

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

**ВЕСТНИК**  
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**  
**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**  
**Научный журнал**  
**№ 4(62)**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”  
**Основатели серии:** Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,  
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.

Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

**Главный редактор:** Б. Г. Миронов

**Ответственный редактор:** Ю. Н. Радаев

**Заместитель ответственного редактора:** Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

**Ответственные секретари:** С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

**Редакционная коллегия:** В. Г. Баженов, А. А. Буренин, Д. В. Георгиевский,  
В. В. Глаголев, В. Г. Зубчанинов, Л. А. Игумнов, Р. А. Каюмов, И. Э. Келлер,  
Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин,  
Л. А. Максимова, А. А. Маркин, Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский,  
Р. И. Непершин, В. Н. Орлов, В. П. Радченко, А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов,  
А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев, А. Д. Чернышов, А. И. Хромов, А. И. Шашкин

**Международный совет:** В. М. Мирсалимов (Азербайджан), А. В. Чигарев  
(Белоруссия)

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

**Адрес издателя:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1182

**E-mail:** predel21@mail.ru

**WWW:** <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический  
университет им. И. Я. Яковлева, 2024

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK  
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO  
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA  
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal  
№ 4(62)**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University  
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,  
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007  
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications  
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"  
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"  
(reg. No. 13109).

**Editor-in-chief:** B. G. Mironov

**Executive Editor:** Yu. N. Radayev

**Associate Editor:** N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

**Executive Secretary:** E. V. Murashkin, S. V. Matveev

**Editorial Board:** V. G. Bazhenov, A. A. Burenin, D. V. Georgievskiy,  
V. V. Glagolev, V. G. Zubzhaninov, L. A. Igumnov, R. A. Kayumov, I. E. Keller,  
D. M. Klimov, V. A. Kovalev, L. Yu. Kossovich, D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin,  
L. A. Maksimova, A. A. Markin, N. V. Minaeva, Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin,  
V. N. Orlov, V. P. Radchenko, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov, A. N. Sporihin,  
A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. I. Khromov, A. I. Shashkin

**International Council:** V. M. Mirsalimov (Azerbaijan), A. V. Chigarev  
(Belorussia)

**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** <http://limit21.ru>

Д. А. Потянихин<sup>1</sup>, А. И. Евстигнеев<sup>1</sup>, М. Ю. Туев<sup>2</sup>

## ОБ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ О ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕТАЛЛОВ

<sup>1</sup>Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия

<sup>2</sup>Российский государственный профессионально-педагогический университет, Екатеринбург, Россия

**Аннотация.** Рассматривается влияние деформационной анизотропии на процесс пластического деформирования металлов. По экспериментальным диаграммам упрочнения материалов при растяжении-сжатии и кручении при различных температурах построена модель вязкопластического тела, согласно которой интенсивности нормальных и касательных напряжений задаются разными способами. Решена модельная задача о деформировании прямоугольного параллелепипеда, который осаживается между двумя шероховатыми плитами. Произведено сравнение решения по предложенной модели и в соответствии с гипотезой единой кривой.

**Ключевые слова:** напряжения, деформации, термовязкопластичность, математическое моделирование, численный метод, разностная схема, литейно-ковочный модуль.

**Потянихин Дмитрий Андреевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Авиастроение»; e-mail: potyanikhin@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6113-6073>; AuthorID: 524131

**Евстигнеев Алексей Иванович**, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник; e-mail: diss@knastu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-9594-4068>; AuthorID: 147498

**Туев Михаил Юрьевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры инжиниринга и профессионального обучения в машиностроении и металлургии; e-mail: mihail.tuev@rsvpu.ru; AuthorID: 148586

**для цитирования:** Потянихин Д. А., Евстигнеев А. И., Туев М. Ю. Об учете деформационной анизотропии при решении задач о пластическом деформировании металлов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 5–15. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.001 EDN: QWXLXX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. A. Potianikhin<sup>1</sup>, A. I. Evstigneev<sup>1</sup>, M. Yu. Tuev<sup>2</sup>

## ON STRAIN ANISOTROPY CONSIDERING AT SOLVING PROBLEMS ON PLASTIC DEFORMATION OF METALS

<sup>1</sup>*Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russia*

<sup>2</sup>*Russian State Vocational Pedagogical University, Yekaterinburg, Russia*

**Abstract.** The influence of deformation anisotropy on the process of plastic deformation of metals is considered. Based on experimental diagrams of material strengthening under tension-compression and torsion at different temperatures, a model of a viscoplastic body is constructed, according to which the intensities of normal and tangential stresses are specified in different ways. A model problem of deformation of a rectangular parallelepiped, which is upset between two rough plates, is solved. A comparison between the solution in accordance with the proposed model and in accordance with the hypothesis of a single curve has been made.

**Keywords:** stresses, deformations, thermoviscoplasticity, mathematical modeling, numerical method, difference scheme, casting and forging module.

**Dmitrii A. Potianikhin**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Aircraft Construction Department; e-mail: potyanikhin@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6113-6073>; AuthorID: 524131

**Alexey I. Evstigneev**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Research Worker; e-mail: diss@knastu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-9594-4068>; AuthorID: 147498

**Mikhail Yu. Tuev**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of Engineering and Vocational Training in Mechanical Engineering and Metallurgy; e-mail: mihail.tuev@rsvpu.ru; AuthorID: 148586

**to cite this article:** Potianikhin D. A., Evstigneev A. I., Tuev M. Yu. On strain anisotropy considering at solving problems on plastic deformation of metals // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 5–15. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.001 EDN: QWXLXX

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** При решении прикладных задач теории пластичности одним из главных вопросов является корректность отражения свойств деформируемого металла в используемой математической модели, иначе говоря, насколько полно учитываются термомеханические свойства деформируемой среды при описании уравнениями состояния. Для описания связи напряжений с малыми деформациями используют постулат изотропии [1, 2], а если пренебречь компонентами упругой деформации, то для несжимаемой упрочняющейся среды, используя феноменологические уравнения пластического течения, можно записать:

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2\lambda\xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = 0,5(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_{i,i} = 0, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}; \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{T}{H}, \quad H = (2\xi_{ij}\xi_{ij})^{1/2}, \quad T = T(H, \theta, \varepsilon). \quad (2)$$

В соотношениях (1) и (2) индексы  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам производится суммирование.  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\xi_{ij}$  – компоненты тензора скоростей пластических деформаций;  $v_i$  – проекции скоростей перемещений на координатные оси  $x_i$ ,  $T = T(H, \theta, \varepsilon)$  – интенсивность касательных напряжений.

Вообще говоря, металлы являются поликристаллическими телами, в которых главные оси изменяют свое направление при переходе от одного зерна к другому, но от беспорядочности их ориентации тело в целом ведет себя как статистически изотропное [2, 3]. Уравнения (1) внешне сходны с уравнениями течения вязкой жидкости при  $\lambda = \text{const}$ . В то же время уравнения (1) принципиально отличаются от уравнений гидродинамики, так как параметр  $\lambda$  в (2) содержит функцию  $T = T(H, \theta, \varepsilon)$ , определяемую из экспериментальных данных.

**1. Учёт анизотропии в определяющих соотношениях**. В литературе, особенно в XX веке, проводилось достаточно много исследований по изучению деформации различных материалов на экспериментальных установках, в основном, на простое нагружение: растяжение-сжатие или кручение подготовленных образцов. Это объясняется тем, что результаты испытаний на сложное нагружение трудно использовать для получения определяющих соотношений. Используя формулы

$$\Gamma = (2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2}, \quad H = (2\xi_{ij}\xi_{ij})^{1/2}, \quad T = (2s_{ij}s_{ij})^{1/2},$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij},$$

где  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\xi_{ij}$ ,  $s_{ij}$  – соответственно компоненты тензоров деформаций, скоростей деформаций и девиатора тензора напряжений при простом растяжении-сжатии образцов, получим

$$\varepsilon = \Gamma/\sqrt{3}, \quad \xi = H/\sqrt{3}, \quad \sigma = \sqrt{3}T, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\xi$  и  $\sigma$  – соответственно деформации, скорость деформации и напряжения в экспериментах на простое нагружение. Зная  $\varepsilon$ ,  $\xi$  и  $\sigma$ , можно по формулам (3) перейти к инвариантным характеристикам  $\Gamma$ ,  $H$  и  $T$ . В литературе имеется

множество данных по экспериментам на простое растяжение-сжатие, но крайне мало экспериментальных исследований на кручение. По результатам экспериментов в работе [4] построена аналитическая формула

$$T = \tau_m \frac{H^k}{H_0^k + H^k}, \quad \tau_m = \left( \tau_0 \left( \frac{\theta_0}{\theta} \right)^2 - \tau_1 \right) \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon_0 - \varepsilon_1), \quad k = k_0 \frac{\theta}{\theta_0} - k_1. \quad (4)$$

Приведенные здесь параметры  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $k_0$ ,  $k_1$  даны в работе [4] для 25 марок стали. Формула (4) справедлива при  $900^\circ\text{C} \leq \theta \leq 1200^\circ\text{C}$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 0,6$ ,  $0,05 \leq \xi \leq 150 \text{ c}^{-1}$ ,  $\theta_0 = 1000^\circ\text{C}$ ,  $H_0 = 1 \text{ c}^{-1}$ . При получении формулы (4) использовалось 1150 экспериментальных значений по работам [5–8]. Оказалось, что 81% значений отношения  $T_i/T_i^0$ , где  $T_i$  – теоретическое значение интенсивности касательных напряжений, вычисленное по формулам (4),  $T_i^0$  – соответствующее экспериментальное значение, вычисленное с помощью формул (3).

Формула (4) отражает поведение (упрочнение) материала при простом растяжении-сжатии образцов, то есть отражает механические свойства сталей по нормальному напряжению. В технологических процессах обработки металлов давлением осуществляется сложное нагружение, при котором в деформируемом металле имеют место как нормальные, так и касательные напряжения, которые характеризуют сдвиговую деформацию металла. По экспериментальным данным сдвиговая деформация характеризуется гораздо меньшим усилием, чем деформация при растяжении-сжатии. На рис. 1–4 приведены экспериментальные данные зарубежных авторов по кручению и растяжению-сжатию образцов из различных металлов, взятые из работы [8].

На рис. 1, а приведены экспериментальные данные для низкоуглеродистых сталей при кручении, на рис. 1, б (кривые 2 и 3) – для сталей Ст3, Ст45 при сжатии. Сжимающие напряжения в образцах при температуре  $20^\circ\text{C}$  в 1,5–2 раза выше, чем при кручении. Ту же картину наблюдаем на рис. 2 для других марок стали. На рис. 3, а показаны кривые упрочнения при кручении образцов из Ст3, Ст45, на рис. 3, в (кривая 3) – при растяжении Ст3. Также показана диаграмма деформирования меди при кручении (рис. 3, б) и растяжении (рис. 3, в, кривая 2).

Можно наблюдать значительную разницу в сопротивлении деформации при кручении и растяжении.

Диаграммы деформирования при кручении и сжатии медных образцов приведены на рис. 4. Видим так же значительную разницу в сопротивлении деформаций, но виды кривых нагружения весьма схожи. Анализ экспериментальных данных (рис. 1–4) различных авторов на простое нагружение показывает, что гипотеза «единой кривой» при развитых пластических деформациях не является очевидной во всех случаях нагружения.

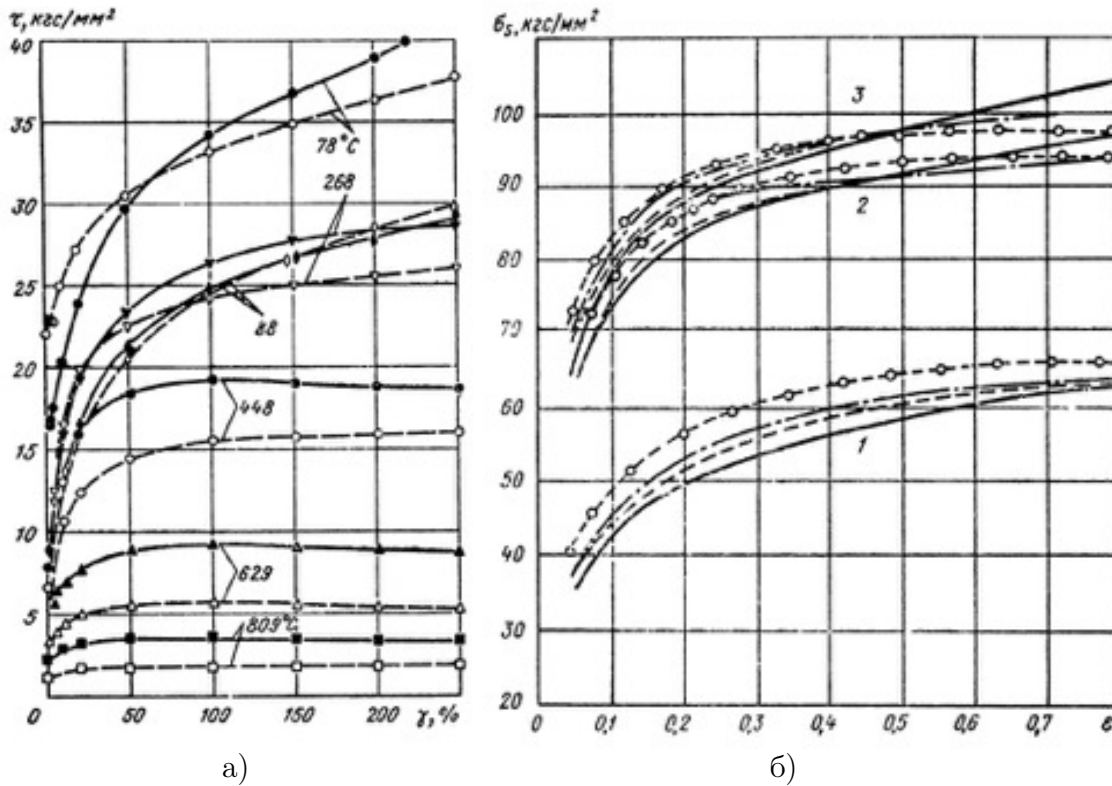


Рис. 1. Экспериментальные данные для низкоуглеродистых сталей [8]: а) кривые упрочнения низкоуглеродистой стали ( $C = 0,06\%$ ) при кручении со скоростью  $2,4 \times 10^{-3} \text{ c}^{-1}$  (штриховые линии) и  $0,12 \text{ c}^{-1}$  (сплошные линии) (Schwandt S.); б) кривые упрочнения при сжатии ( $\theta = 20^\circ\text{C}$ ) нормализованных сталей (Buhler H., Meyer Nolkemper H.): 1 - Мвк6; 2 - С35; 3 - С45;  $-\dot{\epsilon} = 0,25 \text{ c}^{-1}$ ;  $-- \dot{\epsilon} = 1,6 \text{ c}^{-1}$ ;  $-\cdot-\cdot-\dot{\epsilon} = 8,0 \text{ c}^{-1}$ ;  $-o-o-\dot{\epsilon} = 40,0 \text{ c}^{-1}$ .

Предлагается при пластическом течении уравнения состояния записывать в следующем виде (по повторяющемуся индексу суммирование не производится):

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} - \sigma_{ij} &= 2\lambda_1 \xi_{ii} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \sigma_{ij} &= 2\lambda_2 \xi_{ij} \quad (i \neq j), \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\lambda_1 = T_1/H$ ,  $\lambda_2 = T_2/H$ , функции интенсивности касательных напряжений  $T_1(H, \theta, \epsilon)$  и  $T_2(H, \theta, \epsilon)$  различны. Для проверки достоверности выдвинутой гипотезы рассмотрим пример численного решения в задаче об осадке со сдвигом стального параллелепипеда между двумя параллельными плитами (рис. 5, а). Используя теорию течения и уравнения (5), запишем систему уравнений в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0; \quad \xi_{ij} = 0,5(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_{i,i} = 0; \quad \sigma_{ii} - \sigma_{ij} = 2\lambda_1 \xi_{ii} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \sigma_{ij} &= 2\lambda_2 \xi_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j). \end{aligned} \tag{6}$$

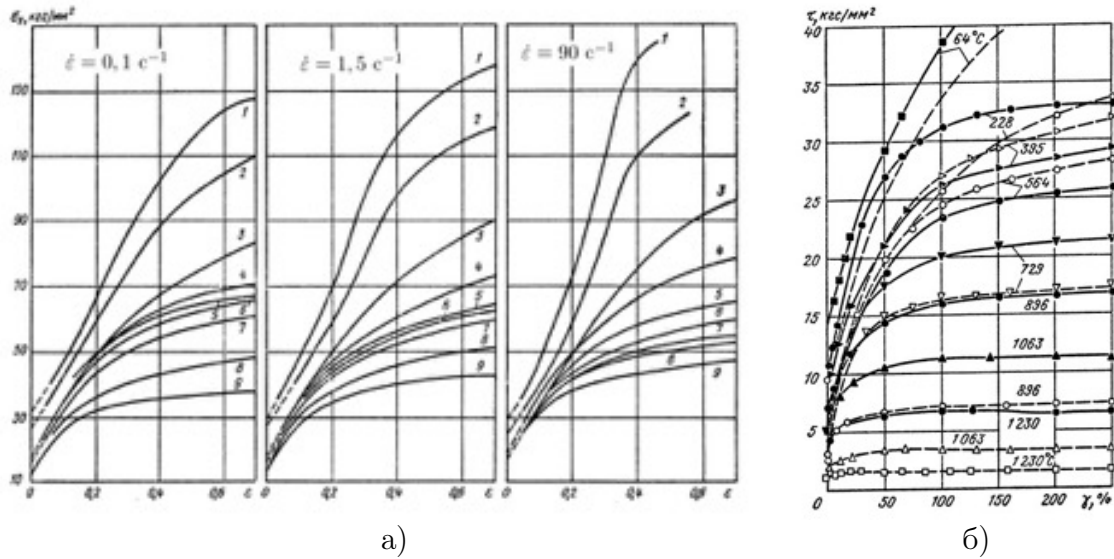


Рис. 2. Экспериментальные данные для аустенитных сталей [8]: а) кривые упрочнения при сжатии закаленной аустенитной стали X8CrNiTi18.10 при температурах (Fritzsch G., Siegel R.): 1 – 20 °C; 2 – 100 °C; 3 – 200 °C; 4 – 300 °C; 5 – 400 °C; 6 – 500 °C; 7 – 600 °C; 8 – 700 °C; 9 – 800 °C; б) Кривые упрочнения при кручении аустенитной стали 304 со скоростью деформирования  $4,5 \times 10^{-3} \text{ c}^{-1}$  (штриховые линии) и  $44 \text{ c}^{-1}$  (сплошные линии) при различных температурах.

Здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\xi_{ij}$  – компоненты тензора скоростей пластических деформаций;  $\sigma$  – гидростатическое давление,  $v_i$  – проекции скоростей перемещений на координатные оси  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Граничные условия задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{21}|_{S_i} = \sigma_{22}|_{S_i} = \sigma_{23}|_{S_i} = 0 \quad (i = 3, 4); \quad \sigma_{33}|_{S_6} = 0; \quad \sigma_{31}|_{S_i} = \sigma_{32}|_{S_i} = 0 \quad (i = 5, 6); \\ v_1|_{S_1} = 0; \quad v_1|_{S_2} = v_n; \quad \sigma_{12}|_{S_i} = -\psi_i \tau_s \frac{(v_{\text{ск}})_i}{v^*} \cos(n_1, x_1) \quad (i = 1, 2); \quad (7) \\ \sigma_{13}|_{S_i} = -\psi_i^* \tau_s \frac{(v_{\text{ск}})_i}{v^*} \cos(n_1, x_1) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

В граничных условиях (7)  $v_{\text{ск}}$  – скорость скольжения металла относительно инструмента деформации,  $v^*$  – нормирующая скорость,  $\tau_s$  – предел текучести при сдвиге,  $\psi_i$  и  $\psi_i^*$  – коэффициенты трения на соответствующих поверхностях скольжения и в соответствующих направлениях,  $v_n$  – скорость перемещения плиты по координате  $x_1$ ,  $v_\tau$  – скорость перемещения плиты по координате  $x_2$ . По координате  $x_3$  перемещения инструмента нет.

Для решения системы уравнений (6) воспользуемся численным методом [4], широко апробированным при решении разноплановых задач [9–11]. Суть численного метода состоит в разбиении исследуемой области на элементы системой



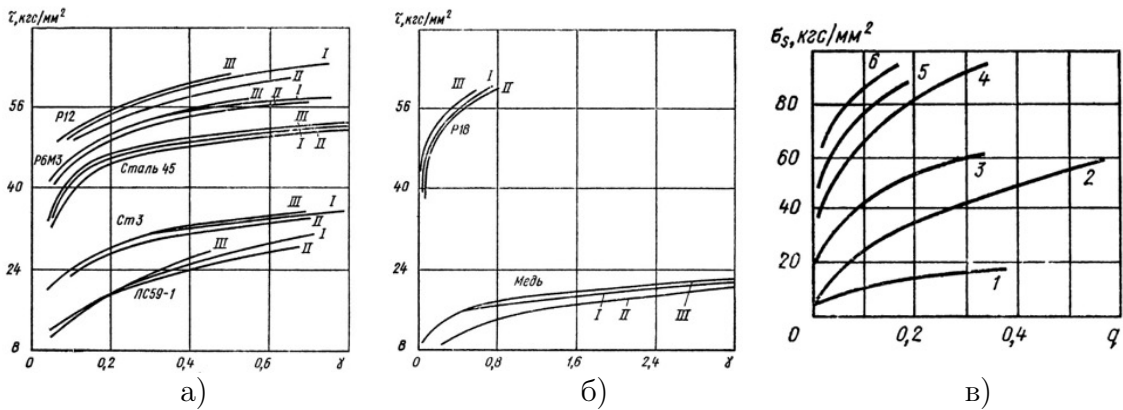


Рис. 3. Экспериментальные данные для металлов [8]: а) и б) кривые упрочнения при кручении ( $\theta = 20^\circ\text{C}$ ) сталей СтЗ, Ст45, Р6МЗ, Р12, Р18, меди и латуни ЛС59-1: *I* – по методу Людвика; *II* – по методу двух образцов; *III* – по методу средних значений; в) Кривые упрочнения при растяжении ( $\theta = 20^\circ\text{C}$ ) отожженных алюминия (1), меди (2), горячекатаных сталей СтЗ (3), Ст35 (4), Ст5 (5) и ХВГ (6) (Дейч А. Ш., Копельман Л. А., Короткин В. В.)

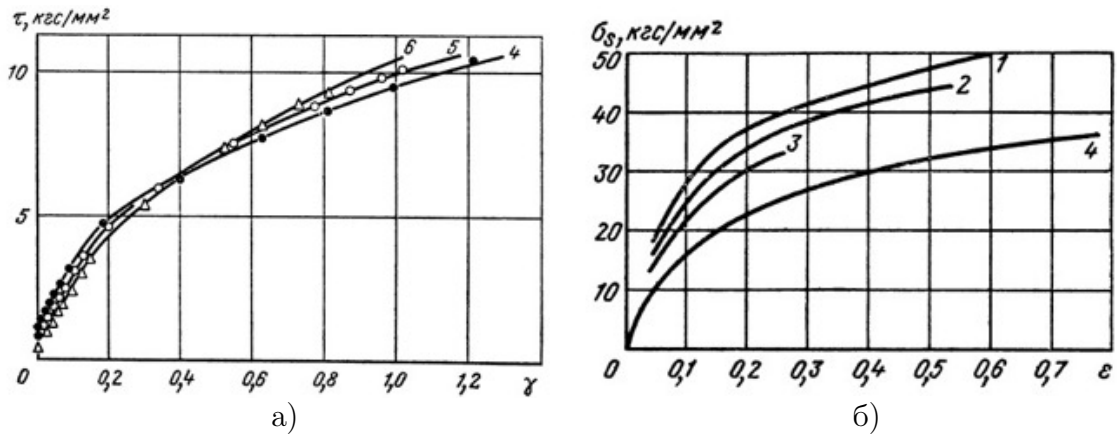


Рис. 4. Экспериментальные данные для меди [8]: а) кривые упрочнения при кручении ( $\theta = 20^\circ\text{C}$ ) (Tiainen T., Kettunen P. O.) меди Cu 99,99% диаметром зерна 0,021 мм (4); 0,161 мм (5), 0,909 мм (6); б) кривые упрочнения при сжатии ( $\theta = 20^\circ\text{C}$ ) меди Cu 99,99% с различными скоростями (Ohyanе M., Takashima F., Osakada K.): (1) – 18,7 м/с; (2) – 13,1 м/с; (3) – 7,5 м/с; (4) – 0,09 м/с.

ортогональных поверхностей. Для каждого элемента в разностном виде записывается сформированная система уравнений, которая решается с учетом граничных условий (7) и разработанных численных схем и алгоритмов по составленным программам. Результат решения – напряжения и скорости перемещений по граням элементов.

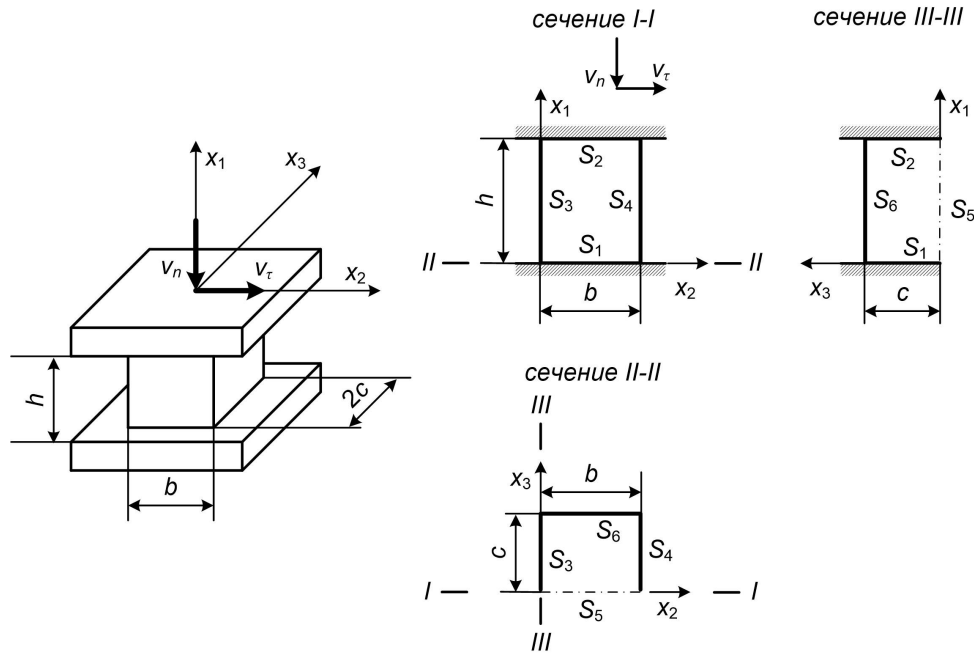


Рис. 5. Расчетная схема задачи об осадке параллелепипеда

**2. Постановка и результаты решения задачи**. Рассмотрим заготовку из Ст3 в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами  $h = 6$  мм,  $b = 10$  мм,  $2c = 20$  мм (рис. 5), которая осаживается между двумя шероховатыми плитами при температуре  $1000^\circ\text{C}$ . Нижняя плита неподвижна; верхняя плита перемещается вниз со скоростью  $v_n = 5$  мм/с и вправо со скоростью  $v_t = 2$  мм/с.

Для этой стали по работе [4] при  $\varepsilon = 0,2$  и  $\theta = 1000^\circ\text{C}$  имеем  $\varepsilon = 0,2$  и  $\tau_m = 8,45$  кг/мм<sup>2</sup>,  $k = 0,42$ . Тогда

$$T_1 = 8,45 \frac{H^{0,42}}{1 + H^{0,42}}. \quad (8)$$

Ужесточим расчет, полагая, что

$$T_2 = 0,5T_1. \quad (9)$$

На рис. 6 показаны результаты расчетов. В сечениях (согласно рис. 5) представлены эпюры скоростей перемещений и напряжений. Сплошными линиями показаны эпюры при  $T_2 = T_1$ , пунктирными – эпюры по (8). Качественно эпюры по «единой кривой» и по (9) одинаковы, а количественно разница составляет  $5 \div 7\%$ .

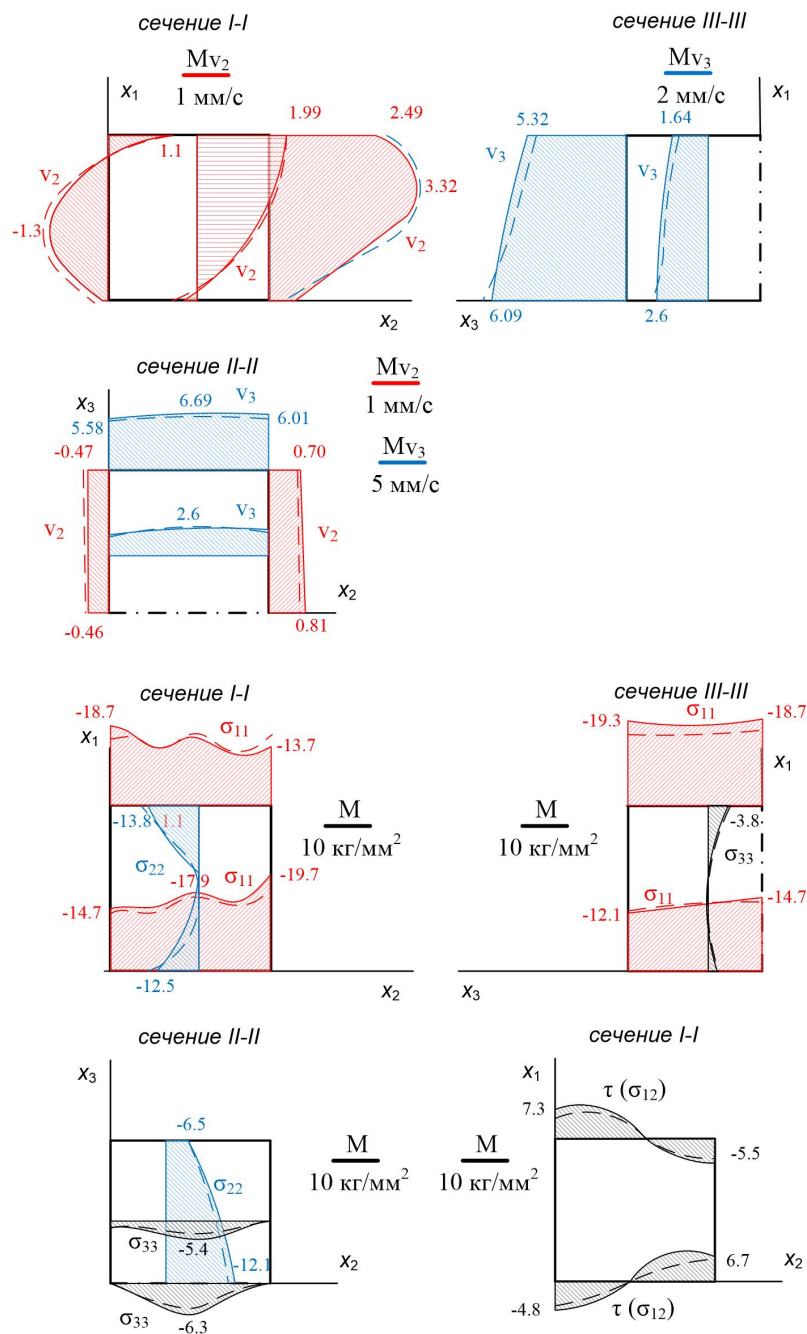


Рис. 6. Распределение параметров напряженно-деформированного состояния в деформируемом параллелепипеде

**Выводы.**

- (1) Проведена оценка гипотезы «единой кривой» по экспериментальным данным на простое нагружение (растяжение-сжатие, кручение) для развитой пластической деформации металлов при различных температурах. Показано довольно большое различие по сопротивлению деформациям при нагружении на сжатие-растяжение и кручение.
- (2) Решение задачи по деформации заготовки в виде сжатия со сдвигом на реальном материале показало, что гипотеза «единой кривой» работает и при развитых пластических деформациях.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНО**

**Вклад авторов.** Вклад авторов равноценен.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214>.

**ADDITIONAL INFORMATION**

**Authors' contribution.** The authors declare that they have no competing interests.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214>.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластического течения // Известия АН СССР. ОТН. 1958. № 2. С. 20–33.
- [2] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва : Наука, 1969. С. 420.
- [3] Новожилов В. В. Теория упругости. Москва : Судпромгиз, 1958. С. 371.
- [4] Одинокое В. И., Каплунов Б. Г., Песков А. В., Баков А. А. Математическое моделирование сложных технологических процессов. Москва : Наука, 2008. С. 177.
- [5] Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Меандров Л. В., Хасин Г. А. Механические свойства стали при горячей обработке давлением. Свердловск : Metallurgizdat, Свердловское отделение, 1960. С. 264.
- [6] Зюзин В. И., Бровман М. Я., Мельников А. Ф., Садовников Б. В. Сопротивление деформации сталей при горячей прокатке. Москва : Metallurgiya, 1964. С. 270.
- [7] Александров П. А., Анисифоров В. П., Байраков В. И., др. Прокатное производство. Справочник. Т. 2. Москва : Государственное научно-техническое издательство литературы по черной и цветной металлургии, 1962. С. 686.
- [8] Кроха В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации: Справочник. Москва : Машиностроение, 1980. С. 157.
- [9] Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Чернышова Д. В. и др. Моделирование внешнего силового воздействия на оболочковую форму при заливке стали // Математическое моделирование. 2022. № 5. С. 61–72.
- [10] Одинокое В. И., Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А. Численное моделирование процесса заполнения металлом кристаллизатора с отражателем УНРС // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2019. № 10. С. 747–755.
- [11] Одинокое В. И., Дмитриев Э. А., Евстигнеев А. И. и др. Математическое моделирование процесса деформации металла на литейно-ковочном модуле с измененным приводом боковых бойков // Математическое моделирование и численные методы. 2021. № 3(31). С. 3–23.

**REFERENCES**

- [1] Ilyushin A. A. Some questions of the theory of plastic flow // *Izv. AN SSSR. OTN*. 1958. no. 2. P. 20–33. (in Russian).
- [2] Kachanov L. M. Fundamentals of the theory of plasticity. Moscow : Nauka, 1969. P. 420. (in Russian).
- [3] Novozhilov V. V. Theory of elasticity. Moscow : Sudpromgiz, 1958. P. 371. (in Russian).
- [4] Odinokov V. I., Kaplunov B. G., Peskov A. V., Bakov A. V. Mathematical modelling of complex technological processes. Moscow : Nauka, 2008. P. 176. (in Russian).
- [5] Tarnovsky I. Ya., Pozdeev A. A., Meandrov L. V., Khasin G. A. Mechanical properties of steel during hot pressure treatment. Sverdlovsk : Metallurgizdat, Sverdlovsk branch, 1960. P. 264. (in Russian).
- [6] Zyuzin V. I., Brovman M. Ya., Melnikov A. F., Sadovnikov B. V. Resistance to deformation of steels during hot rolling. Moscow : Metallurgiya, 1964. P. 270. (in Russian).
- [7] Alexandrov P. A., Anisiforov V. P., et al. V. I. Bayrakov. Rolling production. Handbook. V.2. Moscow : State scientific and technical publishing house of literature on ferrous and non-ferrous metallurgy, 1962. P. 686. (in Russian).
- [8] Krokha V. A. Hardening of metals in cold plastic deformations. Handbook. Moscow : Mashinostroenie, 1980. P. 160. (in Russian).
- [9] Evstigneev A. I., Dmitriev E. A., Chernyshova D. V. et al. Modelling of external force action on a shell mold for pouring steel // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022. no. 5. P. 61–72. (in Russian).
- [10] Odinokov V. I., Evstigneev A. I., Dmitriev E. A. Numerical simulation of metal filling into a CCM mold equipped with a deflector // *Steel in Translation*. 2019. no. 10. P. 747–755. (in Russian).
- [11] Odinokov V. I., Dmitriev E. A., Evstigneev A. I. et al. Mathematical modelling of the metal deformation process on a casting and forging module with a modified drive of the side strikers // *Mathematical Modelling and Computational Methods*. 2021. no. 3(31). P. 3–23. (in Russian).

К. В. Кукуджанов<sup>1</sup>, Г. Р. Халикова<sup>2,3</sup>, Е. А. Корзникова<sup>4</sup>, А. В. Ченцов<sup>1,5</sup>,  
С. В. Дмитриев<sup>6,7</sup>

## ЗАЛЕЧИВАНИЕ ДЛИННЫХ ТРЕЩИН В НЕРЖАВЕЮЩЕЙ СТАЛИ 12Х15Г9НД С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОИМПУЛЬСНОЙ ОБРАБОТКИ

<sup>1</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия*

<sup>3</sup> *Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия*

<sup>4</sup> *Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия*

<sup>5</sup> *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*

<sup>6</sup> *Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

<sup>7</sup> *Уфимский государственный нефтяной технологический университет, Уфа, Россия*

**Аннотация.** Представляется актуальной возможность восстанавливать сплошность металлов и сплавов, залечивая трещины в них с помощью сильных импульсных электромагнитных полей. Это позволяет увеличить надёжность и продлить срок службы материалов и изделий из них. Хотя электроимпульсное воздействие и имеет большое практическое значение, до сих пор не создан метод, который позволил бы залечить наибольший объем (длину) дефекта. Особенно сложно залечивать длинные макротрещины в тонких пластинах путём сварки их краёв с помощью электроимпульсного воздействия. Цель данной работы — изучить возможность подбора режима электроимпульсного воздействия для решения этой задачи. Описан метод, который позволяет залечивать длинные макротрещины в плоских образцах. Он представляет собой многоэтапную электроимпульсную обработку. Благодаря этому методу удалось залечить значительную часть длинной усталостной макротрещины в стальной пластине. Исследования микроструктуры образцов, которые проводились в поперечных сечениях, подтвердили механизм залечивания. Он заключается в сваривании краёв трещины с помощью расплавленного материала. Чтобы это произошло, во время импульса в вершине трещины были одновременно созданы значительные сжимающие напряжения и высокая температура, которая привела к плавлению стали. Эксперименты выявили существенные различия в процессах залечивания по длине макротрещины и по глубине. Тем не менее, качество залечивания улучшалось с увеличением расстояния от поверхности пластины. В области залечивания вдоль краёв трещины можно наблюдать вытянутые зёрна и центральную зону с равноосными зёрнами. Это отражает процесс остывания расплавленной области образца под воздействием импульса тока.

**Ключевые слова:** электроимпульсное воздействие, трещина, сталь

**Кукуджанов Константин Владимирович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; e-mail: kconstantin@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9060-2838>; AuthorID: 5979

**Халикова Гульнара Рашитовна**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент, кафедра «Технологические машины и оборудование»; e-mail: gulnara.r.khalikova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-6712-8469>; AuthorID: 222370

**Корзникова Елена Александровна**, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, ведущий научный сотрудник, профессор, научно-исследовательская лаборатория экстремальных воздействий на металлы и сплавы; e-mail: elenaakorznikova@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-5975-4849>; AuthorID: 158475

**Ченцов Александр Викторович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, доцент; e-mail: chentsov@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4760-1738>; AuthorID: 157206

**Дмитриев Сергей Владимирович**, доктор технических наук, заведующий лабораторией, профессор, лаборатория компьютерного моделирования, кафедра оборудования и технологий сварки и контроля; e-mail: dmitriev.sergey.v@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-6744-4445>; AuthorID: 37154

*для цитирования:* Кукуджанов К. В., Халикова Г. Р., Корзникова Е. А., Ченцов А. В., Дмитриев С. В. Залечивание длинных трещин в нержавеющей стали 12Х15Г9НД с помощью электроимпульсной обработки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 16–39. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.002 EDN: RBRTDI

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

K. V. Kukudzhanov<sup>1</sup>, G. R. Khalikova<sup>2,3</sup>, E. A. Korznikova<sup>4</sup>, A. V. Chentsov<sup>1,5</sup>,  
S. V. Dmitriev<sup>3,6</sup>

## HEALING OF LONG CRACKS IN STAINLESS STEEL 12CH15G9ND USING ELECTRIC PULSE TREATMENT

<sup>1</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Institute for Metals Superplasticity Problems of Russian Academy of Sciences, Ufa,  
Russia*

<sup>3</sup>*Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia*

<sup>4</sup>*Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*

<sup>5</sup>*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

<sup>6</sup>*Institute of Molecule and Crystal Physics, UFRS of Russian Academy of Sciences, Ufa,  
Russia*

**Abstract.** It seems relevant to restore the continuity of metals and alloys by healing cracks in them with the help of strong pulses of electromagnetic field. This allows you to increase the reliability and extend the service life of materials and products made from them. Although the electric pulse effect is of great practical importance, a method has not yet been developed that would allow healing the largest volume (length) of the defect. It is especially difficult to heal long macro cracks in thin plates by welding their edges using electric pulse action. The purpose of this work is to study the possibility of selecting an electric pulse mode to solve this problem. A method is described that makes it possible to heal long microcracks in flat samples. It is a multi-stage electric pulse treatment. Thanks to this method, it was possible to heal a significant part of the long fatigue macrofracture in the steel plate. Studies of the microstructure of the samples, which were carried out in cross sections, confirmed the healing mechanism. It consists in welding the edges of the crack using molten material. In order for this to happen, the significant compressive stresses and high temperatures were simultaneously created at the crack tip during the pulse, which led to the melting of the steel. Experiments have revealed significant differences in the healing processes along the length of the macrofracture and in depth. However, the healing quality improved with increasing distance from the plate surface. In the healing area, elongated grains and a central zone with equiaxed grains can be observed along the edges of the crack.

**Keywords:** crack healing, steel, high density electric pulse.

**Konstantin V. Kukudzhanov**, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher;

e-mail: kkonstantin@mail.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9060-2838>; AuthorID: 5979



**Gulnara R. Khalikova**, Cand. Tech., Senior Researcher, Assoc. Prof.;

e-mail: gulnara.r.khalikova@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0002-6712-8469>; AuthorID: 222370

**Elena A. Korznikova**, Doc. Sci. Phys. & Math., professor, Leading Researcher, Assoc. Prof.;

e-mail: elenaakorznikova@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0002-5975-4849>; AuthorID: 158475

**Chentsov Alexander Viktorovich**, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Assoc. Prof.;

e-mail: chentsov@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0003-4760-1738>; AuthorID: 157206

**Sergey V. Dmitriev**, Doc. Tech., Professor; e-mail: dmitriev.sergey.v@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0002-6744-4445>; AuthorID: 37154

*to cite this article:* Kukudzhanov K. V., Khalikova G. R., Korznikova E. A., Chentsov A. V., Dmitriev S. V. Healing of long cracks in stainless steel 12Ch15G9ND using electric pulse treatment // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 16–39. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.002 EDN: RBRTDI

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Износ конструкционных материалов часто является результатом воздействия внешних факторов, которые могут привести к образованию микро-, мезо- и макротрещин, что в конечном итоге приводит к разрушению [1–3]. Такие разрушения могут иметь серьезные последствия, включая аварии и значительные материальные потери. Разработка методов залечивания трещин потенциально может повысить надежность и продлить срок службы конструкционных материалов и изделий из них. Изучение процесса залечивания дефектов в материалах представляет значительный интерес для исследователей [4, 5]. Понимание механизмов залечивания, очевидно, будет способствовать разработке оптимальных практических методов их залечивания. В этой области проведен ряд исследований, в частности, в отношении залечивания трещин в биоматериалах, полимерах и керамических материалах [6, 7], где использовались различные методы, включая нанесение плазменного покрытия [8, 9]. Тем не менее, устранение трещин в металлических материалах является значительно более трудоемким процессом, чем в других материалах, из-за высокой прочности металлических связей и низкой скорости диффузии атомов в металлах [10].

В настоящее время наиболее распространенными методами устранения микротрещин в металлах и сплавах является термическая и термомеханическая обработка [11]. Однако эти методы имеют существенный недостаток, заключающийся в том, что они приводят к ухудшению механических свойств металла, что связано с ростом зерен и другими эффектами, возникающими при повышенных температурах [12, 13]. Кроме того данные методы очень трудо- и энергозатратны и позволяют залечить только микроскопические трещины [14].

Альтернативой термической и термомеханической обработке является метод воздействия на материал постоянным или импульсным электрическим током. Если действие постоянного тока зачастую эквивалентно классической термообработке (отжигу), то воздействие на металлы и сплавы короткими интенсивными импульсами электрического тока улучшает их пластические и вязкостные характеристики, повышает их коррозионную стойкость и одновременно приводит к устранению (залечиванию) дефектов в материалах [15–18]. Уверенный рост интереса к использованию сильных импульсных электромагнитных полей в качестве средства (залечивания) как макротрещин, так и распределенных микродефектов в металлических материалах наблюдается в последнее время [5, 15, 19–28].

В общем случае, механизм залечивания дефектов в металлах основан на явлении концентрации электрического поля в вершинах дефектов в проводящих материалах, индуцировании электромагнитным полем тока высокой плотности в вершинах дефектов, рассеивании электромагнитной энергии в тепло в материале, локальном быстром повышении его температуры, температурном расширении материала в окрестности вершины, возникновении механических напряжений в вершине сжимающих берега трещины, плавлении, испарении (при определенных условиях) материала в вершине трещины, и как следствие, сварке берегов макротрещин.

Однако окончательный консенсус исследователей с этим механизмом еще предстоит достичь. В литературе [5, 19, 20, 29, 30] можно встретить разные мнения относительно механизмов сварки макротрещин в плоских образцах. Начиная от возникновения в вершине трещины низкотемпературной плазмы и перемещений атомов сплава и до некой «энергизации» (диффузии/плавления). Естественно, что в таких условиях, не сформировалось понимания, как подобрать режим сильного электроимпульсного воздействия, который позволял бы залечить наибольший объем трещины.

Вышеописанный механизм залечивания макротрещин в плоских образцах не зависит от метода индуцирования электрического тока в материале (контактного посредством присоединения электродов к образцу [15, 21, 25, 26, 31, 32] или индукционного посредством возбуждения в проводнике вихревых токов [27, 28]). В контактном методе при больших напряжениях всегда имеются существенные потери энергии в неидеальных контактах за счет возникновения дуговых разрядов. Индукционный метод возбуждения тока сложнее реализовать, он обходится дороже, чем контактный, поэтому применяется реже.

Впервые на возможность залечивания макротрещин в пластинах из черных и цветных металлов сильными импульсами электрического тока обратили внимание советские исследователи, начав изучать потенциальное использование этого эффекта со второй половины 1970-х годов [33–35].

В работе [29] был разработан метод залечивания длинных усталостных трещин в пластине из нержавеющей стали с помощью воздействия электрическим полем. Ток индуцировался в образце с помощью контактных электродов, расположенных в непосредственной близости друг от друга и от берегов трещины, а берега (фронт) трещины обрабатывались специальным составом, что облегчало их сварку. Эксперименты показывают, что такое воздействие на макротрещину привело к её залечиванию по всей длине путем образования перемычек между берегами (краями) трещины.

Исследование [5] представляет собой пример успешного залечивания короткой макротрещины усталостного происхождения в полосе из нержавеющей стали с помощью разработанного авторами двухэтапного режима воздействия импульсами тока. Отметим, что до этого не удавалось достичь такого качества залечивания усталостной макротрещины по всей её длине. Определение оптимальных параметров электроимпульсного воздействия, способного обеспечить сварку берегов трещины и одновременно предотвратить испарение металла и образование кратеров (отверстий) в вершинах макротрещин в пластинах, представляет собой очень трудоемкую задачу [5]. Образование кратера будет препятствовать закрытию трещины и сварке её берегов, а в некоторых условиях может привести к выходу изделия из строя (пример отрицательного результата электроимпульсного воздействия). Это явление было, в частности, рассмотрено в [5], где при высокой плотности тока и большом количестве импульсов в вершине макротрещины формировался высокий температурный градиент с

большим радиусом нагрева, что приводило к обильному плавлению, испарению, разупрочнению материала в окрестности вершины трещины и изменению формы её берегов, что, в свою очередь, не приводило к закрытию трещины и её сварке.

Основываясь на вышеупомянутых исследованиях, можно сделать вывод о том, что возможен подбор режимов воздействия импульсным электромагнитным полем, которые приведут к залечиванию макротрещин в металлах и сплавах при сохранении целостности микроструктуры в образце и улучшении его механических характеристик за счет сварки берегов дефекта. При этом важно выбрать оптимальные режим или режимы электроимпульсной обработки (амплитуды, формы и длительности импульсов тока, их повторяемость (количество, коэффициент заполнения) и т.д.) для данного материала, чтобы обеспечить максимальную длину залечивания (заваривания) макротрещины и одновременно предотвратить испарение или образование кратеров в пластинах, препятствующее закрытию трещины и сварке её берегов.

Следует отметить, что помимо режима воздействия электромагнитным полем, на успех залечивания макротрещин в плоских образцах существенное влияние оказывает геометрия трещины и образца, а также способ его закрепления и способ присоединения электродов (если речь идет о контактном методе). Особую сложность представляет залечивание длинных макротрещин в тонких пластинах. Исследованию такого случая посвящена настоящая работа.

Выше сообщалось, что залечивание длинных макротрещин в тонких пластинах представляет особую сложность. Упрощенно данную ситуацию можно объяснить следующим образом.

Длинными трещинами в плоском образце будем считать трещины, длина  $a$  которых больше толщины пластины  $h$ ,  $a > h$  (конечно, при условии что  $h \ll W$  и  $L$ , где  $W$ ,  $L$  – ширина и длина пластины, иначе образцы нельзя считать плоскими). При этом длину трещины следует считать от края пластины, т.е. включая вырез.

И наоборот, короткими считаются трещины, для которых  $a < h$ .

В первом случае (длинных трещин) можно приближенно считать, что в пластине в окрестности трещины реализуется плоское напряженное состояние. Во втором случае (коротких трещин) можно приближенно считать, что в полосе в окрестности трещины реализуется плоское деформированное состояние. Как сообщалось выше, залечивание макротрещин начинается в вершине, а для заваривания её берегов требуется, чтобы во время прохождения импульса в ней одновременно возникали значительные сжимающие напряжения (чтобы сблизить берега трещины в вершине) и плавление металла в вершине (чтобы сомкнутые берега трещины не разошлись после релаксации температуры). Если это одновременно происходит, тогда будем считать, что за один импульс залечивается (заваривается) небольшой участок трещины  $\Delta a$  в вершине. Предположим для простоты, что при каждом повторном импульсе залечивается одинаковый по длине участок трещины  $\Delta a$  (что обычно не соответствует экспериментам),

тогда через  $N$  импульсов длина трещины уменьшится до  $a - N \cdot \Delta a$ , а длина залечивания соответственно составит  $a_1 = N \cdot \Delta a$ . Таким образом, залечивание трещины в пластине – это динамический (постепенный) процесс перемещения новой вершины трещины вдоль её фронта от первоначальной вершины к вырезу. Подбор параметров импульса для достижения оптимальной величины  $\Delta a$  на каждом этапе залечивания представляется актуальной задачей.

Очевидно, что при одинаковой рассеянной электромагнитной энергии в материале в случае плоского напряженного состояния сжимающие напряжения в вершине будут меньше, чем сжимающие напряжения в случае плоского деформированного. Кроме того, результаты нашего моделирования по воздействию импульсом тока на длинную трещину в пластине [36] показывают, что плотность тока, нагрев и тепловое расширение внутри пластины (вблизи её срединной плоскости) оказываются выше, чем вблизи её поверхности (численное моделирование проводилось при условии отсутствия теплообмена с окружающей средой). Поэтому в толстых пластинах (полосах) подобрать нужную плотность тока оказывается проще и трещина залечивается по глубине  $z$  качественнее (в смысле отсутствия в залеченной области большого количества несплошностей) и быстрее, чем в тонких. По этим же причинам залечивание в среднем происходит лучше внутри пластины (вблизи её срединной плоскости) нежели вблизи её поверхности. Авторы полагают, что проведение залечивания по всей длине короткой трещины в полосе в работе [5] ( $h/a=5,0/3,32=1,51$ ), объясняется данными причинами. Приведенные в [5] томограммы сечений пластины в зависимости от глубины  $z$  подтверждают, что качество залечивания улучшается с глубиной и достигает максимума вблизи срединной плоскости пластины. Чем толще пластина и больше отношение  $h/a$ , тем ближе состояние в её вершине к плоской деформации и тем лучше будет залечиваться трещина в толще пластины.

Заметим, что при рассматриваемых временах воздействия можно обоснованно пренебречь конвекцией, но всё же имеет место лучистый теплообмен. Из-за лучистого теплообмена в приповерхностных слоях материала нагрев происходит медленнее, а релаксация температуры – быстрее, чем внутри. Это приводит к большей неоднородности температурного поля по глубине, меньшему тепловому расширению материала вблизи поверхности и, как следствие, меньшим сжимающим напряжениям в вершине вблизи поверхности, что также может приводить к ухудшению залечивания (заваривания) берегов трещины в приповерхностных слоях.

**1. Материал и методика эксперимента.** В качестве материала исследования служила нержавеющая сталь марки 12X15Г9НД (ближайший американский аналог an austenitic chromium nickel-manganese stainless steel- AISI201). Данная сталь является более экономичным вариантом/заменителем дорогостоящих хромоникелевых высоколегированных сталей. Образцы для исследований были вырезаны из промышленной ленты в состоянии поставки. Из ленты вырезались пластины размером  $120,0 \times 18,2 \times 0,7$  мм. В пластинах на расстоянии

60мм от одного из концов электроискровым методом делался краевой вырез  $0,3 \times 2,0 \times 0,7$ мм с закругленной вершиной (кончиком). Далее вырезанные пластины подвергались усталостным нагрузжениям, методика которых приведена в более ранней работе авторов [37]. В результате от выреза в пластине прорастали (формировались) длинные усталостные макротрещины, имеющие длины 5,75-8,85 мм (рис. 1). Таким образом, вершина трещины находилась от края пластины на расстоянии 7,8-9,9 мм.



Рис. 1. Вид образца в области пророщенной длинной усталостной трещины. Система координат, XY – в плоскости пластины

Для оценки возможности заживания макротрещины путем воздействия на неё импульсным электромагнитным полем к образцам, жестко зафиксированным в медных зажимах-электродах, подводился импульсный ток. Расстояние между электродами составляло 38мм. Трещина располагалась посередине между электродами. Электроимпульсная обработка образцов проводилась с помощью генератора импульсного электромагнитного поля ГИТ-20-40 на специально разработанной лабораторной установке, схематично показанной на рис. 2(а). С помощью установки в образцах индуцировались импульсы тока с формой импульса, показанной на рис. 2(б). Таким образом, в наших экспериментах направление вектора плотности тока на электродах было перпендикулярно фронту (берегам) трещины, т.е. ток был направлен вдоль оси Y. Блок управления генератора настраивает параметры блока заряда в режиме заряда и замыкает его на батарею конденсаторов. В режиме разряда, как показано на схеме, батарея конденсаторов замкнута в цепь с образцом через газовый разрядник. Как только с блока управления на разрядник поступает импульс поджига, батарея

конденсаторов начинает разряжаться через зажимы-электроды и образец, до прерывания цепи разрядником.

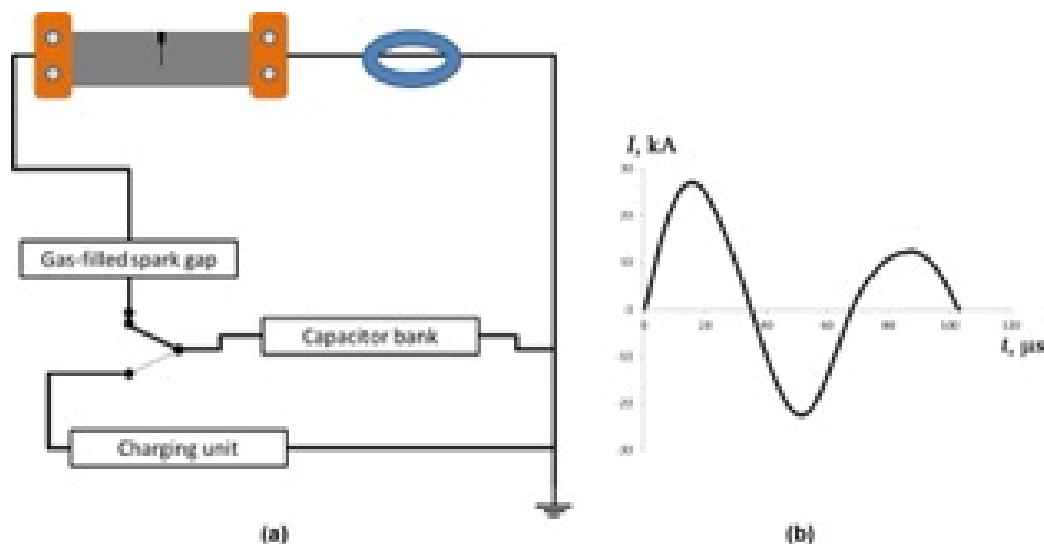


Рис. 2. Схема лабораторной установки (а), типичная форма импульса тока в образце (б)

Максимальный положительный ток в импульсах варьировался в широком диапазоне от 2,6 до 28,2 кА (плотность тока от 179 до 1937 А/мм<sup>2</sup>), а максимальный отрицательный ток - от -1,6 до -17,7 кА (плотность тока от -110 до -1216 А/мм<sup>2</sup>). Период по времени поддерживался в диапазоне 69-74 мкс (частота  $\sim$ 13,3 кГц). Промежуток времени между импульсами 60 сек.

С целью подобрать опытным путем оптимальный режим электроимпульсного воздействия к образцам прикладывались как одиночные импульсы тока одинаковой плотности, так и серии (последовательности одинаковых по максимальной амплитуде) импульсов с изменяющейся плотностью тока и повторяемостью. Возникновение локальных деформаций в области трещины или искровой пробой на её берегах контролировались оптическими микроскопами.

После пропускания импульсов поверхность пластины с двух сторон исследовалась на оптическом микроскопе Zeiss Axio Imager.D1m в дифференциально – интерференционном контрасте при увеличениях от x100 до x2000 на предмет оценки заваривания берегов трещин и геометрии (длины и ширины) залеченной области.

Исследование микроструктуры в исходном состоянии и после электроимпульсной обработки проводили со стороны поперченного сечения образцов (плоскость ZY). Кроме того, после электроимпульсной обработки анализ микроструктуры осуществляли в сечении пластины, сделанном в области новой вершины залеченной усталостной трещины (сечение А-А, рис. 3).

Детальное исследование микроструктуры и electron backscatter diffraction (EBSD) анализ проводили на сканирующем электронном микроскопе (СЭМ)

TESCAN MIRA при ускоряющем напряжении 20 кВ. Статистический анализ данных, в том числе оценка среднего размера зерен, был проведен с использованием встроенного программного пакета «CHANNEL 5.0» при доверительной вероятности 95%. Карты EBSD для каждого состояния материала были получены с шагом сканирования 0,3 мкм, максимально допустимая ошибка в определении ориентировки составила  $2^\circ$ . Число линий Кикучи, используемых для индексации дифракционных картин, составляло не менее 5. Чтобы повысить надежность полученных EBSD данных при анализе кристаллографической разориентировки зерен, области, состоящие из пяти точек и менее, удалялись как ненадежные [38]. На полученных картах разориентаций различные кристаллографические ориентировки показаны различными цветами. Границы с разориентировками от  $2$  до  $15^\circ$  считались малоугловыми (LABs), а с разориентировками более  $15^\circ$  - высокоугловыми границами (HABs); двойниковые границы  $\Sigma 3$  обозначены как ТВ. Количественный анализ структур проводили согласно рекомендациям (ГОСТ 21073.0-75). За размер зерна принимался эквивалентный диаметр без учета двойниковых границ.

**2. Результаты экспериментов.** В результате экспериментов для длинной трещины ( $h/a=0,7/7,75=0,11$ ) был применен режим электроимпульсной обработки, параметры которой приведены в Таблице 1. Обратим внимание, что данные параметры отличаются по существу от приведенных в работе [5], в которой воздействие осуществлялось в два этапа (серии по 20 и 30 импульсов) с одинаковыми параметрами импульса, тогда как в нашем случае этих этапов оказывается 6 (это подтверждает вышеописанный механизм постепенного залечивания макротрещин в пластинах), с изменяющимися на каждом этапе параметрами импульса.

На последнем этапе в новой вершине трещины образовался кратер (рис. 3). Образование кратера подтверждает, что в области вдоль фронта трещины от её первоначальной вершины и до кратера проводимость материала между берегами трещины восстановлена, а трещина залечена. Необходимо отметить, что воздействие на длинную трещину импульсами (сериями импульсов) с плотностями тока порядка  $10^3$  А/мм<sup>2</sup> и длительностями более 500 мкс [5, 26, 31, 32, 39] приводит к образованию кратера в первоначальной вершине трещины и исключает дальнейшее заваривание её берегов.

При выбранном режиме воздействия удалось залечить 520 мкм усталостной трещины (при первоначальной длине – 5750 мкм), отсчитывая от её первоначальной вершины, что составляет 9,0% от первоначальной длины трещины. Хотя процент залечивания не велик, тем не менее, учитывая, что трещина длинная, абсолютная длина залечивания сопоставима с длинами залечивания трещин в [5, 19–21, 25–28, 31, 32, 39], которые составляли от 260 мкм до 1350 мкм. Исключение составляют работы [29, 30], в которых длина залечивания самой длинной трещины составила 2250 мкм. Однако прямое сравнение этих длин залечивания не корректно, поскольку в [29, 30], в отличие от настоящей работы, для облегчения залечивания были созданы специальные условия, а именно -



до воздействия током берега трещины были очищены от окислов и обработаны специальными никельсодержащими составами, а контактные электроды были подсоединены, так чтобы ток протекал вдоль всего фронта трещины в противоположных направлениях. В наших экспериментах берега трещины специально не подготавливались, а ток протекал перпендикулярно фронту (берегам) трещины (вдоль оси  $x$ ), что затрудняло процесс залечивания.

Таблица 1. Условия электроимпульсного воздействия.

№ этапа воздействия	Максимальная плотность тока в импульсе Положительная/ Отрицательная (кА/мм <sup>2</sup> )	Количество импульсов за этап	Длительность импульса (мкс)	Частота (кГц)
1.	179/-110	2	111	13,3
2.	211/-133	2	110	13,3
3.	453/-283	2	109	13,3
4.	1190/-556	3	107	13,3
5.	1383/-865	3	106	13,3
6.	1937/-1216	1	103	13,3

На рис. 4 видно, что заваривание берегов трещины на поверхности происходило местами, путем образования перемычек между берегами трещины, эти места обведены на рисунке кружками. В данных местах вблизи берегов трещины появились области с мелким зерном. Это новые зёрна, которые возникли после релаксации температуры и быстрой кристаллизации расплава. Вдали от трещины видны большие зёрна исходной микроструктуры стали. Исследование микроструктуры показало, что электроимпульсная обработка образца привела к частичному расплавлению материала по берегам усталостной трещины за счет концентрации электромагнитного поля в её новой вершине, поэтапному заполнению трещины расплавом и кристаллизации расплавленного материала.

Заваривание трещины лучше происходит внутри пластины и соответственно хуже на поверхности. Подтверждение этого факта выявлено экспериментально. Полностью заваренные участки трещины можно увидеть, если сошлифовать часть материала с поверхности вглубь по оси  $z$  или сделать разрез в области кратера (сечение А-А на рис. 3 (b)) пластины плоскостью перпендикулярной фронту трещины. Микроструктура материала в этом сечении показана на рис. 2.

На этом рисунке стрелками обозначены незалеченные участки трещины вблизи поверхности пластины. А также полностью залеченные - в глубине образца. Отсюда следует, что постепенное залечивание трещины происходит внутри образца, в то время как незалеченные участки трещины, выходящие на поверхность пластины, сохраняются. Наблюдается сильная неоднородность залечивания трещины по толщине пластины.

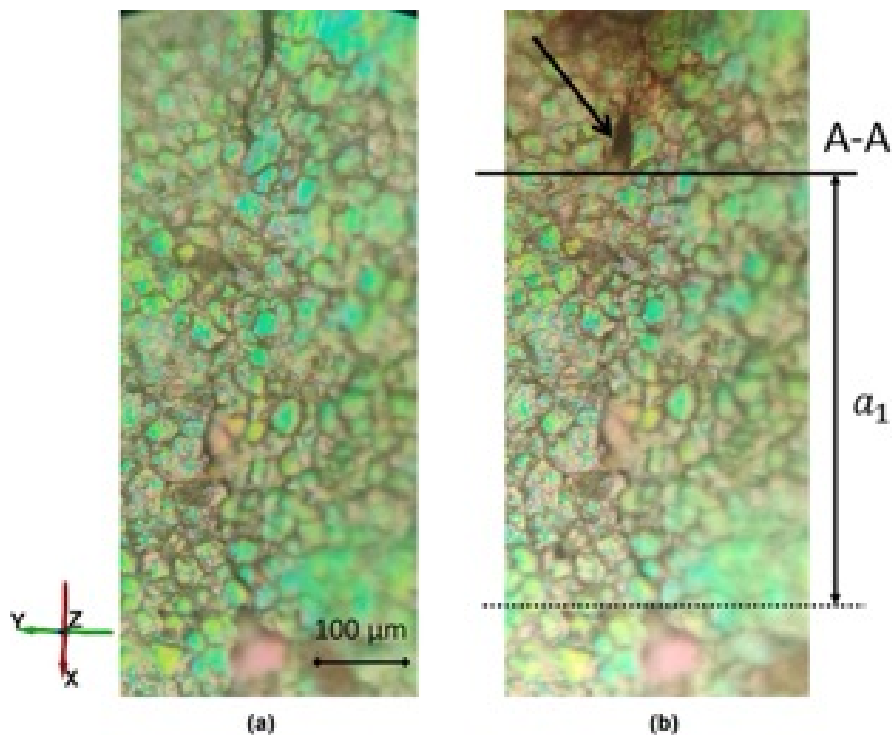


Рис. 3. Микроструктура на поверхности пластины в области залеченной трещины до электроимпульсной обработки (а) и после электроимпульсной обработки (б) (оптическая микроскопия). Стрелкой показан кратер (отверстие) в пластине, образовавшийся в результате электромагнитного воздействия

Поскольку разрез был сделан в области кратера, на нем видно оплавленное отверстие в области срединной плоскости пластины, в которой во время прохождения импульса имеет место максимальный нагрев, и, как следствие, происходит плавление и испарение материала в новой вершине, сопровождаемые выбросом расплавленного металла вдоль фронта трещины (подобный эффект наблюдался в работе [40]). Сила Лоренца в вершине направлена в сторону прямо противоположную направлению выброса, поэтому полагаем, что данное отверстие является результатом взрыва (из-за быстрого испарения материала во время прохождения импульса) в вершине трещины, в процессе которого окружающий расплавленный металл выбрасывается из вершины внутрь трещины. После взрыва и образования отверстия происходит достаточно быстрое последующее остывание окружающего материала за счет теплопроводности. Образование кратера существенно увеличивает радиус кривизны в вершине трещины и уменьшает плотность тока и концентрацию механических напряжений.

Квадратом на рис. 5 выделена залеченная область, для которой проводился анализ микроструктуры методом EBSD, см. рис. 8.



Рис. 4. Микроструктура на полированной поверхности пластины в области залеченной трещины после электроимпульсной обработки (контраст изображения иллюстрирует качество картин Кикучи в EBSD анализе: в более темных областях информации для определения разориентировок кристаллов недостаточно). Кружками обведены области с мелким зерном, в которых берега трещины оказались залечены закристаллизованным расплавом - образовались перемычки

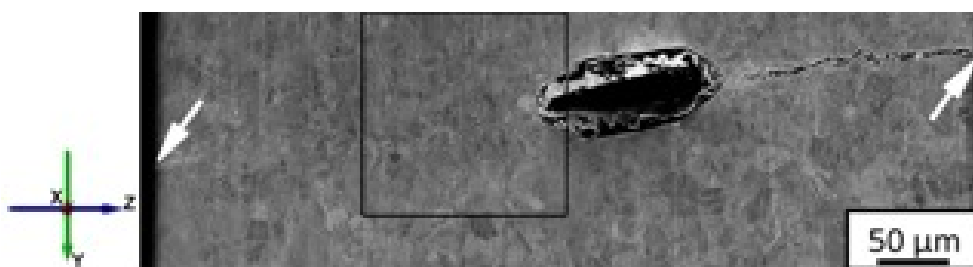


Рис. 5. СЭМ микроструктура в поперечном сечении пластины после электроимпульсной обработки (BSE режим съемки). Стрелками показаны незалеченные участки усталостной трещин вблизи поверхности пластины. Квадратом выделена залеченная область, в которой проводился EBSD анализ

Исходная микроструктура в состоянии поставки представляет собой рекристаллизованные аустенитные зерна, близкие к равноосным (рис. 6). В этих зернах можно наблюдать единичные малоугловые границы и большое количество двойников деформации (рис. 6(b)), доля которых составляет  $f_{TB}=29\%$  (рис. 6(c)). Также видно, что структура неоднородная и имеет бимодальный характер распределения зерен по размерам с локальными максимумами при 0,75 мкм и 24,5 мкм, причем основное количество зерен составляют зерна с размерами более 3 мкм (рис. 6). При этом средний размер зерен составляет  $13.8 \pm 0.6$  мкм. На карте локальной разориентировки наблюдается цветовой контраст, который можно отнести к деформированному состоянию (рис. 6(d)).

На рис. 8 представлены результаты проведенного EBSD анализ для залеченной области, отмеченной квадратом на рис. 5. Видно, что по обеим сторонам от залеченной трещины (области А на рис. 8(a)) наблюдаются участки с развитой

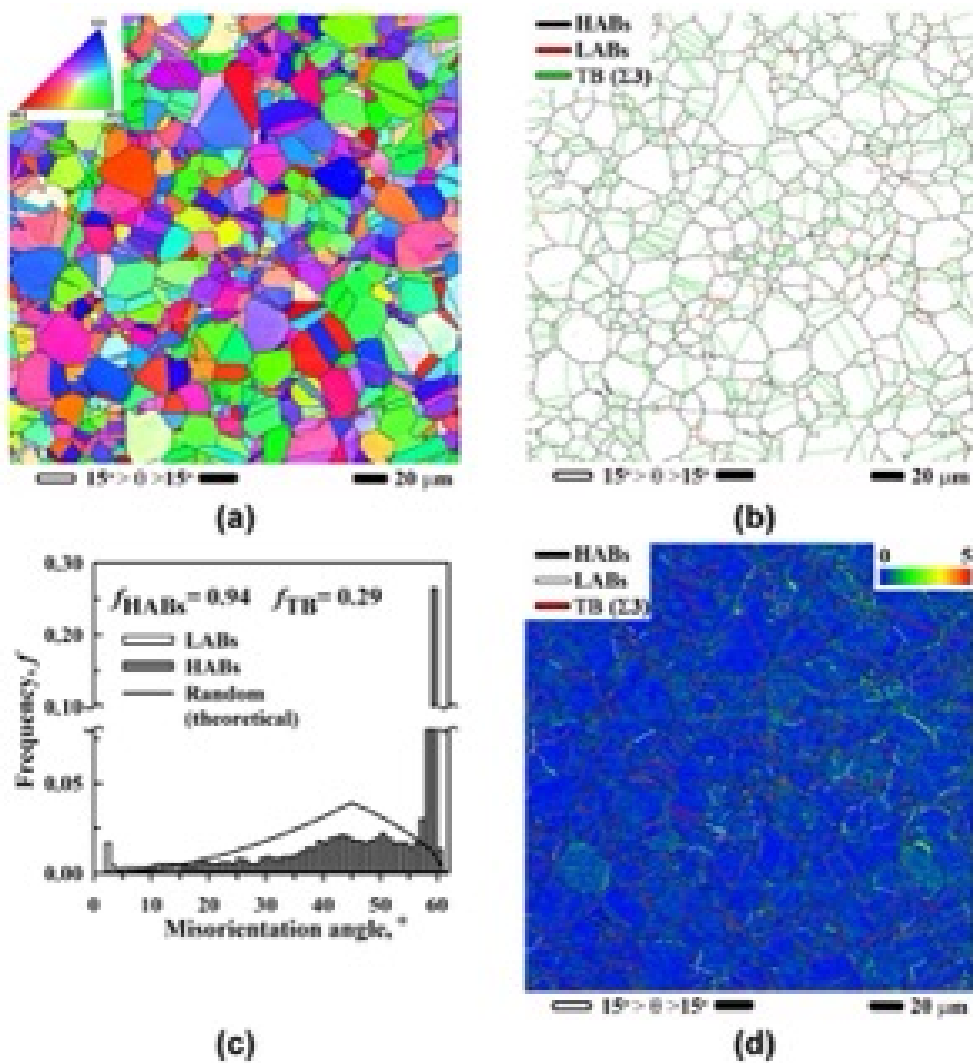


Рис. 6. Микроструктура стали AISI201 в исходном состоянии: ориентационная карта в цветах обратной полюсной фигуры (а), карта распределения границ по углам разориентировки (б), гистограмма распределения границ по углам разориентировки (с), карта локальной разориентировки (цвет, согласно приведённой шкале, показывает угол разориентировки для малоугловых границ, менее  $5^\circ$ ) (д)

субструктурой внутри исходных аустенитных зерен (по сравнению с исходным состоянием доля HABs уменьшается с  $f_{HABs}=94\%$  до  $f_{HABs}=63\%$ ); в этих областях на картах локальной разориентировки зерен преобладает зелёный цвет, см. рис. 8(с). Кроме того, уменьшается доля двойниковых границ по сравнению с исходным состоянием (рис. 9(а)).

После электроимпульсной обработки (на месте усталостной трещины) формируется неоднородная мелкозернистая микроструктура кристаллизационного

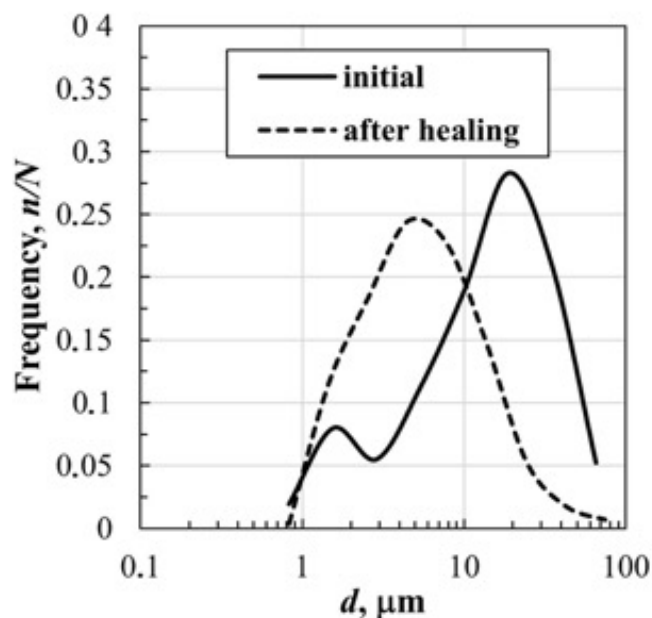


Рис. 7. Гистограммы распределения зерен по размерам в исходном состоянии и в области залеченной трещины после электроимпульсной обработки

происхождения (рис. 8). Наблюдается шлейф из преимущественно вытянутых в направлении залеченной трещины зерен по обоим берегам трещины и структура, близкая к равноосной, в центре залеченной трещины между шлейфами с вытянутыми зернами. Однако, несмотря на качественную неоднородность микроструктуры в зоне залеченной трещины, распределение зерен по размерам близко к нормальному (рис. 7). При этом средний размер зерен в области залеченной трещины составляет  $6.1 \pm 0.4$  мкм. Внутри аустенитных зерен кристаллизационного происхождения наблюдаются единичные малоугловые границы (при этом доля  $HABs$  остается на высоком уровне,  $f_{HABs} = 83\%$ ) и небольшое количество двойников роста, доля которых составляет  $f_{TB} = 15\%$  (рис. 9(b)). При этом значимого цветового контраста на картах локальной разориентировки зерен в этой области не наблюдается (рис. 8(c)). Наблюдаемые в залеченной области по берегам трещины зона шлейфа с вытянутыми и центральная зона с равноосными зернами свидетельствует о постепенном остывании расплава в трещине. Наличие такой микроструктуры в залеченной области подтверждает, что берега трещины были сварены в результате электроимпульсного воздействия в соответствии с вышеописанным механизмом.

Таким образом, в области залеченной трещины образуется улучшенная микроструктура, которая является результатом рассматриваемого воздействия импульсным током, что благоприятно скажется на механических характеристиках материала в этой области.

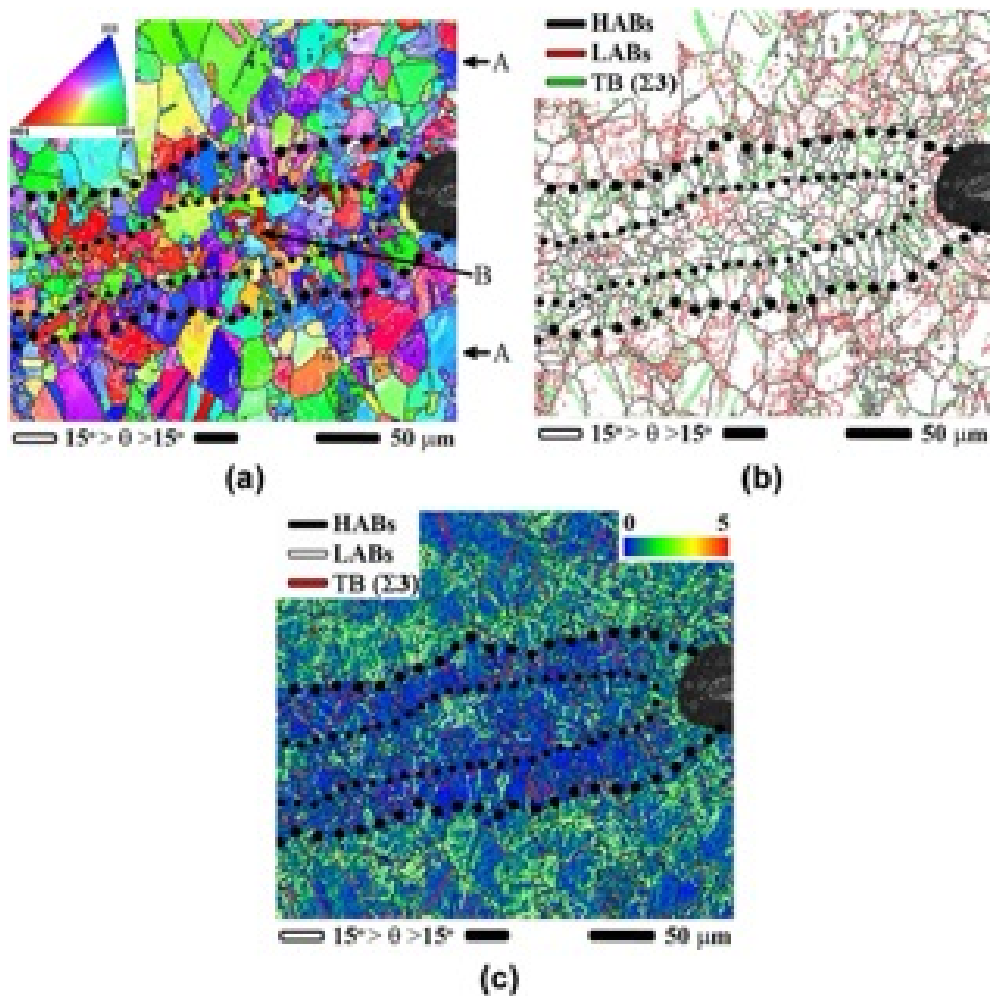


Рис. 8. Результаты EBSD анализа для залеченной области. Черными точками выделены зоны залеченной трещины, иллюстрирующие шлейф с вытянутыми зёрнами по берегам трещин и центральную область с зёрнами, близкими к равноосным. Показаны ориентационная карта в цветах обратной полюсной фигуры (а), карта распределения границ по углам разориентировки (б), карта локальной разориентировки (с)

В остальном объеме образца (за исключением залеченной области) сохраняется исходная микроструктура стали, которая в результате электромагнитного воздействия практически не изменилась.

**Выводы.** Залечивание трещин в металлических изделиях посредством заваривания их берегов в результате электроимпульсной обработки представляет значительный интерес, поскольку позволяет улучшить эксплуатационные

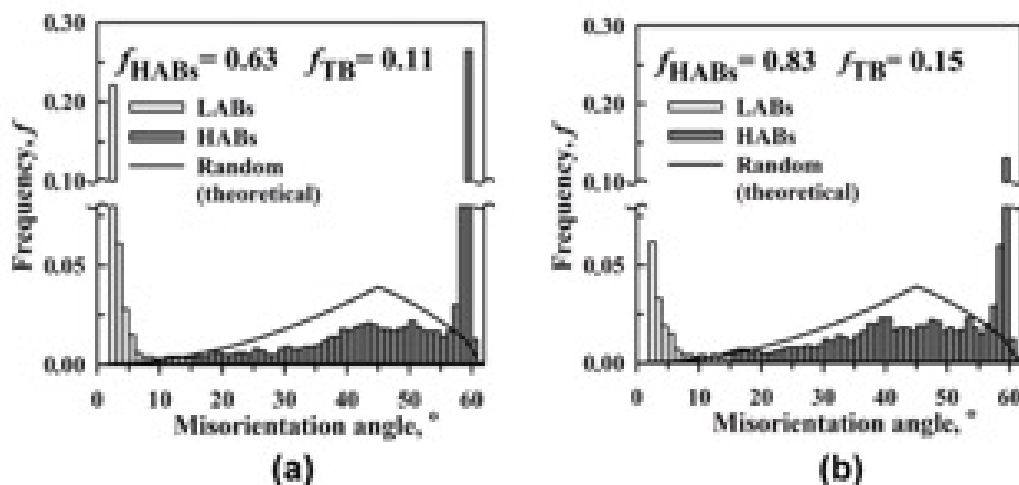


Рис. 9. Гистограмма распределения границ по углам разориентировки в (а) приграничной к усталостной трещине области А (рис. 8(а)) и (б) в области В (рис. 8(а)) залеченной трещины

характеристики изделий. В отличие от электроимпульсной обработки, традиционные термические и термомеханические методы не позволяют залечивать большие (макроскопические) трещины в образцах.

В настоящей работе рассмотрен механизм залечивания длинных макротрещин в тонких пластинах. Залечивание таких трещин представляет особую сложность. Предложенный многоэтапный метод электроимпульсной обработки позволяет залечить значительную длину такой трещины. Тогда как при воздействии на длинную трещину импульсами/сериями импульсов тока с параметрами, используемыми другими исследователями (плотности тока порядка  $10^3$  А/мм<sup>2</sup> и длительностями от 500 мкс) приведут к образованию кратера в первоначальной вершине трещины и исключат дальнейшее заваривание её берегов.

Проведенный анализ микроструктуры подтверждает, что залечивание происходит по механизму заваривания берегов трещины расплавленным материалом, для чего во время прохождения импульса через пластину в вершине трещины удалось одновременно создать значительные сжимающие напряжения и высокую температуру, вызывающую плавление стали. Однако эксперименты показали значительную неоднородность залечивания вдоль фронта и в глубину для длинной макротрещины, которая выражалась наличием несплошностей в залеченной области. При этом качество залечивания улучшалось в глубину с увеличением расстояния от поверхности пластины.

В результате предложенного воздействия в залеченной области формируется улучшенная микроструктура, которая благоприятно скажется на макроскопических свойствах стали в данной области.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа Г.Р.Х. выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований и государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ. EBSD анализ выполнен на оборудовании Центра коллективного пользования «Структурные и физико-механические исследования материалов» ИПСМ РАН. Работа Е.А.К. выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания Уфимского университета науки и технологий (№ 075- 03-2024-123/1) молодежной научно-исследовательской лаборатории «Металлы и сплавы при экстремальных воздействиях». Работа К.К.В. выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания ИПМех РАН № FFGN-2024-0001. Работа Ч.А.В. выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания ИПМех РАН № FFGN-2024-0006.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The work of G.R.Kh. was supported by the Fundamental Research Program and the State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. EBSD analysis was performed on the equipment of the Centre for Collective Use “Structural and Physical and Mechanical Investigations of Materials” of IMSP RAS. The work of E.A.K. was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state task of the Ufa University of Science and Technologies (No. 075- 03-2024-123/1) of the youth research laboratory “Metals and Alloys under Extreme Impacts”. The work of K.V.K. was supported by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract No. FFGN-2024-0001. The work of A.V.C. was supported by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract No. FFGN-2024-0006.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aksenov D. A., Nazarov A. A., Raab G. I. Effects of Severe Plastic Deformation and Ultrasonic Treatment on the Structure, Strength, and Corrosion Resistance of Mg-Al-Zn Alloy // *Materials*. 2022. no. 15. P. 7200. DOI: 10.3390/ma15207200.
- [2] Lapovok R., Ng H. P., Tomus D., Estrin Y. Bimetallic copper–aluminium tube by severe plastic deformation // *Scripta Materialia*. 2012. Vol. 66, no. 12. P. 1081–1084. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2012.03.004.
- [3] Zinovev A. V., Bapanina M. G., Babicheva R. I. et al. Deformation of nanocrystalline binary aluminum alloys with segregation of Mg, Co and Ti at grain



- boundaries // *Physics of Metals and Metallography*. 2017. Vol. 118, no. 1. P. 65–74. DOI: 10.1134/s0031918x16110144.
- [4] Khaliq W., Ehsan M. B. Crack healing in concrete using various bio influenced self-healing techniques // *Construction and Building Materials*. 2016. Vol. 102. P. 349–357. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2015.11.006.
- [5] Cai Q., Zhou M., Bagherpour E. et al. New Insight Into Crack-Healing Mechanism via Electropulsing Treatment // *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2023. Vol. 54, no. 7. P. 2960–2974. DOI: 10.1007/s11661-023-07073-1.
- [6] Tan J., Wang S., Fan Z. et al. Reverse cation segregation and crack self-healing of Ba<sub>0.3</sub>Sr<sub>0.7</sub>Fe<sub>0.9</sub>Mo<sub>0.1</sub>O<sub>3</sub> perovskite four-channel hollow fiber membrane // *Journal of Membrane Science*. 2021. Vol. 639. P. 119753. DOI: 10.1016/j.memsci.2021.119753.
- [7] Yin K., Luo Z., Liu X. et al. Preparation and application of Na<sub>2</sub>SiO<sub>3</sub>@EC microcapsules for self-healing alkali-activated slag // *Construction and Building Materials*. 2023. Vol. 400. P. 132651. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2023.132651.
- [8] Men S. W., Xie J. M., Liu X. et al. A novel crack healing in sprayed FeCrBSi coatings by plasma nitriding // *Vacuum*. 2023. Vol. 209. P. 111768. DOI: 10.1016/j.vacuum.2022.111768.
- [9] Bakan E., Vaßen R. Crack healing mechanisms in atmospheric plasma sprayed Yb-silicate coatings during post-process heat treatment // *Journal of the European Ceramic Society*. 2023. Vol. 43, no. 8. P. 3684–3693. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2023.02.005.
- [10] Dorri Moghadam A., Schultz B. F., Ferguson J. B. et al. Functional Metal Matrix Composites: Self-lubricating, Self-healing, and Nanocomposites-An Outlook // *JOM*. 2014. Vol. 66, no. 6. P. 872–881. DOI: 10.1007/s11837-014-0948-5.
- [11] Wei D. B., Han J. T., Tieu A. K., Jiang Zheng Yi. An Analysis on the Inhomogeneous Microstructure in Crack Healing Area // *Key Engineering Materials*. 2004. Vol. 274–276. P. 1053–1058. DOI: 10.4028/www.scientific.net/kem.274-276.1053.
- [12] Paladugu S. R. M., Sreekanth P. S. R., Sahu S. K. et al. A Comprehensive Review of Self-Healing Polymer, Metal, and Ceramic Matrix Composites and Their Modeling Aspects for Aerospace Applications // *Materials*. 2022. Vol. 15, no. 23. P. 8521. DOI: 10.3390/ma15238521.
- [13] Xin R., Luo J., Ma Q. Effect of Parameters on Internal Crack Healing in 30Cr2Ni4MoV Steel for 600-Ton Ultra-Super Ingots // *Metals*. 2017. Vol. 7, no. 4. P. 149. DOI: 10.3390/met7040149.
- [14] Liverani E., Lutey A. H. A., Ascari A., Fortunato A. The effects of hot isostatic pressing (HIP) and solubilization heat treatment on the density, mechanical properties, and microstructure of austenitic stainless steel parts produced by selective laser melting (SLM) // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2020. Vol. 107, no. 1–2. P. 109–122. DOI: 10.1007/s00170-020-05072-9.
- [15] Bryzgalov V. A., Morkina A. Y., Abdullina D. U. et al. High-Density Pulsed Current: A Review of Its Role in Healing Macrocracks in Metals // *Materials. Technologies. Design*. 2024. Vol. 6, no. 2(17). P. 38–58. DOI: 10.54708/26587572\_2024\_621738.
- [16] Dmitriev S. V., Morkina A. Y., Tarov D. V. et al. Effect of Repetitive High-Density Current Pulses on Plastic Deformation of Copper Wires under Stepwise Loading // *Spectrum of Mechanical Engineering and Operational Research*. 2024. Vol. 1, no. 1. P. 27–43. DOI: 10.31181/smeor1120243.
- [17] Абдуллина Д. У., Бебихов Ю. В., Татаринов П. С., Дмитриев С. В. Обзор последних достижений в области электропластической обработки металлов давлением // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. 2023. Vol. 20, no. 4. P. 469–483. DOI: 10.25712/astu.1811-1416.2023.04.006.
- [18] Моркина А. Ю., Таров Д. В., Наумова Д. М. et al. Влияние повторяющихся импульсов тока высокой плотности на пластическую деформацию медных

- проводов // Известия Уфимского Научного Центра РАН. 2024. no. 3. P. 15–23. DOI: 10.31040/2222-8349-2024-0-3-15-23.
- [19] Zheng X. G., Shi Y.-N., Lu K. Electro-healing cracks in nickel // *Materials Science and Engineering: A*. 2013. Vol. 561. P. 52–59. DOI: 10.1016/j.msea.2012.10.080.
- [20] Sheng Y., Hua Y., Wang X. et al. Application of High-Density Electropulsing to Improve the Performance of Metallic Materials: Mechanisms, Microstructure and Properties // *Materials*. 2018. Vol. 11, no. 2. P. 185. DOI: 10.3390/ma11020185.
- [21] Yin Y., Chen H., Morita Y. et al. Effect of Electropulsing Treatment on the Fatigue Crack Growth Behavior of Copper // *Materials*. 2018. Vol. 11, no. 11. P. 2168. DOI: 10.3390/ma11112168.
- [22] Gallo F., Satapathy S., Ravi-Chandar K. Melting and crack growth in electrical conductors subjected to short-duration current pulses // *International Journal of Fracture*. 2010. Vol. 167, no. 2. P. 183–193. DOI: 10.1007/s10704-010-9543-0.
- [23] Кукуджанов К. В., Ченцов А. В. About healing of porosity in metal under high energy electromagnetic field // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. no. 2(44). P. 116–131. DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.012.
- [24] Kukudzhanov K. V., Levitin A. L. Modelling of some mechanism of metal electroplasticity under pulsed high-energy electromagnetic field action // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1205. P. 012032. DOI: 10.1088/1742-6596/1205/1/012032.
- [25] Kumar A., Paul S. K. Healing of fatigue crack in steel with the application of pulsed electric current // *Materialia*. 2020. Vol. 14. P. 100906. DOI: 10.1016/j.mtla.2020.100906.
- [26] Yu T., Deng D., Wang G., Zhang Hongchao. Crack healing in SUS304 stainless steel by electropulsing treatment // *Journal of Cleaner Production*. 2016. Vol. 113. P. 989–994. DOI: 10.1016/j.jclepro.2015.12.060.
- [27] Yang C., Xu W., Guo B. et al. Healing of Fatigue Crack in 1045 Steel by Using Eddy Current Treatment // *Materials*. 2016. Vol. 9, no. 8. P. 641. DOI: 10.3390/ma9080641.
- [28] Xu W., Yang C., Yu H. et al. Combination of eddy current and heat treatment for crack healing and mechanical-property improvement in magnesium alloy tube // *Journal of Magnesium and Alloys*. 2021. Vol. 9, no. 5. P. 1768–1781. DOI: 10.1016/j.jma.2020.08.022.
- [29] Hosoi A., Nagahama T., Ju Y. Fatigue crack healing by a controlled high density electric current field // *Materials Science and Engineering: A*. 2012. Vol. 533. P. 38–42. DOI: 10.1016/j.msea.2011.11.024.
- [30] Hosoi A., Kishi T., Ju Y. Healing of Fatigue Crack by High-Density Electropulsing in Austenitic Stainless Steel Treated with the Surface-Activated Pre-Coating // *Materials*. 2013. Vol. 6, no. 9. P. 4213–4225. DOI: 10.3390/ma6094213.
- [31] Zhou Y., Qin R., Xiao S. et al. Reversing effect of electropulsing on damage of 1045 steel // *Journal of Materials Research*. 2000. Vol. 15, no. 5. P. 1056–1061. DOI: 10.1557/jmr.2000.0152.
- [32] Zhou Y., Guo J., Gao M., He Guanhu. Crack healing in a steel by using electropulsing technique // *Materials Letters*. 2004. Vol. 58, no. 11. P. 1732–1736. DOI: 10.1016/j.matlet.2003.10.049.
- [33] Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А. О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока // *ДАН СССР*. 1976. Vol. 227, no. 4. P. 848–851.
- [34] Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А. Разрушение вершины трещины сильным электромагнитным полем // *ДАН СССР*. 1977. Т. 237, № 2. С. 325–327.
- [35] Финкель В. М., Головин Ю. И., Иванов В. М., Киперман В. А. Электротермическое разрушение металла электромагнитным полем // *Физика и химия обработки материалов*. 1985. № 2. С. 16–23.

- [36] Kukudzhanov Konstantin V., Levitin Aleksandr Leonidovich, Ugurchiev Umar Kh. Healing of cracks in plates by strong electromagnetic field // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2021. Vol. 25, no. 1. P. 193–202. DOI: 10.14498/vsgtu1831.
- [37] Муругова О. В., Нагимов М. И., Халикова Г. Р., Дмитриев С. В. Методика оценки длины усталостных трещин при их залечивании импульсным током // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. 2024. Т. 21, № 3. С. 294–303. DOI: 10.25712/astu.1811-1416.2024.03.003.
- [38] Humphreys F. J. Characterisation of fine-scale microstructures by electron backscatter diffraction (EBSD) // Scripta Materialia. 2004. Vol. 51, no. 8. P. 771–776. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2004.05.016.
- [39] Yizhou Z., You Z., Guanhu H., Benlian Zhou. The healing of quenched crack in 1045 steel under electropulsing // Journal of Materials Research. 2001. Vol. 16, no. 1. P. 17–19. DOI: 10.1557/jmr.2001.0005.
- [40] Gallo F., Satapathy S., Ravi-Chandar K. Melting and crack growth in electrical conductors subjected to short-duration current pulses // International Journal of Fracture. 2010. Vol. 167, no. 2. P. 183–193. DOI: 10.1007/s10704-010-9543-0.

## REFERENCES

- [1] Aksenov D. A., Nazarov A. A., Raab G. I. Effects of Severe Plastic Deformation and Ultrasonic Treatment on the Structure, Strength, and Corrosion Resistance of Mg-Al-Zn Alloy // Materials. 2022. no. 15. P. 7200. DOI: 10.3390/ma15207200.
- [2] Lapovok R., Ng H. P., Tomus D., Estrin Y. Bimetallic copper–aluminium tube by severe plastic deformation // Scripta Materialia. 2012. Vol. 66, no. 12. P. 1081–1084. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2012.03.004.
- [3] Zinovev A. V., Bapanina M. G., Babicheva R. I. et al. Deformation of nanocrystalline binary aluminum alloys with segregation of Mg, Co and Ti at grain boundaries // Physics of Metals and Metallography. 2017. Vol. 118, no. 1. P. 65–74. DOI: 10.1134/s0031918x16110144.
- [4] Khaliq W., Ehsan M. B. Crack healing in concrete using various bio influenced self-healing techniques // Construction and Building Materials. 2016. Vol. 102. P. 349–357. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2015.11.006.
- [5] Cai Q., Zhou M., Bagherpour E. et al. New Insight Into Crack-Healing Mechanism via Electropulsing Treatment // Metallurgical and Materials Transactions A. 2023. Vol. 54, no. 7. P. 2960–2974. DOI: 10.1007/s11661-023-07073-1.
- [6] Tan J., Wang S., Fan Z. et al. Reverse cation segregation and crack self-healing of Ba<sub>0.3</sub>Sr<sub>0.7</sub>Fe<sub>0.9</sub>Mo<sub>0.1</sub>O<sub>3</sub> perovskite four-channel hollow fiber membrane // Journal of Membrane Science. 2021. Vol. 639. P. 119753. DOI: 10.1016/j.memsci.2021.119753.
- [7] Yin K., Luo Z., Liu X. et al. Preparation and application of Na<sub>2</sub>SiO<sub>3</sub>@EC microcapsules for self-healing alkali-activated slag // Construction and Building Materials. 2023. Vol. 400. P. 132651. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2023.132651.
- [8] Men S. W., Xie J. M., Liu X. et al. A novel crack healing in sprayed FeCrBSi coatings by plasma nitriding // Vacuum. 2023. Vol. 209. P. 111768. DOI: 10.1016/j.vacuum.2022.111768.
- [9] Bakan E., Vaßen R. Crack healing mechanisms in atmospheric plasma sprayed Yb-silicate coatings during post-process heat treatment // Journal of the European Ceramic Society. 2023. Vol. 43, no. 8. P. 3684–3693. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2023.02.005.
- [10] Dorri Moghadam A., Schultz B. F., Ferguson J. B. et al. Functional Metal Matrix Composites: Self-lubricating, Self-healing, and Nanocomposites-An Outlook // JOM. 2014. Vol. 66, no. 6. P. 872–881. DOI: 10.1007/s11837-014-0948-5.

- [11] Wei D. B., Han J. T., Tieu A. K., Jiang Zheng Yi. An Analysis on the Inhomogeneous Microstructure in Crack Healing Area // *Key Engineering Materials*. 2004. Vol. 274–276. P. 1053–1058. DOI: 10.4028/www.scientific.net/kem.274-276.1053.
- [12] Paladugu S. R. M., Sreekanth P. S. R., Sahu S. K. et al. A Comprehensive Review of Self-Healing Polymer, Metal, and Ceramic Matrix Composites and Their Modeling Aspects for Aerospace Applications // *Materials*. 2022. Vol. 15, no. 23. P. 8521. DOI: 10.3390/ma15238521.
- [13] Xin R., Luo J., Ma Q. Effect of Parameters on Internal Crack Healing in 30Cr2Ni4MoV Steel for 600-Ton Ultra-Super Ingots // *Metals*. 2017. Vol. 7, no. 4. P. 149. DOI: 10.3390/met7040149.
- [14] Liverani E., Lutey A. H. A., Ascari A., Fortunato A. The effects of hot isostatic pressing (HIP) and solubilization heat treatment on the density, mechanical properties, and microstructure of austenitic stainless steel parts produced by selective laser melting (SLM) // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2020. Vol. 107, no. 1–2. P. 109–122. DOI: 10.1007/s00170-020-05072-9.
- [15] Bryzgalov V. A., Morkina A. Y., Abdullina D. U. et al. High-Density Pulsed Current: A Review of Its Role in Healing Macrocracks in Metals // *Materials. Technologies. Design*. 2024. Vol. 6, no. 2(17). P. 38–58. DOI: 10.54708/26587572\_2024\_621738.
- [16] Dmitriev S. V., Morkina A. Y., Tarov D. V. et al. Effect of Repetitive High-Density Current Pulses on Plastic Deformation of Copper Wires under Stepwise Loading // *Spectrum of Mechanical Engineering and Operational Research*. 2024. Vol. 1, no. 1. P. 27–43. DOI: 10.31181/smeor1120243.
- [17] Abdullina D. U., Bebikhov Yu. V., Tatarinov P. S., Dmitriev S. V. Review of recent achievements in the field of electroplastic metal forming (in Russ.) // *Fundamental'nye problemy sovremennogo materialovedeniya (Basic Problems of Material Science (BPMS))*. 2023. Vol. 20, no. 4. P. 469–483. DOI: 10.25712/astu.1811-1416.2023.04.006.
- [18] Morkina A. Y., Tarov D. V., Naumova D. M. et al. Effect of repetitive high-density current pulses on plastic deformation of copper wires (In Russ.) // *Izvestia Ufimskogo Nauchnogo Tsentra RAN*. 2024. no. 3. P. 15–23. DOI: 10.31040/2222-8349-2024-0-3-15-23.
- [19] Zheng X. G., Shi Y.-N., Lu K. Electro-healing cracks in nickel // *Materials Science and Engineering: A*. 2013. Vol. 561. P. 52–59. DOI: 10.1016/j.msea.2012.10.080.
- [20] Sheng Y., Hua Y., Wang X. et al. Application of High-Density Electropulsing to Improve the Performance of Metallic Materials: Mechanisms, Microstructure and Properties // *Materials*. 2018. Vol. 11, no. 2. P. 185. DOI: 10.3390/ma11020185.
- [21] Yin Y., Chen H., Morita Y. et al. Effect of Electropulsing Treatment on the Fatigue Crack Growth Behavior of Copper // *Materials*. 2018. Vol. 11, no. 11. P. 2168. DOI: 10.3390/ma11112168.
- [22] Gallo F., Satapathy S., Ravi-Chandar K. Melting and crack growth in electrical conductors subjected to short-duration current pulses // *International Journal of Fracture*. 2010. Vol. 167, no. 2. P. 183–193. DOI: 10.1007/s10704-010-9543-0.
- [23] Kukudzhanov K. V., Chentsov A. V. About healing of porosity in metal under high energy electromagnetic field (In Russ.) // *Bulletin of The Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Series: Mechanics of Limit State*. 2020. no. 2(44). P. 116–131. DOI: 10.37972/chgpu.2020.44.2.012.
- [24] Kukudzhanov K. V., Levitin A. L. Modelling of some mechanism of metal electroplasticity under pulsed high-energy electromagnetic field action // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1205. P. 012032. DOI: 10.1088/1742-6596/1205/1/012032.
- [25] Kumar A., Paul S. K. Healing of fatigue crack in steel with the application of pulsed electric current // *Materialia*. 2020. Vol. 14. P. 100906. DOI: 10.1016/j.mtla.2020.100906.

- [26] Yu T., Deng D., Wang G., Zhang Hongchao. Crack healing in SUS304 stainless steel by electropulsing treatment // *Journal of Cleaner Production*. 2016. Vol. 113. P. 989–994. DOI: 10.1016/j.jclepro.2015.12.060.
- [27] Yang C., Xu W., Guo B. et al. Healing of Fatigue Crack in 1045 Steel by Using Eddy Current Treatment // *Materials*. 2016. Vol. 9, no. 8. P. 641. DOI: 10.3390/ma9080641.
- [28] Xu W., Yang C., Yu H. et al. Combination of eddy current and heat treatment for crack healing and mechanical-property improvement in magnesium alloy tube // *Journal of Magnesium and Alloys*. 2021. Vol. 9, no. 5. P. 1768–1781. DOI: 10.1016/j.jma.2020.08.022.
- [29] Hosoi A., Nagahama T., Ju Y. Fatigue crack healing by a controlled high density electric current field // *Materials Science and Engineering: A*. 2012. Vol. 533. P. 38–42. DOI: 10.1016/j.msea.2011.11.024.
- [30] Hosoi A., Kishi T., Ju Y. Healing of Fatigue Crack by High-Density Electropulsing in Austenitic Stainless Steel Treated with the Surface-Activated Pre-Coating // *Materials*. 2013. Vol. 6, no. 9. P. 4213–4225. DOI: 10.3390/ma6094213.
- [31] Zhou Y., Qin R., Xiao S. et al. Reversing effect of electropulsing on damage of 1045 steel // *Journal of Materials Research*. 2000. Vol. 15, no. 5. P. 1056–1061. DOI: 10.1557/jmr.2000.0152.
- [32] Zhou Y., Guo J., Gao M., He Guanhu. Crack healing in a steel by using electropulsing technique // *Materials Letters*. 2004. Vol. 58, no. 11. P. 1732–1736. DOI: 10.1016/j.matlet.2003.10.049.
- [33] Finkel V. M., Golovin Yu. I., Sletkov A. A. Possibility of Braking Rapid Cracks by Pulses of Current // *Sov. Phys. Dokl*. 1976. Vol. 21, no. 4. P. 848–851.
- [34] Finkel V. M., Golovin Yu. I., Sletkov A. A. Fracture of crack tip by high-energy electromagnetic field // *Sov. Phys. Dokl*. 1977. Vol. 22. P. 683–685.
- [35] Finkel V. M., Golovin Yu. I., Ivanov V. M., Kiperman V. A. Electro thermal destruction of the metal by electromagnetic field (In Russ.) // *Fizika i Khimiya Obrabotki Materialov*. 1985. no. 2. P. 16–23.
- [36] Kukudzhanov Konstantin V., Levitin Aleksandr Leonidovich, Ugurchiev Umar Kh. Healing of cracks in plates by strong electromagnetic field // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 25, no. 1. P. 193–202. DOI: 10.14498/vsgtu1831.
- [37] Murugova O. V., Nagimov M. I., Khalikova G. R., Dmitriev S. V. Method for Estimating the Length of Fatigue Cracks During their Healing by Pulsed Electric Current (In Russ.) // *Fundamentalnye Problemy Sovremennogo Materialovedeniya (Basic Problems of Material Science)*. 2024. Vol. 21, no. 3. P. 294–303. DOI: 10.25712/astu.1811-1416.2024.03.003.
- [38] Humphreys F. J. Characterisation of fine-scale microstructures by electron backscatter diffraction (EBSD) // *Scripta Materialia*. 2004. Vol. 51, no. 8. P. 771–776. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2004.05.016.
- [39] Yizhou Z., You Z., Guanhu H., Benlian Zhou. The healing of quenched crack in 1045 steel under electropulsing // *Journal of Materials Research*. 2001. Vol. 16, no. 1. P. 17–19. DOI: 10.1557/jmr.2001.0005.
- [40] Gallo F., Satapathy S., Ravi-Chandar K. Melting and crack growth in electrical conductors subjected to short-duration current pulses // *International Journal of Fracture*. 2010. Vol. 167, no. 2. P. 183–193. DOI: 10.1007/s10704-010-9543-0.

О. К. Гаришин<sup>1</sup>, В. В. Шадрин<sup>1,2</sup>, И. А. Морозов<sup>1,2</sup>

## АНАЛИЗ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ СИЛИКОНОВЫХ РЕЗИН

<sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

<sup>2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
Пермь, Россия

**Аннотация.** Проведены механические испытания силиконового каучука и нанокompозитов на его основе с использованием программы "вложенных циклических деформаций". Образец подвергался циклическому нагружению с изменяющимися скоростью и амплитудой деформирования, причем минимальные цикловые деформации на каждом последующем шаге возрастали, а максимальные уменьшались. Скорость деформирования на протяжении цикла оставалась постоянной, но уменьшалась с переходом на следующий. При достижении минимальных и максимальных цикловых деформаций захваты разрывной машины останавливались на фиксированный промежуток времени для снятия соответствующих релаксационных зависимостей. По результатам испытаний строились деформационная и временная (релаксационная) кривые нагружения, а на их основе рассчитывались соответствующие равновесные зависимости. С их помощью были исследованы вязкоупругие свойства эластомерных нанокompозитов в зависимости от типа наполнителя (при одинаковой массовой концентрации) и скорости деформирования. В качестве наполнителя использовались детонационные нанодалмазы и малослойный графен. Установлено, что для этих материалов диссипативные цикловые потери при нагрузке всегда больше чем при разгрузке и это соотношение слабо зависит от скорости деформирования. Проведена количественная оценка размягчения Маллинза и определена доля диссипативных потерь, приходящаяся на этот эффект. С помощью равновесных кривых также определены количественные значения остаточных деформаций.

**Ключевые слова:** силиконовые эластомеры, детонационные нанодалмазы, малослойный графен, механические испытания, циклические конечные деформации, вязкоупругость, эффект Маллинза, остаточные деформации.

**Гаришин Олег Константинович**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН; e-mail: gar@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7384-7366>; AuthorID: 5880

**Шадрин Владимир Васильевич**, ведущий инженер лаборатории микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН; e-mail: shadrin@icmm.ru; <https://orcid.org/0009-0004-8172-6168>; AuthorID: 10927

**Морозов Илья Александрович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН; e-mail: imorozov@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6395-4301>; AuthorID: 172118

*для цитирования:* Гаришин О.К., Шадрин В.В., Морозов И.А. Анализ вязкоупругих свойств силиконовых резин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 40–52. DOI: 10.37972/chgru.2024.62.4.003 EDN: RDPYQN

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

O. K. Garishin<sup>1</sup> V. V. Shadrin<sup>1,2</sup> I. A. Morozov<sup>1,2</sup>

## ANALYSIS OF VISCOELASTIC PROPERTIES OF SILICONE RUBBERS

<sup>1</sup>*Institute of Continuous Media Mechanics, Perm, Russia*

<sup>2</sup>*Perm State university, Perm, Russia*

**Abstract.** Mechanical tests of silicone rubber and nanocomposites based on it were carried out using the "nested cyclic deformations" program. The sample was subjected to cyclic loading with changing deformation rate and amplitude, with the minimum cyclic deformations increasing at each subsequent step, and the maximum ones decreasing. The deformation rate at each cycle remained constant. Upon reaching the minimum and maximum cyclic deformations, the grips of the tensile testing machine were stopped for a fixed period of time to remove the corresponding relaxation dependencies. Based on the test results, deformation and time (relaxation) loading curves were constructed, and the corresponding equilibrium dependencies were calculated based on them. The viscoelastic properties of elastomeric nanocomposites were studied depending on the filler type (at the same mass concentration) and deformation rate with their help,. Detonation nanodiamonds and few-layer graphene were used as fillers. It is established that for these materials the dissipative cyclic losses under loading are always greater than under unloading and this ratio weakly depends on the deformation rate. A quantitative assessment of the Mullins softening is carried out and the share of dissipative losses due to this effect is determined. Quantitative values of residual deformations are also determined using equilibrium curves.

**Keywords:** silicone elastomers, detonation nanodiamonds, few-layer graphene, mechanical testing, cyclic finite deformations, viscoelasticity, Mullins effect, residual deformations.

**Oleg K. Garishin**, Doctor of Sciences, Senior researcher of the lab of micromechanics of structurally inhomogeneous media of ICMM UB RAS; e-mail: gar@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7384-7366>; AuthorID: 5880

**Vladimir V. Shadrin**, Lead engineer of the lab of micromechanics of structurally inhomogeneous media of ICMM UB RAS; e-mail: shadrin@icmm.ru; <https://orcid.org/0009-0004-8172-6168>; AuthorID: 10927

**Ilya A. Morozov**, PhD, Senior researcher of the lab of micromechanics of structurally inhomogeneous media of ICMM UB RAS; e-mail: imorozov@icmm.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6395-4301>; AuthorID: 172118

**to cite this article:** Garishin O. K., Shadrin V. V., Morozov I. A. ANALYSIS OF VISCOELASTIC PROPERTIES OF SILICONE RUBBERS // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 40–52. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.003 EDN: RDPYQN

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

Received: 28.09.24;

accepted: 06.12.24;

published: 27.12.24.



**1. Введение.** Силиконовые резины — это эластомерные композиты на основе силоксановых (кремнийорганических) каучуков. Их главное отличие от других эластомеров в том, что они способны сохранять свои механические свойства в гораздо более широком температурном интервале — от  $-90$  до  $+200^{\circ}\text{C}$  (кратковременно до  $+300^{\circ}\text{C}$ ) [1, 2]. В этом интервале также сохраняются их работоспособность при воздействии кислорода и озона, ряда агрессивных сред и радиационная стойкость. При температурах близких к комнатной, время сохранения свойств таких эластомеров может составлять десятки лет. Для них также характерна значительно более низкая электро и теплопроводность. Связано это с тем, что полимерные молекулярные цепочки в этих материалах в основном содержат чередующиеся атомы кремния и кислорода, а не углерода и водорода (как в обычных каучуках). Несмотря на относительно более низкую прочность силиконовые резины (благодаря своим уникальным свойствам) широко используются в таких отраслях как авиационная и автомобильная промышленность, строительство, кабельная техника и т.д.

С точки зрения механики силиконовые резины представляют собой композитные системы, состоящими из комбинации относительно мягкой эластомерной матрицы и намного более жестких и прочных включений (наполнитель). Добавка в силиконовые каучуки различных усиливающих наполнителей производится, как правило, для улучшения его механических характеристик (в частности прочностных), но это также может вызывать и другие изменения серьезные изменения в их физико-механическом поведении, которые обязательно надо учитывать при производстве и эксплуатации изделий из этих материалов. К важнейшим из них можно отнести следующие эффекты: Во-первых, в композите, как правило, происходит существенное усиление вязкоупругих эффектов по сравнению с чистым эластомером [3]. Во-вторых, это эффект размягчения Маллинза [4, 5], который заключается в уменьшении механического сопротивления наполненного эластомера при повторном деформировании в области нагрузок, меньших максимальной нагрузки, достигнутой за всю предыдущую историю деформирования. При циклических испытаниях с остановками на релаксацию он проявляется в том, что кривая нагружения второго и последующих циклов идет существенно ниже, чем первого. При этом после длительного отдыха (десять дней) или при термостатировании при повышенной температуре (в течение суток) первоначальные свойства резины восстанавливаются [6].

Одним из наиболее эффективных способов получения информации о механических свойствах столь сложных по реологическому поведению материалов является проведение экспериментов со сложной траекторией деформирования в виде различных комбинаций, состоящих из циклической нагрузки — разгрузки образца с периодическими остановками на релаксацию или ползучесть [7, 8]. Например, в [9] использовалось циклическое нагружение образцов с постоянной амплитудой по деформациям, в [10] описаны циклические испытания с нарастающей амплитудой по деформациям, в [11] — образцы подвергались симметричной циклической деформации "растяжение — сжатие" с нарастающей на

каждом следующем шаге амплитудой; в [3] циклически деформировали образец с растущей пошаговой амплитудой по деформациям и остановками на релаксацию при смене направления движения захватов.

В данной работе использовалась специальная методика "одноосных испытаний с вложенными циклами" разработанная именно для данного класса материалов [12]. Это позволило за один опыт получать информацию о механическом поведении образца в зависимости от величины и скорости приложения нагрузки (упругость, вязкость, размягчение Маллинза, остаточные деформации).

**2. Материалы и испытательное оборудование.** Основным объектом экспериментальных исследований были эластомерные композиты на основе силиконового каучука *Elastosil R 401/40*. Этот полимер широко используется в современной промышленности и производится в массовых масштабах. Он имеет много различных применений, подходит для переработки литьем, экструзией, используется для производства уплотнений, листов, труб и профилей. При дополнительном отверждении имеет допуск контакта с пищевыми продуктами.

В качестве наполнителей использовались детонационные наноалмазы (ДНА) [13] и малослойный графен (МСГ) [14].

Наночастицы из детонационных наноалмазов имеют форму зерен с характерным размером примерно 6–10 нм. ДНА получают из углерода, содержащегося во взрывчатом веществе с отрицательным кислородным балансом (например, гексоген), при его подрыве в неокислительной среде (жидкой или газообразной) [15]. Эти частицы сочетают в себе высокую прочность, химическую стойкость ядра и химическую активность периферической оболочки.

Вторым наполнителем был малослойный графен, который получали по оригинальной методике, разработанной в НИИ синтетического каучука им. академика С.В. Лебедева, (НИИСК, Санкт-Петербург, РФ) [16]. Она базируется на СВС синтезе (самораспространяющийся высокотемпературный синтез) графеновых наноструктур из гидролизного лигнина — природного биополимера, являющегося отходом деревообрабатывающей промышленности. Характерный размер частиц малослойного графена составлял порядка 100–300 нм. Сам графен по своей структуре является двумерным кристаллом, состоящим из одиночного слоя атомов углерода, собранных в гексагональную решетку, тогда как частицы малослойного графена представляют собой достаточно прочные агрегаты из хаотически "спаянных" пластинок различного размера [17, 19, 19].

Всего было изготовлено и испытано три партии образцов: I — силиконовая резина *Elastosil R 401/40* в чистом виде без наполнителя; II — *Elastosil R 401/40*, содержащий 7 массовых частей ДНА; III — *Elastosil R 401/40*, содержащий 7 массовых частей МСГ.

Все образцы имели лопаточную форму, соответствующую международному стандарту *ISO 527-2 5A*. Размеры рабочей части составляли 20×4×2 мм. Эксперименты проводились на четырехвекторном стенде для одно- двухосных испытаний *Zwick/Roell*, в комплект оборудования которого входит видеоэкстензометр *VideoXtens* для бесконтактного измерения деформации образца. Эта

установка позволяет с высокой точностью задавать сложные траектории нагружения и отслеживать усилия и перемещения в рабочей части образца в широком диапазоне скоростей движения захватов.

**3. Программа испытаний.** Используемая в экспериментах методика испытаний "Одноосное нагружение с вложенными циклами" состояла из четырех циклов нагружения с уменьшающимися на каждом шаге амплитудой и скоростью деформирования и последующей разгрузки. В начале циклового нагружения и в конце разгрузки (т.е. при минимальных и максимальных цикловых деформациях) производилась остановка захватов разрывной машины на фиксированный промежуток времени для определения релаксационных зависимостей. Для каждого из циклов задавались следующие параметры (таблица 1):  $\lambda_{max}$  и  $\lambda_{min}$  – максимальная и минимальная кратности удлинения рабочей части образца (отношение деформированной длины рабочей части образца к исходной);  $V_{load} = d\lambda_{load}/dt$  и  $V_{unload} = d\lambda_{unload}/dt$  – скорости деформирования при растяжении и разгрузке;  $t_{load}$  и  $t_{unload}$  – время остановки на релаксацию после растяжения и после разгрузки.

№ цикла	$\lambda_{max}$	$ V_{load} $ , 1/мин.	$t_{load}$ , мин.	$\lambda_{min}$	$ V_{unload} $ , 1/мин.	$t_{unload}$ , мин.
1	2.0	4.0	15	1.1	4.00	15
2	1.9	4.0	15	1.2	4.00	15
3	1.8	1.0	15	1.3	1.00	15
4	1.7	0.25	15	1.4	0.25	15

Таблица 1. Программа механических испытаний с вложенными циклами

Далее следовала окончательная разгрузка образца, которая состояла из двух шагов: 1) уменьшение деформаций до момента, пока растягивающее усилие  $F$  не уменьшится до 0.1 Ньютона и остановка на 15 минут для релаксации напряжений; 2) собственно окончательное снятие нагрузки. Скорость деформирования на обоих этих шагах составляла  $0.1 \text{ мин}^{-1}$ .

Последняя процедура проводилась для определения начального участка равновесной зависимости напряжений от деформации после последней релаксации (то есть фактически для поиска остаточных деформаций). Эту кривую строили с использованием релаксационной зависимости по точкам, соответствующим окончанию процесса релаксации в конце цикловой нагрузки и разгрузки. Полученные точки на графике аппроксимировались с помощью сплайн-интерполяции.

Равновесная зависимость напряжений от деформаций соответствует столь медленному деформированию материала, что все реологические процессы успевают полностью осуществиться за время эксперимента. К сожалению, делать очень продолжительные остановки затруднительно, так как эксперимент тогда будет занимать слишком много времени. Поэтому в нашем случае мы ограничились остановками на 15 минут. С учетом того, что в эластомерах падение

напряжений с течением времени происходит обычно по экспоненте [20], такой выбор времени на релаксацию позволяет с приемлемой точностью построить приближенную равновесную зависимость (достаточную для качественной оценки). Специально проведенные исследования показали, что в наших материалах различие в падении напряжений при релаксации в течение 15 минут и часа не превышает 5

**4. Обсуждение результатов.** На рисунках 1, 2 и 3 представлены экспериментальные деформационные и временные кривые нагружения ( $\sigma$  — истинные напряжения (отношение силы к текущему поперечному сечению образца),  $\lambda$  — кратность удлинения,  $t$  — время в минутах), полученные для ненаполненных образцов (рис. 1а и 1б), а также содержащих 7 м.ч. ДНА (рис. 2а и 2б) и 7 м.ч. МСГ (рис. 3а и 3б). Штриховыми линиями (серым) показаны равновесные кривые нагружения. Анализ данных графиков показал следующее: Начальный

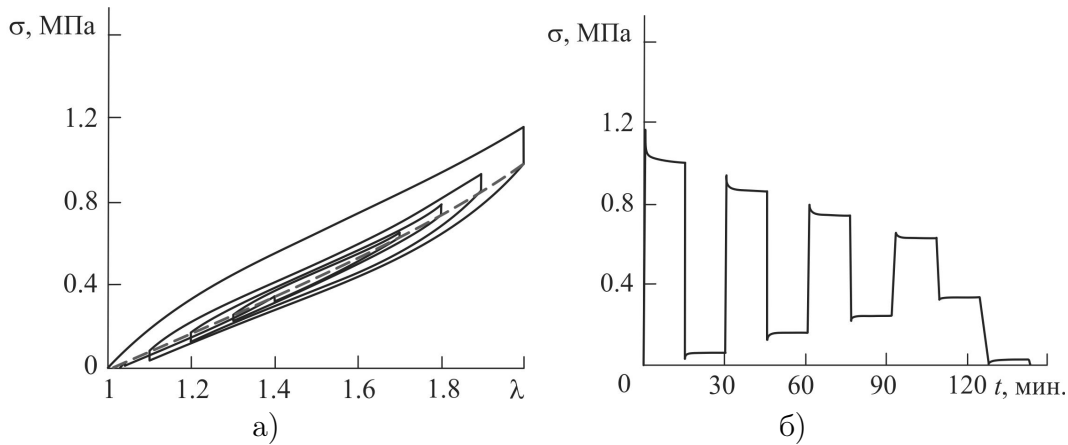


Рис. 1. Деформационные (а) и временные (б) кривые нагружения для ненаполненного образца

упругий модуль ( $E_0$ ) это тангенс угла наклона касательной на начальном участке первого цикла нагружения, то есть это характеристика исходной жесткости еще не "тренированного" деформированием образца. Для чистого (без наполнителя) эластомера он был равен 2.0 МПа. В наполненных системах значения  $E_0$  были выше — для композита, содержащего детонационные наноалмазы  $E_0 = 3.2$  МПа, а при наполнении малослойным графеном  $E_0 = 3.6$  МПа. Следует помнить, что для вязкоупругих материалов  $E_0$  зависит от скорости деформирования, то есть он не может быть универсальной характеристикой. Поэтому для описания упругих свойств таких материалов лучше использовать равновесную кривую нагружения.

Под равновесным упругим модулем ( $E_{eq}$ ) понимали тангенс угла наклона касательной на начальном участке равновесной кривой. Фактически соответствует модулю Юнга "размягченного" (как следствие действия эффекта Маллинза)

материала. Для ненаполненного материала он составил 0.9 МПа, для композита с ДНА — 0.96 МПа, а в случае с МСГ — 0.91 МПа. Таким образом, рассчитанные по равновесным кривым модули оказались существенно меньше  $E_0$ , и разница между ними была невелика.

Диссипативные свойства исследуемых материалов оценивали следующим образом: Действующие в материале напряжения можно представить в виде суммы равновесной и диссипативной составляющих. Компонента  $\sigma_{eq}$  равновесного тензора, направленная вдоль оси нагружения, определяется по равновесной кривой, а аналогичная диссипативная компонента  $\sigma_{dis}$  равна разности между замеренным в эксперименте напряжением  $\sigma$  и  $\sigma_{eq}$ . Поэтому при анализе диссипативных (вязких) свойств исследуемых композитов использовали следующую методику: В середине диапазона изменений  $\lambda$  выбирался интервал, для которого выполняются следующие условия: 1) там присутствуют все вложенные циклы; 2) скорости движения захватов разрывной машины постоянны. В нашем случае его брали равным  $1.5 \pm 0.05$ .

Для каждого  $i$ -го отрезка деформационной кривой  $\sigma(\lambda)$ , ограниченного этим интервалом, рассчитывались значения соответствующих интегралов  $\int \sigma d\lambda$  (то есть площадей под кривыми), которые в виде различных комбинаций и использовались в качестве характеристик диссипативных свойств:

- $S_i$  — площадь, ограниченная кривыми нагрузки и разгрузки на  $i$ -м цикле;
- $A_i$  — площадь между кривой нагрузки на  $i$ -м цикле и равновесной кривой;
- $B_i$  — площадь между кривой разгрузки на  $i$ -м цикле и равновесной кривой;
- $S_{soft}$  — площадь между кривыми нагружения на первом и втором циклах.

$S_i$  - диссипативные потери на вложенном  $i$ -м цикле.  $A_i$  и  $B_i$  — цикловые потери при нагрузке и разгрузке соответственно ( $S_i = A_i + B_i$ ).  $S_{soft}$  — вязкоупругое размягчение материала после первого вложенного цикла (эффект Маллинза). Так как на каждом последующем цикле (кроме двух первых) скорость деформирования уменьшалась, то фактически это зависимости диссипативных потерь от скорости деформирования. Использование приведенных выше характеристик позволило установить следующее. 1) Ввод наполнителя в силиконовый эластомер способствует общему возрастанию диссипативных потерь, то есть усилению вязкоупругих свойств. 2) Во всех испытаниях снижение скорости деформирования приводило к уменьшению диссипативных потерь (циклы 2, 3 и 4). 3) Для уже размягченных материалов эти потери при нагружении были примерно в 1.5–2 раза больше чем при разгрузке. Отношения  $A_i/B_i$  ( $i = 2, \dots, 4$ ) на каждом последующем цикле также уменьшались, но незначительно. Отсюда можно сделать вывод, что скорость деформирования слабо влияет на соотношение цикловых диссипативных потерь при нагрузке и разгрузке для данных материалов. 4) Значительное превышение значений  $S_1$  и  $A_1/B_1$  по сравнению с

последующими циклами вполне объясняется хорошо известным для наполненных эластомеров эффектом размягчения Маллинза, открытого еще в середине 20-го века [4]. Наиболее явно он проявляется при достаточно больших скоростях деформирования. Чтобы вычленил из общей картины развития диссипации именно этот эффект скорости деформирования на первом и втором циклах нагружения были одинаковыми ( $4 \text{ мин}^{-1}$ ) и в несколько раз превышали те, что задавались на последующих циклах и при окончательной разгрузке. На графиках видно, что как в чистом силиконовом эластомере, так и в композитах доля потерь от эффекта Маллинза составляет примерно половину от общей диссипации на первом цикле, хотя в количественном отношении ввод 7 м.ч. наполнителя давал увеличение  $S_{soft}$  примерно в полтора раза. 5) Рассчитанные по равновесным кривым остаточные деформации у чистого эластомера оказались невелики (около 2 %). Ввод наполнителя вызвал их увеличение — примерно до 12 % у композита с ДНА и 10 % в случае МСГ.

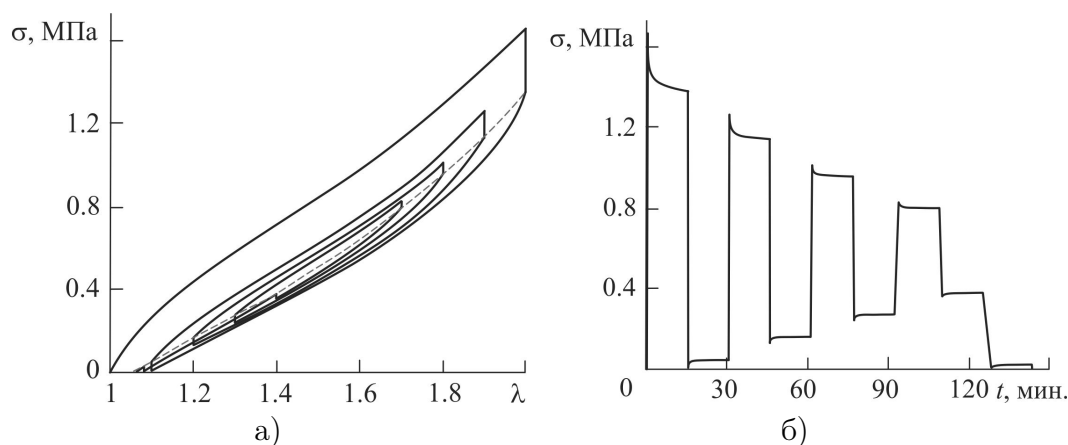


Рис. 2. Деформационные (а) и временные (б) кривые нагружения для образца, содержащего 7 м.ч. детонационных наноалмазов (ДНА)

**5. Заключение** Циклические испытания эластомерных нанокомпозитов на основе силиконового каучука и дисперсных наполнителей (детонационные наноалмазы и малослойный графен) методом "Вложенных циклов позволили исследовать особенности их вязкоупругого поведения выявить для них следующие основные закономерности:

- Ввод наполнителя в силиконовый эластомер способствует усилению его вязкоупругих свойств.
- Снижение скорости деформирования ведет к уменьшению диссипативных потерь.
- Диссипативные потери при нагружении примерно в 1.5–2 раза больше чем при разгрузке, причем скорость деформирования слабо влияет на это соотношение.

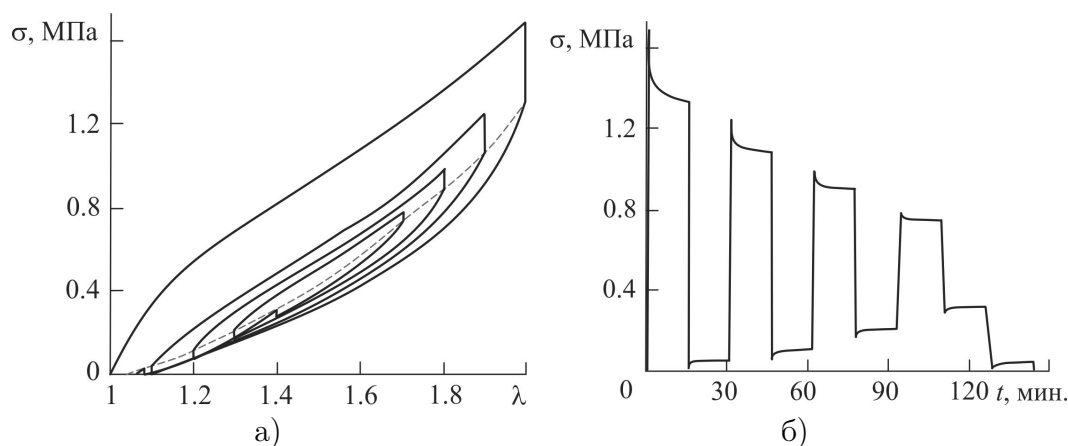


Рис. 3. Деформационные (а) и временные (б) кривые нагружения для образца, содержащего 7 м.ч. малослойного графена (МСГ)

- Как в чистом силиконовом эластомере, так и в композитах доля потерь от эффекта Маллинза составляет примерно половину от общей диссипации на первом цикле, хотя в количественном отношении ввод 7 м.ч. наполнителя давал увеличение  $S_{soft}$  примерно в полтора раза.
- Ввод наполнителя ведет к увеличению остаточных деформаций (хотя в целом их значения остаются относительно малыми).

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** О.К. Гаришин: написание текста рукописи, обзор литературы, В.В. Шадрин: проведение экспериментов, написание текста рукописи, И.А. Морозов: обработка данных, редактирование текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках госбюджетной темы (рег. номер АААА-А20-120022590044-7).

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** O.K. Garishin: writing the text of the manuscript, reviewing the literature, V.V. Shadrin: conducting experiments, writing the text of the manuscript, I.A. Morozov: data analysis, editing the text of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The reported study was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. АААА- А20-120022590044-7).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алифанов Е. В., Чайкун А. М., Наумов И. С., Елисеев О. А. Эластомерные материалы повышенной теплостойкости // Труды ВИАМ. 2017. Т. 50, № 2. С. 41–47. DOI: <https://doi.org/10.18577/2307-6046-2017-0-2-6-6>.

- [2] Kumar V., Md. Najib Alam M. N, Park S. S. Review of Recent Progress on Silicone Rubber Composites for Multifunctional Sensor Systems // *Polymers*. 2024. V. 16, 1841. P. 1–27. DOI: 10.3390/polym16131841.
- [3] Garishin O. K., Shadrin V. V., Svistkov A. L., Sokolov A. K., Stockelhuber W. K. Visco-elastic-plastic properties of natural rubber filled with carbon black and layered clay nanoparticles Experiment and simulation // *Polymer Testing*. 2017. V. 63. P. 133–140. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2017.08.002.
- [4] Mullins L. J. Softening of rubber by deformation // *Rub. Chem. Techn.* 1969. V. 42(1). P. 165–185.
- [5] Zhan L., Qu S., Xiao R. A review on the Mullins effect in tough elastomers and gels // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2024. V. 37. P. 181–214. DOI: 10.1007/s10338-023-00460-6.
- [6] Bueche F. Mullins effect and rubber–filler interaction // *Journal of Applied Polymer Science*. 1961. V. 5(15). P. 271–281. DOI: 10.1002/app.1961.070051504.
- [7] Ayoub G., Zairi F., Nait-Abdelaziz M., Gloaguen J. M. Modelling large deformation behaviour under loading–unloading of semicrystalline polymers: application to a high density polyethylene // *Int. J. Plasticity*. 2010. V. 6. P. 329–347. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.07.005.
- [8] Drozdov A.D., Klitkou R., Christiansen J.C. Cyclic viscoplasticity of semicrystalline polymers with finite deformations // *Mechanics of Materials*. 2013. V. 56. P. 53–64. DOI: 10.1016/j.mechmat.2012.09.005.
- [9] Rickaby S. R., Scott N. H. A cyclic stress softening model for the Mullins effect // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. V. 50. P. 111–120. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2012.10.005.
- [10] Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect // *Eur. Polym.* 2009. V. 45. P. 601–612. DOI: 10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017.
- [11] Netzker C., Husnu D., Kaliske M. An endochronic plasticity formulation for filled rubber // *International Journal of Solids and Structures*. 2010. V. 47. P. 2371–2379. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.04.026.
- [12] Свистков А. Л., Шадрин В. В. Способ одноосного циклического испытания материала / Патент № 2549841, зарегистрирован в ГРИПФ 2015.04.02.
- [13] Poikelispaa M., Shakun A., Sarlin E. Nanodiamond-carbon black hybrid filler system for demanding applications of natural rubber-butadiene rubber composite // *Applied Sciences*. 2021. V. 11, 10085 (1–11). DOI: 10.3390/app112110085.
- [14] Kumar V., Parvin N., Manikkavel A., Lee D-Y., Mandal T.K., Joo S.W., Park S.-S. Improved interfacial mechanical strength and synergy in properties of nano-carbon black reinforced rubber composites containing functionalized graphite nanoplatelets // *Surfaces and Interfaces*. 2023. V. 3, 102941 (1–12). DOI: 10.1016/j.surfin.2023.102941.
- [15] Kuschnerus I. C., Wen H., Zeng X., Khine Y. Y., Ruan J., Su C-J, Jeng U.-S., Hugues A., Girard H. A., Arnault J.-C., Osawa E, Shenderova O., Mochalin V. N., Liu M., Nishikawa M., Chang S. L. Y. Fabrication process independent and robust aggregation of detonation nanodiamonds in aqueous media // *Diamond & Related Materials*. 2023. V. 139, 110199 (1–10). DOI: 10.1016/j.diamond.2023.110199.
- [16] Vozniakovskii A. A., Smirnova E. A. Apraksin R. V., Kidalov S. V., Voznyakovskii A. P. Use of few-layer graphene synthesized under conditions of self-propagating high-temperature synthesis for supercapacitors applications // *Nanomaterials*. 2023. V. 13, 2368 (1–15). DOI: 10.3390/nano13162368.
- [17] Mensah B., Gupta K. C., Kim H., Wang W., Jeong K.-U., Nah C. Graphene-reinforced elastomeric nanocomposites: A review // *Polymer Testing*. 2018. V. 68 P. 160–184. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2018.04.009
- [18] Worku A. K., Ayele D. W. Recent advances of graphene-based materials for emerging technologies // *Results in Chemistry*. 2023. V. 5, 100971 (1–14). DOI: 10.1016/j.rechem.2023.100971.



- [19] Urade A. R., Lahiri I., Uresh K. S. Graphene Properties, Synthesis and Applications: A Review // *Journal of the Minerals, Metals and Materials Society*. 2023. V. 75(3). P. 614–630. DOI: 10.1007/s11837-022-05505-8.
- [20] Fazekas B., Goda T. J. Constitutive modeling of rubbers: Mullins effect, residual strain, time-temperature dependence // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021. V. 210. P. 106735 (1–17). DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106735.

## REFERENCES

- [1] Alifanov E. V., Chaikun A. M., Naumov I. S., Eliseev O. A. Elastomernyye materialy povishennoy teplostoikosti // *Trudy VIAM*. 2017. V. 50, No 2. P. 41–47. DOI: <https://doi.org/10.18577/2307-6046-2017-0-2-6-6>. (In Russian)
- [2] Kumar V., Md. Najib Alam M. N, Park S. S. Review of Recent Progress on Silicone Rubber Composites for Multifunctional Sensor Systems // *Polymers*. 2024. V. 16, 1841. P. 1–27. DOI: 10.3390/polym16131841.
- [3] Garishin O. K., Shadrin V. V., Svistkov A. L., Sokolov A. K., Stockelhuber W. K. Visco-elastic-plastic properties of natural rubber filled with carbon black and layered clay nanoparticles Experiment and simulation // *Polymer Testing*. 2017. V. 63. P. 133–140. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2017.08.002.
- [4] Mullins L. J. Softening of rubber by deformation // *Rub. Chem. Techn.* 1969. V. 42(1). P. 165–185.
- [5] Zhan L., Qu S., Xiao R. A review on the Mullins effect in tough elastomers and gels // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2024. V. 37. P. 181–214. DOI: 10.1007/s10338-023-00460-6.
- [6] Bueche F. Mullins effect and rubber–filler interaction // *Journal of Applied Polymer Science*. 1961. V. 5(15). P. 271–281. DOI: 10.1002/app.1961.070051504.
- [7] Ayoub G., Zairi F., Nait-Abdelaziz M., Glogaen J. M. Modelling large deformation behaviour under loading–unloading of semicrystalline polymers: application to a high density polyethylene // *Int. J. Plasticity*. 2010. V. 6. P. 329–347. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.07.005.
- [8] Drozdov A. D., Klitkou R., Christiansen J. C. Cyclic viscoplasticity of semicrystalline polymers with finite deformations // *Mechanics of Materials*. 2013. V. 56. P. 53–64. DOI: 10.1016/j.mechmat.2012.09.005.
- [9] Rickaby S. R., Scott N. H. A cyclic stress softening model for the Mullins effect // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. V. 50. P. 111–120. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2012.10.005.
- [10] Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect // *Eur. Polym.* 2009. V. 45. P. 601–612. DOI: 10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017.
- [11] Netzker C., Husnu D., Kaliske M. An endochronic plasticity formulation for filled rubber // *International Journal of Solids and Structures*. 2010. V. 47. P. 2371–2379. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.04.026.
- [12] Svistkov A. L., Shadrin V. V. Sposob odnoosnogo cyclicheskogo ispytaniya materiala / Patent No 2549841, registered in 2015.04.02. (In Russian)
- [13] Poikelispaa M., Shakun A., Sarlin E. Nanodiamond-carbon black hybrid filler system for demanding applications of natural rubber-butadiene rubber composite // *Applied Sciences*. 2021. V. 11, 10085 (1–11). DOI: 10.3390/app112110085.
- [14] Kumar V., Parvin N., Manikkavel A., Lee D.-Y., Mandal T.K., Joo S.W., Park S.-S. Improved interfacial mechanical strength and synergy in properties of nano-carbon black reinforced rubber composites containing functionalized graphite nanoplatelets // *Surfaces and Interfaces*. 2023. V. 3, 102941 (1–12). DOI: 10.1016/j.surfin.2023.102941.
- [15] Kuschnerus I. C., Wen H., Zeng X., Khine Y. Y., Ruan J., Su C.-J., Jeng U.-S., Hugues A., Girard H. A., Arnault J.-C., Osawa E., Shenderova O., Mochalin V. N., Liu M., Nishikawa M., Chang S. L. Y. Fabrication process independent and robust aggregation of detonation

- nanodiamonds in aqueous media // *Diamond & Related Materials*. 2023. V. 139, 110199 (1–10). DOI: 10.1016/j.diamond.2023.110199.
- [16] Vozniakovskii A. A., Smirnova E. A. Apraksin R. V., Kidalov S. V., Voznyakovskii A. P. Use of few-layer graphene synthesized under conditions of self-propagating high-temperature synthesis for supercapacitors applications // *Nanomaterials*. 2023. V. 13, 2368 (1–15). DOI: 10.3390/nano13162368.
- [17] Mensah B., Gupta K. C., Kim H., Wang W., Jeong K.-U., Nah C. Graphene-reinforced elastomeric nanocomposites: A review // *Polymer Testing*. 2018. V. 68 P. 160–184. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2018.04.009
- [18] Worku A. K., Ayele D. W. Recent advances of graphene-based materials for emerging technologies // *Results in Chemistry*. 2023. V. 5, 100971 (1–14). DOI: 10.1016/j.rechem.2023.100971.
- [19] Urade A. R., Lahiri I., Uresh K. S. Graphene Properties, Synthesis and Applications: A Review // *Journal of the Minerals, Metals and Materials Society*. 2023. V. 75(3). P. 614–630. DOI: 10.1007/s11837-022-05505-8.
- [20] Fazekas B., Goda T. J. Constitutive modeling of rubbers: Mullins effect, residual strain, time-temperature dependence // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021. V. 210. P. 106735 (1–17). DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106735.

Д. О. Евтихов

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ГРАНИЦА СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ, АРМИРОВАННОГО ВОЛОКНАМИ

*Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика.*

*М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрена задача о кручении упругопластического стержня, армированного упругими волокнами. Для решения задачи используются законы сохранения. Разработана программа для ЭВМ для нахождения упругопластической границы. Приведены результаты работы программы для стержней с прямоугольным поперечным сечением, армированными одним, двумя и пятью волокнами, различного радиуса и расположенные различным образом. Расчеты производились на персональном компьютере, время расчетов представленных в статье упругопластических границ 3-5 минут.

**Ключевые слова:** Упругопластическая граница, задача кручения упругого стержня, стержень армированный волокнами, законы сохранения.

**Евтихов Денис Олегович**, аспирант кафедры информационных экономических систем; e-mail: evtikhov\_do@sibsau.ru; AuthorID: 1036711

**для цитирования:** Евтихов Д. О. Упругопластическая граница скручиваемого стержня, армированного волокнами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 53-61. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.004 EDN: SANGJY

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

D. O. Evtikhov

## THE ELASTIC-PLASTIC BOUNDARY OF A TORSIONAL ROD, FIBER REINFORCED

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

**Abstract.** The problem of torsion of an elastoplastic rod reinforced with elastic fibers is considered. Conservation laws are used to solve the problem. A computer program has been developed to find the elastoplastic boundary. The results of the program for rods with rectangular cross-section reinforced with one, two and five fibers of different radii and arranged in different ways are presented. Calculations were performed on a personal computer, the calculation time of the elastic-plastic boundaries presented in the article is 3-5 minutes.

**Keywords:** Elastic-plastic boundary, the problem of torsion of an elastic rod, a fiber-reinforced rod, conservation laws.

**Denis O. Evtikhov**, Scientific Researcher; e-mail: [evtikhov\\_do@sibsau.ru](mailto:evtikhov_do@sibsau.ru); AuthorID: 1036711

**to cite this article:** *Evtikhov D. O.* The elastic-plastic boundary of a torsional rod, fiber reinforced // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 53-61. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.004 EDN: SANGJY

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** Нахождение упругопластической границы в скручиваемых стержнях, необходимо для нахождения предела прочности изделия или для его упрочнения при помощи пластических деформаций. При этом важно, чтобы пластическому деформированию подвергались только близкие к внешней поверхности слои материала, и чтобы в процессе деформирования не произошло разрушение упрочняемого изделия и не ухудшились его эксплуатационные характеристики. При этом в настоящее время использованию композитных материалов уделяется все больше внимания. В [1] Приводятся первые результаты исследования принципиально нового композита, производимого методами порошковой металлургии с использованием в качестве исходных компонентов углеволокна и чистого железа, показано, что величины прочности при изгибе и растяжении могут превышать 2000 и 1000 МПа. В [2] рассматривается применение структурно-функционального анализа в качестве основного инструмента для проектирования структуры силовых элементов конструкций из композиционных материалов. Сформированные структуры обеспечивают удельную несущую способность композитных конструкций, близкую к максимальной. В [3] Рассматривается упругое деформирование композита, состоящей из двух пластин, связанных адгезионным слоем в состоянии плоской деформации. В [4] проведены исследования стойкости формируемого композитного материала при высокоскоростном соударении. В [5] рассмотрена задача о напряженном состоянии композиционного бруса с упругопластической матрицей и упругими волокнами, расположенными вдоль оси бруса.

Перечисленные проблемы приводят к задаче нахождения упругопластической границы скручиваемого стержня, армируемого упругими волокнами [6]. До работ авторов [7–9] не было представлено эффективного метода, который позволял бы решать эту задачу. Использование законов сохранения для решения дифференциальных уравнений позволило получить аналитические формулы для нахождения упругопластической границы стержней.

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругопластический стержень, армированный упругими волокнами, см. рисунок 1.

Пусть  $u = \tau_{xz}$ ,  $v = \tau_{yz}$  - единственные ненулевые компоненты тензора напряжений. В упругой зоне они удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= u_x + v_y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= u_y + v_x = a, \\ a &= -2G\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

в пластической зоне:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= u_x + v_y = 0, \\ \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 &= u^2 + v^2 = k_s^2, \end{aligned} \quad (2)$$

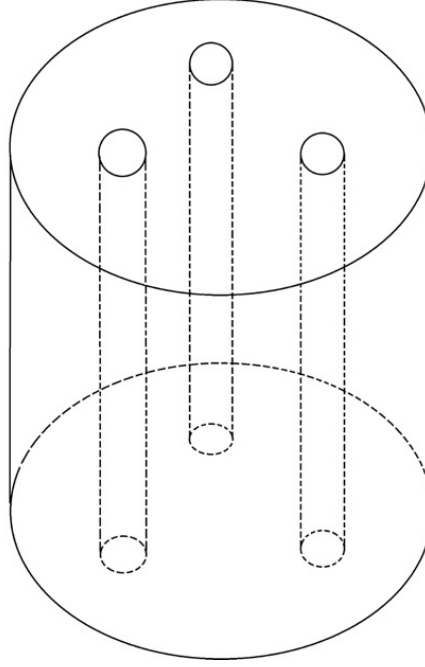


Рис. 1. Скручиваемый стержень, армированный волокнами

индексы внизу обозначают производную по соответствующей переменной.

Рассмотрим поперечное сечение скручиваемого стержня рисунок 2. Где  $L$  – боковая поверхность стержня, которая находится в пластичном состоянии, тогда на ней выполняется условия:

$$\begin{cases} un_1 + vn_2 = 0 \\ u^2 + v^2 = k_s^2 \end{cases} \quad (3)$$

$k_s$  - предел текучести в матрице,  $k_B$  - в волокне,  $k_B > k_s$ .  $n_1, n_2$  - компоненты внешнего вектора нормали к боковой поверхности.

На границе волокон  $L_i = (x - x_{A_i})^2 + (y - y_{A_i})^2 = R_{A_i}^2$  и матрицы выполняется условие [10]:

$$\begin{cases} un_1 + vn_2 = \tau \\ u^2 + v^2 = k_s^2 \end{cases} \quad (4)$$

отсюда получаем:

$$u = \tau n_1 \mp n_2 \sqrt{k_s^2 - \tau^2}, v = \tau n_2 \pm n_1 \sqrt{k_s^2 - \tau^2},$$

$$x = x_{A_i} + R_{L_i} n_1, y = y_{A_i} + R_{L_i} n_2,$$

$\tau$  - заданное касательное напряжение,  $R_{L_i}$  - радиус  $i$ -ого волокна.

Запишем (1) в виде:

$$F_1 = u_x + v_y = 0, F_2 = u_y - v_x - a = 0. \quad (5)$$

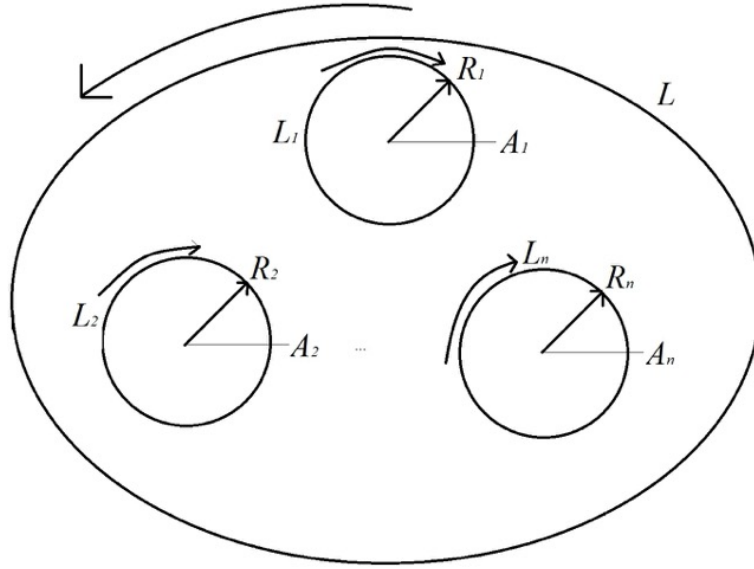


Рис. 2. Поперечное сечение скручиваемого стержня, армированного упругими волокнами. Стрелками указано направление обхода контуров при вычислении интеграла.

Закон сохранения для системы (5) запишем в виде [7]:

$$\partial_x A + \partial_y B = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0, \quad (6)$$

здесь  $\Delta_1, \Delta_2$  некоторые линейные дифференциальные операторы.

Пусть  $A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2$ , тогда из (6) получаем:

$$\alpha_x^1 + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \gamma^1 + \alpha_y^2 u + \alpha^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta^2 v_y + \gamma^2 = \omega_1(u_x + v_y - a) + \omega(u_y - v_x). \quad (7)$$

$\alpha, \beta$  и  $\gamma$  функции только от  $x, y$ .

Из (7) следует:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \beta^2, \beta^1 = -\alpha^2, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -a\alpha^1, \\ &\begin{cases} \alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \\ \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 a, \end{cases} \quad (8) \\ A &= \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = -\beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим два решения системы уравнений (8) имеющие особенность в точке  $(x_0, y_0)$ , первое решение возьмем в виде:

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^1 &= -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 &= -a\alpha^1,\end{aligned}\tag{9}$$

где  $\gamma^2 = 0, \gamma^1 = -a \arctg \frac{y-y_0}{x-x_0}$ .

Второе решение возьмем в виде:

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^3 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_x^3 + \gamma_y^4 &= -a\alpha^3,\end{aligned}\tag{10}$$

где  $\gamma^3 = 0, \gamma^4 = -\frac{a}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$ .

Из закона сохранения (6) следует:

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \left( \oint_L + \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \right) = 0,\tag{11}$$

где  $S$  – поперечное сечение,  $L$  – граница  $S$ ,  $L_i$  – граница  $i$ -ого волокна.

Тогда из (11) получаем для первого решения:

$$2\pi u(x_0, y_0) = -\tau_{xz}(x_0, y_0) 2\pi = - \left( \oint_L + \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \right),\tag{12}$$

для второго решения:

$$2\pi v(x_0, y_0) = -\tau_{yz}(x_0, y_0) 2\pi = - \left( \oint_L + \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \right).\tag{13}$$

Более подробно подобные вычисления рассматриваются в [8].

Формулы (12) и (13) позволяют построить упругопластическую границу для скручиваемого стержня, армируемого волокнами. Точки поперечного сечения, в которых выполняется условие  $u^2 + v^2 \leq k_s^2$  принадлежат упругой области, остальные – пластической.

С использованием этих формул нами была разработана программа для ЭВМ в среде Maple. На рисунках 3, 4 представлены результаты расчета упругопластической границы стержня  $2h \times 2l$ , прямоугольного поперечного сечения, армируемого упругими волокнами, где  $l=6, h=3$ , значениями крутящего параметра  $a=0.2$ , местоположение центра волокна и его радиус указан в подписи к рисунку. Светлые области упругие, Темные пластичные.



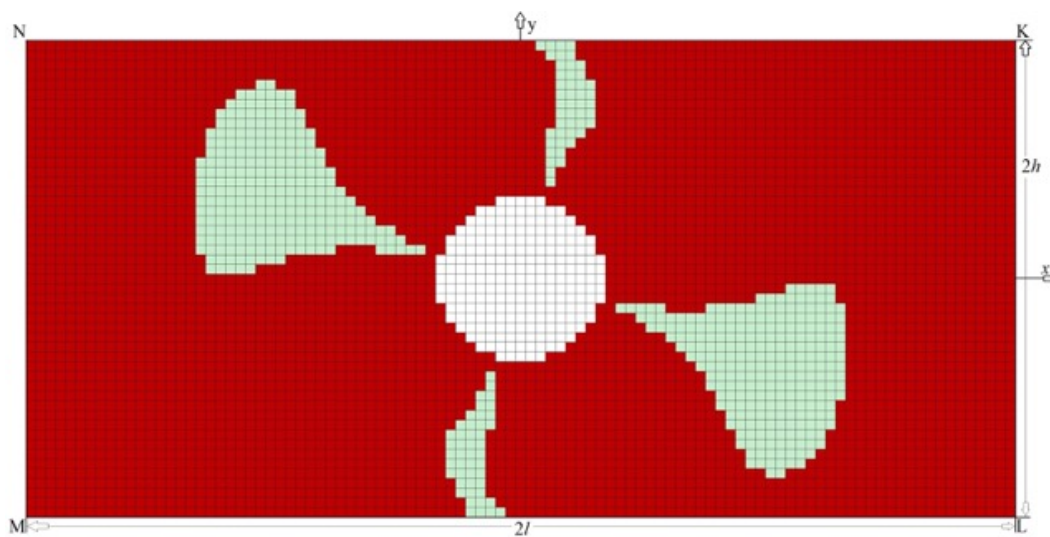


Рис. 3. Упругопластическая граница,  $x_{A_1} = 0, y_{A_1} = 0, R_{L_1} = 1$ .

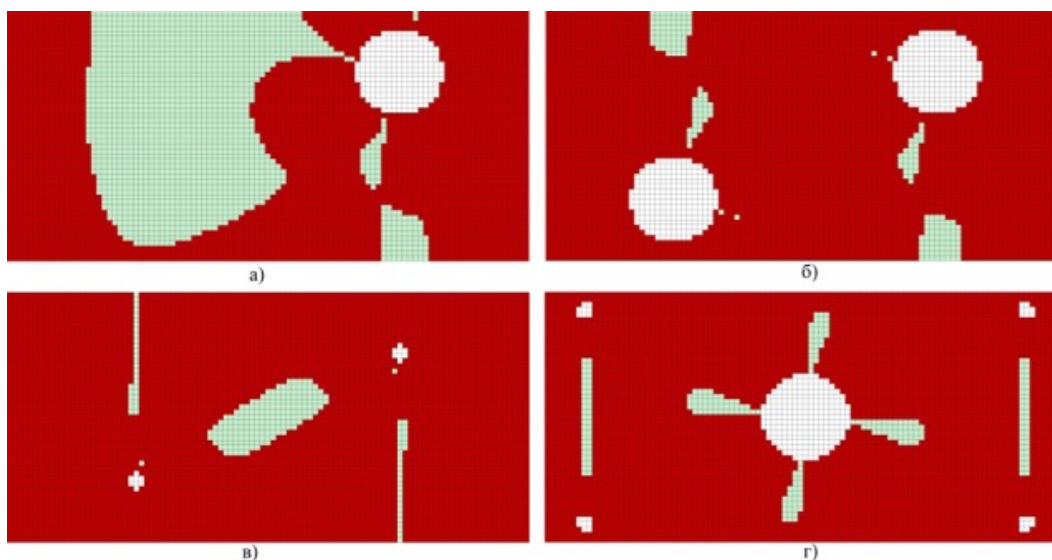


Рис. 4. Упругопластическая граница: а)  $x_{A_1} = 3, y_{A_1} = 1.5, R_{L_1} = 1$ ;  
 б)  $x_{A_1} = 3, y_{A_1} = 1.5, x_{A_2} = -3, y_{A_2} = -1.5, R_{L_1} = 1, R_{L_2} = 1$ ;  
 в)  $x_{A_1} = 3, y_{A_1} = 1.5, x_{A_2} = -3, y_{A_2} = -1.5, R_{L_1} = 0.2, R_{L_2} = 0.2$ ;  
 г)  $x_{A_1} = 0, y_{A_1} = 0, x_{A_2} = -3, y_{A_2} = -1.5, x_{A_3} = 3, y_{A_3} = 1.5, x_{A_4} = -3, y_{A_4} = 1.5, x_{A_5} = 3, y_{A_5} = 1.5, R_{L_1} = 1, R_{L_2} = 0.2, R_{L_3} = 0.2, R_{L_4} = 0.2, R_{L_5} = 0.2$ .

**Заклучение.** Рассмотрена задача о кручении упругопластического стержня, армированного упругими волокнами. Для решения задачи используются законы сохранения. Разработана программа для ЭВМ для нахождения

упругопластической границы. Приведены результаты работы программы для стержней с прямоугольным поперечным сечением, армированными одним, двумя и пятью волокнами, различного радиуса и расположенные различным образом. Расчеты производились на персональном компьютере, время расчетов представленных в статье упругопластических границ 3-5 минут.

Выражаю благодарность научному руководителю, профессору Сенашову С. И. за постановку задачи и внимание к работе.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** 100%.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** 100%.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саркисян Н. С., Саркисян А. О., Колчин А. А. и др. Композитная сталь // Композиты и наноструктуры. 2024. Т. 16, № 3. С. 202–207. EDN: EAQPSQ. DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207.
- [2] Соловьев П. В., Первушин Ю. С., Жернаков В. С., Ахмедьянов А. В. Структурно-функциональный анализ как основа проектирования структуры массоэффективных силовых элементов конструкций из композиционных материалов // Композиты и наноструктуры. 2023. Т. 15, № 4. С. 237–246. EDN: FASWSZ. DOI: 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246.
- [3] Богачева В. Э., Глаголев Л. В. Разрыв по моде I адгезионного слоя с учетом диагональных компонент тензора напряжений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4(54). С. 47–56. EDN: ULGOYA. DOI: 10.37972/chgru.2022.54.4.005.
- [4] Гольшев А. А., Долгова С. Д. Влияние керамического волокна SiC в металло-матричном композите на его стойкость при высокоскоростном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 6(376). С. 145–149. EDN: PUGZHK. DOI: 10.15372/PMTF20220616.
- [5] Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Яхно А. Н. Изгиб композитного бруса // Сибирский аэрокосмический журнал. 2024. Т. 25, № 1. С. 25–32. EDN: RRHQRV. DOI: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32.
- [6] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск : Наука, 1983. С. 126.
- [7] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. С. 192.
- [8] Senashov S. I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2012. Vol. 8. P. 071. EDN: RGOBNN. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.

- [9] Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. А. Об упругопластическом кручении стержня // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. 2013. № 3(49). С. 100–103. EDN: RFWONN.
- [10] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва : Наука, 1988. С. 712.

## REFERENCES

- [1] Sarkisyan N. S., Sarkisyan A. O., Kolchin A. A. et al. Composite steel // Composites and nanostructures. 2024. Vol. 16, no. 3. P. 202–207. EDN: EAQPSQ. DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207. in Russian.
- [2] Solovyov P. V., Pervushin Yu. S., Zhernakov V. S., Akhmedianov A. V. Structural and functional analysis as the basis for designing the structure of the mass of effective power elements of structures made of composite materials // Composites and nanostructures. 2023. Vol. 15, no. 4. P. 237–246. EDN: FASWSZ. DOI: 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246. in Russian.
- [3] Bogacheva V. E., Glagolev L. V. Rupture according to the mode I of the adhesive layer taking into account the diagonal components of the stress tensor // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2022. no. 4(54). P. 47–56. EDN: ULGOYA. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.005. in Russian.
- [4] Golyshev A. A., Dolgova C. D. Influence of ceramic SiC fiber in a metal matrix composite on its resistance under high-speed loading // Applied mechanics and technical physics. 2022. Vol. 63, no. 6(376). P. 145–149. EDN: PUGZHK. DOI: 10.15372/PMTF20220616. in Russian.
- [5] Senashov S. I., Sevastyanova I. L., Yakhno A. N. Bending of composite timber // Siberian Aerospace Journal. 2024. Vol. 25, no. 1. P. 25–32. EDN: RRHQRY. DOI: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32. in Russian.
- [6] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic-plastic problem. Novosibirsk : Nauka, 1983. P. 126. in Russian.
- [7] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk : Publishing House of the SB RAS, 2001. P. 192. in Russian.
- [8] Senashov S. I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2012. Vol. 8. P. 071. EDN: RGOBNN. DOI: 10.3842/SIGMA.2012.071.
- [9] Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. A. On elastic-plastic torsion of a rod // Bulletin of the Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev. 2013. no. 3(49). P. 100–103. EDN: RFWONN. in Russian.
- [10] Rabotnov Yu. N. Mechanics of a deformable solid. Moscow : Nauka, 1988. P. 712. in Russian.

С. Ю. Иванова, К. Ю. Осипенко, Н. В. Баничук, Д. С. Лисовенко

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТАМАТЕРИАЛОВ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА ПРИ ПРОБИВАНИИ ЖЕСТКИМ УДАРНИКОМ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** Проведены эксперименты по пробиванию сферическим жестким ударником образцов метаматериалов на основе e-PLA пластика, изготовленных с помощью 3D принтера. Образцы со структурой на основе ячеек в виде вогнутого шестиугольника обладали отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетики) и сравнивались с неауксетиками с обычной сотовой структурой в виде выпуклого шестиугольника по способности сопротивляться пробиванию. Рассматривались в том числе структуры, обладающие хиральностью. Эксперименты проводились в условиях воздушного наполнения ячеек структуры и наполнения желатином. Установлен факт существенного повышения сопротивляемости пробиванию при заполнении желатином ауксетических хиральных образцов по сравнению с заполненными хиральными неауксетиками. Для хиральных метаматериалов с желатином фиксировалось отклонение направления движения ударника после вылета из пробиваемого образца.

**Ключевые слова:** метаматериалы, ауксетики, экспериментальные исследования, пробивание, жесткие ударники.

**Иванова Светлана Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики и оптимизации конструкций; e-mail: ivanova@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5096-2759>; AuthorID: 146039

**Осипенко Кирилл Юрьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики и оптимизации конструкций; e-mail: osipenko@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9653-1831>; AuthorID: 16440

**Баничук Николай Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией механики и оптимизации конструкций; e-mail: banichuk@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0652-0934>; AuthorID: 8002

**Лисовенко Дмитрий Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор РАН, заведующий лабораторией механики технологических процессов; e-mail: lisoventk@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0485-3433>; AuthorID: 167930

**для цитирования:** Иванова С. Ю., Осипенко К. Ю., Баничук Н. В., Лисовенко Д. С. Исследование влияния вязкого заполнителя на механические свойства метаматериалов с отрицательным и положительным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 62–75. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.005 EDN: SFQXCI

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Иванова С. Ю., Осипенко К. Ю., Баничук Н. В., Лисовенко Д. С. 2024

Поступила: 01.10.24; принята в печать: 10.12.24; опубликована: 27.12.24.

S. Yu. Ivanova, K. Yu. Osipenko, N. V. Banichuk, D. S. Lisovenko

## INVESTIGATION OF THE EFFECT OF A VISCOUS FILLER ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF METAMATERIALS WITH NEGATIVE AND POSITIVE POISSON'S RATIO WHEN PUNCHING WITH A RIGID IMPACTOR

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** Experiments were performed on the penetration of metamaterial samples based on e-PLA plastic, prepared using a 3D printer, by a spherical rigid striker. Samples with a structure based on cells in the form of a concave hexagon had a negative Poisson's ratio (auxetics) and were compared with non-auxetics with a conventional honeycomb structure in the form of a convex hexagon in terms of their ability to resist penetration. Structures with chirality were also considered. Experiments were conducted under conditions of air filling of the structure cells and filling with gelatin. The fact of a significant increase in resistance to penetration was established when auxetic chiral samples were filled with gelatin compared to those filled with chiral non-auxetics. For chiral metamaterials with gelatin, a deviation in the direction of the striker's movement after leaving the sample being penetrated was recorded.

**Keywords:** metamaterials, auxetics, experimental studies, penetration, perforation, rigid strikers.

**Svetlana Yu. Ivanova**, Cand. Sci. Phys. & Math., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;

<https://orcid.org/0000-0001-5096-2759>; AuthorID: 146039

**Kirill Yu. Osipenko**, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;

<https://orcid.org/0000-0001-9653-1831>; AuthorID: 16440

**Nikolay V. Banichuk**, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;

<https://orcid.org/0000-0002-0652-0934>; AuthorID: 8002

**Dmitry S. Lisovenko**, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor RAS, Head of Laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS; e-mail: [lisovenk@ipmnet.ru](mailto:lisovenk@ipmnet.ru);

<https://orcid.org/0000-0003-0485-3433>; AuthorID: 167930

**to cite this article:** Ivanova S. Yu., Osipenko K. Yu., Banichuk N. V., Lisovenko D. S. Investigation of the effect of a viscous filler on the mechanical properties of metamaterials with negative and positive Poisson's ratio when punching with a rigid impactor // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 62–75. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.005 EDN: SFQXCI

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

*Received: 01.10.24;*

*accepted: 10.12.24;*

*published: 27.12.24.*

**Введение.** Данная работа является продолжением опубликованных ранее статей [1–3] и посвящена экспериментальному изучению сопротивляемости пробиванию жестким ударником ячеистых структур (метаматериалов), обладающих ауксетическими и (для сравнения) неауксетическими свойствами. В [1] был сделан вывод о том, что металлические образцы, обладающие ауксетической ячеистой структурой на основе вогнутого шестиугольника, оказывали большее сопротивление пробиванию сферическим ударником, чем образцы, структура которых была обычной сотовой (на основе выпуклого шестиугольника). А в [2] было продемонстрировано, что при пробивании хиральных ауксетических метаматериалов наблюдалось отклонение направления движения ударника после вылета из пробиваемого образца от подлетного направления. Основываясь на результатах работ, например, [1–11] можно сказать, что ауксетики могут быть перспективными для создания ударо- и энергопоглощающих конструкций.

В данной работе аналогичное сравнение проводилось для образцов из другого материала (пластика e-PLA, изготовленных с помощью 3D принтера) в условиях воздушного наполнения ячеек структуры и наполнения их вязким веществом (желатином). Изучалось влияние ауксетических свойств рассматриваемых образцов метаматериалов на относительную потерю кинетической энергии ударника по сравнению с неауксетическими образцами той же массы. При этом главная цель исследований заключалась в определении влияния вязкого наполнения структур из пластика e-PLA на сопротивляемость внедрению жестких ударников. Эксперименты проводились в том числе и для образцов с хиральной структурой на основе вогнутого или выпуклого шестиугольников. Изучалась способность хиральных ячеистых структур отклонять внедряющийся ударник от первоначального направления движения.

**1. Пробивание ауксетических и неауксетических ячеистых структур из пластика e-PLA.** Для проведения сравнительных экспериментов по пробиванию ауксетических и неауксетических структур с помощью 3D принтера были изготовлены образцы из пластика e-PLA (см. рис. 1, 2) толщиной  $H \sim 29$  мм. Образцы закреплялись в штативе и простреливались стальным сферическим ударником по нормали к боковой поверхности, имеющей размеры  $70 \times 71$  мм. Ударник массой 4.06 г и диаметром 10 мм разгонялся пневматической пушкой и входил без вращения в преграду. Для первых экспериментов давление в камере пушки выставлялось таким образом, чтобы скорость вылета ударника, как и в [2], составляла приблизительно 240 м/с. Скорость ударника на вылете из ствола пушки принималась за скорость входа в преграду, сопротивлением воздуха движению тела можно было пренебречь в силу небольших размеров экспериментальной установки. Скорость входа ударника измерялась с помощью оптического рамочного хронографа ИБХ-АСС-0021 «Стрелец», а также с помощью осциллографа и высокоскоростной видеокамеры FASTCAM mini AX200, на которую записывался процесс пробивания образца. Камера размещалась таким образом, что на видеозаписи ударник пробивает образец, двигаясь

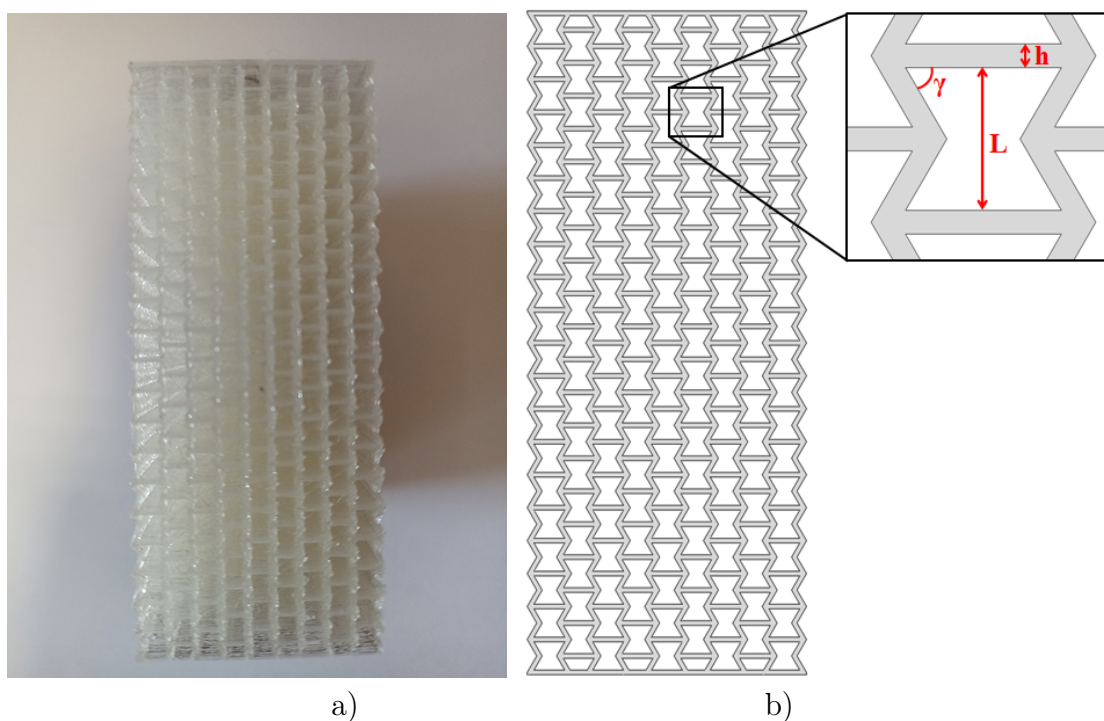


Рис. 1. Ауксетический (АС) образец из пластика e-PLA: (а) напечатанный на 3D-принтере; (б) 3D модель –  $L = 3$  мм,  $h = 0.5$  мм,  $\gamma = 60^\circ$ .

справа налево. Она применялась также для определения скорости вылета ударника из преграды.

Номер эксперимента/образца	Структура материала	Масса образца, г	Скорость входа ударника, $v_1$ , м/с	Скорость выхода ударника, $v_2$ , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2$ , %
3/1	АС	44	240	207	25.6
4/3	сотовая	45.4	236.3	198	29.8
5/2	АС	43.6	220	184.3	29.8
6/5	сотовая	44.9	225	187.5	30.5

Таблица 1. Пробивание образцов на скорости 240-220 м/с (результаты экспериментов).

Образец, представленный на рис.1а, имеет ауксетическую (АС) структуру, характеризующуюся ячейками на основе вогнутого шестиугольника (схематичное изображение на рис.1б). На рис.2а показан неауксетический (сотовый) образец

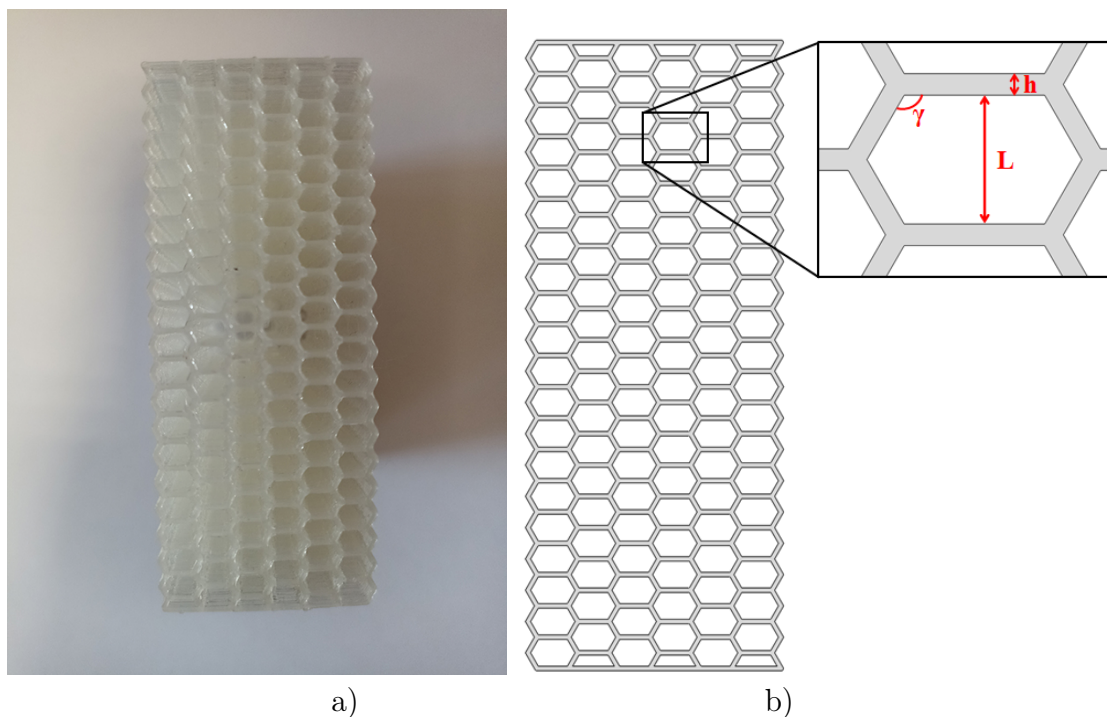


Рис. 2. Неауксетический (сотовый) образец из пластика e-PLA: (а) напечатанный на 3D-принтере; (б) 3D модель –  $L = 3$  мм,  $h = 0.5$  мм,  $\gamma = 120^\circ$ .

метаматериала, ячейки которого представляют собой в плане выпуклый шестиугольник (схема представлена на рис.2б). Целью экспериментов было установить, как влияет внутренняя структура метаматериала на сопротивляемость движению ударника при пробивании образцов. Результаты серии экспериментов приведены в таблице 1.

Из приведенных в таблице 1 данных видно, что все испытанные образцы имели приблизительно одинаковые массы и отличались только своей внутренней структурой. В указанном диапазоне скоростей относительная потеря кинетической энергии ударника  $\delta$  при пробивании образцов практически не зависела от их внутренней структуры. В таблице 2 приведены данные экспериментов по пробиванию аналогичных образцов со скоростью входа ударника порядка 140-150 м/с.

Как можно видеть из таблицы 2, образцы, обладающие обычной сотовой структурой метаматериала, оказывали большее сопротивление пробиванию при снижении скорости полета ударника. Поворот структуры ауксетика в образце на  $90^\circ$  (рис. 3) незначительно изменил его параметры (толщина  $H = 28.5$  мм, боковая поверхность  $70 \times 73$  мм, масса  $m = 44.3$  г) и привел к небольшому росту показателя  $\delta$  (см. таблицу 2).



Номер эксперимента/ образца	Структура мета-материала	Скорость входа ударника, $v_1$ , м/с	Скорость выхода ударника, $v_2$ , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2$ , %
8/4	АС	146	120	32.4
9/6	сотовая	143.6	102	49.5
10/8	АС	139.6	114	33.3
11/7	сотовая	143.1	103.8	47.3

Таблица 2. Пробивание образцов на скорости 140-150 м/с (результаты экспериментов).

Номер эксперимента/ образца	Структура мета-материала	Скорость входа ударника, $v_1$ , м/с	Скорость выхода ударника, $v_2$ , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2$ , %
12/12	АС+90°	147.7	118.1	36
13/14	АС+90°	144	114	37.3

Таблица 3. Пробивание ауксетических образцов с поворотом структуры на 90° (результаты экспериментов).

Номер эксперимента/ образца	Структура мета-материала	Масса образца, г	Скорость входа ударника, $v_1$ , м/с	Скорость выхода ударника, $v_2$ , м/с	$\delta = (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2$ , %
14/9	сотовая	151.2	143.6	80.6	68.5
15/10	сотовая	150	141.4	79	68.8
16/11	АС	153.1	147.3	97.5	56.2
17/13	АС	153.9	147	96	57.4
18/15	АС+90°	153.6	145.5	90	61.7
19/16	АС+90°	154.9	147	90	62.5

Таблица 4. Пробивание образцов из пластика e-PLA, заполненных желатином (результаты экспериментов).

**2. Пробивание ауксетических и неауксетических структур, заполненных желатином.** Как можно заметить из предыдущего раздела, ауксетические образцы из жесткого и достаточно хрупкого PLA пластика в отличие от металлических образцов [1] не имели преимуществ по сравнению с сотовыми образцами при пробивании в различных диапазонах скоростей ударников. С научной и практической стороны интересен ответ на вопрос, как повлияет

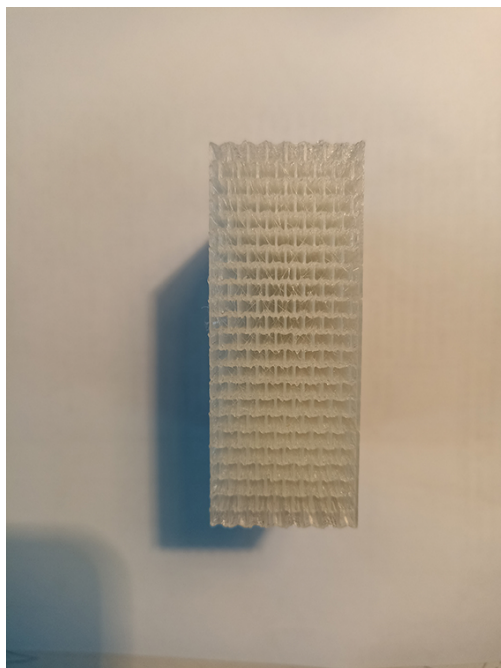


Рис. 3. Ауксетический образец из пластика e-PLA с поворотом структуры метаматериала на  $90^\circ$  (AC+ $90^\circ$ ).

на свойства метаматериалов при пробивании заполнение ячеек каким-либо вязким веществом. Для проведения серии сравнительных экспериментов образцы, аналогичные описанным в разделе 1, были заполнены пищевым желатином, приготовленным из расчета 50 г желатина на 500 г воды. Массы полученных образцов были примерно одинаковы. Результаты экспериментов представлены в таблице 4.

Данные из таблиц 2–4 позволяют сделать вывод, что для всех проведенных экспериментов по пробиванию ауксетических образцов из e-PLA пластика показатель относительной потери энергии ударника  $\delta = (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2$  был ниже, чем при пробивании образцов, обладающих сотовой структурой. Однако, видно, что заполнение образцов желатином привело к уменьшению разницы в значениях показателя  $\delta$  между ауксетическими и сотовыми структурами.

**3. Пробивание хиральных ауксетических и неауксетических структур на основе выпуклого и вогнутого шестиугольника.** В [2] экспериментально исследовалось пробивание образцов из e-PLA пластика, обладающих хиральной структурой, образованной элементами в виде спиралевидных звездочек. При этом было установлено, что ударник на вылете из образца отклоняется от своего подлетного направления вверх или вниз в зависимости от направления закрутки этих элементов по или против часовой стрелки. В недавно опубликованной статье [3] представлены результаты экспериментов по

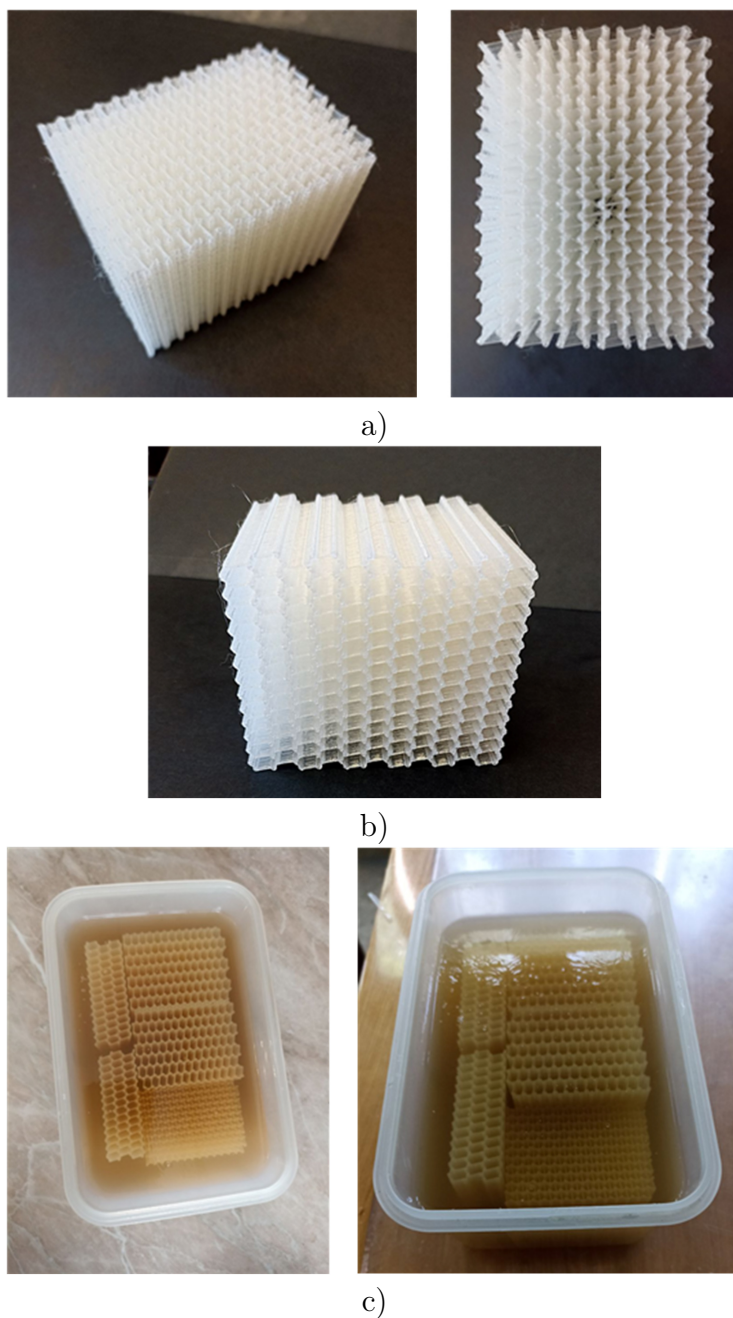
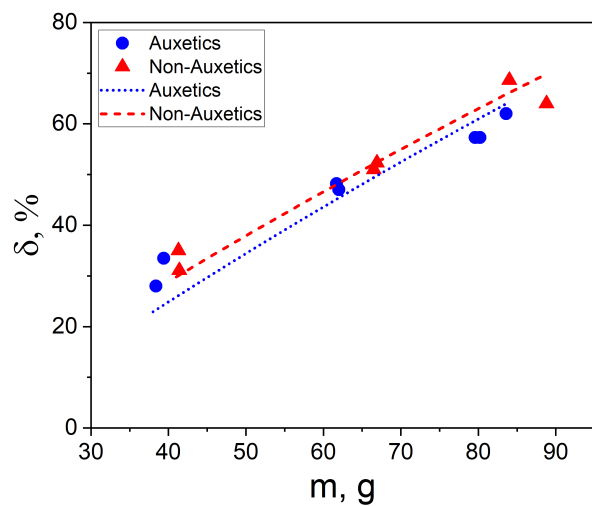


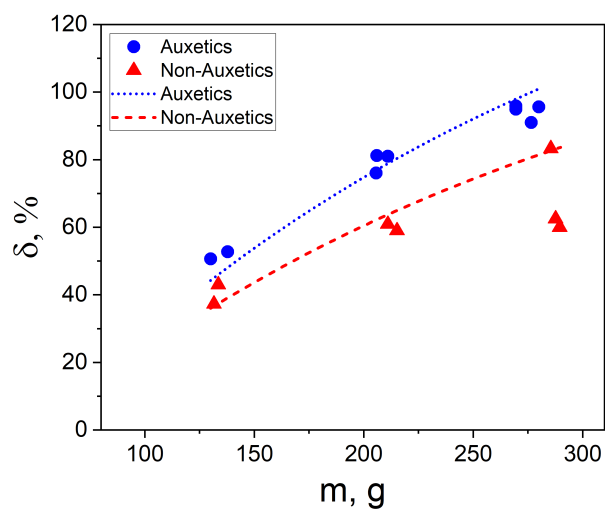
Рис. 4. Образцы метаматериалов с хиральной структурой: а) ауксетический (АС); б) неауксетический (сотовый); с) подготовленные образцы с желатином.

пробиванию образцов с хиральной структурой на основе вогнутого (АС) или выпуклого (сотовый) шестиугольника. При этом для каждой пары сравнительных экспериментов были подготовлены приблизительно одинаковые по массе

ауксетический и неауксетический хиральные образцы, как с воздушным наполнением, так и заполненные желатином (рис. 4).



a)



b)

Рис. 5. Зависимость относительной потери кинетической энергии ударника  $\delta$  [%] от массы  $m$  [г] пробиваемых образцов: с заполнением ячеек воздухом (а) и желатином (b).

В [3] в двух таблицах приведены экспериментально определенные скорости сферического ударника  $v_1$  на входе и  $v_2$  на выходе из хиральных PLA-образцов

как с воздушным заполнением ячеек, так и заполненных желатином. Температура образцов в экспериментах была  $\sim 16^\circ\text{C}$ . На рис. 5а,б представлены экспериментальные данные из [3] зависимости относительной потери кинетической энергии ударника  $\delta = (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2$  (%) от массы  $m$  (г) пробиваемых образцов с воздухом (а) и желатином (б). Рис. 5б показывает преимущество защитных свойств хиральной ауксетической структуры по сравнению с сотовой в случае заполнения ячеек вязким наполнителем (желатином). Кривые на рис. 5а,б характеризуют зависимость  $\delta = \delta(m)$ , полученную в результате приближенного оценивания скорости выхода ударника по аналогии с расчетной моделью, примененной в статье [2]. Для приближенного оценивания сопротивляемости пробиванию рассматриваемых образцов с ауксетической структурой и прогнозирования скорости выхода ударника предлагается использовать хорошо известную двучленную формулу для зависимости силы сопротивления среды  $D$  от скорости внедряющегося цилиндрического тела  $v = v(x)$  [12, 13]

$$D = -\pi R^2 (A_0 + \kappa A_2 v^2), \quad 0 \leq x \leq H. \quad (1)$$

Здесь  $R$  – радиус ударника,  $\kappa$  – коэффициент, характеризующий форму головной части цилиндрического ударника [13–15],  $x$  – координата, отсчитываемая в направлении движения тела от крайней точки образца (точки входа),  $H$  – толщина образца, а заданные константы  $A_0$  и  $A_2$  характеризуют, соответственно, прочностные и инерционные свойства среды. Как и в работе [2] будем считать, что на первом этапе пробивания образца ( $x \in [0, l]$ ) параметры, характеризующие его прочностные и инерционные свойства, остаются постоянными. На втором этапе ( $x \in [l, H]$ ) они линейно уменьшаются до нуля в момент вылета ударника из образца:

$$a_0(x) = \frac{A_0}{H-l}(H-x), \quad a_2(x) = \frac{A_2}{H-l}(H-x). \quad (2)$$

Такой подход основан на наблюдении, что все простреленные образцы из исследуемых метаматериалов на основе PLA-пластика имели конический кратер (каверну) на тыльной стороне. При этом размер кратера (его глубина и ширина) были примерно одинаковы у всех образцов вне зависимости от их толщины. В данном случае для хиральных образцов на основе шестиугольной внутренней структуры глубина кратера была равна двум диаметрам сферического ударника. Из второго закона Ньютона для первого этапа внедрения ударника массы  $M$  имеем уравнение, описывающее изменение скорости тела в сопротивляющейся среде, и начальное условие в виде

$$\frac{dv^2}{dx} = -(\alpha A_0 + \beta A_2 v^2), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$(v^2)_{x=0} = v_1^2. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \frac{2\pi R^2}{M}, \quad \beta = \frac{2\pi R^2 \kappa}{M}.$$

Скорость ударника на втором участке определим из решения следующей краевой задачи:

$$\frac{dv^2}{dx} = -(\alpha a_0 + \beta a_2 v^2), \quad l \leq x \leq H, \quad (5)$$

$$(v^2)_{x=l} = v_l^2, \quad (6)$$

где скорость  $v_l = v(l)$  определяется из решения задачи (3)-(4) и принимается в качестве начальной скорости входа на втором этапе внедрения. Опуская элементарные выкладки, получим выражение для квадрата скорости ударника на выходе из преграды в виде

$$v_2^2 = \left( \frac{A_0}{\kappa A_2} + v_0^2 \right) \exp \left( -\frac{l+L}{2} \beta A_2 \right) - \frac{A_0}{\kappa A_2}. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае  $l = H - 4R$ ,  $\kappa = 0.5$  для сферического ударника и обозначая через  $S_0$  площадь боковой (ударной) поверхности образца, получим следующее выражение для зависимости величины  $\delta$  от массы образца  $m$

$$\delta = \delta(m) = \left( 1 + \frac{2A_0}{A_2 v_1^2} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\beta m}{S_0} + 2R\beta A_2 \right) \right]. \quad (8)$$

Расчетные кривые (точечные линии для ауксетика и штриховые линии для неауксетика) на рис. 5а,б построены для экспериментально определенных средних значений постоянных параметров  $A_0$  и  $A_2$  для каждого типа рассматриваемых хиральных структур и скорости входа ударника 150 м/с. Видно, что аналитическая оценка энергетических потерь при пробивании лучше соответствует экспериментальным данным для больших толщин (масс) образцов, а при небольших толщинах является заниженной.

В условиях проведенных экспериментов отклонение направления движения ударника после пробивания образцов с рассматриваемым видом хиральности (в отличие от хиральных звездчатых структур (hexachiral honeycomb) из [2]) было незначительным, наблюдалось не всегда и только для образцов с заполнением желатином.

**4. Некоторые замечания и выводы.** Преимущество в сопротивляемости пробиванию АС-образцов перед сотовыми неауксетическими, установленное ранее для металлических структур в [1], в случае воздушного заполнения ячеек метаматериала из PLA в проведенных экспериментах выявлено не было. Это, возможно, связано с особенностями разрушения более хрупкого пластика по сравнению с металлом и может быть предметом для дальнейшего изучения.

Заполнение ячеек желатином без добавления хиральности в структуру метаматериала из PLA приводит к уменьшению преимуществ сотовых образцов перед ауксетическими. При наличии хиральности в структуре метаматериала с желатином проведенные эксперименты показали лучшую сопротивляемость АС-образцов из e-PLA пластика по сравнению с неауксетическими хиральными образцами той же массы при пробивании жестким сферическим телом. При проведении исследований было установлено, что заполнение ячеек АС-структуры метаматериала из PLA-пластика вязким наполнителем в целом усиливает его ауксетические свойства. Представляет интерес проверить этот факт в дальнейшем для АС-конструкций из металла и других материалов.

Авторы выражают благодарность А.И. Демину за помощь в подготовке 3D моделей образцов.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** С. Ю. Иванова проведение экспериментов, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, К. Ю. Осипенко проведение экспериментов, редактирование текста рукописи, Н. В. Баничук редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, Д. С. Лисовенко подготовка образцов для эксперимента, редактирование текста рукописи, согласование финальной версии рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена по темам Госзадания (номера государственной регистрации 124012500437-9, 124013000674-0).

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** S. Yu. Ivanova conducting experiments, writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, K.Y. Osipenko conducting experiments, editing the text of the manuscript, N. V. Banichuk editing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, D. S. Lisovenko preparing samples for the experiment, editing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The work was carried out on the topics of the State Assignment (state registration numbers 124012500437-9, 124013000674-0).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иванова С. Ю., Осипенко К. Ю., Кузнецов В. А. и др. Экспериментальное исследование свойств ауксетических и неауксетических метаматериалов из металла при проникании в них жестких ударников // Известия РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 176–180. DOI: 10.31857/S0572329922600773.
- [2] Иванова С. Ю., Осипенко К. Ю., Демин А. И. и др. Изучение свойств метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником // Известия РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 120–130. DOI: 10.31857/S0572329923600366.
- [3] Иванова С. Ю., Осипенко К. Ю., Баничук Н. В., Лисовенко Д. С. Экспериментальное исследование свойств метаматериалов на основе PLA пластика при пробивании жестким ударником // Известия РАН. МТТ. 2024. № 4. С. 207–215.

- [4] Gao Y., Huang H. Energy absorption and gradient of hybrid honeycomb structure with negative Poisson's ratio // *Mech. Solids*. 2022. Vol. 57, no. 5. P. 1118–1133. DOI: 10.3103/S0025654422050053.
- [5] Xing Y., Deng B., Cao M. et al. Influence of structural and morphological variations in orthogonal trapezoidal aluminum honeycomb on quasi-static mechanical properties // *Mech. Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 445–458. DOI: 10.1134/S0025654423602550.
- [6] Скрипняк В. В., Чирков М. О., Скрипняк В. А. Моделирование механической реакции ауксетических метаматериалов на динамические воздействия // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2021. № 2. С. 144–152. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.13.
- [7] Imbalzano G., Tran P., Lee P. V. S. et al. Influences of material and geometry in the performance of auxetic composite structure under blast loading // *Appl. Mech. Mater.* 2016. Vol. 846. P. 476–481. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.846.476.
- [8] Zhao X., Gao Q., Wang L. et al. Dynamic crushing of double-arrowed auxetic structure under impact loading // *Mater. Des.* 2018. Vol. 160. P. 527–537. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.09.041.
- [9] Li C., Shen H.-S., Wang H. Nonlinear dynamic response of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core // *Nonlinear Dyn.* 2020. Vol. 100, no. 4. P. 3235–3252. DOI: 10.1007/s11071-020-05686-4.
- [10] Qiao J. X., Chen C. Q. Impact resistance of uniform and functionally graded auxetic double arrowhead honeycombs // *Inter. J. Impact Eng.* 2015. Vol. 83. P. 47–58. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2015.04.005.
- [11] Novak N., Starčević L., Vesenjāk M., Ren Z. Blast response study of the sandwich composite panels with 3D chiral auxetic core // *Compos. Struct.* 2019. Vol. 210. P. 167–178. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.11.050.
- [12] Витман Ф. Ф., Иоффе Б. С. Простой метод нахождения динамической твердости металлов с помощью двустороннего конуса // *Заводская лаборатория*. 1948. Т. XIV, № 6. С. 727–732.
- [13] Витман Ф. Ф., Степанов В. А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара  $10^2 \nabla \cdot 10^3$  м/сек // *Некоторые проблемы прочности твердого тела*. Изд-во АН СССР. 1959. С. 207–221.
- [14] Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989.
- [15] Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Макеев Е. В., Турутько А. И. Некоторые аналитические и численные оценки параметров оптимальной структуры защитной плиты // *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Т. 75, № 3. С. 206–214. DOI: 10.32326/1814-9146-2013-75-3-206-214.

## REFERENCES

- [1] Ivanova S. Yu., Osipenko K. Yu., Kuznetsov V. A. et al. Experimental investigation of the properties of auxetic and non-auxetic metamaterials made of metal muring penetration of rigid strikers // *Mech. Solids*. 2023. Vol. 58, no. 2. P. 524–528. DOI: 10.3103/S0025654422601616.
- [2] Ivanova S. Yu., Osipenko K. Yu., Demin A. I. et al. Studying the properties of metamaterials with a negative Poisson's ratio when punched by a rigid impactor // *Mech. Solids*. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1536–1544. DOI: 10.3103/S0025654423600897.
- [3] Ivanova S. Yu., Osipenko K. Yu., Banichuk N. V., Lisovenko D. S. Experimental study of the properties of metamaterials based on PLA plastic when perforated by a rigid striker // *Mech. Solids*. 2024. Vol. 59, no. 4. P. 1967–1972. DOI: 10.1134/S0025654424604695.



- [4] Gao Y., Huang H. Energy absorption and gradient of hybrid honeycomb structure with negative Poisson's ratio // *Mech. Solids*. 2022. Vol. 57, no. 5. P. 1118–1133. DOI: 10.3103/S0025654422050053.
- [5] Xing Y., Deng B., Cao M. et al. Influence of structural and morphological variations in orthogonal trapezoidal aluminum honeycomb on quasi-static mechanical properties // *Mech. Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 445–458. DOI: 10.1134/S0025654423602550.
- [6] Skripnyak V. V., Chirkov M. O., Skripnyak V. A. Modeling the mechanical response of auxetic metamaterials to dynamic effects // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2021. no. 2. P. 144–152. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.13.
- [7] Imbalzano G., Tran P., Lee P. V. S. et al. Influences of material and geometry in the performance of auxetic composite structure under blast loading // *Appl. Mech. Mater.* 2016. Vol. 846. P. 476–481. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.846.476.
- [8] Zhao X., Gao Q., Wang L. et al. Dynamic crushing of double-arrowed auxetic structure under impact loading // *Mater. Des.* 2018. Vol. 160. P. 527–537. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.09.041.
- [9] Li C., Shen H.-S., Wang H. Nonlinear dynamic response of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core // *Nonlinear Dyn.* 2020. Vol. 100, no. 4. P. 3235–3252. DOI: 10.1007/s11071-020-05686-4.
- [10] Qiao J. X., Chen C. Q. Impact resistance of uniform and functionally graded auxetic double arrowhead honeycombs // *Inter. J. Impact Eng.* 2015. Vol. 83. P. 47–58. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2015.04.005.
- [11] Novak N., Starčević L., Vesenjāk M., Ren Z. Blast response study of the sandwich composite panels with 3D chiral auxetic core // *Compos. Struct.* 2019. Vol. 210. P. 167–178. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.11.050.
- [12] Vitman F. F., Ioffe B. S. A simple method of determining dynamic hardness of metals using a double cone // *Zavod. Lab.* 1948. Vol. XIV, no. 6. P. 727–732.
- [13] Vitman F. F., Stepanov V. A. Effect of the strain rate on the resistance of metals to deformation at impact velocities of 100–1000 m/s // *Some Problems of the Strength of Solids (AN SSSR)*. 1959. P. 207–221.
- [14] Kanibolotskii M. A., Urzhumtsev Yu. S. Optimal design of layered structures. Nauka, Novosibirsk, 1989.
- [15] Banichuk N. V., Ivanova S. Yu., Makeev E. V., Turutko A. I. Some analytical and computational estimates of parameters of optimal protective plate structure // *Probl. Prochn. Plast.* 2013. Vol. 75, no. 3. P. 206–214. DOI: 10.32326/1814-9146-2013-75-3-206-214.

Д. К. Андрейченко, Е. Ю. Крылова

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

**Аннотация.** На основе уточненной математической модели исследована устойчивость цилиндрического гидродинамического подвеса с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей жидкости от радиальной координаты в поддерживающем слое. Подвес с легким внутренним телом устойчив в большом диапазоне изменения относительного эксцентриситета, и при изменении перегрузок на величину порядка десятка ускорений свободного падения переходит из одного равновесного состояния в другое. Подвес с тяжелым внутренним телом неустойчив. Применение уточненной математической модели приводит к большому запасу устойчивости подвеса.

**Ключевые слова:** цилиндрический гидродинамический подвес, вязкая несжимаемая жидкость, комбинированные динамические системы, частотный критерий устойчивости, краевые задачи.

**Андрейченко Дмитрий Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем; e-mail: andreichenkodk@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>; AuthorID: 63805

**Крылова Екатерина Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kat.krylova@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982

**для цитирования:** Андрейченко Д. К., Крылова Е. Ю. Об устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 76–88. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.006 EDN: SZINGB

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

*D. K. Andreichenko, E. Yu. Krylova*

## ON THE STABILITY OF A CYLINDRICAL HYDRODYNAMIC SUSPENSION

*I. Saratov State University, Saratov, Russia*

**Abstract.** On the basis of a refined mathematical model, the stability of a cylindrical hydrodynamic suspension is investigated with full consideration of the dependence of the velocity distribution profile of the liquid on the radial coordinate in the supporting layer. A suspension with a light internal body is stable over a large range of changes in relative eccentricity, and when overloads change by an amount of about a dozen accelerations of free fall, it moves from one equilibrium state to another. A suspension with a heavy inner body is unstable. The use of a refined mathematical model leads to a greater margin of stability of the suspension.

**Keywords:** cylindrical hydrodynamic suspension, viscous incompressible fluid, combined dynamic systems, frequency stability criterion, boundary value problems.

**Dmitry K. Andreichenko**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: andreichenkodk@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>; AuthorID: 6506669322

**Ekaterina Yu. Krylova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; e-mail: mail2@mail.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982

**to cite this article:** *Andreichenko D. K., Krylova E. Yu.* On the stability of a cylindrical hydrodynamic suspension // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 76–88. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.006 EDN: SZINGB

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** В системах инерциальной навигации [1] широко используются гироскопы с цилиндрическим гидродинамическим подвесом [2]. Ранее на основе осреднения скорости вязкой несжимаемой жидкости по сечению поддерживающего слоя был сделан вывод о том, что при умеренных значениях колебательного числа Рейнольдса подвес с легким внутренним телом устойчив в окрестности центрального положения, а подвес с тяжелым внутренним телом неустойчив [3]. Исследование влияния на устойчивость подвеса относительного эксцентриситета расположения внутреннего и внешнего тел, колебательного числа Рейнольдса и других факторов выполнено в [4], что потребовало полного учета зависимости профиля распределения скорости частиц жидкости от радиальной координаты и привлечения частотных методов исследования устойчивости [5], развитых для комбинированных динамических систем [6]. В математических моделях гидродинамических подвесов выполняется ряд упрощений уравнений гидродинамики, связанных с малостью относительной толщины поддерживающего слоя, однако обоснованность подобных упрощений требует дополнительного исследования. В данной работе устойчивость цилиндрического подвеса исследуется на основе уточненной модели, которая, в отличие от [4], более полно учитывает влияние сил вязкого трения в поддерживающем слое.

**1. Модель подвеса.** Внешний цилиндр радиуса  $R_1$  (рис. 1) движется поступательно с абсолютным ускорением  $\mathbf{a}$  и вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ , приводит в движение вязкую несжимаемую жидкость между цилиндрами и через нее – внутренний цилиндр радиуса  $R_2$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega_2$ . Требуется обеспечить устойчивость внутреннего цилиндра. Длина цилиндра значительно больше радиуса  $R_2$ . Свяжем с центрами внешнего и внутреннего цилиндров поступательно движущиеся системы координат  $O_1\xi_1\xi_2$  и  $O_2x_1x_2$ . Центр внутреннего цилиндра смещен относительно центра внешнего цилиндра на величину  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ , заданную проекциями на оси  $O_2x_1x_2$ . С  $O_2x_1x_2$  связана цилиндрическая система координат  $(r, \varphi)$ , где  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $\mathbf{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)^T$ ,  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор, нормальный к плоскости  $O_2x_1x_2$ . Пусть  $t$  – время,  $m$ ,  $J$  – погонные масса и момент инерции внутреннего тела,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{G}$  – сила и момент сил, действующие со стороны жидкости на внутреннее тело,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(r, \varphi, t) = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi$  и  $p = p(r, \varphi, t)$  – скорость и давление в жидкости,  $\nu$ ,  $\rho$  – ее кинематическая вязкость и плотность,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения, толщина цилиндрического зазора  $h(\varphi, t) = (R_1^2 - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2)^{1/2} - R_2 - \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r$ . Уравнения движения подвеса суть

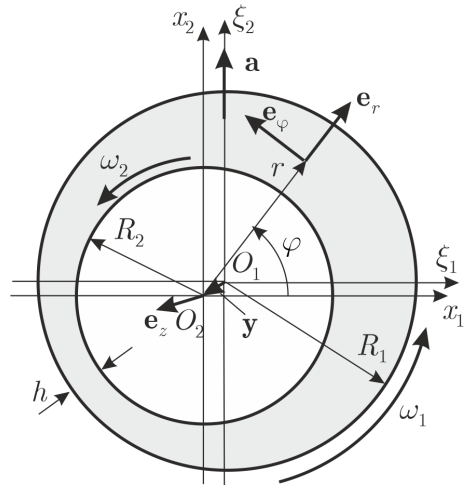


Рис. 1. Расчетная схема подвеса

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\mathbf{y}} &= m(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{N}, \quad J\dot{\omega}_2 = G, \quad (\dot{\phantom{x}}) = d(\phantom{x})/dt \\
 \partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g} - \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{y}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\
 V_r|_{r=R_2} &= 0, \quad V_\varphi|_{r=R_2} = \omega_2 R_2 \\
 V_r|_{r=R_2+h} &= -\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_r - \omega_1 \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi, \quad V_\varphi|_{r=R_2+h} = -\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \omega_1 (R_2 + h + \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r) \\
 \mathbf{N} &= R_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \rho \nu \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R_2} - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{r=R_2} \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad G = \rho \nu R_2^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R_2} - 2\pi \rho \nu R_2^2 \omega_2
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь операции векторного анализа в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
 \nabla U &= \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \right. \\
 &\left. - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \left( \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \right] \\
 (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \nabla(\mathbf{A}^2/2) - \mathbf{A} \times [\nabla \times \mathbf{A}]
 \end{aligned}$$

Пусть  $\mathbf{V} = \omega_1 \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} + \mathbf{v}(r, \varphi, t)$ ,  $\mathbf{r} = (x_1, x_2)^T = r \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\delta = R_1 - R_2$ ,  $\beta = \delta/R_2 \ll 1$ ,  $\rho_2 = m/(\pi R_2^2)$  – приведенная плотность внутреннего цилиндра,  $\gamma = g/(R_2 \omega_1^2)$ . При приведении (1) к безразмерным переменным полагаем:  $t = t^*/\omega_1$ ,  $r = R_2(1 + \beta\xi)$ ,  $\mathbf{y} = \delta \mathbf{y}^*$ ,  $h = \delta h^*$ ,  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 \omega^*$ ,  $v_\varphi = \omega_1 R_2 v_\varphi^*$ ,  $v_r = \beta \omega_1 R_2 v_r^*$ ,  $p = \rho \omega_1^2 R_2^2 p^*$ ,  $\mathbf{g} = g \mathbf{g}^*$ ,  $\mathbf{a} = g \mathbf{a}^*$ ,  $\mathbf{N} = -\pi R_2^2 \rho (\mathbf{g} - \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{y}}) + \rho \omega_1^2 R_2^3 \mathbf{N}^*$ ,  $G = \rho \nu \omega_1 R_2^3 G^*/\delta$ ,  $J = m R_2^2 J^*$ ,  $\sigma = \omega_1 \delta^2 / \nu$  – колебательное число Рейнольдса [4]. В результате получено (символ «\*» над безразмерными переменными далее опущен, отброшен ряд слагаемых порядка малости  $\beta^2$  и выше)

$$\pi \beta \left( \frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \ddot{\mathbf{y}} = \pi \left( \frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \gamma (\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{N}, \quad \pi \frac{\rho_2}{\rho} J \dot{\omega} = -\frac{\beta}{\sigma} G, \quad \mathbf{g} = (0, -1)^T \tag{2}$$

$$h(\varphi, t) = 1 - \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \beta (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2 / 2 \tag{3}$$

$$v_r = -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \tag{4}$$

$$p = p|_{\xi=0} + \beta \int_0^\xi (v_\varphi^2 + 2v_\varphi) d\xi \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + [1 + (1 - \beta\xi)v_\varphi] \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta v_r (2 + v_\varphi) = \tag{6}$$

$$= -(1 - \beta\xi) \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$v_\varphi|_{\xi=0} = -\omega, \quad v_\varphi|_{\xi=h} = \beta (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \tag{7}$$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{\xi=0} \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G = 2\pi \beta \omega + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\varphi \tag{8}$$

Начальные условия при  $t = 0$  для (2)-(8) соответствуют равновесному состоянию и находятся решением уравнений, в которых  $\dot{(\ )} = 0$ ,  $\partial(\ )/\partial t = 0$ . В «укороченном» уравнении Навье-Стокса (6) более полно учитывается влияние сил вязкого трения по сравнению с [4]. Математическая модель (2)-(8) содержит связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, и является комбинированной динамической системой [6] с входными функциями  $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t))^T$  и выходными функциями  $y_1(t), y_2(t), \omega(t)$ . Используя (5), приводим (6) к виду

$$\begin{aligned} \partial v_\varphi / \partial t &= \mathbb{F}[\mathbf{v}] - (1 - \beta\xi)\Pi(\varphi, t), \quad \Pi = \partial p|_{\xi=0} / \partial \varphi, \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0 \\ \mathbb{F}[\mathbf{v}] &= -[1 + (1 - \beta\xi)v_\varphi] \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta U + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) \quad (9) \\ U &= (1 - \beta\xi) \left( v_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi d\xi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi^2 d\xi \right) \end{aligned}$$

Дифференцируя по времени второе уравнение (4) и используя (8), находим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ h \left( 1 - \frac{1}{2} \beta h \right) \Pi + \frac{1 + \beta h}{\pi \beta} \left( \frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right)^{-1} \mathbf{e}_\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \Pi \mathbf{e}_\varphi d\varphi \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^h \mathbb{F}[\mathbf{v}] d\xi + \frac{1 + \beta h}{\pi \sigma} \left( \frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right)^{-1} \mathbf{e}_\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \mathbf{e}_\varphi d\varphi - \\ &\quad - (1 + \beta h) (\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_r - \gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_\varphi / \beta) \end{aligned} \quad (11)$$

При неограниченном возрастании угловой скорости подвеса  $\sigma \rightarrow \infty$ , и  $\chi = (\rho_2/\rho - 1)\gamma\sigma^{-2} = \text{const} = \underline{\underline{O}}(1)$ . Выполнялось асимптотическое интегрирование уравнений равновесного состояния ( $\dot{(\ )} = 0$ ,  $\partial(\ )/\partial t = 0$ ). Аналогично [4], подвес быстро центрируется в равновесном состоянии при увеличении  $\sigma$ :  $\mathbf{y} = \sigma^{-2}\mathbf{y}_0 + \sigma^{-5/2}\mathbf{y}_1 + \dots$ ,  $\omega = \sigma^{-7/2}\sqrt{2}(1 + 3\beta/2)\mathbf{y}_0^2/4 + \dots$ ,  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{y}_0 = (y_{0,1}, y_{0,2})^T = -(1 - 3\beta/2)\chi(\mathbf{g} - \mathbf{a})$ ,  $\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, y_{1,2})^T$ ,  $y_{1,1} + iy_{1,2} = -2\sqrt{i}(y_{0,1} + iy_{0,2})$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

**2. Моделирование переходных процессов.** Выполняется отображение занятой поддерживающим слоем области с подвижной границей на область с неподвижной границей переходом к новой независимой переменной  $x = \xi/h(\varphi, t)$ . При этом (4), (7)-(9), (11) преобразуются к виду

$$v_r = (1 - \beta hx) \left[ \frac{\partial h}{\partial \varphi} x v_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( h \int_0^x v_\varphi dx \right) \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ h \int_0^1 v_\varphi dx \right] = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \quad (13)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{x}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} - (1 - \beta hx)\Pi + \mathbb{F}[\mathbf{v}], \quad \Pi = \Pi(\varphi, t), \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0 \quad (14)$$

$$\mathbb{F}[\mathbf{v}] = \beta(1 - \beta hx) \left[ v_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( h \int_0^x v_\varphi dx \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( h \int_0^x v_\varphi^2 dx \right) \right] - [1 + (1 - \beta hx)v_\varphi] \cdot \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{x}{h} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) - \frac{v_r}{h} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2} + \frac{\beta}{h} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + \beta^2 \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{x}{h} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 v_\varphi \right] \\ v_\varphi|_{x=0} = -\omega, \quad v_\varphi|_{x=1} = \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \quad (15)$$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\beta}{\sigma h} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} - \Pi \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} \frac{d\varphi}{h} \quad (16)$$

$$\Phi = h \int_0^1 \mathbb{F}[\mathbf{v}] dx + \frac{1 + \beta h}{\pi\sigma} \left( \frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right)^{-1} \mathbf{e}_\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} \mathbf{e}_\varphi \frac{d\varphi}{h} - \\ -(1 + \beta h)(\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_r - \gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_\varphi / \beta) \quad (17)$$

Пусть  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ . Полагаем

$$v_\varphi(x, \varphi, t) \approx \sum_{n=0}^{N_x+2} \sum_{k=-N_\varphi}^{N_\varphi} v_{\varphi nk}(t) T_n(2x-1) e^{ik\varphi}, \quad v_{\varphi n, -k} = \bar{v}_{\varphi nk}, \quad N_x \geq 7\sigma^{1/4}/2 \\ \Pi(\varphi, t) \approx \sum_{k=1}^{N_\varphi} (p_k(t) e^{ik\varphi} + p_{-k}(t) e^{-ik\varphi}), \quad p_{-k} = \bar{p}_k \quad (18)$$

и применяем к (10), (13) и (14) проекционный метод Галеркина [7] в форме

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \left[ h(1 - \beta h/2)\Pi + \frac{(1 + \beta h)\rho}{\pi\beta(\rho_2 - \rho)} \mathbf{e}_\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \Pi \mathbf{e}_\varphi d\varphi \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \Phi, \quad (19)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} h \int_0^1 v_\varphi dx = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} (1 + \beta h)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi), \quad k = \pm 1, \dots, \pm N_\varphi \quad (20)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \int_0^1 dx T_n(2x-1) \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\varphi} \int_0^1 dx T_n(2x-1) \left[ \frac{x}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} - \right. \\ \left. -(1 - \beta hx)\Pi(\varphi, t) + \mathbb{F}[\mathbf{v}] \right], \quad n = \overline{0, N_x}, \quad k = \overline{-N_\varphi, N_\varphi} \quad (21)$$

С учетом (18), уравнения (2), (3), (10), (15), (16), (19)-(2) представляют собой в неявной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \omega, \dot{y}_1, \dot{y}_2, v_{\varphi n_0}, \text{Re } v_{\varphi \nu k}, \text{Im } v_{\varphi \nu k})^T \\ n = \overline{0, N_x}, \nu = \overline{1, N_x}, k = \overline{1, N_\varphi} \quad (22)$$

которая, после приведения к нормальной форме (23), интегрируется численно ФДН-методом [8]. Соответствующие равновесному состоянию начальные условия  $\mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0$  находятся численно из условия  $\mathbf{F}(-0, \mathbf{Y}_0) = 0$ .

**3. Моделирование устойчивости.** Пусть величины  $\mathbf{y}_0, \omega_0, h_0, v_r^{(0)}, v_\varphi^{(0)}$ ,  $\Pi_0, \mathbf{N}_0, G_0$  соответствуют состоянию равновесия. Полагаем  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 + \varepsilon \mathbf{a}_1(t) + \dots$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \varepsilon \mathbf{y}(t) + \dots$ ,  $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(t) + \dots$ ,  $h(\varphi, t) = h_0(\varphi) + \varepsilon h_1(\varphi, t) + \dots$ ,  $v_r(\xi, \varphi, t) = v_r^{(0)}(\xi, \varphi) + \varepsilon v_r^{(1)}(\xi, \varphi, t) + \dots$ ,  $v_\varphi(\xi, \varphi, t) = v_\varphi^{(0)}(\xi, \varphi) + \varepsilon v_\varphi^{(1)}(\xi, \varphi, t) + \dots$ ,  $\Pi(\varphi, t) = \Pi_0(\varphi) + \varepsilon \Pi_1(\varphi, t) + \dots$ ,  $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}_0 + \varepsilon \mathbf{N}_1(t) + \dots$ ,  $G(t) = G_0 + \varepsilon G_1(t) + \dots$ ,

$\varepsilon \rightarrow 0$ . Из (2)-(8) следуют линейные уравнения возмущенного движения, решением которых являются  $\mathbf{y}_1, \omega_1, h_1, v_r^{(1)}, v_\varphi^{(1)}, \Pi_1, N_1, G_1$  (на подвижной границе выполняется снесение граничных условий на невозмущенную стенку [9]):

$$\begin{aligned} \pi\beta(\rho_2/\rho - 1)\ddot{\mathbf{y}} &= -\pi(\rho_2/\rho - 1)\gamma\mathbf{a} + \mathbf{N}, \quad \pi\rho_2 J\dot{\omega}/\rho = -\beta G/\sigma \\ h &= -\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \beta(\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi) \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \\ v_r &= -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h_0)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \\ \partial v_\varphi / \partial t &= -(1 - \beta\xi) \Pi + \mathbb{L}[\mathbf{v}], \quad \Pi = \Pi(\varphi, t), \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0 \quad (23) \\ \mathbb{L}[\mathbf{v}] &= -[1 + (1 - \beta\xi)v_\varphi^{(0)}] \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - (1 - \beta\xi) \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \varphi} v_\varphi - v_r^{(0)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \xi} v_r + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \right. \\ &+ \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \left. \right] + (\beta - \beta^2 \xi) \left[ v_\varphi^{(0)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi d\xi + v_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\xi v_\varphi^{(0)} d\xi - 2 \int_0^\xi v_\varphi^{(0)} v_\varphi d\xi \right] \\ v_\varphi|_{\xi=0} &= -\omega, \quad v_\varphi|_{\xi=h_0} = \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi) - h(\partial v_\varphi^{(0)} / \partial \xi)|_{\xi=h_0} \\ \mathbf{N} &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \Pi \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \\ \mathbf{y}|_{t=0} &= \dot{\mathbf{y}}|_{t=0} = \omega|_{t=0} = v_\varphi|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

Далее в (23) выполняем одностороннее интегральное преобразование Лапласа  $f(t) \rightarrow f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$ . Следуя [4], представим изображение реакций слоя вязкой несжимаемой жидкости на возмущенное движение в виде  $\mathbf{N}(\lambda) = -N^{(y)}(\lambda)\mathbf{y}(\lambda) - \mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda)\omega(\lambda)$ ,  $G(\lambda) = [\mathbf{G}^{(y)}(\lambda)]^T \mathbf{y}(\lambda) + G^{(\omega)}(\lambda)\omega(\lambda)$ ,  $N^{(y)}(\lambda) = [N_{kj}^{(y)}(\lambda)]$ ,  $k, j = 1, 2$ ,  $\mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda) = (N_1^{(\omega)}(\lambda), N_2^{(\omega)}(\lambda))^T$ ,  $\mathbf{G}^{(y)}(\lambda) = (G_1^{(y)}(\lambda), G_2^{(y)}(\lambda))^T$ . Изображения возмущений входных и выходных функций связаны системой линейных алгебраических уравнений с определителем  $D(\lambda)$

$$\begin{aligned} (\pi\beta(\rho_2/\rho - 1)\lambda^2 + N^{(y)}(\lambda))\mathbf{y} + \mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda)\omega &= -\pi\gamma(\rho_2/\rho - 1)\mathbf{a} \\ \beta[\mathbf{G}^{(y)}(\lambda)]^T \mathbf{y} / \sigma + (\pi J\lambda/\rho + \beta G^{(\omega)}(\lambda)/\sigma)\omega &= 0 \\ D(\lambda) = \det[D_{kj}(\lambda)], \quad k, j = 1, 2, 3, \quad D_{jj}(\lambda) &= \pi\beta(\rho_2/\rho - 1)\lambda^2 + N_{jj}^{(y)}(\lambda) \quad (24) \\ D_{j3}(\lambda) = N_j^{(\omega)}(\lambda), \quad D_{3j}(\lambda) = \beta G_j^{(y)}(\lambda)/\sigma, \quad j = 1, 2, \quad D_{12}(\lambda) &= N_{12}^{(y)}(\lambda) \\ D_{21}(\lambda) = N_{21}^{(y)}(\lambda), \quad D_{33}(\lambda) &= \pi\rho_2 J\lambda/\rho + \beta G^{(\omega)}(\lambda)/\sigma \end{aligned}$$

При аналитичности в правой комплексной полуплоскости и в окрестности мнимой оси функций  $N_{kj}^{(y)}(\lambda), N_j^{(\omega)}(\lambda), G_j^{(y)}(\lambda), G^{(\omega)}(\lambda)$  подвес устойчив [4, 6], если

$$\Delta_{1 \leq \vartheta \leq \infty} \arg D(i\vartheta) = 5\pi/2 \quad (25)$$



и неустойчив в противном случае. Пусть  $\delta_j^k$  – символ Кронекера. Из (23) следуют линейные краевые задачи для нахождения  $N_{kj}^{(y)}(\lambda)$ ,  $N_j^{(\omega)}(\lambda)$ ,  $G_j^{(y)}(\lambda)$ ,  $G^{(\omega)}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
 v_r &= -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h_0)(\mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r - \lambda \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \\
 \mathbf{e}_j^{(2)} &= (\delta_j^1, \delta_j^2)^T, \quad \lambda v_\varphi = -(1 - \beta\xi) \Pi + \mathbb{L}[\mathbf{v}], \quad \Pi = \Pi(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0, \quad v_\varphi|_{\xi=0} = 0 \\
 v_\varphi|_{\xi=h_0} &= \beta(\mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r - \lambda \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi) + (\partial v_\varphi^{(0)} / \partial \xi)|_{\xi=h_0} [\mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r + \beta(\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi) \cdot (\mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi)] \\
 (N_{1j}^{(y)}, N_{2j}^{(y)})^T &= \int_0^{2\pi} \left( \Pi - \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G_j^{(y)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad j = 1, 2 \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_r &= -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = 0, \quad \lambda v_\varphi = -(1 - \beta\xi) \Pi + \mathbb{L}[\mathbf{v}] \\
 \Pi &= \Pi(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} \Pi d\varphi = 0, \quad v_\varphi|_{\xi=0} = -1, \quad v_\varphi|_{\xi=h_0} = 0 \quad (27) \\
 \mathbf{N}^{(\omega)} &= \int_0^{2\pi} \left( \Pi - \frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G^{(\omega)} = 2\pi\beta + \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}
 \end{aligned}$$

При умеренных и средних значениях  $\lambda$  и  $\sigma = \underline{O}(1)$  выполнялось преобразование линейных краевых задач (26), (27) к новой независимой переменной  $x = \xi/h_0(\varphi)$ . Далее они аналогично (18), (20), (2) проекционным методом Галлеркина сводились к системам линейных алгебраических уравнений и решались численно. Проверка отсутствия полюсов функций  $N_{kj}^{(y)}(\lambda)$ ,  $N_j^{(\omega)}(\lambda)$ ,  $G_j^{(y)}(\lambda)$ ,  $k, j = 1, 2$ ,  $G^{(\omega)}(\lambda)$  выполнялась численно на основе принципа аргумента.

При  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\text{Re } \lambda > -\infty$ ,  $\sigma = \underline{O}(1)$  аналогично [4] выполнялось асимптотическое интегрирование краевых задач (26), (27). В результате найдено

$$\begin{aligned} (N_{1j}^{(y)}(\lambda), N_{2j}^{(y)}(\lambda))^T &= \sum_{k=0}^3 \mathbf{A}_k^{(j)} \lambda^{2-k/2} + \underline{O}(1), \quad \Pi(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^3 \Pi_k(\varphi) \lambda^{2-k/2} + \\ &+ \underline{O}(1), \quad \mathbf{A}_0^{(j)} = \int_0^{2\pi} \Pi_0 \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad \mathbf{A}_1^{(j)} = \int_0^{2\pi} (\Pi_1 + \beta \sigma^{-1/2} \Pi_0) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad \mathbf{A}_2^{(j)} = \int_0^{2\pi} (\Pi_2 + \\ &+ \beta \sigma^{-1/2} \Pi_1 - \beta^2 \sigma^{-1} \Pi_0/2) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad \mathbf{A}_3^{(j)} = \int_0^{2\pi} [(\Pi_3 + \beta \sigma^{-1/2} \Pi_2 - \beta^2 \sigma^{-1} \Pi_1/2) \mathbf{e}_\varphi - \\ &- \beta \sigma^{-1/2} (1 - \omega_0) \Pi_0 \mathbf{e}_r/2] d\varphi, \quad G_j^{(y)}(\lambda) = -\frac{5}{8} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \frac{d\Pi_0}{d\varphi} d\varphi + \underline{O}(\lambda^{-1/2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \mathcal{L}[h_0^{-1} (1 - \beta h_0/2)^{-1} (1 + \beta h_0) \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi], \quad \Pi_1 = \sigma^{-1/2} \mathcal{L}[h_0^{-1} (1 - \beta h_0/2)^{-1} \cdot \\ &\cdot ((2 - \beta h_0) \Pi_0 - \beta \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_\varphi)], \quad \Pi_2 = \mathcal{L}\{h_0^{-1} (1 - \beta h_0/2)^{-1} [\sigma^{-1/2} (2 - \beta h_0) \Pi_1 + \\ &+ [h_0 - \beta h_0^2/2 + 2(1 + \beta h_0) V_0 - 8\beta V_1 - \beta h_0 \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_r] d\Pi_0/d\varphi - [(1 + 3\beta h_0) \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ 4\beta W_1] \Pi_0 - (1 + \beta h_0) \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r\}, \quad \Pi_3 = \mathcal{L}\{h_0^{-1} (1 - \beta h_0/2)^{-1} [\sigma^{-1/2} (2 - \beta h_0) \Pi_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sigma^{-1/2} [(5/2 + \beta h_0) \omega_0 - 3 - \beta V_0 + 3\beta/2 - 2\beta \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_r] d\Pi_0/d\varphi + \beta \sigma^{-1/2} \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi \Pi_0/2 + \\ &+ [h_0 - \beta h_0^2/2 + 2(1 + \beta h_0) V_0 - 8\beta V_1 - \beta h_0 \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_r] d\Pi_1/d\varphi - \\ &- [(1 + 3\beta h_0) \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi + 4\beta W_1(\varphi) + \beta/(2\sigma)] \Pi_1 + \beta \sigma^{-1/2} \mathbf{e}_j^{(2)} \cdot \mathbf{e}_r/2\} \end{aligned}$$

$$V_0(\varphi) = \int_0^{h_0} v_\varphi^{(0)} d\xi, \quad V_1(\varphi) = \int_0^{h_0} \xi v_\varphi^{(0)} d\xi, \quad W_1(\varphi) = \int_0^{h_0} \xi d\xi \partial v_\varphi^{(0)} / \partial \varphi$$

$$\mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda) = \mathbf{B} \lambda^{-1} + \underline{O}(\lambda^{-3/2}), \quad G^{(\omega)}(\lambda) = 2\pi(\sigma\lambda)^{1/2} + 3\pi\beta + \pi\beta^2(\sigma\lambda)^{-1/2}/4 + \underline{O}(\lambda^{-1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= f(\varphi) - \frac{1}{h_0 - \beta h_0^2/2} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h_0 - \beta h_0^2/2} \right]^{-1} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{8\sigma} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \\ &\cdot \left[ \left[ \frac{13}{h_0 - \beta h_0^2/2} - 3\beta \right] \left. \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \mathbf{e}_r + 13\mathcal{L} \left[ \frac{1 - \beta h_0}{(h_0 - \beta h_0^2/2)^2} \frac{dh_0}{d\varphi} \left. \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \right] \mathbf{e}_\varphi \right] \end{aligned}$$

При эксцентриситете  $|\mathbf{y}_0| \ll 1$  в равновесном состоянии (что выполнено при  $\sigma \gg 1$ ), уравнения (26), (27) и уравнения равновесного состояния преобразовывались к деформированной радиальной координате  $x = \xi/h_0$ , и использовалось прямое асимптотическое разложение  $v_\varphi^{(0)} = |\mathbf{y}_0| v_{\varphi,1}^{(0)}(x, \varphi) + |\mathbf{y}_0|^2 v_{\varphi,2}^{(0)}(x, \varphi) + \dots$ ,  $v_r^{(0)} = |\mathbf{y}_0| v_{r,1}^{(0)}(x, \varphi) + |\mathbf{y}_0|^2 v_{r,2}^{(0)}(x, \varphi) + \dots$ ,  $\Pi_0(\varphi) = |\mathbf{y}_0| \Pi_1^{(0)}(\varphi) + |\mathbf{y}_0|^2 \Pi_2^{(0)}(\varphi) + \dots$ ,  $\omega_0 = |\mathbf{y}_0|^2 \omega_2^{(0)} + \dots$ ,  $v_\varphi = v_{\varphi,0}(x, \varphi) + |\mathbf{y}_0| v_{\varphi,1}(x, \varphi) + \dots$ ,  $v_r = v_{r,0}(x, \varphi) + |\mathbf{y}_0| v_{r,1}(x, \varphi) + \dots$ ,

$\Pi(\varphi) = \Pi_0^{(1)}(\varphi) + |\mathbf{y}_0| \Pi_1^{(1)}(\varphi) + \dots$  В результате получено

$$N_{1,j}^{(y)}(\lambda) = (F^{(+)}(\lambda) - F^{(-)}(\lambda))/(2i), \quad N_{2,j}^{(y)}(\lambda) = (F^{(+)}(\lambda) + F^{(-)}(\lambda))/2, \quad j = 1, 2$$

$$F^{(\pm)}(\lambda) = -\pi(\delta_j^2 \pm i\delta_j^1)(\lambda \pm i) \left\{ (1 + \beta - \beta S_{\pm 1}) w_{\pm 1} \sigma^{-1} [\beta/2 - \beta S_{\pm 1} + \right. \\ \left. - \frac{\sigma(\lambda \pm i)}{w_{\pm 1}} + \frac{2\sigma(\lambda \pm i)s_{\pm 1}}{w_{\pm 1}^2 \operatorname{sh} s_{\pm 1}} \left( \operatorname{ch} s_{\pm 1} - \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \right) \right]^{-1} \left[ 1 - \frac{\beta}{w_{\pm 1}} (\beta - \sigma(\lambda \pm i) S_{\pm 1}) - \right. \\ \left. - \frac{\beta e^{\beta/2} s_{\pm 1}}{\operatorname{sh} s_{\pm 1}} \right] + \frac{\beta^2 e^{\beta/2} s_{\pm 1}}{\sigma \operatorname{sh} s_{\pm 1}} \left. \right\}, \quad S_{\pm 1} = \frac{1}{w_{\pm 1}} \left[ \frac{s_{\pm 1}}{\operatorname{sh} s_{\pm 1}} (\operatorname{ch} s_{\pm 1} - e^{\beta/2}) + \frac{\beta}{2} \right]$$

$$w_{\pm 1} = \beta^2 + \sigma(\lambda \pm i), \quad s_{\pm 1} = (w_{\pm 1} + \beta^2/4)^{1/2}, \quad \mathbf{G}^{(y)}(\lambda) = \underline{\underline{Q}}(|\mathbf{y}_0|), \quad \mathbf{N}^{(\omega)}(\lambda) = \underline{\underline{Q}}(|\mathbf{y}_0|)$$

$$G^{(\omega)}(\lambda) = 2\pi \sqrt{\sigma\lambda + \beta^2/4} \operatorname{cth} \sqrt{\sigma\lambda + \beta^2/4} + 3\pi\beta$$

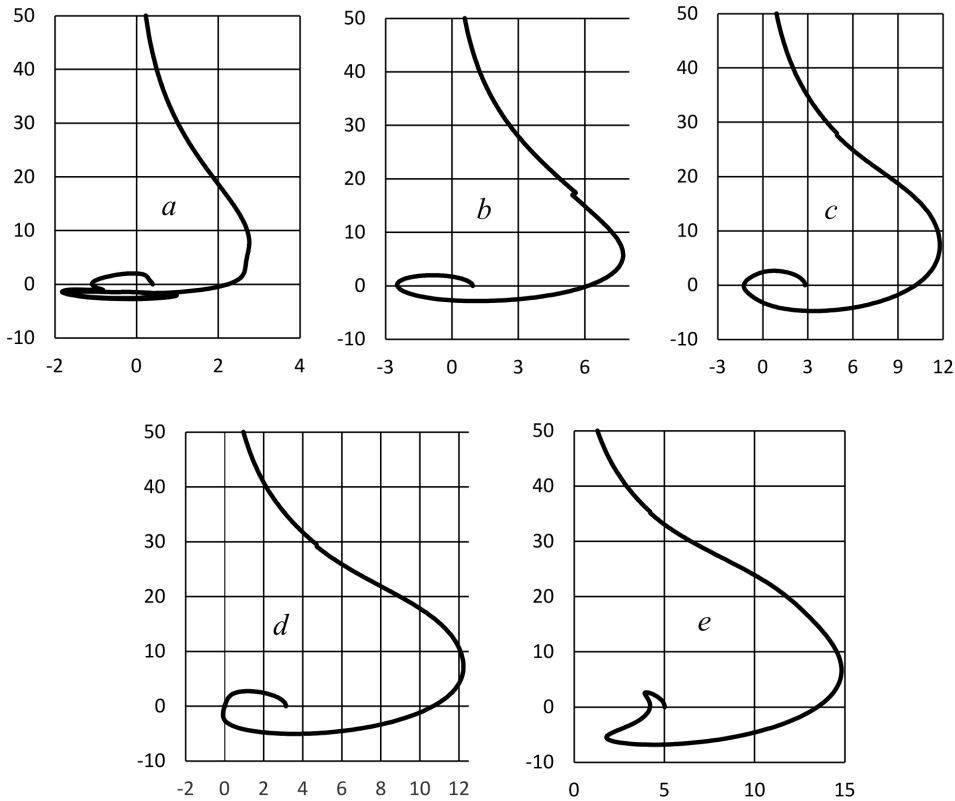


Рис. 2. Частотные годографы

**4. Результаты моделирования** на основе уточненной математической модели аналогичны [4], но приводят к несколько большей протяженности областей устойчивости. На рис. 2 приведены частотные годографы характеристического квазимногочлена (3) в масштабе  $u + iv = \ln(1 + |D(i\omega)|)D(i\omega)/|D(i\omega)|$  для

подвеса с «легким» внутренним телом с безразмерными параметрами  $\beta = 0.143$ ,  $\rho_2/\rho = 0.594$ ,  $J = 0.5$ ,  $\chi = -53.78$  [4]. При  $\sigma = 50$  (рис. 2а) относительный эксцентриситет в равновесном состоянии  $|\mathbf{y}_0| = 0.011$ , подвес находится практически в центральном положении и асимптотически устойчив. Аналогично, подвес устойчив при  $\sigma = 8$ ,  $|\mathbf{y}_0| = 0.396$  (рис. 2b) и при  $\sigma = 6$ ,  $|\mathbf{y}_0| = 0.771$  (рис. 2c). Значения  $\sigma = 5,83$  (найденно бинарным делением),  $|\mathbf{y}_0| = 0.794$  соответствуют границе области устойчивости (рис. 2d). При  $\sigma = 5$ ,  $|\mathbf{y}_0| = 0.876$  подвес неустойчив (рис. 2e). Использование уточненной математической модели приводит к несколько большему значению эксцентриситета на границе области устойчивости  $|\mathbf{y}_0| = 0.794$  по сравнению с аналогичным значением  $|\mathbf{y}_0| = 0.763$  согласно исходной математической модели [4].

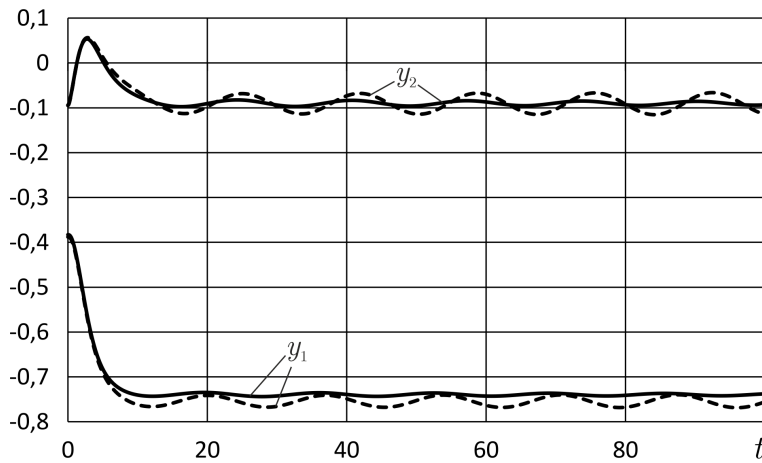


Рис. 3. Графики переходных процессов

На рис. 3 для подвеса с «легким» внутренним телом и безразмерными параметрами  $\beta = 0.25$ ,  $\rho_2/\rho = 0.594$ ,  $J = 0.5$ ,  $\gamma = 4.688$ ,  $\sigma = 3.97$  представлены зависимости от времени смещений центра масс внутреннего тела при его переходе из одного равновесного состояния в другое при скачкообразном увеличении действующей на подвес перегрузки  $\mathbf{a}(t) = (0, a \cdot 1(t))^T$ . Здесь  $a = 0.372$ ,  $1(t)$  – функция единичного скачка Хевисайда. Графики переходных процессов для математической модели из [4] показаны пунктирной линией, а для уточненной модели – сплошной. Уточненная математическая модель характеризуется несколько большей протяженностью областей устойчивости по сравнению с исходной моделью [4]. В результате при умеренных значениях колебательного числа Рейнольдса  $\sigma$  применение уточненной математической модели приводит к более быстрому затуханию переходных процессов в подвесе.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Д. К. Андрейченко постановка задачи, асимптотическое интегрирование краевых задач, написание текста рукописи, Е. Ю. Крылова обзор литературы по теме статьи, проведение вычислительных экспериментов, редактирование текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** D. K. Andreichenko problem statement, asymptotic integration of boundary value problems, writing the text of the manuscript, E. Yu. Krylova reviewing the literature on the topic of the article, conducting computational experiments, editing the text of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. Москва : Наука, 1986. 672 с.
- [2] Андрейченко К.П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. Москва : Машиностроение, 1987. 128 с.
- [3] Андрейченко К.П. Устойчивость цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1975. № 6. С. 32–39.
- [4] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 13–26.
- [5] Неймарк Ю.И. Динамические процессы и управляемые системы. Москва : Наука, 1978. 336 с.
- [6] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
- [7] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва : Мир, 1988. 352 с.
- [8] Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Москва : Мир, 1999. 685 с.
- [9] Седов Л.И. Механика сплошной среды В 2 т. Т. 1. Москва : Наука, 1976. 536 с.

### REFERENCES

- [1] Ishlinskii A.Yu. Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow : Nauka, 1986. 672 p. (in Russian).
- [2] Andreichenko K.P. Dynamics of float gyroscopes and accelerometers. Moscow : Mashinostroenie, 1987. 128 p. (in Russian).
- [3] Andreichenko K.P. Stability of a cylindrical hydrodynamic suspension // Mechanics of Solids (Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela). 1975. Vol. 10, no. 6. P. 24–30.
- [4] Andreichenko D.K., Andreichenko K.P. On the theory of stability of a cylindrical hydrodynamic suspension // Fluid Dynamics. 2009. Vol. 44, no. 1. P. 10–21.
- [5] Neimark Yu. I. Dynamic processes and controlled systems. Moscow : Nauka, 1978. 336 p. (in Russian).
- [6] Andreichenko D.K., Andreichenko K.P. On the theory of hybrid dynamical systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2000. Vol. 39, no. 3. P. 383–398.

- [7] Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method. Mir : Moscow, 1988. 352 p. (in Russian).
- [8] Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Moscow : Mir, 1999. 685 p. (in Russian).
- [9] Sedov L.I. Continuum mechanics. In 2 vols . Vol . 1. Moscow : Nauka, 1976. 536 p. (in Russian).

Ю. В. Немировский<sup>1,2</sup>, С. В. Тихонов<sup>3</sup>

## УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ И СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** В работе рассматривается задача продольно-поперечного изгиба многослойных бетонных стержней постоянного поперечного сечения под действием квазистатических нагрузок. Предполагается, что бетоны деформируются при деформациях ниже предельной упругой линейно, а выше – нелинейно квазиупруго. Зависимости между напряжениями и деформациями принимаются в области нелинейного деформирования в виде полиномов второго порядка с различными коэффициентами для разных марок бетонов. Предполагается, что имеет место одноосное напряженное состояние и в зоне сжатия все слои стержня деформируются упруго, а в зоне растяжения слои могут находиться в областях упругого, нелинейного квазиупругого деформирования и содержать границу двух этих областей. Рассмотрены примеры расчета стержней, где количество слоев равно 3 и рассматривается влияние формы поперечного сечения и собственного веса на предельные нагрузки.

**Ключевые слова:** бетонные многослойные стержни, физическая нелинейность, упругость, поперечные нагрузки, предельные деформации.

**Немировский Юрий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник; e-mail: nemiryury@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4281-4358>; AuthorID: 2403

**Тихонов Сергей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий; e-mail: strangcheb@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385

**для цитирования:** Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Учет влияния формы поперечного сечения и силы тяжести на предельное состояние многослойного бетонного стержня // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 89–96. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.007 EDN: TXBVVX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Yu. V. Nemirovskii<sup>1,2</sup>, S. V. Tikhonov<sup>3</sup>

## TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF CROSS-SECTIONAL SHAPE AND GRAVITY ON THE LIMIT STATE OF A MULTILAYER CONCRETE ROD

<sup>1</sup>*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

<sup>3</sup>*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The article examines the problem of longitudinal-transverse bending of multilayer concrete rods with a constant cross-section under quasi-static loads. It is assumed that the concrete deforms linearly under strains below the elastic limit and nonlinearly quasi-elastically above it. The stress-strain relationships in the nonlinear deformation range are represented as second-order polynomials with different coefficients for various grades of concrete. It is assumed that the stress state is uniaxial, with all layers of the rod deforming elastically in the compression zone, while in the tension zone, the layers may be in regions of elastic or nonlinear quasi-elastic deformation and may include the boundary between these regions. Examples of rod calculations are presented, where the number of layers equals three, and the influence of the cross-sectional shape and self-weight on the ultimate loads is analyzed.

**Keywords:** Concrete multilayer rods, physical nonlinearity, elasticity, transverse loads, ultimate deformations.

**Yuri V. Nemirovskii**, Dr. Sci. Phys.&Math., Professor, Leading Research Worker; e-mail: nemiryury@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4281-4358>; AuthorID: 2403

**Sergey V. Tikhonov**, PhD, Assoc. Prof.; e-mail: strangcheb@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7628-3364>; AuthorID: 183385

**to cite this article:** Nemirovskii Yu. V., Tikhonov S. V. Taking into account the influence of cross-sectional shape and gravity on the limit state of a multilayer concrete rod // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 89–96. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.007 EDN: TXBVVX

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*



**Введение.** Изделия из бетона завоевали высокую популярность в строительстве зданий и сооружений ввиду достаточно низкой себестоимости изготовления и высоких эксплуатационных характеристик. При этом в научной литературе достаточно много работ, где в расчетах деформирование бетона рассматривается как линейное упругое и не учитывается существенная нелинейность диаграммы деформирования бетона [1–4]. В данной работе рассматриваются многослойные бетонные стержни, где в каждом слое может быть реализована своя марка бетона, а также рассматриваются стержни различного поперечного сечения. Рассмотрены примеры расчета стержней по соотношениям [5], где количество слоев равно 3 и рассматривается влияние формы поперечного сечения и собственного веса на несущую способность стержня.

**1. Основные соотношения.** В качестве примера рассмотрим  $n$ -слойный бетонный стержень, аналогичный [5]. Далее будем следовать предположениям и обозначениям, изложенным в работе [5].

В дальнейшем будем использовать безразмерные величины

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{l} = 1, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i}{l}, \\ \tilde{q} &= q \frac{1}{l\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{Q} = Q \frac{1}{l^2\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{N} = N \frac{1}{l^2\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{M} = M \frac{1}{l\sigma_{1*}^-}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{l}, \\ \tilde{q}_g &= \frac{4g}{l\sigma_{1*}^-} \sum_{i=1}^3 b_i (h_i - h_{i-1}) \rho_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где обезразмеривающие величины такие:  $\sigma_{1*}^-$  – предел прочности при сжатии бетона марки B10,  $l$  – длина стержня,  $q$  – величина распределенной нагрузки,  $Q$  – величина перерезывающей силы,  $M$  – величина изгибающего момента,  $N$  – продольного усилия,  $w$  – величина прогиба стержня,  $q_g$  – нагрузка, вызванная действием массовых сил.

Рассмотрим случай  $n = 3$ , тогда поперечное сечение будет иметь вид, изображенный на рис. 1.

Рассмотрим шарнирно-закрепленный стержень под действием собственного веса и равномерно распределенной нагрузки  $q$  (рис. 2).

Будем рассматривать задачу изгиба шарнирно-опертого стержня равномерной поперечной нагрузкой  $q$  (рис. 2). Тогда моменты и усилия для данной статически определимой задачи будут равны

$$M_y(x) = (q + q_g) \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right), \quad N(x) = 0, \quad h_0 = 0, \quad (2)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_i$  – плотность марки бетона в  $i$ -ом слое.

Если предположить, что используемые в стержне марки бетонов имеют одинаковую плотность, т.е.

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho,$$

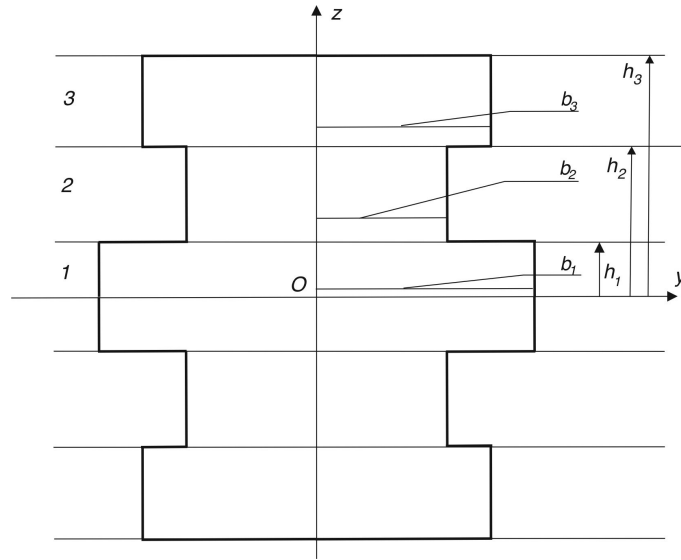


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

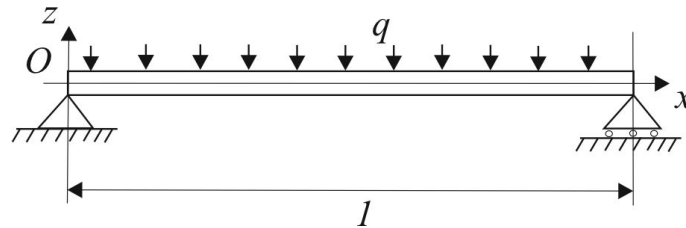


Рис. 2. Шарнирно-закрепленный стержень

тогда одинаковая площадь поперечного сечения будет соответствовать одинаковой массе стержня.

В работе [5] был рассмотрен двухслойный стержень ( $n = 2$ ) с параметрами стержня (конфигурация 1)

$$b_1 = 0,03, \quad b_2 = 0,02, \quad h_1 = 0,06, \quad h_2 = 1, \quad (3)$$

где первый слой реализован из бетона марки В10, второй – В30.

**2. Примеры расчета без учета собственного веса.** Рассмотрим трехслойный стержень ( $n = 3$ ), имеющий площадь поперечного сечения, аналогичную стержню (3) (конфигурация 2)

$$b_1 = 0,0267, \quad b_2 = 0,02, \quad b_3 = 0,05, \quad b_2 = 0,04, \quad h_1 = 0,03, \quad h_2 = 0,06, \quad h_3 = 1, \quad (4)$$

где первый слой реализован из бетона марки В10, второй – В30, третий – В50.

Если принять, что сила тяжести отсутствует, т.е.  $g = 0$ , тогда предельные нагрузки можем определить, следуя алгоритму, изложенному в [5]. Результаты определения предельных нагрузок поместим в таблицу 1. Здесь через  $(i_1, i_2, i_3)$  обозначено то, как деформируется каждый из слоев стержня, где значение 0 соответствует упругому деформированию, 1 – нелинейному квазиупругому деформированию, 2 – границе раздела этих двух областей, а через  $q_{(i_1, i_2, i_3)}^-$  и  $q_{(i_1, i_2, i_3)}^+$  обозначены минимальная и максимальная нагрузка для данной конфигурации, через  $j^-$  и  $j^+$  обозначены индексы слоев, в которых деформация достигает предельного значения при минимальной и максимальной нагрузке соответственно.

$(i_1, i_2, i_3)$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^- $	$j^-$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^+ $	$j^+$
(0,0,0)	0	0	0,000589	3
(0,0,2)	0,000589	3	0,000933	3
(0,0,1)	0,000933	3	0,001167	2
(0,2,1)	0,001167	2	0,001649	1, 2
(2,1,1)	0,001649	1, 2	0,001716	3

Таблица 1. Предельные нагрузки стержня (конфигурация 2)

Из таблицы 1 видно, что при нагрузке  $0 < |q| < 0,000589$  стержень деформируется упруго во всех слоях стержня, при  $|q| = 0,000589$  деформация достигает предельной упругой в третьем слое. При  $0,000589 < |q| < 0,000933$  первые два слоя деформируются упруго, а третий слой содержит границу раздела двух областей. Если нагрузка достигнет значения  $|q| = 0,000933$ , то при этой нагрузке граница раздела областей достигнет нижней границы слоя и весь третий слой будет деформироваться нелинейно квазиупруго. Если нагрузка будет в диапазоне  $0,000933 < |q| < 0,001167$ , то третий слой будет полностью в области нелинейного квазиупругого деформирования, а первые два слоя – упругого. Нагрузка  $|q| = 0,001167$  соответствует достижению во втором слое на верхней границе деформации значения предельно-упругой. При  $0,001167 < |q| < 0,001649$  первый слой будет деформироваться упруго, третий – нелинейно, а во втором слое будет область, содержащая границу раздела областей. При  $q = 0,001649$  во втором слое граница раздела областей достигнет нижней границы слоя, а в первом слое на верхней границе появится область нелинейного деформирования. Если нагрузка будет удовлетворять соотношениям  $0,001649 < |q| < 0,001716$ , второй и третий слой будут деформироваться полностью нелинейно, а в первом слое будет граница раздела двух областей. При  $|q| = 0,001716$  на верхней границе стержня деформация достигнет значения предельной предразрушения при растяжении, и будем считать, что стержень теряет несущую способность.

Рассмотрим случай, когда в конфигурации 2 все слои стержня состоят из бетона марки В50 (конфигурация 3). Тогда предельные нагрузки будут соответствовать таблице 2.

$(i_1, i_2, i_3)$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^- $	$j^-$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^+ $	$j^+$
(0,0,0)	0	1	0,000605	3
(0,0,2)	0,000605	3	0,000964	2, 3
(0,2,1)	0,000964	2, 3	0,001530	1, 2
(2,1,1)	0,001530	1, 2	0,001822	3

Таблица 2. Предельные нагрузки стержня (конфигурация 3)

В результате получаем, что в конфигурации 3 максимальная нагрузка, по сравнению с конфигурацией 2, будет больше на 6,18 %. При этом в конфигурации 3, в отличие от 2, невозможен слой с параметрами (0,0,1), так как предельные упругие деформации одинаковые для всех слоев в конфигурации 3, в конфигурации 2 отличаются в 3 слое от 1 и 2.

Рассмотрим стержень с площадью поперечного сечения, аналогичной конфигурациям 1-3 и с параметрами

$$b_1 = 0,03, b_2 = 0,04, b_3 = 0,06, b_2 = 0,04, h_1 = 0,03, h_2 = 0,04, h_3 = 0,08. \quad (5)$$

Положим, что в стержне (5) первый слой реализован из бетона марки В30, второй из бетона марки В10, а третий из бетона марки В50, и указанную конфигурацию стержня будем называть конфигурацией 4. Тогда предельные нагрузки будут соответствовать таблице 3.

$(i_1, i_2, i_3)$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^- $	$j^-$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^+ $	$j^+$
(0,0,0)	0	1	0,000487	3
(0,0,2)	0,000487	3	0,000896	3
(0,0,1)	0,000896	3	0,001104	2
(0,2,1)	0,001104	2	0,001291	1, 2
(2,1,1)	0,001291	1, 2	0,001458	3

Таблица 3. Предельные нагрузки стержня (конфигурация 4)

Из таблицы 3 видно, что максимальная нагрузка, которую способен выдержать стержень конфигурации 4, меньше на 25 % по сравнению с конфигурацией 3 и на 17,7 % по сравнению с конфигурацией 2.

**3. Примеры расчета с учетом собственного веса.** Определим предельные нагрузки для конфигураций 2-4, но уже с учетом влияния силы тяжести. Результаты расчетов приведены в таблицах 4-6.

Как видно из расчетов, максимальная нагрузка для конфигурации 2 с учетом силы тяжести меньше аналогичной без ее учета на 43,4 %, для конфигурации 3 меньше с учетом силы тяжести на 43,6 %, а для конфигурации 4 меньше с учетом силы тяжести на 65,1 %. Из таблицы 6 можно видеть, что конфигурация

$(i_1, i_2, i_3)$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^- $	$j^-$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^+ $	$j^+$
(0,0,0)	0	0	0,000070	3
(0,0,2)	0,000070	3	0,000414	3
(0,0,1)	0,000414	3	0,000649	2
(0,2,1)	0,000649	2	0,001130	1, 2
(2,1,1)	0,001130	1, 2	0,001197	3

Таблица 4. Предельные нагрузки стержня (конфигурация 2) с учетом силы тяжести

$(i_1, i_2, i_3)$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^- $	$j^-$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^+ $	$j^+$
(0,0,0)	0	1	0,000052	3
(0,0,2)	0,000052	3	0,000410	2, 3
(0,2,1)	0,000410	2, 3	0,000977	1, 2
(2,1,1)	0,000977	1, 2	0,001269	3

Таблица 5. Предельные нагрузки стержня (конфигурация 3) с учетом силы тяжести

$(i_1, i_2, i_3)$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^- $	$j^-$	$ q_{(i_1, i_2, i_3)}^+ $	$j^+$
(0,0,2)	0	1	0,000321	3
(0,0,1)	0,000321	3	0,000529	2
(0,2,1)	0,000529	2	0,000716	1, 2
(2,1,1)	0,000716	1, 2	0,000883	3

Таблица 6. Предельные нагрузки стержня (конфигурация 4) с учетом силы тяжести

4 с учетом силы тяжести не деформируется полностью упруго при любом значении нагрузки  $q$ , хотя без ее учета упругому деформированию соответствует нагрузка  $-0,000487 < q < 0$ .

**4. Заключение.** Указанные примеры показывают, что форма поперечного сечения и собственный вес существенно влияют на предельные нагрузки. Игнорирование учета собственного веса конструкции может привести к существенным погрешностям в расчетах.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Вклад авторов равноценен.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

#### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** The authors declare that they have no competing interests.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Несущая способность многослойных бетонных стержней. Чебоксары : Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022. 180 с.
- [2] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. С. 125–129.
- [3] Мищенко А. В., Немировский Ю. В., Вохмянин И. Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем. Новосибирск : НГАСУ, 2004. 488 с.
- [4] Немировский Ю. В., Батурин А. А. Метод расчета деформативности и прочности однотавровых и двутавровых железобетонных стержней // Известия вузов. Строительство. 2015. № 10. С. 82–93.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Определение предельных нагрузок плоского физически-нелинейного бетонного стержня // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1(59). С. 135–143. EDN: RRDADP. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.009.

#### REFERENCES

- [1] Nemirovsky, Yu. V., Tikhonov, S. V. Load-bearing capacity of multilayer concrete rods. Cheboksary: Publishing House of Chuvash State University, 2022. 180 p.
- [2] Nemirovsky, Yu. V., Boltaev, A. I. Stress-strain diagrams of concrete and reinforced concrete // Bulletin of Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. 2015. No. 6. pp. 125–129.
- [3] Mishchenko, A. V., Nemirovsky, Yu. V., Vokhmyanin, I. T. Rational and optimal design of layered rod systems. Novosibirsk: NSABU, 2004. 488 p.
- [4] Nemirovsky, Yu. V., Baturin, A. A. Method for calculating the deformability and strength of I-beam and double-T reinforced concrete rods // University Proceedings. Construction. 2015. No. 10. pp. 82–93.
- [5] Nemirovsky, Yu. V., Tikhonov, S. V. Determination of ultimate loads of an n-layer physically nonlinear concrete rod // Bulletin of Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit States. 2024. No. 1(59). pp. 135–143. EDN: RRDADP. DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.009.

В. Э. Богачева, О. С. Перова

## ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ

*Тульский государственный университет, Тула, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается упругопластическое деформирование композита в состоянии плоской деформации под действием нагрузки, обеспечивающей нормальный разрыв адгезионного слоя. Образец состоит из двух одинаковых пластин сопряженных тонким адгезивом. Из общей вариационной постановки с учетом теории пластин Миндлина—Рейсснера и критерия Треска—Сен-Венана при условии полной пластичности (равенстве двух главных напряжений, действующих ортогонально отрыву) получена постановка в дифференциальном виде. В качестве материала для адгезива берется умеренно пластичный Araldite 2015, а для сопрягаемых тел — сталь. Считается, что образуется одна область необратимых деформаций, которая локализуется на торце адгезионного слоя, а сопрягаемые тела и остальная часть адгезива деформируются согласно линейной теории упругости. Приведено общее аналитическое решение поставленной задачи на пластическом участке в виде функций поля перемещений верхней границы адгезива. Изучено влияние таких геометрических характеристик композита, как длина участка, где нет сопряжения тел со слоем, длина адгезионного слоя, высота сопрягаемых тел и высота слоя, на напряженное состояние адгезионного слоя. Показано, что кроме длины адгезива данные величины оказывают влияние на размер пластического участка и распределение средних напряжений в адгезионном слое.

**Ключевые слова:** адгезионный слой, композит, нормальный отрыв, упругопластическое деформирование.

**Богачева Виктория Эдуардовна**, аспирант кафедры вычислительной механики и математики; e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-6303-2160>; AuthorID: 1081852

**Перова Ольга Сергеевна**, аспирант кафедры вычислительной механики и математики; e-mail: o.s.perova@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0000-7489-9256>

**для цитирования:** Богачева В. Э., Перова О. С. Влияние геометрических характеристик композита на напряженное состояние тонкого адгезионного слоя // Вестник Чувашияского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 97–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.011 EDN: QYGMSH

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

© Богачева В. Э., Перова О. С. 2024

Поступила: 01.10.24; принята в печать: 01.12.24; опубликована: 27.12.24.

V. E. Bogacheva, O. S. Perova

## INFLUENCE OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF THE COMPOSITE ON THE STRESS STATE OF A THIN ADHESIVE LAYER

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** The paper considers elastic-plastic deformation of a composite in a state of plane deformation under the action of a load that ensures normal rupture of the adhesive layer. The sample consists of two identical plates connected by a thin adhesive. From the general variational formulation, taking into account the Mindlin–Reissner plate theory and the Tresca–Saint-Venant criterion, under the condition of complete plasticity (equality of the two main stresses acting orthogonally to the separation), a differential formulation is obtained. The moderately plastic Araldite 2015 is used as the adhesive material, and steel is used for the mating bodies. It is believed that one area of irreversible deformations is formed, which is localized at the end of the adhesive layer, and the mating bodies and the rest of the adhesive are deformed according to the linear theory of elasticity. A general analytical solution to the problem in the plastic area is given in the form of functions of the displacement field of the upper boundary of the adhesive. The influence of such geometric characteristics of the composite as the length of the section where there is no interface of bodies with the layer, the length of the adhesive layer, the height of the mating bodies and the height of the layer on the stress state of the adhesive layer has been studied. It is shown that, in addition to the length of the adhesive, these values have an effect on the size of the plastic section and the distribution of average stresses in the adhesive layer.

**Keywords:** adhesive layer, composite, normal separation, elastic-plastic deformation.

**Viktoriya E. Bogacheva**, Postgraduate; e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru;  
<https://orcid.org/0000-0002-6303-2160>; AuthorID: 1081852

**Olga S. Perova**, Postgraduate; e-mail: o.s.perova@yandex.ru;  
<https://orcid.org/0009-0000-7489-9256>;

**to cite this article:** Bogacheva V. E., Perova O. S. Influence of geometric characteristics of the composite on the stress state of a thin adhesive layer // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 97–106. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.011 EDN: QYGMSH

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*



**Введение.** При экспериментальных исследованиях трещиностойкости адгезионных слоев в качестве образца обычно используют двухконсольную балку. А трещиноподобный дефект в адгезиве моделируют не только в виде математического разреза с жестким сцеплением сопрягаемых тел, но и в виде слоя с характерной толщиной [1–5].

В данной работе рассматривается образец, экспериментально изученный в статье [6] с различными материалами адгезионного слоя. С учетом того, что у композита тонкий адгезионный слой, в работе [7] получено упругое аналитическое решение задачи. А в статье [8] были найдены пределы упругости для образца с различными материалами слоя. Получено, что для адгезива Araldite AV138 можно ограничиться упругой постановкой задачи, а для Araldite 2015 и Sikaforce 7752 необходимо перейти к упругопластической постановке. В статье [9] методом конечных элементов было определено, что в случае плоской деформации возможно образование нескольких зон упругопластического деформирования с разными знаками гидростатического давления, но основной вклад в значение прочностных характеристик вносит напряженно-деформированное состояние зоны пластичности на торце адгезионного слоя. С учетом всех полученных ранее результатов, найдем аналитическое упругопластическое решение задачи и исследуем влияние геометрических характеристик образца на напряженное состояние адгезионного слоя с материалом Araldite 2015.

**1. Постановка задачи.** В данной статье исследуется нагружение нормальным отрывом композитного образца представленного на рис. 1. Считается, что консоли 1 и 2 деформируются упруго, а материал слоя 3 является упругопластическим без упрочнения. Композит находится в состоянии плоской деформации.

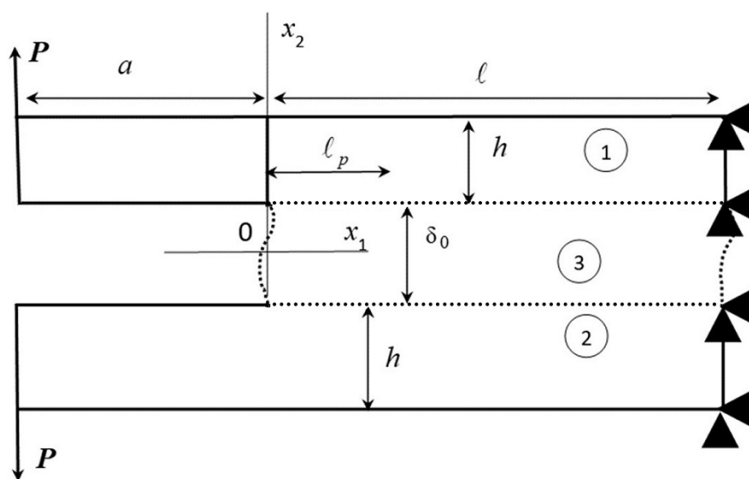


Рис. 1. Слоистый композит

Применим концепцию "слоя взаимодействия" [5] для описания взаимодействия адгезионного слоя 3 с консолями 1 и 2. Согласно данной концепции на границах между слоем и пластинами жесткое сцепление, и постулируется равенство по модулю и противоположность по направлению для векторов напряжений по границе слоя 3.

В силу симметрии рассматриваемого образца относительно оси  $Ox_1$  (рис. 1) запишем уравнение равновесия консоли 1 в вариационной форме:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

где  $S_1$  — площадь поперечного сечения тела 1 в плоскости  $Ox_1x_2$ ;  $L_1$  — граница приложения внешней нагрузки для тела 1;  $u_1^+$ ,  $u_2^+$  — горизонтальное и вертикальное перемещения верхней границы слоя;  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензоры напряжений и деформаций;  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — тензоры средних напряжений и деформаций адгезионного слоя с компонентами:  $\bar{\sigma}(x_1)_{12} = \bar{\sigma}(x_1)_{21} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma(x_1, x_2)_{21} dx_2$ ,

$$\bar{\sigma}(x_1)_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma(x_1, x_2)_{11} dx_2, \quad \bar{\sigma}(x_1)_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma(x_1, x_2)_{22} dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+(x_1)}{\delta_0}, \quad \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = 0. \quad (2)$$

В случае упругого деформирования используются определяющие соотношения в форме закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1+\nu_3} \left( \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1-2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (3)$$

где  $E$ ,  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона тела 1;  $E_3$ ,  $\nu_3$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона слоя взаимодействия;  $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ,  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}$  — объемные деформации;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $i, j = 1, 2, 3$ .

В области необратимого деформирования адгезионного слоя предполагается выполнение критерия Треска—Сен-Венана [10] при условии полной пластичности. Для нагружения нормальным отрывом под ним подразумевается равенство двух главных напряжений  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{33}$ . Следовательно, условие текучести запишем в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11} = 2\tau_0, \quad (4)$$

где  $\tau_0$  — предел текучести.

Деформацию образца рассматриваем в рамках теории Миндлина—Рейсснера [11, 12] с распределением поля перемещений в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \\ u_2(x_1, x_2) &= u_2^+(x_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, от (1) приходим к двум системам дифференциальных уравнений для тела 1:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; & \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0; & x_1 \in [-a; 0), \\ \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; & \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0; & \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; & x_1 \in (0; \ell], \end{cases} \quad (6)$$

где  $Q_{11} = Dh \left( \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx_1} \right)$ ,  $Q_{12} = Lh \left( \frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right)$ ,  $M_{11} = Dh^2 \left( \frac{1}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h}{3} \frac{d\varphi}{dx_1} \right)$  — обобщенные силы и обобщенный момент;  $L = k \frac{E}{2(1+\nu)}$ ;  $k = \frac{5}{6}$ ;  $D = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ .

Из (2) и (3) получим напряженное состояние в слое взаимодействия на участке с обратимым деформированием:

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D_2 u_2^+, \quad \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad (7)$$

где  $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$ ;  $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$ ;  $C_1 = \frac{2D_1}{\delta_0}$ ;  $C_2 = \frac{\delta_0 D_2}{2}$ .

А на участке с пластическим деформированием предполагаем линейную связь между объемной деформацией слоя и гидростатическим давлением. Поэтому распределением напряжений в адгезионном слое с учетом (2) и (4) определяется следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{11} = K \frac{du_1^+}{dx_1} + \frac{2K}{\delta_0} u_2^+ - \frac{2}{3} \tau_0, \quad \bar{\sigma}_{22} = K \frac{du_1^+}{dx_1} + \frac{2K}{\delta_0} u_2^+ + \frac{4}{3} \tau_0, \quad (8)$$

где  $K$  — модуль объемной деформации;  $K = \frac{E_3}{3(1-2\nu_3)}$ .

Система (6) имеет граничные условия:

$$u_1^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad u_2^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad \varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad (9)$$

$$Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q, \quad M_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (10)$$

и условия сопряжения:

$$\begin{aligned} u_1^+|_{x_1=-0} &= u_1^+|_{x_1=+0}, \quad u_2^+|_{x_1=-0} = u_2^+|_{x_1=+0}, \quad \varphi|_{x_1=-0} = \varphi|_{x_1=+0}, \\ Q_{11}|_{x_1=-0} &= (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$Q_{12}|_{x_1=-0} = Q_{12}|_{x_1=+0}, \quad M_{11}|_{x_1=-0} = M_{11}|_{x_1=+0},$$

$$\begin{aligned} u_1^+|_{x_1=\ell_p-0} &= u_1^+|_{x_1=\ell_p+0}, \quad u_2^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_2^+|_{x_1=\ell_p+0}, \quad \varphi|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi|_{x_1=\ell_p+0}, \\ (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p-0} &= (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p+0}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$Q_{12}|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12}|_{x_1=\ell_p+0}, \quad M_{11}|_{x_1=\ell_p-0} = M_{11}|_{x_1=\ell_p+0}.$$

В силу полученных дифференциальных уравнений на участке  $x_1 \in [-a; 0)$  и условий сопряжения (11) можно ограничиться решением системы на участке  $(0; \ell]$ , перенеся граничные условия (10) в точку  $x_1 = 0$ :

$$(Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0} = 0, \quad Q_{12}|_{x_1=+0} = -Q, \quad M_{11}|_{x_1=+0} = -Qa. \quad (13)$$

В результате решение поставленной задачи определяется функциями, отвечающими за распределение поля перемещений (5),  $u_1^+$ ,  $u_2^+$ ,  $\varphi$ .

**2. Решение задачи.** Рассматривается композит [6] со следующими характеристиками материала тела 1:  $E = 2.04 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.33$ . Для адгезива берется Araldite 2015, у которого  $E_3 = 1.85 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_3 = 0.33$ ,  $\tau_0 = 14.6$  МПа,  $P_{cr} = 1500$  Н,  $P_{cr}$  — экспериментальное значение внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве высотой  $\delta_0 = 10^{-3}$  м. Геометрические характеристики образца:  $h = 0.0127$  м,  $\delta_0 = 10^{-3}$  м,  $a = 0.055$  м,  $\ell = 0.2$  м,  $b = 0.025$  м, где  $b$  — ширина композита в направлении нормали к рассматриваемому сечению (рис. 1). Распределенная нагрузка определяется следующим образом:  $Q = \frac{P_{cr}}{b}$ .

Для данного образца вид общего аналитического решения системы (6) на участке  $(\ell_p; \ell]$  найдено в работе [13]. А общее решение на участке  $(0; \ell_p]$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_1^+ = & \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ & - \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{Dh} \tilde{C}_1 x_1 + \frac{2\tau_0 \delta_0}{3Dh} x_1 + \tilde{C}_6, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_2^+ = & \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) - \\ -R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ & - \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ & - \frac{\delta_0}{2Dh} \tilde{C}_1 - \frac{2\tau_0 \delta_0 S}{3Dh}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \tilde{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ -R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \tilde{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ & + \tilde{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \tilde{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ -R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Delta = 4D^2 h^4 (1 - \delta_0 T)$ ;  $T = \frac{12L(2LS+Dh)}{D^2 h^2}$ ;  $S = \frac{Dh}{K} + \frac{\delta_0}{2}$ ;  $R_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}$ ;  $R_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}$ ;  $\alpha = \frac{Dh - 6L\delta_0}{Lh\delta_0(\frac{Dh}{K} + 2\delta_0)}$ ;  $\beta = \frac{D\sqrt{\delta_0 T - 1}}{L\delta_0(\frac{Dh}{K} + 2\delta_0)}$ ;  $R_3 = \frac{2LS}{V} (R_1^2 - R_2^2 - \frac{2D}{LS\delta_0})$ ;  $R_4 = \frac{4LSR_1 R_2}{V}$ ;  $V = 2LS + Dh$ ;  $R_5 = \frac{Dh^2(R_2 R_4 - R_1 R_3)}{2SK} + \frac{R_1}{S}$ ;  $R_6 = -\frac{Dh^2(R_1 R_4 + R_2 R_3)}{2SK} + \frac{R_2}{S}$ ;  $R_7 = \frac{R_1}{R_1^2 + R_2^2}$ ;  $R_8 = \frac{R_2}{R_1^2 + R_2^2}$ ;  $R_9 = R_5 R_7 + R_6 R_8$ ;  $R_{10} = R_6 R_7 - R_5 R_8$ .

**3. Анализ решения.** Построим распределение напряжений (7)-(8) адгезионного слоя при различных значениях длины участка без сопряжения тел со

слоем  $a$ . Для адгезива Araldite 2015 на рис. 2 кривая 1 построена при  $a = 0.055$  м, кривая 2 — при  $a = 0.1$  м. Пунктирной линией выделена область с пластическим деформированием слоя.

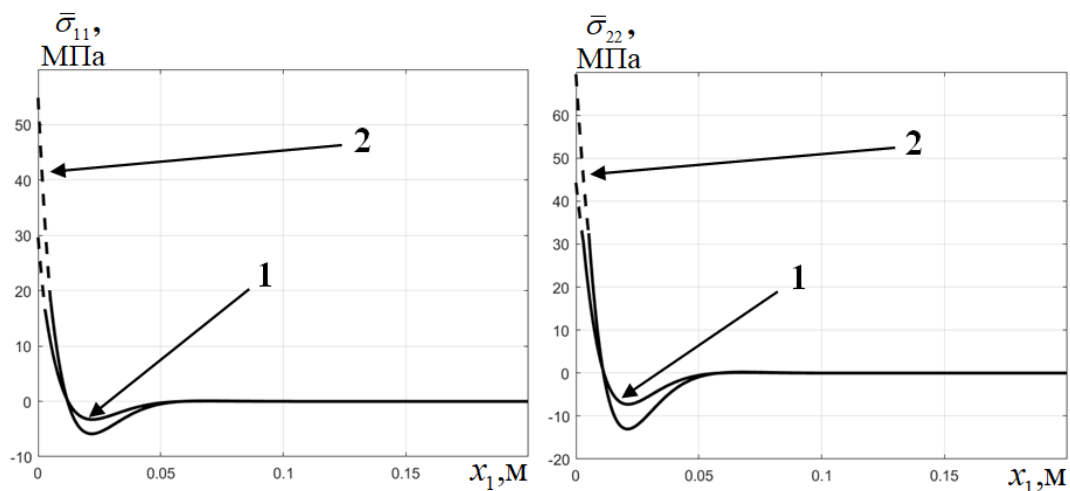


Рис. 2. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  (слева) и  $\bar{\sigma}_{22}$  (справа) при разном значении  $a$

Из рис. 2 видим, что данная характеристика влияет на полученное решение. При  $a = 0.055$  м длина пластического участка равна  $\ell_p = 0.00294321$  м, а при  $a = 0.1$  м —  $\ell_p = 0.005217$  м.

Исследуем влияние длины адгезионного слоя  $\ell$  на решение задачи. На рис. 3 построено напряженное состояние слоя (7)-(8) при  $\ell = 0.2$  м и  $\ell = 1$  м.

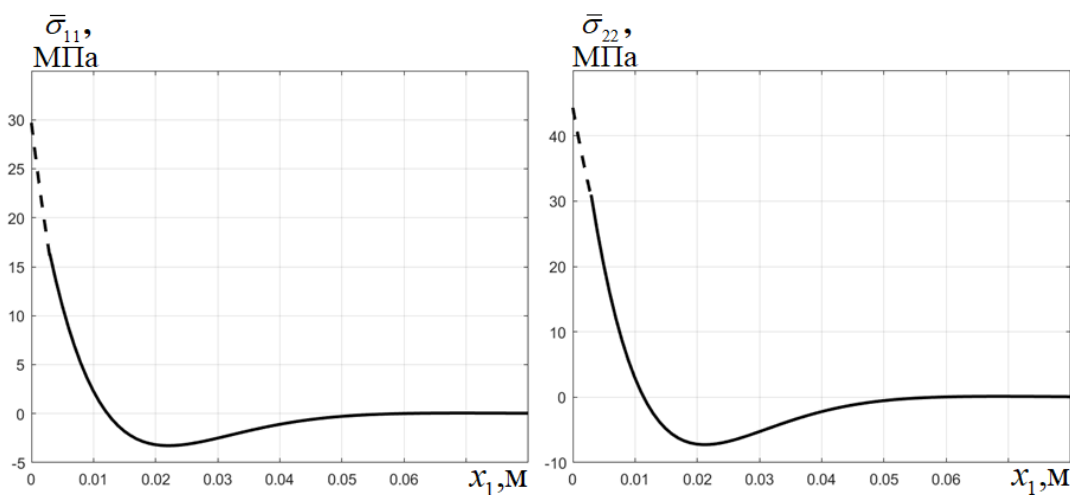


Рис. 3. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  (слева) и  $\bar{\sigma}_{22}$  (справа) при разной длине  $\ell$

Видим, что на рис. 3 графики совпадают, следовательно, длина слоя не влияет на решение задачи.

Рассмотрим напряженное состояние (7)-(8) при различных значениях высоты тела  $h$  и слоя взаимодействия  $\delta_0$ . На рис. 4 кривая 1 построена при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м,  $h = 0.0127$  м, кривая 2 —  $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-4}$  м,  $h = 0.0127$  м, кривая 3 —  $\delta_0 = 10^{-3}$  м,  $h = 0.017$  м.

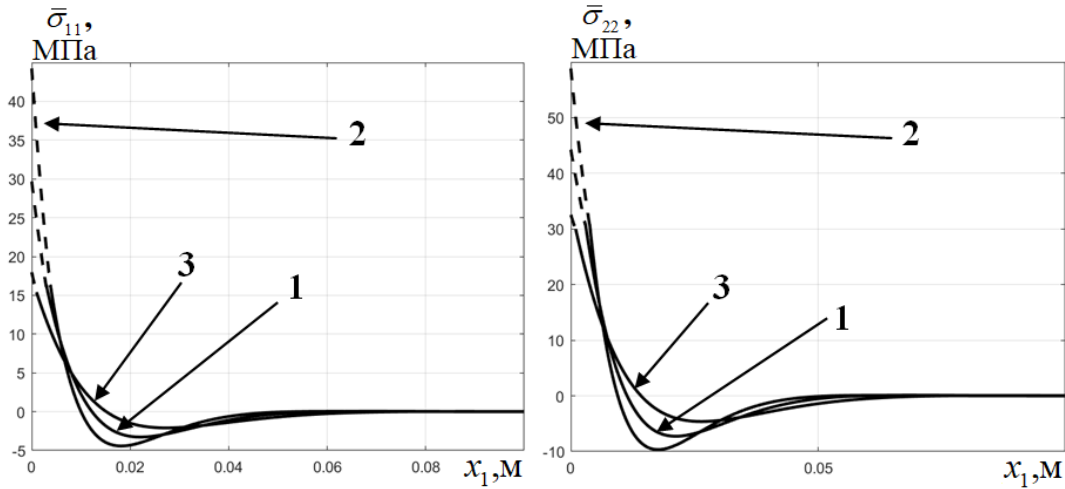


Рис. 4. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  (слева) и  $\bar{\sigma}_{22}$  (справа) при разных  $h$  и  $\delta_0$

Получены следующие значения длины участка с необратимым деформированием: в случае 1 —  $\ell_p = 0.00294321$  м, 2 —  $\ell_p = 0.00380874$  м, 3 —  $\ell_p = 0.000979$  м. Из рис. 4 видим, что высота тела  $h$  и слоя  $\delta_0$  влияют на распределение напряжений в адгезионном слое.

**Заключение.** Рассмотрена модель упругопластического деформирования тонкого адгезионного слоя. Изучено влияние геометрических свойств композита на распределение напряжений в слое. Показано, что кроме длины слоя эти характеристики воздействуют на величину пластического участка и напряженное состояние адгезионного слоя. Увеличение значения  $a$  или уменьшение  $h$ ,  $\delta_0$  приводит к росту пластического участка.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** В. Э. Богачева написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, О. С. Перова редактирование текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** V. E. Bogacheva writing the text of the manuscript, agreeing on the final version of the manuscript, O. S. Perova editing the text of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The work was carried out with the support of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (code FEWG-2023-0002).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
- [2] Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 87–99.
- [3] Салганик Р. Л., Мищенко А. А., Федотов А. А. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2015. № 2. С. 24–33.
- [4] Макклиток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение. Москва : Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.
- [5] Glagolev V. V., Markin A. A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // International Journal of Solids and Structures. 2019. Vol. 158. P. 141–149. DOI: doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002.
- [6] Lopes R. M., Campilho R. D. S. G., da Silva F. J. G., Faneco T. M. S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103–111. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032.
- [7] Богачева В. Э. Исследование деформирования тонкого адгезионного слоя композита при воздействии нормальным отрывом // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 7. С. 38–45. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-38-39.
- [8] Богачева В. Э. Исследование предела упругости тонкого адгезионного слоя композита при его нагружении нормальным отрывом // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3 (57). С. 66–73. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.005.
- [9] Богачева В. Э., Глаголев В. В., Глаголев Л. В., Маркин А. А. Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения J-интеграла в состоянии плоской деформации // Механика композиционных материалов и конструкций. 2023. Т. 29, № 1. С. 115–131. DOI: 10.33113/mkmmk.ras.2023.29.01.08.
- [10] Tresca H. Memoires sur l'ecoulement des corps solides // Memoires presentes par divers savants a l'Academie royaledes ciences. 1868. Vol. 18, no. 1864. P. 733–799.
- [11] Mindlin R. D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME Journal of Applied Mechanics. 1951. Vol. 18. P. 31–38.
- [12] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
- [13] Богачева В. Э. Влияние механических характеристик слоистого композита на критическое значение J-интеграла // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 63–70. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.007.

**REFERENCES**

- [1] Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // *International Journal of Fracture*. 2011. Vol. 171, no. 2. P. 105–109.
- [2] Entov V. M., Salganik R. L. To the Prandtl model of brittle fracture // *Izv. AN SSSR. MTT*. 1968. no. 6. P. 87–99. (in Russian).
- [3] Salganik R. L., Mishchenko A. A., Fedotov A. A. Stress state in the vicinity of excavation in deep horizontal bed // *Journal of Mining Science*. 2015. no. 2. P. 24–33. (in Russian).
- [4] F. Makkintok. Plastic aspects of destruction // *Razrushenie*. Moscow : Mir, 1975. Vol. 3. P. 67–262. (in Russian).
- [5] Glagolev V. V., Markin A. A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 158. P. 141–149. DOI: doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002.
- [6] Lopes R. M., Campilho R. D. S. G., da Silva F. J. G., Faneco T. M. S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // *Journal of Adhesion and Adhesives*. 2016. Vol. 67. P. 103–111. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032.
- [7] Bogacheva V. E. Investigation of deformation of a thin adhesive layer of a composite under the influence of a normal separation // *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki*. 2023. no. 7. P. 38–45. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.005. (in Russian).
- [8] Bogacheva V. E. Investigation of the elastic limit of a thin adhesive layer of a composite under normal separation loading // *Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2023. no. 3 (57). P. 66–73. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.005. (in Russian).
- [9] Bogacheva V. E., Glagolev V. V., Glagolev L. V., Markin A. A. Influence of the plastic properties of a thin adhesion layer on the distribution of plasticity zones and the values of the J-integral in the plane deformation state // *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*. 2023. Vol. 29, no. 1. P. 115–131. DOI: 10.33113/mkmmk.ras.2023.29.01.08. (in Russian).
- [10] Tresca H. Memoires sur l'ecoulement des corps solides // *Memoires presentes par divers savants a l'Academie royaledes ciences*. 1868. Vol. 18, no. 1864. P. 733–799.
- [11] Mindlin R. D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1951. Vol. 18. P. 31–38.
- [12] Reissner E. On Bending of Elastic Plates // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1947. Vol. 5, no. 1. P. 55–68.
- [13] Bogacheva V. E. Influence of mechanical characteristics of a layered composite on the critical value of the J-integral // *Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2023. no. 4 (58). P. 63–70. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.007. (in Russian).



И. В. Папкова, Е. Ю. Крылова, Д. К. Андрейченко, И. И. Коврига,  
Е. К. Пронина

## О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГИБКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В ШУМОВОМ ПОЛЕ

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

**Аннотация.** В работе исследуется влияние аддитивного белого шума на нелинейную динамику гибкой осесимметричной сферической оболочки Кирхгофа-Лява, находящейся под действием внешней нормальной знакопеременной нагрузки.

**Ключевые слова:** Осесимметрическая сферическая оболочка, нелинейная динамика, аддитивный белый шум, сценарий Фейгенбаума.

**Папкова Ирина Владиславовна**, доктор физико-математических наук, профессор, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: ikravzova@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0003-4062-1437>; AuthorID: 404435

**Крылова Екатерина Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kat.krylova@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>; AuthorID: 722982

**Андрейченко Дмитрий Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем; e-mail: andreichenkodk@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>; AuthorID: 63805

**Коврига Иван Игоревич**, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики; e-mail: igorewit@mail.ru

**Пронина Елена Константиновна**, студент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии; e-mail: proninaelens2017@mail.ru

**для цитирования:** Папкова И. В., Крылова Е. Ю., Андрейченко Д. К., Коврига И. И., Пронина Е. К. О нелинейных колебаниях гибких осесимметричных сферических оболочек, находящихся в шумовом поле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 107–114. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.010 EDN: VPCIGQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

*I. V. Papkova, E. Yu. Krylova, D. K. Andreichenko, I. I. Kovriga, E. K. Pronina*

## ON NONLINEAR OSCILLATIONS OF FLEXIBLE AXISYMMETRIC SPHERICAL SHELLS LOCATED IN A NOISE FIELD

*Saratov State University, Saratov, Russia*

**Abstract.** The paper investigates the influence of additive white noise on the nonlinear dynamics of a flexible axisymmetric spherical Kirchhoff-Love shell under the action of an external normal alternating load.

**Keywords:** symmetric spherical shell, nonlinear dynamics, additive white noise, Feigenbaum scenario.

**Irina V. Papkova**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

e-mail: ikravzova@mail.ru;

https://orcid.org/0000-0003-4062-1437; AuthorID: 404435

**Ekaterina Yu. Krylova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor;

e-mail: mail2@mail.ru;

https://orcid.org/0000-0002-7593-0320; AuthorID: 722982

**Dmitry K. Andreichenko**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail:

andreichenkodk@gmail.com;

https://orcid.org/0000-0003-0525-984X; AuthorID: 6506669322

**Ivan I. Kovriga**, postgraduate; e-mail: igorewit@mail.ru

**Elena K. Pronina**, student; e-mail: proninaelens2017@mail.ru

**to cite this article:** Papkova I. V., Krylova E. Yu., Andreichenko D. K., Kovriga I. I., Pronina E. K. On nonlinear oscillations of flexible axisymmetric spherical shells located in a noise field // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 107–114. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.010 EDN: VPCIGQ

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**Введение.** В настоящее время большое внимание уделяется эффектам, связанным с воздействием внешних шумов на поведение динамических систем. Например, влиянию так называемого аддитивного белого гауссовского шума, который характеризуется равномерной спектральной плотностью и нормально распределённым значением амплитуды, а также аддитивным способом воздействия на сигнал. Шум затрудняет определение времени работоспособности или анализ старения материала за счёт того, что оказывается неизвестной точная зависимость напряжений в твердых материалах от времени. Исследование влияния случайных шумовых воздействий на нелинейные динамические системы является одним из самых актуальных и интенсивно развивающихся направлений в нелинейной динамике [1–3]. Шум может приводить к двум типам эффектов: индуцированному шумом сдвигу бифуркаций, которые имеют место в детерминированной системе, а также к возникновению новых типов поведения и новых бифуркаций (фазовых переходов), не наблюдавшихся в отсутствии шума. В настоящей работе при действии гармонической знакопеременной нагрузки переход регулярных колебаний в хаотический осуществляется по сценарию Фейгенбаума [4]. Систематизацию исследований взаимодействия индуцированных шумом неустойчивостей и фазовых переходов для задач физики, биологии, химии привели в 1987 году В. Хорстхемке и Р. Лефевр [5]. Для механических распределенных систем таких исследований сделано не было, появляются только первые публикации в этом направлении [6, 7].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим сферическую пологую оболочку в полярной системе координат, введенной следующим образом (1):

$$\Omega = \left\{ r, z \mid r \in [0, b]; z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \right\}.$$

Систему уравнений динамики пологих оболочек в безразмерном виде запишем следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial u_{30}}{\partial t} = & -\frac{\partial^4 u_{30}}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 u_{30}}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial u_{30}}{\partial r} - \\ & - \frac{\Phi}{r} \left( 1 - \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left( 1 - \frac{1}{r} \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \right) + q + q^*, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = & \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \left( 1 - \frac{1}{2r} \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Phi = \frac{\partial F}{\partial r}$ ,  $F$  – функция усилий,  $r$  – радиус оболочки,  $u_{30}$  – прогиб,  $q = q_0 \sin(\omega_p t)$  – поперечная нормальная нагрузка,  $q_0$  и  $\omega_p$  – ее амплитуда и частота соответственно. Аддитивный белый шум добавлен в систему с постоянной интенсивностью  $q^* = q_n (2.0 * rand()) / (RAND\_MAX + 1.0) - 1.0$ , где  $q_n$  – интенсивность шума,  $rand()$  – стандартная функция языка C++, принимающая случайное целое число от 0 до  $RAND\_MAX$ ,  $RAND\_MAX$  – константа, равная 65535. Выражение принимает произвольные дробные значения в диапазоне

$(-1; 1)$ . Данная математическая модель белого шума предложена центром компьютерных исследований в области музыки и акустики (CCRMA) Стэнфордского университета.

К системе (1) присоединим граничные условия для шарнирно-подвижного контура в меридиональном направлении:

$$\Phi = u_{30} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = b, \quad (2)$$

начальные условия:

$$u_{30} = 0, \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

а также условия в вершине оболочки, выполняющиеся в ее малой окрестности:

$$\begin{aligned} \Phi &\approx Ar, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \approx A, \\ u_{30} &\approx B + Cr^2, \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial r} \approx 2Cr, \quad \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial r^2} = 2C, \quad \frac{\partial^3 u_{30}}{\partial r^3} \approx 0, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь  $A, B, C$  – коэффициенты, которые определяются при численном решении системы дифференциальных уравнений.

**2. Численный эксперимент.** Систему (1-4) будем решать методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности, используя на каждом шаге решение второго уравнения из (1). Шаг по времени выбирается по правилу Рунге.

Численный эксперимент проводился со следующим набором параметров:

$$\begin{aligned} r = 1\text{см}, \quad h = 0.002\text{см}, \quad E = 70 * 10^4 \text{кгс/см}^2, \quad \nu = 0.34, \quad \rho = 2.7 * 10^{-6} \text{кг/см}^3, \\ q_0 = 8.77 \text{кгс/см}^2. \end{aligned}$$

В одном из численных экспериментов для рассматриваемой механической системы под действием внешней нормальной нагрузки в условиях отсутствия внешнего белого шума авторами был получен сценарий Фейгенбаума перехода колебаний из гармонических в хаотические [4]. Модель Фейгенбаума подтверждается численными экспериментами на многих простых математических моделях. Известно, что бифуркация удвоения хорошо описана в аттракторе Рейслера и др. Подобное явление также обнаружено в рассматриваемой задаче. Сценарий Фейгенюаума для данной задачи был получен при частоте внешней нормальной нагрузки  $\omega_p = 0.516$  [4]. Для центральной точки оболочки с параметром пологости  $b = 4$  была рассчитана константа Фейгенбаума ( $\alpha_n$ ) в соответствии со значением управляющего параметра  $q_0$  в условиях отсутствия внешних флуктуаций. Было выявлено 5

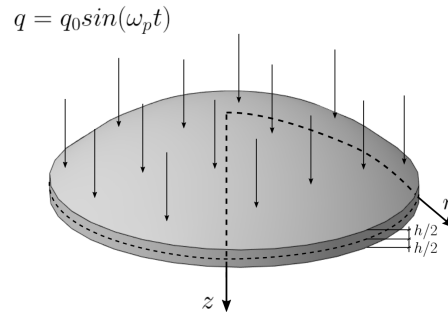


Рис. 1. Расчетная схема

бифуркаций удвоения периода. Полученное в результате численных экспериментов значение  $\alpha_n = \frac{q_{0,n} - q_{0,n-1}}{q_{0,n+1} - q_{0,n}} = 4.65608466$ ,  $n = 5$  хорошо согласуется с теоретическим значением  $\alpha = 4.66916224$ , расхождение составляет около 0.28%.

Интерес представляет влияние аддитивного внешнего белого шума на полученный сценарий Фейгенбаума.

При малой интенсивности аддитивного белого шума ( $q_n = 0.01$ ) также была получена серия бифуркаций удвоения периода. Было выявлено, что бифуркации удвоения периода под влиянием шума наступают при меньшей амплитуде внешней нормальной периодической нагрузки (табл. 1). В таблице 1 приведены спектры мощности Фурье, полученные как с учетом внешнего аддитивного шума, так и без него. Из данных таблицы видно, что в условиях шума происходит локализация частот вокруг частоты  $\frac{\omega_p}{2}$ . После появления  $\frac{\omega_p}{2}$  локализация шумовой составляющей происходит вокруг частот  $\frac{\omega_p}{4}$ ,  $\frac{3\omega_p}{4}$  и т.д. Всего было выявлено 4 бифуркации удвоения периода, а не 5, как в случае отсутствия шумового воздействия.

$q_0$	без учета шума $q_n = 0$	с учетом шума $q_n = 0.01$
0.08		
0.11		
0.135		

Таблица 1. Влияние внешнего белого шума на сценарий Фейгенбаума.

Рассмотрим сечения Пуанкаре, полученные для сценария Фейгенбаума без учета шумовой нагрузки. На биссектрисе первой четверти (прямая 1) отображалась сначала одна точка (табл.2 а)), что соответствует гармоническим колебаниям, затем с первой бифуркацией появилась еще одна точка на прямой 1 (табл.2 б)), при второй бифуркации отобразились еще две точки на прямой 2, перпендикулярной прямой 1. Часть точек сечения Пуанкаре (на прямой 2) при дальнейшем делении сдвигаются и образуют кривую (табл.2 е)). С учетом шу-

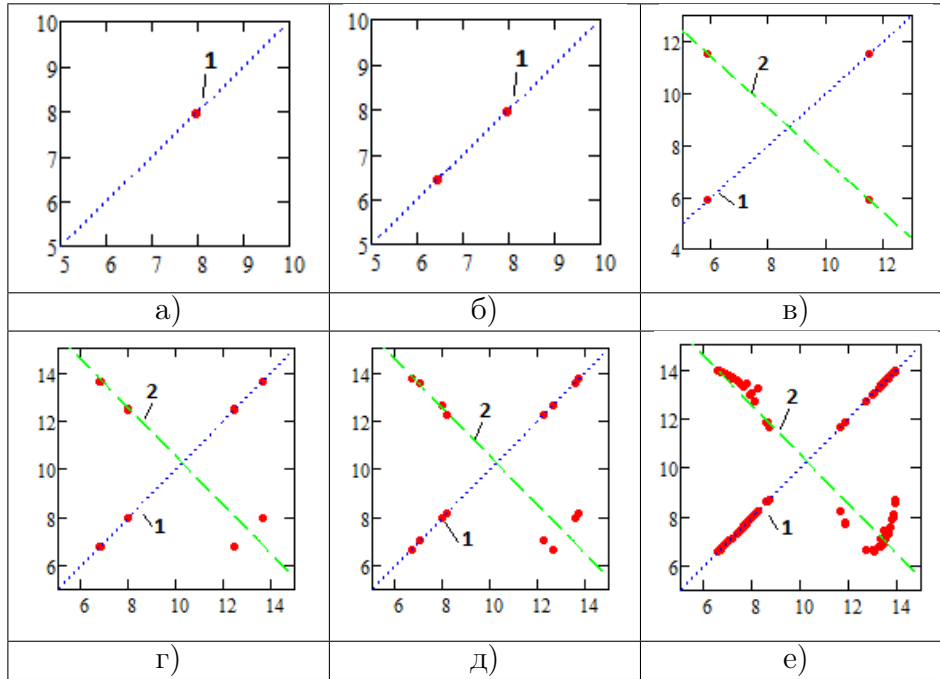


Таблица 2. Сечение Пуанкаре для сценария Фейгенбаума без учета шума.

мовой составляющей с интенсивностью  $q_n = 0.01$  при амплитуде внешней нормальной нагрузки  $q_0 = 0.08$  на графике четко видна прямая 1 и облако точек. Облако точек неоднородно, имеет большую плотность в центре и минимальную на границе.

При увеличении амплитуды вынуждающей нагрузки происходит бифуркация удвоения периода. На сечении Пуанкаре видно, что точки, которые притягиваются к точкам на прямой 1, образуют прямую линию, точки, которые притягиваются к прямой 2, образуют облако. При увеличении вынуждающей нагрузки облако точек принимает форму эллипса (табл.3а)). Дальнейший рост параметра вынуждающей нагрузки приводит к вытягиванию эллипса (табл.3б-3г)), что продолжается до тех пор, пока не произойдет деление на четыре группы (табл.3д)-3е)), т. е. наступлению второй бифуркации удвоения периода.

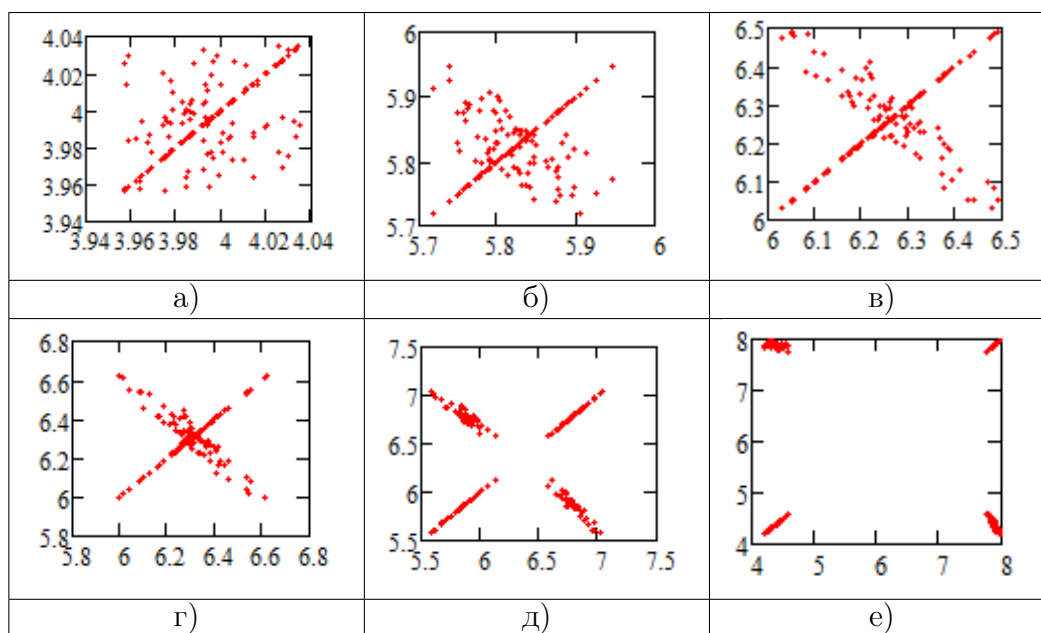


Таблица 3. Сечение Пуанкаре  $q_n = 0.01$ ,  $q_0 \in [0.11; 0.1335]$ .

В работе установлено, что для сферических осесимметричных оболочек под действием поперечной знакопеременной нагрузки колебания переходят из гармонических в хаотические по сценарию Фейгенбаума, в том числе и при учете аддитивного белого шума. Показано, что внешнее шумовое воздействие снижает значение амплитуды внешней нормальной знакопеременной нагрузки, при котором наступает бифуркация удвоения периода системы. Также исследован механизм появления бифуркации в случае действия аддитивного белого внешнего шума.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** И. В. Папкина, Е. Ю. Крылова, Д. К. Андрейченко постановка задачи, построение численных алгоритмов и разработка программного обеспечения для решения задачи, написание текста рукописи, И. И. Коврига и Е. К. Пронина обзор литературы по теме статьи, проведение вычислительных экспериментов, редактирование текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** I. V. Papkova, E. Yu. Krylova, D. K. Andreichenko problem statement, construction of numerical algorithms and development of software for solving the problem, writing the text of the manuscript, I. I. Kovriga and E. K. Pronina reviewing the literature on the topic of the article, conducting computational experiments, editing the text of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Feng J., Xu W., Wang R. Stochastic responses of vibro-impact Duffing oscillator excited by additive Gaussian noise // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 319, no. 3. P. 730–738.
- [2] Потапов В. Д. Об устойчивости стохастических вязкоупругих систем // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2009. Т. 52, № 6. С. 85–90.
- [3] van de Wouw N., de Kraker A., van Campen D. H., Nijmeijer H. Non-linear dynamics of a stochastically excited beam system with impact // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2003. Vol. 38, no. 5. P. 767–779.
- [4] Крысько В. А., Кравцова И. В. Стохастические колебания гибких осесимметричных шарнирно-подвижных по контуру сферических оболочек // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2004. Т. 47, № 1. С. 11–20.
- [5] Horsthemke W., Lefever R. *Noise-induced transitions in physics, chemistry, and biology*. Heidelberg : Springer Berlin, 1984. 400 p.
- [6] Папкина И. В., со authors. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57, no. 5. P. 714–719.
- [7] Awrejcewicz J., со authors. Principal component analysis in the linear theory of vibrations: continuous mechanical systems driven by different kinds of external noise // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62, no. 3. P. 48–62.
- [8] Вольмир А. С. *Нелинейная динамика пластин и оболочек*. Москва : Наука, 1972. 432 с.

### REFERENCES

- [1] Feng J., Xu W., Wang R. Stochastic responses of vibro-impact Duffing oscillator excited by additive Gaussian noise // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 319, no. 3. P. 730–738.
- [2] Potapov V. D. On the stability of stochastic viscoelastic systems // *Probl. Mashinostr. i Nadezh. Mashin*. 2009. no. 6. P. 85–90. (in Russian).
- [3] van de Wouw N., de Kraker A., Nijmeijer H. Non-linear dynamics of a stochastically excited beam system with impact // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2003. Vol. 38, no. 5. P. 767–779.
- [4] Krysko V. A., Kravzova I. V. Stochastic oscillations of flexible axisymmetric hinged spherical shells with movable contours // *Izvestiya Vysshih Uchebnyh Zavedenij. Mashinostroenie*. 2004. no. 1. P. 11–20. (in Russian).
- [5] Horsthemke W., Lefever R. *Noise-induced transitions in physics, chemistry, and biology*. Moscow : GITTL, 1955. 519 p.
- [6] Sliozkin N. A. *Dynamics of a viscous incompressible fluid*. Heidelberg : Springer Berlin, 1984. 400 p.
- [7] Papkova I. V., со authors. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57, no. 4. P. 714–719.
- [8] Awrejcewicz J., со authors. Principal component analysis in the linear theory of vibrations: continuous mechanical systems driven by different kinds of external noise // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62, no. 1. P. 48–62.
- [9] Bolmir A. S. *Nonlinear dynamics of plates and shells*. Moscow : Nayka, 1972. 432 p. (in Russian).



Е. В. Мурашкин<sup>1</sup>

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается мультивесовая теория слабых разрывов температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Предлагаемая к рассмотрению математическая теория существенным образом опирается на достижения современного псевдотензорного исчисления. Приводятся определения мультивесовых псевдотензорных элементов площади и объема. Выводится общая мультивесовая форма псевдотензорного соотношения на волновой поверхности, распространяющейся в полуизотропной термоупругой микрополярной среде. Исследуются слабые разрывы решений связанной системы псевдовекторных дифференциальных уравнений в частных производных полуизотропной микрополярной термоупругости. С этой целью геометрические и кинематические условия Адамара–Томаса обобщены на псевдотензорный случай с учетом псевдотензорной геометрии распространяющейся поверхности слабых разрывов. Найдены скорости распространения волновых поверхностей трансляционных и спинорных перемещений. Проведена классификация слабых разрывов температуры, трансляционных и спинорных перемещений и исследованы их пространственные поляризации. Установлены условия атермичности, распространяющихся волновых поверхностей слабых разрывов.

**Ключевые слова:** наномасштаб, микромасштаб, микрополярность, термодинамическая температура, спин-вектор, трансляция, слабый разрыв, поверхность распространения, волна.

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Стадник Никита Эдуардович**, младший научный сотрудник лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: nik-122@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0187-8048>; AuthorID: 961836

**для цитирования:** Мурашкин Е. В. Распространение связанных гармонических волн в теплоизолированном цилиндрическом волноводе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 115–126. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.008 EDN: VEMPAQ

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

E. V. Murashkin<sup>1</sup>

## PROPAGATION OF COUPLED HARMONIC WAVES IN A THERMALLY ISOLATED CYLINDRICAL WAVEGUIDE

<sup>1</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this paper, we consider a multiweight theory of weak discontinuities of the temperature increment, translational and spinor displacements in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium. The mathematical theory proposed for consideration is substantially based on the achievements of modern pseudotensor calculus. Definitions of multiweight pseudotensor elements of area and volume are revisited. A general multiweight form of a pseudotensor equation on a wave surface propagating in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium is derived. Weak discontinuities of solutions of the coupled system of pseudovector partial differential equations of semi-isotropic micropolar thermoelasticity are studied. For this aim the geometric and kinematic Hadamard–Thomas conditions are generalized to the pseudotensor case taking account of the pseudotensor geometry of the propagating surface of weak discontinuities. The propagation velocities of wave surfaces of translational and spinor displacements are found. A classification of weak discontinuities of temperature, translational and spinor displacements is carried out and their spatial polarizations are studied. The conditions of athermality of propagating wave surfaces of weak discontinuities are established.

**Keywords:** algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, micropolarity, pseudotensor volume element, multiweight formulation, constitutive pseudotensor function, growing surface, rational pseudoinvariant.

**Evgenii V. Murashkin**, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: [evmurashkin@gmail.ru](mailto:evmurashkin@gmail.ru); <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Nikita E. Stadnik**, MD, Minor Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: [nik-122@mail.ru](mailto:nik-122@mail.ru); <https://orcid.org/0000-0002-0187-8048>; AuthorID: 961836

**to cite this article:** Murashkin E. V. Propagation of coupled harmonic waves in a thermally isolated cylindrical waveguide // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 115–126. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.008 EDN: VEMPAQ

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**1. Введение.** Распространение волн в микро/наноразмерных полуизотропных термоупругих телах, термомеханические определяющие свойства которых чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства, является сложной актуальной задачей современной механики сплошных сред. В рамках настоящего исследования развивается теория теплопроводности в полуизотропных телах [1–5], существенно опирающаяся на фундаментальный принцип абсолютной инвариантности абсолютной термодинамической температуры, т. е. неизменность поля температуры при зеркальных отражениях трехмерного пространства и принципиальную невозможность приписать этому фундаментальному физическому полю какой бы то ни было ненулевой алгебраический псевдоскалярный вес.

Термодинамика физико-механических процессов зачастую связана с распространением волновых поверхностей в трехмерном пространстве, при прохождении через которые физические поля претерпевают слабые разрывы, т.е. сами поля и их первые производные непрерывны, а их производные, начиная со второй, вообще говоря, разрывны. Изучение указанных процессов, протекающих в современных конструкционных материалах, т.к. они могут обладать микроструктурными особенностями и моделирование их поведения требует привлечения неклассических моделей механики сплошных сред [1–5]. Простейшей из таких моделей является, например, полуизотропная микрополярная термоупругость. Подобные среды характеризуются чувствительностью своих определяющих псевдоскаляров к преобразованиям, меняющим ориентацию трехмерного пространства на противоположную. Практическая значимость указанных исследований связана с моделированием поведения биоматериалов, используемых в медицине, клеточных структур, керамики, гранулированных материалов.

Волновые задачи механики микрополярных сред возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как: УЗИ, сонография и спектральная доплерография. Теоретической основой для указанных методов могут служить задачи о распространении слабых разрывов в твердом теле [6, 7]. Литературный поиск показал актуальность волновых задач термомеханики микрополярных сплошных сред [1, 8–18]. В настоящей работе рассматривается задача распространения слабых разрывов в полуизотропном термоупругом микрополярном континууме.

Изложение настоящей статьи базируется на результатах, терминологии и понятиях предыдущих публикаций [12–27].

**2. Дифференциальные уравнения полуизотропной микрополярной термоупругой среды.** Связанные уравнения динамики и теплопроводности для полуизотропного микрополярного термоупругого континуума

можно записать в ковариантной форме [25]

$$\begin{aligned}
& G[(1 + c_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2c_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\phi_l + \\
& \quad + Lc'_4\nabla^i\nabla_k\phi^k + Lc'_5\nabla^k\nabla_k\phi^i] - 2G\alpha\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}\nabla_i\theta = -\rho(f^i - \partial..u^i), \\
& GL^2[(1 + c_2)\nabla^s\nabla_s\phi_i + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla_i\nabla_k\phi^k + \\
& \quad + L^{-1}c'_4\nabla_i\nabla^k u_k + L^{-1}c'_5\nabla^k\nabla_k u_i + L^{-1}c'_6\epsilon_{isl}\nabla^s\phi^l] - \\
& \quad - 2Gc_1(2\phi_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2GL^2\beta\nabla_i\theta = -\rho(l_i - \mathfrak{I}\partial..\phi_i), \\
& \lambda\nabla_s\nabla^s\theta - c\rho\partial.\theta - 2G\alpha\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}\theta_0\nabla_s\partial.u^s - 2GL^2\beta\theta_0\nabla_s\partial.\phi^s = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $u^k$  — вектор трансляционных перемещений;  $\phi^s$  — вектор спинорных перемещений;  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $L$  — характерная нано/микродлина микрополярной теории;  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — не имеющие физической размерности определяющие постоянные;  $\rho$  — массовая плотность;  $\mathfrak{I}$  — коэффициент микроинерции;  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $\beta$  — коэффициент теплового изгиба-кручения;  $\theta_0$  — референциальная температура;  $\theta$  — температурный инкремент;  $c$  — теплоемкость;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. Кроме того принято:

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6, \quad 2l^2 = L^2(1 + c_2).$$

В дальнейшем удобнее будет пользоваться прямой записью системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
& (1 + c_1)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + 2c_1\nabla \times \phi + \\
& \quad + Lc'_4\nabla\nabla \cdot \phi + Lc'_5\nabla \cdot \nabla\phi - 2\alpha\frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu}\nabla\theta = \rho G^{-1}\ddot{\mathbf{u}} \\
& (1 + c_2)\nabla \cdot \nabla\phi + (1 - c_2 + 2c_3)\nabla\nabla \cdot \phi + L^{-1}c'_4\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \\
& \quad + L^{-1}c'_5\nabla \cdot \nabla\mathbf{u} + L^{-1}c'_6\nabla \times \phi - 2L^{-2}c_1(2\phi - \nabla \times \mathbf{u}) - \\
& \quad - 2\beta\nabla\theta = \rho\mathfrak{I}G^{-1}L^{-2}\ddot{\phi} \\
& \nabla \cdot \nabla\theta - C\lambda^{-1}\partial.\theta - 2G\lambda^{-1}\alpha\frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu}\nabla \cdot \partial.\mathbf{u} - 2G\lambda^{-1}L^2\beta\nabla \cdot \partial.\phi = 0
\end{aligned} \right. \tag{2}$$

Кроме того, если воспользоваться тождествами

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} &= \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \\
\nabla \cdot \nabla\phi &= \nabla\nabla \cdot \phi - \nabla \times \nabla \times \phi
\end{aligned} \tag{3}$$

то в итоге получим

$$\left\{ \begin{array}{l} (2 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + L(c'_4 + c'_5)\nabla\nabla \cdot \phi - \\ \quad - (1 + c_1)\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - Lc'_5\nabla \times \nabla \times \phi + \\ \quad + 2c_1\nabla \times \phi - 2\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \nabla\theta = \rho G^{-1}\ddot{\mathbf{u}} \\ 2(1 + c_3)\nabla\nabla \cdot \phi + L^{-1}(c'_4 + c'_5)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \\ \quad - L^{-1}c'_5\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - (1 + c_2)\nabla \times \nabla \times \phi + \\ \quad + L^{-1}c'_6\nabla \times \phi - 2L^{-2}c_1(2\phi - \nabla \times \mathbf{u}) - 2\beta \nabla\theta = \rho \mathfrak{J}G^{-1}L^{-2}\ddot{\phi} \\ \nabla \cdot \nabla\theta - C\lambda^{-1}\partial.\theta - 2G\lambda^{-1}\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \nabla \cdot \partial.\mathbf{u} - 2G\lambda^{-1}L^2\beta \nabla \cdot \partial.\phi = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

**3. Распространение гармонической связанной термоупругой волны в полуизотропном волноводе.** Рассмотрим задачу о распространении гармонической волны вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического волновода. С этой целью воспользуемся разложениями Гельмгольца для полей трансляционных и спинорных перемещений на вихревые и безвихревые составляющие:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\Xi, \quad \phi = \mathbf{S}\Xi, \quad \theta = \Theta\Xi \quad (5)$$

где

$$\Xi = e^{i \arg \Xi}, \quad \arg \Xi = -\omega t$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \\ \mathbf{S} = \nabla\Sigma + \nabla \times \mathbf{H} \end{array} \quad (6)$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных  $\Phi$ ,  $\Sigma$  и векторных потенциалов  $\Psi$ ,  $\mathbf{H}$ . Разложения (6) позволяют провести процедуру развязывания системы векторных дифференциальных уравнений (1).

Для однозначной определенности абсолютных векторных потенциалов  $\Psi$ ,  $\mathbf{H}$  дополним разложения (6) калибровочными соотношениями

$$\nabla \cdot \Psi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

**4. Скалярные безвихревые потенциалы.** После подстановки принятых в предыдущем разделе представлений система связанная система уравнений для безвихревых потенциалов примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \Delta\Phi + L(c'_4 + c'_5)\Delta\Sigma - 2\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \Theta = -\omega\rho G^{-1}\Phi \\ 2(1 + c_3)\Delta\Sigma + L^{-1}(c'_4 + c'_5)\Delta\Phi - 4L^{-2}c_1\Sigma - 2\beta\Theta = -\omega\rho \mathfrak{J}G^{-1}L^{-2}\Sigma \\ \Delta\Theta + i\omega C\lambda^{-1}\Theta + i\omega 2G\lambda^{-1}\alpha \frac{1 + \nu}{*1 - 2\nu} \Delta\Phi + i\omega 2G\lambda^{-1}L^2\beta \Delta\Sigma = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение для безвихревых составляющих трансляционных и спиновых перемещений вихревой векторный потенциал  $\Omega$  с различными масштабными факторами

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Sigma \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \Omega \quad (8)$$

удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\Omega + \gamma^2\Omega = 0 \quad (9)$$

Подстановка универсального безвихревого потенциала приводит нас к системе алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \omega\rho G^{-1} - 2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\gamma^2 \right) s_1\Omega - L(c'_4 + c'_5)\gamma^2 s_2\Omega - 2\alpha\frac{1+\nu}{1-2\nu} s_3\Omega = 0 \\ -L^{-1}(c'_4 + c'_5)\gamma^2 s_1\Omega + (\omega\rho\mathfrak{J}G^{-1}L^{-2} - 2(1+c_3)\gamma^2 - 4L^{-2}c_1)s_2\Omega - \\ - 2\beta s_3\Omega = 0 \\ i\omega 2G\lambda^{-1}\alpha\frac{1+\nu}{1-2\nu}\gamma^2 s_1\Omega + i\omega 2G\lambda^{-1}L^2\beta\gamma^2 s_2\Omega + (\gamma^2 + i\omega C\lambda^{-1})s_3\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

Решение последней системы будет существовать если ее определитель равен нулю. В этом случае мы получим уравнение такое же, как и уравнение для волновых чисел плоских гармонических термоупругих триплетных волн. Решив которое, найдем скалярные составляющие в разложении Гельмгольца для трансляционных и спиновых перемещений, а также скалярный потенциал температурного инкремента.

**5. Векторные вихревые потенциалы трансляционных и спиновых перемещений.** Система векторных уравнения для определения вихревых потенциалов записывается в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+c_1)\nabla \times \nabla \times \Phi + Lc'_5\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - 2c_1\nabla \times \mathbf{H} = \omega\rho G^{-1}\Phi \\ (1+c_2)L^2\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + Lc'_5\nabla \times \nabla \times \Phi - \\ - Lc'_6\nabla \times \mathbf{H} + 2c_1(2\mathbf{H} - \nabla \times \Phi) = \omega\rho\mathfrak{J}G^{-1}\mathbf{H} \end{array} \right. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение для вихревых составляющих трансляционных и спиновых перемещений вихревой векторный потенциал  $\Upsilon$  с различными масштабными факторами

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Upsilon \quad (12)$$

Тогда получим систему

$$\begin{aligned} -\nabla \times \nabla \times \begin{pmatrix} -[(1+c_1)a + Lc'_5b] \\ -[(1+c_2)b + Lc'_5a] \end{pmatrix} \Upsilon + \begin{pmatrix} \omega\rho G^{-1}a \\ \omega\rho G^{-1}\mathfrak{J}b \end{pmatrix} \Upsilon + \\ + \nabla \times \begin{pmatrix} 2c_1b \\ 2c_1a + L^{-1}c'_6b \end{pmatrix} \Upsilon = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

которую можно преобразовать к следующей

$$-\nabla \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Upsilon + \begin{pmatrix} \omega\rho G^{-1}a \\ \omega\rho G^{-1}\mathfrak{J}b \end{pmatrix} \Upsilon = \mathbf{0}$$

при условии, что справедливы соотношения

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2c_1b}{\omega\rho G^{-1}[(1 + c_1)a + Lc'_5b]}, \quad \frac{b}{d} = \frac{d + 2c_1a + L^{-1}c'_6b}{\omega\rho G^{-1}\mathfrak{J}[(1 + c_2)b + Lc'_5a]}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{a}{b}$$

Для универсального потенциала  $\Upsilon$  получим уравнение

$$-\nabla \times \Upsilon + p\omega\rho G^{-1}\Upsilon = \mathbf{0} \quad (14)$$

при условии, что

$$p = \frac{a}{c}$$

Разрешив отношения для введенных параметров получим уравнение для определения неизвестной  $p$ . Решив которое найдем векторные вихревые потенциалы трансляционных и спинорных перемещений.

**6. Поля трансляционных и спинорных перемещений в распространяющейся волне** Перейдем к определению векторов трансляционных и спинорных перемещений в связанной распространяющейся волне. Связанные трансляционных и спинорных перемещений в цилиндрическом волноводе определяются в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  методом разделения переменных (подробнее см. в [2]). Этот метод позволяет исследовать волны произвольного азимутального числа  $n$ , распространяющиеся по бесконечному волноводу.

Для скалярных волновых потенциалов  $\Phi, \Sigma, \theta$  связанной продольной триплетной волны получим следующие представления:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Sigma \\ \Theta \end{pmatrix} = [C_1 I_n(\gamma_1 r) + C_2 I_n(\gamma_2 r) + C_3] \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} I_n(\gamma_3 r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} \quad (15)$$

$k$  обозначает волновое число распространяющейся волны;  $C_1, C_2, C_3$  — произвольные константы;  $I_n(\cdot)$  — стандартная функция Бесселя первого рода мнимого аргумента;

$$\gamma_1^2 = k^2 - s_1, \quad \gamma_2^2 = k^2 - s_2, \quad \gamma_3^2 = k^2 - s_3.$$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = C_4 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Upsilon_1 + C_5 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Upsilon_2 + C_6 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Upsilon_3 + C_7 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Upsilon_4 \quad (16)$$

Координатные представления потенциалов вихревых волн выводятся из формального решения векторного винтового уравнения

$$-\nabla \times \Upsilon + K\Upsilon = \mathbf{0} \quad (17)$$

которое можно получить путем разделения переменных в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ .

Остается домножить на экспоненты гармоника времени

$$e^{i\omega t}$$

Неизвестные константы получаются из условий калибровки и из граничных условий краевой задачи на боковой стенке волновода.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [2] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
- [3] Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.
- [4] Altenbach H. Eremeyev V. A. (eds.). Generalized continua—from the theory to engineering applications. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 541. XVII+387 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.
- [5] Maugin G. A. Non-classical continuum mechanics. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
- [6] Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. New York : John Wiley & Sons, 2011. 660 p.
- [7] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Linear and nonlinear waves. М. : Наука, 1982. 335 с.
- [8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [10] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 с.



- [11] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *International Journal of Engineering Science*. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*. 2014. T. 18, № 4. С. 85–97. DOI: 10.14498/vsgtu1331.
- [13] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [14] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [15] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [16] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [17] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [18] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [19] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [20] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.

- [25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.

## REFERENCES

- [1] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [2] Altenbach H., Maugin G. A., Erofeev V. (eds.). *Mechanics of generalized continua*. Berlin : Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7.
- [3] Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. *Foundations of micropolar mechanics*. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6.
- [4] Altenbach H. Eremeyev V. A. (eds.). *Generalized continua—from the theory to engineering applications*. Berlin : Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 541. XVII+387 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.
- [5] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Singapore : Springer Verlag, 2017. XVII+259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.
- [6] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5\_16.
- [8] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // *Mechanics of Generalized Continua* / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [9] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [10] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and ductility*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [13] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo*

- pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [15] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [16] Murashkin E. V. On the relationship between micropolar determining parameters of thermodynamic state potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 1(55). P. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761. DOI: 10.14498/vsgtu1799.
- [18] Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. New York : John Wiley & Sons, 2011. 660 p.
- [19] Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. Linear and nonlinear waves. Moscow : NAUKA, 1982. 335 p.
- [20] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [21] Willson A.J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [22] Achenbach Jan. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 p.
- [23] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [24] Murashkin Evgenii V, Radayev Yuri N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2014. Vol. 18, no. 4. P. 85–97. DOI: 10.14498/vsgtu1331.
- [25] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [26] Kovalev Vladimir Aleksandrovich, Murashkin Eugenio Valeryevich, Radayev Yuri Nikolaevich. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [28] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.

- [30] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [31] Murashkin E. V., Radayev Yu N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [32] Murashkin EV, Radayev YN. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [33] Rosenfeld B. A. *Multidimensional spaces*. Moscow : Nauka, 1966. 648 p.
- [34] Synge J. L., Schild A. *Tensor calculus*. Toronto : Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [35] Gurevich G. B. *Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants*. Moscow : GITTL, 1948. 408 p.
- [36] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An algebraic algorithm for systematically reducing one-point pseudotensors to absolute tensors // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 1(51). P. 17–26. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
- [37] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Elements of Theory // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). P. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [38] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly Constant Tensors in Euclidean Spaces. Applications to Continuum Mechanics // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 2(52). P. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [39] Radayev Y. N. Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of a Hemitropic Micropolar Solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 5. P. 1517–1527. DOI: 10.3103/S0025654423700206.
- [40] Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles // *Acta math*. 1887. Vol. 6. P. 321–380.
- [41] Poincaré Henri. Analysis situs // *J. Ecole Polytech*. 1895. Vol. 1. P. 1–123.
- [42] Finikov S. P. *Cartan’s Method of External Forms in Differential Geometry*. Moscow : OGIz, 1948. 432 p.
- [43] Cartan A. *Differential Calculus. Differential Forms*. Moscow : Mir, 1971. 392 p.
- [44] Efimov N. V. *Introduction to the Theory of External Forms*. Moscow : Nauka, 1977. 88 p.
- [45] Arnold V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. Moscow : Наука, 1979. 431 p.
- [46] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. *Elements of field theory: variational symmetries and geometric invariants*. Moscow : Fizmatlit, 2009. 156 p.
- [47] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. *Wave problems of field theory and thermomechanics*. Saratov : Publishing House of Saratov University, 2010. 328 p.

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## ВОЛНОВЫЕ КРИТЕРИИ УЛЬТРАТРОПНОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** Работа посвящена проблемам связанным с распространением плоских гармонических волн трансляционных и спинорных перемещений в ультратропных микрополярных упругих телах. Введено понятие ультратропного микрополярного упругого тела. Представлена энергетическая форма потенциала напряжений для анизотропного микрополярного упругого тела и получены поределеляющие уравнения для ультрагеомитропного/ультраизотропного микрополярных упругих тел. Получены система дифференциальных уравнений с частными производными, записанные в терминах вектора трансляционных перемещений и вектора спинорных перемещений для ультрагеомитропного/ультраизотропного микрополярных упругих тел. Получены системы уравнений для определения волновых чисел для продольных и поперечных волн, распространяющихся в ультрагеомитропных/ультраизотропных микрополярных упругих телах. Сформулированы критерии распространения поперечных гармонических волн в ультратропных микрополярных упругих телах.

**Ключевые слова:** микрополярность, ультрагеомитропное тело, ультраизотропное тело, трансляционное смещение, спинорное смещение, плоская гармоническая по времени волна, продольная волна, поперечная волна, волновое число, комплексная амплитуда, фазовая плоскость, дисперсионное уравнение, вектор поляризации.

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Радаев Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116

**для цитирования:** Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Волновые критерии ультратропности микрополярных упругих тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 4(62). С. 127–138. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.009 EDN: VJVOEC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

*E. V. Murashkin, Y. N. Radayev*

## WAVE CRITERIA OF ULTRATROPICITY OF MICROPOLAR ELASTIC SOLIDS

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper is devoted to the problems associated with the propagation of plane harmonic waves of translational and spinor displacements in ultratropic micropolar elastic solids. The concept of an ultratropic micropolar elastic body is introduced. The energy form of the stress potential for an anisotropic micropolar elastic body is presented and constitutive equations for ultrahemitropic/ultraisotropic micropolar elastic solids are obtained. A systems of partial differential equations in terms of the translational displacement vector and the spinor displacement vector for ultrahemitropic/ultraisotropic micropolar elastic solids is derived. The equations for the wavenumbers of longitudinal and transverse waves propagating in ultrahemitropic/ultraisotropic micropolar elastic solids are presented and discussed. The criteria for the propagation of transverse harmonic waves in ultratropic micropolar elastic solids are formulated.

**Keywords:** micropolar thermoelasticity, ultrahemitropic solid, ultraisotropic solid, translational displacement, spinor displacement, plane time-harmonic wave, longitudinal wave, transverse wave, wavenumber, complex amplitude, phase plane, dispersion equation, polarization vector.

**Evgenii V. Murashkin**, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: [evmurashkin@gmail.ru](mailto:evmurashkin@gmail.ru); <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

**Yuri N. Radayev**, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; e-mail: [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru); <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116

**to cite this article:** *Murashkin E. V., Radayev Y. N. Wave criteria of ultratropicity of micropolar elastic solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2024. No 4(62). p. 127–138. DOI: 10.37972/chgpu.2024.62.4.009 EDN: VJVOEC*

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)*

**1. Введение.** Модели микрополярных континуумов основаны на понятиях спинорных и трансляционных перемещений, определяющих движение элемента деформируемой среды. Указанный способ моделирования микрополярного тела впервые был описан в работе братьев Коссера [1]. Последующие многочисленные работы по микрополярной упругости появились только через 50 лет. Среди них следует отдельно отметить работы отечественных ученых [2, 3], а также работы немецких авторов [4–7]. Векторы спинорных и трансляционных перемещений могут быть введены в теорию способами известными в теоретической механике как теоремы Шаля о поворотах твердого тела. В известных авторам публикациях построение микрополярных теорий основывается на второй теореме Шаля, позволяющей рассматривать векторы спинорных и трансляционных перемещений как независимые векторные/псевдовекторные поля.

Важным классом задач в теориях волновой термомеханики микрополярных сред являются задачи распространения плоских гармонических волн в термоупругих средах. Этот класс задач подготавливает к идентификации полуизотропных микрополярных тел. Волновым задачам термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [8–18]. Тем не менее следует отметить, что некоторые проблемы, существенные как для теории, так и для прикладных вопросов, до сих пор остаются не исследованными. В первую очередь это касается вопросов ориентации в пространстве (поляризаций) для плоских гармонических волн, что препятствует применению теории микрополярной термоупругости в экспериментах и не позволяет говорить о завершенности рассматриваемых исследований. Следует отдельно отметить, что предмет настоящей работы, связанный с распространением гармонических волн в ультрагеомитропной среде, никогда ранее не исследовался. Изложение материала настоящей статьи в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, изложенные в предыдущих статьях [13–27].

**2. Ультратропные микрополярные упругие тела.** Микрополярный упругий континуум в анизотропном случае можно охарактеризовать энергетической формой внутренней энергии, которая в декартовых координатах примет вид [19]:

$$2\bar{U} = H_{1islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + H_{2islm}\kappa_{is}\kappa_{lm} + H_{3islm}\epsilon_{is}\kappa_{lm}, \quad (1)$$

где  $H_{1islm}$ ,  $H_{2islm}$ ,  $H_{3islm}$  — определяющие тензоры анизотропного микрополярного упругого тела;  $\epsilon_{ik}$  — асимметричный тензор деформации;  $\kappa_{ik}$  — асимметричный тензор изгиба–кручения.

Микрополярное упругое тело назовем ультратропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются ни при каких преобразованиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. являются тензорами с постоянными компонентами [28–30]. Учитывая представление для тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами [30], определяющие тензоры (3) можно представить в виде

$$H_{cislm} = a_c \delta_{is} \delta_{lm} + c_c \delta_{im} \delta_{ls} \quad (c = 1, 2, 3), \quad (2)$$

Отметим, что в случае гемитропного/изотропного микрополярного упругого тела определяющие (Н)-тензоры записываются в виде

$$H_{\underset{c}{c}}^{isl m} = a \delta_{is} \delta_{lm} + b \delta_{sm} \delta_{il} + c \delta_{im} \delta_{ls} \quad (\mathbf{c} = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ( $\mathbf{c} = 1, 2, 3$ ) — определяющие постоянные. Кроме того, для случая изотропного тела справедливо условие

$$H_{\underset{3}{3}}^{isl m} = 0. \quad (4)$$

Сравнивая представления для определяющих тензоров (2) и (3), приходим к условию ультратропности

$$b_{\underset{c}{c}} = 0 \quad (\mathbf{c} = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Вместо определяющих постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ( $\mathbf{c} = 1, 2, 3$ ) иногда удобно использовать материальные механические параметры, связанные с первыми следующими соотношениями [31–33]:

$$\begin{aligned} a_{\underset{1}{1}} &= 2G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, & b_{\underset{1}{1}} + c_{\underset{1}{1}} &= 2G, & b_{\underset{1}{1}} - c_{\underset{1}{1}} &= 2Gc_1, \\ a_{\underset{2}{2}} &= 2GL^2c_3, & b_{\underset{2}{2}} + c_{\underset{2}{2}} &= 2GL^2, & b_{\underset{2}{2}} - c_{\underset{2}{2}} &= GL^2c_2, \\ a_{\underset{3}{3}} &= 2GLc_4, & b_{\underset{3}{3}} + c_{\underset{3}{3}} &= 2GLc_5, & c_{\underset{3}{3}} - b_{\underset{3}{3}} &= GLc_6. \end{aligned} \quad (6)$$

где  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $L$  — характерная микро-длина;  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — не имеющие физической размерности постоянные (см. [19, 20]). В изотропном случае:  $c_4 = c_5 = c_6 = 0$ .

Учитывая условия (5), материальные определяющие постоянные ультрагемитропного микрополярного упругого тела должны удовлетворять следующим ультратропным ограничениям:

$$c_1 = c_2 = -1, \quad c_6 = 2c_5. \quad (7)$$

Следовательно, определяющие уравнения ультрагемитропного микрополярного тела примут вид<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} t^{(is)} &= 2G [\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}] \epsilon_{(lm)} + GL [c_4 g^{is} g_{lm} \kappa^{(lm)} + c_5 \kappa^{(is)}], \\ \mu_{(is)} &= 2GL^2 [c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}] \kappa^{(lm)} + GL [c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}], \\ \tau_i &= -2G g_{is} \varphi^s + GL c_5 \kappa_i, \\ \mu^i &= -2GL^2 g^{is} \kappa_s + GL c_5 \varphi^i. \end{aligned} \quad (8)$$

или для ультраизотропного случая

$$\begin{aligned} t^{(is)} &= 2G [\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}] \epsilon_{(lm)}, \\ \mu_{(is)} &= 2GL^2 [c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}] \kappa^{(lm)}, \\ \tau_i &= -2G g_{is} \varphi^s, \\ \mu^i &= -2GL^2 g^{is} \kappa_s. \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>1</sup>Здесь мы используем произвольную криволинейную систему координат.



**3. Распространение плоских гармонических волн в ультратропных микрополярных упругих телах.** Система дифференциальных уравнений динамики ультратропных микрополярных упругих тел может быть записана согласно определяющим уравнениям (8) и (9) в векторной форме [34], соответственно:

для ультрагемитроного тела:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - 2\nabla\times\boldsymbol{\phi} + L(c_4+c_5)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi} = \rho G^{-1}(\partial.)^2\mathbf{u}, \\ 2(1+c_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi} + L^{-1}(c_4+c_5)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - 2L^{-1}c_5\nabla\times\boldsymbol{\phi} + \\ + 2L^{-2}(2\boldsymbol{\phi} - \nabla\times\mathbf{u}) = \rho\mathfrak{J}G^{-1}L^{-2}(\partial.)^2\boldsymbol{\phi}. \end{array} \right. \quad (10)$$

для ультраизотроного тела:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - 2\nabla\times\boldsymbol{\phi} = \rho G^{-1}(\partial.)^2\mathbf{u}, \\ 2(1+c_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi} + 2L^{-2}(2\boldsymbol{\phi} - \nabla\times\mathbf{u}) = \rho\mathfrak{J}G^{-1}L^{-2}(\partial.)^2\boldsymbol{\phi}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Системы дифференциальных уравнений в частных производных (10) и (11), записанные в терминах вектора трансляционных перемещений  $\mathbf{u}$  и вектора спиновых перемещений  $\boldsymbol{\phi}$  служат основой для исследования сильных и слабых разрывов в ультратропных микрополярных упругих телах, а также волновых процессов, которые в рассматриваемых случаях характеризуются одновременным распространением прямых и зеркальных мод.

Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической плоской волны с циклической частотой  $\omega$ . В этом случае векторные поля трансляционных и спиновых перемещений можно представить в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\Phi, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S}\Phi, \quad \Phi = e^{i\arg\Phi}, \quad \arg\Phi = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t, \quad (12)$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор;  $\mathbf{r}$  — радиус вектор;  $\omega$  — циклическая частота гармонической волны;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  — векторы комплексных амплитуд трансляционных и спиновых перемещений соответственно;  $\Phi$  — фазовый множитель;  $\arg\Phi$  — фаза плоской волны.  $\arg\Phi = \text{const}$  — фазовые плоскости.

Отметим, что  $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ , где  $k$  — комплексное число,  $\mathbf{s}$  — вещественный единичный вектор.

После подстановки соотношений (12) в системы уравнений (10) и (11) получим, соответственно:

для ультрагемитроного тела:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho G^{-1}\omega^2\mathbf{A} - 2[1-\nu](1-2\nu)^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - 2i\mathbf{k}\times\mathbf{S} - L(c_4+c_5)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) = \mathbf{0}, \\ [\rho\mathfrak{J}G^{-1}L^{-2}\omega^2 + 4L^{-2}]\mathbf{S} - 2(1+c_3)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) - 2L^{-1}c_5i\mathbf{k}\times\mathbf{S} - \\ - L^{-1}(c_4+c_5)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - 2L^{-2}i\mathbf{k}\times\mathbf{A} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (13)$$

для ультраизотроного тела:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho G^{-1}\omega^2\mathbf{A} - 2[1-\nu](1-2\nu)^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - 2i\mathbf{k}\times\mathbf{S} = \mathbf{0}, \\ [\rho\mathfrak{J}G^{-1}L^{-2}\omega^2 + 4L^{-2}]\mathbf{S} - 2(1+c_3)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) - 2L^{-2}i\mathbf{k}\times\mathbf{A} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Представим векторы комплексных амплитуд трансляционных ( $\mathbf{A}$ ) и спинорных ( $\mathbf{S}$ ) перемещений в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}, \quad (15)$$

где векторы  $\mathbf{A}_\perp$  и  $\mathbf{S}_\perp$  расположены в плоскости перпендикулярной волновому вектору  $\mathbf{k}$ , т.е. в плоскости постоянной фазы  $\arg \Phi = \text{const}$ .

Подставив представление (15) в системы (13) и (14), получим: для ультрагемитроного тела:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\rho G^{-1} \omega^2](\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1} A_\parallel k^2 \mathbf{k} - \\ \quad - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp - L(c_4 + c_5) S_\parallel k^2 \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}](\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 + c_3) S_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-1} c_5 i\mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp - \\ \quad - L^{-1}(c_4 + c_5) A_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-2} i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (16)$$

для ультраизотроного тела:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\rho G^{-1} \omega^2](\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1} A_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{S}_\perp = \mathbf{0}, \\ [\rho \mathfrak{J} G^{-1} L^{-2} \omega^2 + 4L^{-2}](\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - 2(1 + c_3) S_\parallel k^2 \mathbf{k} - 2L^{-2} i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Нетрудно заметить, что системы (16) и (17) распадаются на независимые системы уравнений, отдельно для продольных и поперечных волн.

**4. Распространение продольных плоских гармонических волн в ультратропных микрополярных телах.** Проекция уравнений системы (13) на волновой вектор  $\mathbf{k}$  представляет собой замкнутую систему трех линейных однородных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \omega^2 - \frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)} k^2 \right) A_\parallel - (c_4 + c_5) \rho^{-1} GL k^2 S_\parallel = 0, \\ [\omega^2 + 4(\rho \mathfrak{J})^{-1} G - 2(1 + c_3)(\rho \mathfrak{J})^{-1} GL^2 k^2] S_\parallel - (c_4 + c_5)(\rho \mathfrak{J})^{-1} GL k^2 A_\parallel = 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

Аналогичная проекция системы (14) приводит к тривиальной системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \omega^2 - \frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)} k^2 \right) A_\parallel = 0, \\ [\omega^2 + 4(\rho \mathfrak{J})^{-1} G - 2(1 + c_3)(\rho \mathfrak{J})^{-1} GL^2 k^2] S_\parallel = 0. \end{array} \right. \quad (19)$$

Для существования нетривиального решения алгебраической системы (18) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \omega^2 - [V_\parallel]^2 k^2 & -a_1 k^2 \\ -a_1 \mathfrak{J}^{-1} k^2 & \omega^2 + \Omega - (V_\parallel^{\mu\mu})^2 k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} [V_\parallel]^2 &= \frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)}, & [V_\parallel^{\mu\mu}]^2 &= \frac{2GL^2(1 + c_3)}{\rho \mathfrak{J}}, \\ \rho \mathfrak{J} \Omega &= 4G, & \rho a_1 &= (c_4 + c_5) GL. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что системы уравнений (18) и (19) совпадают по форме с аналогичным для полуизотропного термоупругого тела, а матрица  $\mathbf{A}$  качественно совпадает с аналогичной для гемитропного тела [35, 36]. Поэтому распространение продольных волн в ультратропных микрополярных упругих телах не имеет качественных особенностей по сравнению с аналогичными случаями для полуизотропных и изотропных тел.

**5. Распространение поперечных плоских гармонических волн в ультратропных микрополярных телах.** Рассмотрим проекции систем линейных уравнений (16) и (17) ортогональные направления в фазовой плоскости  $\arg \Phi = \text{const}$ . Введем в рассмотрение два единичных взаимно ортогональных вектора  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , расположенных в фазовой плоскости. Тогда векторы  $\mathbf{A}_\perp$  и  $\mathbf{S}_\perp$  можно представить в форме

$$\mathbf{A}_\perp = A_{1\perp} \mathbf{i} + A_{2\perp} \mathbf{j}, \quad \mathbf{S}_\perp = S_{1\perp} \mathbf{i} + S_{2\perp} \mathbf{j}. \quad (22)$$

Проекция системы линейных уравнений (16) на орты  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  примут вид

$$\begin{aligned} \omega^2 A_{1\perp} + 2i\rho^{-1} Gk S_{2\perp} &= 0, \\ \omega^2 A_{2\perp} - 2i\rho^{-1} Gk S_{1\perp} &= 0, \\ [\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1} G] S_{1\perp} + 2iLc_5\rho^{-1} Gk S_{2\perp} + 2i\rho^{-1} Gk A_{2\perp} &= 0, \\ [\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1} G] S_{2\perp} - 2iLc_5\rho^{-1} Gk S_{1\perp} - 2i\rho^{-1} Gk A_{1\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Проекция системы линейных уравнений (17) на орты  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  вычисляются согласно

$$\begin{aligned} \omega^2 A_{1\perp} + 2i\rho^{-1} Gk S_{2\perp} &= 0, \\ \omega^2 A_{2\perp} - 2i\rho^{-1} Gk S_{1\perp} &= 0, \\ [\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1} G] S_{1\perp} + 2i\rho^{-1} Gk A_{2\perp} &= 0, \\ [\mathfrak{I}\omega^2 + 4\rho^{-1} G] S_{2\perp} - 2i\rho^{-1} Gk A_{1\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Для существования нетривиального решения систем линейных однородных уравнений (23) и (24) необходимо и достаточно, чтобы их определители были равны нулю.

Отметим, что в отличие от аналогичного уравнения для полуизотропного термоупругого тела [35, 36]. Видим, что характерные определяющие числа  $[V_\perp^\mu]^2 = G(1 + c_1)\rho^{-1}$  и  $[V_\perp^{\mu\mu}]^2 = G(1 + c_2)(\rho\mathfrak{I})^{-1}$  равны нулю для ультрагемитропного и ультраизотропного микрополярных упругих тел, что позволяет сформулировать последние в виде критериев

$$[V_\perp^\mu]^2 = G(1 + c_1)\rho^{-1} = 0, \quad [V_\perp^{\mu\mu}]^2 = G(1 + c_2)(\rho\mathfrak{I})^{-1} = 0. \quad (25)$$

**6. Заключение.** В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических волн трансляционных и спиновых перемещений в ультратропных микрополярных упругих телах.

- (1) Определено понятие ультратропного микрополярного упругого тела.
- (2) Представлена энергетическая форма потенциала напряжений для анизотропного микрополярного упругого тела и получены поределеляющие уравнения для ультрагемитропного/ультраизотропного микрополярных упругих тел
- (3) Получены система дифференциальных уравнений с частными производными, записанные в терминах вектора трансляционных перемещений и вектора спиновых перемещений для ультрагемитропного/ультраизотропного микрополярных упругих тел.
- (4) Получены системы уравнений для определения волновых чисел для продольных и поперечных волн, распространяющихся в ультрагемитропных/ультраизотропных микрополярных упругих телах.
- (5) Сформулированы критерии распространения поперечных гармонических волн в ультратропных микрополярных упругих телах.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

#### ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // *Soviet Physics-Solid State*. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
- [3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
- [4] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // *Acta Mechanica*. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.

- [5] G unther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5\_16.
- [7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [10] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [11] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
- [12] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [13] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2023. № 2(56). С. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [14] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [15] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstruture // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.
- [16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [18] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [19] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [20] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

- [21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [22] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2020. № 4. С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [28] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). С. 106–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
- [29] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. ИЯ Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2022. № 2(52). С. 118–127. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
- [30] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [31] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
- [32] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
- [33] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [34] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Thermoelastic Waves in an Ultrahemitropic Micropolar Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 5. P. ??

- [35] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. DOI: 10.14498/vsgtu2087.
- [36] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Plane Waves in a Semi-Isotropic Thermoelastic Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 4. P. 2387–2394. DOI: 10.1134/S0025654424700316.

## REFERENCES

- [1] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [2] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles // Soviet Physics-Solid State. 1961. Vol. 2, no. 7. P. 1272–1281.
- [3] Pal'mov V. A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1964. Vol. 28, no. 3. P. 496–505.
- [4] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [5] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [6] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5\_16.
- [7] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [8] Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5.
- [9] Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
- [10] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [11] Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York : American Elsevier, 2012. 335 c.
- [12] Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // International Journal of Engineering Science. 1974. Vol. 12, no. 2. P. 143–157. DOI: 10.1016/0020-7225(74)90013-5.
- [13] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled waves of displacements and microrotations in hemitropic micropolar media // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2021. no. 2(48). P. 115–127. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
- [14] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermal and athermal plane harmonic waves in an acentric isotropic solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 2(56). P. 99–107. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
- [15] Murashkin E. V., Stadnik N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/mateconf/20179512001.

- [16] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23, no. 1. P. 10–13. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [17] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Mathematical theory of coupled plane harmonic thermoelastic waves in micropolar continua of the first type // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2014. Vol. 14, no. 1. P. 77–87. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
- [18] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2015. Vol. 15, no. 1. P. 79–89. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
- [19] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [20] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Problems of strength and ductility*. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [21] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.
- [22] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On theory of linear hemitropic micropolar media // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2020. no. 4. P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [25] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [26] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [27] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On Algebraic Triple Weights Formulation of Micropolar Thermoelasticity // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Thermoelastic Waves in an Ultrahemitropic Micropolar Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 5. P. ??
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Coupled Harmonic Plane Waves in a Semi-Isotropic Thermoelastic Medium // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 4. P. 2387–2394. DOI: 10.1134/S0025654424700316.
- [30] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спиновых перемещений в полуизотропной термоупругой среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. DOI: 10.14498/vsgtu2087.



## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@mch.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mch.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vlgzub@gmail.com)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mch.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашид Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad\_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович** ([lomakin@mech.math.msu.su](mailto:lomakin@mech.math.msu.su)) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна** ([maximova\\_ng@mail.ru](mailto:maximova_ng@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович** ([markin@tsu.tula.ru](mailto:markin@tsu.tula.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович** ([sergio2100@mail.ru](mailto:sergio2100@mail.ru)) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович** ([ekc\\_05@mail.ru](mailto:ekc_05@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Минаева Надежда Витальевна** ([nminaeva@yandex.ru](mailto:nminaeva@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич** ([mbg.chspu@yandex.ru](mailto:mbg.chspu@yandex.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович** ([mir-vagif@mail.ru](mailto:mir-vagif@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика.

**Мурашкин Евгений Валерьевич** ([evmurashkin@gmail.com](mailto:evmurashkin@gmail.com)) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович** ([nemiryury@mail.ru](mailto:nemiryury@mail.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович** ([nepershin\\_ri@rambler.ru](mailto:nepershin_ri@rambler.ru)) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич** ([orlowvn@rambler.ru](mailto:orlowvn@rambler.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич** ([radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорохин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трецев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru) и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2<sub>ε</sub> с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Потянихин Д. А., Евстигнеев А. И., Туев М. Ю.</i> Об учете деформационной анизотропии при решении задач о пластическом деформировании металлов	5
<i>Кукуджанов К. В., Халикова Г. Р., Корзникова Е. А., Ченцов А. В., Дмитриев С. В.</i> Залечивание длинных трещин в нержавеющей стали 12Х15Г9НД с помощью электроимпульсной обработки	16
<i>Гаришин О. К., Шадрин В. В., Морозов И. А.</i> Анализ вязкоупругих свойств силиконовых резин	40
<i>Евстихов Д. О.</i> Упругопластическая граница скручиваемого стержня, армированного волокнами	53
<i>Иванова С. Ю., Осипенко К. Ю., Баничук Н. В., Лисовенко Д. С.</i> Исследование влияния вязкого заполнителя на механические свойства метаматериалов с отрицательным и положительным коэффициентом Пуассона при пробивании жестким ударником	62
<i>Андрейченко Д. К., Крылова Е. Ю.</i> Об устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса	76
<i>Немировский Ю. В., Тихонов С. В.</i> Учет влияния формы поперечного сечения и силы тяжести на предельное состояние многослойного бетонного стержня	89
<i>Богачева В. Э., Перова О. С.</i> Влияние геометрических характеристик композита на напряженное состояние тонкого адгезионного слоя	97
<i>Папкова И. В., Крылова Е. Ю., Андрейченко Д. К., Коврига И. И., Пронина Е. К.</i> О нелинейных колебаниях гибких осесимметричных сферических оболочек, находящихся в шумовом поле	107
<i>Мурашкин Е. В.</i> Распространение связанных гармонических волн в теплоизолированном цилиндрическом волноводе	115
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Волновые критерии ультратропности микрополярных упругих тел	127
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	139
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	142

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2024. № 4 (62)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 25.12.2024. Выход в свет 27.12.2024.  
Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>. Усл. печ. л. 18,0.  
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 404

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного  
педагогического университета им. И. Я. Яковлева  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38