Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

# ВЕСТНИК ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

**Научный журнал**

**№ 1(63)**

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”



Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109



**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А
**Адрес издателя:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38
**Тел.:** (8352) 22-28-71, доб. 1182
**E-mail:** predel21@mail.ru
**WWW:** https://limit21.ru

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 1(63)**

**The Journal founder:** I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
**Founders of the series:** D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov, B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia" (reg. No. 13109).



**Postal address::** ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

**Phone::** +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

**E-mail::** predel21@mail.ru

**Journal website::** http://limit21.ru

*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.012* *EDN: OKQFBB*

*Научная статья* *УДК: 531/534*

*А. Н. Богданов*

# ПАМЯТИ АНДРЕЯ ГЕННАДИЕВИЧА КУЛИКОВСКОГО

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия*

***Аннотация.*** Статья посвящена памяти отечественного ученого-механика академика РАН А.Г. Куликовского, его научным и педагогическим взглядам.

***Ключевые слова***: механика, математическое моделирование, преподавание в высшей школе

**Богданов Андрей Николаевич**, ведущий научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова; `e-mail:` bogdanov@imec.msu.ru; `https://orcid.org/0000-0001-9541-0579`

***для цитирования:*** *Богданов А. Н.* Памяти Андрея Геннадиевича Куликовского // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 5–14. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.012. EDN: OKQFBB



*Поступила: 01.02.25; принята в печать: 12.04.25; опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.012* *EDN: OKQFBB*
*Research Article*

*A. N. Bogdanov*

# IN MEMORY OF ANDREY GENNADIEVICH KULIKOVSKY

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

***Abstract.*** The article is dedicated to the memory of the Russian scientist-mechanic, Academician of the Russian Academy of Sciences A.G. Kulikovsky, his scientific and pedagogical views.

***Keywords***: mechanics, mathematical modeling, teaching in higher education.

**Andrey N. Bogdanov**, Leading Researcher; `e-mail:` bogdanov@imec.msu.ru;
`https://orcid.org/0000-0001-9541-0579`

***to cite this article:*** *Bogdanov A. N.* In memory of Andrey Gennadievich Kulikovsky // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 5–14. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.012



*Received: 01.02.25;* *accepted: 12.04.25;* *published: 17.06.25.*

30 мая 2024 года ушел из жизни крупный ученый-механик и преподаватель высшей школы, академик РАН, заслуженный профессор Московского университета Андрей Геннадиевич Куликовский (1933–2024).

Автору посчастливилось учиться у этого замечательного педагога. В 1981 году, выбрав специализацию по кафедре гидромеханики на механико-математическом факультете МГУ, помимо научных руководителей мы получили группу кураторов нашего спецсеминара. Руководил этой группой профессор А.Г. Куликовский. Поскольку с I курса я учился в одной группе с младшим сыном Куликовского — Колей (богатырем типично русской наружности — здоровенным, с рыжей бородой, всегда улыбающимся, в дополнение к своей внешности заправского морского волка или заслуженного яхтсмена он курил еще и трубку), то перед первой встречей с Андреем Геннадиевичем ожидал увидеть мужчину столь же представительной комплекции. Но профессор оказался среднего роста, плотный, коренастый. Выдающимися физическими достижениями, например, стойкой на руках на кафедре как Б. Н. Делоне, нас он не удивлял (а мы чего-то все-таки ожидали). Однако впоследствии стало известно, что Андрей Геннадиевич одолел в армрестлинг самого Ивана Матвеевича Виноградова, отличавшегося сверхъестественной силой рук. Впрочем, Андрей Геннадиевич, которого я расспрашивал потом об этом состязании, ничего особо выдающегося в этой победе не видел — Иван Матвеевич, по его словам, был уже пожилым человеком (разница в возрасте у них составляла 42 года). Вообще к своим ненаучным результатам он относился очень спокойно. На мой вопрос об имеющихся у него государственных наградах: *Есть*, — сказал он, подумав, — *медаль «За трудовое отличие». Я сумел отличиться* (последнее предложение было произнесено им с усмешкой).

В учебе нам повезло, хотя свои лекции А.Г. Куликовский читал академично, не особенно сопровождая их материал наглядными примерами (поэтому запомнилось, как один раз он ушел к входной двери в аудиторию и, наклонившись к дверной ручке и продевая палец в пространство между ручкой и дверью, стал объяснять смысл неодносвязности области течения), — на семинарах Андрей Геннадиевич всерьез, без пренебрежения, без высокомерного снобизма (чего хватало у других преподавателей) вникал в ход наших научных рассуждений. Да и не только наших, а и коллег-преподавателей. Создавалось впечатление, что он радовался вопросам и запомнился всегда обращенным к доске, на которой докладчик изображал свои результаты. От него всегда исходила конструктивная критика ( в отличие от научного руководителя, от которого часто исходила критика и неконструктивная). Его возражения были аргументированы («*я не понимаю, как вы можете утверждать такое, когда вот этот контрпример показывает обратное*»). В свою очередь, он не стеснялся подойти и сказать мне — только начинавшему исследователю — слова благодарности за представленный ему материал по изучению какой-нибудь проблемы. Возможно, это было следствием его научной щепетильности, он очень переживал неатрибутированное заимствование его научных соображений. Впоследствии, увидев в одной моей статье благодарность ему за ее обсуждение, Андрей Геннадиевич с улыбкой сказал: «Теперь я несу за вас моральную ответственность». К сожалению, наши дальнейшие пути разошлись...

Его высказывания на студенческих семинарах и расширяли наши научные горизонты, и имели методологический смысл. Помнится, как он комментировал обстоятельное сообщение о сложном механическом процессе, в котором один из наших научных руководителей предложил какую-то аналогию рассматриваемой им проблемы сплошной среды с задачей общей механики. Андрей Геннадиевич уточняюще спросил, вы предлагаете все процессы в сплошных средах предварительно осмыслить на поведении маятников, колесных тележек, грузиков на пружинках, на гибких нерастяжимых нитях, на поверхностях со скольжением и т.п. Умел он и отнестись к ситуации с юмором — запомнилось, как он прокомментировал сообщение о проявлении внутренних волн в океане: корабль работает винтом, но не движется — его винт возбуждает лишь внутренние волны. Что делать?! «*А надо кого-нибудь за борт бросить, и он эти волны руками перебултыхает*» — предложил, смеясь, Андрей Геннадиевич и сопроводил свое предложение активной жестикуляцией. Бывал он весело строг, помнится, как он сказал моему научному руководителю, предлагавшему поставить мне высокую оценку за курсовую работу авансом, с условием в будущем припомнить возможные ошибки: «*И ему припомним, и тебе припомним*!»

Оригинально принимал Андрей Геннадиевич экзамен по своему спецкурсу: он высыпал на стол перед нами, стоявшими кучей в почти 30 человек вокруг, экзаменационные билеты и предложил выбирать их кому какой приглянулся с правом одной замены не понравившегося билета. Третий, заранее предупредив об этом, брать он уже не разрешал и за такие попытки, зорко следя за соблюдением этого условия, несмотря на бурность происходящего, немедленно давал по рукам.

Его научным методом был сдержанный академизм (отличающий, на мой взгляд, воспитанников естественных факультетов Московского университета от получивших образование в других вузах). Оставшись, после ухода из жизни Л. И. Седова, «главным механиком» в Математическом институте имени В.А. Стеклова, А.Г. Куликовский был привлечен к написанию коллективного труда о математической «составляющей» крупнейших достижений цивилизации [1], собравшей короткие тексты с демонстрацией жизненной необходимости для человечества математических исследований. Андрей Геннадиевич кратко изложил свое видение математических моделей «царицы» наук — механики. Он определил ее прежде всего, как науку о движении и равновесии тел и сплошных сред под действием сил различной природы и о взаимодействиях, процессах, которые сопутствуют этим движениям. Лишь во вторую очередь им было указано, что ряд разделов современной механики связан с основным значением самого слова «механика» у древних греков — наука о машинах, о механизмах, что современная механика также имеет приложением создание новых летательных аппаратов, судов, автомобилей и т.д., что в этой связи развились новые направления механики — создание управляющих программ для этих аппаратов. Им было отмечено также, что предметом механики стало теперь и прогнозирование погоды, и конструирование новых материалов, и биомеханика (здесь в качестве примера было приведено изучение механиками кровообращения и у здоровых, и у болеющих людей). По мнению А.Г. Куликовского, основным методом исследовательской работы в механике является математическое моделирование, а главный инструмент — дифференциальные уравнения. В этой связи им сделано важное разъяснение о том, что необходимым требованием к математической модели является перспектива получения на ней отражающих существо исследуемого процесса результатов, отсутствие же решений поставленной задачи свидетельствует о несоответствии модели описываемому ею процессу и требует корректировки модели. При том, что существуют стандартные, общеупотребительные модели (материальная точка, абсолютно твердое тело и т.п.), вводятся новые модели сред и их взаимодействия –диффузия, поток тепла и т.п.; искусство ученого механика состоит в выборе наиболее простой описывающей процесс модели. Андреем Геннадиевичем были приведены два примера –кумуляция может моделироваться моделью идеальной жидкости (настолько действие сил инерции превосходит прочностные характеристики материалов, прожигающих один другой), а попадающая в водяную струю пуля разбивает ее не на капли, а именно на куски (!). Им отмечено возникновение и развитие разделов механики для сложных сред и разнообразных воздействий (сам А.Г. Куликовский стоял у создания магнитной гидродинамики). По мнению А.Г. Куликовского, четкой границы между математиками и механиками нет, и предметом особой гордости математиков являются приложения их результатов в механике (обратное им не указано). Отмечена особенность работы ученого–механика — стремление понять внутренние механизмы явления и, часто полагаясь на интуицию, использовать и те модели, для которых не доказаны теоремы существования и единственности решения (таковы, например, уравнения Навье-Стокса). Сложное переплетение математики и механики требует применение всех средств современной математики, разработки новых моделей.

Сказанное неброско. В эти слова надо вчитываться...

Довольно выпукло выглядит написанное А.Г. Куликовским в сравнении с текстом С.П. Новикова о связи математики и теоретической физики, он опубликован в той же монографии (статья «Теоретическая физика и современная математика»). Теоретическая физика объявлена Сергеем Петровичем как всегда рассматривавшаяся (правда, в некотором роде) «математика реального мира», как основной источник математических идей начиная с XVII (!) века, как основная движущая сила для 90% математиков, как основная связующая нить между математикой и другими естественными науками. Что великие лидеры теоретической физики показали способность создавать глубокие математические теории. Что язык математики и техника теоретической физики были специально разработаны как наилучшие математические инструменты для исследования проблем реальности. Что были открыты новые законы природы, на основе которых разработаны новые технологии невероятной практической эффективности, что навсегда изменило наш мир. Анализируя пути развития физики, Новиков позволяет себе высказывания: «*всем известно, какую роль сыграла решенная Ньютоном знаменитая проблема двух тел*». Им оговорено, что иногда разрабатываемые математические методы приводят к замечательным отрицательным результатам — доказательствам принципиальной неразрешимости модели. Приведены и примеры странной разрешимости — интегрируемость геодезического потока на двумерных эллипсоидах в трехмерном евклидовом пространстве (Якоби) или движение волчка со специальными параметрами в постоянном поле сил тяжести (Ковалевская). Объяснение этому, по мнению Новикова, дает создание теории солитонов. Среди других достижений математики им указано объяснение экспериментов (правда, не указано каких) топологическими методами и обратное влияние — создание теории инстантонов.

Написано ярко, высоконаучно, непонятно...

...Размышляя о своем пути в науку и дальнейшем пути в ней Андрей Геннадиевич дал очень интересные характеристики своему научному руководителю [2], Леониду Ивановичу Седову, его педагогическим приемам, поведению в научных дискуссиях и в быту.

Первое впечатление от Седова для Андрея Геннадиевича, по его признанию, было скорее отрицательным, поскольку тот полностью не соответствовал его тогдашним представлениям о том, как должен выглядеть ученый. Возможно, эти представления были влиянием определенных стереотипов художественной литературы и кино, но крупного ученого он представлял себе тогда как человека, погруженного в размышления, не очень заботящегося о своей внешности и одежде, скромного и неприхотливого в привычках. Увидел же нечто противоположное: высокий полный мужчина среднего возраста, одетый “с иголочки” в костюм из ткани какого-то необыкновенного цвета с таким же жилетом. На нем было пенсне в золотой оправе, а лицо выражало (так тогда показалось) довольство собой. Заметим здесь, что одежде А.Г. Куликовский заметно не придавал особого значения и был весьма неприхотлив в привычках (например, отказывался от рабочего места в НИИ механики и, руководя авторитетным институтским научным семинаром, был там в положении гостя).

Главное была наука. Показателен пример приема Л.И. Седовым экзамена у самого А.Г. Куликовского (рассказанный самим Андреем Геннадиевичем). Поставив оценку, Леонид Иванович высказался в том смысле, что выяснить знает ли сдававший теоретическую механику не удалось, но видно — он ее чувствует...

Сам крупный педагог, Андрей Геннадиевич, отмечал совершенно необычный характер семинаров под руководством Л.И. Седова — во время докладов и руководитель, и слушатели задавали множество вопросов докладчику, подчас совершенно неожиданных, возникали предложения, касающиеся исследования смежных вопросов. Вся эта работа велась в пользу докладчика, который таким образом получал задание и идеи для дальнейших исследований. В часто возникающих по каким-то вопросам спорах Леонид Иванович выступал более или менее на равных с остальными, можно было спорить и с ним, случалось, удавалось отстоять свою правоту: «*Но в чем не было равных с Леонидом Ивановичем — это в умении увидеть новые постановки задач, которые должны и могут быть решены. Именно поэтому у Леонида Ивановича так много учеников. Вспоминая эти семинары, я думаю, что с педагогической точки зрения они — идеальный вариант развития научной активности молодежи. Ни на каких других семинарах я не видел такого, и самому мне в последующем ничего подобного не удавалось*». Много давал его участникам аспирантский семинар Л.И. Седова — там можно было видеть, как творится наука. Андрей Геннадиевич отмечал как большую моральную поддержку умение Л.И. Седова радоваться результатам своих учеников (например, бурную радость, когда М.Л. Лидов получил общий интеграл уравнений одномерных автомодельных движений газов, связанный сохранением энтропии). Вообще поведение Л.И. Седова создавало ощущение, будто он считал, что учащиеся у него определенно умнее всех остальных (в позднем возрасте отношение к ученикам стало более критичным). Леонид Иванович не скупился для них на самые высокие эпитеты, но не ограничивался только этими словами, а очень заботился об их устройстве на работу, об улучшении жилищных условий, повышении заработной платы и т.д. В ряде случаев эти действия были просто спасительными для некоторых из них, поскольку при приеме на работу часто оказывались критичными биографические или анкетные данные. Как-то Л.И. Седов в присутствии А.Г. Куликовского сказал, что для научного наставника не любить тех учеников, которые умнее его – это очень глупая позиция, сила ученого в учениках. Поэтому Леонид Иванович не жалел ни времени, ни сил на учеников, ни научных идей для них, всего этого было у него очень много. Хотя хорошая идея — половина дела, у Л.И. Седова почти нет совместных работ с учениками. Идеи раздавались им абсолютно бескорыстно. Известно, что Леонид Иванович считал преподавание очень важным делом, а звание профессора Московского университета чуть ли не выше звания академика. Он говорил, что роль наставника в науке очень велика, ведь любом городе можно выписать научные журналы и тем создать основу для научных исследований. Однако оказывается, что наука развивается только там, где есть традиции, есть ученые, которые могут ставить задачи и растить учеников.

Показательно, что человек считает интересным, что смешным. Характеризуя Леонида Ивановича как очень остроумного человека, наделенного большим чувством юмора, Андрей Геннадиевич приводит два эпизода. Однажды, когда докладчик не явился на семинар и стало ясно, что он уже не придет, Леонид Иванович сказал: «*Ничто так не радует собравшихся как несостоявшийся семинар*». Другой случай: в старом здании МГУ неожиданно ввели пропускную систему и пришедшие на его семинар не могли попасть в здание. Леонид Иванович пошел объясняться, но ему сказали, что пропускная систем введена из-за пропадающих с вешалки пальто. На это Леонид Иванович возразил: «*На улице люди попадают под машины, но никто же не запрещает их движение*».

Автор и сам просил рассказать Андрея Геннадиевича что-нибудь смешное от себя, например, связанное с известным ему острословом и шутником Борисом Леонидовичем Рождественским, и он рассказал следующее. «*Приехал однажды Рождественский на конференцию “НеЗаТеГиУс” и свой доклад начал так: “Вот вы который год решаете проблему турбулентности, а я ее решил!” Это было очень смешно...*» [3].

При разборе архива С.С. Григоряна была найдена адресованная ему А.Г. Куликовским в далеких 60-х годах записка с предложением к участию в научном пари А.Г. Куликовский — Ю.Л. Якимов, их мнения по одной из научных проблем расходились. Спорить Андрей Геннадиевич предложил ... на бутылку.

...Приятно вспомнить, что автору удалось продвинуться в исследовании проблем, входящий в круг интересов А.Г. Куликовского, например, нелинейных околорезонансных колебаний газа в канале, предложив принципиально новый подход. Оказалось, что усложнение модели процесса –учет вязкости и теплопроводности среды — позволяет ввести возникающие при развитии околорезонансных колебаний ударные волны (обычно представляемые разрывами параметров среды) как быстрые непрерывные изменения параметров течения, сделав весь процесс математического моделирования течения единым, непривлекающим дополнительных соображений (правила площадей и т.п.). Это позволило показать возможность существования автоколебательных режимов в процессах такого рода и описать условия их существования [4].

В свое время Л.И. Седов, рассказывая о первых годах своей научной деятельности под руководством С.А. Чаплыгина в ЦАГИ, писал: «был микроклимат такого рода, что главное есть наука» [5]. На таких же позициях стоял и А.Г. Куликовский, по возможности открещиваясь от околонаучных разборок. Его взгляд со стороны претендовал на независимость суждений, соблюдаемые им принципы придавали его словам свою объективность.

Андрей Геннадиевич умел поддержать... В непростом пути к защите кандидатской диссертации, слыша заявления, что Куликовский вас завалит, поддержкой автору стали как раз слова Андрея Геннадиевича: «*У вас нормальная диссертация. Защищайтесь*». Запомнилось, как попытавшись пожаловаться ему на трудности коммутации с научным руководством, я услышал в ответ: «*А вы знаете, многие девушки в науке заканчивают больницей? Но вы же молодой человек, а не девушка! Вам легче*». И мне, действительно, стало много легче...

Отрадно, что на последнем юбилее А.Г. Куликовского, его 90-летии, удалось высказать ему слова благодарности за вложенные в нас знания, чувство уважения к науке, душевные силы. Думается, через подаренную ему тогда толстовку с символикой Московского университета удалось донести до него наше ответное тепло.

**Светлая память!**

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** 100%.
**Конфликт интересов.** Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В.Ломоносова.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** 100%.
**Competing interests.** The author declares that he has no competing interests.
**Funding.** The study was carried out within frameworks of the state assignment of the Lomonosov Moscow State University.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Андреев Н. Н., Коновалов С. П., Панюнин Н. М. Математическая составляющая. М. : Фонд «Математические этюды», 2019. С. 367.

[2] Куликовский А. Г. Л. И. Седов — мои впечатления и жизнь в сфере его влияния. М. : Мемориальный кабинет Л. И. Седова в НИИ механики МГУ.

[3] Богданов А. Н. Воспоминания о Борисе Леонидовиче Рождественском. 2019. С. 106. DOI: 10.31453/kdu.ru.91304.0043.

[4] Богданов А. Н. Пример усложнения математической модели для упрощения моделирования динамических процессов в сплошной среде // Материалы XXX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, г. Кремёнки, Россия, 20-24 мая 2024. Т. 1. М. : ТОРУС ПРЕСС, 2024. С. 52–53.

[5] Седов Л.И. Беседа 7 февраля 1984 года // Математики рассказывают. М. : Минувшее, 2005.

## REFERENCES

[1] Andreev N. N., Konovalov S. P., Panyunin N. M. Mathematical component. Moscow : Foundation "Mathematical Etudes 2019. P. 367.

[2] Kulikovsky A. G. L. I. Sedov — my impressions and life in the sphere of his influence. Moscow : Memorial office of L. I. Sedov in the Research Institute of Mechanics of Moscow State University.

[3] Bogdanov A. N. Memories of Boris Leonidovich Rozhdestvensky. 2019. P. 106. DOI: 10.31453/kdu.ru.91304.0043.
[4] Bogdanov A. N. An example of complicating a mathematical model to simplify the modeling of dynamic processes in a continuous medium // Proceedings of the XXX International Symposium «Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media» named after A.G. Gorshkov, Kremënki, Russia, May 20-24, 2024. Vol. 1. Moscow : TORUS PRESS, 2024. P. 52–53.
[5] Sedov L.I. Conversation on February 7, 1984 // Mathematicians Tell. Moscow : The Past, 2005.

DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.004 EDN: UUIQAD
Научная статья УДК: 626.814

*Р. К. Багбеков, А. Н. Богданов, Ю. В. Фельдшеров, А. А. Шахназаров*

# ОПЫТ ВНЕДРЕНИЯ ГИДРОИЗОЛИРУЮЩИХ ПОЛИМЕРНО-МИНЕРАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СОЗДАНИИ ИСКУССТВЕННЫХ ВОДОЕМОВ В ПОЛЕВЫХ УСЛОВИЯХ КАЗАХСТАНА

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия*

***Аннотация.*** Приводятся результаты практического применения отработанных в лабораторных условиях технологий водосбережения на основе внедрения в почву полимерно-минеральных смесей, образующих водонепроницаемые слои. Указанные мероприятия проводятся в целях обустройства разномасштабных искусственных водоемов (водохранилищ) в полевых условиях засушливых районов и районов сезонного природного поступления воды на земли, используемые в сельскохозяйственных целях.

***Ключевые слова***: искусственные водоемы, орошение, водоснабжение, водосбережение, полимерные материалы, минерально-полимерные смеси, строительство водохранилищ, экология

**Багбеков Ринат Каримович**, научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова

**Богданов Андрей Николаевич**, ведущий научный сотрудник НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова; e-mail: bogdanov@imec.msu.ru; https://orcid.org/0000-0001-9541-0579

**Фельдшеров Юрий Владимирович**, ведущий инженер НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова

**Шахназаров Александр Арамович**, заведующий лабораторией НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова

***для цитирования:*** *Багбеков Р. К., Богданов А. Н., Фельдшеров Ю. В., Шахназаров А. А.* Опыт внедрения гидроизолирующих полимерно-минеральных материалов при создании искусственных водоемов в полевых условиях Казахстана // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 15–28. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.004. EDN: UUIQAD





*Поступила: 01.02.25; принята в печать: 12.04.25; опубликована: 17.06.25.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.004* *EDN: UUIQAD*
*Research Article*

*R. K. Bagbekov, A. N. Bogdanov, Yu. V. Feldsherov, A. A. Shakhnazarov*

# EXPERIENCE OF IMPLEMENTATION OF WATERPROOFING POLYMER-MINERAL MATERIALS IN CREATION OF ARTIFICIAL WATER RESERVOIR IN FIELD CONDITIONS OF KAZAKHSTAN

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

***Abstract.*** The article presents the results of practical application of water conservation technologies tested in laboratory conditions based on introduction of polymer-mineral mixtures into the soil, forming water-impermeable layers. The specified measures are carried out for the purpose of arrangement of different-scale artificial reservoirs (water reservoirs) in the field conditions of arid regions and regions of seasonal natural water inflow to lands used for agricultural purposes.

***Keywords***: artificial reservoirs, irrigation, water supply, water conservation, polymeric materials, mineral-polymer mixtures, construction of reservoirs, ecology.

**Rinat K. Bagbekov**, Research Fellow, Lomonosov Moscow State University

**Andrey N. Bogdanov**, Leading Research Fellow; e-mail: bogdanov@imec.msu.ru; https://orcid.org/0000-0001-9541-0579

**Yuri V. Feldsherov**, Leading Engineer, Lomonosov Moscow State University

**Alexander A. Shakhnazarov**, Head of Laboratory, Lomonosov Moscow State University

***to cite this article:*** *Bagbekov R. K., Bogdanov A. N., Feldsherov Yu. V., Shakhnazarov A. A.* Experience of implementation of waterproofing polymer-mineral materials in creation of artificial water reservoir in field conditions of Kazakhstan // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 15–28. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.004



*Received: 01.02.25; accepted: 12.04.25; published: 17.06.25.*

**Введение.** В настоящее время этап перехода от инвентаризации природы к управлению землепользованием считается уже пройденным [1]. В этой связи одним из актуальных направлений прикладной механики природных процессов становится поиск методов решения проблем предшествующего недальновидного природопользования, их катастрофических последствий, ставших широко распространенным бедствием. Одним из существенных проявлений современного экологического кризиса является истощение пресных вод во многих земледельческих регионах.

В условиях современных реалий проведения научно-исследовательских работ и применения их результатов требуется не только теоретический вывод из проведенного исследования, но и значимый практический результат от его последующего внедрения.

В природопользовании особо важное значение в настоящее время приобретает именно рациональное использование природных ресурсов. Правильно решенная задача, как и успешно преодоленная проблема в этой области дают надежный ориентир в разрешении вопросов, поставленных практическим земледелием и водопользованием и связанными с ними отраслями народного хозяйства.

Одним из вариантов обустройства долговременных водоаккумулирующих и водосберегающих бассейнов в полевых условиях является создание водонепроницаемых слоев на дне и боковых поверхностях имеющегося природного или искусственно созданного водоема, препятствующих потерям воды от ее просачивания через границы водоема в грунт. Этот способ является перспективным и более предпочтительным, поскольку другие известные способы использования для водозадержания искусственных пленок, природных пород и т.п. недолговечны, уязвимы к механическим повреждениям, недешевы.

При том, что преимущества строительства искусственных водоемов очевидны, они не указаны среди предлагаемых технических способов восполнения недостатка пресной воды, в то время как приведены следующие варианты [1]:

- Опреснение соленой воды;
- Межбассейновое перераспределение речного стока (поворот рек!);
- Использование айсбергов Антарктики;
- Использование высокогорных ледников путем организации форсированного снеготаяния;
- Бурение сверхглубоких скважин;
- Создание искусственных подземных резервуаров воды; к преимуществам этого технического решения отнесены снижение потерь воды на испарение, перевод поверхностных стоков в подземные (особенно в периоды избытка атмосферных осадков), использование трещиноватости плотных горных пород, создание специальных гидравлических ситуаций откачкой воды из выбранных слоев и усиление ее фильтрации в другие слои.
- Искусственное увеличение атмосферных осадков;
- Очистка сточных вод;
- Организация оборотного водоснабжения;

- Экономия водных ресурсов.

Аккумуляции воды в открытых водоемах косвенно способствует возникновению ряда дополнительных преимуществ такого водопользования. К ним можно отнести улучшение физико-химических свойств воды, например, ее обезжелезивание (подземные воды часто имеют повышенное содержание растворенного железа; в условиях открытого контакта воды с воздушной атмосферой оно естественным образом окисляется атмосферным кислородом и выпадает в виде твердых осадков), очищение воды от механических примесей при отстаивании и т.д.

**1. Материалы и методы исследования.** Авторы исходили из следующего. Полимерно-минеральные материалы (далее – ПММ) создаются в НИИ механики МГУ уже несколько десятилетий [2], на них получены патенты [3]. Давая этим материалам общую характеристику, важно отметить их уникальность. По своему составу созданные ПММ есть твердое взаимодействующее с водой вещество, с присущими только ему свойствами – оно не горит, не имеет токсичных свойств, не подвергается разложению микроорганизмами. Его основу составляют глинообразный минерал и органический полимер, во взаимодействии начинающие играть роли, приводящие к проявлению у образующейся смеси гидронепроницаемых свойств, необходимых для ее использования в гидроизоляционных целях, для которых она была создана.

К настоящему времени создан ряд ПММ с гидроизолирующими свойствами.

1. Универсальный ПММ – “Кавеласт” [4]. Уникальной является его способность при достаточном увлажнении увеличивать свой пространственный размер (объем) до 50 раз. Водопоглощение не зависит от размера составляющих ПММ “Кавеласт” частиц, физико-химическое качество воды (жесткость, щелочно-кислотность и т.п.) влияет на скорость водопоглощения при набухании (наибольшее наблюдается у дистиллированной), но не бывает критически значимым. Изменение электролитических характеристик воды (наличие электрозаряженных частиц) также не является определяющим в этих работах.

Составляющие ПММ “Кавеласт” компоненты, глина и полимер, по разному образуют и, затем, стабилизируют этот материал. После его формирования он физически не является больше ни глиной, ни полимером, ни их простой механической смесью. Минеральные частицы глины можно рассматривать как матричную основу, в сухом состоянии обеспечивающую высокую механическую прочность ПММ “Кавеласт”, а при увлажнении превращая его в твердое пластично деформируемое тело в гелеобразном состоянии.

В свою очередь, молекулы полимера обеспечивают прочные связи всех составляющих частей в формацию устойчивых композитных макрочастиц с единой микрогетерогенной структурой. Сближение глино-полимерных флокул (*lat.* flocculi клочья, хлопья) – относительно крупных хлопьевидных скоплений твердых примесей в жидкости – путем удаления разделяющей их воды приводит к установлению дополнительных связей между всеми составляющими ПММ “Кавеласт” компонентами. По-видимому, эти межфлокулярные связи не являются химическими ковалентными, а представляются действием межмолекулярных сил Ван-дер-Ваальса – Лондона. Такая целостная микрогетерогенная сетчатая структура присуща и сухому, и влагонасыщенному состоянию ПММ “Кавеласт” в гелеобразной форме. Отметим, что вода в данном случае не выступает ни в качестве растворителя, ни в качестве смазки. Самопроизвольный переход частиц ПММ “Кавеласт” мелкой фракции в окружающую водную среду предотвращается межмолекулярными связями. Наличие свободных молекул полимера в воде при использовании ПММ “Кавеласт” также не наблюдалось. Сохранение целостности структуры и всего комплекса свойств ПММ “Кавеласт” при сильном измельчении, последовательном увлажнении и высушивании, нагревании до температур плавления полимера, замораживании и оттаивании считается определенно установленным. Лабораторные исследования показали, что связывание молекул полимера с минеральными частицами является необратимым и осуществляется адсорбционными силами.

2. После разработки ПММ первого поколения по инициативе специалистов НИИ механики МГУ были продолжены работы по созданию новых ПММ целевого назначения. Эти работы преследовали также цели упрощения технологии промышленного выпуска материалов, удешевления их производства, улучшения качества в достижении решения именно назначенных задач (индивидуализация целей ПММ) и т.д.

Для выполнения высокоэффективной гидроизоляции подземных сооружений в промышленно-гражданском строительстве, строительстве гидротехнических сооружений –дамб, плотин, прокладке каналов, обустройстве водохранилищ, резервуаров и т.д. был разработан ПММ “Натлен”. Этот ПММ представляет собой сухую смесь из фракционно отобранных песков и водонабухающих добавок. ПММ “Натлен” промышленно выпускается согласно ТУ 5745-012-01373565-02, сертифицирован, имеет санитарно-эпидемиологическое заключение). Гидроизолирующие свойства ПММ “Натлен” основаны на других принципах, нежели у ПММ “Кавеласт”. Внесенный в сухом виде в грунт, при поступлении к нему воды он растворяется в ней, образую гелеобразную гидронепроницаемую смесь.

К основным преимуществам ПММ “Натлен” относятся:

- ПММ “Натлен” имеет высокую эффективность как водоизолирующий материал, слой ПММ толщиной 5 см выдерживает статическое давление до 100 м вертикального водяного столба;
- ПММ “Натлен” допускает укладку на влажные поверхности;
- ПММ “Натлен” не образует трещин при статических и динамических нагрузках, не имеет стыков;
- ПММ “Натлен” не токсичен, экологически чист;
- ПММ “Натлен” имеет высокую стойкость к неполярным жидкостям (нефть, масла, бензин) и другим воздействиям;

- ПММ “Натлен” морозостоек, выдерживает не менее 200 циклов промерзания/оттаивания, пучение при промерзании находится в промежутке показателей песка и супеси.

Специалистами НИИ механики МГУ была разработана промышленная технология высокопроизводительного выпуска нужного количества ПММ, не требующая специализированного оборудования, проведения трудоемких подготовительных работ или использования сложных технологических процессов и процедур.

Технология выработки ПММ была усовершенствована путем введения специальных добавок, хорошо показала себя также предварительная обработка составляющих компонентов –глины и полимера.

Цвет ПММ (хотя он совсем несущественен для его успешного применения в гидроизоляционных целях) задается оттенками исходной минеральной основы (сырья).

Разработана модификация ПММ “Натлен” – ПММ “Натлен-2” – для приготовления гидроизолирующей пасты, предназначенной для ликвидации течей в подземных сооружениях (коллекторы, тоннели метрополитена, шахты, убежища гражданской обороны, подземные хранилища, гаражи и т.п.). В готовом состоянии паста на основе ПММ “Натлен-2” не твердеет и всегда находится в мягко-пластичном состоянии, допускает изменение характеристик вязкости в широких пределах, не образует трещин при статических и динамических нагрузках, имеет высокую проникающую и тампонирующую способность, свободно подается в назначенное место по шлангам подачи и не засоряет их.

Для гидроизоляционных работ ПММ “Натлен” постоянно применяется с 2000 года. После его разработки специалистами НИИ механики МГУ был проведен цикл лабораторных исследований гидроизолирующих свойств смесей природного грунта разного качества и свойств с ПММ “Натлен”, изготовленным по специальной технологии. Оптимальные параметры водонепроницаемого слоя с использованием ПММ “Натлен” для создаваемого водоема были ранее определены в ходе лабораторных экспериментов.

**2. Экспериментальная отработка нормативов на толщину гидроизолирующего слоя.** Математическое моделирование процессов фильтрации в природных грунтах достаточно сложно, требует больших временных затрат и дополнительной валидации и верификации полученных сведений в эксперименте. В целях настоящего исследования в настоящее время оно полностью сведено к разработке физической модели, после чего заменено натурным экспериментом, осуществление которого вполне выполнимо в обычных лабораторных условиях на имеющейся в НИИ механики МГУ экспериментальной базе.

В целях определения влияния неблагоприятных погодных или иных природных условий была проведена серия испытаний водонепроницаемых свойств слоя при разнохарактерном изменении внешнего давления и высоты водного столба над грунтом (повышение, понижение).

Рис. 1. Лабораторная установка для определения параметров водоизолирующего слоя

Эксперименты проводились в лаборатории биомеханики. В специальную герметизированную колбу (рис. 1) с регулируемым давлением засыпался слой грунта, на который укладывался водонепроницаемый слой из смеси ПММ "Натлен" с нижерасположенным грунтом в различных пропорциях ПММ "Натлен" / грунт около базового соотношения 35 / 65. Толщина водоизолирующего слоя изначально составляла 10 см с последующим уплотнением до достижения 70% толщины исходного слоя. Давление плавно изменялось до величин, соответствующих давлению на глубине водоема от 1 до 57 м. В процессе эксперимента контролировалось просачивание воды через нижний слив колбы. Отсутствие просачивания свидетельствовало о надежном сохранении водонепроницаемым слоем своих гидрофобных свойств при данных давлениях. Эксперименты позволили провести оценку запаса прочности водонепроницаемого слоя.

Проведенные эксперименты показали надежность водонепроницаемого слоя в отношении опасности образования в нем при изменении внешнего давления механических повреждений –разрывов, трещин или им подобных дефектов, нарушающих его водоизоляционные свойства. Фиксации нарушений такого рода не было.

**3. Результаты лабораторного исследования.** Лабораторные эксперименты показали универсальность применения ПММ "Натлен" в смесях с различными природными грунтами – для всех вариантов был получен положительный эффект – уложенный слой ПММ "Натлен" определенной (рассчитанной) толщины надежно демонстрировал свои гидроизоляционные свойства.

**4. Опыт внедрения технологии создания искусственных водоемов.** Создание искусственных водохранилищ с использованием гидроизоляционных слоев из смесей ПММ и грунта на поверхностях водоема является не первым опытом для специалистов НИИ механики МГУ. Ранее, в 1991–1993 годах, искусственные водоемы с использованием ПММ "Кавеласт" были созданы в греческой префектуре (номе) Флорино (Западная Македония).

Водоемы располагались на равнинной поверхности, почва представляла собой супесь с примесью глины. Гидроизолирующий ПММ был привезен из Москвы. Поверхность водоемов составила 15 000, 55 000 и 20 000 кв. м, глубина – до 6 м, поскольку аккумулируемая вода предназначалась для полива теплолюбивых растений и должна была прогреваться. Источником воды служили артезианские скважины, водные потоки сезонного характера, атмосферные осадки.

Водоемы успешно функционируют до сих пор.

**5. Характеристика почв Отырарского района Туркестанской области Республики Казахстан.** Используя данные о почвах Казахстана [5], в отношении почвы в Отырарском районе Туркестанской области Республики Казахстан можно сказать следующее.

Рис. 2. Вид площадки обустройства водоема

В Казахстане преобладает равнинный рельеф местности, составляющий 86% территории республики. На равнинах выделяются три типа почв: черноземы (располагаются до 52°с.ш.), каштановые (между 52 и 48°с.ш.), бурые и серо-бурые (южнее 48°с.ш.). Бурые и серо-бурые почвы занимают 120 млн га, или 44% территории республики. Содержание гумуса в этих почвах 2,0-1,0%. Основное направление сельскохозяйственной деятельности на таких почвах – животноводство, земледелие возможно лишь на орошаемых землях.

Почвы южных районов Казахстана подвержены ветровой эрозии. Это обусловлено, во-первых, равнинным рельефом этой части Казахстана, во-вторых, частыми сильными ветрами и, в-третьих, легким весовым составом почвы (песчаным, супесчаным). Хозяйственная деятельность, в частности, обустройство искусственных водоемов, на таких землях требует особой тщательности в проработке предлагаемых к осуществлению мероприятий по землеустройству.

**6. Внедрение результатов исследования в Туркестанской области Казахстана.** Определение надежных характеристик гидроизоляционного слоя с использованием ПММ "Натлен" позволило в мае 2022 года создать искусственный водоем объемом 1280 куб. м.

Работа была выполнена в Отырарском районе Туркестанской области Республики Казахстан.

Геометрически водоем представлял собой перевернутую усеченную пирамиду с основанием 25x30 м и глубиной до 2,6 м. Угол наклона боковых стен от горизонта составлял не более 25,4 градусов и оказался универсален для любых типов водоемов. Такой уровень наклона боковых стенок гарантировал отсутствие сползания содержащих ПММ "Натлен" слоев с ограничивающих водоем поверхностей.

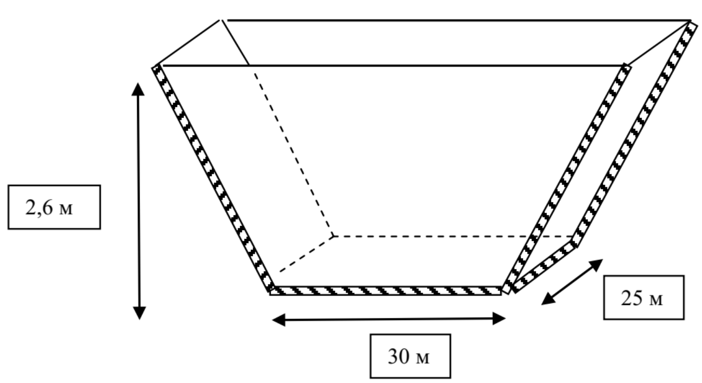



Рис. 3. Схема водоема

**7. Этапы обустройства водоема.** Выборка грунта при рытье котлована под водоем после предварительной разметки была выполнена экскаватором. Последующая планировка почвы произведена колесным бульдозером К-700 (гусеничная техника сильно нарушает целостность поверхности почвы). Выполнена доработка котлована вручную.

Перед выполнением смешивания с ПММ "Натлен" грунт предварительно просеивался через механические сита Ø 5 мм для достижения однородности смеси. Механическое смешивание грунта и ПММ "Натлен" осуществлялось в автоматических бетономешалках. Уложенный слой ПММ "Натлен" толщиной 10 см уплотнялся ручным катком весом 150 кг шириной 1,5 метра до толщины 70% исходного. После такой укатки механическое воздействие от прохода человека средней массы тела на укатанном слое ПММ "Натлен" не оставляло следа. Заметим здесь, что заполняющая водоем вода в дальнейшем оказывает дополнительное уплотняющее воздействие. Укатанный слой ПММ "Натлен" покрывался слоем почвы такой же толщины. Дно водоема было дополнительно забетонировано для удобства дальнейшего удаления осадков, выпадающих из природной воды или заносимых в водоем другими путями. Был также обустроен боковой бетонный заход (заезд) в водоем. Берега водоема были дополнительно укреплены бетонной отмосткой шириной до одного метра по всему периметру.

Отметим ряд общих требований и рекомендаций к проведению водоаккумулирующих мероприятий. Работы по обустройству водоема невозможно проводить во время сезона дождей из-за набухания почвы. В засушливые периоды жаркого сезона грунт превращается в в легко переносимую ветрами пыль, неподлежащую уплотнению трамбовкой. Наилучшие условия для проведения работ в Казахстане с октября по февраль.

Конкретные особенности строительства водоема в соответствие с имеющимися условиями местности, почвы, климата и т.д. определяются специалистами по строительству. Основными обстоятельствами в общем случае являются два обстоятельства.

- Во-первых – близость естественных источников воды –рек, каналов, артезианских скважин и т.п. Источники воды могут быть сезонными. На случаи засушливых сезонов следует предусмотреть дополнительные возможности поступления воды – из подземных источников.
- Во-вторых – близость земель, орошение которых планируется.
- Среди прочих обстоятельств, которые следует учесть – удаленность древесных насаждений, поскольку водоём будет засоряться опадающей листвой и терять свои качества.

Использованная в описанном случае технология предельно проста. Заполнение обустроенного водоема производилось из двух артезианских скважин глубиной 90 метров и через трубу Ø100 мм из близ расположенного оросительного канала.

Рис. 4. Котлован водоема. Для возможности очистки дна водоема от постороннего мусора был предусмотрен мостовой заход со спусковыми лестницами, опоры которого видны на фото

Для контроля эффективности работы водонепроницаемого слоя рядом с бассейном был выкопан колодец такой же, что и бассейн, глубины. При заполнении бассейна осуществлялось заполнение водой и колодца, после чего производились наблюдения сохранности воды в нем. Вода быстро уходила из него в почву.

При том, что ПММ “Натлен” относительно слабо набухает в соленой или жесткой воде, это обстоятельство не является и не явилось препятствием в реализации поставленной задачи успешного создания и дальнейшего длительного устойчивого функционирования созданного водоема, а требует только перерасчета необходимого количества ПММ “Натлен” и достаточного времени на набухание.

Площадь водной поверхности бассейна составила 775 кв.м. По данным эксплуатирующей организации, ТОО "НПЦ инновационных технологий KZ убыль воды от испарения в августе 2023 года составила 78 куб.м (6%) при средней температуре 32÷36 $^0$C, влажности 18÷29%, скорости ветра 4÷5 м/с.

Рис. 5. Укатка ручным катком боковых откосов котлована

Рис. 6. Бетонирование дна водоёма

Авторы особо подчеркивают то обстоятельство, что при любой, возможно немалой, себестоимости использованного при обустройстве водоема ПММ "Натлен", основным доводом в пользу его применения является обеспечиваемая им долговечность функционирования сооруженного по такой технологии водоема, позволяющее при минимальных расходах на дальнейшее техническое обслуживание бассейна иметь стабильный запас воды. Такие перспективы гарантируют экономическую оправданность средств, потраченных на обустройство водоема.

Рис. 7. Водоем в Отырарском районе Туркестанской области Республики Казахстан в процессе заполнения. Видна конфигурация береговых откосов, береговая бетонная отмостка, съезд в водоем, ограда водоема.

**8. Заключение.** Разработанная экспериментальная методика определения параметров водоизолирующего слоя из смесей грунта и ПММ позволяет надежно рассчитывать параметры водонепроницаемых слоев для любых типов предоставленных почв с площадей, предусмотренных к обустройству искусственного водоема.

Разработанную технологию создания искусственных водоемов можно успешно применять для обустройства водоотводящих каналов, ремонта и укрепления их стенок и т.п.

Важным обстоятельством является экологическая безопасность примененных полимерно-минеральных материалов.

Проведенные работы должны способствовать дальнейшему технологическому прогрессу в сфере рационального водопользования.

Создание искусственного успешно функционирующего водоема приводилось в пример удачного внедрения передовых технологий рационального землепользования на проведенных в 2023 году в Казахстане региональных научных мероприятиях [6].

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В.Ломоносова.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** The study was carried out within frameworks of the state assignment of the Lomonosov Moscow State University.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Розанов Б. Г. Основы учения об окружающей среде: Учеб. пособие. Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 376.

[2] Цатурян А. К., Шахназаров А. А. Лаборатории механики природных процессов и биомеханики // Институт механики 60 лет / Под ред. Г. А. Любимов. Москва : КДУ, Университетская книга, 2019. С. 290.

[3] Григорян С. С., Гулакян К. А., Шахназаров А. А. Способ получения полимерминерального композита. 1992. Бюллетень №3, 23.01.1992.

[4] Кавеласт: достижения и перспективы / С. С. Григорян [и др.] // Избранные проблемы современной механики / Под ред. В. А. Садовничий. Москва : Издательство Московского университета, 2011. Т. 2. С. 180–183.

[5] Агрогидрологические свойства почв Казахстана : Справочник / Под ред. В. Г. Затыльников, др. ; Каз. респ. упр. по гидрометеорологии и контролю природ. среды, Алма-Ат. гидрометеорол. обсерватория. Алма-Ата : Б. и., 1980. С. 197.

[6] Богданов А. Н. Современные технологии рационального водопользования для народного хозяйства Средней Азии и Казахстана // Международный Научно-производственный семинар "Внедрение полимерно-минеральных материалов в сельское хозяйство Туркестанской области". Туркестан, Kazakhstan, 2023. ноябрь.

## REFERENCES

[1] Rozanov B. G. Fundamentals of Environmental Studies: Textbook. Moscow : Moscow University Press, 1984. P. 376. (In Russian).

[2] Tsaturyan A. K., Shakhnazarov A. A. Laboratories of Mechanics of Natural Processes and Biomechanics // Institute of Mechanics: 60 Years / Ed. by G. A. Lyubimov. Moscow : KDU, Universitetskaya Kniga, 2019. P. 290. (In Russian).

[3] Grigoryan S. S., Gulakyan K. A., Shakhnazarov A. A. Method for Producing Polymer-Mineral Composite. 1992. (Bulletin No. 3, 23.01.1992. In Russian).

[4] Kavelast: Achievements and Prospects / S. S. Grigoryan [et al.] // Selected Problems of Modern Mechanics / Ed. by V. A. Sadovnichy. Moscow : Moscow University Press, 2011. Vol. 2. P. 180–183. (In Russian).

[5] Agrohydrological Properties of Soils in Kazakhstan: Reference Book / Ed. by V. G. Zatylnikov [et al.] ; Kazakh Republican Administration for Hydrometeorology and Environmental Monitoring, Alma-Ata Hydrometeorological Observatory. Alma-Ata : N.P., 1980. P. 197. (In Russian).

[6] Bogdanov A. N. Modern Technologies of Rational Water Use for the National Economy of Central Asia and Kazakhstan // International Scientific and Industrial Seminar "Implementation of Polymer-Mineral Materials in the Agriculture of Turkestan Region". Turkestan, Kazakhstan, 2023. November. (In Russian).

*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.011* *EDN: RNUJXW*
*Научная статья* *УДК: 539.374*

*А. В. Доль*[1], *М. Н. Михин*[2]

# РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ БИОМЕХАНИКИ АТЕРОСКЛЕРОТИЧЕСКИХ БЛЯШЕК И ИХ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского , Саратов, Россия*

[2] *Филиал Российского государственного гуманитарного университета, Домодедово, Россия*

***Аннотация.*** В работе рассматривается круг вопросов, связанных с изучением стеноза сонных артерий. Для оценки риска отрыва бляшки методами биомеханики необходимо знать модули упругости компонентов атеросклеротических бляшек. In vivo они могут определяться на основе значения чисел Хаунсфилда ($HU$) на компьютерной томограмме (КТ). В ходе серии экспериментов (для 26 пациентов) по одноосному сжатию удаленных в ходе эндартерэктомии атеросклеротических бляшек были определены модули Юнга рассматриваемых образцов, после чего для каждой бляшки по компьютерной томограмме определялось среднее значение чисел Хаунсфилда. На основе полученных данных строилась регрессионная зависимость между модулями Юнга и числами Хаунсфилда. Полученная регрессионная зависимость позволяет определять механические характеристики отдельных структурных элементов бляшек по КТ и использовать их при биомеханическом моделировании для оценки риска отрыва и дальнейшего тромбообразования.

***Ключевые слова***: модуль упругости, числа Хаунсфилда, атеросклероз, бляшка, статистика, регрессия.

**Доль Александр Викторович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник учебной лаборатории цифровых медицинских технологий; `e-mail:` dolav86@yandex.ru; `https://orcid.org/0000-0001-5842-1615`; AuthorID: 601135

**Михин Михаил Николаевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин; `e-mail:` mmikhin@inbox.ru; AuthorID: 493518

***для цитирования:*** *Доль А. В., Михин М. Н.* Регрессионные модели биомеханики атеросклеротических бляшек и их статистическая оптимизация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 29–39. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.011. EDN: RNUJXW



*Поступила: 10.02.25;* *принята в печать: 22.04.25;* *опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.011* *EDN: RNUJXW*
*Research Article*

*A. V. Dol*[1], *M. N. Mikhin*[2]

# REGRESSION MODELS OF ATHEROSCLEROTIC PLAQUE BIOMECHANICS AND THEIR STATISTICAL OPTIMISATION

[1] *Saratov State University, Saratov, Russia*

[2] *Russian State University for the Humanities, Domodedovo, Russia*

***Abstract.*** The paper addresses a number of issues related to the study of carotid artery stenosis. To assess the risk of plaque detachment by biomechanical methods, it is necessary to know the elastic moduli of atherosclerotic plaque components. They can be determined in vivo from the value of the Hounsfield units (HU) on a computed tomography (CT) scan. In a series of experiments (26 patients), the Young's moduli of the specimens considered were determined by uniaxial compression of atherosclerotic plaques removed during endarterectomy, and then the average Hounsfield unit for each plaque was determined on CT. A regression relationship between Young's modulus and Hounsfield units was constructed from the data obtained. The obtained regression relationship allows us to determine the mechanical properties of individual structural elements of plaques by CT and use them in biomechanical modelling to assess the risk of detachment and further thrombosis.

***Keywords***: elastic modulus, Hounsfield units, atherosclerosis, plaque, statistics, regression.

**Alexander V. Dol**, PhD in Physics and Mathematics; `e-mail:` dolav86@yandex.ru; `https://orcid.org/0000-0001-5842-1615`; AuthorID: 601135

**Mikhail N. Mikhin**, PhD in Physics and Mathematics; `e-mail:` mmikhin@inbox.ru; AuthorID: 493518

***to cite this article:*** *Dol A. V., Mikhin M. N.* Regression models of atherosclerotic plaque biomechanics and their statistical optimisation // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 29–39. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.011



*Received: 10.02.25;* *accepted: 22.04.25;* *published: 17.06.25.*

**1. Введение.** По данным Министерства здравоохранения РФ, на десять тысяч человек населения первичная регистрация случаев заболевания сердечно-сосудистой системы составляет около 312-ти единиц [1, 2]. При этом по данным исследователей из Центрального научно-исследовательского института организации и информатизации здравоохранения, смертность от болезней системы кровообращения составляет 28% у мужчин и 31% у женщин [3].

Стеноз сонных артерий, обусловленный атеросклеротическим поражением, является одной из самых распространенных патологий сосудов шеи, и служит одним из факторов возникновения сопутствующих патологий, таких как аневризмы сосудов головного мозга и церебральной недостаточности [4–7]. При этом одним из важных аспектов прогнозирования возникновения осложнений является оценка риска отрыва атеросклеротической бляшки с последующим образованием тромба и закупоркой сосудов, лежащих выше по артериальному руслу, что, в свою очередь, может приводить к транзиторно-ишемическим атакам или ишемическому инсульту [8,9]. В клинике стабильность бляшки определяется на основе данных о ее составе и примерной плотности компонентов, которые могут оцениваться в ходе ультразвукового исследования (УЗИ) [10–12]. Как правило, бляшка имеет относительно мягкую липидную составляющую, близкую по плотности к артериальной стенке, а также плотное и жесткое кальцинированное ядро. Для оценки риска отрыва бляшки методами биомеханики необходимо знать модули упругости компонентов атеросклеротических бляшек. In vivo они могут определяться на основе значения чисел Хаунсфилда ($HU$) на компьютерной томограмме (КТ): этот параметр определяется по оттенку серого цвета и характеризует плотность тканей, при этом уже существуют работы с построенными регрессионными зависимостями модулей Юнга ($E$) от $HU$ [13]. Чтобы построить аналогичную зависимость, необходимо провести серию экспериментов на одноосное сжатие атеросклеротических бляшек с целью определения их модуля Юнга, после чего проанализировать КТ и вычислить средние значения $HU$ для соответствующих компонентов.

Целью данной работы является построение регрессионной зависимости между модулями Юнга отдельных компонентов атеросклеротических бляшек и значениями чисел Хаунсфилда.

**2. Материалы и методы.** В ФГБУ “Российский научный центр радиологии и хирургических технологий имени академика А.М. Гранова” был проведен ряд экспериментов, направленных на исследование механических характеристик атеросклеротических бляшек разной плотности и локализации. Модуль Юнга отдельных участков бляшек определялся в ходе экспериментов по одноосному сжатию образцов, которые выполнялись не позднее 2 часов после эндартерэктомии (хирургической операции по удалению атеросклеротических бляшек). Все образцы имели форму правильного параллелепипеда или цилиндра с линейным размером в направлении оси сжатия, превышающим характерный размер поперечного сечения не менее, чем в два раза. Скорость нагружения составляла 2 мм/мин. Модуль Юнга каждого образца определялся по линейному участку кривой “напряжение-деформация” по классической формуле закона Гука для случая одноосного растяжения: $E = \sigma/\varepsilon$.

Для 26 пациентов были получены компьютерные томограммы, по которым в программе просмотра КТ определялись средние значения чисел Хаунсфилда отдельных компонент бляшек в сечениях, соответствующих разрезу сосуда, пораженного атеросклерозом.

На рис. 1 приведена характерная картина измерения чисел Хаунсфилда в кальцинированной бляшке.


Рис. 1. Результат измерения чисел Хаунсфилда

**3. Построение регрессионной модели.** Полученные значения модулей Юнга и чисел Хаунсфилда для 26 пациентов приведены в таблице 1.

Для построения регрессионной модели воспользуемся аппаратом корреляционно-регрессионного анализа [14, 15].

Наличие взаимосвязи выражается величиной коэффициента корреляции, оценкой которого является выборочный коэффициент корреляции:

$$r\left(HU,\, E\right) = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}\left(HU\right)_i E_i - \sum\limits_{i=1}^{n}\left(HU\right)_i \sum\limits_{i=1}^{n} E_i}{\sqrt{\left[n\sum\limits_{i=1}^{n}\left(HU\right)_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(HU\right)_i\right)^2\right]\left(n\sum\limits_{i=1}^{n} E_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} E_i\right)^2\right)}},$$

где $n$ – количество единиц совокупности (пациентов).

| № | Средние $HU$ | Средние модули Юнга, МПА | № | Средние $HU$ | Средние модули Юнга, МПА |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 262 | 1.200 | 14 | 398 | 1.830 |
| 2 | 373 | 1.662 | 15 | 163 | 0.110 |
| 3 | 440 | 1.540 | 16 | 128 | 0.100 |
| 4 | 342 | 1.440 | 17 | 168 | 0.210 |
| 5 | 177 | 0.330 | 18 | 138 | 0.170 |
| 6 | 130 | 0.326 | 19 | 150 | 0.460 |
| 7 | 222 | 0.415 | 20 | 140 | 0.550 |
| 8 | 179 | 0.218 | 21 | 152 | 0.550 |
| 9 | 192 | 0.200 | 22 | 165 | 0.650 |
| 10 | 180 | 0.175 | 23 | 159 | 0.440 |
| 11 | 169 | 0.190 | 24 | 295 | 0.890 |
| 12 | 230 | 0.827 | 25 | 364 | 1.130 |
| 13 | 240 | 0.860 | 26 | 344 | 1.010 |

Таблица 1. Данные по модулям Юнга и числам Хаунсфилда

В нашем случае $r\,(HU,\,E) = 0.9057$, что согласно шкале Чеддока, свидетельствует о весьма высокой зависимости между числами Хаунсфилда $HU$ и модулями Юнга $E$ [16].

Выборочный коэффициент корреляции, как и любая выборочная статистическая величина, не может рассматриваться как истинная (теоретическая) величина, так как является его точечной оценкой (т.е. функцией, зависящей от выборки). Это требует проверки выборочного коэффициента корреляции на достоверность. Для проверки выборочного коэффициента корреляции на значимость применяется критерий Стьюдента, основанный на $t$-статистике [14]

$$t = \frac{r\,(HU,\,E)}{\sqrt{1 - r^2\,(HU,\,E)}}\sqrt{n-2}. \tag{1}$$

Используя $t$-статистику (1), вычисляем расчетное значение критерия $t_{\text{расч}} = 10.47$. Далее расчетное значение критерия сравнивается с критическим (теоретическим) значением $t_{\text{кр}} = t\,(\alpha, v)$ (где $\alpha$ – заданный уровень значимости, $v = n-2$ число степеней свободы). Для уровня значимости $\alpha = 0.05$ получим

$$t_{\text{кр}} = t\,(\alpha, v) = t\,(0.05, 24) = 2.064.$$

Учитывая выполнение условия $t_{\text{расч}} > t_{\text{кр}}$, с вероятностью $\gamma = 0.95$ можно гарантировать наличие линейной взаимосвязи между числами Хаунсфилда $HU$ и модулями Юнга $E$.

Наряду с линейной регрессионной моделью построим, используя метод наименьших квадратов, другие известные регрессионные модели:

$$\widetilde{E}_{\text{лин}} = 0.00503HU - 0.46819,$$
$$\widetilde{E}_{\text{ст}} = 0.000025\,(HU)^{1.8437},$$
$$\widetilde{E}_{\text{лог}} = 1.20932\ln(HU) - 5.7978,$$
$$\widetilde{E}_{\text{гип}} = 1.9671 - \frac{255.4826}{HU},$$
$$\widetilde{E}_{\text{кв}} = 0.000002\,(HU)^2 + 0.004HU - 0.3528,$$
$$\widetilde{E}_{\text{пок}} = 0.0883 \cdot 1.0075^{HU}.$$

Тесноту взаимосвязи между числами Хаунсфилда $HU$ и модулями Юнга $E$, оценивает коэффициент (индекс) детерминации $R^2$:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(E_i - \widetilde{E}_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(E_i - \overline{E}\right)^2},$$

где $E_i$ – истинные (исходные) значения модулей Юнга, $\widetilde{E}_i$ – расчетные значения модулей Юнга, $\overline{E}$ – выборочная средняя (средняя арифметическая) чисел Хаунсфилда.

Для оптимальной регрессионной модели величина суммы квадратов отклонений истинных значений $E_i$ от расчетных значений $\widetilde{E}_i$, должна быть минимальной, т.е. удовлетворять условию

$$Q_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^{n}\left(E_i - \widetilde{E}_i\right)^2 \to \min.$$

Еще одним коэффициентом, дающим характеристику соответствия расчетных моделей реальным, является средняя ошибка аппроксимации, для расчета которой воспользуемся формулой [16]

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{E_i - \widetilde{E}_i}{E_i}\right| \cdot 100\%.$$

В таблице 2 для каждой регрессионной модели представлены коэффициент детерминации $R^2$, средняя ошибка аппроксимации $\overline{A}$ и сумма $Q$ квадратов отклонений истинных значений $E_i$ от расчетных значений $\widetilde{E}_i$.

Исходя из полученных результатов, линейную и квадратическую регрессионные модели следует признать оптимальными. Сделаем выбор в пользу линейную модель, которая в использовании гораздо проще, чем квадратическая модель.

Следует обратить внимание на большие значения средней ошибки аппроксимации для каждой регрессионной модели. В каждом случае значение средней ошибки аппроксимации превышает допустимый предел 10% [17]. Очевидно, что

| Регрессионная модель | Коэффициент детерминации | Сумма квадратов отклонений истинных от расчетных значений | Средняя ошибка аппроксимации |
|---|---|---|---|
| Линейная модель, $\widetilde{E}_{\text{лин}}$ | $R^2_{\text{лин}} = 0.820$ | $Q_{\text{лин}} = 1.226$ | $\overline{A}_{\text{лин}} = 54.6\%$ |
| Степенная модель, $\widetilde{E}_{\text{ст}}$ | $R^2_{\text{ст}} = 0.653$ | $Q_{\text{ст}} = 1.330$ | $\overline{A}_{\text{ст}} = 46.7\%$ |
| Логарифмическая модель, $\widetilde{E}_{\text{лог}}$ | $R^2_{\text{лог}} = 0.789$ | $Q_{\text{лог}} = 1.441$ | $\overline{A}_{\text{лог}} = 58.1\%$ |
| Гиперболическая модель, $\widetilde{E}_{\text{гип}}$ | $R^2_{\text{гип}} = 0.718$ | $Q_{\text{гип}} = 1.927$ | $\overline{A}_{\text{гип}} = 72.6\%$ |
| Квадратическая модель, $\widetilde{E}_{\text{кв}}$ | $R^2_{\text{кв}} = 0.821$ | $Q_{\text{кв}} = 1.222$ | $\overline{A}_{\text{кв}} = 54.8\%$ |
| Показательная модель, $\widetilde{E}_{\text{пок}}$ | $R^2_{\text{пок}} = 0.648$ | $Q_{\text{пок}} = 1.980$ | $\overline{A}_{\text{пок}} = 47.4\%$ |

Таблица 2. Коэффициенты детерминации и сумма квадратов отклонений истинных от расчетных значений регрессионных моделей.

этому есть простое объяснение. В формуле для расчета средней ошибки аппроксимации присутствуют значения $E_i$, близкие к нулю, что сильно завышает значение $\overline{A}$, вне зависимости от адекватности построенной модели.

При этом, в случае линейной модели, сделав замену *Y=E+2* (см. [15]), получим линейное уравнение регрессии:

$$\widetilde{Y} = 0.00503HU + 1.53181,$$

для которого средняя ошибка аппроксимации уже менее 10%, т.е. $\overline{A}_{\text{лин}} = 7.7\%$. Далее, произведя обратную замену *E=Y-2*, получим прежнее уравнение

$$\widetilde{E}_{\text{лин}} = 0.00503HU - 0.46819.$$

**4. Проверка значимости уравнения регрессии.** Проверим значимость линейной регрессионной модели

$$\widetilde{E}_{\text{лин}} = a_0 + a_1 HU = -0.4682 + 0.00503HU.$$

Согласно $F$-критерия Фишера нужно найти $F_{\text{расч}}$ расчетное значение критерия и $F_{\text{кр}}$ критическое значение при уровне значимости $\alpha$ и числе степеней свободы $k_2 = n - 2$ и $k_1 = 1$. Если выполняется неравенство

$$F_{\text{расч}} > F_{\text{кр}} = F\left(\alpha,\, 1, n-2\right), \qquad (2)$$

то уравнение регрессии является значимым.

Расчетное значение критерия

$$F_{\text{рас}} = \frac{R^2}{1-R^2}(n-2) = 109.6.$$

Критическое значение критерия

$$F_{\text{кр}} = F(\alpha,\, 1, n-2) = F(0,05,\, 1, 24) = 4.54.$$

На основании (2) заключаем, что линейное уравнение регрессии является значимым.

В парной линейной регрессии оценивается значимость не только уравнения в целом, но и отдельных его параметров. С этой целью по каждому из параметров определяется его стандартные ошибки параметров $m_1$ и $m_0$:

$$m_0 = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(E_i - \widetilde{E}_i\right)^2 \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(HU)_i^2}{n\sum\limits_{i=1}^{n}\left((HU)_i - \overline{HU}\right)^2}} = 0.11762,$$
$$m_1 = \sqrt{\frac{1}{n-2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(E_i - \widetilde{E}_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(HU_i - \overline{HU}\right)^2}} = 0.00048. \qquad (3)$$

Используя стандартные ошибки (3) вычисляются $t$статистики, т.е. определяется фактическое значение $t-$критерия Стьюдента:

$$t_0 = \frac{|a_0|}{m_0} = \frac{0.46819}{0.11762} = 3.98061,$$
$$t_1 = \frac{|a_1|}{m_1} = \frac{0.00503}{0.00048} = 10.46911.$$

Расчетные значения $t$-статистик превосходят критическое значение:

$$t_0 = 3.98061 > t_{\text{кр}} = 2.064;\ t_1 = 10.46911 > t_{\text{кр}} = 2.064;$$

поэтому коэффициенты $a_1$ и $a_0$ статистически значимы.

**5. Построение доверительных интервалов.** Полученное уравнение

$$\widetilde{E}_{\text{лин}} = a_0 + a_1 HU = -0.4682 + 0.005HU,$$

является оценкой истинного (генерального) уравнения регрессии

$$E = A_0 + A_1 HU.$$

Поэтому целесообразно указать интервальные оценки (доверительные интервалы) параметров $A_0$ и $A_1$.

Доверительные интервал для параметров линейного уравнения регрессии

$$A_0 \in \left(a_0 - m_0 t_{\text{кр}};\ a_0 + m_0 t_{\text{кр}}\right),$$

$$A_1 \in \left(a_1 - m_1 t_{\text{кр}};\ a_1 + m_1 t_{\text{кр}}\right).$$

С учетом значений (3) стандартных ошибок параметров $m_1$ и $m_0$, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ доверительные интервалы будут иметь вид:

$$A_0 \in (-0.71094;\ -0.22544),$$
$$A_1 \in (0.004035;\ 0.006017).$$

Это означает, что с доверительной вероятностью $\gamma = 0.95$ можно утверждать, что при увеличении $HU$ (среднего числа Хаунсфилда) на единицу средний модуль Юнга $E$ изменится в пределах от 0.004035 МПА до 0.006017 МПА.

## 6. Заключение и выводы.

- Построена регрессионная зависимость, связывающая значения чисел Хаунсфилда и модулей Юнга атеросклеротических бляшек.
- Для параметров регрессионной модели, построены доверительные интервалы, что позволяет указать диапазон изменения модулей Юнга при изменении среднего числа Хаунсфилда.
- Полученная регрессионная зависимость позволяет определять механические характеристики отдельных структурных элементов бляшки по КТ. Т.е. для конкретного пациента при необходимости уточняющего расчета могут быть определены модули Юнга всех участков бляшки.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Вклад авторов равноценен.
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Исследование выполнено в рамках Государственного задания, проект FSRR-2023-0009.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** The authors' contributions are equal.
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** The study was conducted within the framework of the State Assignment, project FSRR-2023-0009.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] High-Resolution CT Imaging of Carotid Artery Atherosclerotic Plaques / M. Wintermark [et al.] // American Journal of Neuroradiology. 2008. Vol. 29, no. 5. P. 875–882.
[2] Здравоохранение в России / С. Ю. Никитина [и др.]. Москва : Росстат, 2019. С. 170.
[3] Воробьев Р. В., Короткова А. В. Аналитический обзор проблемы здорового старения в странах Европейского региона ВОЗ и Российской Федерации // Социальные аспекты здоровья населения. 2016. № 5. С. 1–20.
[4] Li Y., Payner T. D., Cohen-Gadol A. A. Spontaneous regression of an intracranial aneurysm after carotid endarterectomy // Surgical Neurology International. 2012. Vol. 3. P. 66.
[5] Khan U. A., Shalhoub J., Davies A. H. Risk of intracerebral aneurysm rupture during carotid revascularization // Journal of Vascular Surgery. 2012. Vol. 56, no. 6. P. 1739–1747.
[6] Small, unruptured intracranial aneurysms and management of symptomatic carotid artery stenosis. North American Symptomatic Carotid Endarterectomy Trial Group / L. J. Kappelle [et al.] // Neurology. 2000. Vol. 55. P. 307–309.
[7] Российский консенсус по диагностике и лечению пациентов со стенозом сонных артерий / М. А. Чернявский [и др.] // Российский кардиологический журнал. 2022. Т. 27, № 11. С. 5284.
[8] Численное исследование влияния стеноза внутренних сонных артерий на гемодинамику артерий Виллизиева круга / А. В. Доль [и др.] // Российский журнал биомеханики. 2021. Т. 25, № 4. С. 356–368.

[9] Иванов Д. В., Доль А. В., Кузык Ю. И. Биомеханические основы прогнозирования протекания каротидного атеросклероза // Российский журнал биомеханики. 2017. Т. 21, № 1. С. 29–40.
[10] Evaluating the impact of calcification on plaque vulnerability from the aspect of mechanical interaction between blood flow and artery based on MRI / J. Benitez [et al.] // Annals of Biomedical Engineering. 2020. Vol. 49. P. 1169–1182.
[11] A convolutional neural network for automatic characterization of plaque composition in carotid ultrasound / K. Lekadir [et al.] // IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics. 2017. Vol. 21, no. 1. P. 48–55.
[12] Lou Z., Yang J., Tang L. Shear Wave Elastography Imaging for the Features of Symptomatic Carotid Plaques: A Feasibility Study // Journal of Ultrasound in Medicine. 2017. Vol. 36, no. 6. P. 1213–1223.
[13] Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads / L. V. Bessonov [et al.] // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2021. Vol. 21, no. 2. P. 182–193.
[14] Мхитарян В. С. Эконометрика. Москва : Проспект, 2015. С. 384.
[15] Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Москва : Юнити, 1998. С. 1022.
[16] Chaddock R. E. Principles and Methods of Statistics. Boston, New York, etc., 1925. P. 471.
[17] Эконометрика: учебник для вузов / Под ред. И. И. Елисеева, др. Москва : Издательство Юрайт, 2022. С. 449.

## REFERENCES

[1] High-Resolution CT Imaging of Carotid Artery Atherosclerotic Plaques / M. Wintermark [et al.] // American Journal of Neuroradiology. 2008. Vol. 29, no. 5. P. 875–882.
[2] Health Care in Russia / S. Y. Nikitina [et al.]. Moscow : Rosstat, 2019. P. 170. (In Russian).
[3] Vorobyev R. V., Korotkova A. V. Analytical Review of the Problem of Healthy Ageing in the Countries of the European Region and the Russian Federation // Social Aspects of Public Health. 2016. no. 5. P. 1–20. (In Russian).
[4] Li Y., Payner T. D., Cohen-Gadol A. A. Spontaneous Regression of an Intracranial Aneurysm after Carotid Endarterectomy // Surgical Neurology International. 2012. Vol. 3. P. 66.
[5] Khan U. A., Shalhoub J., Davies A. H. Risk of Intracerebral Aneurysm Rupture During Carotid Revascularization // Journal of Vascular Surgery. 2012. Vol. 56, no. 6. P. 1739–1747.
[6] Small, Unruptured Intracranial Aneurysms and Management of Symptomatic Carotid Artery Stenosis. North American Symptomatic Carotid Endarterectomy Trial Group / L. J. Kappelle [et al.] // Neurology. 2000. Vol. 55. P. 307–309.
[7] Russian Consensus on the Diagnosis and Treatment of Patients with Carotid Artery Stenosis / M. A. Chernyavsky [et al.] // Russian Cardiological Journal. 2022. Vol. 27, no. 11. P. 5284. (In Russian).
[8] Numerical Study of the Effect of Internal Carotid Artery Stenosis on the Haemodynamics of the Villous Circle Arteries / A. V. Dol [et al.] // Russian Journal of Biomechanics. 2021. Vol. 25, no. 4. P. 356–368. (In Russian).
[9] Ivanov D. V., Dol A. V., Kuzyk Y. I. Biomechanical Basis for Predicting the Course of Carotid Atherosclerosis // Russian Journal of Biomechanics. 2017. Vol. 21, no. 1. P. 29–40. (In Russian).
[10] Evaluating the Impact of Calcification on Plaque Vulnerability from the Aspect of Mechanical Interaction Between Blood Flow and Artery Based on MRI / J. Benitez [et al.] // Annals of Biomedical Engineering. 2020. Vol. 49. P. 1169–1182.

[11] A Convolutional Neural Network for Automatic Characterization of Plaque Composition in Carotid Ultrasound / K. Lekadir [et al.] // IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics. 2017. Vol. 21, no. 1. P. 48–55.
[12] Lou Z., Yang J., Tang L. Shear Wave Elastography Imaging for the Features of Symptomatic Carotid Plaques: A Feasibility Study // Journal of Ultrasound in Medicine. 2017. Vol. 36, no. 6. P. 1213–1223.
[13] Constructing the Dependence Between the Young's Modulus Value and the Hounsfield Units of Spongy Tissue of Human Femoral Heads / L. V. Bessonov [et al.] // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2021. Vol. 21, no. 2. P. 182–193.
[14] Mkhitaryan V. S. Econometrics. Moscow : Prospect, 2015. P. 384. (In Russian).
[15] Aivazyan S. A., Mkhitaryan V. S. Applied Statistics and Fundamentals of Econometrics. Moscow : Unity, 1998. P. 1022. (In Russian).
[16] Chaddock R. E. Principles and Methods of Statistics. Boston, New York, etc., 1925. P. 471.
[17] Econometrics: Textbook for Universities / Ed. by I. I. Eliseeva [et al.]. Moscow : Yurait Publishing House, 2022. P. 449. (In Russian).

*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.001* *EDN: VKZNGM*

*Научная статья* *УДК: 532.516.5+531.36*

*Д. К. Андрейченко, М. С. Портенко, Е. Ю. Крылова*

# УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАВАЮЩЕЙ ГИРОСТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ПЛАТФОРМЫ

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

***Аннотация.*** Предложена математическая модель пространственной гироскопической системы угловой стабилизации плавающей платформы в сферической камере с гидродинамическими двигателями стабилизации. Исследован вопрос выбора параметров плавающей гиростабилизированной платформы.

***Ключевые слова***: гироскопические системы угловой стабилизации, комбинированные динамические системы.

**Андрейченко Дмитрий Константинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем; `e-mail:` andreichenkodk@gmail.com; `https://orcid.org/0000-0003-0525-984X`; AuthorID: 63805

**Портенко Марина Сергеевна**, старший преподаватель кафедры информатики и программирования; `e-mail:` msportenko@gmail.com; `https://orcid.org/0000-0002-3946-6655`; AuthorID: 683964

**Крылова Екатерина Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики; `e-mail:` kat.krylova@bk.ru; `https://orcid.org/0000-0002-7593-0320`; AuthorID: 722982

***для цитирования:*** *Андрейченко Д. К., Портенко М. С., Крылова Е. Ю.* Уточненная модель плавающей гиростабилизированной платформы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 40–51. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.001. EDN: VKZNGM



*Поступила: 20.12.24; принята в печать: 30.12.24; опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.001* *EDN: VKZNGM*
*Research Article*

*D. K. Andreichenko, M. S. Portenko, E. Yu. Krylova*

# REFINED MODEL OF A FLOATING GYROSTABILIZED PLATFORM

*I. Saratov State University, Saratov, Russia*

***Abstract.*** A mathematical model of a spatial gyroscopic angular stabilization system for a floating platform in a spherical chamber with hydrodynamic stabilization engines is proposed. The issue of choosing the parameters of a floating gyrostabilized platform is investigated.

***Keywords***: gyroscopic angular stabilization systems, hybrid dynamic systems

**Dmitry K. Andreichenko**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; `e-mail:` andreichenkodk@gmail.com;
`https://orcid.org/0000-0003-0525-984X`; AuthorID: 63805

**Marina S. Portenko**, Senior lecturer; `e-mail:` msportenko@gmail.com; `https://orcid.org/0000-0002-3946-6655`; AuthorID: 683964;

**Ekaterina Yu. Krylova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; `e-mail:` mail2@mail.ru;
`https://orcid.org/0000-0002-7593-0320`; AuthorID: 722982

***to cite this article:*** *Andreichenko D. K., Portenko M. S., Krylova E. Yu.* Refined model of a floating gyrostabilized platform // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 40–51. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.001



*Received: 20.12.24;* *accepted: 30.12.24;* *published: 17.06.25.*

**Введение.** Известно [1] описание трехосной системы угловой стабилизации плавающей сферической платформы в сферической камере с электрическими двухфазными индукционными двигателями стабилизации. Выбор оптимальных параметров подобных устройств имеет существенное значение для решения задач инерциальной навигации [2]. В работе [3] показана необходимость учета влияния сил инерции в поддерживающем слое вязкой несжимаемой жидкости. Выбор параметров модели гироскопического стабилизатора со сферической плавающей платформой может быть выполнен аналогично работе [4], где выполнен динамический анализ модели гироскопического стабилизатора со сферической плавающей платформой. Следовательно, актуальна задача построения математической модели и выбора параметров плавающей гиростабилизированной платформы с учетом влияния сил инерции в поддерживающем слое.

**1. Конструктивная схема платформы.** Пусть система координат $Oxyz$ связана (рис. 1) со сферической платформой с радиусом сферической поверхности $R$. Центр плавающий в вязкой несжимаемой жидкости платформы совпадает с центром сферической камеры с радиусом $R+\delta$, $\delta \ll R$, где $\delta$ есть радиальный зазор между сферическими поверхностями камеры и платформы. Внутри платформы установлены поплавковые интегрирующие гироскопы (ПИГ) и турбонасос. Турбонасос непрерывно прокачивает потоки вязкой несжимаемой жидкости через подключенные по дифференциальной схеме рабочие каналы гидродинамических двигателей стабилизации (ГДС). Длина каждого канала $\ell = \pi R/4$, ширина $b = 2\vartheta_b R$, глубина $h \ll b$. Оси чувствительности ПИГ совпадают с осями системы координат $Oxyz$, а оси прецессии ПИГ перпендикулярны этим осям.

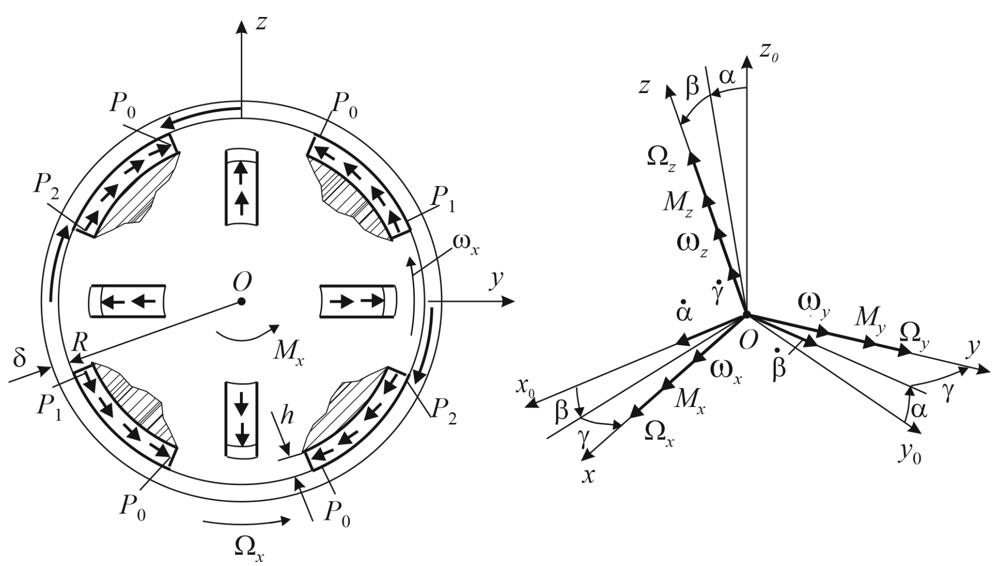



Рис. 1. Конструктивная схема платформы

Пусть при времени $t \leqslant 0$ система координат $Oxyz$ совпадает с некоторой невращающейся относительно инерциального пространства системой координат $Ox_0y_0z_0$, и корпус, содержащий сферическую камеру, также неподвижен относительно $Ox_0y_0z_0$. Поворот системы координат $Oxyz$ относительно $Ox_0y_0z_0$ характеризуется углами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и ортогональной матрицей

$$\begin{aligned}&A = A(\alpha,\beta,\gamma) = [A_{kj}],\ k,j = 1,2,3,\ A_{11} = \cos\beta\cos\gamma, A_{12} = -\cos\beta\sin\gamma\\ &A_{13} = \sin\beta, A_{21} = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, A_{22} = \cos\alpha\cos\gamma -\\ &-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, A_{23} = -\sin\alpha\cos\beta, A_{31} = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\\ &A_{32} = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma, A_{23} = \cos\alpha\cos\beta\end{aligned} \tag{1}$$

Абсолютные угловые скорости внешней и внутренней сфер $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^T = A^T(\alpha,\beta,\gamma)(\Omega_{x0}, \Omega_{y0}, \Omega_{z0})^T$ и $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$. Внутренняя сфера характеризуется моментом инерции $I$, а с ее поверхностью связаны сферические системы координат $(r, \vartheta_j, \varphi_j)$, $j = 1,2,3$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{r} = (x,y,z)^T = r\mathbf{e}_r,\ \vartheta = \vartheta_1, \varphi = \varphi_1,\ \mathbf{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)^T =\\ &= (\cos\vartheta_2, \sin\vartheta_2\cos\varphi_2, \sin\vartheta_2\sin\varphi_2)^T = (\sin\vartheta_3\sin\varphi_3, \cos\vartheta_3, \sin\vartheta_3\cos\varphi_3)^T\\ &\mathbf{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)^T, \mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^T\\ &\mathbf{e}_{\vartheta_2} = (-\sin\vartheta_2, \cos\vartheta_2\cos\varphi_2, \cos\vartheta_2\sin\varphi_2)^T,\ \mathbf{e}_{\varphi_2} = (0, -\sin\varphi_2, \cos\varphi_2)^T\\ &\mathbf{e}_{\vartheta_3} = (\cos\vartheta_3\sin\varphi_3, -\sin\vartheta_3, \cos\vartheta_3\cos\varphi_3)^T,\ \mathbf{e}_{\varphi_3} = (\cos\varphi_3, 0, -\sin\varphi_3)^T\end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $\rho$, $\nu$ – плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно, $p$, $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_{\vartheta_j}\mathbf{e}_{\vartheta_j} + v_{\varphi_j}\mathbf{e}_{\varphi_j}$ – давление в жидкости и скорость ее частиц. На внутреннюю сферу со стороны жидкости действует момент сил $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$, $\mathbf{G}^{(m)} = (G_x^{(m)}, G_y^{(m)}, G_z^{(m)})^T$ – собственный кинетический момент роторов ПИГ и помпы, $\mathbf{M}^{(v)} = (M_x^{(v)}, M_y^{(v)}, M_z^{(v)})^T$ – вектор, учитывающий перенос момента импульса движущейся относительно входных и выходных поверхностей рабочих каналов жидкостью, $\mathbf{L}_s = (L_s \operatorname{sign}(\Omega_x - \omega_x), L_s \operatorname{sign}(\Omega_y - \omega_y), L_s \operatorname{sign}(\Omega_z - \omega_z))^T$ – момент сил трения в электроконтактах. Турбонасосы поддерживают во входных камерах золотниковых переключателей постоянное давление $P_m = const$. В результате перепада давлений в золотниках с прямоугольными окнами ширины $c$ и высоты $a$ создаются давления $P_1^{(j)}$, $P_2^{(j)}$ на входах в рабочие каналы. Золотниковые переключатели характеризуются коэффициентом усиления $k_u$ и постоянной времени$T_u$, а связанные с ними корректирующие устройства – постоянными времени $\tau_1, \tau_2$. Положение заслонок золотниковых переключателей изменяется в зависимости от абсолютной угловой скорости $\omega$ внутренней сферы, измеряемой ПИГ с коэффициентом усиления $k$ и постоянной времени $T$. Так как уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости [5] допускают редукцию давления, полагаем, что давление в выходных сечениях рабочих каналов $P_0 = 0$.

**2. Модельные уравнения.** При приведении к безразмерным переменным в качестве характерного пространственного размера, отсчитываемого «вдоль» слоя жидкости, выбираем величину $R$, а в качестве характерного пространственного размера, отсчитываемого «поперек» слоя жидкости, выбираем величину $\delta$. Относительная толщина слоя жидкости $\psi = \delta/R \ll 1$. Характерные расход жидкости в рабочем канале и характерная скорость жидкости в слое между сферами суть $Q_{har} = S_0(2P_m/\rho)^{1/2}$, $V_{har} = Q_{har}/(R\delta) = ac(2P_m/\rho)^{1/2}/(2R\delta)$, тогда характерное время $T_{har} = R/V_{har} = 2R^2\delta(2P_m/\rho)^{-1/2}/(ac)$. Характерная величина угловых смещений внутренней сферы суть $\varepsilon = \rho R^4\delta/I \ll 1$. Золотниковый переключатель характеризуется безразмерным коэффициентом $k_s = ac/(2R\delta)$. Колебательное число Рейнольдса имеют вид $\sigma = \delta^2/(\nu T_{har})$. Размерные и безразмерные переменные, а также дифференциальные операторы Гамильтона связаны следующими соотношениями:

$$
\begin{gathered}
h = \delta h^*, r = Rr^*, r^* = 1 + \psi\xi, x = Rx^*, y = Ry^*, z = Rz^*, t = T_{har}t^*, \alpha = \varepsilon\alpha^* \\
\beta = \varepsilon\beta^*, \alpha = \varepsilon\beta^*, \Omega = \Omega^*/T_{har}, \omega = \varepsilon\omega^*/T_{har}, \mathbf{v} = V_{har}\mathbf{v}^*, v_r = V_{har}\psi v_r^*, v_{\vartheta_j} = V_{har}v_{\vartheta_j}^* \\
v_{\varphi_j} = V_{har}v_{\varphi_j}^*, p = \rho V_{har}^2 p^*, p_{rr} = \rho V_{har}^2 p_{rr}^*, p_{\vartheta_j\vartheta_j} = \rho V_{har}^2 p_{\vartheta_j\vartheta_j}^*, p_{\varphi_j\varphi_j} = \rho V_{har}^2 p_{\varphi_j\varphi_j}^* \\
p_{r\vartheta_j} = \rho V_{har}^2 p_{r\vartheta_j}^*, p_{r\varphi_j} = \rho V_{har}^2 p_{r\varphi_j}^*, p_{\vartheta_j\varphi_j} = \rho V_{har}^2 p_{\vartheta_j\varphi_j}^*, \mathbf{M} = R^2\delta\rho V_{har}^2\mathbf{M}^* \\
\mathbf{M}^{(v)} = R^2\delta\rho V_{har}^2\mathbf{M}^{(v)*}, \mathbf{G}^{(m)} = R^2\delta\rho V_{har}^2\mathbf{G}^{(m)*}, L_s = R^2\delta\rho V_{har}^2 L_s^*,\ \nabla = \nabla^*/R \\
\nabla^* = (\partial/\partial x^*, \partial/\partial y^*, \partial/\partial z^*)^T, u_j = au_j^*, w_1^{(j)} = \varepsilon k w_1^{(j)*}, w_2^{(j)} = \varepsilon k w_2^{(j)*}, j = 1,2,3
\end{gathered}
$$

Безразмерные постоянные времени ПИГ, корректирующего устройства и безразмерный коэффициент усиления суть $T^* = T/T_{har}$, $\tau_1^* = \tau_1/T_{har}$, $\tau_2^* = \tau_2/T_{har}$, $k_u^* = \varepsilon k k_u/a$. Далее полагаем, что символ $()^*$ над безразмерными переменными и параметрами везде далее опущен. После приведения к безразмерным переменным и параметрам уравнения движения внутренней сферы принимают вид

$$
\begin{gathered}
\omega_x = \dot\alpha\cos(\varepsilon\gamma)\cos(\varepsilon\beta) + \dot\beta\sin(\varepsilon\gamma),\ \omega_y = -\dot\alpha\sin(\varepsilon\gamma)\cos(\varepsilon\beta) + \dot\beta\cos(\varepsilon\gamma) \\
\omega_z = \dot\alpha\sin(\varepsilon\beta) + \dot\gamma,\ \Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^T = A^T(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma)(\Omega_{x0}, \Omega_{y0}, \Omega_{z0})^T \\
\dot\omega + \varepsilon\omega\times\mathbf{G}^{(m)} + \mathbf{M}^{(v)} = \mathbf{M} + \mathbf{L}_s,\ \dot{()} = d()/dt \qquad (3) \\
\mathbf{L}_s = (L_s\,\mathrm{sign}(\Omega_x - \varepsilon\omega_x), L_s\,\mathrm{sign}(\Omega_y - \varepsilon\omega_y), L_s\,\mathrm{sign}(\Omega_z - \varepsilon\omega_z))^T
\end{gathered}
$$

Им соответствуют начальные условия

$$
\alpha|_{t=0} = \beta|_{t=0} = \gamma|_{t=0} = \omega|_{t=0} = 0 \qquad (4)
$$

В безразмерных переменных $\mathbf{r} = (x, y, z)^T = r\mathbf{e}_r$, $r = 1 + \psi\xi$, $\mathbf{v} = \psi v_r\mathbf{e}_r + v_{\vartheta_j}\mathbf{e}_{\vartheta_j} + v_{\varphi_j}\mathbf{e}_{\varphi_j}$, $j = 1,2,3$. При моделировании динамики поддерживающего слоя жидкости переходим к упрощенному уравнению несжимаемости и «укороченным» уравнениям Навье-Стокса [6], в которых отброшены малые величины порядка $\underline{\underline{O}}(\psi)$ и выше

$$\frac{\partial v_r}{\partial \xi}+\frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial \vartheta_j}+\frac{1}{\sin\vartheta_j}\frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial \varphi_j}+v_{\vartheta_j}\operatorname{ctg}\vartheta_j=0,\ \ \frac{\partial p}{\partial \xi}=0$$

$$\frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial \xi}+v_{\vartheta_j}\frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial \vartheta_j}+\frac{v_{\varphi_j}}{\sin\vartheta_j}\frac{\partial v_{\vartheta_j}}{\partial \varphi_j}-v_{\varphi_j}^2\operatorname{ctg}\vartheta_j=-\frac{\partial p}{\partial \vartheta_j}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 v_{\vartheta_j}}{\partial^2 \xi}+$$

$$+2\varepsilon(\omega\cdot\mathbf{e}_r)v_{\varphi_j}-\varepsilon(\dot\omega\cdot\mathbf{e}_{\varphi_j}) \qquad (5)$$

$$\frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial \xi}+v_{\vartheta_j}\frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial \vartheta_j}+\frac{v_{\varphi_j}}{\sin\vartheta_j}\frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial \varphi_j}+v_{\vartheta_j}v_{\varphi_j}\operatorname{ctg}\vartheta_j=-\frac{1}{\sin\vartheta_j}\frac{\partial p}{\partial \varphi_j}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 v_{\varphi_j}}{\partial \xi^2}-$$

$$-2\varepsilon(\omega\cdot\mathbf{e}_r)v_{\vartheta_j}+\varepsilon(\dot\omega\cdot\mathbf{e}_{\vartheta_j}),\ \ j=1,2,3$$

В качестве начальных условий для уравнений (5) задаются величины

$$v_{\vartheta_j}\big|_{t=0}=v_{\vartheta_j}^{(0)},\ \ v_{\varphi_j}\big|_{t=0}=v_{\varphi_j}^{(0)},\ \ j=1,2,3$$

соответствующие равновесному состоянию, в котором $\dot{()}=\partial()/\partial t=0$.

Граничные условия для уравнений (5) имеют вид

$$v_r|_{\xi=1}=0,\ \ v_{\vartheta_j}\big|_{\xi=1}=(\Omega-\varepsilon\omega)\cdot\mathbf{e}_{\varphi_j},\ \ v_{\varphi_j}\big|_{\xi=1}=-(\Omega-\varepsilon\omega)\cdot\mathbf{e}_{\vartheta_j},\ \ j=1,2,3$$

$$v_r|_{S_1}=0,\ \ v_{\vartheta_j}\big|_{S_1}=0,\ \ v_{\varphi_j}\big|_{S_1}=0$$

$$S_1=\{\xi=0,\ (\vartheta_j,\varphi_j)\notin S_0\}\cup\{\xi=-h,\ (\vartheta_j,\varphi_j)\in S_0\}$$

$$S_0=\left[\frac{\pi}{2}-\vartheta_b,\frac{\pi}{2}+\vartheta_b\right]\times\left(\left[\frac{\pi}{8}+\frac{\pi l}{2},\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi l}{2}\right]\cup\left[-\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi l}{2},-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi l}{2}\right]\right),$$

$$l=0,1,\ \ j=1,2,3 \qquad (6)$$

$$v_{\vartheta_j}\big|_{S_2}=0,\ \ S_2=\{\vartheta_j=\pi/2\pm\vartheta_b,\ (\xi,\varphi_j)\in[-h,0]\times$$

$$\times\left(\left[\frac{\pi}{8}+\frac{\pi l}{2},\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi l}{2}\right]\cup\left[-\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi l}{2},-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi l}{2}\right]\right)\Bigg\},l=0,1,\ \ j=1,2,3$$

$$p|_{S_3}=0;\ \ S_3=\Bigg\{\varphi_j=\pm\frac{3\pi}{8},\pm\frac{5\pi}{8},\ \ j=1,2,\ \ \varphi_3=\pm\frac{\pi}{8},\pm\frac{7\pi}{8},$$

$$(\xi,\vartheta_j)\in[-h,0]\times\left[\frac{\pi}{2}-\vartheta_b,\frac{\pi}{2}+\vartheta_b\right]\Bigg\},\ \ j=1,2,3$$

Пусть

$$S_4=\Bigg\{(\vartheta_j,\varphi_j)\in\left[\frac{\pi}{2}-\vartheta_b,\frac{\pi}{2}+\vartheta_b\right]\times\left(\left[\frac{\pi}{8}-\varphi_b,\frac{\pi}{8}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{8},\varphi_b-\frac{\pi}{8}\right]\cup\right.$$

$$\left.\cup\left[\frac{7\pi}{8},\frac{7\pi}{8}+\varphi_b\right]\cup\left[-\frac{7\pi}{8}-\varphi_b,-\frac{7\pi}{8}\right]\right),\ \ j=1,2\Bigg\}\cup\Bigg\{(\vartheta_3,\varphi_3)\in\left[\frac{\pi}{2}-\vartheta_b,\frac{\pi}{2}+\vartheta_b\right]\times$$

$$\times\left(\left[\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{8}+\varphi_b\right]\cup\left[-\frac{3\pi}{8}-\varphi_b,-\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{8}-\varphi_b,\frac{5\pi}{8}\right]\cup\left[\varphi_b-\frac{5\pi}{8},-\frac{5\pi}{8}\right]\right)\Bigg\}$$

Вдоль входных сегментов рабочих каналов, которым соответствуют области $V_1=\{\xi\in[-h,0]\}\times\{(\vartheta_j,\varphi_j)\in S_4\}$, установлены тонкие продольные переборки, что приводит к выполнению в объемах $V_1$ кинематических условий $v_{\vartheta_j} = 0$, $\partial v_{\varphi_j}/\partial\varphi_j = 0$. Из первого уравнения (5) и условий $v_r|_{\xi=-h} = v_r|_{\xi=0} = 0$ следует $v_r = 0$. При этом второе и четвертое уравнения (5) в объемах $V_1$ значительно упрощаются

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v_{\varphi_j}}{\partial t} = -\frac{1}{\sin\vartheta_j}\frac{\partial p}{\partial \varphi_j} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 v_{\varphi_j}}{\partial \xi^2} + \varepsilon(\dot{\omega}\cdot\mathbf{e}_{\vartheta_j}), \ j = 1,2,3 \tag{7}$$

Граничные условия для (7) имеют вид

$$\begin{gathered} v_{\varphi_j}\big|_{S_5} = v_{\varphi_j}\big|_{S_5} = 0, \ S_5 = \{\xi = -h, (\vartheta_j, \varphi_j) \in S_4\}, S_6 = \{\xi = 0, (\vartheta_j, \varphi_j) \in S_4\} \\ p|_{S_7} = P_1^{(j)}, \ S_7 = \{\varphi_j = \pi/8 - \varphi_b, -7\pi/8 - \varphi_b, \ j = 1,2, \\ \varphi_3 = 5\pi/8 - \varphi_b, -3\pi/8 - \varphi_b, \ (\xi, \vartheta_j) \in [-h, 0] \times [\pi/2 - \vartheta_b, \pi/2 + \vartheta_b]\} \\ p|_{S_8} = P_2^{(j)}, \ S_8 = \{\varphi_j = 7\pi/8 + \varphi_b, -\pi/8 + \varphi_b, \ j = 1,2, \\ \varphi_3 = 3\pi/8 + \varphi_b, -5\pi/8 + \varphi_b, \ (\xi, \vartheta_j) \in [-h, 0] \times [\pi/2 - \vartheta_b, \pi/2 + \vartheta_b]\} \end{gathered} \tag{8}$$

Граничные условия на противоположных сторонах $I$ и $II$ границы $S_9$ объема $V_1$, через которую в рабочие каналы втекает жидкость, имеют вид

$$\begin{gathered} v_{\varphi_j}\big|_{S_{9,I}} = v_{\varphi_j}\big|_{S_{9,II}}, \ p|_{S_{9,I}} = p|_{S_{9,II}}, \ j = 1,2,3, \ S_9 = \{\varphi_j = \pm\pi/8, \pm 7\pi/8, \ j = 1,2, \\ \varphi_3 = \pm 3\pi/8, \pm 5\pi/8, \ (\xi, \vartheta_j) \in [-h, 0] \times [\pi/2 - \vartheta_b, \pi/2 + \vartheta_b], \ j = 1,2,3\} \end{gathered} \tag{9}$$

Расходы жидкости на «входных» поверхностях входных сегментов рабочих каналов и «выходных» поверхностях рабочих каналов суть

$$\begin{gathered} Q_1^{(j)} = \int_{-h}^{0}\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} v_{\varphi_j} d\xi d\vartheta, \varphi_j = \frac{\pi}{8} - \varphi_b, -\frac{7\pi}{8} - \varphi_b, j = 1,2, \varphi_3 = \frac{5\pi}{8} - \varphi_b, \\ -\frac{3\pi}{8} - \varphi_b; \ Q_2^{(j)} = \int_{-h}^{0}\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} v_{\varphi_j} d\xi d\vartheta, \varphi_j = \frac{7\pi}{8} + \varphi_b, -\frac{\pi}{8} + \varphi_b, j = 1,2, \\ \varphi_3 = \frac{3\pi}{8} + \varphi_b, -\frac{5\pi}{8} + \varphi_b; \ Q_{1,0}^{(j)} = \int_{-h}^{0}\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} v_{\varphi_j} d\xi d\vartheta, \varphi_j = \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}, \ j = 1,2, \\ \varphi_3 = -\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}; \ Q_{2,0}^{(j)} = \int_{-h}^{0}\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b} v_{\varphi_j} d\xi d\vartheta, \varphi_j = \frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, j = 1,2, \varphi_3 = \frac{\pi}{8}, -\frac{7\pi}{8} \\ \sum\nolimits_{j=1}^{3} (Q_1^{(j)} + Q_2^{(j)}) = \sum\nolimits_{j=1}^{3} (Q_{1,0}^{(j)} + Q_{2,0}^{(j)}) \end{gathered} \tag{10}$$

Вектор скорости переноса момента импульса за счет движения жидкости относительно входных и выходных поверхностей рабочих каналов имеет вид

$$\mathbf{M}^{(v)}=(M_x^{(v)},M_y^{(v)},M_z^{(v)})^T=2\sum_{j=1}^{2}\int_{-h}^{0}d\xi\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b}d\vartheta_j[\mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)}\Big|_{\varphi_j=\pi/8-\varphi_b}-$$
$$-\mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)}\Big|_{\varphi_j=3\pi/8}-\mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)}\Big|_{\varphi_j=7\pi/8+\varphi_b}+\mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)}\Big|_{\varphi_j=5\pi/8}]+$$
$$+2\int_{-h}^{0}d\xi\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b}d\vartheta_3[\mathbf{M}_{\varphi_3}^{(v)}\big|_{\varphi_3=-3\pi/8-\varphi_b}-\mathbf{M}_{\varphi_3}^{(v)}\big|_{\varphi_3=-\pi/8}-\mathbf{M}_{\varphi_3}^{(v)}\big|_{\varphi_3=3\pi/8+\varphi_b}+$$
$$+\mathbf{M}_{\varphi_3}^{(v)}\big|_{\varphi_3=\pi/8}],\ \mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)}=(\varepsilon\omega-\varepsilon(\omega\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r+v_{\vartheta_j}\mathbf{e}_{\varphi_j}-v_{\varphi_j}\mathbf{e}_{\vartheta_j})v_{\varphi_j},\ j=1,2,3 \qquad (11)$$

Момент сил, действующих со стороны слоя жидкости на сферическую платформу, с точностью до $\underline{\underline{O}}(\varepsilon\psi_b)\ll 1$ определяется выражением

$$\mathbf{M}=(M_x,M_y,M_z)^T=4h\vartheta_b(P_2^{(2)}-P_1^{(2)},P_2^{(3)}-P_1^{(3)},P_2^{(1)}-P_1^{(1)})^T+\int_{S_{10}}\mathbf{M}_r|_{\xi=0}dS+$$

$$+2\sum_{j=1}^{2}\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b}\sin\vartheta_j d\vartheta_j\left(\int_{\pi/8-\varphi_b}^{3\pi/8}\mathbf{M}_r|_{\xi=-h}d\varphi_j+\int_{5\pi/8}^{7\pi/8+\varphi_b}\mathbf{M}_r|_{\xi=-h}d\varphi_j\right)+$$
$$+2\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b}\sin\vartheta_3 d\vartheta_3\left(\int_{\pi/8}^{3\pi/8+\varphi_b}\mathbf{M}_r|_{\xi=-h}d\varphi_3+\int_{5\pi/8-\varphi_b}^{7\pi/8}\mathbf{M}_r|_{\xi=-h}d\varphi_3\right)-$$
$$-2h\cos\vartheta_b\sum_{j=1}^{2}\left[\int_{\pi/8-\varphi_b}^{3\pi/8}((p\mathbf{e}_{\varphi_j})|_{\vartheta_j=-\vartheta_b+\pi/2}-(p\mathbf{e}_{\varphi_j})|_{\vartheta_j=\vartheta_b+\pi/2})d\varphi_j+\right.$$
$$\left.+\int_{5\pi/8}^{7\pi/8+\varphi_b}((p\mathbf{e}_{\varphi_j})|_{\vartheta_j=-\vartheta_b+\pi/2}-(p\mathbf{e}_{\varphi_j})|_{\vartheta_j=\vartheta_b+\pi/2})d\varphi_j\right]-$$
$$-2h\cos\vartheta_b\left[\int_{\pi/8}^{3\pi/8+\varphi_b}((p\mathbf{e}_{\varphi_3})|_{\vartheta_3=-\vartheta_b+\pi/2}-(p\mathbf{e}_{\varphi_3})|_{\vartheta_3=\vartheta_b+\pi/2})d\varphi_3+\right. \qquad (12)$$
$$\left.+\int_{5\pi/8-\varphi_b}^{7\pi/8}((p\mathbf{e}_{\varphi_3})|_{\vartheta_3=-\vartheta_b+\pi/2}-(p\mathbf{e}_{\varphi_3})|_{\vartheta_3=\vartheta_b+\pi/2})d\varphi_3\right]-$$
$$-2\sum_{j=1}^{2}\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b}\sin\vartheta_j d\vartheta_j\left(\int_{\pi/8-\varphi_b}^{\pi/8}\mathbf{M}_r|_{\xi=0}d\varphi_j+\int_{7\pi/8}^{7\pi/8+\varphi_b}\mathbf{M}_r|_{\xi=0}d\varphi_j\right)-$$
$$-2\int_{\pi/2-\vartheta_b}^{\pi/2+\vartheta_b}\sin\vartheta_3 d\vartheta_3\left(\int_{3\pi/8}^{3\pi/8+\varphi_b}\mathbf{M}_r|_{\xi=0}d\varphi_3+\int_{5\pi/8-\varphi_b}^{5\pi/8}\mathbf{M}_r|_{\xi=0}d\varphi_3\right)$$
$$\mathbf{M}_r=(1/\sigma)(\mathbf{e}_{\varphi_j}\partial v_{\vartheta_j}/\partial\xi-\mathbf{e}_{\vartheta_j}\partial v_{\varphi_j}/\partial\xi),S_{10}=\{\xi=0,\ (\vartheta_j,\varphi_j)\notin S_0\},j=1,2,3$$

В (11), (12) $\mathbf{M}_{\varphi_j}^{(v)}$, $\mathbf{M}_r$ и $\mathbf{e}_{\varphi_j}$ проектируются на оси системы координат $Oxyz$. Связь перепадов давлений в золотниковых переключателях с расходами жидкости и управляющими перемещениями $u_j$ золотниковых поясков имеет вид

$$1 - k_s^2 P_1^{(j)} = (Q_1^{(j)}/(1+u_j))^2,\ 1 - k_s^2 P_2^{(j)} = (Q_2^{(j)}/(1-u_j))^2 \tag{13}$$

$$P_1^{(j)}\Big|_{t=0} = P_2^{(j)}\Big|_{t=0} = P_j,\, Q_1^{(j)}\Big|_{t=0} = Q_2^{(j)}\Big|_{t=0} = Q_0^{(j)}, 1 - k_s^2 P_j = (Q_0^{(j)})^2, j = 1,2,3$$

Выходной сигнал ПИГ $w_1^{(j)}$, $j = 1,2,3$ связан с измеряемой компонентой угловой скорости $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$, выходным сигналом корректирующего устройства $w_2^{(j)}$, $j = 1,2,3$ и далее с управляющими перемещениями $u_j$, $j = 1,2,3$ золотниковых поясков уравнениями

$$\begin{aligned} &T\ddot{w}_1^{(1)} + \dot{w}_1^{(1)} = \omega_z,\ T\ddot{w}_1^{(2)} + \dot{w}_1^{(2)} = \omega_x,\ T\ddot{w}_1^{(3)} + \dot{w}_1^{(3)} = \omega_y \\ &\tau_2 \dot{w}_2^{(j)} + w_2^{(j)} = \tau_1 \dot{w}_1^{(j)} + w_1^{(j)},\ T_u \dot{u}_j + u_j = k_u w_2^{(j)},\ j = 1,2,3 \end{aligned} \tag{14}$$

$$u_j\big|_{t=0} = w_1^{(j)}\Big|_{t=0} = \dot{w}_1^{(j)}\Big|_{t=0} = w_2^{(j)}\Big|_{t=0} = 0,\ j = 1,2,3 \tag{15}$$

Математическая модель (1)-(15) представляет связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, т.е. представляет собой комбинированную динамическую систему (КДС). Компонентами входной вектор-функции КДС являются проекции абсолютной угловая скорости внешней сферы на оси системы координат $Ox_0y_0z_0$, т.е. $\Omega_{x0}(t)$, $\Omega_{y0}(t)$, $\Omega_{z0}(t)$. Компонентами выходной вектор-функции КДС служат углы поворота внутренней сферы относительно инерциальной системы координат $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$. Параметрами обратных связей служит набор величин $\mathbf{p} = (\tau_1, \tau_2, k_u)^T$.

**3. Упрощение модели поддерживающего слоя.** Дальнейшее упрощение модели связано с тем, что движение жидкости в рабочем канале подобно прямолинейно-параллельному движению жидкости между двумя параллельными стенками, и наибольшее влияние оказывают перетекания жидкости между рабочими каналами при одинаковых $j$. В этом случае уравнение несжимаемости и «укороченные» уравнения Навье-Стокса (5) значительно упрощаются и принимают вид, аналогичный (7). Дальнейшее применение одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени $\tilde{f}(\lambda) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt$ позволяет получить передаточные функции $\Phi_\Omega(\lambda, \mathbf{p})$ и $\Phi_S(\lambda, \mathbf{p})$, связывающие изображения Лапласа входной и выходной вектор-функций

$$\begin{aligned} &(\tilde{\alpha}(\lambda), \tilde{\beta}(\lambda), \tilde{\gamma}(\lambda))^T = \Phi_\Omega(\lambda, \mathbf{p})(\tilde{\Omega}_x(\lambda), \tilde{\Omega}_y(\lambda), \tilde{\Omega}_z(\lambda))^T + \\ &+ \Phi_S(\lambda, \mathbf{p}) L_s \mathcal{L}[(\operatorname{sign}\Omega_x(t), \operatorname{sign}\Omega_y(t), \operatorname{sign}\Omega_z(t))^T] \end{aligned}$$

Далее удобно привести явные выражения передаточных функции после обратного перехода к размерным физическим параметрам гиростабилизированной платформы ($\mu = \rho\nu$ – динамическая вязкость жидкости)

$$\Phi_\Omega(\lambda, \mathbf{p}) = Q_\Omega(\lambda)/D(\lambda),\ \Phi_S(\lambda, \mathbf{p}) = Q(\lambda)/D(\lambda),\ Q_\Omega(\lambda) = \Pi_\Omega(\lambda)Q(\lambda)$$
$$D(\lambda) = ITT_u\tau_2\lambda^5 + I\left[T_u\,\tau_2 + T(T_u+\tau_2)\right]\lambda^4 + \{I(T_u+\tau_2)\Pi_\omega(\lambda)\left[[T_u\,\tau_2+\right.$$
$$\left.+T(T_u+\tau_2)]\right\}\lambda^3 + \left[I + \Pi_\omega(\lambda)\,(T_u+\tau_2)\right]\lambda^2 + \left[\Pi_\omega(\lambda) + \Pi_L(\lambda)\,k_u k\tau_1\right]\lambda + \Pi_L(\lambda)k_u k,$$
$$Q(\lambda) = TT_u\tau_2\lambda^3 + \left[T_u\,\tau_2 + T(T_u+\tau_2)\right]\lambda^2 + (T_u+\tau_2)\lambda + 1$$
$$\Pi_\Omega(\lambda) = \left[\tfrac{8}{3}\,\pi\mu R^4\left(1-\tfrac{3b}{4R}\right)\varphi_2(\lambda) + 4RbhS_1(\lambda)\Pi_3(\lambda)\left(1-\tfrac{\Pi_5(\lambda)}{Rb\psi_1(\lambda)}\right)+\right.$$
$$\left.+4\mu b\ell R^2 S_2(\lambda)\right]\left(1+\tfrac{\delta}{R}\right),\ \Pi_\omega(\lambda) = \tfrac{8}{3}\pi\mu R^4\left(1-\tfrac{3b}{4R}\right)\varphi_3(\lambda)+$$
$$+\left[4\mu R^2 b\ell S_3(\lambda) - 4bhRS_1(\lambda)\Pi_3(\lambda)\left(1-\tfrac{\Pi_5(\lambda)}{Rb\psi_1(\lambda)}\right)\right]\left(1-\tfrac{h}{R}\right)$$
$$\psi_1(\lambda) = \left(\tfrac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{ch}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)-1}{\mathrm{sh}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)}, \varphi_2(\lambda) = \frac{(\lambda/\nu)^{1/2}}{\mathrm{sh}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)}, \varphi_3(\lambda) = \left(\tfrac{\lambda}{\nu}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{ch}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)}{\mathrm{sh}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)}$$
$$S_2(\lambda) = \psi_2(\lambda) + \varphi_2(\lambda), S_3(\lambda) = \psi_3(\lambda) + \varphi_3(\lambda)(1-h/R)^{-1}$$
$$S_1(\lambda) = 1 - \tfrac{\psi_1(\lambda)+\varphi_1(\lambda)}{h}, \psi_2(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda/\nu}}{\mathrm{sh}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)}, \varphi_1(\lambda) = \left(\tfrac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{ch}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)-1}{\mathrm{sh}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)}$$
$$\Pi_3(\lambda) = \tfrac{\mu\ell R\psi_1(\lambda)}{(h+\delta)\psi(\lambda)}\left(1-\tfrac{1}{1+S(\lambda)}\right), S(\lambda) = \tfrac{2b(h+\delta)}{Q_0\mu\ell}(P_m-P_0)\psi(\lambda)(1-\zeta)^2$$
$$\zeta = \tfrac{6\nu ac\ell}{b(h+\delta)^3}\left[\tfrac{\rho}{2(P_m-P_0)}\right]^{1/2} - \tfrac{9\mu\nu(ac\ell)^2}{(P_m-P_0)b^2(h+\delta)^6}$$
$$\Pi_5(\lambda) = \tfrac{\Pi_3(\lambda)+\mu\ell R\varphi_1(\lambda)/(2b\delta\varphi(\lambda))}{\Pi_2(\lambda)+\mu\ell/(2b\delta\varphi(\lambda))}, \Pi_2(\lambda) = \tfrac{\mu\ell}{b(h+\delta)\psi(\lambda)}\left(1-\tfrac{1}{1+S(\lambda)}\right)$$
$$\varphi(\lambda) = \tfrac{\nu}{\lambda} - \tfrac{2}{\delta}\left(\tfrac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{ch}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)-1}{\mathrm{sh}\left(\delta\sqrt{\lambda/\nu}\right)}, \psi(\lambda) = \tfrac{\nu}{\lambda} - \tfrac{2}{(h+\delta)}\left(\tfrac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{ch}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)-1}{\mathrm{sh}\left((h+\delta)\sqrt{\lambda/\nu}\right)}$$

Численное моделирование выходных функций выполнялось для физической модели гиростабилизированной платформы с параметрами $R = 0.15$ м, $b = 3\cdot10^{-2}$ м, $h = 3\cdot10^{-4}$ м, $\delta = 10^{-4}$ м, $S_0 = (ac)/2 = 2\cdot10^{-6}$ м$^2$ , $P_m = 27\cdot10^4$ Па, $\rho = 2\cdot10^3$ кг/м$^3$, $Q_0 = 26.62\cdot10^{-6}$ м$^3$/с (расход рабочей жидкости), $k = 2$, $T = 2\cdot10^{-3}$ с, $T_u = 3\cdot10^{-3}$ с, $I = 0.254$ кгм$^2$, $L_s = 10^{-3}$ Нм. Входное возмущение принято в виде $\Omega_{x0}(t) = 1(t)$, $\Omega_{y0}(t) = \Omega_{z0}(t) = 0$, где $1(t)$ – функция единичного скачка Хевисайда. Для улучшения качества выходных функций выполнялся выбор параметров обратных связей $\mathbf{p}$ на основе адаптивного алгоритма параметрического синтеза, аналогичного [7]. Данные на рис. 2a соответствуют параметрам обратных связей $\mathbf{p} = (4, 50, 1000)^T$ до выполнения параметрического синтеза. На рис. 2b показана переходная функция после применения адаптивного алгоритма параметрического синтеза, в результате чего найдены значения параметров обратных связей $\mathbf{p} = (9.841\cdot10^{-3}, 7.65\cdot10^{-9}, 790.7)^T$. В данном случае, максимальное значение угловой ошибки плавающей гиростабилизированной платформы уменьшается примерно в 16 раз ($\approx 1$ угловая секунда), что приемлемо для систем инерциальной навигации.

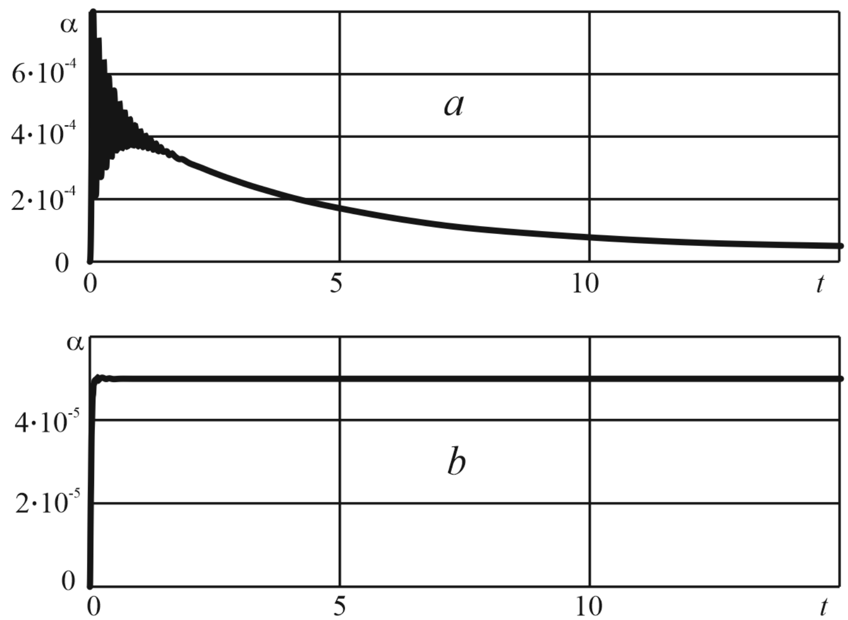



Рис. 2. Выходные функции

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Д. К. Андрейченко постановка задачи, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, М. С. Портенко проведение вычислительных экспериментов, Е. Ю. Крылова обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** D. K. Andreichenko setting the task, writing the text of the manuscript, approving the final version of the manuscript, M. S. Portenko conducting computational experiments, E. Yu. Krylova reviewing the literature on the topic of the article, editing the text of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Александер Н. Миниатюрная поплавковая инерциальная платформа // Вопросы ракетной техники. 1970. № 5. С. 75–87.

[2] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. Москва : Наука, 1986. 672 с.

[3] Андрейченко К.П., Данилов Ю.И., С.Б. Шашкин. Динамика углового движения плавающей инерциальной платформы // Изв. ВУЗов. Приборостроение. 1985. Т. 18, № 1. С. 55–60.

[4] Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 76–89.
[5] Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. : ГИТТЛ, 1955. 519 с.
[6] Андрейченко К.П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. М. : Машиностроение, 1987. 128 с.
[7] Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических систем / Д.К. Андрейченко [и др.] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. С. 465–475. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

## REFERENCES

[1] Alexander N. Miniature float inertial platform // Voprosy raketnoi techniki. 1970. no. 5. P. 75–87. (in Russian).
[2] Ishlinskii A.Yu. Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow : Nauka, 1986. 672 p. (in Russian).
[3] Andreichenko K. P., Danilov Yu. I., Shashkin S.B. Dynamics of angular motion of a floating inertial platform // Journal of Instrument Engineering. 1985. Vol. 18, no. 1. P. 55–60. (in Russian).
[4] Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. Dynamic analysis and choice of parameters of a model of gyroscopic integrator of linear ac-celerations with floating platform // Journal of computer and systems sciences international. 2008. Vol. 47, no. 4. P. 570–583.
[5] Sliozkin N.A. Dynamics of a viscous incompressible fluid. Moscow : GITTL, 1955. 519 p. (in Russian).
[6] Andreichenko K.P. Dynamics of float gyroscopes and accelerometers. Moscow : Mashinostroenie, 1987. 128 p. (in Russian).
[7] Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems / D. K. Andreichenko [et al.] // Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2016. Vol. 16. P. 465–475. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475. (in Russian).

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.005* *EDN: PNHHDD*

*Научная статья* *УДК: 539.3*

*В. Н. Зимин*[1], *Д. Р. Рахимов*[1], *И. Ю. Савельева*[1]

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

[1]*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия*

***Аннотация.*** В работе представлена математическая модель, описывающая нелинейное деформирование ортотропных композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения. Модель основана на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния, позволяющими учесть влияние микроструктурных изменений материала. Определены количество, природа и кинетические соотношения внутренних параметров. Получены определяющие соотношения и уравнение теплопроводности, необходимые для постановки связанной краевой задачи термопластичности. В частном случае предложенная модель приведена к эндохронной теории термопластичности. Проведенные численные расчеты демонстрируют хорошее согласование с экспериментальными данными, что подтверждает эффективность и адекватность разработанной модели. Представленные подходы могут быть использованы при проектировании композитных конструкций, работающих в сложных термосиловых условиях. Таким образом, разработанная математическая модель позволяет улучшить предсказуемость механического поведения композиционных материалов и расширить возможности их применения в высокотехнологичных отраслях.

***Ключевые слова***: пластичность, термопластичность, эндохронная теория, термодинамика, внутренние параметры состояния, кинетические соотношения, композиционные материалы, неизотермическое нагружение, нелинейное деформирование, определяющие соотношения.

**Зимин Владимин Николаевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой космических аппаратов и ракет носителей; `e-mail:` zimin@bmstu.ru; AuthorID: 493517

**Рахимов Даниэль Рустамович**, аспирант кафедры космических аппаратов и ракет носителей; `e-mail:` danrus1996@gmail.com; `https://orcid.org/0009-0008-6139-8485`; AuthorID: 1122169

**Савельева Инга Юрьевна**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики; `e-mail:` inga.savelyeva@bmstu.ru; `https://orcid.org/0000-0001-7564-364X`; AuthorID: 617555

***для цитирования:*** *Зимин В. Н., Рахимов Д. Р., Савельева И. Ю.* Математическая модель пластичности ортотропных композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 52–64. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.005. EDN: PNHHDD



*Поступила: 10.01.25; принята в печать: 14.04.25; опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.005* *EDN: PNHHDD*
*Research Article*

*V. N. Zimin*[1], *D. R. Rakhimov*[1], *I. Yu. Savelyeva*[1]

# MATHEMATICAL MODEL OF PLASTICITY FOR ORTHOTROPIC COMPOSITE MATERIALS UNDER NON-ISOTHERMAL LOADING CONDITIONS

[1]*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

***Abstract.*** The article presents a mathematical model describing the nonlinear deformation of orthotropic composite materials under non-isothermal loading conditions. The model is based on a thermodynamic approach with internal state parameters, allowing for the consideration of microstructural changes in the material. The quantity, nature, and kinetic relationships of the internal parameters are defined. The governing equations and the heat conduction equation necessary for formulating a coupled thermoplastic boundary value problem have been derived. In a particular case, the proposed model is reduced to the endochronic theory of thermoplasticity. Numerical calculations demonstrate good agreement with experimental data, confirming the effectiveness and adequacy of the developed model. The proposed approaches can be utilized in the design of composite structures operating under complex thermo-mechanical conditions. Thus, the developed mathematical model enhances the predictability of the mechanical behavior of composite materials and expands their application potential in high-tech industries.

***Keywords***: Plasticity, thermoplasticity, endochronic theory, thermodynamics, internal state variables, kinetic relationships, composite materials, non-isothermal loading, nonlinear deformation, constitutive relations.

**Vladimir N. Zimin**, Doctor of Technical Sciences, Professor; `e-mail:` zimin@bmstu.ru; AuthorID: 493517

**Daniel R. Rakhimov**, Postgraduate Student; `e-mail:` danrus1996@gmail.com; `https://orcid.org/0009-0008-6139-8485`; AuthorID: 1122169

**Inga Yu. Savelyeva**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; `e-mail:` inga.savelyeva@bmstu.ru;
`https://orcid.org/0000-0001-7564-364X`; AuthorID: 617555

***to cite this article:*** *Zimin V. N., Rakhimov D. R., Savelyeva I. Yu.* Mathematical model of plasticity for orthotropic composite materials under non-isothermal loading conditions // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 52–64. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.005



*Received: 10.01.25;* *accepted: 14.04.25;* *published: 17.06.25.*

**Введение.** Термопластичность композиционных материалов является одной из ключевых областей исследования в современной механике материалов. Композиционные материалы обладают уникальными свойствами, такими как высокая прочность, жесткость и устойчивость к коррозии, что делает их незаменимыми во многих отраслях. Однако сложная структура этих материалов требует специальных теоретических подходов для точного описания их механического поведения при неизотермическом нагружении за пределами упругости.

Существуют различные теории для моделирования нелинейного деформирования композиционных материалов [1–7]. В данной работе предложен вариант математической модели пластичности, основанный на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния [8–10], которые введены для описания микроструктуры материала, скрытой от внешнего наблюдателя, такой как микротрещины, микроразрушения, дислокации и др. В частном случае определяющие соотношения приведены к соотношениям эндохронной теории термопластичности [11, 12].

**1. Термодинамика неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния.** Для построения модели пластичности при неизотермическом нагружении используем термодинамический подход с внутренними параметрами состояния, опираясь на результаты работ [5, 7–10, 12]. Запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме, а второй закон термодинамики представим в виде неравенства Клазиуса-Дюгема [8]:

$$\rho T\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V + \delta_D, \quad \rho T\frac{\partial h}{\partial t} \geq -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i} + q_V, \tag{1}$$

где $\rho$ — плотность; $T$ — абсолютная температура; $h$ — массовая плотность энтропии; $\dfrac{\partial}{\partial t} \equiv \dot{(\cdot)} \equiv \dfrac{d}{dt}$; $t$ — время; $q_i$ — компоненты вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$; $x_i$ — пространственные координаты точки; $q_V$ — объемная плотность мощности тепловых источников (стоков) теплоты; $\delta_D = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ji} - \rho\left(\dfrac{\partial A}{\partial t} + h\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)$ — диссипативная функция; $i, j = 1, 2, 3$; $\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}$ — компоненты тензора малой деформации; $A$ — массовая плотность свободной энергии Гельмгольца.

Предположим, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой точки пространства может быть описано с помощью четырех термодинамических функций: массовых плотностей свободной энергии $A$ и энтропии $h$, тензора напряжений $\hat{\sigma}$, а также вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$ [5]. Аргументами данных функций будем считать следующие реактивные переменные: тензор малой деформации $\hat{\varepsilon}$, абсолютную температуру $T$ и тензорные внутренние параметры состояния с компонентами $\chi_{ij}^{(\alpha)} = \chi_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon_{kl}, T)$, где $\alpha = 1, ..., N$, а $N$ — количество внутренних параметров, $k, l = 1, 2, 3$. Тогда из системы (1), в соответствии с необходимыми и достаточными условиями реализуемости термомеханического процесса, получаем [8]

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad h = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad -\rho \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}} \dot{\chi}_{ij}^{(\alpha)} - \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \tag{2}$$

Пусть компоненты тензора деформации $\varepsilon_{ij}$ и внутренних параметров состояния $\chi_{ij}^{(\alpha)}$ малы ($\|\varepsilon_{ij}\| \ll 1$ и $\|\chi_{ij}^{(\alpha)}\| \ll 1$). Тогда разложим объемную плотность свободной энергии $\rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)})$ в ряд по формуле Тейлора относительно этих переменных, ограничившись квадратичными членами:

$$\begin{gathered} \rho A(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}) = \rho A(0, T, 0) + \rho \left( \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} + \rho \sum_{\alpha=1}^{N} \left( \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}} \right)_{0,T,0} \chi_{ij}^{(\alpha)} + \\ + \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \rho \sum_{\alpha=1}^{N} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \chi_{kl}^{(\alpha)}} \right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} \chi_{kl}^{(\alpha)} + \\ + \frac{1}{2} \rho \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)} \partial \chi_{kl}^{(\beta)}} \right)_{0,T,0} \chi_{ij}^{(\alpha)} \chi_{kl}^{(\beta)}. \end{gathered} \tag{3}$$

Для конкретизации данного соотношения определим количество внутренних параметров состояния, их природу и эволюционные уравнения.

*1.1. Внутренние параметры состояния: их природа и эволюционные уравнения.* В настоящей работе будем рассматривать два тензорных внутренних параметра состояния: $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$. Параметр $\chi_{ij}^{(S)}$ отвечает за возникновение необратимой деформации при силовом нагружении, $\chi_{ij}^{(T)}$ — при температурном нагружении. Для описания эволюции этих параметров постулируем существование следующих кинетических уравнений:

$$\tau_{ijkl}^{(S)} \frac{\partial \chi_{kl}^{(S)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(S)} = \overline{\chi}_{ij}^{(S)}, \quad \tau_{ijkl}^{(T)} \frac{\partial \chi_{kl}^{(T)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(T)} = \overline{\chi}_{ij}^{(T)}. \tag{4}$$

Здесь $\tau_{ijkl}^{(S)} = \tau_{ijkl}^{(S)}(T)$, $\tau_{ijkl}^{(T)} = \tau_{ijkl}^{(T)}(T)$ — компоненты положительно определенных тензоров времен релаксации параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ соответственно; $\overline{\chi}_{ij}^{(S)}$, $\overline{\chi}_{ij}^{(T)}$ — установившиеся значения этих параметров; $z$ — внутреннее время, дифференциал которого определяется выражением $dz = d\xi / f(\xi)$ [6], где $f(\xi) = 1 + \beta\xi$ — материальная функция, $\beta = \beta(T)$ — материальный параметр; $d\xi$ — приращение меры внутреннего времени, определяемое как [7]:

$$d\xi = \sqrt{P_{ijkl}\, d\varepsilon_{ij}\, d\varepsilon_{kl} + m^2\, dT^2}, \tag{5}$$

где $P_{ijkl} = P_{ijkl}(T)$ — компоненты симметричного положительно определенного тензора материальных параметров [5]; $m = m(T)$ — материальный параметр модели, описывающий необратимую деформацию при изменении температуры [7].

В настоящей работе ограничимся рассмотрением следующих видов тензоров:

$$\tau^{(S)}_{ijkl}=\begin{cases}\tau^{(S)}_{ijkl}, & i=k\wedge j=l,\\ 0, & i\neq k\vee j\neq l,\end{cases}\quad \tau^{(T)}_{ijkl}=\begin{cases}\tau^{(T)}_{ijkl}, & i=k\wedge j=l,\\ 0, & i\neq k\vee j\neq l,\end{cases}$$

со следующими условиями симметрии: $\tau^{(S)}_{ijkl}=\tau^{(S)}_{jilk}$ и $\tau^{(T)}_{ijkl}=\tau^{(T)}_{jilk}$. При переходе к матричной форме записи тензоры времен релаксации принимают вид диагональных матриц.

В результате получим несвязанные системы дифференциальных уравнений (4), решение которых для внутренних параметров $\chi^{(S)}_{ij}$ и $\chi^{(T)}_{ij}$ имеют вид:

$$\chi^{(S)}_{ij}=\overline{\chi}^{(S)}_{ij}-\int_0^z \exp\left(-a^{(S)}_{ijkl}(z-z')\right)\frac{\partial\overline{\chi}^{(S)}_{kl}}{\partial z'}dz',$$

$$\chi^{(T)}_{ij}=\overline{\chi}^{(T)}_{ij}-\int_0^z \exp\left(-a^{(T)}_{ijkl}(z-z')\right)\frac{\partial\overline{\chi}^{(T)}_{kl}}{\partial z'}dz',$$

где $a^{(S)}_{ijkl}=1/\tau^{(S)}_{ijkl}$, $a^{(T)}_{ijkl}=1/\tau^{(T)}_{ijkl}$ — компоненты тензоров материальных параметров; $m,n=1,2,3$.

Установившиеся значения внутренних параметров определим следующим образом:

$$\overline{\chi}^{(S)}_{ij}=X_{ijkl}\varepsilon_{kl},\quad \overline{\chi}^{(T)}_{ij}=\widetilde{Y}_{ijkl}\varepsilon^{(T)}_{kl},\tag{6}$$

где $X_{ijkl},\widetilde{Y}_{ijkl}$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

*1.2. Определяющее соотношение и уравнение теплопроводности математической модели с внутренними параметрами состояния.* Определив количество, природу и эволюционные уравнения для внутренних параметров, а также исключив их взаимное влияние, соотношение (3) для объемной плотности свободной энергии Гельмгольца примет вид:

$$\rho A(\varepsilon_{ij},T,\chi^{(\alpha)}_{ij})=\rho B-D^*_{ij}\varepsilon_{ij}+F^*_{ij}\chi^{(S)}_{ij}-G^*_{ij}\chi^{(T)}_{ij}+\frac{1}{2}C^*_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\tag{7}$$

$$-M^*_{ijkl}\varepsilon_{ij}\chi^{(S)}_{kl}+N^*_{ijkl}\varepsilon_{ij}\chi^{(T)}_{kl}+\frac{1}{2}H^*_{ijkl}\chi^{(S)}_{ij}\chi^{(S)}_{kl}+\frac{1}{2}L^*_{ijkl}\chi^{(T)}_{ij}\chi^{(T)}_{kl}.$$

Здесь для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$B=A(0,T,0),\ D^*_{ij}=-\rho\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{0,T,0},\ C^*_{ijkl}=\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\right)_{0,T,0},$$

$$F^*_{ij}=\rho\left(\frac{\partial A}{\partial\chi^{(S)}_{ij}}\right)_{0,T,0},\ M^*_{ijkl}=-\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\chi^{(S)}_{kl}}\right)_{0,T,0},\ H^*_{ijkl}=\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\chi^{(S)}_{ij}\partial\chi^{(S)}_{kl}}\right)_{0,T,0},$$

$$G^*_{ij}=-\rho\left(\frac{\partial A}{\partial\chi^{(T)}_{ij}}\right)_{0,T,0},\ N^*_{ijkl}=\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\chi^{(T)}_{kl}}\right)_{0,T,0},\ L^*_{ijkl}=\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\chi^{(T)}_{ij}\partial\chi^{(T)}_{kl}}\right)_{0,T,0},$$

где $B=B(T)$ — массовая плотность свободной энергии Гельмгольца при нулевых значениях деформации и внутренних параметров; $F^*_{ij}=F^*_{ij}(T)$, $G^*_{ij}=$

$G^*_{ij}(T)$, $D^*_{ij} = D^*_{ij}(T)$ — компоненты симметричных тензоров 2-го ранга; $M^*_{ijkl} = M^*_{ijkl}(T)$, $N^*_{ijkl} = N^*_{ijkl}(T)$, $C^*_{ijkl} = C^*_{ijkl}(T)$, $H^*_{ijkl} = H^*_{ijkl}(T)$, $L^*_{ijkl} = L^*_{ijkl}(T)$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

Для получения определяющего соотношения подставим выражение (7) в первое уравнение (2) и учтем соотношение (6). После упрощения получим:

$$\sigma_{ij} = \sigma^0_{ij}(T) - \sigma^{(S)}_{ij}(T) + \left(C^*_{ijkl} - \widetilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} M^*_{mnkl}\right)\varepsilon_{kl} - \\ - \left(M^*_{ijkl} - \widetilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} H^*_{mnkl}\right)\chi^{(S)}_{kl} + N^*_{ijkl}\chi^{(T)}_{kl}, \quad p,q = 1,2,3, \tag{8}$$

где $\widetilde{X}_{ijpq} = X_{ijkl}\dfrac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{pq}}$; $\sigma^0_{ij}(T) = D^*_{ij}(T) = C^*_{ijkl}\varepsilon^{(T)}_{kl}$ — компоненты тензора начальных напряжений при стесненном нагреве в случае отсутствия внутренних параметров; $\sigma^{(S)}_{ij}(T)$ — компоненты тензора начальных напряжений при стесненном нагреве, вызванные влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\overline{\chi}^{(S)}_{ij}$ и равные:

$$\sigma^{(S)}_{ij}(T) = \frac{\partial \chi^{(S)}_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}} F^*_{mn} = \widetilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} F^*_{mn}, \tag{9}$$

где $F^*_{mn} = K^*_{mnkl}\varepsilon^{(T)}_{kl}$, $K^*_{mnkl} = K^*_{mnkl}(T)$ — компоненты симметричного тензора 4-го ранга. Здесь $\varepsilon^{(T)}_{kl}$ — компоненты тензора температурной деформации, определяемые как: $\varepsilon^{(T)}_{kl} = \int_{T_0}^{T} \alpha^{(T)}_{kl} dT'$, где $\alpha^{(T)}_{kl} = \alpha^{(T)}_{kl}(T)$ — компоненты тензора температурных коэффициентов линейного расширения, $T_0$ — температура естественного состояния.

Перепишем соотношение (8) в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \left(C^*_{ijkl} - \widetilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} M^*_{mnkl}\right)\varepsilon_{kl} - \left(C^*_{ijkl} - \widetilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} K^*_{mnkl}\right)\varepsilon^{(T)}_{kl} - \\ - \left(M^*_{ijkl} - \widetilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} H^*_{mnkl}\right)\chi^{(S)}_{kl} + N^*_{ijkl}\chi^{(T)}_{kl}. \tag{10}$$

В частном случае, когда $K^*_{mnkl} = M^*_{mnkl}$, данное соотношение можно упростить:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^{(T)}_{kl}\right) - M_{ijkl}\chi^{(S)}_{kl} + N_{ijkl}\chi^{(T)}_{kl}, \tag{11}$$

где

$$C_{ijkl} = C^*_{ijkl} - \widetilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} M^*_{mnkl}, \;\; M_{ijkl} = M^*_{ijkl} - \widetilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} H^*_{mnkl}, N_{ijkl} = N^*_{ijkl}.$$

Здесь $C_{ijkl} = C_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных упругих жесткостей; $M_{ijkl} = M_{ijkl}(T)$, $N_{ijkl} = N_{ijkl}(T)$ — компоненты тензоров 4-го ранга.

Для вычисления массовой плотности энтропии подставим выражение (7) во второе уравнение (2) и учтем соотношение (9). После упрощения получим:

$$\begin{gathered}
h=-\frac{dB}{dT}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{dC^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon_{kl}-\frac{dC^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon^{(T)}_{kl}-\frac{dM^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{kl}+\frac{dN^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{kl}\right)\varepsilon_{ij}+ \\
+\frac{1}{\rho}\frac{\partial G^*_{kl}}{\partial T}\chi^{(T)}_{kl}+\frac{1}{\rho}G^*_{kl}a^{(T)}_{klmn}\widetilde{Y}_{mnpq}\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T}+ \\
+\frac{1}{\rho}\left(C^*_{ijpq}\varepsilon_{ij}-K^*_{ijpq}\chi^{(S)}_{ij}-\left(N^*_{ijkl}\varepsilon_{ij}+L^*_{ijkl}\chi^{(T)}_{ij}\right)a^{(T)}_{klmn}\widetilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T}- \\
-\frac{1}{\rho}\frac{dK^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{ij}\varepsilon^{(T)}_{kl}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\left(\frac{dH^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{ij}\chi^{(S)}_{kl}+\frac{dL^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{ij}\chi^{(T)}_{kl}\right),
\end{gathered}\tag{12}$$

где слагаемые $\dfrac{1}{\rho}G^*_{kl}a^{(T)}_{klmn}\widetilde{Y}_{mnpq}\dfrac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T}$ и $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial G^*_{kl}}{\partial T}\chi^{(T)}_{kl}$ отвечают за изменение энтропии при стесненном нагреве, вызванное влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\chi^{(T)}_{kl}$ и его эволюции соответственно. Тогда компоненты тензора $G^*_{kl}$ можно определить как $G^*_{kl}=R^*_{klij}\varepsilon^{(T)}_{ij}$, где $R^*_{klij}=R^*_{klij}(T)$ — компоненты симметричного тензора 4-го ранга.

Перепишем соотношение (12) в следующем виде:

$$\begin{gathered}
h=-\frac{dB}{dT}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{dC^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon_{kl}-\frac{dC^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon^{(T)}_{kl}-\frac{dM^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{kl}+\frac{dN^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{kl}\right)\varepsilon_{ij}+ \\
+\frac{1}{\rho}\left(C^*_{ijpq}\varepsilon_{ij}-K^*_{ijpq}\chi^{(S)}_{ij}+R^*_{ijpq}\chi^{(T)}_{ij}\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T}- \\
-\frac{1}{\rho}\left(N^*_{ijkl}\varepsilon_{ij}-R^*_{ijkl}\varepsilon^{(T)}_{ij}+L^*_{ijkl}\chi^{(T)}_{ij}\right)a^{(T)}_{klmn}\widetilde{Y}_{mnpq}\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T}- \\
-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dK^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{ij}-\frac{dR^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{ij}\right)\varepsilon^{(T)}_{kl}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\left(\frac{dH^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{ij}\chi^{(S)}_{kl}+\frac{dL^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{ij}\chi^{(T)}_{kl}\right).
\end{gathered}\tag{13}$$

Тензоры $\hat{\mathbf{K}}^*$, $\hat{\mathbf{R}}^*$, $\hat{\mathbf{M}}^*$, $\hat{\mathbf{N}}^*$, $\hat{\mathbf{H}}^*$, $\hat{\mathbf{L}}^*$ необходимо определять с учетом ограничений, накладываемых диссипативным неравенством (2).

Для получения уравнения теплопроводности подставим выражение (13) в (1). После упрощения получим:

$$\rho c\dot{T}=TW_{ij}\dot{\varepsilon_{ij}}-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+q_V+\delta^*_D+\delta_D.\tag{14}$$

Здесь $c$ — эффективная удельная массовая теплоемкость, определяемая как

$$c = c_\varepsilon - \frac{1}{\rho}T\left(\frac{1}{2}\frac{d^2C^*_{ijkl}}{dT^2}\varepsilon_{kl} - \frac{d^2C^*_{ijkl}}{dT^2}\varepsilon^{(T)}_{kl} - \frac{d^2M^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(S)}_{kl} + \frac{d^2N^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(T)}_{kl}\right)\varepsilon_{ij} +$$
$$+\frac{2}{\rho}T\left(\frac{dC^*_{ijpq}}{dT}\varepsilon_{ij} - \frac{dK^*_{ijpq}}{dT}\chi^{(S)}_{ij} + \frac{dR^*_{ijpq}}{dT}\chi^{(T)}_{ij}\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} -$$
$$-\frac{1}{\rho}T\left(\frac{dN^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon_{ij} - \frac{dR^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon^{(T)}_{ij} - R^*_{ijkl}\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{ij}}{\partial T} + \frac{dL^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{ij}\right)a^{(T)}_{klmn}\widetilde{Y}_{mnpq}\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} -$$
$$-\frac{1}{\rho}T\left(\frac{d^2K^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(S)}_{ij} - \frac{d^2R^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(T)}_{ij}\right)\varepsilon^{(T)}_{kl} -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}T\left(\frac{d^2H^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(S)}_{ij}\chi^{(S)}_{kl} + \frac{d^2L^*_{ijkl}}{dT^2}\chi^{(T)}_{ij}\chi^{(T)}_{kl}\right),$$

где $c_\varepsilon = -T\dfrac{d^2B}{dT^2}$ — удельная массовая теплоемкость при постоянном объеме; $W_{ij}$ — компоненты симметричного тензора второго ранга, равные

$$W_{ij} = \frac{dC^*_{ijkl}}{dT}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^{(T)}_{kl}\right) - \left(C^*_{ijpq} - N^*_{ijkl}a^{(T)}_{klmn}\widetilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} - \frac{dM^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{kl} + \frac{dN^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{kl};$$

$\delta^*_D$ — дополнительное термодинамическое слагаемое, описывающее процессы рассеяния энергии, вызванные влиянием внутренних параметров состояния, и определяемое как

$$\delta^*_D = T\left(\frac{dM^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon_{kl} - \frac{dK^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon^{(T)}_{kl} - K^*_{ijkl}\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{kl}}{\partial T} - \frac{dH^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(S)}_{kl}\right)\dot{\chi}^{(S)}_{ij} -$$
$$-T\left(\frac{dN^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon_{kl} - \frac{dR^*_{ijkl}}{dT}\varepsilon^{(T)}_{kl} - \left(R^*_{ijpq} - L^*_{ijkl}a^{(T)}_{klmn}\widetilde{Y}_{mnpq}\right)\frac{\partial\varepsilon^{(T)}_{pq}}{\partial T} + \frac{dL^*_{ijkl}}{dT}\chi^{(T)}_{kl}\right)\dot{\chi}^{(T)}_{ij}.$$

Уравнения (10) и (14) совместно с уравнением равновесия и соотношениями Коши, а также с начальными и граничными условиями формируют связанную краевую задачу термопластичности с внутренними параметрами состояния.

**2. Вариант эндохронной теории пластичности при неизотермическом нагружении.** Для получения определяющих соотношений эндохронной теории пластичности в условиях неизотермического нагружения примем следующие допущения [8]:

$$M_{ijkl} = N_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad X_{mnkl} = \widetilde{Y}_{mnkl} = I_{mnkl},$$

где $I_{mnkl}$ — единичный тензор 4-го ранга.

В этом случае соотношение (11), учитывая установившиеся значения внутренних параметров состояния (6), примет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \int_0^z \exp\left(-a_{klmn}^{(S)}\left(z-z'\right)\right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial z'} dz' - \tag{15}$$
$$-C_{ijkl} \int_0^z \exp\left(-a_{klmn}^{(T)}\left(z-z'\right)\right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}^{(T)}}{\partial z'} dz' = \sigma_{ij}^{(S)} - \sigma_{ij}^{(T)},$$

где компоненты вспомогательных тензоров напряжений $\sigma_{ij}^{(S)}$ и $\sigma_{ij}^{(T)}$ равны:

$$\sigma_{ij}^{(S)} = C_{ijkl} \int_0^z \exp\left(-a_{klmn}^{(S)}\left(z-z'\right)\right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial z'} dz',$$

$$\sigma_{ij}^{(T)} = C_{ijkl} \int_0^z \exp\left(-a_{klmn}^{(T)}\left(z-z'\right)\right) \frac{d \varepsilon_{mn}^{(T)}}{\partial z'} dz'.$$

Продифференцировав соотношения (15) по внутреннему времени, получим:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(d\varepsilon_{kl} - \left(a_{klmn}^{(S)} S_{mnpq} \sigma_{pq}^{(S)} - a_{klmn}^{(T)} S_{mnpq} \sigma_{pq}^{(T)}\right) dz\right) + \tag{16}$$
$$+\left(\frac{dC_{ijkl}}{dT} S_{klmn} \sigma_{mn} - C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)}\right) dT,$$

где $S_{ijkl} = S_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных коэффициентов податливости, определяемые из соотношения $S_{ijkl} C_{klmn} = I_{ijmn}$.

Обратное соотношение:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} d\sigma_{kl} + \left(a_{ijkl}^{(S)} S_{klmn} \sigma_{mn}^{(S)} - a_{ijkl}^{(T)} S_{klmn} \sigma_{mn}^{(T)}\right) dz - \tag{17}$$
$$-S_{ijkl} \frac{dC_{klmn}}{dT} S_{mnpq} \sigma_{pq} dT + \alpha_{ij}^{(T)} dT.$$

Здесь приращение внутреннего времени $dz$ определяем из уравнения $dz = d\xi / f(\xi)$, в котором материальная функция $f(\xi)$ задана как $f(\xi) = 1 + \beta\xi$, где $\beta$ — материальный параметр модели. Приращение меры внутреннего времени $d\xi$ определяем из уравнения (5).

Из соотношения (15) следует, что при $z \to 0$ материал деформируется упруго, то есть $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}$.

При выводе этих уравнений был рассмотрен общий случай, в котором все параметры материала зависят от температуры. Ограничимся случаем, когда от температуры зависят только компоненты $C_{ijkl}, \alpha_{ij}^{(T)}$, $P_{ijkl}$ и $\beta$. Для обеспечения непрерывности по температуре компоненты тензора $P_{ijkl}(T)$ и материального параметра $\beta(T)$ зададим следующим образом:

$$P_{ijkl}(T) = P_{ijkl}\left(T_0\right) \cdot \Omega(T), \quad \beta(T) = \beta\left(T_0\right) + \Psi(T),$$

где $P_{ijkl}\left(T_0\right), \beta\left(T_0\right)$ — материальные параметры при температуре естественного состояния; $\Omega(T), \Psi(T)$ — функции, непрерывные по температуре, причем

$\Omega\left(T_0\right)=1$ и $\Psi\left(T_0\right)=0$. В общем случае функция $\Omega(T)$ может иметь тензорный вид.

**3. Пример расчета для демонстрации полученных соотношений.** Для демонстрации полученных соотношений (16)–(17) рассмотрим моделирование термосилового нагружения однонаправленного волокнистого композиционного материала AS4/PEEK с различными углами армирования, предполагая, что задача термически несвязанная. Характеристики данного материала приведены в табл. 1.

| Свойства | Размерность | Температура, °C | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 24($T_0$) | 66 | 121 | 177 |
| $E_1$ | ГПа | 127,6 | 129,5 | 128,2 | 127,5 |
| $E_2$ | ГПа | 10,3 | 9,6 | 8,3 | 4,9 |
| $G_{12}$ | ГПа | 6,0 | 5,4 | 4,9 | 2,8 |
| $\nu_{12}$ | | 0,33 | | | |
| $\alpha_{11}^{(T)}$ | $\times 10^{-6}C^{-1}$ | $3,15\cdot 10^{-5}\cdot T^2-0,004\cdot T+0,1362$ | | | |
| $\alpha_{22}^{(T)}$ | $\times 10^{-6}C^{-1}$ | 30,19 | | | |

Таблица 1. Характеристики ОВКМ AS4/PEEK [3]

Материальные параметры, определяющие нелинейное поведение материала, устанавливаем на основе наилучшего совпадения экспериментальных и теоретических результатов. Поскольку ОВКМ AS4/PEEK не подвержен термическому гистерезису [3], принимаем, $\left[a^{(S)}\right]=\left[a^{(T)}\right]$ и $m=0$, что соответствует отсутствию необратимой деформации при температурном нагружении. Материальный параметр $\beta\left(T_0\right)$ принимаем равным нулю, поскольку кривые деформирования при температуре естественного состояния не имеют выраженного линейного участка при развитой деформации. Значение остальных материальных параметров имеют следующий вид:

$$\left[P\left(T_0\right)\right]=\begin{bmatrix}1,064 & 2,16 & 0\\ 2,16 & 7,332 & 0\\ 0 & 0 & 11,907\end{bmatrix},\ \left[a^{(S)}\right]=\begin{bmatrix}0,246 & 0 & 0\\ 0 & 9,013 & 0\\ 0 & 0 & 19,978\end{bmatrix};$$

функции $\Omega(T)$ и $\Psi(T)$ для $T\geq T_0$ заданы следующим образом:

$$\Omega(T)=1,68\cdot 10^{-4}\cdot\left(T-T_0\right)^2+0,01\cdot\left(T-T_0\right)+1,0;$$
$$\Psi(T)=8,06\cdot 10^{-5}\cdot\left(T-T_0\right)^2+2,07\cdot 10^{-3}\cdot\left(T-T_0\right).$$

В качестве моделируемого эксперимента рассмотрим внеосевое растяжение при различных температурах. Расчет выполнен в два этапа: 1-ый этап — предварительный нагрев, 2-ой этап — растяжение при постоянной температуре. Полученные результаты приведены на рис. 1. Графики демонстрируют хорошее

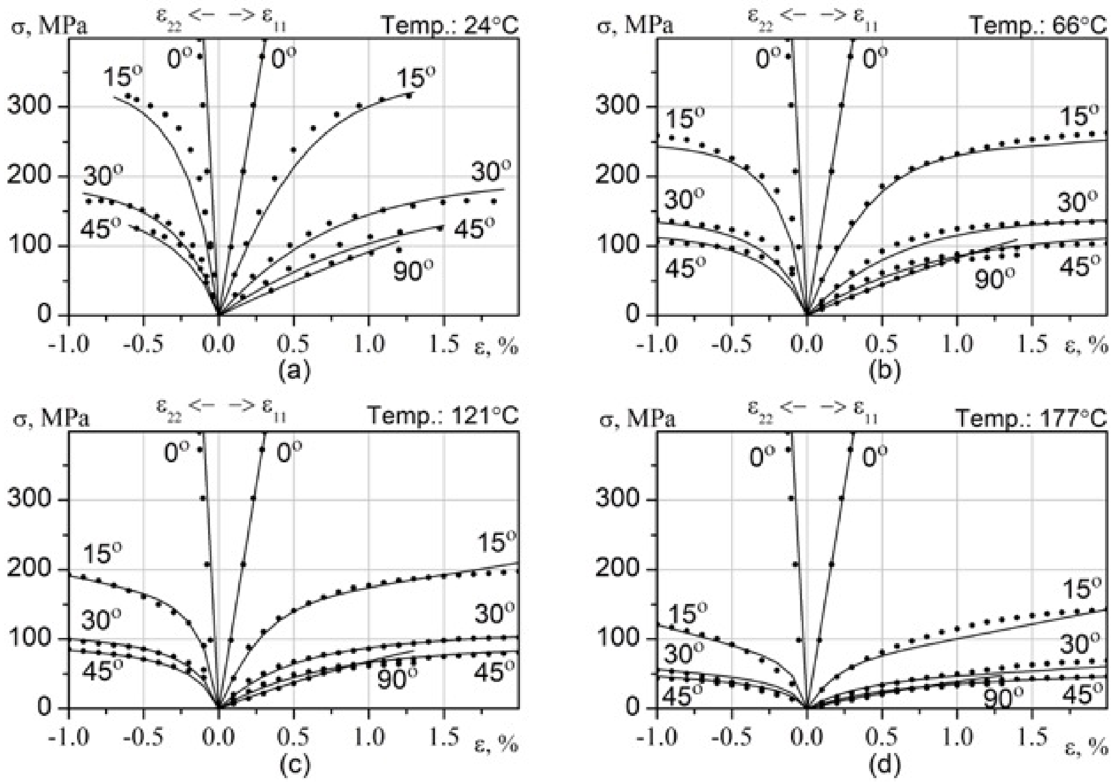



Рис. 1. Диаграммы деформирования AS4/PEEK при температурах: 24°C (a), 66°C (b), 121°C (c), 177°C (d). Сплошная линия — расчет, точки — эксперимент [3]

согласование расчетных значений по эндохронной теории термопластичности с экспериментальными данными.

**4. Заключение.** В работе предложен вариант математической модели пластичности для композиционных материалов при неизотермическом нагружении. Получены определяющие соотношения и уравнение теплопроводности для формирования связанной краевой задачи термопластичности. В частном случае модель приведена к соотношениям эндохронной теории термопластичности. Проведенные расчеты показали хорошее согласование с экспериментальными данными.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** В. Н. Зимин — разработка концепции моделирования, согласование финальной версии рукописи, Д. Р. Рахимов — построение математической модели, проведение численных расчетов, написание текста рукописи, И. Ю. Савельева — построение математической модели, редактирование текста рукописи.
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (код проекта FSFN-2024-0004).

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** V. N. Zimin — development of the modeling concept, approval of the final manuscript version, D. R. Rakhimov — development of the mathematical model, numerical calculations, manuscript writing, I. Yu. Savelyeva — development of the mathematical model, manuscript editing.
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** This work was supported by the RF Ministry of Science and Higher Education (Grant No. FSFN-2024-0004).

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Jones R. M. Deformation theory of plasticity. Blacksburg : Bull Ridge Publishing, 2009. 622 p.
[2] Amijima S., Adachi T. Nonlinear stress–strain response of laminated composites // J. Composites materials. 1979. vol. 13. P. 206—218. DOI: 10.1177/002199837901300303.
[3] Sun C. T., Yoon K. J. Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation // Journal of composite materials. 1991. vol. 25, no. 10 P. 1297—1313. DOI: 10.1177/002199839102501003
[4] Головин Н. Н., Кувыркин Г. Н. Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов // Механика твердого тела. 2016. т. 51, № 5. С. 111—123. EDN: WRJKKV
[5] Кувыркин Г. Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М. : Изд-во МГТУ, 1993. 142 с.
[6] Сарбаев Б. С., Барышев А. Н. Расчет диаграмм деформирования композиционных материалов с тканым наполнителем посредством эндохронной теории пластичности // Вест. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 4. С. 65—75. EDN: ZEWDSR. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-4-65-75
[7] Сарбаев Б. С. Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 7. С. 97—104. EDN: LUVWOJ. DOI: 10.1134/S0235711919070113
[8] Зарубин В. С., Кувыркин. Г. Н. Математические модели термомеханики. М. : Физматлит, 2002. 168 с.
[9] Maugin G., Muschik W. Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1994. vol. 19, no. 3. P. 217—249. DOI: 10.1515/jnet.1994.19.3.217
[10] Maugin G. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. 350 p.
[11] Зимин В. Н., Кувыркин Г. Н., Рахимов Д. Р. Проектирование высокоэффективного металлокомпозитного баллона высокого давления сферической формы // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 14–24. EDN: TJRBUC. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.002

[12] Кувыркин Г. Н., Рахимов Д. Р. Вычислительный алгоритм исследования определяющих соотношений эндохронной теории термопластичности для изотропных материалов // Прикладная механика и техническая физика. 2024. № 3. С. 116–122. EDN: HYUCWQ. DOI: 10.15372/PMTF202315386

## REFERENCES

[1] Jones R. M. Deformation theory of plasticity. Blacksburg : Bull Ridge Publishing, 2009. 622 p.
[2] Amijima S., Adachi T. Nonlinear stress–strain response of laminated composites // J. Composites materials. 1979. vol. 13. P. 206—218. DOI: 10.1177/002199837901300303.
[3] Sun C. T., Yoon K. J. Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation // Journal of composite materials. 1991. vol. 25, no. 10 P. 1297—1313. DOI: 10.1177/002199839102501003
[4] Golovin N. N., Kuvyrkin G. N. Mathematical models of carbon-carbon composite deformation. Mech. Solids. 2016. vol. 51. no. 5. P. 111–123 EDN: WRJKKV. (in Russian)
[5] Kuvyrkin G. N. Thermal mechanics of a deformable solid under high-intensity loading. M. : BMSTU Publ., 1993. 143 p. (in Russian)
[6] Sarbaev B. S., Baryshev A. N. Calculation of stress-strain curves of fabric reinforced composite materials using the endochronic theory of plasticity // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering. 2017. no. 4. P. 65–75. EDN: ZEWDSR. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-4-65-75. (in Russian)
[7] Sarbaev B. S. Constitutive relations of the endochronic theory of thermoplasticity for high-Temperature composites // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2019. no. 7. P. 97—104. EDN: LUVWOJ. DOI: 10.1134/S0235711919070113 (in Russian)
[8] Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N. Mathematical models of thermomechanics. M. : Fizmatlib Publ., 2002. 168 p. (in Russian)
[9] Maugin G., Muschik W. Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1994. vol. 19, no. 3. P. 217—249. DOI: 10.1515/jnet.1994.19.3.217
[10] Maugin G. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. 350 p.
[11] Zimin V. N., Kuvyrkin G. N., Rakhimov D. R. Design of a highly effective metal composite high-pressure vessel of spherical shape // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2022. no. 4 (54). P. 14–24. EDN: TJRBUC. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.002 (in Russian)
[12] Kuvyrkin G. N., Rakhimov D. R. Computation algorithm of research the governing relations of the endochronic theory of thermoplasticity for isotropic materials // J. Appl. Mech. Tech. Phy. 2024. no. 3. P. 116–122. EDN: HYUCWQ. DOI: 10.15372/PMTF202315386. (in Russian)

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.006* *EDN: WQCBXU*

*Научная статья* *УДК: 53.096*

*В. И. Струкова, А. А. Каменских, Ю. О. Носов, Д. О. Пустовалов*

# ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ФОТОПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия*

***Аннотация.*** Объектом исследования являются фотополимерные смолы после отверждения. Материалы широко применяются при аддитивном выращивании прототипов для литья по выжигаемым моделям. Исследователями отмечается негативное влияние термического расширения прототипов из фотополимерных смол, что приводит к браку. Целью работы является построение вязкоупругой модели материала. Математическое описание поведения материалов направленное на прогнозирование напряжено-деформированного состояния объекта исследования при сложных технологических условиях. В первом приближении для описания поведения материала выбрана модель Максвелла на основе рядов Prony с использованием процедуры численной идентификации. В работе выполнено построение модели поведения Envisiontec SI500 на основе данных натурных экспериментов в диапазоне температур от 0 до 100 °C. Построены зависимости $E(T, \dot{T})$.

***Ключевые слова***: фотополимер, температура, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, Prony, термомеханика, эксперимент, процедура идентификации.

**Струкова Вероника Ивановна**, аспирант, ассистент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики; `e-mail:` veloiv_pstu@mail.ru; `https://orcid.org/0009-0004-6241-4388`; AuthorID: 1097965

**Каменских Анна Александровна**, кандидат технических наук, доцент, заведующий лабораторией цифрового инжиниринга машиностроительных процессов и производств; `e-mail:` anna_kamenskih@mail.ru; `https://orcid.org/0000-0002-3012-2418`; AuthorID: 641861

**Носов Юрий Олегович**, аспирант, научный сотрудник лаборатории цифрового инжиниринга машиностроительных процессов и производств; `e-mail:` ura.4132@yandex.ru; `https://orcid.org/0000-0002-5736-8645`; AuthorID: 1050564

**Пустовалов Дмитрий Олегович**, старший преподаватель кафедры инновационные технологии машиностроения; `e-mail:` pustovalov.dmitrii@inbox.ru; `https://orcid.org/0000-0003-1700-9856`; AuthorID: 654687

***для цитирования:*** *Струкова В. И., Каменских А. А., Носов Ю. О., Пустовалов Д. О.* Термомеханическая модель поведения фотополимерного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 65–75. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.006. EDN: WQCBXU



*Поступила: 01.02.25;* *принята в печать: 13.04.25;* *опубликована: 17.06.25.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.006* *EDN: WQCBXU*
*Research Article*

*V. I. Strukova, A. A. Kamenskikh, Yu. O. Nosov, D. O. Pustovalov*

# THERMOMECHANICAL MODEL OF PHOTOPOLYMER MATERIAL

*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia*

***Abstract.*** Photopolymer resins after curing are the subject of research. The materials are widely used in additive manufacturing of prototypes for casting on burnt model. The negative impact of thermal expansion of photopolymer resins prototypes made, which leads to defects is noted by researchers. The aim of the work is to construct a viscoelastic model of the material. The mathematical description of the materials behavior is aimed at predicting the stress-strain state of the research object under complex technological conditions. The Maxwell model on the basis of Prony series, is chosen to describe the material behavior in the first approximation. The author's numerical identification procedure is used to describe the material model. The Envisiontec SI500 behavior model construction was performed in the work based on data from experiments in the temperature range from 0 to 100 °C. The $E(T, \dot{T})$ dependencies are constructed.

***Keywords***: photopolymer, temperature, Young's modulus, Poisson's ratio, Prony, thermomechanics, experiment, identification procedure.

**Veronika I. Strukova**, Postgraduate, Assistant; `e-mail:` veloiv_pstu@mail.ru; `https://orcid.org/0009-0004-6241-4388`; AuthorID: 1097965

**Anna A. Kamenskikh**, Associate Professor; `e-mail:` anna_kamenskih@mail.ru; `https://orcid.org/0000-0002-3012-2418`; AuthorID: 641861

**Yuriy O. Nosov**, Postgraduate, Researcher,; `e-mail:` ura.4132@yandex.ru; `https://orcid.org/0000-0002-5736-8645`; AuthorID: 1050564

**Dmitry O. Pustovalov**, Senior Lecturer; `e-mail:` pustovalov.dmitrii@inbox.ru; `https://orcid.org/0000-0003-1700-9856`; AuthorID: 654687

***to cite this article:*** *Strukova V. I., Kamenskikh A. A., Nosov Yu. O., Pustovalov D. O.* Thermomechanical model of photopolymer material // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 65–75. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.006



*Received: 01.02.25;* *accepted: 13.04.25;* *published: 17.06.25.*

**Введение.** Литейные технологии широко используются для производства машиностроительных и авиационных деталей при крупносерийном и мелкосерийном производстве [1, 2]. Качество изделия во многом зависит от формы, в которую происходит заливка расплава, и технологий ее получения [3]. Временные и экономические затраты на производство твердой оснастки или пресс-форм являются сдерживающим фактором для отработки технологического процесса при изготовлении опытных деталей [2]. Аддитивные технологии внедряются при печати песком литейных форм [6], литье по выплавляемым и выжигаемым моделям [7] и прецизионном литье [8] для быстрого создания формы требуемого качества. Внедрение в литейные технологические процессы методов и средств аддитивных технологий является передовым направлением развития, направленным на увеличение гибкости и эффективности технологических процессов литья [3, 4]. А также создание сложных, в том числе и тонкостенных геометрических объектов [5]. Одним из наиболее перспективных технологических решений для быстрого прототипирования является процесс литья по выжигаемым моделям. Упрощенная схема технологического процесса представлена на рис. 1.


Рис. 1. Схема технологического процесса литья по выжигаемым моделям

Физико-механические, технологические, реакционные и эксплуатационные свойства фотополимеров оказывают влияние на качество поверхности литого изделия на I-V этапах в части морфологии и шероховатости. Основное влияние термомеханики материала на технологический процесс наблюдается на VI этапе, когда происходит выплавление фотополимерной модели для получения литейной формы из гипса или мелкодисперсного кварца. Исследователями отмечаются большие деформации фотополимерного материала в процессе выжигания [9]. Данный эффект приводит к появлению микро- и макро-трещин и выбраковке формы [10, 11]. На последних этапах технологического процесса морфология фотополимерного прототипа остаточно влияет на качество изделия, полученного при помощи литья. Для снижения негативного эффекта рассматриваются ячеистые структуры разной геометрии [6, 12], изменение рецептуры материалов [13], исследования влияния технологических режимов [3] и т.д. Но для рационализации технологических процессов требуется применение методов математического моделирования и предиктивной аналитики, в том числе для создания численных моделей поведения материалов [14, 15].

**Термомеханические свойства фотополимерного материала.** В данной работе рассмотрена задача, связанная с описанием модели поведения фотополимерного материала на основе соотношений термовязкоупругости с использованием численной процедуры идентификации, ранее подтвердившая свою функциональность при описании смазочных и полимерных материалов [16]. В первом приближении в качестве материала исследования выбран фотополимер Envisiontec SI500 (EnvisionTec Inc., Ferndale, Michigan) [15]. Работа направлена на адаптацию алгоритмов, а также оценку возможности описания фотополимерных материалов как тела Максвелла с использованием рядов Prony. В рамках исследования выполнено имитационное моделирование DMA-эксперимента при нагреве цилиндрических образцов 3×7 и 4×9 мм при $T \in [0; 100]$ °C с разной скоростью нагрева $\dot{T} \in [5; 15]$ °C/мин при одноосном деформировании образца $u_z = 0,005l$. Эксперимент позволяет определить зависимости механических характеристик материалов от температуры (времени, частоты) при действии на образец осциллирующей силы. На рис. 2 представлены зависимости физико-механических свойств материала от температуры: модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона. Данные получены осреднением результатов экспериментальной выборки.

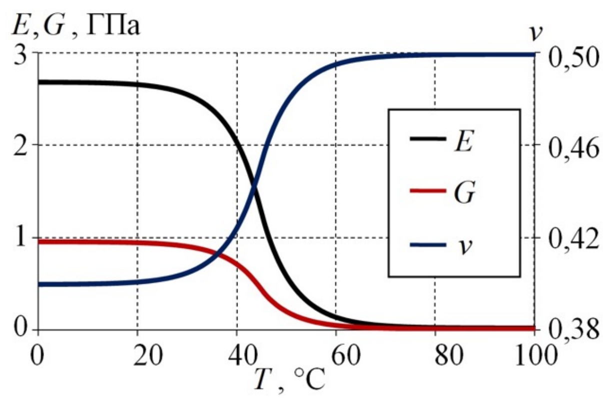



Рис. 2. Зависимость физико-механических свойств фотополимерного материала Envisiontec SI500 от температуры

**Вязкоупругая модель поведения материала на основе рядов Prony.** Для описания поведения материала используются ряды Prony в связке с моделью температурно-временной аналогии Вильямса-Ландела-Ферри

(WLF), позволяющие описать поведение материала на широком диапазоне температур. Связь напряжения и деформации имеет вид (1):

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\tau)\frac{e_{ij}(\tau)}{d\tau}d\tau + \int_0^t K(t-\tau)\frac{\theta_{ij}(\tau)}{d\tau}d\tau, \tag{1}$$

где $\sigma_{ij}$ – компоненты тензора напряжений; $e_{ij}$ – компоненты девиатора деформаций; $G$ – модуль сдвига; $K$ – модуль объемного сжатия; $\theta_{ij}$ – компоненты тензора объемных деформаций. В рамках экспериментального исследования определена зависимость модуля Юнга от времени. Для возможности описания свойств фотополимерного материала рядами Prony, проведем ряд преобразований. При постоянстве модуля объемного сжатия $K$ зависимость коэффициента Пуассона от времени будет выглядеть следующим образом:

$$\nu(t) = \frac{3K - E(t)}{6K}. \tag{2}$$

Получив зависимость коэффициента Пуассона от времени, перейдем к описанию модуля сдвига от времени:

$$G(t) = \frac{E(t)}{2\Big(1-\nu(t)\Big)}. \tag{3}$$

Общий вид модуля сдвига в зависимости от времени, при описании рядами Prony имеет вид:

$$G(t) = G_\infty + G_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{\frac{-t}{\beta_i}}. \tag{4}$$

где $G_\infty$ – сдвиговой модуль в конечный момент времени; $G_0$ – сдвиговой модуль в начальный момент времени; $\alpha_i$ – весовые коэффициенты; $\beta_i$ – времена релаксации.

Для описания влияния температуры на вязкоупругие характеристики материала используется температурно-временная аналогия:

$$A_{WLF}(T) = 10^{\frac{C_1(T-T_r)}{C_2+(T-T_r)}}, \tag{5}$$

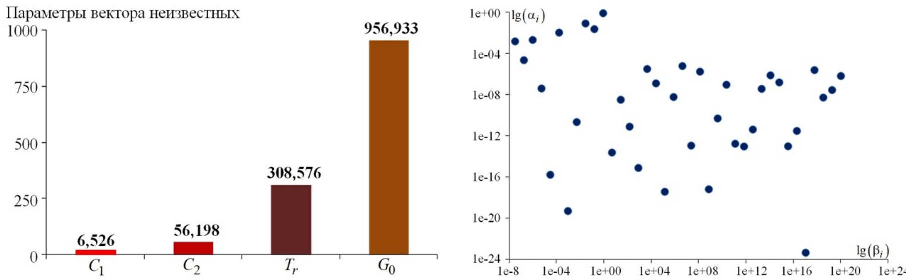
где $C_1$, $C_2$ – эмпирические постоянные материала; $T$ – текущая температура; $T_r$ – постоянная базовая температура.

Связь между временем и температурно-временной аналогией используется при учете времен релаксации:

$$\beta_i' = \frac{\beta_i}{A_{WLF}(T)}. \tag{6}$$

Вектор неизвестных $\overline{x} = \{\beta_i, \alpha_i, T_r, C_1, C_2\}$ определяется на основе (4) и (5) с использованием многопараметрического итерационного алгоритма оптимизации Нелдера-Мида. Остановка итерационной процедуры завершалась при достижении погрешности менее 5 %.

На рис. 3 представлены параметры ряда Prony для Envisiontec SI500 и связь между весовыми коэффициентами и временами релаксации.




а) б)

Рис. 3. Вызкоупругая модель поведения Envisiontec SI500 на основе рядов Prony: а – парамтеры вектора неизвестных; б – зависимость весовых коэффициентов от времен релаксации

Всего для описания термовязкоупругого поведения фотополимерного материала потребовалось определить 40 пар коэффициентов $\alpha_i - \beta_i$. Вязкоупругая модель поведения фотополимерного материала построена на основе уравнений максвелловского типа. Эта модель которая была верифицирована на имитационной модели повторяющей DMA-эксперимент.

Для анализа отличий численного и натурного эксперимента определяется $\delta = (A_{exp} - A_{num})/A_{exp} \bullet 100\%$, где $A_{exp}$ – экспериментальные данные, $A_{num}$ – данные полученные в рамках вычислительных процедур, $A$ – параметр физико-механических свойств материала ($E$, $G$, $\nu$).

На рис. 4 представлена зависимость физико-механических свойств фотополимера от температуры и расхождение результатов для натурного и численного эксперимента.

Характер зависимости физико-механических свойств материала при натурном и численном экспериментах имеет малые отличия. Расхождение данных натурного и численного эксперимента по $E$ и $G$ до температуры стеклования 35,329 °C, определенной в рамках процедуры идентификации, менее 5 %. При температурах выше температуры стеклования наблюдаются значительные отличия $E$ и $G$ натурного и численного эксперимента до 90 %. Это может быть связанно с некорректностью или отсутствием полных данных экспериментальных исследований в открытых источниках. Расхождение коэффициента Пуассона достигает 20-25 %, максимальное абсолютное значение погрешности составляет 0,099. Требуются экспериментальные исследования, направленные на определение температуры стеклования материала.

По результатам серии численных экспериментов построены зависимости $E(T, \dot{T})$ (рис. 5). Отличия модулей Юнга, полученных для образцов разной величины, не превышают 0,08 % (рис. 5, б).

На рис. 6 представлены зависимости модуля Юнга от скорости нагрева образца при разных температурах.

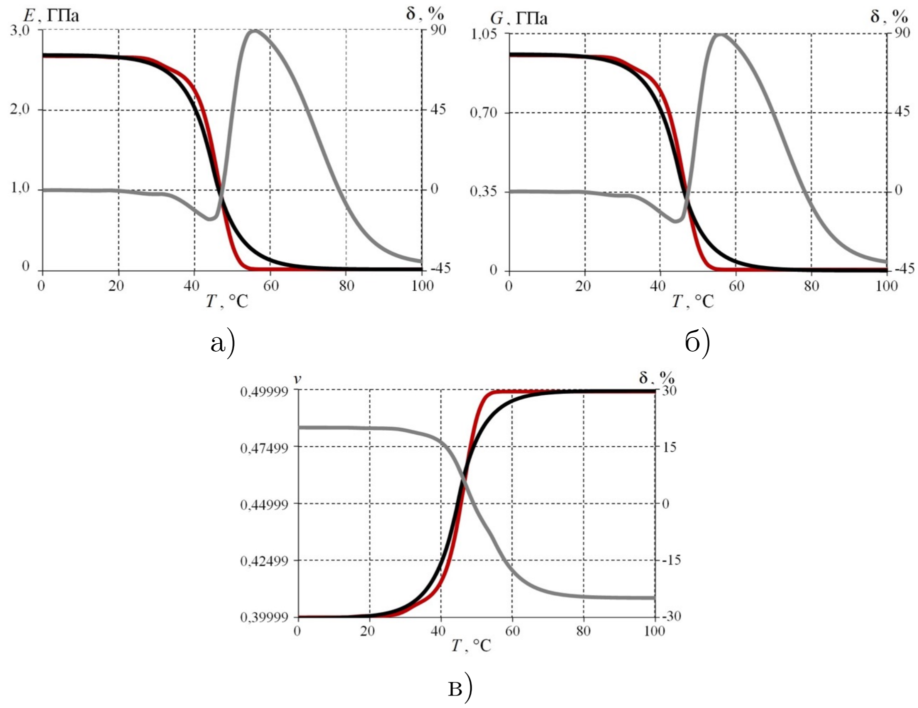



Рис. 4. Зависимость физико-механических свойств фотополимера от температуры: а – модуль Юнга; б – модуль сдвига; в – коэффициент Пуассона; красная линия – численный эксперимент; черная линия – натурный эксперимент; серая линия – $\delta$

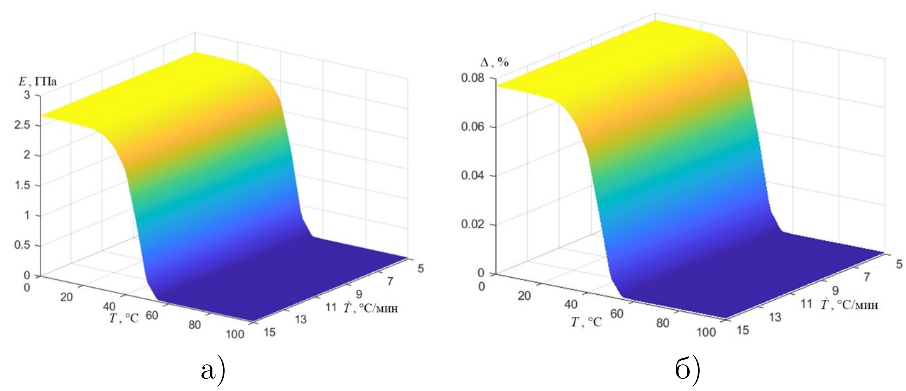



Рис. 5. Результаты имитации DMA-эксперимента: а – зависимость модуля Юнга от температуры и скорости нагрева, образец 3×7 мм; б – отличия модуля Юнга образцов 3×7 и 4×9 мм

Зависимости модуля Юнга от скорости нагрева образца при температурах менее 60 °C может быть описана полиномом второй степени, при температурах более 60 °C зависимость близка к линейной. Математическая зависимость $E(\dot{T})$,

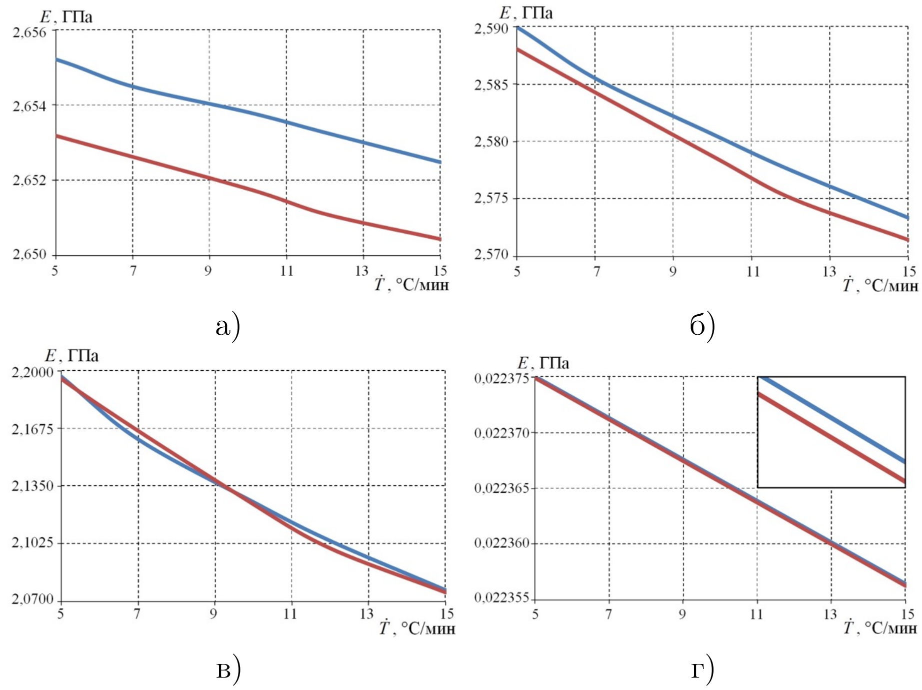



Рис. 6. Зависимость модуля Юнга от скорости нагрева образца при разных температурах: а – 20 °С; б – 30 °С; в – 40 °С; г – 100 °С; синяя линия – образец 3×7 мм; красная линия – образец 4×9 мм

полученная методом наименьших квадратов, для образцов 3×7 мм при разных температурах:

$$\begin{cases} E(\dot{T})\Big|_{T=20^\circ C} &= & 0,0028\dot{T}^2 & -0,3224\dot{T} + 2656,7 \\ E(\dot{T})\Big|_{T=30^\circ C} &= & 0,0388\dot{T}^2 & -2,4102\dot{T} + 2600,8 \\ E(\dot{T})\Big|_{T=40^\circ C} &= & 0,4875\dot{T}^2 & -21,626\dot{T} + 2291,9 \\ E(\dot{T})\Big|_{T=100^\circ C} &= & & -0,0019\dot{T} + 22,384 \end{cases} \tag{7}$$

Для проверки (7) была проведена серия вычислительных экспериментов со скоростями нагрева менее 5 и более 15 °С/мин. Расхождение модулей Юнга, полученных по формулам, от численного решения методом конечных элементов, не превышает 0,2 %.

**Заключение.** Модель тела Максвелла подходит для описания поведения фотополимерных материалов в рамках термомеханики. Для качественного построения модели требуются данные серии натурных экспериментов в рамках

DMA-анализа, а также экспериментально определенная температура стеклования.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** В. И. Струкова написание текста рукописи, проведение экспериментов, А. А. Каменских написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, Ю. О. Носов проведение экспериментов, Д. О. Пустовалов обзор литературы по теме статьи, редактирование текста рукописи.
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Материалы получены в рамках программы развития передовой инженерной школы «Высшая школа авиационного двигателестроения» ПНИПУ г. Пермь.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** V. I. Strukova writing the manuscript text, conducting experiments, A. A. Kamenskikh writing the manuscript text, approving the final version of the manuscript, Yu. O. Nosov conducting experiments, D. O. Pustovalov reviewing the literature on the article topic, editing the manuscript text.
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** The materials were obtained within the framework of the development program of the advanced engineering school "Higher School of Aviation Engine Building"of PNRPU in Perm.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Форостович Т. Л., Нарский А. Р., Битюцкая О. Н., Мокеев Н. А. Гранулирование модельных композиций производства НИЦ «Курчатовский институт» – ВИАМ для литья по выплавляемым моделям // Труды ВИАМ. 2024. № 7(137). Ст. 01. DOI: 10.18577/2307-6046-2024-0-7-3-11.

[2] Gao M., Li L., Wang Q., Ma Z., Li X., Liu Z. Integration of Additive Manufacturing in Casting: Advances, Challenges, and Prospects // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology. 2022. Vol. 9. P. 305–322. https://doi.org/10.1007/s40684-021-00323-w.

[3] Rodríguez-González P., Zapico P., Peláez-Peláez S., Castro-Sastre M. Á., Fernández-Abia A. I. Optimizing the Material Extrusion Process for Investment Casting Mould Production // Journal of Manufacturing and Materials Processing. 2024. Vol. 8(6). Art. 265. https://doi.org/10.3390/jmmp8060265.

[4] Никитин К. В., Дьячков В. Н., Харченко С. В., Юдин Д. М., Юдина К. А. Особенности применения SLA-технологии при изготовлении пресс-форм для литья по выплавляемым моделям // Литье и металлургия. 2024. № 3. С. 37–40. https://doi.org/10.21122/1683-6065-2024-3-37-40.

[5] Mukhtarkhanov M., Perveen A., Talamona D. Application of Stereolithography Based 3D Printing Technology in Investment Casting // Micromachines. 2020. Vol. 11(10). Art. 946. https://doi.org/10.3390/mi11100946.

[6] Lynch P., Hasbrouck C., Wilck J., Kay M., Manogharan G. Challenges and opportunities to integrate the oldest and newest manufacturing processes: Metal casting and additive manufacturing // Rapid Prototyping Journal. 2020. Vol. 26. P. 1145–1154. https://doi.org/10.1108/RPJ-10-2019-0277.

[7] Равочкин А. С., Чибирнова Ю. В. Верификация численных методов моделирования литья по выплавляемым моделям для отливок газотурбинных двигателей в программе

LVMFlow // Заготовительные производства в машиностроении. 2022. Т. 20, № 11. С. 488–492. DOI 10.36652/1684-1107-2022-20-11-488-492.

[8] Гильманшина Т. Р., Усков И. В., Беляев С. В., Баранов В. Н., Усков Д. И., Богданова Т. А. Изготовление соляных стержней для получения прецизионных отливок // Литейное производство. 2014. № 8. С. 17–20.

[9] Евстигнеев А. И., Евстигнеева А. А., Дмитриев Э. А., Иванкова Е. П., Одиноков В. И., Чернышова Д. В. О силовом влиянии опорного наполнителя и межслойного трения на напряженное состояние керамической оболочковой формы по выплавляемым моделям // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1(55). С. 33–45. DOI 10.37972/chgpu.2023.55.1.005.

[10] Basar O., Veliyath V. P., Tarak F., Sabet E. A Systematic Study on Impact of Binder Formulation on Green Body Strength of Vat-Photopolymerisation 3D Printed Silica Ceramics Used in Investment Casting // Polymers. 2023. Vol. 15(14). Art. 3141. https://doi.org/10.3390/polym15143141.

[11] Okoruwa L., Tarak F., Sameni F., Sabet E. Bridging Experimentation and Computation: OMSP for Advanced Acrylate Characterization and Digital Photoresin Design in Vat Photopolymerization // Polymers. 2025. Vol. 17(2). Art. 203. https://doi.org/10.3390/polym17020203.

[12] Richard C. T., Kwok T.-H. Analysis and Design of Lattice Structures for Rapid-Investment Casting // Materials. 2021. Vol. 14(17). Art. 4867. https://doi.org/10.3390/ma14174867.

[13] Alberto J. R., Garg S., Streeter S. S., Giallorenzi M. K., LaRochelle E .P. M., Samkoe K. S., Pogue B. W. 3D printing fluorescent material with tunable optical properties // Scientific Reports. 2021. Vol. 11. Art. 17135.

[14] Захаров С. К., Анцев А. В., Калабин И. Д. Анализ причин возникновения брака при литье по выплавляемым моделям с использованием системы компьютерного моделирования // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2024. № 8. С. 185–189. DOI 10.24412/2071-6168-2024-8-185-186.

[15] Сметанников О. Ю., Самусев И. В. Экспериментальная идентификация параметров определяющих соотношений для фотополимерного композита // Механика композиционных материалов и конструкций. 2013. Т. 19, № 1. С. 105–116.

[16] Nosov Y. O., Kamenskikh A. A. Experimental study of the rheology of grease by the example of CIATIM-221 and identification of its behavior Model // Lubricants. 2023. Vol. 11. Art. 295. https://doi.org/10.3390/lubricants11070295.

## REFERENCES

[1] Forostovich T. L., Narsky A. R., Bityutskaya O. N., Mokeev N. A. Granulation of model compositions produced by National Research Center «Kurchatov Institute» – VIAM for castings on smelted models // Trudy VIAM. 2024. № 7(137). Art. 01. DOI: 10.18577/2307-6046-2024-0-7-3-11. (in Russian)

[2] Gao M., Li L., Wang Q., Ma Z., Li X., Liu Z. Integration of Additive Manufacturing in Casting: Advances, Challenges, and Prospects // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology. 2022. Vol. 9. P. 305–322. https://doi.org/10.1007/s40684-021-00323-w.

[3] Rodríguez-González P., Zapico P., Peláez-Peláez S., Castro-Sastre M. Á., Fernández-Abia A. I. Optimizing the Material Extrusion Process for Investment Casting Mould Production // Journal of Manufacturing and Materials Processing. 2024. Vol. 8(6). Art. 265. https://doi.org/10.3390/jmmp8060265.

[4] Nikitin K. V., Dyachkov V. N., Kharchenko S. V., Yudin D. M., Yudina K. A. Features of Using Sla-Technology in the Manufacture of Molds for Lost Wax Casting // Foundry production

and metallurgy. 2024. № 3. C. 37–40. https://doi.org/10.21122/1683-6065-2024-3-37-40. (in Russian)

[5] Mukhtarkhanov M., Perveen A., Talamona D. Application of Stereolithography Based 3D Printing Technology in Investment Casting // Micromachines. 2020. Vol. 11(10). Art. 946. https://doi.org/10.3390/mi11100946.

[6] Lynch P., Hasbrouck C., Wilck J., Kay M., Manogharan G. Challenges and opportunities to integrate the oldest and newest manufacturing processes: Metal casting and additive manufacturing // Rapid Prototyping Journal. 2020. Vol. 26. P. 1145–1154. https://doi.org/10.1108/RPJ-10-2019-0277.

[7] Ravochkin A. S., Chibirnova Yu. V. Verification of Numerical Methods for Modeling of Investment Casting for Gas Turbine Engines Castings in Program LVMFlow // Procurement production in mechanical engineering. 2022. T. 20, № 11. C. 488–492. DOI 10.36652/1684-1107-2022-20-11-488-492. (in Russian)

[8] Gilmanshina T. R., Uskov I. V., Belyaev S. V., Baranov V. N., Uskov D. I., Bogdanova T. A. Making Salt Cores in Precision Casting Production // Soviet Castings Technology. 2014. № 8. C. 17–20. (in Russian)

[9] Odinokov V. I., Dmitriev E. A., Evstigneev A. I., Evstigneeva A. A., Ivankova E. P., Chernyshova D. V. On the Force Effect of the Support Filler and Interlayer Friction on the Stress State of a Multilayer Shell Mold during Casting According to Smelted Models // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2023. № 1(55). C. 33–45. DOI 10.37972/chgpu.2023.55.1.005. (in Russian)

[10] Basar O., Veliyath V. P., Tarak F., Sabet E. A Systematic Study on Impact of Binder Formulation on Green Body Strength of Vat-Photopolymerisation 3D Printed Silica Ceramics Used in Investment Casting // Polymers. 2023. Vol. 15(14). Art. 3141. https://doi.org/10.3390/polym15143141.

[11] Okoruwa L., Tarak F., Sameni F., Sabet E. Bridging Experimentation and Computation: OMSP for Advanced Acrylate Characterization and Digital Photoresin Design in Vat Photopolymerization // Polymers. 2025. Vol. 17(2). Art. 203. https://doi.org/10.3390/polym17020203.

[12] Richard C. T., Kwok T.-H. Analysis and Design of Lattice Structures for Rapid-Investment Casting // Materials. 2021. Vol. 14(17). Art. 4867. https://doi.org/10.3390/ma14174867.

[13] Alberto J. R., Garg S., Streeter S. S., Giallorenzi M. K., LaRochelle E .P. M., Samkoe K. S., Pogue B. W. 3D printing fluorescent material with tunable optical properties // Scientific Reports. 2021. Vol. 11. Art. 17135.

[14] Zakharov S. K., Antsev A. V., Kalabin I. D. Analysis of the Causes of Defects in Investment Casting Using a Computer Simulation System // Izvestiya Tula State University. Technical sciences. 2024. № 8. C. 185–189. DOI 10.24412/2071-6168-2024-8-185-186. (in Russian)

[15] Smetannikov O. Y., Samusev I. V. Experimental Identification of Constitutive Equations Parameters For Photopolymer Composite // Journal on Composite Mechanics and Design. 2013. T. 19, № 1. C. 105–116. (in Russian)

[16] Nosov Y. O., Kamenskikh A. A. Experimental study of the rheology of grease by the example of CIATIM-221 and identification of its behavior Model // Lubricants. 2023. Vol. 11. Art. 295. https://doi.org/10.3390/lubricants11070295. (in Russian)

*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.007* *EDN: QIUJIO*
*Научная статья* *УДК: 539.374*

*А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина*

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ РАДИАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ

*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

***Аннотация.*** В работе предложен метод решения задачи о симметричной деформации упрочняющейся упругопластической трубы при изменении температуры в радиальном направлении. Построена математическая модель, получены соотношения компонент тензора напряжений, радиальное перемещение и радиуса упругопластической границы. Результаты, представленные в данной статье, при определенных условиях совпадают с ранее полученными соотношениями. При построении математической модели учитывалось, что предел текучести дается функций температуры, а остальные постоянные материала: модуль упругости, коэффициент температурного расширения и коэффициент Пуассона - считаются независящими от температуры

***Ключевые слова***: упрочнение, напряженное состояние, радиальное перемещение, упругость, пластичность, сжимаемость по упругим деформациям, температура.

**Ковалев Алексей Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия; `e-mail:` kovalev@amm.vsu.ru; AuthorID: 11051

**Малыгина Юлия Владимировна**, старший преподаватель кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия; `e-mail:` ymkahavren@gmail.com; AuthorID: 1280774

***для цитирования:*** *Ковалев А. В., Малыгина Ю. В.* Математическое моделирование задачи о равномерном сжатии упрочняющейся упругопластической трубы при радиальном изменении температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 76–88. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.007. EDN: QIUJIO



*Поступила: 10.01.25;* *принята в печать: 13.04.25;* *опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.007* *EDN: QIUJIO*
*Research Article*

*A. V. Kovalev, Y. V. Malygina*

# MATHEMATICAL MODELING OF THE PROBLEM OF UNIFORM COMPRESSION OF A HARDENING ELASTIC-PLASTIC TUBE UNDER RADIAL TEMPERATURE CHANGE

*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

***Abstract.*** The article proposes a method for solving the problem of symmetric deformation of a hardening elastic-plastic tube under temperature change in the radial direction. The mathematical model is constructed, and the relations of stress tensor components, radial displacement and radius of the elastic-plastic boundary are obtained. The results presented in this paper coincide with the previously obtained relations under certain conditions. When constructing the mathematical model, it was taken into account that the yield strength is given as a function of temperature, and the other material constants: modulus of elasticity, coefficient of thermal expansion and Poisson's ratio are assumed to be independent of temperature

***Keywords***: hardening, stress state, radial displacement, elasticity, plasticity, compressibility by elastic strain, temperature.

**Alexey Victorovich Kovalev**, Dr. Sci. Phys. and Math.,Professor,Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia; `e-mail:` kovalev@amm.vsu.ru; AuthorID: 11051

**Yuliya Vladimirovna Malygina**, Lecturer of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia; `e-mail:` ymkahavren@gmail.com; AuthorID: 1280774

***to cite this article:*** *Kovalev A. V., Malygina Y. V.* Mathematical modeling of the problem of uniform compression of a hardening elastic-plastic tube under radial temperature change // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 76–88. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.007



*Received: 10.01.25;* *accepted: 13.04.25;* *published: 17.06.25.*

**Введение.** Температурные эффекты оказывают существенное влияние на механическое поведение материалов, что делает необходимым их учет при решении задач, связанных с деформированием тел. Часто температурные изменения рассматриваются как факторы, влияющие на свойства материала, такие как предел текучести, модуль упругости и другие. Вместе с тем, учет температурных зависимостей этих параметров значительно усложняет математическое моделирование.

В работах [1–3], предложены подходы к анализу напряженного состояния тел при линейной или квадратичной зависимости предела текучести от температуры. Статьи [4, 5] содержат исследования, посвященные определению компонент тензора напряжений и перемещений толстостенных упрочняющихся труб, в которых постоянные материала не зависят от температуры. В работе [6] авторами рассмотрен вопрос того, как температурные изменения, влияющие на предел текучести, сказываются на расчете напряженно-деформированного состояния сжимаемой упругопластической трубы.

В представленной работе предлагается математическая модель для анализа влияния температурных воздействий на напряженно-деформированное состояние (НДС) трубы результаты могут быть применены для более точного прогнозирования поведения конструкций, работающих в условиях высоких температур и механических нагрузок.

**Постановка задачи. Система уравнений.** Проведем анализ влияния температурных воздействий на НДС трубы при равномерном внутреннем – p и внешним – q давлениях. Пусть труба, радиусов a и b соответственно, состоит из упрочняющегося упругопластического материала и является сжимаемым по упругим деформациям. Предел текучести материала является функцией температуры, варьирующейся в радиальном направлении. Остальные физико-механические характеристики материала, а именно модуль упругости, коэффициент теплового расширения и коэффициент Пуассона, для простоты моделирования были приняты как постоянные величины и не изменяются при изменении температуры.

Полную систему уравнений в каждой из рассматриваемых областей можно записать в виде:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \tag{1}$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta$ – компоненты тензора напряжений;

— соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, e_\theta = \frac{u}{r}, \tag{2}$$

где $e_r, e_\theta$ – компоненты тензора полных деформаций, $u$ – компонента радиального перемещения;

— закон Дюамеля-Неймана

$$e_r^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha T(r),$$

$$e_\theta^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \alpha T(r), \tag{3}$$

$$e_z^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha T(r),$$

где $e_r^e, e_\theta^e, e_z^e$ – компоненты тензора деформаций в упругой области; $E$ – модуль упругости, $\sigma_z$ – компонента тензора напряжений, $\mu$ – коэффициент Пуассона, $T(r)$ – температура, которая определяется из решения стационарного уравнения теплопроводности с заданными краевыми условиями, $\alpha$ – коэффициент температурного расширения [7, 8];

— условие пластичности

$$\begin{gathered}\left(\sigma_\theta - \sigma_r - c\left(e_\theta^p - e_r^p\right)\right)^2 + \left(\sigma_\theta - \sigma_z - c\left(e_\theta^p - e_z^p\right)\right)^2 + \\ +\left(\sigma_r - \sigma_z - c\left(e_r^p - e_z^p\right)\right)^2 = 6k^2,\end{gathered} \tag{4}$$

где $e_r^p, e_\theta^p, e_z^p$ – компоненты тензора пластических деформаций; $c$ – коэффициент упрочнения;

— ассоциированный закон пластического течения

$$\begin{aligned} de_r^p &= \frac{d\lambda}{3}\left[2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - c\left(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p\right)\right], \\ de_\theta^p &= \frac{d\lambda}{3}\left[2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z - c\left(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p\right)\right], \\ de_z^p &= \frac{d\lambda}{3}\left[2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta - c\left(2e_z^p - e_r^p - e_\theta^p\right)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

где $d\lambda$ – скалярный положительный множитель;

— граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_r\Big|_{r=a} &= -p, \\ \sigma_r\Big|_{r=b} &= -q, \end{aligned} \tag{6}$$

— условия сопряжений

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [u] = 0, \tag{7}$$

В дальнейшем, будем предполагать что, деформация трубы в осевом направлении будет оставаться постоянной величиной. Поэтому, в упругой и пластической областях ее значение будет одинаковым и равным $e_z = e_1 = const$.

В пластической зоне полные деформации даются суммой упругих и пластических составляющий. Таким образом, исходя из (3) и (5), соотношения для определения компонент полных деформаций в пластической области можно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
de_r = \frac{1}{E}\left[d\sigma_r - \mu\Big(d\sigma_\theta + d\sigma_z\Big)\right] + d(\alpha T(r)) + \\
+\frac{d\lambda}{3}\left[2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - c\left(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
de_\theta = \frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta - \mu\Big(d\sigma_r + d\sigma_z\Big)\right] + d(\alpha T(r)) + \\
+\frac{d\lambda}{3}\left[2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z - c\left(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p\right)\right], \\
de_1 = \frac{1}{E}\left[d\sigma_z - \mu\Big(d\sigma_r + d\sigma_\theta\Big)\right] + d(\alpha T(r)) + \\
+\frac{d\lambda}{3}\left[2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta - c\left(2e_z^p - e_r^p - e_\theta^p\right)\right].
\end{aligned}
\tag{8}
$$

**Выбор метода решения.** Решение задачи основывается на использовании метода возмущений. Суть метода заключается в представлении физических величин в виде разложений по малому параметру $\delta$. Для получения практически значимых результатов в рамках данной работы ограничимся учетом первых двух членов разложения. Это обеспечивает компромисс между точностью и вычислительной сложностью. Тогда все необзодимые величины запишем в виде рядов:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)}, u = u^{(0)} + \delta u^{(1)}, \\
\alpha = \delta\alpha^{(1)}, \mu = \frac{1}{2} + \delta\mu^{(1)}, e_1 = \delta e_1^{(1)}, c = \delta c^{(1)} \\
\lambda = \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(1)}, k = k^{(0)} + \delta k^{(1)}(T), r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^{(1)},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где $\mu^{(1)}$ – известная постоянная; $k^{(0)}$ – значение предела текучести при постоянной температуре; $k^{(1)}$ – функция, зависящая от температуры; верхние индексы $(0), (1)$ определяют соответствующее приближение.

**Решение и результаты.** Принимая выбранный метод решения задачи, нам нужно получить искомые выражения в каждом приближении, а затем записать общее решение, учитывая разложения (9).

Далее, разложения, полученные методом возмущений, подставляются в систему уравнений (1)-(4), (6)-(8). В результате формируются новые системы уравнений, соответствующие различным порядкам малости параметра $\delta$, которые решаются независимо друг от друга.

В нулевом приближении система уравнений сводится к плоской деформации несжимаемой упругопластической трубы. Решение этой задачи известно [9].

В первом приближении систему уравнений будет иметь следующий вид:

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}}{r}, \tag{10}$$

— соотношения Коши

$$e_r^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r},$$
$$e_\theta^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{r},$$

— выражения для деформаций в упругой области

$$e_r^{e(1)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_\theta^{(1)} + \sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)}T(r),$$
$$e_\theta^{e(1)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)}T(r),$$
$$e_1^{(1)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)}T(r),$$

— условие пластичности

$$\begin{gathered}\left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}\right)\left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - c^{(1)}(e_\theta^{p(0)} - e_r^{p(0)})\right) + \\ + \left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right)\left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c^{(1)}(e_\theta^{p(0)} - e_z^{p(0)})\right) + \\ + \left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right)\left(\sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c^{(1)}(e_r^{p(0)} - e_z^{p(0)})\right) = 6k^{(0)}k^{(1)},\end{gathered} \tag{11}$$

— полные деформации в пластической области

$$
\begin{aligned}
de_r^{(1)} = \frac{1}{E}\left[d\sigma_r^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_\theta^{(1)} + d\sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_\theta^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
+\frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left[2\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c^{(1)}\left(2e_r^{p(0)} - e_\theta^{p(0)} - e_z^{p(0)}\right)\right] + \\
+\frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left[2\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right], \\
de_\theta^{(1)} = \frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_z^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_z^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
+\frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left[2\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c^{(1)}\left(2e_\theta^{p(0)} - e_r^{p(0)} - e_z^{p(0)}\right)\right] + \\
+\frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left[2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}\right], \\
de_1^{(1)} = \frac{1}{E}\left[d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right)\right] + \alpha^{(1)} dT(r) + \\
+\frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} - c^{(1)}\left(2e_z^{p(0)} - e_r^{p(0)} - e_\theta^{p(0)}\right)\right] + \\
+\frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left[2\sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}\right],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

— граничные условия

$$
\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=a} = \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=b} = 0, \tag{13}
$$

— условия сопряжений

$$
\left[\sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_s^{(1)}\right] = \left[\sigma_\theta^{(1)} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{dr} r_s^{(1)}\right] = \left[u^{(1)} + \frac{du^{(0)}}{dr} r_s^{(1)}\right] = 0. \tag{14}
$$

Получим выражений для компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$.

Ввиду того, что

$$
2e_z^{p(0)} - e_r^{p(0)} - e_\theta^{p(0)} = 0,
$$

третье уравнение соотношения (12) можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
d\sigma_z^{(1)} - \frac{1}{2}\left(d\sigma_r^{(1)} + d\sigma_\theta^{(1)}\right) - \mu^{(1)}\left(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}\right) + E\alpha^{(1)} dT(r) + \\
+\frac{E d\lambda^{(0)}}{3}\left[2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Обозначим $\chi^{(1)} = 2\sigma_z^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)}$. Тогда, предыдущее выражение примет вид

$$
\frac{d\chi^{(1)}}{d\lambda^{(0)}} + \frac{2E}{3}\chi^{(1)} = 4\mu^{(1)}\frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)}\frac{dT(r)}{d\lambda^{(0)}}. \tag{15}
$$

Решение дифференциального уравнения (15) имеет вид:

$$\chi^{(1)} = e^{-\frac{2}{3}E\lambda^{(0)}} \int\limits_0^{\lambda^{(0)}} \left[ 4\mu^{(1)} \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} - 2E\alpha^{(1)} \frac{dT(r)}{d\lambda^{(0)}} - \right] e^{\frac{2}{3}E\lambda^{(0)}} d\lambda^{(0)} + \chi_e^{(1)},$$

где $\chi_e^{(1)} = 4\mu^{(1)}\sigma_z^{(0)} - 2E\alpha^{(1)}T(r) + 2Ee_1^{(1)}$.

Из введенного обозначения можем получить выражение для компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$, где величина $\chi^{(1)}$ определяется из предыдущего уравнения:

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)} + \chi^{(1)}\right).$$

Компоненты тензора напряжений и радиальное перемещение в упругой области аналогичны выражениям для задачи без упрочнения [12], с точностью до постоянной, и имеют вид.

$$u^{e(1)} = \frac{3}{E}\mu^{(1)}\left(q - \frac{k^{(0)}r_s^{(0)}}{b^2}\right)r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r}\int T(r)rdr - \frac{1}{2}e_1 r + \frac{D}{r},$$

$$\sigma_r^{e(1)} = -\frac{2}{3}\mu^{(1)}k^{(0)}r_s^{(0)2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right] - \int\limits_r^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3}\int T(r)rdrdr +$$
$$+ \int\limits_r^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r}dr + \frac{2ED}{3}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right], \tag{16}$$

$$\sigma_\theta^{e(1)} = -\frac{2}{3}\mu^{(1)}k^{(0)}r_s^{(0)2}\left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right] - \int\limits_r^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3}\int T(r)rdrdr +$$
$$+ \int\limits_r^b \frac{2E\alpha^{(1)}T(r)}{r}dr + \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2}\int T(r)rdr - 2E\alpha^{(1)}T + \frac{2ED}{3}\left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right].$$

Чтобы получить соотношения для компонент напряжений $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ в пластической области подставим в условие пластичности (11) введенное обозначение и учтем нулевое решение. Тогда, получим следующее выражение:

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} = 2k^{(1)} + c^{(1)}\left(e_\theta^{p(0)} - e_r^{p(0)}\right). \tag{17}$$

Величина $k^{(1)}$ в (17) является функцией температуры, которая, в свою очередь, зависит от радиуса $r$. Разность пластических деформаций $e_\theta^{p(0)}$ и $e_r^{p(0)}$ получим из нулевого приближения. Таким образом, подставляя в (10) разность окружных и радиальных напряжений (17) учитывая граничные условия (13) при определении постоянной интегрирования, получим уравнения для определения компонент напряжений в пластической области:

$$
\begin{gathered}
\sigma_r^{p(1)} = \int\limits_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_a^r \left( \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr, \\
\sigma_\theta^{p(1)} = 2k^{(1)} + \int\limits_a^r \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \left[ \int\limits_a^r \left( \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr + \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2} - 1 \right].
\end{gathered} \tag{18}
$$

Радиальное перемещение в пластической области получается из суммирования первых двух уравнений соотношения (12) и решения получившегося дифференциального уравнения:

$$
u^{p(1)} = -\frac{3}{E}\mu^{(1)} \left( -p + 2k^{(0)} ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r} \int T(r) r dr - \frac{1}{2} e_1 r + \frac{N}{r}. \tag{19}
$$

Постоянные $D$ и $N$ и радиус упругопластической границы определим из условия сопряжений (14):

$$
\begin{gathered}
D = \frac{\mu^{(1)}}{E} k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2 + \frac{3}{2E} \left[ \int\limits_{r_s^{(0)}}^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r \, dr dr - \int\limits_{r_s^{(0)}}^b \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr + \right. \\
\left. + \int\limits_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_a^r \left( \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{{r_s^{(0)}}^2 b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
N = -\frac{2\mu^{(1)}}{E} k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2 + \frac{3}{2E} \left[ \int\limits_{r_s^{(0)}}^b \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r \, dr dr - \right. \\
\left. - \int\limits_{r_s^{(0)}}^b \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr + \int\limits_a^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_a^r \left( \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{{r_s^{(0)}}^2 b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2},
\end{gathered}
$$

$$r_s^{(1)} = \left\{ \left[ \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r\, dr dr - \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_{a}^{r} \left( \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{2b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} +$$

$$\left. + \int\limits_{r=r_s^{(0)}} \frac{4E\alpha^{(1)}}{r_s^{(0)}} T(r) r dr - 2E\alpha^{(1)} T(r_s^{(0)}) - \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr - 2k^{(1)}(r_s^{(0)}) \right\} \frac{r_s^{(0)}}{4k^{(0)}}.$$

Подставим постоянные $D$ и $N$ в искомые выражения. Таким образом, имея необходимые выражения в нулевом приближении, выведенные соотношения (16), (18), (19) в первом приближении, согласно введенному разложению (9), можем получить искомые соотношения для полей напряжений и перемещения в упругой и пластической областях в виде:

— радиальная и окружная компоненты тензора напряжений в пластической области

$$\sigma_r^p = -p + 2k^{(0)} ln \left( \frac{r}{a} \right) + \delta \left[ \int\limits_{a}^{r} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_{a}^{r} \left( \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right],$$

$$\sigma_\theta^p = -p + 2k^{(0)} \left( 1 + ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) +$$

$$+\delta \left[ 2k^{(1)} + \int\limits_{a}^{r} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \left[ \int\limits_{a}^{r} \left( \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr + \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2} - 1 \right] \right],$$

— радиальная и окружная компоненты тензора напряжений в упругой области

$$\sigma_r^e = -q + k^{(0)} {r_s^{(0)}}^2 \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \delta \left\{ \left[ \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r dr dr - \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr \right.\right.$$

$$\left. + \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}} \left( \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) dr \right] \frac{{r_s^{(0)}}^2}{r^2} \frac{r^2 - b^2}{{r_s^{(0)}}^2 - b^2} -$$

$$\left. - \int\limits_{r}^{b} \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r dr dr + \int\limits_{r}^{b} \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr \right\},$$

$$\sigma_\theta^e = -q + k^{(0)} r_s^{(0)2} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right] + \delta \Bigg\{ \Bigg[ \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r dr dr - \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr +$$

$$+ \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}} \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right) dr \Bigg] \frac{r_s^{(0)2}}{r^2} \frac{r^2 + b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} -$$

$$- \int\limits_{r}^{b} \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^3} \int T(r) r dr dr + \int\limits_{r}^{b} \frac{2E\alpha^{(1)} T(r)}{r} dr + \frac{4E\alpha^{(1)}}{r^2} \int T(r) r dr - 2E\alpha^{(1)} T(r). \Bigg\},$$

— радиальное перемещение в пластической области

$$u^p = \frac{3k^{(0)} r_s^{(0)2}}{2Er} + \delta \Bigg[ -\frac{3}{E} \mu^{(1)} \left(-p + 2k^{(0)} ln \left(\frac{r}{a}\right)\right) r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r} \int T(r) r dr - \frac{1}{2} e_1 r +$$

$$+ \frac{1}{r} \Bigg\{ -\frac{2\mu^{(1)}}{E} k^{(0)} r_s^{(0)2} + \frac{3}{2E} \Bigg[ 4E\alpha^{(1)} \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{1}{r^3} \int T(r) r \, dr dr -$$

$$- 2E\alpha^{(1)} \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{T(r)}{r} dr + \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_{a}^{r} \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right) dr \Bigg] \frac{r_s^{(0)2} b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} \Bigg\} \Bigg].$$

— радиальное перемещение в упругой области

$$u^e = \frac{3k^{(0)} r_s^{(0)2}}{2Er} + \delta \Bigg[ \frac{3}{E} \mu^{(1)} \left(q - \frac{k^{(0)} r_s^{(0)}}{b^2}\right) r + \frac{3\alpha^{(1)}}{r} \int T(r) r dr - \frac{1}{2} e_1 r +$$

$$+ \frac{1}{r} \Bigg\{ \frac{\mu^{(1)}}{E} k^{(0)} r_s^{(0)2} + \frac{3}{2E} \Bigg[ 4E\alpha^{(1)} \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{1}{r^3} \int T(r) r \, dr dr -$$

$$- 2E\alpha^{(1)} \int\limits_{r_s^{(0)}}^{b} \frac{T(r)}{r} dr + \int\limits_{a}^{r_s^{(0)}} \frac{2k^{(1)}}{r} dr + \frac{3k^{(0)}c^{(1)}}{E} \int\limits_{a}^{r} \left(\frac{r_s^{(0)2}}{r^3} - \frac{1}{r}\right) dr \Bigg] \frac{r_s^{(0)2} b^2}{r_s^{(0)2} - b^2} \Bigg\} \Bigg].$$

**Заключение** В ходе проведенного исследования получены выражения для компонент напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы упрочняющейся трубы при радиальном изменении температуры. Полученные решения, представленные в нулевом и первом приближениях, позволяют оценить влияние температурных эффектов на механическое поведение трубы. Данные результаты могут быть использованы для повышения точности расчетов и проектирования конструкций, работающих в условиях сложных термомеханических нагрузок. В случае, когда предел текучести принимается постоянным, результаты соответствуют известным решениям. Дальнейшие исследования могут быть направлены на учет других факторов, таких как зависимость модуля упругости от температуры или рассмотрение более сложных геометрий.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** А. В. Ковалев – постановка задачи, редактирование текста рукописи, Ю. В. Малыгина – построение математической модели, решение поставленной задачи, написание текста рукописи
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** A. V. Kovalev building a mathematical model, editing the text of the manuscript, Y. V. Malygina building a mathematical model, solving the problem, writing the text of the manuscript.
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ткачева А. В. Влияние выбора зависимости предела текучести от температуры на объёмы необратимого деформирования в материалах сборки, полученной в результате горячей посадки // Материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. Томск : В-Спектр, 2015. С. 34–37.

[2] Дац Е. П., Ткачева А. В. Математическая модель процесса горячей посадки цилиндрических деталей // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела. Чебоксары : Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2014. С. 198–200.

[3] Даниловская В. И. Упругопластическая симметричная деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса // Прикладная механика. 1965. № 6. С. 8–13.

[4] Ковалев А.В., Малыгина Ю.В. К определению напряженно-деформированного состояния в упрочняющейся упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж : Воронежский государственный университет, 2021. С. 1306–1311.

[5] Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Малыгина Ю.В. К расчету упрочняющейся сжимаемой упругопластической трубы с учетом температуры // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж : Воронежский государственный университет, 2022. С. 1191–1195.

[6] Ковалев А. В., Малыгина Ю.В. Об учете зависимости предела текучести от температуры при решении задачи о термодеформировании трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 3(57). С. 74–83.

[7] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. Москва : Физматлит, 1963. 253 с.

[8] Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Москва : Физматгиз, 1958. 167 с.
[9] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва : Наука, 1978. 208 с.

## REFERENCES

[1] Tkacheva A. V. The influence of the choice of the dependence of the yield strength on temperature on the volume of irreversible deformation in the materials of the assembly obtained as a result of shrink fit // Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists. Tomsk : V-Spectrum, 2015. C. 34–37.
[2] Dats E. P., Tkacheva A. V. Mathematical model of the process of hot fitting of cylindrical parts // Proceedings of the VIII All-Russian Conference on Mechanics of Deformable Solids. Cheboksary : Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics, 2014. C. 198–200.
[3] Danilovskaya V. I. Elastoplastic symmetric deformation of a thick-walled tube with consideration of non-uniform temperature distribution along the radius // Applied Mechanics. 1965. № 6. C. 8–13.
[4] Kovalev A.V., Malygina Y.V. Determination of the stress-strain state in a hardening elastic-plastic tube with regard to temperature and compressibility of the material // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh : Voronezh State University, 2021. C. 1306–1311.
[5] Gotsev D.V., Kovalev A.V., Malygina Y.V. Calculation of hardening compressible elastic-plastic pipe with consideration of temperature // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh, 2022. C. 1191–1195.
[6] Kovalev A.V., Malygina Y.V. On taking into account the temperature dependence of yield strength when solving the problem of thermal deformation of a pipe // Bulletin of I.Y. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2023. № 3(57). C. 74–83.
[7] Parkus G. Nonsteady Temperature Stresses. Moscow : Fizmatlit, 1963. 253 c.
[8] Melan E., Parkus G. Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields. Moscow : Fizmatgiz, 1958. 167 c.
[9] Ivlev D.D., Yershov L.V. Perturbing approximation in theory of elastoplastic body. Moscow : Science, 1978. 208 c.
[10] Ivlev D. D., Makarov E. V., Marushkey Yu. M. On the plasticity conditions of a compressible elastoplastic material under plane strain // A Journal of Russian Academy of Sciences. 1978. № 4. C. 80–87.
[11] Andreeva Y. V., Vnukov A. N., Kovalev A. V. Determining the stress state of elastoplastic pipe considering temperature effects and compressibility // All-Russian Scientific School-Conference "Mechanics of Marginal State and Related Issues dedicated to the 85th anniversary of Professor D.D. Ivlev. Чебоксары : I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, 2015. C. 167–172.
[12] Andreeva Y. V., Vnukov A. N., Kovalev A. V. To the calculation of a compressible elastic-plastic pipe // International Conference "Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems AMCSM. Voronezh : Voronezh State University, 2016. C. 153–155.

*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.008* *EDN: OUUQKN*

*Научная статья* *УДК: 539.374*

*А. В. Дробышева, А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова*

# О ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В РЫХЛЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ

*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

***Аннотация.*** В работе рассматривается сферическая полость в невесомом полупространстве, моделирующем горную породу с выработкой соответствущей формы, которая может быть получена в результате камуфлетного взрыва. Скопление газообразных продуктов взрыва в стенках выработки приводит к ее динамическому деформированию. Горная порода представляется многокомпонентной упруговязкопластической моделью. В постановке задачи учтена возможность изменять количество компонент среды. Сферическая форма полости и предположение о независимости вида динамической нагрузки от геометрических параметров выработки приводит к осесимметричному напряженно-деформированному состоянию. Получены соотношения для определения напряжений и перемещений в упругой и пластической зонах деформирования, уравнение для нахождения радиуса упругопластической границы, из которого, используя условия начала пластического течения, получено соотношение, позволяющее определить комбинацию нагрузок, соответствующих моменту возникновения пластического деформирования при заданных физико-механических и геометрических параметрах.

***Ключевые слова***: упруговязкопластичность, многокомпонентная среда, осесимметричное состояние, динамическое деформирование, деформирование полупространства, сферическая полость, модель Спорыхина, упругопластическая граница.

**Дробышева Анастасия Вячеславовна**, магистрант по направлению механика и математическое моделирование кафедры мехники и компьютерного моделирования;
`e-mail:` dav_19_001@mail.ru

**Спорыхин Анатолий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры мехники и компьютерного моделирования;
`e-mail:` anatoli.sporyhin@yandex.ru;

**Щеглова Юлия Дмитриевна**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования; `e-mail:` scheglova@gmail.com;

***для цитирования:*** *Дробышева А. В., Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д.* О динамическом деформировании сферической полости в рыхлых горных породах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 89–99. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.008. EDN: OUUQKN



*Поступила: 05.02.25; принята в печать: 13.04.25; опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.008* *EDN: OUUQKN*

*Research Article*

*A. B. Drobysheva, A. N. Sporykhin, Yu. D. Shcheglova*

# ON THE DYNAMIC DEFORMATION OF A SPHERICAL CAVITY IN LOOSE ROCKS

*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

***Abstract.*** The work considers a spherical cavity in a weightless half-space that simulates a rock with the development of an appropriate shape that can be obtained as a result of a camouflage explosion. The accumulation of gaseous explosion products in the walls of the mine leads to its dynamic deformation. The rock is represented by a multicomponent elastoviscoplastic model. The problem statement takes into account the possibility of changing the number of environmental components. The spherical shape of the cavity and the assumption that the type of dynamic load is independent of the geometric parameters of the excavation leads to an axisymmetric stress-strain state. Relations are obtained for determining stresses and displacements in elastic and plastic deformation zones, an equation for finding the radius of the elastoplastic boundary, from which, using the conditions of the onset of plastic flow, a ratio is obtained that makes it possible to determine the combination of loads corresponding to the moment of occurrence of plastic deformation under specified physico-mechanical and geometric parameters.

***Keywords***: elastoviscoplasticity, multicomponent medium, axisymmetric state, dynamic deformation, half-space deformation, spherical cavity, Sporykhin model, elastoplastic boundary.

**Anastasia V. Drobysheva**, Master's student; e-mail: dav_19_001@mail.ru

**Anatoliy N. Sporykhin**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: anatoli.sporyhin@yandex.ru

**Yulia D. Shcheglova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; e-mail: scheglova@gmail.com

***to cite this article:*** *Drobysheva A. B., Sporykhin A. N., Shcheglova Yu. D.* On the dynamic deformation of a spherical cavity in loose rocks // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 89–99. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.008



*Received: 05.02.25;* *accepted: 13.04.25;* *published: 17.06.25.*

**Введение**

Современная практика гражданского строительства в России и зарубежом демонстрирует тенденцию роста использования подземных резервуаров для хранения нефти и нефтепродуктов, газообразных продуктов (природного газа, гелия, сжиженных углеводородных газов, этана, этилена, нестабильного газового конденсата), а также для захоронения токсичных промышленных отходов [1–3]. Причем увеличивается не только количество таких резервуаров, но и их объем [4]. Широкое использование подземных выработок в хозяйственной деятельности требует расчета их поведения при воздействии динамических нагрузок, что необходимо для их проекттирования, безопасной эксплуатации и при прогнозировании чрезвычайных ситуациий.

Подземные емкости в горной породе образуются с использованием камуфлетных взрывов [5]. В результате камуфлетного взрыва раздавленная и вытесненная порода вдавливается в стенки котла, которые вследствие этого представляют собой слои раздавленной и уплотненной породы [6], что в рамках исследуемой задачи соответствует пластическому деформированию породы вокруг выработки. При этом заложение заряда на достаточной глубине обеспечивает отсутствие остаточных деформаций дневной поверхности. Поэтому при определении напряженно-деформированного состояния породы вокруг выработки будем различать области упругого и пластического деформирования. Возникшая в момент взрыва ударная волна перемещается радиально в массиве породы за пределы котла, вызывая смещение частиц породы в радиальном направлении [6]. Как следствие, такие хранилища представляются в виде сферических или эллипсоидальных полостей в массиве горных пород.

Задача о деформировании сферической полости в невесомом полупространстве для упруговязкопластического тела Спорыхина $S_p$ [3] представлена в работе [7]. Эта модель отражает свойства скальных пород [8]. В настоящей работе рассматривается массив смешанных рыхлых горных пород [8], который в области пластического деформирования моделируется упруговязкопластическим многокомпонентным телом $S_p^\alpha$ [9–12].

**1. Динамическое деформирование сферической полости в невесомом многокомпонентном упруговязкопластическом полупространстве**

Деформирование сферической полости радиуса $a$ в невесомом полупространстве рассматривается в квазистатической постановке также, как в работе [7].

Давление газообразных продуктов взрыва на поверхность выработки будем моделировать равномерно распределенной по контуру полости нагрузкой $P$ следующего вида

$$P = P_0 e^{\hat{\varkappa} t}, \quad t_* \leqslant t < t_0 \ ,$$

где $\hat{\varkappa}$ — известная константа.

На бесконечности действует нагрузка $q$, определяемая выражением $q = q_0 = gh$, где $g$ — средний объемный вес вышележащих пород, $h$ — глубина заложения полости.

Следуя работе [9], приведем соотношения, определяющие свойства многокомпонентной упруговязкопластической модели $S_p^\alpha$.

При выполении ниже следующего условия массив вокруг полости находится в упругом состоянии

$$S_{ij}S^{ij} < k_1^2 \ , \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \ , \quad k_1 \geqslant \ k_2 \geqslant \ \cdots \geqslant k_L \ , \tag{1}$$

где $S_{ij}$ — компоненты девиатора тензора напряжений.

Для многокомпонентной смеси используется последовательное соединение моделей $S_p^\alpha$. При таком варианте соединения в упругой области выполняются соотношения

$$S_{ij}^\alpha = 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^\alpha \ , \quad \text{здесь нет суммирования по } \alpha \text{ от 1 до L} \ , \tag{2}$$

где $\mu_\alpha$ — параметры Ламе.

Далее, отсутствие в соотношениях суммирования по $\alpha$ будем обозначать конструкцией «нет $\sum \alpha = 1, 2, \ldots, L$».

В пластической области при выполнении условия $S_{ij}S^{ij} \geqslant k_1^2$ полная деформация является суммой полных деформаций для каждой компоненты среды, а каждая из них, в свою очередь, представляется суммой упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \cdots + \varepsilon_{ij}^L = \varepsilon_{ij}^{e1} + \varepsilon_{ij}^{p1} + \varepsilon_{ij}^{e2} + \varepsilon_{ij}^{p2} + \cdots + \varepsilon_{ij}^{eL} + \varepsilon_{ij}^{pL} \ , \tag{3}$$

здесь $\varepsilon_{ij}^1$, $\varepsilon_{ij}^2, \ldots,$ $\varepsilon_{ij}^L$ — деформации первой, второй и так далее моделей $S_p^\alpha$, соответственно.

В пластической области объемная деформация отсутствует, поэтому выполняетсяя условие несжимаемости для диагональных компонент пластических составляющих тензора деформациии отдельных компонет среды

$$\varepsilon_{nn}^{p\alpha} = 0 \ , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, L \ . \tag{4}$$

Откуда получаем, что компоненты тензора пластических деформаций $\varepsilon_{ij}^{p\alpha}$ совпадают с компонентами девиатора тензора деформаций $e_{ij}^{p\alpha}$.

При последовательном соединении приложенные к моделям напряжения одинаковы, откуда следует

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \cdots = S_{ij}^\alpha = S_{ij} \ , \quad (\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \cdots = \sigma_{ij}^\alpha = \sigma_{ij}) \ . \tag{5}$$

Условие пластичности для каждой модели $S_p^\alpha$ имеет вид

$$\left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}\right)\left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}\right) = k_\alpha^2 \ , \quad \text{нет} \sum \alpha = 1, 2, \ldots, L \ , \tag{6}$$

где $\eta_\alpha$ — коэффициент вязкости, $c_\alpha$ — коэффициент упрочнения, $k_\alpha$ — предел текучести.

При этом ассоциированный закон пластического течения связывает компоненты тензора скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}$ с компонентами тензора напряжений соотношениями вида

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha} = \psi_\alpha \left( S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha} \right) \ , \quad \text{нет} \sum \alpha = 1, 2, \ldots, L \ , \tag{7}$$

здесь $\psi_\alpha$ — положительный скалярный множитель.

Сотношения Коши определяют зависимость компонент полных деформаций от компонент вектора перемещений

$$2\varepsilon_j^i = \bigtriangledown_j w^i + \bigtriangledown^i w_j \ . \tag{8}$$

Действительные компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия и в упругой и в пластической областях

$$\bigtriangledown_i \sigma_j^i = 0 \ . \tag{9}$$

**2. Осесимметричное состояние невесомого многокомпонентного упруговязкопластического полупространства со сферической полостью**

Будем счиать, что для массива со сферической полостью реализуется осесимметричное состояние, в этом случае $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi$.

Из уравнений равновесия (9) в сферической системе координат следует одно уравнение

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \ . \tag{10}$$

С использованием закона Гука (2), соотношений Коши (8) и уравнения равновесия (10) для данного случая в упругой области можно получить поле перемещений и напряжений в виде

$$w^e = \frac{C_1}{r^2} \ , \quad \sigma_r^e = -4\mu \frac{C_1}{r^3} + C_2 \ , \quad \sigma_\theta^e = 2\mu \frac{C_1}{r^3} + C_2 \ . \tag{11}$$

Как было сказано ранее, объемное расширение в пластической зоне отсутствует, поэтому из условия несжимаемости (4) получаем

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{dw^p}{dr} + 2\frac{w^p}{r} = 0 \ .$$

Откуда следуют соотношения

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_r}{2} \ , \quad w^p = \frac{B_1}{r^2} \ , \quad \text{где} \quad \varepsilon_r = \frac{dw^p}{dr} \ . \tag{12}$$

Ассоциированный закон пластического течения (7) в осесимметричном случае дает три соотношения

$$\dot{\varepsilon}_r^{p\alpha} = \psi_\alpha \left( S_r - c_\alpha \varepsilon_r^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_r^{p\alpha} \right) \ , \quad \dot{\varepsilon}_\theta^{p\alpha} = \psi_\alpha \left( S_\theta - c_\alpha \varepsilon_\theta^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_\theta^{p\alpha} \right) \ ,$$
$$\dot{\varepsilon}_\phi^{p\alpha} = \psi_\alpha \left( S_\phi - c_\alpha \varepsilon_\phi^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_\phi^{p\alpha} \right) \ , \quad \text{нет} \sum \alpha = 1, 2, \ldots, L \ .$$

Из этих равенств с учетом, что $\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\phi^p$, следует

$$S_\theta = S_\phi \ , \quad S_\theta = -\frac{S_r}{2} \ .$$

При этом функция нагружения (6) приобретает следующий вид

$$(S_r - c_\alpha \varepsilon_r^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_r^{p\alpha})^2 = K_\alpha^2 \ , \quad K_\alpha = \frac{k_\alpha}{\sqrt{3}} \ , \quad \text{нет} \sum \alpha = 1, 2, \ldots, L \ . \tag{13}$$

Из соотношений (2) следует

$$\varepsilon_r^{e\alpha} = \frac{S_r}{2\mu_\alpha}, \quad \text{нет} \sum \alpha = 1, 2, \ldots, L \ . \tag{14}$$

Так как для последовательного соединения моделей выполняется (5), то суммируя (14), получаем

$$S_r \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{2\mu_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{e\alpha} = \varepsilon_r^e \ . \tag{15}$$

Откуда, следуя (3), будем иметь

$$\varepsilon_r = \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{e\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{L} \varepsilon_r^{p\alpha} = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p \ . \tag{16}$$

Тогда для упругой составляющей деформации каждой компоненты $\varepsilon_r^{e\alpha}$ получим соотношение

$$\varepsilon_r^{e\alpha} = \varepsilon_r - \varepsilon_r^{p\alpha} \ .$$

С учетом этого из (2) будем иметь

$$S_r^\alpha = 2\mu_\alpha \left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^{p\alpha}\right) \ , \quad \text{нет} \sum \alpha = 1, 2, \ldots, L \ . \tag{17}$$

Используя (12) и (17), из (13) получим уравнение для определния пластической составляющей деформации каждой компоненты

$$\frac{d\varepsilon_r^{p\alpha}}{dt} + \frac{(2\mu_\alpha + c_\alpha)}{\eta_\alpha} \varepsilon_r^{p\alpha} = -\left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3}\right) \frac{1}{\eta_\alpha} \ , \quad \text{нет} \sum \alpha = 1, 2, \ldots, L \ . \tag{18}$$

Будем считать согласно [8], что при динамическом деформировании вязкость многокомпонентной среды горных пород возрастает пропорционально времени процесса деформирования, в этом случае коэффициенты вязкости представляются соотношением

$$\eta_\alpha = \eta_{0\alpha} t \quad \alpha = 1, 2 \ldots L \ . \tag{19}$$

Решение уравнения (18) при учете (19) будет иметь вид

$$\varepsilon_r^{p\alpha} = -\frac{1}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3} + B_2 t^{-\alpha_0}\right) \ , \quad \text{нет} \sum \alpha = 1, 2, \ldots, L \ , \tag{20}$$

где введено обозначение

$$\alpha_0 = \frac{2\mu_\alpha + c_\alpha}{\eta_{0\alpha}} \ .$$

Условие об отсутствии пластической деформации в момент времени, соответствующий началу пластического течения, то есть $\varepsilon_r^{p\alpha} = 0$ при $t = t_*$, позволяет определить неизвестную константу интегрирования $B_2$ в форме

$$B_2 = -\left(K_\alpha + \frac{4\mu_\alpha B_1}{r^3}\right) t_*^{\alpha_0} \ . \tag{21}$$

Из соотношений (15) и (16) можно получить

$$S_r = \left(\sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{2\mu_\alpha}\right)^{-1} \left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p\right) \ . \tag{22}$$

Для определения компонент напряжений в пластической области найдем разницу компонент напряжений, используя (22), (12) и (20) с учетом суммирования по $\alpha$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = \frac{3}{2} S_r =$$

$$= \frac{3}{2}\mu_0 \left\{ \frac{2}{r^3} \left[ -1 + \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{2\mu_\alpha \left(1 - t^{-\alpha_0} t_*^{\alpha_0}\right)}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \right] B_1 + \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{K_\alpha}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \right\} \ ,$$

где введено обозначение

$$\mu_0 = \left(\sum_{\alpha=1}^{L} \frac{1}{2\mu_\alpha}\right)^{-1} \ .$$

Тогда из уравнения равновесия (10) получим поле напряжений в области пластического деформирования в виде

$$\sigma_r^p = \frac{\mu_0}{r^3}(1 - I)B_1 + II \ln r + B_3 \ ,$$

$$\sigma_\theta^p = \frac{2\mu_0}{r^3}(1 - I)B_1 + II(\ln r - 1) + B_3 \ ,$$

здесь и далее обозначено

$$I = \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{2\mu_\alpha \left(1 - t^{-\alpha_0} t_*^{\alpha_0}\right)}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \ ,$$

$$II = \frac{3}{2}\mu_0 \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{K_\alpha}{2\mu_\alpha + c_\alpha} \ .$$

Неизвестные константы интегрирования $C_1,\ C_2,\ B_1,\ B_3$ и радиус упругопластической границы $\gamma$ определяем из следующих условий:

— граничное условие на поверхности полости

$$\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{\varkappa} t} \quad \text{при} \quad r = a \ ;$$

— условие на бесконечности

$$\sigma_r^e = \sigma_\theta^e = q = -gh \quad \text{при} \quad r \to \infty \ ;$$

— условия непрерывности напряжений и перемещений на границе раздела упругой и пластической зон деформирования

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p \ , \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p \quad w^e = w^p \quad \text{при} \quad r = \gamma \ .$$

Зарождение зоны пластического деформирования, что соответствует моменту времени $t = t_*$, происходит от внутренней границы полости. Тогда начальное значение для радиуса упругопластической границы принимается в виде $\gamma = a$ при $t = t_*$.

Условие непрерывности перемещений на упругопластической границе, то есть $w^e = w^p$ при $r = \gamma$, позволяет вывести, что $C_1 = B_1$.

Неизвестную $C_2$ можно определить из условия на бесконечности, что $\sigma_r^e = \sigma_\theta^e = q = -gh \quad$ при $\quad r \to \infty$. Тогда получим

$$C_2 = q = -gh \ . \tag{23}$$

Непрерывность компоненты напряжений $\sigma_r^e = \sigma_r^p$ на упругопластической границе $r = \gamma$ дает уравнение

$$-\frac{4\mu C_1}{\gamma^3} + q = \frac{\mu_0}{\gamma^3}(1 - I)C_1 + II \ln \gamma + B_3 \ . \tag{24}$$

Из граничного условия на поверхности сферической полости $\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{\varkappa} t}$ при $r = a$ получаем соотношение для определения постоянной интегрирования $B_3$

$$\frac{\mu_0}{a^3}(1 - I)C_1 + II \ln a + B_3 = -P_0 e^{\dot{\varkappa} t} \ .$$

Откуда следует

$$B_3 = -P_0 e^{\dot{\varkappa} t} - II \ln a - \frac{\mu_0}{a^3}(1 - I)C_1 \ . \tag{25}$$

Уравнение для определения постоянной интегрирования $C_1$ следует из подстановки (25) в (24)

$$-\frac{4\mu C_1}{\gamma^3} + q = \frac{\mu_0}{\gamma^3}(1 - I)C_1 + II \ln \gamma - P_0 e^{\dot{\varkappa} t} - \frac{\mu_0}{a^3}(1 - I)C_1 - II \ln a \ ,$$

из которого получим

$$C_1 = \frac{-q - P_0 e^{\dot{\varkappa} t} + II(\ln \gamma - \ln a)}{-\frac{4\mu}{\gamma^3} + \mu_0(1 - I)\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{\gamma^3}\right)} \ . \tag{26}$$

Из условия равенства компонент напряжений $\sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p$ при $r = \gamma$ получаем соотношение для определения радиуса упругопластической границы $\gamma$ в массиве горной породы

$$-\frac{2\mu C_1}{\gamma^3} + C_2 = \frac{2\mu_0}{\gamma^3}(1 - I)C_1 + II(\ln \gamma - 1) + B_3 \ . \tag{27}$$

В итоге подстановкой выражений (23), (25), (26) для определения постоянных интегрирования $C_1,\ C_2,\ B_3$ в (27) получаем уравнение

$$\frac{-q - P_0 e^{\dot{a}t} + II(\ln\gamma - \ln a)}{-\frac{4\mu}{\gamma^3} + \mu_0(1-I)\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{\gamma^3}\right)} \left(-\frac{2}{\gamma^3}(\mu + \mu_0(1-I)) + \frac{\mu_0}{a^3}(1-I)\right) - \\ -II(\ln\gamma - \ln a - 1) + P_0 e^{\dot{a}t} + q = 0\ . \tag{28}$$

Если задать физико-механические параметры многокомпонентной упруговязкопластической среды $S_p^\alpha$ и геометрический размер полости $a$, а также в (28) положить $\gamma = a$ и $t = t_*$, то можно получить соотношение для определения комбинации нагрузок $P_* = P_0 e^{\hat{\varkappa}t}$ и $q = -gh$, при которых возникает пластическое деформирование массива горной породы вокруг полости. Оно имеет вид

$$\left(1 - \frac{2\mu + \mu_0(1-I)}{4\mu}\right)\left(P_0 e^{\dot{\varkappa}t} + q\right) - II(2\ln a - 1) = 0\ . \tag{29}$$

Если уменьшить порядок модели $S_p^\alpha$ до единицы, то есть принять $L = 1$, то из (29) следуют результаты работы [7].

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** А. В. Дробышева обзор литературы по теме статьи, вывод уравнения для определения упругопластической границы, компьютерный набор текста рукописи, А. Н. Спорыхин построение модели многокомпонентной упруговязкопластической среды, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, Ю. Д. Щеглова математическая постановка задачи, упрощение и решение уравнений в аналитической форме, редактирование текста рукописи.

**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** A. V. Drobysheva review of literature on the topic of the article, derivation of an equation for determining the elastoplastic boundary, computer typing of the manuscript, A. N. Sporykhin construction of a model of a multicomponent elastoviscoplastic medium, writing the text of the manuscript, approval of the final version of the manuscript, Yu. D. Shcheglova mathematical formulation of the problem, simplification and solution of equations in analytical form, editing the text of the manuscript.

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.

**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М. : Физматлит, 2004. 232 с.

[2] Спорыхин А. Н. Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. 372 с.

[3] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: ВГУ, 1997. 360 с.
[4] Боровиков В. А., Сластенко В. К., Кадол И. А. Оценка радиуса камуфлетной полости при взрыве сферического заряда тэна в горных породах // Инженерно-строительный журнал. 2008. № 1. С. 44–50.
[5] Юревич Г. Г., Трофимов В. Д. Горная геомеханика глубинных взрывов. М. : Недра, 1980. 156 с.
[6] Антощенко Н. И., Попов А. Я. Разрушение горных пород взрывом. Алчевск: Донбасский государственный технический университет, 2005. 281 с.
[7] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4(42). С. 21–24. DOI: 10.26293/chgpu.2019.42.4.002
[8] Михайлюк А. В. Горные породы при неравномерных динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1980. 154 с.
[9] Спорыхин А. Н. Об одной модели упруговязкопластических смесей // Механика деформируемого твердого тела : сборник трудов 9 Всероссийской конференции в рамках Международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики Воронеж, 12-15 сентября 2016 г. : электронный ресурс, Воронеж, 2016. С. 199–201.
[10] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М. : Наука, 1971. 231 с.
[11] Ивлев Д. Д. К теории сложных сред. Докл. АН СССР. 1963. Том 148. С. 64–67.
[12] Спорыхин А. Н. Моделирование процессов деформирования и потери устойчивости упруговязкопластических смесей // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 141–148.

## REFERENCES

[1] Sporykhin A. N., Shashkin A. I. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of rock mechanics. M.: Fizmatlit, 2004. 232 p. (in Russian).
[2] Sporykhin A. N. Non-conservative problems of the three-dimensional theory of inelastic stability in geomechanics. Voronezh: VSU Publishing House, 2015. 372 p. (in Russian).
[3] Sporykhin A. N. Perturbation method in problems of stability of complex media. Voronezh: VSU, 1997. 360 p. (in Russian).
[4] Borovikov V. A., Slastenko V. K., Kadol I. A. Estimation of the radius of the camouflage cavity during the explosion of a spherical charge of PETN in rocks // Engineering and Construction Journal. 2008. No. 1. P. 44–50. (in Russian).
[5] Yurevich G. G., Trofimov V. D. Mining geomechanics of deep explosions. M.: Nedra, 1980. 156 p. (in Russian).
[6] Antoshchenko N. I., Popov A. Ya. Destruction of rocks by explosion. Alchevsk: Donbass State Technical University, 2005. 281 p. (in Russian).
[7] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a half-space with a spherical cavity // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after. AND I. Yakovleva. Series: Limit state mechanics. 2019. No. 4(42). S. 21–24. DOI:10.26293/chgpu.2019.42.4.002. (in Russian).
[8] Mikhailyuk A. V. Rocks under uneven dynamic loads. Kyiv: Nauk. Dumka, 1980. 154 p. (in Russian).
[9] Sporykhin A. N. On one model of elastoviscoplastic mixtures // Mechanics of a deformable solid: collection of proceedings of the 9th All-Russian conference within the framework of the International scientific and technical conference "Current problems of applied mathematics, computer science and mechanics Voronezh, September 12-15, 2016: electronic resource, Voronezh, 2016. P. 199–201. (in Russian).

[10] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. Theory of a hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 231 p. (in Russian).
[11] Ivlev D. D. Towards the theory of complex media. Dokl. Academy of Sciences of the USSR. 1963. Volume 148. P. 64–67. (in Russian).
[12] Sporykhin A. N. Modeling of processes of deformation and loss of stability of elastoviscoplastic mixtures // Izv. RAS. MTT. 2020. No. 6. P. 141–148. (in Russian).

DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.009 EDN: NHERMI
Научная статья УДК: 531.36

К. Н. Пестов[1,2], М. А. Гузев[3], О. Н. Любимова[4,2]

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ-МИТЧЕЛЛА

[1] Владивостокский филиал Российской таможенной академии, Владивосток, Россия
[2] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Россия
[3] Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия
[4] Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

***Аннотация.*** В работе показано, что классические уравнения в напряжениях теории упругости – уравнения Бельтрами-Митчелла, являются компонентами тензора Риччи в линейном порядке по деформациям при условии выполнения уравнений равновесия, закона Гука, а так же гипотезы о евклидовости пространства метриального континуума. Доказана что дивергенция этого тензора равна нулю. Получена связь тензора Риччи с тензором деформаций, актуальная для описания структурно-деформационных особенностей механического поведения различных материалов на основе неевклидовой геометрии. Показано, что в классическом упругом случае тензор Риччи совпадает с тензором Энштейна.

***Ключевые слова***: тензор Риччи, тензор Эйнштейна, уравнения Бельтрами-Митчелла, условия совместности Сен-Венана.

**Пестов Константин Николаевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и информационных таможенных технологий ВФ РТА; `e-mail:` kopestov@yandex.ru; `https://orcid.org/0009-0005-4669-3070`; AuthorID: 589056

**Гузев Михаил Александрович**, доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, директор ИПМ ДВО РАН; `e-mail:` guzev@iam.dvo.ru; `https://orcid.org/0000-0001-9344-154X`; AuthorID: 3404

**Любимова Ольга Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор Политехнического института и Института математики и компьютерных технологий ДВФУ; `e-mail:` lyubimova@dvfu.ru; `https://orcid.org/0000-0003-4802-7352`; AuthorID: 372335

***для цитирования:*** *Пестов К. Н., Гузев М. А., Любимова О. Н.* Геометрическая структура уравнений Бельтрами-Митчелла // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 100–108. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.009. EDN: NHERMI



*Поступила: 01.02.25; принята в печать: 14.04.25; опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.009* *EDN: NHERMI*
*Research Article*

*K. N. Pestov*[1,2], *M. A. Guzev*[3], *O. N. Luybimova*[4,2]

# GEOMETRIC STRUCTURE OF THE BELTRAMI-MITCHELL EQUATIONS

[1]*I.N Russian Customs Academy Vladivostok Branch, Vladivostok, Russia*
[2]*I.N. Khabarovsk Division of the Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia*
[3]*I.N. Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russia*
[4]*I.N. Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

***Abstract.*** The paper demonstrates that the classical equations of stress in elasticity theory, known as the Beltrami–Mitchell equations, can be expressed as components of the Ricci tensor when considering linear deformations. This is provided that the conditions of equilibrium, Hooke's law, and the assumption of a Euclidean space for the material continuum are satisfied. It is proven that the divergence of the Ricci tensor is zero in this case. A relationship between the Ricci tensor and the strain tensor is derived, which is significant for describing the structural and deformational characteristics of the mechanical behavior of materials based on non-Euclidean geometries. It is demonstrated that in the elastic case, the Ricci tensor equals the Einstein tensor.
***Keywords***: Ricci tensor, Einstein tensor, Beltrami-Mitchell equations, compatibility conditions of Saint-Venant.

**Konstantin N. Pestov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences; `e-mail:` kopestov@yandex.ru;
`https://orcid.org/0009-0005-4669-3070`; AuthorID: 589056

**Mihail A. Guzev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; `e-mail:` guzev@iam.dvo.ru;
`https://orcid.org/0000-0001-9344-154X`; AuthorID: 3404

**Olga N. Lyubimova**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; `e-mail:` lyubimova@dvfu.ru;
`https://orcid.org/0000-0003-4802-7352`; AuthorID: 372335

***to cite this article:*** *Pestov K. N., Guzev M. A., Luybimova O. N.* Geometric structure of the Beltrami-Mitchell equations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 100–108. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.009



*Received: 01.02.25;* *accepted: 14.04.25;* *published: 17.06.25.*

**Введение.** Классическими тензорными объектами, описывающими состояние сплошной среды в теории упругости, являются вектор перемещения, тензоры деформаций и напряжений. Но уже в присутствии различных дефектных структур возникает необходимость в расширении гипотез механики сплошной среды и во введении новых тензорных объектов. В классических моделях континуальное рассмотрение сплошной среды равносильно гипотезе евклидовости материального континуума, что соответствует тривиальности тензора Римана, в линейном приближении по деформациям это совпадает с уравнениями совместности Сен-Венана [1,2]. Следствием совместности деформаций, линейности упругого континуума являются уравнения Бельтрами-Митчелла [3]

$$\Delta\hat{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\vec{F} + (\nabla\vec{F})^T + \frac{\nu}{1-\nu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F} = 0, \tag{1}$$

где $\nu$ - коэффициент Пуассона, $\hat{\sigma}$ тензор напряжений, $\vec{F}$ - вектор внешних объемных сил, $(\nabla\vec{F})^T$ - транспонированный тензор к $\nabla\vec{F}$, $\hat{g}$ - метрический тензор, $\nabla$, $\Delta$ - соответственно операторы Гамильтона и Лапласа, $(\cdot\,)$ - скалярное произведение.

Уравнения (1) в классических учебниках [1,2] являются результатом, дифференцирования, группировки и комбинации уравнений равновесия, совместности и закона Гука, в [4] получены из вариационного принципа Кастильяно. В работе [5] делается попытка обобщения этих уравнений для римановых пространств с неевклидовой метрикой в отчетной конфигурации путем преобразования компонент тензора Римана, но как и для классического случая в условиях совместности деформаций.

Однако, известно, что упругая деформация в общем случае не является совместной [6]. Тогда возникает естественная задача рассмотреть как изменятся классические уравнения Бельтрами-Митчелла для несовместных упругих деформаций. Так как условия Сен-Венана эквивалентны тривиальности тензора Римана, то соответственно отказ от их выполнения приводит к необходимости анализа его ненулевых компонент. Для трехмерного пространства тензор кривизны Римана полностью определяется симметричным тензором второго ранга - тензором Риччи $\hat{R}$ [7].

$$R_{ij} = R^k{}_{ijk},$$
$$R_{ijkl} = R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il} + \frac{R}{2}\left(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}\right), i,j,k,l = 1,2,3,$$

где $R = Tr(\hat{R}) = R_{mn}g^{mn}$ - след тензора Риччи (скалярная кривизна),$g_{jk}$ - компоненты $\hat{g}$. Следовательно, необходим анализ связи тензора Риччи с тензорами деформаций и напряжений.

Основная идея получения тензора Риччи в напряжениях через последовательное вычисление метрики, связности при условии линейных реологических соотношений для деформированного состояния и определило структуру настоящей работы. В результате, во-первых, показано, что в классическом случае условия равенства нулю компонент тензора Риччи являются уравнениями Бельтрами-Митчелла. Во-вторых, получено обобщение уравнений Бельтрами-Митчелла на неевклидовые модели.

**1. Связь тензора Риччи с тензорным полем деформаций.** Пусть сплошная среда в недеформированном состоянии описывается в некоторой криволинейной системе координат $(x^1, x^2, x^3)$ с компонентами метрического тензора $g_{ij}$ и компонентами связности Леви-Чивита $\Gamma^i_{kl}$, компоненты тензора Риччи $R_{jk}$ в данном случае равны нулю.

В деформированном состоянии компоненты метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$ и компоненты связности $\tilde{\Gamma}^i_{kl}$, ассоциированной с этой метрикой, определяют тензор Риччи с компонентами

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i_{jk}}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}^i_{km}\tilde{\Gamma}^m_{ji} - \tilde{\Gamma}^i_{im}\tilde{\Gamma}^m_{jk}, \tag{2}$$

где компоненты связности Леви-Чивита равны

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \tilde{g}_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{g}_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{3}$$

Компоненты метрических тензоров в деформированном и недеформированном состояниях связаны через компоненты тензора деформации $\varepsilon_{ij}$ [8]

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}. \tag{4}$$

Компоненты обратной метрики в линейном приближении

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} - 2\varepsilon^{ij}. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3) и ограничиваясь первым порядком по деформациям, имеет место равенство

$$\begin{gathered}\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) + g^{im}\left(\frac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^m}\right) - \\ -\varepsilon^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = \Gamma^i_{kl} + g^{im}\left(\frac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial \varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^m}\right) - 2\varepsilon^{im}\Gamma_{mkl}.\end{gathered} \tag{6}$$

Используя операции поднятия и опускания индексов

$$\varepsilon^{im}\Gamma_{mkl} = \varepsilon_{mp}g^{im}\Gamma^p_{kl}$$

выражение (6) преобразуется к виду

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + g^{im}\left(\underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{mk}}{\partial x^l} - \Gamma^p_{kl}\varepsilon_{mp} - \Gamma^p_{ml}\varepsilon_{pk}}_{\nabla_l \varepsilon_{mk}} + \underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kl}\varepsilon_{mp} - \Gamma^p_{km}\varepsilon_{pl}}_{\nabla_k \varepsilon_{ml}}\right) -$$
$$-g^{im}\underbrace{\left(\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^p} - \Gamma^p_{km}\varepsilon_{pl} - \Gamma^p_{ml}\varepsilon_{pk}\right)}_{\nabla_m \varepsilon_{kl}} = \Gamma^i_{kl} + \nabla_l \varepsilon^i_k + \nabla_k \varepsilon^i_l - \nabla^i \varepsilon_{kl}.$$

Обозначая симметричный по нижним индексам тензор аффинной деформации [9]

$$E^i_{kl} = \nabla_l \varepsilon^i_k + \nabla_k \varepsilon^i_l - \nabla^i \varepsilon_{kl}, \tag{7}$$

получается

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + E^i_{kl} \tag{8}$$

Подставляя (8) в формулу компонент тензора Риччи (2) и проводя вычисления

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial(\Gamma^i_{ji} + E^i_{ji})}{\partial x^k} - \frac{\partial(\Gamma^i_{jk} + E^i_{jk})}{\partial x^i} + \left(\Gamma^i_{km} + E^i_{km}\right)\left(\Gamma^m_{ji} + E^m_{jl}\right) - \left(\Gamma^i_{im} + E^i_{im}\right)\left(\Gamma^m_{jk} + E^m_{jk}\right) =$$
$$= R_{jk} + \frac{\partial E^i_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial E^i_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{km}E^m_{ji} + \Gamma^m_{ji}E^i_{km} - \Gamma^m_{jk}E^i_{im} - \Gamma^i_{im}E^m_{jk} + E^i_{km}E^m_{ji} - E^m_{jk}E^i_{im} =$$
$$= \frac{\partial E^i_{ji}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{jk}E^i_{im} - \left(\frac{\partial E^i_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^i_{km}E^m_{ji} - \Gamma^m_{ji}E^i_{km} + \Gamma^i_{im}E^m_{jk}\right) + E^i_{km}E^m_{ji} + E^m_{jk}E^i_{im} =$$
$$= \nabla_k E^i_{ji} - \nabla_i E^i_{jk} + E^i_{km}E^m_{ji} - E^m_{jk}E^i_{im},$$

или в тензорной форме

$$\tilde{\hat{R}} = \nabla Tr(\hat{E}) - \nabla\cdot \hat{E} + \hat{E}\cdot\cdot\,\hat{E} - \hat{E}\cdot Tr(\hat{E}). \tag{9}$$

Формула (9) аналогична выражению для закона преобразования тензора Римана при деформации метрики без кручения [9], ограничиваясь первым порядком, имеем

$$\tilde{R}_{jk} = \nabla_k E^i_{ji} - \nabla_i E^i_{jk}.$$

Возвращаясь к деформациям по формулам (7)

$$\tilde{R}_{jk} = \nabla_k\left(\nabla_j \varepsilon^i_i + \nabla_i \varepsilon^i_j - \nabla^i \varepsilon_{ij}\right) - \nabla_i\left(\nabla_j \varepsilon^i_k + \nabla_k \varepsilon^i_j - \nabla^i \varepsilon_{jk}\right) =$$
$$= \nabla_k\nabla_j \varepsilon^i_i + \nabla_k\nabla_i \varepsilon^i_j - \nabla_k\nabla^i \varepsilon_{ij} - \nabla_i\nabla_j \varepsilon^i_k - \nabla_i\nabla_k \varepsilon^i_j + \nabla_i\nabla^i \varepsilon_{jk} =$$
$$= \nabla_k\nabla_j \varepsilon^i_i + \nabla_i\nabla^i \varepsilon_{jk} - \left(\nabla^i\nabla_j \varepsilon_{ik} + \nabla^i\nabla_k \varepsilon_{ij}\right).$$

Тензор Риччи может быть переписан в виде

$$\tilde{\hat{R}} = \Delta\hat{\varepsilon} + \nabla\nabla Tr(\hat{\varepsilon}) - \nabla(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}) - \left(\nabla(\nabla\cdot\hat{\varepsilon})\right)^T. \tag{10}$$

Симметричность правой части обеспечивается симметричностью тензора деформаций, евклидовостью исходного пространства, в котором ковариантные производные коммутируют, а также симметризацией выражения $\nabla\left(\nabla\cdot\hat{\varepsilon}\right)$.

**2. Связь тензора Риччи с полем напряжений.** Закон Гука через коэффициенты Ламэ в тензорном виде

$$\hat{\varepsilon}=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{\sigma}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}Tr(\hat{\sigma})\hat{g}\right).$$

Тогда тензор Риччи (10) приводится к виду

$$\hat{R}=\frac{1}{2\mu}\left(\Delta\hat{\sigma}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta Tr(\hat{\sigma})\hat{g}-\nabla(\nabla\cdot\hat{\sigma})-(\nabla(\nabla\cdot\hat{\sigma}))^{T}\right),\tag{11}$$

что аналогично покомпонентной связи тензора Риччи с напряжениями полученной для декартовой системе координат в работе [10].

**3. Уравнения Бельтрами-Митчелла.** При выполнении уравнений равновесия

$$\nabla\cdot\hat{\sigma}+\vec{F}=0$$

тензор Риччи (11) преобразуется в

$$\hat{R}=\frac{1}{2\mu}\left(\Delta\hat{\sigma}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\Delta Tr(\hat{\sigma})\hat{g}+\nabla\vec{F}+\left(\nabla\vec{F}\right)^{T}\right).\tag{12}$$

В механике сплошной среды хорошо известно, что шесть компонент тензора деформаций удовлетворяют дополнительным ограничениям, которые называются условиями совместности Сен-Венана. Эти условия сводятся к тому, что тензор Римана вычисленный для метрического тензора деформированного состояния и соответствующие ему тензор Риччи и скалярная кривизна обращаются в нуль. Используя условие равенства скалярной кривизны нулю

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\Delta Tr(\hat{\sigma})-\nabla\cdot(\nabla\cdot\hat{\sigma})\right)=0\tag{13}$$

в компонентах тензора Риччи (12) можно исключить слагаемое $\Delta Tr(\hat{\sigma})$ и получить

$$\hat{R}=\frac{1}{2\mu}\left(\Delta\hat{\sigma}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})+\nabla\vec{F}+\left(\nabla\vec{F}\right)^{T}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}\right).\tag{14}$$

Равенство нулю тензора Риччи (14) и есть уравнения Бельтрами-Митчелла

$$\Delta\hat{\sigma}+\frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})+\nabla\vec{F}+\left(\nabla\vec{F}\right)^{T}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}=0.\tag{15}$$

Итак, компоненты тензора Риччи в линейной теории упругости в напряжениях имеют вид ненулевых составляющих уравнений Бельтрами-Митчелла.

**4. Структура уравнений Бельтрами-Митчелла** При отсутствии объемных сил уравнение (15) сведется к

$$\hat{R}^e = \frac{1}{2\mu}\left(\Delta\hat{\sigma} + \frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma})\right) = 0.$$

Естественным образом, возникает вопрос о том, является ли симметричный тензор второго ранга

$$\hat{R}^f = \frac{1}{2\mu}\left(\nabla\vec{F} + \left(\nabla\vec{F}\right)^T + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\hat{g}\nabla\cdot\vec{F}\right)$$

тензором Риччи. Для выяснения этого необходимо проверить дифференциальное тождество Бианки

$$\nabla\cdot\hat{R} = \frac{1}{2}\nabla Tr(\hat{R}). \tag{16}$$

Вычисление правой части (16) дает

$$\frac{1}{2}\nabla R^f = \frac{1}{4\mu}\nabla\left(\nabla^i F_i + \nabla^i F_i + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}g_i^i\nabla^k F_k\right) = \frac{5\lambda+4\mu}{4\mu(\lambda+2\mu)}\nabla(\nabla\cdot\vec{F}).$$

Вычисление левой части (16) дает

$$\nabla\cdot\hat{R}^f = \frac{1}{2\mu}\left(\Delta\vec{F} + \frac{2\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla(\nabla\cdot\vec{F})\right).$$

Очевидно, равенство (16) не выполняется, из чего следует что тензор Риччи (14) не может быть аддитивно представлен как сумма тензоров $\hat{R}^e + \hat{R}^f$ без потери структуры.

Таким образом, запись уравнений Бельтрами-Митчелла в виде (1) теряет структуру тензора Риччи, в то время как вид (14) сохраняет ее в части выполнения тождества (16).

Используя тензор Риччи в виде (11), можно вычислить тензор Эйнштейна

$$\hat{G} = \hat{R} - \frac{R}{2}\hat{g},$$

который обладает тем свойством, что его дивергенция равна нулю

$$\nabla\cdot\hat{G} = 0. \tag{17}$$

В классическом евклидовом случае с учетом (12) и тензор Эйнштейна совпадает с тензором Риччи.

Нетрудно проверить, что (17) с учетом (13) тождественно выполняется для (14)

$$\nabla\cdot\hat{G} = \frac{1}{2\mu}\nabla\cdot\left(\Delta\hat{\sigma} + \frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\nabla Tr(\hat{\sigma}) + \nabla\vec{F} + \left(\nabla\vec{F}\right)^T + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\nabla\cdot\vec{F})\hat{g}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(\Delta(\nabla\cdot\hat{\sigma}) + \Delta\vec{F} + \frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla\left(-\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla\cdot\vec{F}\right) + \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\nabla(\nabla\cdot\vec{F})\right) = 0.$$

Таким образом, показано, что (16) и (17) тождественно выполняются для уравнений Бельтрами-Митчелла.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Вклад авторов равноценен.
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** The authors' contributions are equal.
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** The research was carried out within the state assignment for IAM FEB RAS N 075-00459-25-00.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
[2] Годунов С. К. Раменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск. Научная книга, 1998.
[3] Елисеев В. В. Механика упругих тел. СПб.:Изд-во СПбГТУ, 1999
[4] Немцев Е. А., Галимов К. З. Вывод динамических условий совместности напряжений из вариационного принципа Кастильяно // Исслед. по теор.пластин и оболочек. 1973. № 10. С. 332–337
[5] Азанов Н. П. Уравнения совместности Сен-Венана и Бельтрами–Митчелла в римановом пространств // Тр. геом. сем. 1989. № 19. С. 9–13
[6] Мясников В. П., Гузев М. А. Геометрическая модель дефектной структуры упругопластической сплошной среды // Прикл. мех. техн. физ. 1999. № 40(2). С. 163–173
[7] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986
[8] Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // УМН. 1965. № 20(5). С. 121–180
[9] Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука. 1976
[10] Гузев М. А., Мясников В. П. Неевклидова структура поля внутренних напряжений сплошной среды // Дальневост. матем. журн. 2001. № 2(2). С. 29–44

## REFERENCES

[1] Rabotnov Yu. N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. M.: Nauka, 1988.
[2] Godunov S. K. Ramenskiy E. I. Elementy mekhaniki sploshnyh sred i zakony sohraneniya. Novosibirsk. Nauchnaya kniga, 1998.
[3] Eliseev V. V. Mekhanika uprugih tel. SPb.:Izd-vo SPbGTU, 1999
[4] Nemcev E. A., Galimov K. Z. Vyvod dinamicheskih uslovij sovmestnosti napryazhenij iz variacionnogo principa Kastil'yano // Issled. po teor.plastin i obolochek. 1973. № 10. P. 332–337
[5] Azanov N. P. Uravneniya sovmestnosti Sen-Venana i Bel'trami–Mitchella v rimanovom prostranstv // Tr. geom. sem. 1989. № 19. P. 9–13
[6] Myasnikov V. P., Guzev M. A. Geometricheskaya model' defektnoj struktury uprugoplasticheskoj sploshnoj sredy // Prikl. mekh. tekhn. fiz. 1999. № 40(2). P. 163–173
[7] Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T. Sovremennaja geometrija: Metody i prilozhenija. M.: Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoj literatury, 1986
[8] Sedov L. I. Mathematical methods for constructing new models of continuous media // UMN. 1965. № 20(5). P. 121–180
[9] Norden A. P. Prostranstva affinnoj svjaznosti. M.: Nauka. 1976
[10] Guzev M. A., Myasnikov V. P. Noneuclidean structure of internal stress in continuumы // Far Eastern Mathematical Journal. 2001. № 2(2). P. 29–44

*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.010* *EDN: WHGZUX*

*Научная статья* *УДК: 539.374*

*К. З. Хайрнасов*

# ПОВЫШЕНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЯЧЕИСТЫХ БЕТОНОВ КОМПОЗИЦИОННЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

*Московский государственный строительный университет (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

***Аннотация.*** Целью статья является определение параметров армирования для получения прочностных характеристик ячеистых бетонов на растяжение сопоставимых с прочностными характеристиками сжатия. Приводятся зависимости определения приведенных прочностных характеристик многослойных композиционных материалов: холстов при различном расположении волокон. Приведены способы усиления железобетонных конструкций композиционными холстами. Проведено моделирование стеновой строительной панели из ячеистого материала армированной композиционными волокнами. Проведено численное и аналитический расчеты, модели стеновой панели модели. Сходимость результатов конечно элементного расчета определялось путем сгущения сетки конечных элементов и если результаты предыдущего и последующего расчетов отличалось не более чем на 3%, конечноэлементная аппроксимация считалась достаточной. Исследовано напряженно деформированное состояние стеновой панели на действие изгибающих моментов и температурных нагрузок. Разработан алгоритм определения характеристик армирующего материала. Получены параметры армирования, при которых прочностные характеристики на растяжения были сопоставимы с прочностными характеристиками растяжения для данной конструкции. Проведен анализ полученных результатов и сделаны выводы.

***Ключевые слова***: ячеистые бетоны, композитные материалы, полотна, волокна, приведенные характеристики, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов, повышение несущей способности.

**Хайрнасов Камиль Зайнутдинович**, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций; `e-mail:` kamilh@mail.ru; `https://orcid.org/0000-0003-0111-2947`; AuthorID: 600738

***для цитирования:*** *Хайрнасов К. З.* Повышение прочностных характеристик ячеистых бетонов композиционными материалами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 109–122. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.010. EDN: WHGZUX



*Поступила: 01.02.25; принята в печать: 13.04.25; опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.010* *EDN: WHGZUX*
*Research Article*

*K. Z. Khayrnasov*

# IMPROVING THE STRENGTH CHARACTERISTICS OF CELLULAR CONCRETE USING COMPOSITE MATERIALS

*Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia*

***Abstract.*** The purpose of the article is to determine the reinforcement parameters to obtain the tensile strength characteristics of cellular concrete comparable to the compressive strength characteristics. The dependencies for determining the reduced strength characteristics of multilayer composite materials are given: canvases with different fiber arrangement. The methods for strengthening reinforced concrete structures with composite canvases are given. The modeling of a wall building panel made of cellular material reinforced with composite fibers is carried out. Numerical and analytical calculations are carried out, and the model of the wall panel model. The convergence of the finite element calculation results was determined by thickening the finite element mesh and if the results of the previous and subsequent calculations differed by no more than 3%, the finite element approximation was considered sufficient. The stress-strain state of the wall panel under the action of bending moments and temperature loads is investigated. An algorithm for determining the characteristics of the reinforcing material is developed. The reinforcement parameters are obtained at which the tensile strength characteristics are comparable to the tensile strength characteristics for this structure. The analysis of the obtained results is carried out and conclusions are drawn.
***Keywords***: cellular concrete, concrete, composite materials, webs, fibers, reduced characteristics, stress-strain state, finite element method, increasing bearing capacity.

**Kamil Z. Khayrnasov**, PhD, Assoc. Prof.; `e-mail:` kamilh@mail.ru;
`https://orcid.org/0000-0003-0111-2947`; AuthorID: 600738

***to cite this article:*** *Khayrnasov K. Z.* Improving the strength characteristics of cellular concrete using composite materials // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 109–122. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.010



*Received: 01.02.25;* *accepted: 13.04.25;* *published: 17.06.25.*

**1. Введение.** В настоящее время все большее распространение в строительстве занимают легкие бетоны, получаемые из ячеистых структур: газосиликаты и пенобетоны. Ячеистые бетоны имеют несопоставимые прочностные характеристики сжатия и растяжения. Прочность на сжатие в 10 и более раз превышает прочностные характеристики растяжения. Поэтому применение таких материалов, имеющих низкую теплопроводность в 3 раза ниже теплопроводности керамического строительного кирпича, имеет большую перспективу. Однако низкие характеристики прочности на растяжении не позволяет применять ячеистые материалы в строительных конструкциях, испытывающих растягивающие напряжения. Такие напряжения возникают при действии изгибающих тепловых нагрузок поэтому вопросы усиления прочностных характеристик ячеистых бетонов на растягивающие напряжения является важной и актуальной. Одним из способов повышения прочности ячеистых бетонов на растяжение является армирование ячеистых бетонов. Применение стальной арматуры ведет к смятию ячеистых бетонов в местах соприкосновения с жестким металлом, и арматура перестает выполнять свои функции. Одним из материалов подходящих для армирования ячеистых бетонов для повышения прочностных характеристик являются композиционные холсты, сетки и волокна, имеющие высокие характеристики прочности и не разрушающие ячеистую структуру при эксплуатации строительных материалов. Вопросам усиления железобетонных конструкций композиционными материалами уделялось внимание в работах [1–3], и нашло свое отражение в отечественных и зарубежных нормативных материалах [4–8]. Экспериментальные исследования, посвященные усилению строительных конструкций из ячеистых бетонов, на действие температурных нагрузок приведены в работах [9–11]. Методика исследования конструкций из композиционных материалов описана в материалах [12–16].

**2. Материалы и методы.** Многослойные материалы имеют разные характеристики слоев. Для учета разнородности слоев применяется два метода – определение приведенных характеристик и учет каждого слоя в отдельности. Рассмотрим метод приведенных характеристик, позволяющий определять характеристик многослойного материала в виде однородного мате6риала. Рассмотрим зависимость между напряжениями и деформациями в плосконапряженном состоянии

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}\,, \tag{1}$$

Здесь обозначено

$$[E] = \left\{ \begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{array} \right\};$$

$$\{\sigma\}^{\mathrm{T}} = \{\sigma_s,\ \sigma_\theta,\ \sigma_{s\theta}\}\,;\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} = \{\varepsilon_s,\ \varepsilon_\theta,\ \varepsilon_{s\theta}\}\,;$$

$$Q_{11} = E_s/\left(1 -\ v_{s\theta}v_{\theta s}\right); Q_{12} = v_{s\theta}E_s/\left(1 -\ v_{s\theta}v_{\theta s}\right); Q_{21} = v_{\theta s}E_s/\left(1 -\ v_{s\theta}v_{\theta s}\right);$$

$$Q_{22} = E_\theta/\left(1 -\ v_{s\theta}v_{\theta s}\right); Q_{66} = G_{66},$$

где $E_s$ – модуль упругости в осевом направлении, $E_\theta$ – модуль упругости в перпендикулярном направлении, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $G$ – модуль, учитывающий сдвиг, $\{\sigma\}^{\mathrm{T}} = \{\sigma_s,\ \sigma_\theta,\ \sigma_{s\theta}\}$- вектор напряжений, $\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} = \{\varepsilon_s,\ \varepsilon_\theta,\ \varepsilon_{s\theta}\}$ – вектор деформаций.

При повороте осей координат на угол $\theta$ коэффициент зависимости (1) приобретает вид

$$\left[\bar{E}\right] = \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{array} \right\},$$

Здесь обозначено $\bar{Q}_{11} = A^4 Q_{11} - s^4 Q_{22} + 2\left(Q_{12} + 2Q_{66}\right) s^2 c^2;$

$$\begin{gathered} \bar{Q}_{12} = \left(Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}\right) s^2 c^2 + \left(s^2 + c^2\right) Q_{22}; \\ \bar{Q}_{16} = \left(c^2 Q_{11} - s^2 Q_{12} + \left(Q_{12} + 2Q_{66}\right)\left(s^2 - c^2\right)\right) sc; \\ \bar{Q}_{22} = s^4 Q_{11} - c^4 Q_{22} + 2\left(Q_{12} + 2Q_{66}\right) s^2 c^2; \\ \bar{Q}_{26} = \left(s^2 Q_{11} - c^2 Q_{12} - \left(Q_{12} + 2Q_{66}\right)\left(s^2 - c^2\right)\right) sc; \\ \bar{Q}_{66} = \left(Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22}\right) s^2 c^2 + \left(s^2 - c^2\right) Q_{66}; \\ s = \sin\ \theta; c = \cos\ \theta. \end{gathered} \qquad (2)$$

Деформация слоя, расположенного на расстоянии $z$ от срединной поверхности можно записать в виде

$$\{\varepsilon\} = \left\{\varepsilon^0\right\} + z\left\{\chi^0\right\}.$$

Здесь введено обозначение $\{\varepsilon^0\}$- деформации в срединной поверхности, $\{\chi^0\}$ - деформации кривизны срединной поверхности.

В результате получаем зависимость между напряжениями и деформациями для многослойного материала в виде

$$\{\sigma\} = \left[\bar{E}\right]\left\{\varepsilon^0\right\} + z\left[\bar{E}\right]\left\{\chi^0\right\}.$$

Для многослойного материала, к которому относиться и многослойный композиционный материала, получим

$$\{\sigma\} = \left[\bar{Q}\right]\left\{\varepsilon^0\right\} + z\left[\bar{Q}\right]\left\{\chi^0\right\}.$$

Здесь обозначено $\{\varepsilon^0\}$ – деформации в срединной поверхности, $\{\chi^0\}$- деформации кривизны срединной поверхности.

Для нормальных усилий и моментов зависимости выглядят следующим образом

$$\begin{gathered} \{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} dz, \{N\}^T = \left(N_x, N_y, N_{xy}\right) \\ \{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\}\, z dz, \{M\}^T = \left(M_x, M_y, M_{xy}\right) \end{gathered} \qquad (3)$$

Проведя интегрирование уравнений (3) получим следующие соотношения

$$\left\{ \begin{array}{c} N \\ M \end{array} \right\} = [E]\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^o \\ \chi^o \end{array} \right\}, [E] = \left[ \begin{array}{cc} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{array} \right] \qquad (4)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

$$\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2)dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

Для многослойного композиционного материала приведенные характеристики можно записать в виде

$$\begin{array}{ll} A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij}(h_k - h_{k-1}) & i, j = 1, 2, 6 \\ B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij}(h_k^2 - h_{k-1}^2) & i, j = 1, 2, 6 \\ D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij}(h_k^3 - h_{k-1}^3) & i, j = 1, 2, 6 \end{array} \qquad (5)$$

Здесь введено обозначение $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ – мембранная, изгибно-мембранная и изгибная жесткость

На рисунке 1 показаны параметры, применяемые в формуле (5)

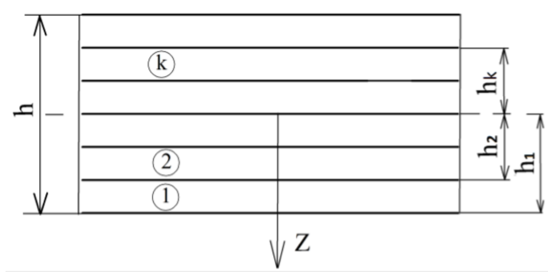



Рис. 1. Обозначения в многослойном композиционном материале

Полученные зависимости определяют приведенные характеристики многослойной структуры, имеющей различные характеристики слоев, применительно к многослойной композиционной структуре при различных углах расположения волокон

Методы усиления железобетонных конструкций путем армирования композиционными холстами приведены на рисунках 2.

Пример усиления строительных конструкций многослойными композиционными холстами приведен на рисунке 3

Одним из основных положительных характеристик композиционного материала относится коррозионная стойкость, малый удельный вес и высокая удельная прочность в 2 -2,5 раза превышающая удельную прочность титана, наиболее прочного однородного металла с малым удельным весом.

В таблицах 1 и 2 приведены физико-механические характеристики материалов используемые в работе.

В таблице 1 показано, что прочностные характеристики сжатия газосиликата в 11 раз больше характеристик на растяжение.

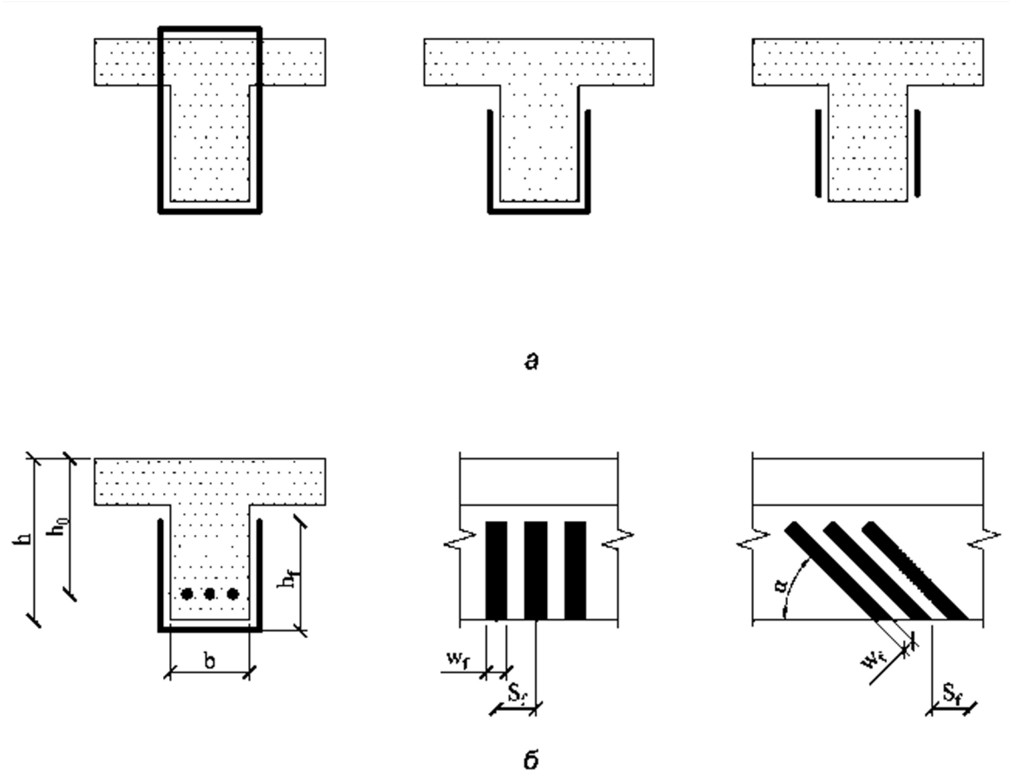



Рис. 2. Методы усиления железобетонных конструкций композиционными холстами при реконструкции

| Газосиликат марки 500 | Предельное состояние 1 | | | Предельное состояние 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Допустимое напряжение сжатия, $R_b$, МПа | Допустимое напряжение растяжения, $\sigma_t$, МПа | Допустимое напряжение сдвига, $R_s$, МПа | Допустимое напряжение сжатия, $R_b$, МПа | Допустимое напряжение растяжения, $\sigma_t$, МПа | Допустимое напряжение сдвига, МПа |
| | 1,6 | 0,14 | 0,2 | 2,4 | 0,31 | 0,46 |

Таблица 1. Таблица свойств газосиликата марки 500

**3. Результаты.** Исследовалась строительная стеновая панель из ячеистого бетона: газосиликата с параметрами: ширина - 1,8 м, высота – 1 м, толщина - 0,2 м. армированная композиционными волокнами через 0,1 м. по высоте. Внешняя нагрузка – нормальная равномерно распределенная нагрузка на верхнюю грань, создающая изгибающий момент и растягивающая нагрузка величиной, приложенная нормально к торцам модели, имитирующая тепловую

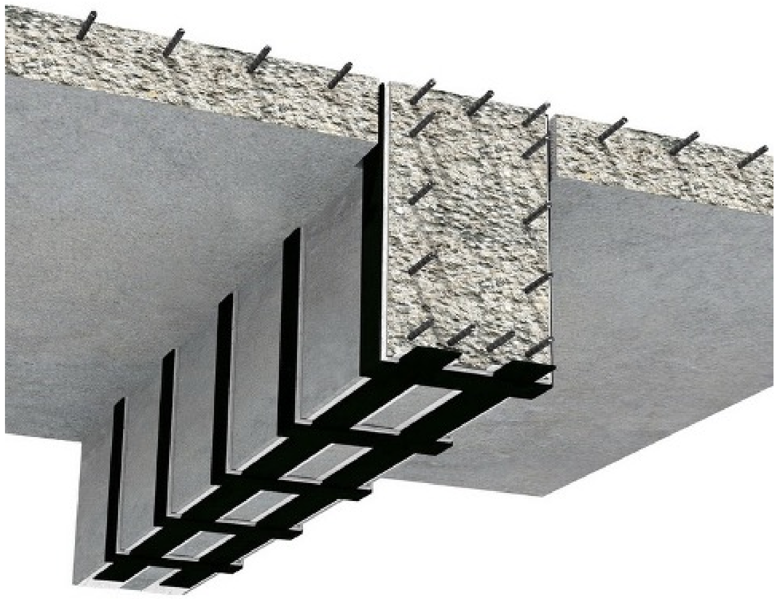


Рис. 3. Усиление строительных элементов композиционными холстами

| Материал | Модуль упругости $E$, ГПа | Допустимое напряжение растяжения, $R_s$, МПа | Допустимое напряжение сжатия, $\sigma$, МПа | Удельный вес, кг/м$^3$ |
|---|---|---|---|---|
| Углеродное волокно | 145 | 1100 | 700 | 1400 |
| Стекловолокно | 22-32 | 645 | 530 | 2100 |

Таблица 2. Физико-механические характеристики углеволокна и стекловолокна[15]

нагрузку. В качестве метода исследования применялся метод конечных элементов [17–21]. Проведанное исследование напряженно-деформированного состояния при действии изгибающего момента и температурного воздействия показано на рисунках 4-6. Проведенные аналитические расчеты в предположении, что прочностные характеристики стеновой панели из ячеистого бетона будут иметь одинаковые прочностные характеристики растяжения и сжатия позволило определить параметры поперечных сечений армирующих композитных стержней. Полученные результаты позволили увеличить несущую способность стеновой строительной конструкции при изгибающих и температурных нагрузках, при действии которых возникают растягивающие напряжения в 11 раз, что соответствует равенству прочностных характеристик растяжения и сжатия газосиликата. Применение апробированных систем автоматизированного проектирования, сходимость результатов расчета, путем сгущения сетки конечных элементов предполагает достоверность полученных результатов

На рисунке 4 показана модель стеновой строительной панели из ячеистого бетона: газосиликата, армированная композитными волокнами

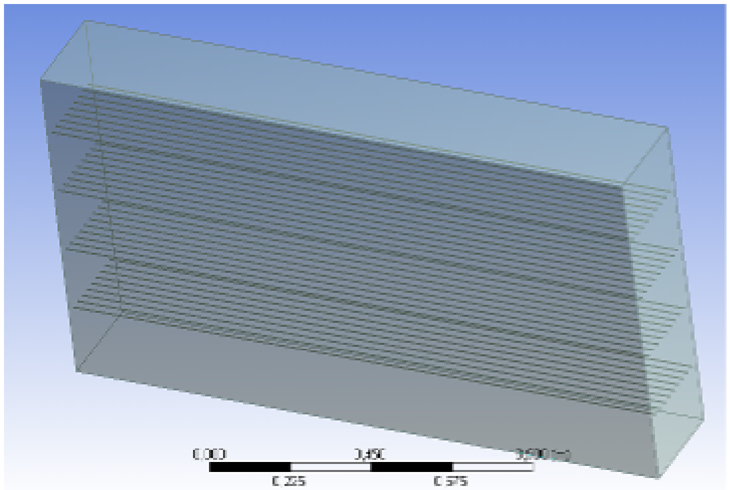
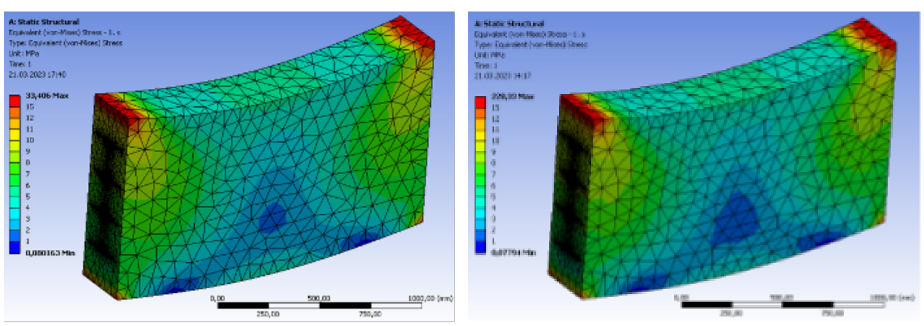


Рис. 4. Модель стеновой строительной панели из ячеистого бетона: газосиликата, армированная композиционными волокнами

На рисунке 5 приведено напряженно-деформированное состояние стеновой панели при действии изгибающего момента и температурного воздействия а) не армированной б) армированной композиционными стержнями.

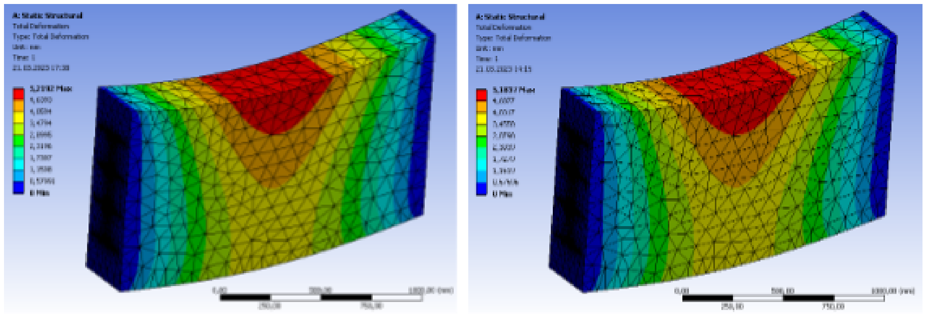


а) б)

Рис. 5. Напряженно-деформированное состояние стеновой панели от изгибающего момента и температурного воздействия а) без армирования, б) с армированием, МПа

На рисунке 6 показана мозаика перемещений стеновой панели при действии изгибающего момента и температурной нагрузки без армирования а) и с армированием б).

Аналитическое исследование несущей способности стеновой панели высотой h=1 м., шириной L=1,8 м., толщиной b=0,2м., усиленной композиционными



а) б)

Рис. 6. Мозаика перемещений стеновой панели при действии изгибающего момента и тепловой нагрузки без армирования а) и с армированием б), мм.

стержнями. Площадь композиционной арматуры определялась в предположении, что нейтральная ось модели расположена на расстоянии 0,5 м от основания, что соответствует одинаковым прочностным характеристикам материала модели, выполненного из газосисликата (таблица 1). Действующие нагрузки – изгибающий момент величина которого определялась из аналитических расчетов в предположении, что допустимая величина трещины в области растягивающих напряжений будет не более 0,03 см. и температурная нагрузка, приложенная к внешним боковым граням. Граничные условия – жесткое защемление внешних боковых граней. стеновой панели. В арматурные стержни расположены равномерно на высоте с шагом a=0,1 м от основания. На рисунке 6 показаны обозначения, применяемые в аналитическом расчете рисунке 6.

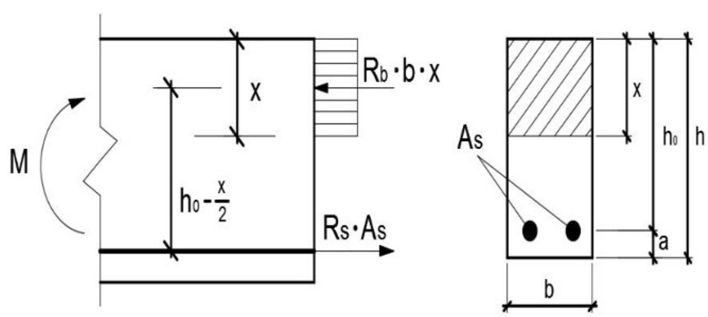



Рис. 7. Обозначения, принятые в расчете

Зададим нейтральную ось на расстоянии половины высоты стеновой панели: 0,5 м., с тем, чтобы газосиликатный материал имел одинаковые значения на растяжение и сжатие при изгибе стеновой панели. Определим необходимое поперечное сечение углеродных волокон, расположенных на расстояниях от нейтральной оси в зоне растяжения стеновой панели при изгибе: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4м.

Тогда момент инерции газосиликата от нейтральной оси определяется по формуле:

$$\mathrm{I_x}=\frac{bh^3}{24}=104166\ \text{см}^4$$

Момент инерции углеволокна, относительно нейтральной оси в предположении, что площадь поперечного сечения $F$ не зависит от расположения по высоте.

$$\mathrm{I_{xy}}=F(40^2+30^2+20^2+10^2)$$

Определим необходимую площадь поперечного сечения углеволокна из отношения моментов инерции газосиликата и углеволокна относительно нейтральной оси

$$F=\frac{I_x}{I_{xy}}=34,72\ \text{см}^2$$

Определим допустимое напряжение растяжения, при котором появляется трещина шириной l=0,03 см в зоне растяжения на нижней грани стеновой панели.

$$\sigma_l=E\ l=435\ \text{кг/см}^2.$$

В месте расположения армирования стеновой панели углеволокна - 40 см от нейтральной линии, величина трещины составит l1=0,024 см и напряжение будет $\sigma_{l1}=348$ кг/см$^2$

Учтем далее различие в прочности составляющих прочности газосиликата на сжатие и допустимое напряжение в углеродной нити при допустимой ширине трещины в нижней растянутой зоне стеновой панели. Площадь арматуры углеродной нити составит

$$F_y=\frac{FR_b}{\sigma_{l1}}=1,28\text{см}^2$$

Момент инерции углеродной нити относительно нейтральной оси при полученной площади углеродного волокна будет

$$\mathrm{I}_{\mathrm{x}y}=3831,4\ \text{см}^4$$

Момент сопротивления относительно нейтральной оси для углепластика определяется как

$$\mathrm{W_{xy}}=\frac{I_{xy}}{40}=95,79\ \text{см}^3$$

Момент сопротивления сечения для газосиликатного материала

$$\mathrm{W_x}=\frac{bh^2}{12}=4167\ \text{см}^3$$

Определим допустимый изгибающий момент из прочности газосиликата на сжатие

$$M=\mathrm{R_b}W_x=66666,7\ \text{кг см}$$

Погонная нагрузка на верхнюю грань стеновой панели при этом составит $\mathrm{q}=\frac{8\ \mathrm{M}}{\mathrm{bh}^2}=53.3$ кг/см

Допустимый изгибающий момент стеновой из газосиликата без армирования составит

$$M_g = \sigma_{\mathrm{g1}} W_x = 5833.3 \text{ кг см}$$

В результате проведенного расчета и анализа стеновой панели из газосиликата на допустимый изгибающий момент, с равными характеристиками ячеистого бетона: газоселиката на растяжение и сжатие, путем армирования зоны растяжения стеновой панели угленитями при изгибе получили допустимый изгибающий момент 66666,7 кг см.

Несущая способность стеновой панели на изгиб увеличилась на следующую величину

$$n = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M_g}} = 11$$

Анализ результатов расчета показал, что армирование ячеистого бетона: газосиликата композитными нитями значительно повышает несущую способность газосиликата на изгиб.

**Выводы.** В результате проведенного исследования получены результаты, позволяющие повысить прочностные характеристики ячеистых бетонов. Ячеистые бетоны имеют большое применение в современном строительстве, благодаря низким теплопроводящих характеристикам. Низкие характеристики прочности растяжения, по сравнению с характеристиками сжатия (таблица 1), не позволяет применять ячеистые бетонных в конструкциях, испытывающих растяжение. Такие напряжения возникают при изгибных и температурных нагрузках, а в случае применения ячеистых бетонов при таких нагрузках в ячеистых конструкциях возникают трещины, превышающие допустимые: 0.03 см. Поэтому вопросы решения проблемы усиления допустимых низких растягивающих напряжений, путем применения композиционных сеток и волокон в областях растягивающих напряжений является важной и актуальной темой. Проведенные расчеты и анализ показал, что композиционные волокна и сетки, расположенные в зонах растягивающих напряжений ячеистых бетонов позволяет повысить прочностные характеристики растяжения сопоставимые с допустимыми напряжениями сжатия, а именно в 10 и более раз, что позволяет применять ячеистые бетоны в конструкциях испытывающих растягивающие напряжения. Отличие усиления ячеистых конструкций композиционными сетками и волокнами по сравнению с металлической арматурой заключается в возникновении напряжений смятия ячеистых бетонов при соприкосновении с металлической арматурой и как следствие утратой арматурой своих функций. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными приведенными в работах [22, 23].

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** 100%.
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Источник финансирования.** Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** 100%.
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** This study was not supported by any external sources of funding.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ghernouti Y., Rabehi B. Effectiveness of Hybrid and Partially Confined Concrete Subjected to Axial Compressive Loading Using CFRP and GFRP Composite Materials // Slovak Journal of Civil Engineering. 2020. Т. 28, № 4. С. 8–14.
[2] Spyrakos C.C. [и др.]. Experimental and Analytical Study on Reinforced Concrete Beams in Bending Strengthened with FRP // The Open Construction & Building Technology Journal. 2014. Т. 8. С. 153–160.
[3] Lau Denvid, Pam Hoat Joen. Experimental study of hybrid FRP reinforced concrete beams // Engineering Structures. 2010. Т. 32. С. 3857–3865.
[4] Experimental and Analytical Study on Reinforced Concrete Beams in Bending Strengthened with FRP / C.C. Spyrakos [и др.] // The Open Construction and Building Technology Journal. 2014. Т. 8. С. 153–163.
[5] Guide for Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures / American Concrete Institute. 2008. ACI 440.2R-08.
[6] Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Existing Structures / CNR. Rome, 2004. CNR-DT 200/2004, 144 p.
[7] Willam K.J., Warnke E.D. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering. Т. 19. 1975. С. 174.
[8] A General Approach to Calculation of Displacements of Concrete Structures / ACI. 2000. ACI-435.
[9] Strengthening of concrete beams by CFRP: Experimental study and finite element analysis / Y. Ghernouti [и др.] // J. Build. Mater. Struct. 2014. Т. 1. С. 47–57.
[10] Bonacci J.F., Maalej M. Externally bonded fiber-reinforced polymer for rehabilitation of corrosion damaged concrete beams // ACI Structural Journal. 2000. Т. 97, № 5. С. 703–711.
[11] Shear strengthening of reinforced concrete beams using carbon fiber reinforced polymer laminate: A review / Marwan Bllkasem Salah Alferjani [и др.] // American Journal of Civil Engineering. 2014. Т. 2, № 1. С. 1–7.
[12] Khayrnasov K.Z. Methodology for Modeling and Determining the Frequency Response Trace of Robotic Composite Structures // Przeglad Elektrotechnicny. 2020. Т. 96, № 10. С. 39–42.
[13] Khayrnasov K.Z. Reinforcement of reinforced concrete structures with composite materials // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Т. 1030. 2021. С. 012070. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012070.
[14] Tamrazyan A. Reduce the impact of dynamic strength of concrete under fire conditions on bearing capacity of reinforced concrete columns // Applied Mechanics and Materials. 2014. Т. 475–476. С. 1563–1566.
[15] Jones R.M. Mechanics of composite materials. London : Taylor & Francis, 1999. 538 с.
[16] Roos R., Kress G., Ermanni F. A Post-Processing Method for Interlaminar Normal Stresses in Doubly Curved Laminates // Composite Structures. 2007. Т. 81, № 3. С. 463–470.
[17] Moaveni S. Finite Element Analysis Theory and Application with ANSYS. UK : Pearson Education, 2015. 929 с.
[18] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. Finite Element Method: Its Basis And Fundamental. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2013. 756 с.

[19] Koutromanos I. Applied Fundamentals of Finite Element Analysis Linear Finite Element Analysis. N.Y : John Wiley & Sons, 2018. 731 с.
[20] Bathe K.J. Finite Element Procedures. USA : Prentice Hall, Pearson Education, Inc, 2006. 1037 с.
[21] Koutromanos I. Applied Fundamentals of Finite Element Analysis. Linear Finite Element Analysis. N.Y : John Wiley & Sons, 2018. 356 с.
[22] Ceroni F. Experimental performances of RC beams strengthened with FRP materials // Construction and Building Materials. 2010. Т. 24. С. 1547–1559.
[23] Granovsky A.V. [и др.]. The use of a composite mesh on a strong lining under the action of the touch, simulating temperature effects // Industrial and civil construction. 2020. № 3. С. 25–32.

## REFERENCES

[1] Ghernouti Y., Rabehi B. Effectiveness of Hybrid and Partially Confined Concrete Subjected to Axial Compressive Loading Using CFRP and GFRP Composite Materials // Slovak Journal of Civil Engineering. 2020. Vol. 28, no. 4. P. 8–14.
[2] Spyrakos C.C. [et al.]. Experimental and Analytical Study on Reinforced Concrete Beams in Bending Strengthened with FRP // The Open Construction & Building Technology Journal. 2014. Vol. 8. P. 153–160.
[3] Lau Denvid, Pam Hoat Joen. Experimental study of hybrid FRP reinforced concrete beams // Engineering Structures. 2010. Vol. 32. P. 3857–3865.
[4] Experimental and Analytical Study on Reinforced Concrete Beams in Bending Strengthened with FRP / C.C. Spyrakos [et al.] // The Open Construction and Building Technology Journal. 2014. Vol. 8. P. 153–163.
[5] Guide for Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures / American Concrete Institute. 2008. ACI 440.2R-08.
[6] Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Existing Structures / CNR. Rome, 2004. CNR-DT 200/2004, 144 p.
[7] Willam K.J., Warnke E.D. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering. Vol. 19. 1975. P. 174.
[8] A General Approach to Calculation of Displacements of Concrete Structures / ACI. 2000. ACI-435.
[9] Strengthening of concrete beams by CFRP: Experimental study and finite element analysis / Y. Ghernouti [et al.] // J. Build. Mater. Struct. 2014. Vol. 1. P. 47–57.
[10] Bonacci J.F., Maalej M. Externally bonded fiber-reinforced polymer for rehabilitation of corrosion damaged concrete beams // ACI Structural Journal. 2000. Vol. 97, no. 5. P. 703–711.
[11] Shear strengthening of reinforced concrete beams using carbon fiber reinforced polymer laminate: A review / Marwan Bllkasem Salah Alferjani [et al.] // American Journal of Civil Engineering. 2014. Vol. 2, no. 1. P. 1–7.
[12] Khayrnasov K.Z. Methodology for Modeling and Determining the Frequency Response Trace of Robotic Composite Structures // Przeglad Elektrotechnicny. 2020. Vol. 96, no. 10. P. 39–42.
[13] Khayrnasov K.Z. Reinforcement of reinforced concrete structures with composite materials // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 1030. 2021. P. 012070. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012070.
[14] Tamrazyan A. Reduce the impact of dynamic strength of concrete under fire conditions on bearing capacity of reinforced concrete columns // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 475–476. P. 1563–1566.
[15] Jones R.M. Mechanics of composite materials. London : Taylor & Francis, 1999. 538 p.

[16] Roos R., Kress G., Ermanni F. A Post-Processing Method for Interlaminar Normal Stresses in Doubly Curved Laminates // Composite Structures. 2007. Vol. 81, no. 3. P. 463–470.
[17] Moaveni S. Finite Element Analysis Theory and Application with ANSYS. UK : Pearson Education, 2015. 929 p.
[18] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. Finite Element Method: Its Basis And Fundamental. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.
[19] Koutromanos I. Applied Fundamentals of Finite Element Analysis Linear Finite Element Analysis. N.Y : John Wiley & Sons, 2018. 731 p.
[20] Bathe K.J. Finite Element Procedures. USA : Prentice Hall, Pearson Education, Inc, 2006. 1037 p.
[21] Koutromanos I. Applied Fundamentals of Finite Element Analysis. Linear Finite Element Analysis. N.Y : John Wiley & Sons, 2018. 356 p.
[22] Ceroni F. Experimental performances of RC beams strengthened with FRP materials // Construction and Building Materials. 2010. Vol. 24. P. 1547–1559.
[23] Granovsky A.V. [et al.]. The use of a composite mesh on a strong lining under the action of the touch, simulating temperature effects // Industrial and civil construction. 2020. no. 3. P. 25–32.

*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.003* *EDN: BDZATO*

*Научная статья* *УДК: 539.3+539.219.3*

*Д. С. Дудин, И. Э. Келлер*

# ОПИСАНИЕ СУЛЬФИДНО-ОКСИДНОЙ И ХЛОРИДНОЙ КОРРОЗИИ ЖАРОПРОЧНЫХ СПЛАВОВ С УЧЁТОМ НАПРЯЖЕНИЙ. I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

***Аннотация.*** Сульфидно-оксидная и хлоридная коррозия оказывает значительное влияние на ресурс деталей газотурбинных двигателей. Под воздействием высоких температур кислород и сера проникают через поверхность жаропрочного сплава, изменяя его физико-механические свойства, что при действии высоких внешних нагрузок приводит к разрушению. Взаимная диффузия компонентов и химические реакции изменяют локальный химический состав и плотность материала, создавая поля собственных деформаций и остаточных напряжений. Напряжения и их градиенты влияют на скорости процессов взаимной диффузии компонентов и химических реакций. Движение компонентов обусловлено конвективным переносом и диффузионными потоками относительно материала. Однако для описания взаимной диффузии компонентов в атомных кристаллах независимые диффузионные потоки определяются относительно маркеров — инертных частиц, не влияющих на химические и диффузионные процессы в материале. Формулируется связанная модель, совмещающая маркерный подход к описанию диффузии и материальный подход к описанию деформирования. В ней учитывается наиболее простой механизм сульфидно-оксидной коррозии двухкомпонентного жаропрочного сплава. Учитываются объемные деформации набухания материального объёма вследствие диффузионных и химических процессов и сдвиговые упругопластические деформации металла и продуктов коррозии при высоких температурах, за счет которых в рассматриваемой расчетной схеме релаксируют напряжения. Решение термодинамического неравенства для рассматриваемых переменных состояния и процессов дает перекрестные члены и зависимость от градиента среднего напряжения в физических соотношениях для диффузионных потоков, зависимость скоростей химических реакций от среднего напряжения. В балансовые уравнения химического состава входит скорость конвективного перемещения материала. Предполагается, что эти элементы связанности модели будут важными для описания процесса сульфидно-оксидной и хлоридной коррозии металлических сплавов с учетом влияния технологических остаточных и эксплуатационных напряжений на диффузионные и химические процессы и возникновения собственных деформаций и остаточных напряжений вследствие этих процессов.

***Ключевые слова***: сульфидно-оксидная коррозия, модель, взаимная диффузия, напряжения, упругопластичность, химические реакции, связанные процессы

**Дудин Дмитрий Сергеевич**, ведущий инженер лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела; `e-mail:` dudin.d@icmm.ru; `https://orcid.org/0000-0002-1911-8899`; AuthorID: 1110725

**Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела; e-mail: kie@icmm.ru; https://orcid.org/0000-0001-9914-8870; AuthorID: 11695

***для цитирования:*** *Дудин Д. С., Келлер И. Э.* Описание сульфидно-оксидной и хлоридной коррозии жаропрочных сплавов с учётом напряжений. I. Математическая модель // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 123–133. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.003. EDN: BDZATO





*Поступила: 15.01.25; принята в печать: 20.01.25; опубликована: 17.06.25.*

*Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.003* *EDN: BDZATO*
*Research Article*

*D. S. Dudin, I. E. Keller*

# DESCRIPTION OF SULFIDE-OXIDE AND CHLORIDE CORROSION OF HEAT-RESISTANT ALLOYS TAKING INTO ACCOUNT STRESSES. I. MATHEMATICAL MODEL

*Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russia*

***Abstract.*** Sulfide-oxide and chloride corrosion has a significant impact on the life of gas turbine engine parts. Under the influence of high temperatures, oxygen and sulfur penetrate through the surface of the heat-resistant alloy, changing its physico-mechanical properties, which leads to destruction under the influence of high external loads. The mutual diffusion of components and chemical reactions change the local chemical composition and density of the material, creating fields of intrinsic deformations and residual stresses. Stresses and its gradients affect the rates of mutual diffusion of components and chemical reactions. The motion of the components is caused by convective transport and diffusion flows relative to the material. However, to describe the mutual diffusion of components in atomic crystals, independent diffusion fluxes are determined relative to markers - inert particles that do not affect chemical and diffusion processes in the material. A related model is formulated that combines a marker approach to the description of diffusion and a material approach to the description of deformation. It takes into account the simplest mechanism of sulfide-oxide corrosion of a two-component heat-resistant alloy. Volumetric deformations of the swelling of the material volume due to diffusion and chemical processes and shear elastoplastic deformations of metal and corrosion products at high temperatures are taken into account, due to which stresses relax in the considered design scheme. The solution of the thermodynamic inequality for the considered state variables and processes gives cross terms and dependence on the average voltage gradient in physical relations for diffusion flows, the dependence of chemical reaction rates on the average voltage. The balance equations of chemical composition include the rate of convective movement of the material. It is assumed that these model connectivity elements will be important for describing the process of sulfide-oxide and chloride corrosion of metal alloys, taking into account the influence of technological residual and operational stresses on diffusion and chemical processes and the occurrence of intrinsic deformations and residual stresses due to these processes.

***Keywords***: high-temperature corrosion, model, interdiffusion, stresses, elastoplasticity, chemical reactions, coupled processes

**Dmitrii S. Dudin**, Leading Engineer of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids; `e-mail:` dudin.d@icmm.ru;
`https://orcid.org/0000-0002-1911-8899`; AuthorID: 1110725

**Ilya E. Keller**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids; `e-mail:` kie@icmm.ru;
`https://orcid.org/0000-0001-9914-8870`; AuthorID: 11695

***to cite this article:*** *Dudin D. S., Keller I. E.* Description of sulfide-oxide and chloride corrosion of heat-resistant alloys taking into account stresses. I. Mathematical model // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 123–133. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.003



*Received: 15.01.25; accepted: 20.01.25; published: 17.06.25.*

**Введение.** Детали авиационных двигателей работают в условиях высоких температур, воздействия агрессивных продуктов сгорания топлива и морской соли и высоких механических нагрузок. Кислород вызывает образование тонкой плёнки оксидов на поверхности, в которой накапливаются повреждения. Сера и хлор из солевого расплава на поверхности проникают сквозь оксидную плёнку и вызывают формирование слоя сульфидов и хлоридов, стимулируя взаимную диффузию компонентов сплава, кислорода, серы и хлора и приводя к обеднению поверхностного слоя сплава легирующими элементами. Прогнозирование роста плёнки продуктов коррозии и напряжённо-деформированного состояния в ней требует постановки связанной модели, в которой учитывается взаимная диффузия компонентов, химические реакции и процесс деформирования, вызванный как эксплуатационными напряжениями, так и напряжениями хемодиффузионной природы. В настоящей работе формулируется подобная модель на основе подхода классической необратимой термодинамики многокомпонентных сред [1]. Здесь в качестве некоторого упрощения полагается, что поле (повышенной) температуры постоянно во времени и однородно, что правдоподобно для крейсерского режима работы авиационного двигателя.

**1. Механизм сульфидно-оксидной коррозии.** Для примера рассматривается сульфидно-оксидная коррозия стали $\mathrm{Fe_{70}Cr_{30}}$ при 800 °, в ходе которой образуется слоистая структура продуктов коррозии [2]. Для её описания предлагается следующий механизм (см. рис. 1), в котором учитываются три химических реакции, протекающих со скоростями $\dot{\ell}_i$, $i = 1, 2, 3$: окисление железа, окисление хрома и образование сульфида хрома

$$\mathrm{4Fe + 3O_2 \to 2Fe_2O_3}, \quad \mathrm{4Cr + 3O_2 \to 2Cr_2O_3}, \tag{1}$$

$$\mathrm{4Cr + 3S_2 \to 2Cr_2S_3},$$

нумеруемые в соответствии с порядком перечисления. Процесс проходит в два этапа. На первом этапе молекулярный кислород диффундирует внутрь металла, где реагирует с ионами Fe и Cr, диффундирующими навстречу кислороду (рис. 1, а). За счёт взаимной диффузии компонентов снаружи формируется слой оксида железа, под которым возникает слой оксида хрома. При достижении критической поврежденности коррозионного слоя молекулярная сера диффундирует сквозь него, где на границе металл-оксид начинает реагировать с хромом и проникать вглубь металла с образованием сульфидного слоя (рис. 1, б).

Таким образом, модель учитывает семь компонентов, которые нумеруются в соответствии с порядком $\mathrm{O_2}$, Fe, Cr, $\mathrm{S_2}$, $\mathrm{Fe_2O_3}$, $\mathrm{Cr_2O_3}$ и $\mathrm{Cr_2S_3}$. Коэффициенты перед $k$-ым компонентом в $i$-ой химической реакции в химических уравнениях (1) называются стехиометрическими коэффициентами $\nu_k^i$. Далее принимается, что $\nu_k^i > 0$ соответствуют продуктам химических реакций, $\nu_k^i < 0$ задаётся для реагента, а при $\nu_k^i = 0$ компонента не участвует в химической реакции.

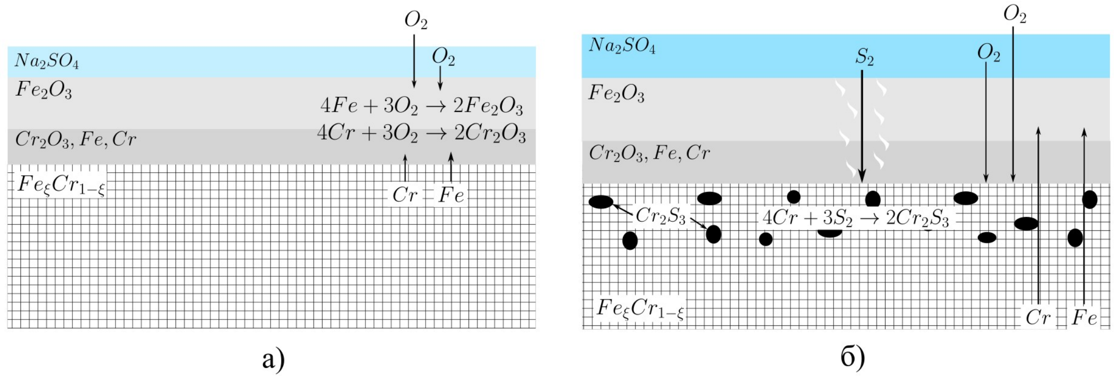



Рис. 1. Механизм сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали: а) формирование оксидной плёнки, б) проникновение серы через оксидную плёнку и образование сульфидного слоя

**2. Теоретическое описание взаимной диффузии.** Химический состав материальной точки, содержащей $n_k$, $k = 1, ..., 7$ моль компонентов с мольными массами $m_k$ и мольными объёмами $V_k$, определяется плотностями компонентов $\rho_k$, $k = 1, ..., 7$ либо массовыми долями $x_k = \rho_k/\rho$, $k = 1, ..., 7$ и полной плотностью $\rho = \sum \rho_k$. Диффузионные потоки переменных химического состава могут быть определены относительно различных локальных систем отсчёта. В качестве одной из них может быть выбрана скорость материального объема

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{7} x_k \mathbf{v}_k, \quad \sum_{k=1}^{7} x_k = 1, \tag{2}$$

где $\mathbf{v}_k$ — парциальная скорость $k$-го компонента.

В атомных кристаллах используется локальная система отсчета, связанная с маркерами — малыми инертными частицами, не диффундирующими и химически не реагирующими с компонентами кристалла [3]. Скорость маркеров обозначим $\mathbf{v}_m$ и определим диффузионные потоки $\mathbf{j}_k^m$ и $\mathbf{j}_k$ относительно маркеров и материала:

$$\mathbf{j}_k^m = \rho_k \left(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_m\right), \quad \mathbf{j}_k = \rho_k \left(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\right), \quad k = 1, ..., 7.$$

Диффузионные потоки $\mathbf{j}_k$ в силу (2) являются сбалансированными $\sum_{k=1}^{7} \mathbf{j}_k = 0$, а потоки $\mathbf{j}_k^m$ таковыми не являются. Связь рассматриваемых потоков дается соотношением [4]

$$\mathbf{j}_k = \mathbf{j}_k^m - x_k \sum_{i=1}^{7} \mathbf{j}_i^m, \; k = 1, ..., 7 \tag{3}$$

и удовлетворяет условию сбалансированности потоков $\mathbf{j}_k$.

Связанную модель процессов взаимной диффузии и деформирования естественно ставить в терминах материальной скорости, поэтому используются балансовые уравнения переменных массового состава в виде

$$\rho\frac{dx_k}{dt} = -\nabla\cdot\mathbf{j}_k + m_k\sum_{i=1}^{3}\nu_k^i\dot{\ell}_i, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla, \quad k = 1, ..., 7, \quad (4)$$

где $\nabla$ — оператор градиента. Заметим, что полная плотность $\rho$ элементарного материального объема сохраняется, несмотря на изменение химического состава и количества частиц в соответствующем ему пространственном объеме.

**3. Напряжения и деформации.** Напряжённое состояние характеризуется тензором напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$, который удовлетворяет уравнению равновесия и разделяется на шаровую и девиаторную части:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_m\mathbf{I} + \mathbf{s}, \quad (5)$$

где $\sigma_m$ — среднее значение тензора напряжений, $\mathbf{s}$ — девиатор тензора напряжений.

В целях упрощения модели здесь используются геометрически линейные тензоры деформаций и напряжений. В момент времени $t = 0$ материальная точка имеет объём $dV_0$, который при $t > 0$ становится равным $dV$. Обозначим вектор перемещения материальной точки через $\mathbf{u}$, тогда тензор малых полных деформаций имеет вид и также разделяется на шаровую и девиаторную части:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\right), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon_V\mathbf{I} + \mathbf{e}, \quad (6)$$

где $\varepsilon_V = (dV - dV_0)/dV_0$ и $\mathbf{e}$ — объемная деформация и девиаторная часть тензора деформаций.

Материальная точка претерпевает объёмные деформации упругой $\varepsilon_V^e$ и неупругой природы $\varepsilon_V^s$. Последние связаны с притоком (оттоком) компонентов в материальную точку либо с химическими превращениями и называются деформациями набухания. Для объёмных деформаций записывается аддитивное разложение

$$\varepsilon_V = \varepsilon_V^e + \varepsilon_V^s. \quad (7)$$

В работе [4] показывается, что при использовании условия молекулярной несжимаемости [5] с учетом малости деформаций имеет место соотношение

$$\varepsilon_V^e = 1 + \varepsilon_V - \sum_{k=1}^{7} V_k c_k, \quad (8)$$

связывающее объемные деформации с переменными химического состава. Далее удобно перейти к основным переменным состава с использованием соотношения $c_k = \rho_k/m_k = \rho x_k/m_k$.

Изменение формы элементарного объема материала описывается упругой $\mathbf{e}^e$ и пластической $\mathbf{e}^p$ девиаторными составляющими тензора малых деформаций, связанными аддитивным разложением

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p. \tag{9}$$

**4. Физические уравнения.** Физические соотношения модели строятся в рамках классической термодинамики необратимых процессов для многокомпонентных сред. Вывод уравнений приводится в работе [4]. Напряжения связываются с упругими деформациями с помощью закона Гука

$$\sigma_m = K\varepsilon_V^e, \quad \mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^e. \tag{10}$$

Предполагается, что объёмный модуль $K$ и модуль сдвига $G$ для продуктов коррозии и металла отличаются незначительно, что делает их не зависящими от состава.

Принимается, что пластические деформации описываются законом пластического течения

$$\frac{d\mathbf{e}^p}{dt} = \frac{3\dot{\varepsilon}^p}{2\overline{\sigma}}\mathbf{s}, \quad \dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{d\mathbf{e}^p}{dt} : \frac{d\mathbf{e}^p}{dt}}, \tag{11}$$

ассоциированным с критерием текучести Мизеса

$$\overline{\sigma} = \sigma_Y, \quad \overline{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}}, \tag{12}$$

в котором учитывается изотропное деформационное упрочнение, описываемое законом

$$\sigma_Y = \sigma^0 + b(\overline{\varepsilon}^p)^n, \quad \overline{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}^p dt, \tag{13}$$

В многокомпонентной среде константы закона упрочнения зависят от химического состава. Для констант $\sigma^0$ и $b$ предлагается использовать модель смешения в форме

$$\sigma^0 = (1 - x_2 - x_3)\sigma_c^0 + (x_2 + x_3)\sigma_m^0, \quad b = (1 - x_2 - x_3)b_{cor} + (x_2 + x_3)b_m, \tag{14}$$

а показатель степени $n$ оставить константой. Сумма массовых долей $x_2 + x_3$ в металле равняется единице, и величины $\sigma^0$, $b$ принимают значения, определяемые для металла $\sigma_m^0$ и $b_m$. Значения $\sigma_c^0$ и $b_c$ задают пластические свойства коррозионного слоя.

Для построения кинетических уравнений диффузионных и химических процессов вводятся мольная $\xi_k = c_k/c$ (с учётом обозначения $c = \sum_{k=1}^7 c_k$) и объёмная $\phi_k = c_k V_k$ доли $k$-ого компонента. Для химических реакций принимается нелинейное кинетическое уравнение [6], в которое подставляются химические потенциалы из работы [4]

$$\dot{\ell}_i = k_i \prod_{j\in R_i} \xi_j \left(1 - \exp\left(A_i^0 - \sum_{k=1}^{7} \nu_k^i V_k \frac{\sigma_m}{RT}\right) \prod_{k=1}^{7} \xi_k^{\nu_k^i}\right), \quad i = 1, 2, 3 \tag{15}$$

где $k_i$ — константа скорости $i$-ой химической реакции, $A_i^0$ — стандартное химическое сродство $i$-ой химической реакции, $R$ — универсальная газовая постоянная, $T$ — термодинамическая температура, $R_1 = \{1, 2\}$, $R_2 = \{1, 3\}$, $R_3 = \{3, 4\}$.

Нелинейная кинетика позволяет получить локализованный фронт химических реакций в среде с диффузией реагирующих компонентов без использования посторонних сущностей типа фазового поля или поверхностных градиентов напряжений.

Далее выводятся соотношения для независимых диффузионных потоков подвижных реагентов относительно локальной системы отсчета, связанной с маркерами

$$\mathbf{j}_k^m = -D_k \left( \frac{1}{\xi_k} \nabla \xi_k - \frac{x_k - \phi_k}{RT} \nabla \sigma_m \right), \quad k = 1, ..., 4, \tag{16}$$

$$D_k = 0, \quad \mathbf{j}_k^m = 0, \quad k = 5, 6, 7$$

где $D_k$ — коэффициент диффузии $k$-ой компоненты. Принимается, что продукты коррозии не диффундируют относительно маркеров. Используя связи диффузионных потоков (3) и переменных состава, получаем диффузионные потоки относительно материала

$$\mathbf{j}_k = -\frac{\rho D_k}{c} \nabla x_k + \frac{\rho x_k}{c} \sum_{i=1}^{7} \left( D_i + \frac{\rho}{m_i c} \left( D_k - \sum_{j=1}^{4} x_j D_j \right) \right) \nabla x_i$$

$$+ \frac{1}{RT} \left( x_k \sum_{j=1}^{4} m_j (x_j - \phi_j) D_j - (x_k - \phi_k) m_k D_k \right) \nabla \sigma_m, \quad k = 1, ..., 7. \tag{17}$$

с коэффициентами диффузии диффундирующих компонентов, построенными по модели смешения

$$D_k = D_k^{\mathrm{FeCr}} + (D_k^{\mathrm{Fe_2O_3}} - D_k^{\mathrm{FeCr}}) x_5 + (D_k^{\mathrm{Cr_2O_3}} - D_k^{\mathrm{FeCr}}) x_6 + (D_k^{\mathrm{Cr_2S_3}} - D_k^{\mathrm{FeCr}}) x_7. \tag{18}$$

Если $k$-ая компонента диффундирует в оксиде железа, т.е. при $x_5 = 1$, коэффициент диффузии $k$-ой компоненты $D_k = D_k^{\mathrm{Fe_2O_3}}$. Аналогичные соотношения получаются при $x_6 = 1$, $x_7 = 1$ либо отсутствии массовых долей продуктов коррозии.

**5. Система уравнений.** Связанная система уравнений процессов взаимной диффузии и деформирования с сопровождающими химическими реакциями состоит из уравнений: баланса переменных химического состава (4), равновесия (5), сплошности (6)–(9), упругопластичности (12)–(11), химической (15) и диффузионной (17), (18) кинетики.

Система дополняется начальными

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0, \quad x_2|_{t=0} = x_2^0, \quad x_3|_{t=0} = x_3^0, \quad x_k|_{t=0} = 0, \quad k \neq 2, 3,$$

и граничными условиями

$$\mathbf{v}|_{\Gamma_v} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_k|_{\Gamma_j} = j_k(x_k), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_k|_{\Gamma_0} = 0, \quad k = 1, ..., 6,$$

где диффузионные потоки на границе определяются через коэффициенты проницаемости для диффундирующих компонентов $d_k$, $k = 1, ..., 4$ и массовые доли компонентов на границе $x_k^\Gamma \neq 0$, $k = 1, ..., 4$ (для остальных компонентов $x_k^\Gamma = 0$) следующим образом

$$j_k = -\frac{\rho d_k}{c}(x_k - x_k^\Gamma) + \frac{\rho x_k}{c} \sum_{i=1}^{7} \left( d_i + \frac{\rho}{m_i c} \left( d_k - \sum_{j=1}^{4} x_j d_j \right) \right) (x_i - x_i^\Gamma).$$

**Заключение.** Предложена связанная модель процессов взаимной диффузии, упругопластического деформирования и химических реакций, адаптированная к описанию сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали $Fe_{70}Cr_{30}$ при повышенных температурах. Модель базируется на наиболее простом механизме сульфидно-оксидной коррозии, в котором действуют четыре диффундирующих реагента ($O_2$, Fe, Cr, $S_2$) и три диффузионно-неподвижных продукта химических реакций ($Fe_2O_3$, $Cr_2O_3$, $Cr_2S_3$). Преимущество модели заключается в использовании маркерной скорости при описании диффузии, относительно которой диффузионные потоки являются независимыми, что не требует явного рассмотрения плотности вакансий либо каких-то других посторонних полей, модерирующих процесс взаимной диффузии. Окончательная система уравнений записывается для материальной точки с помощью соотношений связи диффузионных потоков относительно маркеров и материала. В связанной модели последовательно учитывается влияние напряжений на диффузию и химические реакции, а также формирование собственных деформаций и остаточных напряжений за счет диффузионных и химических процессов. Поэтому с ее помощью может быть теоретически исследованы процессы, происходящие в деталях горячих секций авиационного двигателя при действии постоянной или циклической химической, температурной и механической нагрузок, влияние на них остаточных напряжений, зависимость от химического состава сплава и агрессивной среды, темпы коррозионной стойкости и обеднения легирующими элементами приповерхностного слоя.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** Д. С. Дудин — теоретическая часть, написание текста рукописи, И. Э. Келлер — критический анализ работы, редактирование текста рукописи.
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Работа выполнена в рамках госзадания по теме Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, № ГР АААА-А20-120022590044-7.

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** D. S. Dudin — theoretical part, writing the text of the manuscript, I. E. Keller — critical analysis of the work, editing the text of the manuscript.
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** This study was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, State Registration Numbers AAAA-A20-120022590044-7.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] De Groot S. R., Mazur P. Non-equilibrium thermodynamics. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1962. 528 с.
[2] Ning Z., Zhou Q., Liu Z. Effects of imposed stresses on high temperature corrosion behavior of T91 // Corrosion Science. 2021. № 189. С. 109595. DOI: 10.1016/j.corsci.2021.109595.
[3] Mehrer H. Diffusion in solids. Fundamentals, Methods, Materials, Diffusion-Controlled Processes. 2007. 654 с.
[4] Dudin D. S., Keller I. E. On the Decomposition of Motion in the Description of Interdiffusion in a Viscoelastic Body // Mechanics of Solids. 2024. № 7 (59). С. 3781–3797. DOI: 10.1134/S0025654424606013.
[5] Brassart L., Liu Q., Suo Z. Mixing by shear, dilation, swap, and diffusion // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2018. № 112. С. 253–272. DOI: 10.1016/j.jmps.2017.12.008.
[6] Freidin A. B. On the chemical affinity tensor for chemical reactions in deformable materials // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3 (50). С. 260–285. DOI: 10.3103/S0025654415030048.

## REFERENCES

[1] De Groot S. R., Mazur P. Non-equilibrium thermodynamics. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1962. 528 p.
[2] Ning Z., Zhou Q., Liu Z. Effects of imposed stresses on high temperature corrosion behavior of T91 // Corrosion Science. 2021. no. 189. P. 109595. DOI: 10.1016/j.corsci.2021.109595.
[3] Mehrer H. Diffusion in solids. Fundamentals, Methods, Materials, Diffusion-Controlled Processes. 2007. 654 p.
[4] Dudin D. S., Keller I. E. On the Decomposition of Motion in the Description of Interdiffusion in a Viscoelastic Body // Mechanics of Solids. 2024. no. 7 (59). P. 3781–3797. DOI: 10.1134/S0025654424606013.
[5] Brassart L., Liu Q., Suo Z. Mixing by shear, dilation, swap, and diffusion // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2018. no. 112. P. 253–272. DOI: 10.1016/j.jmps.2017.12.008.
[6] Freidin A. B. On the chemical affinity tensor for chemical reactions in deformable materials // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. no. 3 (50). P. 260–285. DOI: 10.3103/S0025654415030048.

*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.002* *EDN: UMGSZH*

*Научная статья* *УДК: 539.3*

*Ю. К. Бивин*

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ ВОЗДУХА, СОПРОВОЖДАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

***Аннотация.*** Приведены результаты экспериментальных исследований электрически заряженных зон, возникающих и сопровождающих движение твердого тела в воздухе. Определено расположение зон относительно тела в зависимости от формы тела и скорости его движения. Определено влияние на напряженность электрического поля вокруг тела его физической природы.

***Ключевые слова***: заряженные зоны, электрический заряд, обтекание, разрежение, сжатие.

**Бивин Юрий Карлович**, канд. тех. наук, ведущий инженер лаб. механики и оптимизации конструкций; `e-mail:` bivin@ipmnet.ru; `https://orcid.org/0000-0001-6672-0615`; AuthorID: 7200

***для цитирования:*** *Бивин Ю. К.* Экспериментальное исследование электризации воздуха, сопровождающей движение твердых тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 1(63). С. 134–146. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.002. EDN: UMGSZH



*Поступила: 01.03.25;* *принята в печать: 10.05.25;* *опубликована: 17.06.25.*

*DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.002* *EDN: UMGSZH*
*Research Article*

*Yu. K. Bivin*

# EXPERIMENTAL STUDY OF AIR ELECTRICITY ACCOMPANIING THE MOVEMENT OF SOLID BODIES

[1]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

***Abstract.*** The results of experimental studies of electrically charged zones arising and accompanying the movement of a solid body in the air are presented. The location of zones relative to the body is determined depending on the shape of the body and the speed of its movement. The influence of the physical nature of the electric field around the body on the intensity of the field is determined.

***Keywords***: charged zones, electric charge, flow, rarefaction, compression.

**Yury K. Bivin**, Ph. D. of Eng. Sci., Leading Engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS;
https://orcid.org/0000-0001-6672-0615; AuthorID: 7200

***to cite this article:*** *Bivin Yu. K.* EXPERIMENTAL STUDY OF AIR ELECTRICITY ACCOMPANIING THE MOVEMENT OF SOLID BODIES // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 1(63). p. 134–146. DOI: 10.37972/chgpu.2025.63.1.002



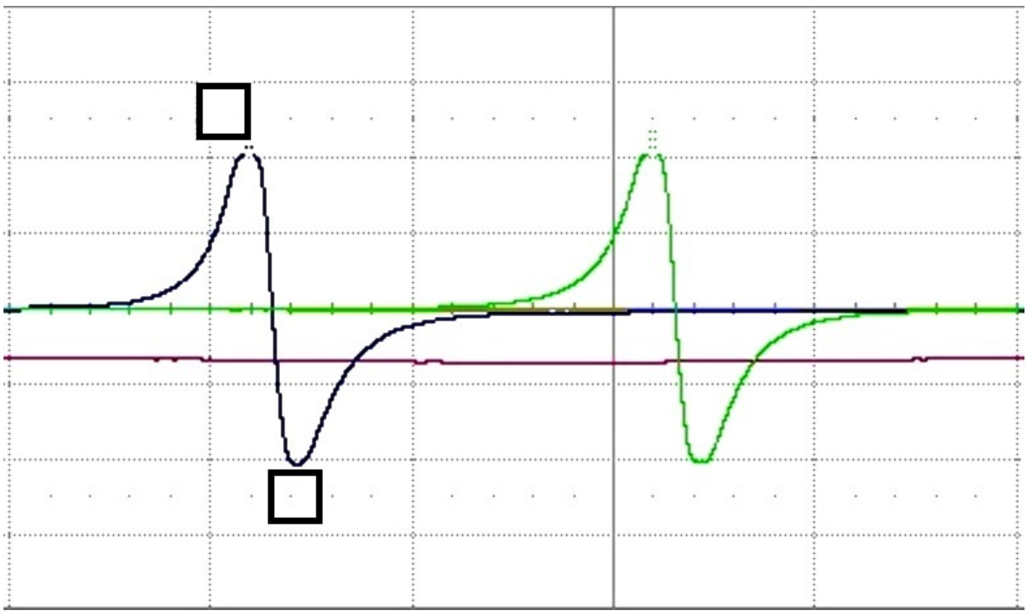
*Received: 01.03.25;* *accepted: 10.05.25;* *published: 17.06.25.*

**Введение.** Исследования электрических полей, возникающих при динамическом деформировании без разрушения твердых материалов, результаты которых приведены в [1], показали, что электрическое поле сопровождает не только разрушение твердых тел, но и упругие динамические деформации. Но, в отличие от активных диэлектриков-пьезоэлектретов, электрическое поле может сопровождать динамические деформации и первоначально электрически нейтральные движущиеся твердые тела, не относящиеся к этому классу. Еще одна особенность проявляется в этом случае в том, что разделение зарядов в телах, исчезает вместе с динамической деформацией и они остаются электрически нейтральными. Описание взаимодействия физики и механики при распространении волны деформации в кристаллическом проводнике дано в [2]. Определение характеристик электретов и способы их получения из первоначально электрически нейтральных диэлектриков, как отмечают специалисты, работающие в этой области, составили самостоятельный раздел физики, в котором отдельно рассматриваются различные виды электретов, отличающиеся по способу получения и области применения [5]. В воздушной среде в динамике так же нарушается ее электрическая нейтральность, но проявления этого более разнообразны и зависят от большего количества параметров. Первоначальные результаты экспериментов в данном направлении были представлены в [3] и [4]].

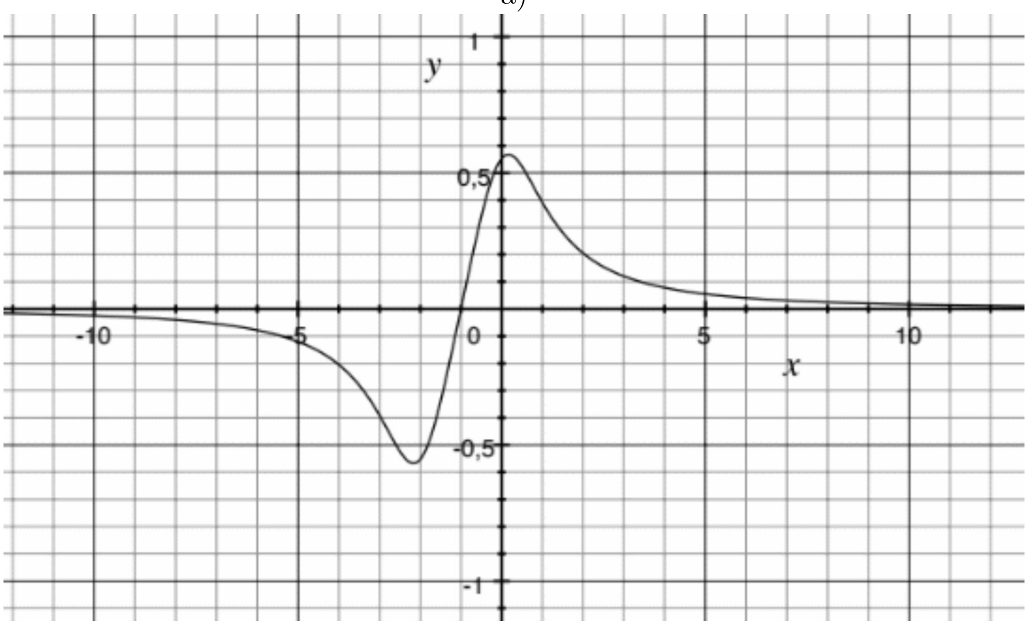
Целью данной работы было экспериментально изучить зависимость появления заряженных зон, сопровождающих движущееся в воздушной среде твердое тело, от наличия зон разрежения и сжатия воздуха. Также в задачу исследования входило определение зависимости вида зарядов и их взаимного расположения от таких параметров, как форма тела, его физическая природа и скорость движения.

**1. Эксперименты с цилиндрическими телами из оргстекла при различных геометрических и скоростных параметрах.** Опыты проводились на пневматической пушке калибром 10 мм. Скорость полета тела определялась на выходе из ствола оптическими датчиками, сигнал с которых поступал в осциллограф LeCroy WaveSurfer 24Xs7. На определенном расстоянии от среза ствола, где не проявлялось влияние выхлопных газов, устанавливались антенны в виде колец в плоскости, нормальной к траектории, проходящей через центр кольца. Сигнал с антенн записывался на тот же осциллограф. Это позволяло, зная момент вылета тела из ствола и его скорость, определять по осциллограммам взаимное положение тела и показания с антенн, а также моделировать распределения зарядов относительно тела и вдоль линии движения. По виду осциллограммы определялась возможность представления заряда в виде точечного, расположенного на оси, или равномерно распределенного. Если в зону распределенного заряда попадало тело, то заряд считался равномерно распределенным по его поверхности. Во всех экспериментах калибр тела был 10 мм.

На рис. 1(а) представлена осциллограмма, полученная при выстреле пулькой из оргстекла в виде цилиндра длиной 10 мм. На ней показано положение



a)




b)

Рис. 1. (a) напряжения на антеннах при пролете цилиндра из оргстекла длиной 10 мм со скоростью 102 м/с; (b) результат расчета.

пули в момент максимальных значений напряженности поля, регистрируемого антенной. Когда передний торец цилиндра пролетает кольцо-антенну, напряжение на антенне достигает максимума. Когда сквозь антенну проходит примерно

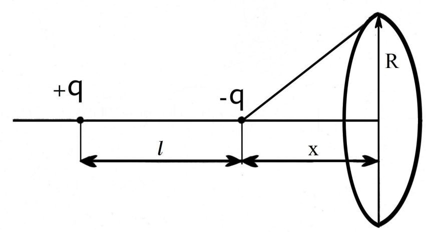



Рис. 2. Расчетная схема вычисления напряжений для точечного заряда и равномерно распределенного вдоль оси.

середина тела, возникает максимум другого знака. Это значит, что зоны воздуха, несущие заряды разного знака, находятся рядом и довольно узкие, так что их можно представить в виде точечных, расположенных на расстоянии между максимумами показания антенн.

Расчетная схема представлена на рис. 2. $R$ – радиус антенны, $q$ – заряды, $l$ – расстояние между ними или длина зоны, несущей заряд.

Потенциал на антенне для точечных зарядов определяется из следующего соотношения:

$$4\pi\varphi\varepsilon = \frac{-q}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x+l)^2+R^2}}. \tag{1}$$

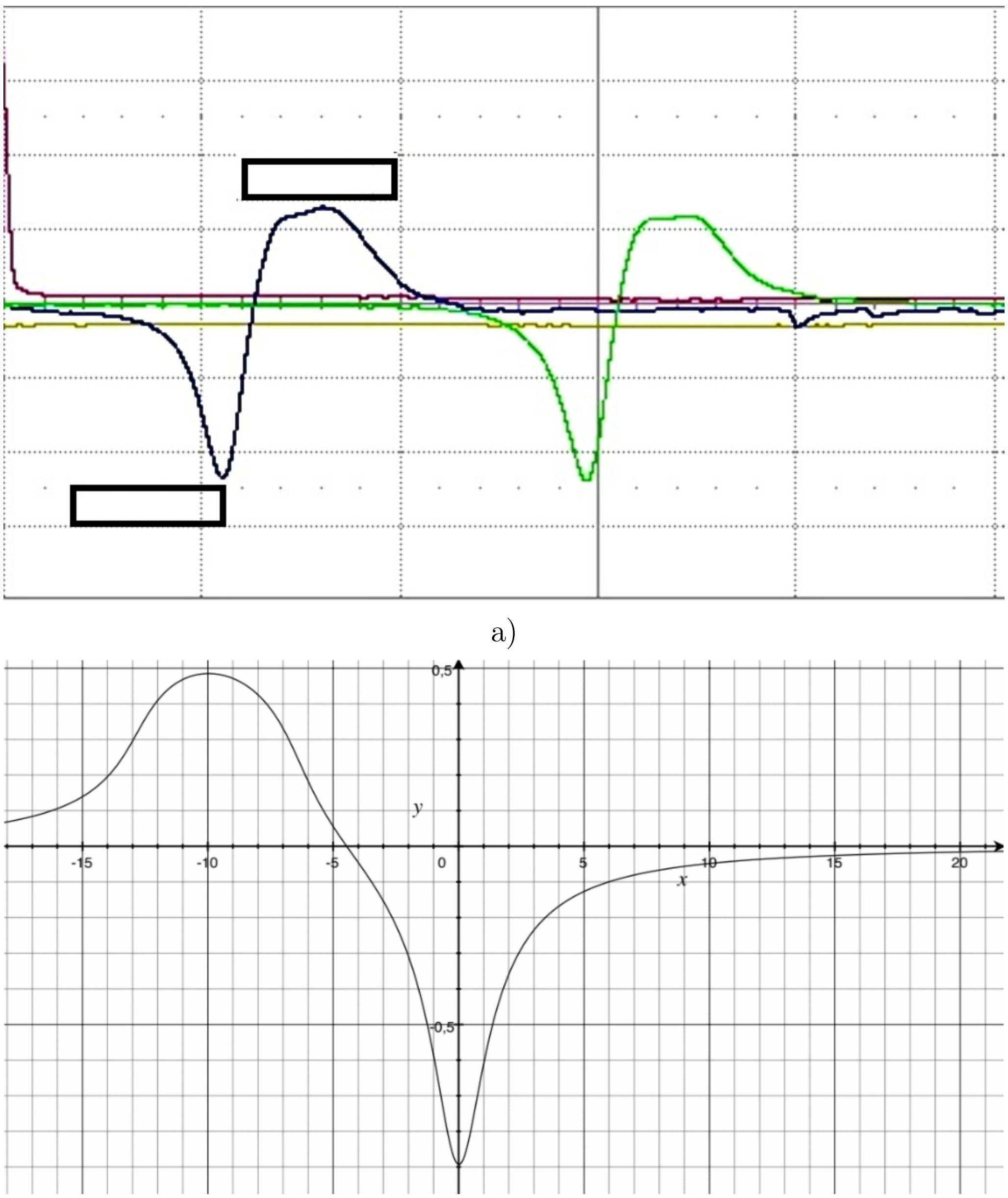
При постоянной скорости движения вид изменения потенциала во времени, представлен на рис. 1(b). Видно, что такое описание возможно.

На рис. 3(a) представлена осциллограмма, полученная при выстреле со скоростью 105 м/с цилиндрической пулей длиной 120 мм из оргстекла. На ней показано положение тела при экстремальных показаниях осциллограммы. Видно, что перед телом наблюдается узкая зона, несущая отрицательный заряд, а за ней следует зона, заряженная положительно. Если предположить, что в этом случае имеет место равномерно распределенный заряд, то тогда его центр должен находиться от нулевой точки осциллограммы на таком же расстоянии, как и максимум отрицательного заряда. В таком случае длина положительного заряда должна быть 8 см.

Математическое описание изменения во времени потенциала на антенне представлено соотношением

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 0.25\ln\left(\frac{x+6.4+\sqrt{(x+6.4)^2+1}}{x+3.2+\sqrt{(x+3.2)^2+1}}\right). \tag{2}$$

Размеры отнесены к радиусу кольца антенны $R = 25$ мм. Результат вычислений показан на рис. 3(b). Вид изменения потенциала по мере пролета пули сквозь антенну соответствует виду осциллограммы.

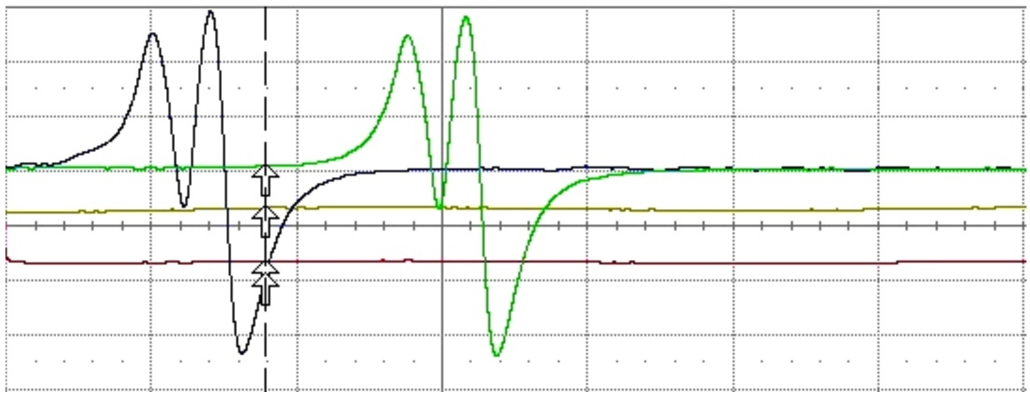



a)

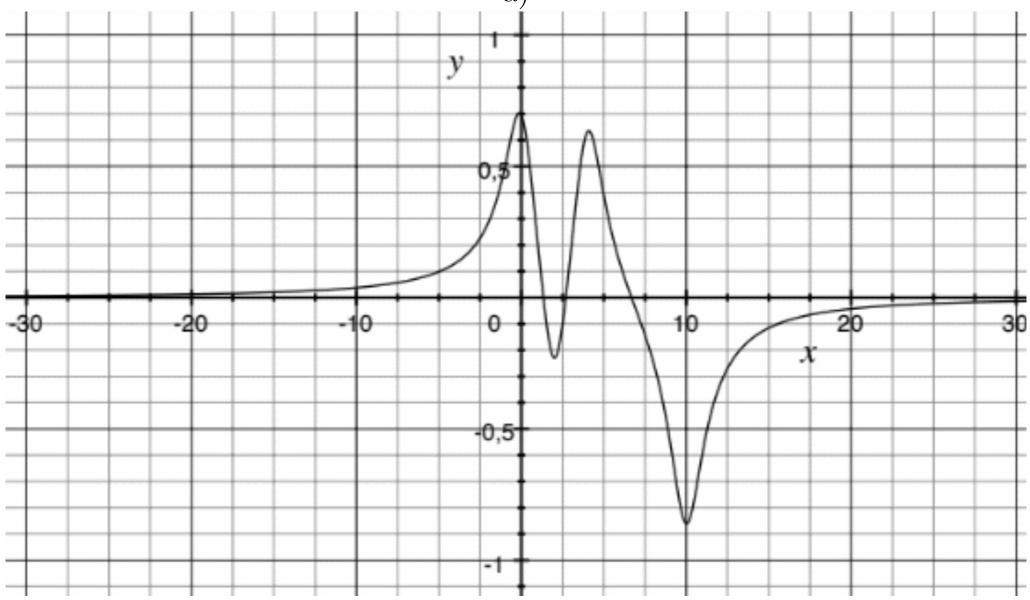
b)

Рис. 3. (a) напряжение на антеннах при пролете цилиндра из оргстекла удлинением 12 со скоростью 105 м/с; (b) результат расчета.

У тела с удлинением 12, как в рассмотренном выше случае, осциллограммы распределения зарядов могут иметь и другой вид. На рис. 4(a) показана осциллограмма, полученная при выстреле со скоростью 136 м/с цилиндром из оргстекла удлинением 12.



а)



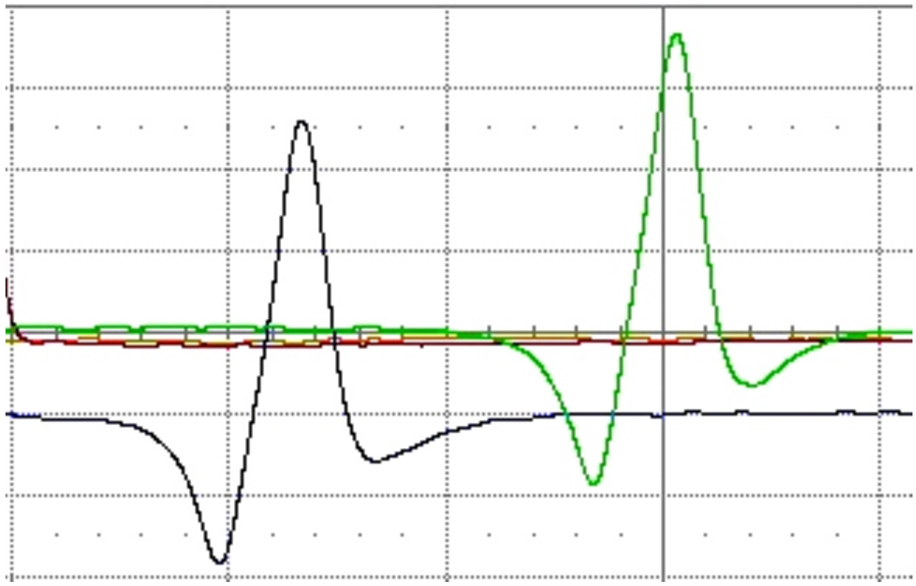

b)

Рис. 4. (a) напряжение на антеннах при пролете цилиндра из оргстекла удлинением 12 со скоростью 136 м/с; (b) результат расчета.

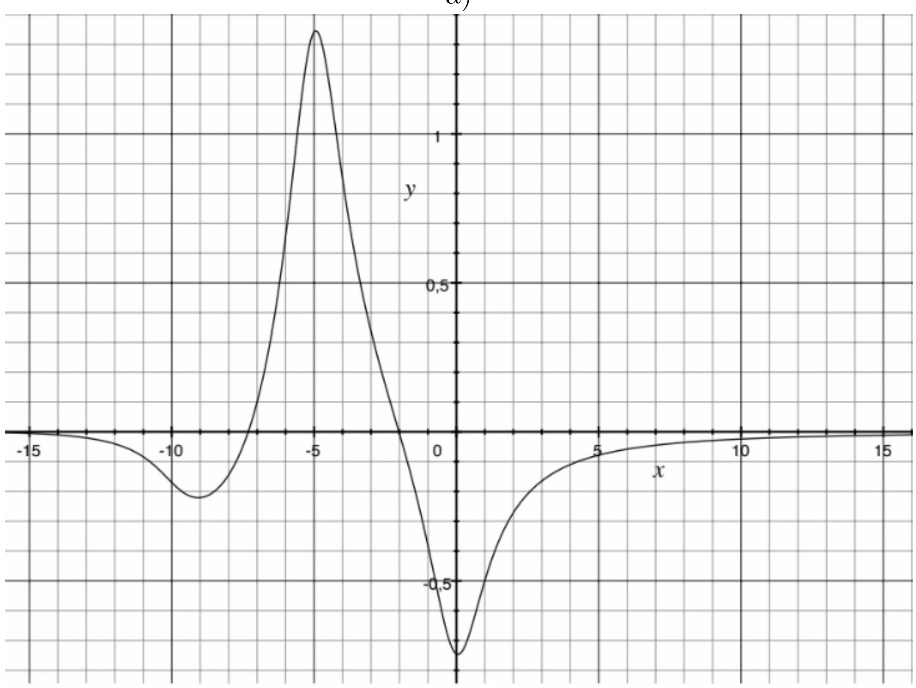
Расчет положения центров зарядов по максимальным показаниям антенн позволяет представить изменения потенциала на антенне в виде

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(x-10)^2+1}}. \qquad (3)$$

Предполагается, что все заряды точечные и равны. Результат расчета показан на рис. 4(b). Снова можно отметить схожесть показаний антенны и вычисление значений потенциала при сделанных допущениях.



a)




b)

Рис. 5. (a) напряжение на антеннах при пролете цилиндра из оргстекла удлинением 12 со скоростью 229 м/с.; (b) результат расчета.

Иногда возникал другой порядок расположения зарядов. Если в предыдущем случае перед телом возникала зона, заряженная положительно, то у такого же тела при выстреле со скоростью 230 м/с осциллограмма приобретала вид, приведенный на рис. 5(a). Здесь опять на переднем торце образуется зона, заряженная отрицательно. Положительный максимум осциллограммы соответствует моменту, когда задний торец тела проходит через антенну. Но затем сигнал снова становится отрицательным. Его максимум соответствует положению тела, когда его хвостовая часть удалится от антенны на 6 калибров. Форма сигнала более плавная, вытянутая, что больше соответствует распределенному заряду. Если предположить, что он распределен равномерно, то его центр находится в точке максимума осциллограммы, т.е. на расстоянии 6 калибров от заряда на хвосте пули, а его полная длина не более 12 калибров. Из того, что сумма зарядов должна быть равна нулю и, оценивая площади под кривыми на осциллограмме, можно предположить, что отрицательные заряды равны, а положительный вдвое больше. В таких предположениях форма изменения потенциала во времени представлена в виде

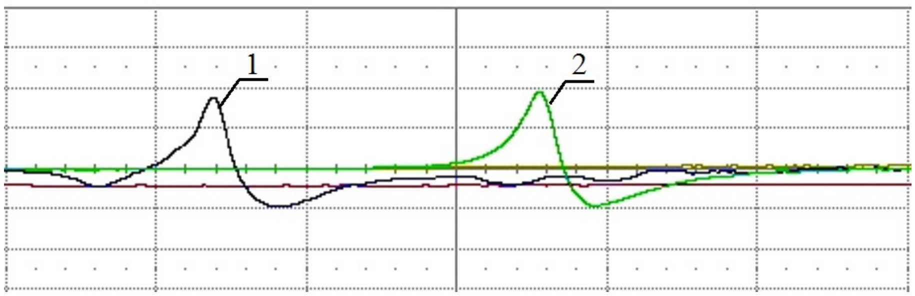
$$y = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{(x+5)^2+1}} - 0.2\ln\left(\frac{-x-5+\sqrt{(x+5)^2+1}}{-x-10+\sqrt{(x+10)^2+1}}\right). \qquad (4)$$

На рис. 5(b) показан результат вычислений, который согласуется с осциллограммой.

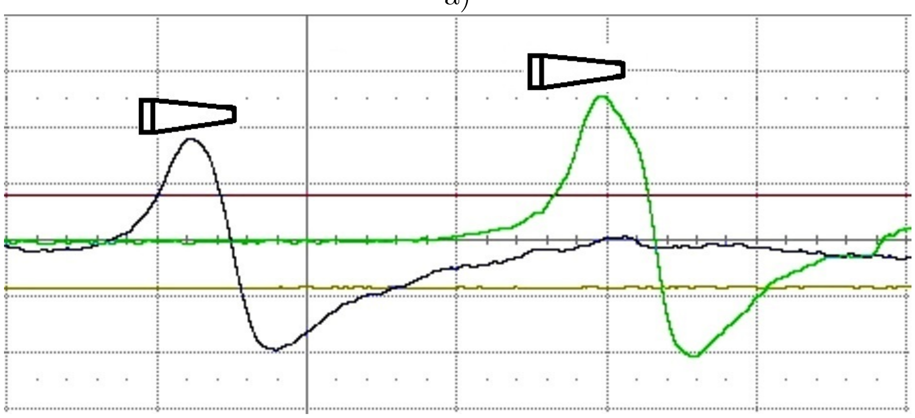
Аналогичные эксперименты с телами из фторопласта не показали такого разнообразия вида осциллограмм. Во всех случаях и во всём диапазоне скоростей, тело сопровождало два заряда, и всегда перед ним был отрицательный заряд вплоть до сверхзвуковой скорости. У тел из эбонита, винипласта, капронита удлинением до 4 результаты были те же. В случае цилиндров с удлинением 1 из оргстекла при скоростях в диапазоне 300-400 м/с перед телом идет положительный заряд, а при скорости меньшей – отрицательный.

**2. Влияние формы тела, его физической природы и скорости движения на образование заряженных зон.** На металлических телах в виде цилиндра, конуса или шара из дюраля и магния всегда возникало два заряда. Но, в отличие от диэлектрических материалов, для металлов впереди наблюдался положительный заряд при скоростях до 400 м/с. В этом случае возникает еще одно отличие между проводниками и диэлектриками. Заряды, которые их сопровождают, при одинаковых скоростях движения и форме могут отличаться по величине на порядок или даже два. При движении дюралевых цилиндров длиной 1-12 калибров напряжение не превосходило одного вольта в диапазоне скоростей 200-400 м/с. При стрельбе дюралевым шаром со скоростью 390 м/с напряжение было 500 мВ. Такая большая разница в напряженности поля, сопровождающего совершенно одинаковые по форме тела, но из металла или диэлектрика, возможно, отражается на коэффициенте сопротивления.

При выстреле цилиндрическим телом с передней усеченной конической частью с углом раствора 10 градусов и отсеченной вершиной по диаметру 2 мм, при скорости движения 290 м/с напряжение не превосходило 200 мВ. Максимум напряжения не соответствовал положению кончика конуса, а был смещен к его основанию, как показано на осциллограмме рис. 6(b). На антенне, ближе расположенной к стволу пушки, он возникал, когда кончик конуса проходил антенну и удалялся на 2 калибра, а на антенне, удаленной еще на 40 сантиметров, всего на 1 калибр. Второй максимум возникает на антенне, когда задний торец пульки удалится от антенны на полтора калибра. По виду осциллограммы можно заключить, что заряды более растянуты по сравнению с цилиндрическими телами. Особенно, в сравнении с передним, который образуется перед плоским торцом.




a)



b)

Рис. 6. (a) напряжение на антеннах при пролете дюралевого шарика со скоростью 390 м/с (на ближней к стволу пушки антенне наблюдаются помехи от выхлопа, на антенне, расположенной на расстоянии 80 см, помех не видно); (b) напряжение на антеннах при пролете конического тела со скоростью 290 м/с.

Движение цилиндров из оргстекла сопровождают заряды, дающие напряжения на антенне в пределах 4-10 В. Напряжение увеличивается с ростом скорости и длины тела. При стрельбе цилиндрами из фторопласта напряжения фиксировались в пределах 30-80 В. У всех тел напряжение заметно возрастает при увеличении скорости и длины тела. Закономерность трудно более точно определить, т.к. результаты измерений менялись, хотя и не сильно, не только ото дня ко дню, но и при проведении подряд нескольких выстрелов одним и тем же телом с одной и той же скоростью. Менялась среда эксперимента – воздух, в котором возникали заряды, – и изменялась их величина.

В представленных результатах экспериментов в процессе электризации участвуют две среды – газообразная и твердая. Последняя – из нескольких диэлектриков и металлов, в разных геометрических формах. Твердые тела в нашем случае не подвергаются динамическим деформациям, способным повлиять на электризацию процесса обтекания твердого тела. Перемещение и истечение чистых газов и их смесей практически не приводит к появлению зарядов. Заряды в газе в этом случае могут появиться при наличии твердых или каплеобразных частиц или паров [6]. В таких процессах заряды называют статическими. Имеет место возникновение в среде заряда одного знака в результате соударения частичек и капель между собой и с твердым телом. В нашем случае перед летящим телом в первоначально электрически нейтральном газе в зоне сжатия возникает разделение зарядов. У коротких тел зоны зарядов разных знаков примыкают друг у другу и могут взаимодействовать особенно интенсивно при обтекании электропроводящего тела. Это подтверждается различием величин зарядов при обтекании тел из металлов и диэлектриков, а также длинных и коротких тел. Не ясно, с чем связано изменение знака заряда в зоне сжатия перед телами из проводника тока и диэлектрика. Изменение знака заряда перед цилиндром из оргстекла при сверхзвуковой скорости связано, возможно, с влиянием температуры в зоне сжатия. Появление более двух заряженных зон в случае с длинными телами из оргстекла связано, возможно, с электризацией, возникающей при трении газа о поверхность тела, и появлением значительного пограничного слоя газа на поверхности тела, приводящим к относительному смещению слоев газа, в которых он электризуется, а также к появлению вихрей.

При стрельбе со сверхзвуковыми скоростями приходилось бороться с влиянием на процесс обтекания выхлопного воздуха. Например, при стрельбе сферическим телом со скоростью 390 м/с на антеннах, расположенных на разных расстояниях от ствола, получались разные осциллограммы, как показано на рис. 6(а). Результат получен при использовании насадки на конце ствола для частичного отвода выхлопа в сторону от направления полета тела. И всё же, только на антенне, расположенной на расстоянии 80 калибров (вторая антенна), отсутствует влияние выхлопа. Но при этом, что особенно заметно в отсутствие глушителя, при динамическом взаимодействии выхлопных газов или с телом, или с окружающим воздухом заряды возникают не в процессе прохождения тела сквозь антенну, а раньше. При холостом выстреле не удалось выяснить, появляются ли заряды при взаимодействии выхлопных газов с окружающим воздухом при отсутствии твердых препятствий, так как осциллограф не запускался.

### 3. Заключение.

- Основную роль в электризации воздуха при обтекании твердого тела играет динамическое возникновение зон сжатия и разрежения.
- На формирование заряженных зон газа при обтекании твердого тела влияют форма тела, его физическая природа и скорость. Всегда возникающий перед и за телом заряд свидетельствует о том, что динамические деформации сжатия и расширения в воздухе приводят к его электризации.
- При обтекании диэлектриков возникают существенно большие заряды, чем у проводников, при прочих одинаковых параметрах.
- С ростом скорости обтекания и увеличением удлинения величина зарядов увеличивается. С увеличением скорости обтекания за телом образуется заряженная зона газа, протяженность которой с увеличением скорости растет.
- С увеличением скорости обтекания – за телом образуется заряженная зона газа, протяженность которой растет вместе с ростом разреженной зоны газа.
- Знак заряда перед телом меняется в зависимости от физической природы тела, его формы и скорости движения.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНО

**Вклад авторов.** 100%
**Конфликт интересов.** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.
**Источник финансирования.** Работа выполнена по теме Госзадания (номер госрегистрации 124012500437-9).

## ADDITIONAL INFORMATION

**Authors' contribution.** 100%
**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests.
**Funding.** The work was carried out on the topic of the State Assignment (state registration number 124012500437-9).

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Бивин Ю. К. Исследование электрических полей при динамическом деформировании полимеров // Журнал технической физики. 2010. 80 (6). С. 58–63. EDN: PKHJJC.
[2] Журавлев В. Ф. Об электромагнитном излучении при соударении твердых тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 101–103.
[3] Бивин Ю. К.Электрическое поле, сопровождающее движение тел в воздухе // Журнал технической физики. 2011. 81 (10). С. 147–150. EDN: RCUGFJ.
[4] Бивин Ю. К.Связь механических динамических процессов и сопровождающих электрических полей // Журнал технической физики. 2015. 85 (6). С. 69–73. EDN: UJMOOP.
[5] Сесслер Г. Электреты. М. : Мир, 1983. 487 с.
[6] Таубкин И. С. Общие сведения о статическом электричестве в некоторых производственных операциях с нефтепродуктами // Теория и практика судебной экспертизы. 2018. 13 (2). С. 54–64. EDN: XUMSUX.

## REFERENCES

[1] Bivin Y. K.Electric fields in polymers during dynamic deformation // Technikal Physics. 2010. 55 (6). P. 812–817. EDN: PKHJJC.
[2] Zhuravlev V. F. On the electromagnetic emission of colliding solid bodies // Izv. AN SSSR. 1985. № 6. P. 101–103.
[3] Bivin Y. K.Electric field accomoanying the motion of a body in air // Technikal Physics. 2011. 56 (10). P. 1527–1530. EDN: RCUGFJ.
[4] Bivin Y. K.Relation between mechanical dynamic processes and the accompanying electric fields // Technikal Physics. 2015. 60 (6). P. 855–859. EDN: UJMOOP.
[5] Sessler G. Electrety. M. : Mir, 1983. 487 p.(in Russian)
[6] Taubkin I. S. Overview of static electricity in some industrial operations with petroleum products // Theory and practice in forensic science. 2018. 13 (2). C. 54–64. EDN: XUMSUX.(in Russian)

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Алексеев Андрей Алексеевич (alexeew@bk.ru)** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия.

**Богданов Андрей Николаевич (bogdanov@imec.msu.ru)** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории газодинамики взрыва и реагирующих систем Научно-исследовательского института механики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Буренин Анатолий Александрович (aab@imim.ru)** – член-корреспондент РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

**Власов Александр Николаевич (bah1955@yandex.ru)** – доктор технических наук, директор Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН) , г. Москва.

**Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.su)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Иванов Дмитрий Валерьевич (ivanovdv.84@ya.ru)** – профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г . Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И.Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

**Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

**Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

**Лисовенко Дмитрий Сергеевич (dslisov@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

**Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com)** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин" , г. Москва, Россия.

**Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

**Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

**Спорыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

**Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу http://limit21.ru

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должны быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## Содержание

**ВЕСТНИК**
**ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ**
**2025. № 1 (63)**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Компьютерная верстка:** С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

**Макет:** С. В. Тихонов

---

Подписано в печать 30.05.2025. Выход в свет 17.06.2025.
Формат 70x100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by $\LaTeX 2_{\varepsilon}$. Усл. печ. л. 19,0.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 483

---

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38