Mechanical Engineering and Instrument Making. Saint Petersburg : ITMO University, 2013. P. 103.
- [12] Anisimov S. I., Lukyanchuk B. S. Selected Problems of Laser Ablation Theory // Physics-USpekhi. 2002. Vol. 45, no. 3. P. 301–333. DOI: 10.1070/PU2002v045n03ABEH000994.
- [13] Polonik M. V., Dudko O. V. Selection of the Optimal Parameters of the Process for Thermal Laser Treatment of Metals for Creating the Molten Pool with a Required Depth // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1623. 2016. P. 768–778.
- [14] Kulchin Yu. N., Anisimov N. Yu., Ionov A. A. The Robot-Assisted Laser Wet Cleaning of Thin-Walled Constructions // Vestnik of the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences. 2021. no. 4. P. 30–39.
- [15] Yatskom D. S., Polonik M. V., Dudko O. V. Optimization of the Fiber Laser Parameters for Local High-Temperature Impact on Metal // Proceedings of SPIE. Vol. 10176. 2016.
- [16] Malashchenko A. A., Mezenov A. V. Laser Welding in Metals. 1984. P. 44.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА СВЯЗАННОЙ ПЛОСКОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В УЛЬТРАИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спиновых перемещений в ультраизотропном микрополярном термоупругом теле и вычисляются их волновые числа. Ультраизотропная модель трактуется как дважды приведенный вариант полуизотропного тела. Проанализированы порядки членов дифференциальных уравнений в частных производных связанной микрополярной термоупругости по шкале, связанной с микро/нанодлиной. Найдены и проанализированы характеристические уравнения для волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих продольных (бикубическое уравнение) и поперечных (биквадратное уравнение) волн. Получены алгебраические выражения для корней характеристических уравнений и отделены нормальные волновые числа с положительной действительной частью.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, ультраизотропное тело, трансляционное смещение, спиновое смещение, плоская гармоническая по времени волна, продольная волна, поперечная волна, волновое число, комплексная амплитуда, фазовая плоскость, дисперсионное уравнение, вектор поляризации.

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116

для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Волновые числа связанной плоской термоупругой волны в ультраизотропной среде // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 128–139. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.009 EDN: OLGXFN

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

WAVENUMBERS OF COUPLED PLANE THERMOELASTIC WAVE IN ULTRAISOTROPIC MEDIUM

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In present paper, the problems of propagation of plane harmonic coupled waves of temperature increment, translational and spinor displacements in an ultrasotropic micropolar thermoelastic solid are considered and their wavenumbers are calculated. The ultrasotropic model is treated as a doubly reduced version of a semi-isotropic solid. The orders of terms of partial differential equations of coupled micropolar thermoelasticity are analyzed with respect to a micro/nanolength scale. The characteristic equations for wavenumbers of plane harmonic coupled thermoelastic longitudinal (bicubic equation) and transverse (biquadratic equation) waves are found and analyzed. Algebraic expressions for the roots of the characteristic equations are obtained and normal wavenumbers with a positive real part are separated.

Keywords: micropolar thermoelasticity, ultrasotropic solid, translational displacement, spinor displacement, plane time-harmonic wave, longitudinal wave, transverse wave, wavenumber, complex amplitude, phase plane, dispersion equation, polarization vector.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116

to cite this article: *Murashkin E. V., Radayev Y. N. Wavenumbers of coupled plane thermoelastic wave in ultrasotropic medium // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 128–139. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.009 EDN: OLGXFN*

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Модели микрополярных континуумов основаны на понятиях спинорных и трансляционных перемещений, определяющих движение элемента деформируемой среды. Указанный способ моделирования микрополярного тела впервые был описан в работе братьев Коссера [1]. Последующие многочисленные работы по микрополярной упругости появились только через 50 лет. Среди них следует отдельно отметить работы отечественных исследователей [2, 3], а также работы немецких авторов [4–7]. Векторы спинорных и трансляционных перемещений могут быть введены в теорию способами известными в теоретической механике как теоремы Шаля о поворотах твердого тела. В известных авторам публикациях построение микрополярных теорий основывается на второй теореме Шаля, позволяющая рассматривать векторы спинорных и трансляционных перемещений как независимые векторные/псевдовекторные поля.

Математическая модель микрополярного тела фиксируется квадратичной энергетической формы потенциала напряжений [4, 8–23]. Задание потенциала для общего анизотропного случая и последующая его редукция сначала к гемитропному телу, а затем к изотропному и, в конце концов, к ультраизотропному телу, позволяет наиболее простым и естественным способом получить замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно температурного инкремента и перемещений (трансляционных и спинорных). Система уравнений гемитропного микрополярного термоупругого тела (CGNI)¹ формулируется в терминах определяющих постоянных (G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, L — характерная нано/микродлина² и т.д.). В указанную систему дифференциальных уравнений входят следующие «доминирующие» частные производные максимального порядка (в данной случае — второго):

$$\nabla \cdot \nabla, \quad \nabla \nabla \cdot, \quad \nabla \cdot \partial, \quad \partial^2. \quad (1)$$

Некоторые из них включают множитель L^2 . L — инфинитезимальная величина, которой в теориях С, CGNI/II/III присваивается первый порядок малости, т.е. $L = o(1)$. Указанное обстоятельство говорит о гиперсингулярной возмущенности системы дифференциальных уравнений, формулирующей модель полуизотропного микрополярного термоупругого тела. Что касается теплопередачи в полуизотропной среде CGNI, то соответствующее уравнение включает слагаемое

$$L^2 \nabla \cdot \partial \phi,$$

¹Акроним CGNI соответствует классификации теплопроводящих тел, подробно изложенной в работе [24]. Литера С отсылает к Cosserat & Cosserat [1].

²Характерная микродлина может быть введена в определяющие уравнения моделей С, CGNI различными способами, один из которых описан в работах Нейбера (см., например, [4]). Несмотря на очевидный физический смысл указанного определяющего модуля, теории, использующие материальные постоянные, принятые в данной работе, пока не получили должного распространения в научной литературе.

где ϕ — спинвектор. Учет этого слагаемого имеет смысл, только если оно будет конечным по шкале бесконечно малых, привязанной к характерной микро/нанодлине L , т.е.

$$L^2 \nabla \cdot \partial \phi = O(1),$$

т.е. расходимость скоростей микроповоротов достаточно велика. Тем самым предлагается новый подход к моделированию С, CGNI тел.

Важным классом задач в теориях волновой термомеханики микрополярных сред являются задачи распространения плоских гармонических волн в термоупругих средах. Этот класс задач подготавливает к идентификации полуизотропных микрополярных тел. Волновым задачам термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [8, 17–23, 25–28]. Тем не менее следует отметить, что некоторые проблемы, существенные как для теории, так и для прикладных вопросов, до сих пор остаются не исследованными. В первую очередь это касается вопросов ориентации в пространстве (поляризации) для плоских гармонических волн, что препятствует применению теории микрополярной термоупругости в экспериментах и не позволяет говорить о завершенности рассматриваемых исследований. Следует отдельно отметить, что предмет настоящей работы, связанный с распространением гармонических волн в ультраизотропной среде, никогда ранее не исследовался. Изложение материала настоящей статьи в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, изложенные в предыдущих статьях [9–23].

2. Распространение плоских связанных гармонических волн в ультраизотропном термоупругом микрополярном теле. Связанная система уравнений ультрагемитропной микрополярной термоупругости может быть записана векторной форме [29]:

$$\begin{cases} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \phi - \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \nabla \theta = \frac{1}{2} \rho G^{-1} \ddot{\mathbf{u}}, \\ L^2(1+c_3) \nabla \nabla \cdot \phi + 2(\phi - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \rho \mathfrak{J} G^{-1} \ddot{\phi}, \\ \nabla \cdot \nabla \theta - C \lambda^{-1} \partial \cdot \theta - 2G \lambda^{-1} \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \nabla \cdot (\partial \mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где выполнена замена $C\theta_0^{-1} \rightarrow C$, $\lambda\theta_0^{-1} \rightarrow \lambda$.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (2), записанная в терминах вектора трансляционных перемещений \mathbf{u} , вектора спинорных перемещений ϕ и температурного инкремента θ служит основой для исследования сильных и слабых разрывов в микрополярной гемитропной среде, а также волновых процессов, которые в рассматриваемом случае характеризуются одновременным распространением прямых и зеркальных мод.

Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической плоской волны с частотой ω . В этом случае поля температурного инкремента, трансляционных и спиновых перемещений можно представить в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\Phi, \quad \phi = \mathbf{S}\Phi, \quad \theta = B\Phi, \quad \Phi = e^{i \arg \Phi}, \quad \arg \Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \quad (3)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор; \mathbf{r} — радиус вектор; ω — циклическая частота гармонической волны; \mathbf{A} , \mathbf{S} — векторы комплексных амплитуд трансляционных и спиновых перемещений соответственно; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента; Φ — фазовый множитель; $\arg \Phi$ — фаза плоской волны. Уравнение $\arg \Phi = \text{const}$ задает фазовые плоскости. При этом, для существования связанной термоупругой волны необходимо выполнение следующего условия

$$B \neq 0. \quad (4)$$

Отметим, что $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$, где k — комплексное число, \mathbf{s} — вещественный единичный вектор.

После подстановки (3) в систему уравнений (2), связывающую волновой вектор \mathbf{k} , циклическую частоту ω , векторы поляризации плоской волны \mathbf{A} , \mathbf{S} и амплитуду B , получим:

$$\begin{cases} \rho G^{-1} \omega^2 \mathbf{A} - 2(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - \\ \quad - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - 2\alpha(1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1} i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathcal{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}] \mathbf{S} - 2(1 + c_3) \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) - 2L^{-2} i\mathbf{k} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \\ (C\lambda^{-1} i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1} \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \omega(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Представим векторы комплексных амплитуд трансляционных (\mathbf{A}) и спиновых (\mathbf{S}) перемещений в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}, \quad (6)$$

где векторы \mathbf{A}_\perp и \mathbf{S}_\perp расположены в плоскости перпендикулярной волновому вектору \mathbf{k} , т.е. в плоскости постоянной фазы $\arg \Phi = \text{const}$.

Подставив представление (6) в систему (5), получим

$$\begin{cases} [\rho G^{-1} \omega^2](\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1} A_\parallel k^2 \mathbf{k} - \\ \quad - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp - 2\alpha(1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1} i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathcal{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}](\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 + c_3) S_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-2} i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp = \mathbf{0}, \\ (C\lambda^{-1} i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1} \alpha \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \omega A_\parallel k^2 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Нетрудно заметить, что система (7) распадается на две независимые системы уравнений, отдельно для продольных и поперечных волн.

3. Волновые числа связанной продольной плоской гармонической волны. Проекция уравнений системы (5) на волновой вектор \mathbf{k} представляет собой замкнутую систему трех линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}k^2\right)A_{\parallel} - 2\alpha_* \frac{G(1+\nu)}{\rho(1-2\nu)}iB = 0, \\ [\omega^2 + 4(\rho\mathfrak{J})^{-1}G - 2(1+c_3)(\rho\mathfrak{J})^{-1}GL^2k^2]S_{\parallel} = 0, \\ (C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\alpha_* \frac{1+\nu}{1-2\nu}\omega A_{\parallel}k^2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для существования нетривиального решения алгебраической системы (8) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - [V_{\parallel}]^2k^2 & 0 & -ia_2 \\ 0 & \omega^2 + \Omega - [V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2k^2 & 0 \\ -a_4\omega k^2 & 0 & ia_6\omega - k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} [V_{\parallel}]^2 &= \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}, & [V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2 &= \frac{2GL^2(1+c_3)}{\rho\mathfrak{J}}, & a_2 &= 2\alpha_* \frac{G(1+\nu)}{\rho(1-2\nu)}, \\ \rho\mathfrak{J}\Omega &= 4G, & \lambda a_4 &= 2G\alpha_* \frac{1+\nu}{1-2\nu}, & \lambda a_6 &= C. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что уравнение (9) совпадает по форме (но не полностью идентично) с аналогичным для изотропного термоупругого тела [17].

Алгебраическое уравнение (9) представляет собой бикубическое уравнение относительно, подлежащего определению, волнового числа k :

$$Q_6k^6 + Q_4k^4 + Q_2k^2 + Q_0 = 0, \quad (11)$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} Q_6 &= a_2^2\mathfrak{J} - [V_{\parallel}V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2, & Q_0 &= ia_6\omega^3(\omega^2 + \Omega), \\ Q_4 &= \left([V_{\parallel}]^2 + [V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2\right)\omega^2 + [V_{\parallel}]^2\Omega - i(a_6Q_6 + a_2a_4[V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2)\omega, \\ Q_2 &= -\omega^2\Omega - \omega^4 + i[a_2a_4 - a_6([V_{\parallel}]^2 + [V_{\parallel}^{\mu\mu}]^2)]\omega^3 - \\ &\quad - i(a_6[V_{\parallel}]^2 - a_2a_4)\omega\Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Корни уравнения (11) будут иметь вид

$$\begin{aligned} k_{1,2,3} &= \sqrt{Y_{1,2,3} - \frac{Q_4}{3Q_6}}, \\ k_4 &= -k_1, & k_5 &= -k_2, & k_6 &= -k_3. \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} Y_1 &= a + b, & Y_{2,3} &= -\frac{1}{2}(a + b) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(a - b), \\ a &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, & b &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, & \mathfrak{D}_1 &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}. \end{aligned} \quad (14)$$

$$p = \frac{2Q_6Q_2 - Q_4^2}{Q_6^2}, \quad q = \frac{2Q_4^3 - 9Q_6Q_4Q_2 + 27Q_6^2Q_0}{27Q_6^3}. \quad (15)$$

Достаточно выбрать одно из значений квадратного корня $\sqrt{\mathfrak{D}_1}$, а для каждого из трех значений величины a необходимо подбирать такое значение b , для которого выполняется условие

$$ab = -p/3.$$

Значения волновых чисел (13), полученные при исследовании бикубического (11) уравнения, можно впоследствии использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости $k = \text{Re}k + i\text{Im}k$ ($\text{Re}k > 0$).

4. Волновые числа холодной атермической поперечной плоской гармонической волны. Рассмотрим проекции системы линейных уравнений (7) ортогональные направления в фазовой плоскости $\arg \Phi = \text{const}$. Введем рассмотрение два единичных взаимно ортогональных вектора \mathbf{i} и \mathbf{j} , расположенных в фазовой плоскости. Тогда векторы \mathbf{A}_\perp и \mathbf{S}_\perp можно представить в форме

$$\mathbf{A}_\perp = A_{1\perp}\mathbf{i} + A_{2\perp}\mathbf{j}, \quad \mathbf{S}_\perp = S_{1\perp}\mathbf{i} + S_{2\perp}\mathbf{j}. \quad (16)$$

Проекция системы линейных уравнений (7) на орты \mathbf{i} и \mathbf{j} примут вид

$$\begin{aligned} \omega^2 A_{1\perp} + 2i\rho^{-1}GkS_{2\perp} &= 0, \\ \omega^2 A_{2\perp} - 2i\rho^{-1}GkS_{1\perp} &= 0, \\ [\mathfrak{J}\omega^2 + 4\rho^{-1}G]S_{1\perp} + 2i\rho^{-1}GkA_{2\perp} &= 0, \\ [\mathfrak{J}\omega^2 + 4\rho^{-1}G]S_{2\perp} - 2i\rho^{-1}GkA_{1\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений (17) необходимо и достаточно, чтобы следующий определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & ia_8k \\ 0 & \omega^2 & -ia_8k & 0 \\ 0 & ia_8k & \omega^2\mathfrak{J} + 2a_8 & 0 \\ -ia_8k & 0 & 0 & \omega^2\mathfrak{J} + 2a_8 \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

где введены обозначения:

$$a_8\rho = 2G. \quad (19)$$

Отметим, что в отличие от аналогичного уравнения для полуизотропного и изотропного CGNI тел волновые числа k не входят в элементы главной диагонали \mathbf{A} . Кроме того, видно, что характерные определяющие числа $[V_\perp^\mu]^2 = G(1 + c_1)\rho^{-1}$ и $[V_\perp^{\mu\mu}]^2 = G(1 + c_2)(\rho\mathfrak{J})^{-1}$, равны нулю для ультраизотропного тела.

Волновые числа поперечных волн вещественны $\text{Im } k = 0$, что физически очевидно для атермических волн, т.е. связано с “атермичностью” поперечной волны и с отсутствием потери энергии при ее распространении и элиминированием термической составляющей. В этом случае транспонированная матрица (18) комплексно-сопряжена исходной, т.е. является Эрмитовой.

Алгебраическое уравнение (18) представляет собой биквадратное уравнение относительно квадрата волнового числа k :

$$a_8^4 k^4 - 4a_8^3 \mathfrak{J} k^2 \omega^2 + 4a_8^2 \mathfrak{J}^2 \omega^4 - 2a_8^2 \mathfrak{J} k^2 \omega^4 + 4a_8 \mathfrak{J}^2 \omega^6 + \mathfrak{J}^2 \omega^8 = 0 \quad (20)$$

или

$$(a_8^2 k^2 - 2a_8 \omega^2 - \mathfrak{J} \omega^4)^2 = 0. \quad (21)$$

Вещественные корни уравнения вычисляются согласно соотношениям:

$$a_8 k_{1,2,3,4} = \pm \omega \sqrt{\mathfrak{J} \omega^2 + 2a_8}. \quad (22)$$

Откуда следует, что имеется кратный вещественный корень

$$a_8 k_1 = a_8 k_2 = \omega \sqrt{\mathfrak{J} \omega^2 + 2a_8}, \quad (23)$$

являющийся нормальным волновым числом.

Отметим, что волновое число (23) будет всегда вещественным, т.к.:

$$a_8 = 2G\rho^{-1} > 0. \quad (24)$$

5. Заключение. В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в ультраизотропном термоупругом микрополярном CGNI теле. Ультраизотропная модель трактуется как результат двукратно приведенной модели полуизотропного тела.

- (1) Получена связанная система дифференциальных уравнений с частными производными в терминах вектора трансляционных перемещений, вектора спинорных перемещений и температурного инкремента для микрополярного ультраизотропного тела.
- (2) Проанализированы порядки членов в дифференциальных уравнениях с частными производными связанной микрополярной термоупругости по шкале бесконечно малых привязанной к характерной микро/нанодлине.
- (3) Найдены и проанализированы алгебраические уравнения для волновых чисел продольных (бикубическое уравнение) и поперечных связанных волн (биквадратное уравнение). Волны последнего типа — холодные атермические, никак не связанные с тепловыделением.
- (4) Волновые числа продольных гармонических волн оказываются комплексными, в силу производства энтропии при распространении тепла.
- (5) Вычислены волновые числа поперечных гармонических волн, которые оказываются вещественными. Найдено двукратное нормальное волновое число поперечных волн.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // *Soviet Physics-Solid State*. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
- [3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
- [4] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [5] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [8] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [9] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [10] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.

- [12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [15] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [16] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [17] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [18] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [19] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [20] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [21] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [24] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // Journal of elasticity. 1993. Vol. 31, no. 3. P. 189–208.
- [25] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [26] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.

- [27] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
- [28] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *International Journal of Engineering Science*. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Wavenumbers of Doublet and Triplet Plane Thermoelastic Wave in Ultrasotropic Micropolar Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 6. P. ??

REFERENCES

- [1] Cosserat E. M. P., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // *Soviet Physics-Solid State*. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
- [3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
- [4] Günther W. *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums* // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [5] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [8] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [9] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [10] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and ductility*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

- [15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [17] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [18] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [19] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [20] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [21] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [22] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [23] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [24] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // *Journal of elasticity*. 1993. Vol. 31, no. 3. P. 189–208.
- [25] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // *Int. J. Eng. Sci.* 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [26] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [27] Achenbach J. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
- [28] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *International Journal of Engineering Science*. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Wavenumbers of Doublet and Triplet Plane Thermoelastic Wave in Ultrasotropic Micropolar Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 6. P. ??

Е. В. Мурашкин

ОБОБЩЕННЫЕ ФИГУРЫ НАЯ ДЛЯ УЛЬТРАГЕМИТРОПНЫХ И УЛЬТРАИЗОТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей статье обсуждаются вопросы построения фигур Ная для микрополярных тел. Из общего анизотропного микрополярного упругого тела редуцируются к гемитропному, а затем к ультрагемитропному и, окончательно, к ультраизотропному микрополярному телу. Определяющие тензоры четвертого ранга преобразуются к двумерной матричной форме. Итоговые фигуры Ная для рассматриваемых микрополярных тел получаются путем объединения элементарных фигур для определяющих тензоров. Получены фигуры Ная, графически представляющие гемитропное, ультрагемитропное и ультраизотропное микрополярное упругое тело и связями между компонентами асимметричных определяющих тензоров.

Ключевые слова: микрополярная среда, упругий потенциал, определяющий тензор, гемитропное микрополярное тело, ультрагемитропность, ультраизотропность, фигура Ная, матричное представление

Мурашкин Евгений Валерьевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

для цитирования: Мурашкин Е. В. Обобщенные фигуры Ная для ультрагемитропных и ультраизотропных микрополярных упругих тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 3(61). С. 140–153. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.010 EDN: QFDKXY

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

E. V. Murashkin

GENERALIZED NYE FIGURES FOR ULTRAHEMITROPIC AND ULTRAISOTROPIC MICROPOLAR ELASTIC SOLIDS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. In present paper, the construction of Nye figures for micropolar solids is discussed. A general anisotropic micropolar elastic solid is reduced to a hemitropic, then to an ultrahemitropic, and finally to an ultraisotropic micropolar solid. The constitutive tensors of the fourth rank are transformed to a two-dimensional matrix form. The final Nye figures for the considered micropolar solids are obtained by combining the elementary figures for the constitutive tensors. We obtain Nye figures that graphically represent a hemitropic, ultrahemitropic, and ultraisotropic micropolar elastic solid and the couples between the components of the asymmetric constitutive tensors.

Keywords: micropolar medium, elastic potential, constitutive tensor, hemitropic micropolar solid, ultrahemitropy, ultraisotropy, Nye figure, matrix representation

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

to cite this article: Murashkin E. V. Generalized Nye figures for ultrahemitropic and ultraisotropic micropolar elastic solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 3(61). p. 140–153. DOI: 10.37972/chgpu.2024.61.3.010 EDN: QFDKXY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение и предварительные сведения В современной инженерной практике все большее применение находят конструкционные метаматериалы и биоккомпозиты, обладающие сложной микроструктурой [1–3]. Микро- и наноструктурные состояния таких материалов зачастую реагируют на изменение ориентации координатного базиса трехмерного пространства. Математическое моделирование указанных метаматериалов требует привлечения аппарата микрополярной термомеханики [4–8].

Линейное анизотропное микрополярное тело, характеризующееся 171 определяющими постоянными, может быть редуцировано с помощью специальных координатных представлений [9–12] к гемитропному, а затем к ультрагемитропному и, окончательно, к ультраизотропному.

В настоящей работе метод матричного представления Ная [13–21] применяется к асимметричным тензорам четвертого, для последующего построения фигур Ная для асимметричных моделей гемитропного, ультрагемитропного и ультраизотропного микрополярного упругого тела.

Изложение настоящей статьи базируется на результатах, терминологии и понятиях предыдущих публикаций [22–36].

2. Микрополярный упругий потенциал силовых и моментных напряжений. Рассмотрим трехмерное Евклидово пространство с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат x_i . Зададим микрополярный упругий потенциал \mathcal{U} , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема $d\tau$, с естественными тензорными асимметричными аргументами в виде

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{sm}, \kappa_{sm}), \quad (1)$$

где ϵ_{sm} — асимметричный тензор деформации; κ_{sm} — асимметричный тензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал в случае использования инвариантного элемента объема является абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим ни от каких преобразований трехмерного пространства.

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела энергетическая форма в произвольной системе координат можно принять в виде:

$$2\mathcal{U} = H_{1\ islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_{2\ islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + H_{3\ islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}. \quad (2)$$

Отметим, что единственным определяющим тензором четвертого ранга компоненты которого оказываются чувствительными к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства является определяющий тензор $H_{3\ islm}$.

Для определяющих гемитропных тензоров и тензоров координатные представления [9] инвариантные относительно группы вращений получаются в форме [12]

$$\begin{aligned} H_{1\ islm} &= a_1 g_{is} g_{lm} + b_1 g_{il} g_{sm} + c_1 g_{im} g_{sl}, \\ H_{2\ islm} &= a_2 g_{is} g_{lm} + b_2 g_{il} g_{sm} + c_2 g_{im} g_{sl}, \\ H_{3\ islm} &= a_3 g_{is} g_{lm} + b_3 g_{il} g_{sm} + c_3 g_{im} g_{sl}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $a_{\mathbf{a}}, b_{\mathbf{a}}, c_{\mathbf{a}}$, ($\mathbf{a} = 1, 2, 3$) — девять определяющих скаляров гемитропного микрополярного упругого тела. “Метаиндекс” \mathbf{a} — нумерует определяющие скаляры. С точки зрения тензорной алгебры $a_{\mathbf{a}}, b_{\mathbf{a}}, c_{\mathbf{a}}$, как минимум, являются гемитропными (гемитропными) инвариантами.

Вычислим компоненты определяющих тензоров (3) в декартовой системе координат. Для гемитропного упругого тела ненулевыми компонентами будут:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1111} &= \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2222} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3333} = a_{\mathbf{a}} + b_{\mathbf{a}} + c_{\mathbf{a}}, \\ \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1122} &= \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2211} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1133} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3311} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2233} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3322} = a_{\mathbf{a}}, \\ \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1221} &= \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2112} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1331} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3113} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2332} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3223} = b_{\mathbf{a}}, \\ \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1212} &= \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2121} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1313} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3131} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2323} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3232} = c_{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Оставшиеся 60 компонент в каждом из определяющих тензоров, не указанные в (4), будут равны нулю.

Полуизотропное микрополярное тело назовем ультрагемитропным, если компоненты его определяющих тензоров вообще не изменяются ни при каких преобразованиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. являются тензорами с постоянными компонентами [10–12]. Учитывая представление для тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами [10], определяющие тензоры можно представить в виде

$$H_{\mathbf{c}\ islm} = a_{\mathbf{c}} \delta_{is} \delta_{lm} + c_{\mathbf{c}} \delta_{im} \delta_{ls} \quad (\mathbf{c} = 1, 2, 3), \quad (5)$$

т.е.

$$b_{\mathbf{c}} = 0 \quad (\mathbf{c} = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Определяющие тензоры ультрагемитропного упругого тела имеют ровно 15 ненулевых компонент:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1111} &= \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2222} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3333} = a_{\mathbf{a}} + c_{\mathbf{a}}, \\ \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1122} &= \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2211} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1133} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3311} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2233} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3322} = a_{\mathbf{a}}, \\ \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1212} &= \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2121} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 1313} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3131} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 2323} = \mathcal{H}_{\mathbf{a}\ 3232} = c_{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оставшиеся 66 компонент в каждом из определяющих тензоров равны нулю.

пары тензорных индексов (is, lm)	11	22	33	12	13	23	21	31	32
матричные индексы (K, N)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Таблица 1. Соответствие пар тензорных и матричных индексов.

Изотропное микрополярное упругое тело назовем ультраизотропным, если компоненты двух его определяющих тензоров вообще не изменяются ни при каких преобразованиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. являются тензорами с постоянными компонентами.

Учитывая представление для тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами [10], для определяющих тензоров четвертого ранга имеем

$$H_{\mathfrak{c}}^{islm} = a_{\mathfrak{c}} \delta_{is} \delta_{lm} + c_{\mathfrak{c}} \delta_{im} \delta_{ls} \quad (\mathfrak{c} = 1, 2), \quad (8)$$

или

$$H_{\mathfrak{c}}^{islm} = a_{\mathfrak{c}} \delta_{is} \delta_{lm} - \frac{1}{2} c_{\mathfrak{c}} (\delta_{il} \delta_{sm} - \delta_{im} \delta_{sl}) + \frac{1}{2} c_{\mathfrak{c}} (\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}) \quad (\mathfrak{c} = 1, 2). \quad (9)$$

3. Фигуры Ная для ультрагемитропного и ультраизотропного тел. Для компактности записи тензорных уравнений иногда выгодно использовать матричные обозначения [13, pp. 113–115], которые позволяют представить компоненты тензора четвертого ранга элементами матрицы, уменьшив количество индексов с 4 до 2, а тензоры второго ранга — векторами. Однако, необходимо помнить, что двухиндексные экстенсивы, соответствующие тензорам четвертого ранга, не преобразуются по тензорным правилам.

Преобразование определяющих тензоров $\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}^{islm}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$) в (2) к виду двумерных матриц будем производить заменой индексов согласно таблице 1.

Определяющая матрица $\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}^{KN}$ при учете (3) принимает вид

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}^{KN} = \begin{bmatrix} a_{\mathfrak{a}} + b_{\mathfrak{a}} + c_{\mathfrak{a}} & a_{\mathfrak{a}} & a_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\mathfrak{a}} & a_{\mathfrak{a}} + b_{\mathfrak{a}} + c_{\mathfrak{a}} & a_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\mathfrak{a}} & a_{\mathfrak{a}} & a_{\mathfrak{a}} + b_{\mathfrak{a}} + c_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 & b_{\mathfrak{a}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 & b_{\mathfrak{a}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{\mathfrak{a}} & 0 & b_{\mathfrak{a}} \\ 0 & 0 & 0 & b_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 & c_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 & c_{\mathfrak{a}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{\mathfrak{a}} & 0 & 0 & c_{\mathfrak{a}} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Заметим, что матрица $\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}^{KN}$ симметрична относительно главной диагонали. Результат построения фигуры Ная для определяющего гемитропного тензора представлен на рис. 1.

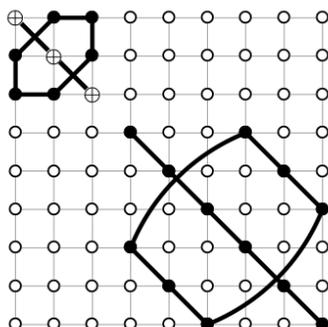


Рис. 1. Двумерная фигура Ная матрицы определяющего тензора \mathcal{H}_{KN}^a гемитропного микрополярного упругого тела. \circ — нулевые компоненты, \bullet — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\mathcal{H}_{12}^a + \mathcal{H}_{44}^a + \mathcal{H}_{47}^a)$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

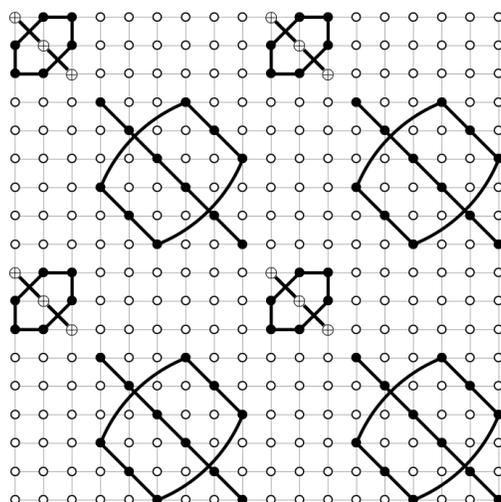


Рис. 2. Двумерная фигура Ная гемитропного микрополярного упругого тела. \circ — нулевые компоненты, \bullet — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\mathcal{H}_{12}^a + \mathcal{H}_{44}^a + \mathcal{H}_{47}^a)$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

Двумерная фигура Ная для гемитропного микрополярного упругого тела может быть получена путем объединения элементарных фигур для определяющих матриц (см. рис. 1). На рис. 2 представлена фигура Ная для определяющих уравнений гемитропного микрополярного упругого тела. Пересечение жирных линий на рис. 4 не говорит о связи соответствующих компонент определяющих матриц.

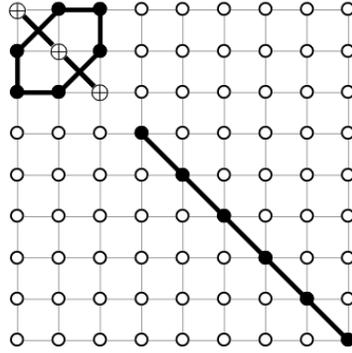


Рис. 3. Двумерная фигура Ная определяющей матрицы \mathcal{H}_a^{KN} ультрагемитропного/ультраизотропного микрополярного упругого тела. \circ — нулевые компоненты, \bullet — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\mathcal{H}_a^{12} + \mathcal{H}_a^{44} + \mathcal{H}_a^{47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

Определяющая ультрагемитропная/ультраизотропная матрица \mathcal{H}_a^{KN} при учете (3) принимает вид

$$\mathcal{H}_a^{KN} = \begin{bmatrix} a+c & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a+c & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a+c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Фигура Ная для определяющей ультрагемитропной/ультраизотропной матрицы представлена на рис. 3. Двумерные фигуры Ная для ультрагемитропного и ультраизотропного микрополярного упругого тела получаются путем объединения элементарных фигур для определяющих ультрагемитропных и ультраизотропных матриц и показаны на рис. 4 и 5 соответственно.

4. Заключение В работе обсуждаются и строятся двумерные фигуры Ная, адаптированная к представлению асимметричных определяющих тензоров.

- (1) Общая анизотропная форма микрополярного упругого потенциала напряжений редуцируется к гемитропной форме, а затем к ультрагемитропной и, окончательно, к ультраизотропной.

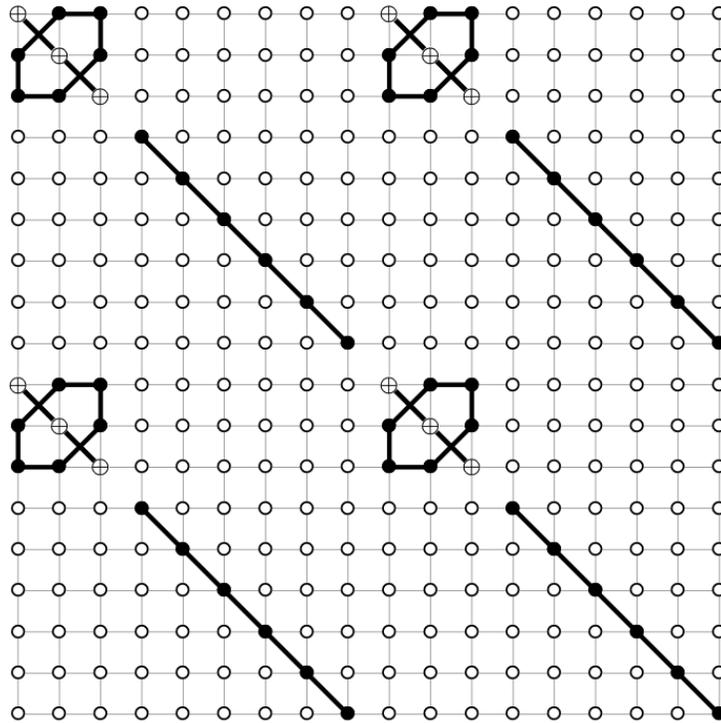


Рис. 4. Двумерная фигура Ная ультрагемитропного микрополярного упругого тела. \circ — нулевые компоненты, \bullet — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\mathcal{H}_{\alpha}^{12} + \mathcal{H}_{\alpha}^{44} + \mathcal{H}_{\alpha}^{47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

- (2) Построены двумерные фигуры Ная для асимметричных определяющих тензоров и тензоров гемитропного, ультрагемитропного и ультраизотропного упругого микрополярного тела.
- (3) Получены фигуры Ная, графически представляющие гемитропное, ультрагемитропное и ультраизотропное микрополярное упругое тело и связями между компонентами асимметричных определяющих тензоров.

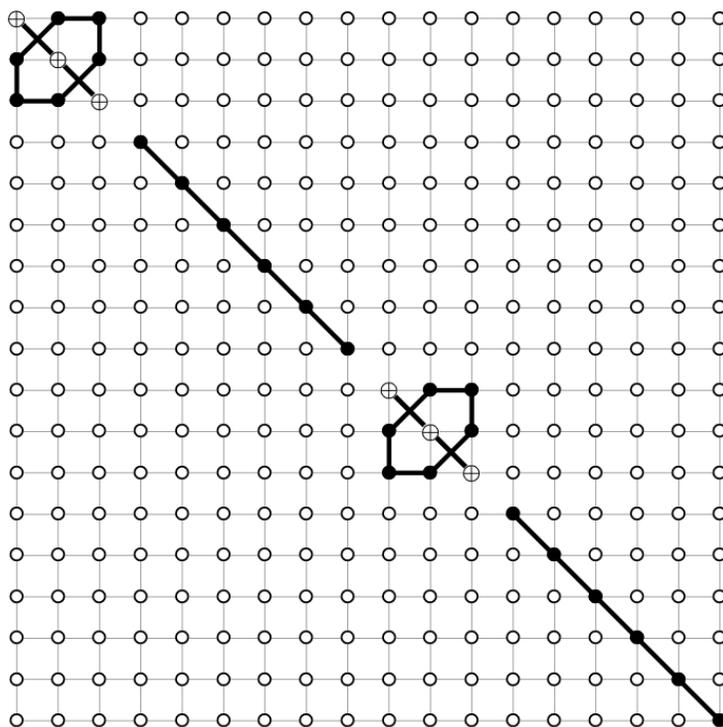


Рис. 5. Двумерная фигура Ная ультраизотропного микрополярного упругого тела. \circ — нулевые компоненты, \bullet — компоненты отличные от нуля, $\oplus = (\mathcal{H}_a^{12} + \mathcal{H}_a^{44} + \mathcal{H}_a^{47})$, жирными отрезками и дугами соединены равные компоненты.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was carried out on the topic of a state assignment (state registration number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] DeValk Tyler, Hestetune Jonah, Lakes Roderic S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. P. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
- [2] Aouadi Moncef, Ciarletta Michele, Tibullo Vincenzo. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.
- [3] Lakes Roderic. *Composites and metamaterials*. Singapore : World Scientific, 2020.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909.
- [5] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [6] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). *Mechanics of generalized continua*. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
- [7] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
- [8] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [9] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge : Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [10] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [11] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgru.2022.52.2.012.
- [12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgru.2022.52.2.013.
- [13] Nye J. F. *Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices*. Oxford : Clarendon Press, 1957. 322+xv p.
- [14] Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford : Clarendon Press, 1957. 116+vi p.
- [15] Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Fachmedien, Wiesbaden : Springer, 1966. 116+vi p.
- [16] Standards on Piezoelectric Crystals // *Proceedings of the I.R.E.* New York : IRE, 1960. P. 18.
- [17] Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // *Int. J. Engng Sci.* 2021. Vol. 31, no. 4. P. 617–635.
- [18] Krylova E. Yu, Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.
- [19] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // *Известия Саратовского университета*. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, № 1. С. 109–122. DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122.
- [20] Крылова Е. Ю., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Переходные микрополярные модели анизотропной упругости // *Вычислительные технологии и прикладная математика : материалы III науч. конф. с междунар. участием г. Комсомольск-на-Амуре 7–11 октября*

2024. Комсомольский-на-Амуре государственный университет Комсомольск-на-Амуре, 2024. С. 226–229.
- [21] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 6. P. 2254–2268. DOI: 10.3103/S0025654423700243.
- [22] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [23] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [26] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [27] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [28] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [30] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [31] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [32] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [33] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.
- [34] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета*

- им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [35] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [36] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.

REFERENCES

- [1] DeValk Tyler, Hestetune Jonah, Lakes Roderic S. Nonclassical thermal twist of the chiral gyroid lattice // *Phys. Status Solidi (B)*. 2022. Vol. 259, no. 12. P. 2200338. doi:10.1002/pssb.202200338.
- [2] Aouadi Moncef, Ciarletta Michele, Tibullo Vincenzo. Analytical aspects in strain gradient theory for chiral Cosserat thermoelastic materials within three Green-Naghdi models // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42, no. 6. P. 681–697. doi:10.1080/01495739.2019.1571974.
- [3] Lakes Roderic. *Composites and metamaterials*. Singapore : World Scientific, 2020.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909.
- [5] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [6] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). *Mechanics of generalized continua*. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
- [7] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
- [8] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [9] Gurevich G. B. *Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants*. Moscow : GITTL, 1948. 408 p.
- [10] Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge : Cambridge University Press, 1931. 101 p.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Elements of Theory // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). P. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Applications to Continuum Mechanics // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). P. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [13] Nye J. F. *Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices*. Oxford : Clarendon Press, 1957. 322+xv p.
- [14] Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford : Clarendon Press, 1957. 116+vi p.
- [15] Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Fachmedien, Wiesbaden : Springer, 1966. 116+vi p.
- [16] Standards on Piezoelectric Crystals // *Proceedings of the I.R.E.* New York : IRE, 1960. P. 18.
- [17] Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // *Int. J. Engng Sci.* 2021. Vol. 31, no. 4. P. 617–635.
- [18] Krylova E. Yu, Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultrasotropic micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.

- [19] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2024. Vol. 24, no. 1. P. 109–122. DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122.
- [20] Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radaev Y. N. Transient micropolar models of anisotropic elasticity // *Computational technologies and applied mathematics: Proc. III scientific. conf. with international. participation, Komsomolsk-on-Amur, October 7–11, 2024. KnAGU, 2024*. P. 226–229.
- [21] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 6. P. 2254–2268. DOI: 10.3103/S0025654423700243.
- [22] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [23] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and ductility*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [24] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [25] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [26] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [27] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [28] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [29] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [30] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [31] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [32] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [33] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.

-
- [34] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [35] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [36] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mch.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru) – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mch.math.msu.su) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com) – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mch.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspru@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (mir-vagif@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 ϵ с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Мыльцин В. В.</i> Исследование собственных частот колебаний изотропной геометрически нерегулярной нагретой пластинки.....	5
<i>Худякова В. А., Жилин С. Г., Предеин В. В., Богданова Н. А.</i> Экспериментальное определение зависимости микротвердости железоалюминиевых сплавов от предварительного нагрева исходных шихтовых материалов, предназначенных для алюмотермитного переплава	18
<i>Изымов Р.И., Свистков А.Л.</i> Математическая модель исследования подповерхностных структур наполненных эластомеров в полуконтактном режиме атомно-силового микроскопа	32
<i>Непершин Р. И.</i> Поперечное сдавливание цилиндра штампом с криволинейной гладкой границей.....	43
<i>Рытова Т. Г., Игольников И. С., Максимова Л. А., Козина Н. Г.</i> Уменьшение толщины фланца в соединениях из замкнутых профилей	60
<i>Салихова Н. К., Дудин Д. С., Келлер И. Э., Петухов Д. С., Гачегова Е. А., Максимов А. Б.</i> Собственные деформации и остаточные напряжения после градиентной термомеханической обработки толстолистовой стали: численное моделирование и эксперимент	70
<i>Захаров В. Г.</i> Матричный метод получения полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами	92
<i>Полоник М. В., Манцыбора А. А.</i> Проблемы лазерной очистки тонкостенных конструкций	117
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Волновые числа связанной плоской термоупругой волны в ультраизотропной среде.....	128
<i>Мурашкин Е. В.</i> Обобщенные фигуры Ная для ультрагеометрических и ультраизотропных микрополярных упругих тел	140
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА.....	154
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	157

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2024. № 3 (61)**

Отв. за выпуск: С. В. Тихонов

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 19.12.2024. Выход в свет 24.12.2024.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 19,6.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 403

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38