

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”

ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
Научный журнал
№ 3(65)

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева”
Основатели серии: Д. Д. Ивлев, Д. М. Климов, Л. А. Максимова, А. В. Манжиров,
Б. Г. Миронов, Г. К. Михайлов, Ю. Н. Радаев, Е. И. Шемякин

Издается с марта 2007 г.
Выходит 4 раза в год

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-58094 от 20.05.2014)

Включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Подписной индекс в каталоге “Пресса России” 13109

Главный редактор: Б. Г. Миронов

Ответственный редактор: Ю. Н. Радаев

Заместители ответственного редактора: Н. М. Матченко, С. В. Тихонов

Ответственные секретари: С. В. Матвеев, Е. В. Мурашкин

Ответственный редактор выпуска: А. А. Алексеев

Редакционный совет: Ю. Н. Радаев, И. Э. Келлер, В. П. Радченко, А. И. Шашкин,
Л. Ю. Коссович, А. А. Маркин, Л. А. Игумнов, А. А. Алексеев, А. А. Буренин

Редакционная коллегия: В. Г. Баженов, А. Н. Богданов, А. Н. Власов,
Д. В. Георгиевский, В. В. Глаголев, Д. В. Иванов, Р. А. Каюмов, Д. М. Климов,
В. А. Ковалев, Д. С. Лисовенко, Е. В. Ломакин, Л. А. Максимова,
Н. В. Минаева, Ю. В. Немировский, Р. И. Непершин, В. Н. Орлов,
А. Ф. Ревуженко, С. И. Сенашов, А. Н. Спорыхин, А. А. Трещев,
А. Д. Чернышов, А. В. Чигарев

Адрес редакции: 428000, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 19А

Адрес издателя: 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Тел.: (8352) 22-28-71, доб. 1182

E-mail: predel21@mail.ru

WWW: <https://limit21.ru>

© Чувашский государственный педагогический
университет им. И. Я. Яковлева, 2025

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

**VESTNIK
CHUVASHSKOGO GOSUDARSTVENNOGO PEDAGOGICHESKOGO
UNIVERSITETA IM. I. YA. YAKOVLEVA
SERIYA: MEKHANIKA PREDEL'NOGO SOSTOYANIYA**

**Scientific journal
№ 3(65)**

The Journal founder: I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University
Founders of the series: D. D. Ivlev, D. M. Klimov, L. A. Maksimova, A. V. Manzhirov,
B. G. Mironov, G. K. Mikhailov, Yu. N. Radaev, E. I. Shemyakin

Published since March 2007
Published four times a year

Registered in Federal Service for Supervision of Communications
Information Technology, and Mass Media "Roskomnadzor"
(Accreditation Certificate PI No. FS77-58094 d/d 20 May, 2014).

Hard copy of the Journal is available by subscription from the catalogue "Press of Russia"
(reg. No. 13109).

Editor-in-chief: B. G. Mironov

Executive Editor: Yu. N. Radayev

Associate Editor: N. M. Matchenko, S. V. Tikhonov

Executive Secretary: E. V. Murashkin, S. V. Matveev

Editorial Council: Yu. N. Radayev, I. E. Keller, V. P. Radchenko, A. I. Shashkin,
L. Yu. Kossovich, A. A. Markin, L. A. Igumnov, A. A. Alekseev, A. A. Burenin

Editorial Board: V. G. Bazhenov, A. N. Bogdanov, A. N. Vlasov, D. V. Georgievskiy,
V. V. Glagolev, D. V. Ivanov, R. A. Kayumov, D. M. Klimov, V. A. Kovalev,
D. S. Lisovenko, E. V. Lomakin, L. A. Maksimova, N. V. Minaeva,
Yu. V. Nemorovskii, R. I. Nepershin, V. N. Orlov, A. F. Revuzhenko, S. I. Senashov,
A. N. Sporihin, A. A. Treshev, A. D. Chernishov, A. V. Chigarev

Postal address:: ul. K. Marksa 38, 428000 Cheboksary, Russia

Phone:: +7 352 22 28 71, ex.ph. 1182

E-mail:: predel21@mail.ru

Journal website:: <http://limit21.ru>



“Роль теории устойчивости и пластичности в механике деформируемого твердого тела безусловно фундаментальна, неисчерпаема и увлекательна для инженерной практики. С древних времен в механике нашли отражение две элементарные концепции понятия устойчивости. Первая отождествляет понятие устойчивости основного невозмущенного состояния движения или равновесия со свойством возмущенных состояний возвращаться к своему исходному состоянию. Вторая отождествляет понятие устойчивости со свойством возмущенного состояния пребывать в малой ограниченной окрестности невозмущенного состояния.”

В. Г. Зубчанинов. Устойчивость и пластичность. 2008

А. А. Алексеев, В. И. Гультияев, С. Л. Субботин

ПАМЯТИ ВЛАДИМИРА ГЕОРГИЕВИЧА ЗУБЧАНИНОВА

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

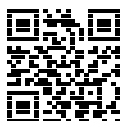
Аннотация. Статья посвящена памяти российского ученого в области механики деформируемого твердого тела и сплошных сред, внесшего фундаментальный вклад в развитие теории пластичности, исследований прочности и устойчивости упругопластических конструкций.

Ключевые слова: пластичность, прочность, устойчивость, упругопластические конструкции.

Алексеев Андрей Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности; e-mail: alexeew@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0001-9336-1099>; AuthorID: 640538

Гультияев Вадим Иванович, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильных дорог, оснований и фундаментов; e-mail: vig0@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6872-4505>; AuthorID: 174778

Субботин Сергей Львович, доктор технических наук, профессор кафедры конструкций и сооружений; e-mail: sbtn@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8881-1390>; AuthorID: 174777



для цитирования: Алексеев А. А., Гультияев В. И., Субботин С. Л. Памяти Владимира Георгиевича Зубчанинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 7–57. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.001. EDN: ECNTBC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. A. Alekseev, S. L. Subbotin, V. I. Gulyaev

IN MEMORY OF VLADIMIR GEORGIEVICH ZUBCHANINOV

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The article is dedicated to the memory of a Russian scientist in the field of mechanics of deformable solids and continuous media, who made a fundamental contribution to the development of the theory of plasticity, research into the strength and stability of elastic-plastic structures.

Keywords: plasticity, strength, stability, elastic-plastic structures.

Andrey A. Alekseev, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor; **e-mail:** alexeev@bk.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-9336-1099>; AuthorID: 640538

Sergey L. Subbotin, Doctor of Technical Sciences, Professor; **e-mail:** sbtn@yandex.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-8881-1390>; AuthorID: 174777

Vadim I. Gulyaev, Doctor of Technical Sciences, Professor; **e-mail:** vig0@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-6872-4505>; AuthorID: 174778



to cite this article: Alekseev A. A., Subbotin S. L., Gulyaev V. I. In memory of Vladimir Georgievich Zubchaninov // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 7–57. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.001

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

28 января 2025 года на 95-м году ушел из жизни наш Учитель – профессор, доктор технических наук Зубчанинов Владимир Георгиевич. Владимир Георгиевич Зубчанинов — выдающийся российский ученый в области механики деформируемого твердого тела и сплошных сред, внесший фундаментальный вклад в развитие теории пластичности, исследований прочности и устойчивости упругопластических конструкций. В. Г. Зубчанинов — заслуженный деятель науки и техники РФ, член национального комитета Российской Академии наук (РАН) по теоретической и прикладной механике, почетный работник высшего профессионального образования РФ, почетный профессор Тверского государственного технического университета (ТвГТУ), доктор технических наук, профессор, академик ряда Российских Академий.

Владимир Георгиевич родился 13 декабря 1930 года в Челябинске. Закончил с отличием физико-математический факультет Ростовского на Дону государственного университета по специальности “Механика” (1954), после чего продолжил научную подготовку в аспирантуре Института механики РАН, специализируясь на теории упругости и пластичности (окончил в 1958 г.). Его научная карьера была неразрывно связана с именем выдающегося механика — члена-корреспондента АН СССР и РАН, академика Российской Академии ракетных и артиллерийских наук, профессора А. А. Ильюшина, под руководством которого В.Г. Зубчанинов в 1960 году успешно защитил кандидатскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ им. М. В. Ломоносова.



Выпускник Ростовского на Дону
государственного университета
(1954 г.)



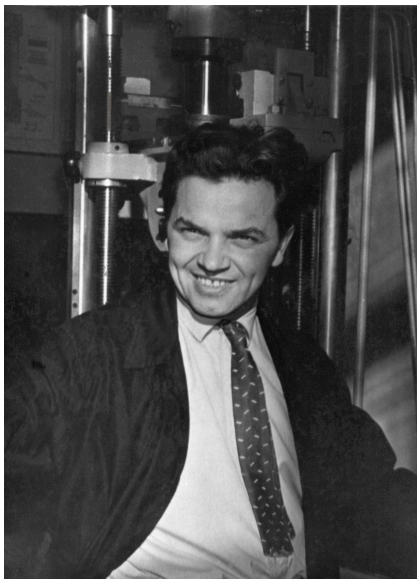
Аспирант института механики РАН
(1956 г.)

Спустя 12 лет в 1972 г. в Московском инженерно-строительном институте В.Г. Зубчанинов защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук, которую подготовил на кафедре теории упругости Московского государственного университета, сохраняя научную преемственность школы А.А. Ильюшина.



Учитель и ученик: А.А. Ильюшин и В.Г. Зубчанинов (1981 г.)

В.Г. Зубчанинов посвятил всю свою профессиональную трудовую деятельность Тверскому государственному техническому университету (ТвГТУ, ранее - Калининский политехнический институт), где работал с 1959 года. Его вклад в развитие вуза включает многолетнее руководство кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности (СМТУиП) с 1973-2013 гг., а также плодотворную работу на ответственных административных должностях. В разные годы В.Г. Зубчанинов занимал должности декана инженерно-строительного факультета (1975-1976), ректора университета (1977-1987) и председателя Совета ректоров вузов Калинин (ныне Твери, 1978-1987). С 2014 года и до последних дней он продолжал научно-педагогическую деятельность в качестве профессора родной кафедры. Под его руководством как ректора университет достиг значительного роста: контингент обучающихся по всем формам обучения (дневной, вечерней и заочной) составлял около 9 тысяч человек. В этот период в вузе велась подготовка по 19 специальностям на 53 кафедрах, где работали 25 докторов наук, профессоров и более 300 кандидатов наук, доцентов.



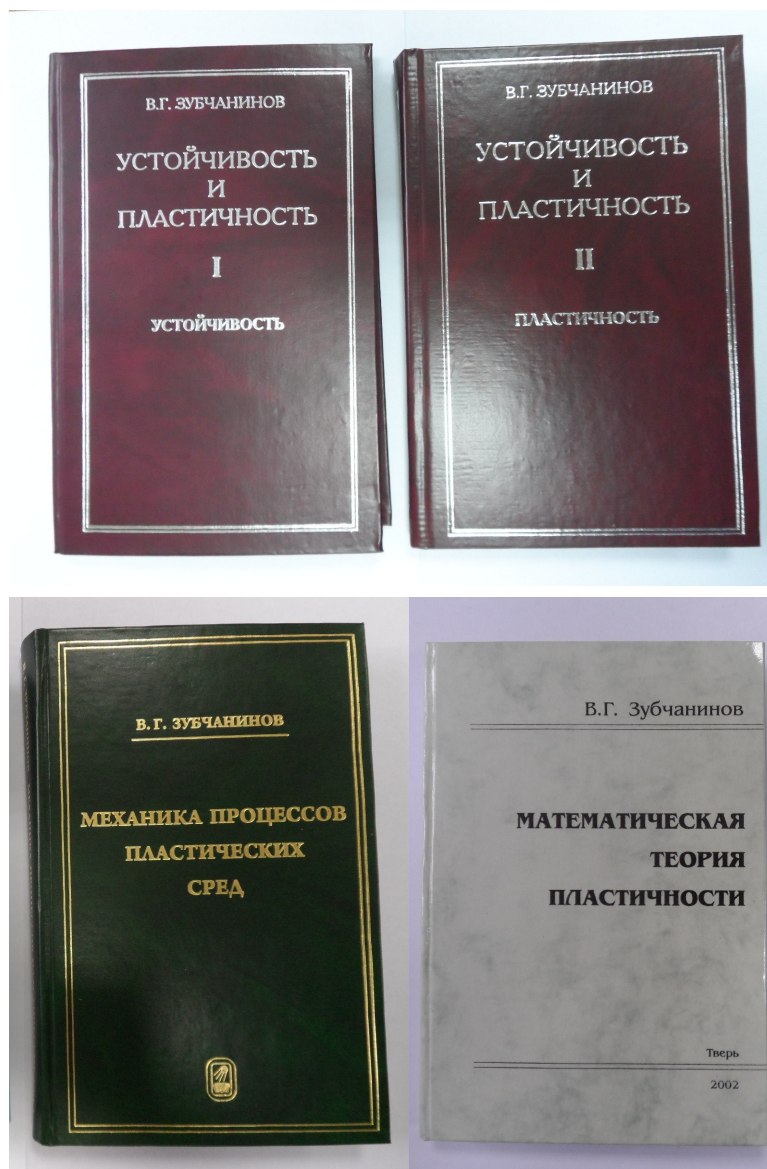
Докторант в лаборатории механических испытаний ТвГТУ (1970 г.)



Ректор Калининского политехнического института (1980 г.)

Профессор В.Г. Зубчанинов внес выдающийся вклад в развитие механики деформируемого твердого тела через свои фундаментальные исследования в области прочности и пластичности конструкционных материалов, а также устойчивости конструкций и их элементов. Его научное наследие включает более 300 опубликованных работ, среди которых 8 научных монографий, 2 учебника и многочисленные учебные пособия. Под его редакцией увидели свет более 30 сборников научных трудов. Разработанные профессором Зубчаниновым научные концепции, теоретические модели и экспериментальные методы нашли широкое применение в различных отраслях науки и техники и были включены в энциклопедию РАН «Машиностроение» (1994). Особого внимания заслуживает серия монографий «Устойчивость и пластичность» и «Механика процессов пластических сред», выпущенных издательством «Физматлит» РАН в 2007-2010 годах при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Весомый вклад в науку представляет его монография «Математическая теория пластичности» (2002), а также двухтомник «Экспериментальная пластичность», изданный в соавторстве с Н.Л. Охлопковым и В.В. Гараниковым. Первая книга посвящена процессам сложного деформирования, вторая - процессам сложного нагружения. Эти работы стали важными вехами в развитии современной теории пластичности.

Профессор В.Г. Зубчанинов по праву считается основателем и бессменным руководителем Тверской научной школы в области механики деформируемого твердого тела. Сформированная на базе возглавляемой им кафедры СМТУиП, эта школа превратилась в один из ведущих научных центров страны, специализирующихся на проблемах теории устойчивости и пластичности. В этой



области под руководством В.Г. Зубчанинова достигнуты впечатляющие фундаментальные результаты: разработаны общая теория определяющих законов процессов пластического деформирования сплошных сред и материалов при сложном нагружении (1989-2012), концепция устойчивости упруговязкопластических систем и конструкций (1973-1983), общая теория устойчивости оболочек, пластин и стержневых систем за пределом упругости при сложном нагружении (1983-2000), метод управляемых процессов упругопластического деформирования конструкций с целью повышения их прочности и устойчивости и уменьшения их материалоемкости (1972). Совместно с А.А. Ильюшиным разработана теория устойчивости разгружающих упругопластических систем (1960-1980),

методы расчета конструкций на прочность и устойчивость в условиях их сложного нагружения, разработан и создан (1980-1985) автоматизированный испытательный комплекс СН-ЭВМ на сложное нагружение материалов в лаборатории механических испытаний кафедры для исследования закономерностей механического поведения конструкционных материалов. Этот комплекс уникален по своим возможностям и полученным новым фундаментальным научным результатам мирового уровня.



Открытие автоматизированного испытательного комплекса
СН-ЭВМ в ТвГТУ (1985 г.)

В.Г. Зубчанинов пришел в ТвГТУ в январе 1959 года на должность ассистента, имея за плечами серьезную подготовку в аспирантуре Института механики АН СССР. Этот период в его жизни совпал с коренным переломом в развитии теории устойчивости и пластичности в мировой науке. К тому времени окончательно формируется и круг его научных интересов, охватывающий сложнейшие проблемы механики деформируемого твердого тела: упругопластическое деформирование материалов и неупругая устойчивость элементов конструкций и сооружений. Теперь работы В.Г. Зубчанинова в области устойчивости упругопластических систем давно считаются классическими, и они заставили по-новому взглянуть на проблему устойчивости. Совместно А.А. Ильюшиным им была разработана новая теория устойчивости стержней, учитывающая воздействие на них догружающих и разгружающих эффектов конструкций. Это исследование привело к фундаментальному открытию: в разгружающих конструкциях бифуркационная нагрузка может превышать как касательно-модульную

нагрузку Шенли, так и приведенно-модульную нагрузку Кармана. Особую ценность представляет обнаруженный эффект: если временно зафиксировать стержень поддерживающими связями от бокового выпучивания в разгружающей конструкции и нагрузить его выше приведенно-модульной нагрузки, то после снятия поддерживающих связей система сохранит устойчивость, если нагрузка не будет превосходить критического значения, называемого теперь нагрузкой Ильюшина-Зубчанинова.

Новаторская идея практического применения временных поддерживающих связей была высказана В.Г. Зубчаниновым впервые в 1970 г. Она открыла новые возможности для повышения устойчивости, несущей способности и прочности конструкций и их элементов, а также проектирования конструкций и машин наименьшего веса. Родилась идея управляемого процесса докритического пластического деформирования с целью создания оптимальных конструкций максимальной прочности и жесткости. Этот важный научный и практический результат был впервые подтвержден экспериментально в лаборатории механических испытаний кафедры СМТУиП в 1971 г. Результаты превзошли все ожидания: это позволило увеличить устойчивость металлических стержней из конструкционных сталей и других металлов в разгружающих конструкциях более чем на 50 %. Замечательное свойство разгружающих систем привело к созданию нового инженерного метода упругопластической тренировки элементов конструкций с целью повышения их устойчивости (1972 г), который впоследствии развивался в совместных работах В.Г. Зубчанинова с В.Н. Лотовым, А.П. Воронцовым, В.П. Володиным не только для стержневых конструкций, но также для пластин и оболочек. Суть этого метода весьма проста и состоит в том, что элемент конструкции на специальной лабораторной либо заводской установке с поддерживающими связями подвергается сжатию до заданного уровня нагрузки тренировки, которая выше критической нагрузки Кармана. Затем, также в условиях поддержки от бокового выпучивания, элемент полностью разгружается. После этого элемент поступает на сборку конструкции и подвергается нагружению в условиях своей эксплуатации до допускаемого уровня, не превосходящего нагрузки тренировки. Данный метод стал особенно эффективен при создании ответственных и дорогостоящих сооружений и конструкций.

В 1972-1983 гг. В.Г. Зубчаниновым была разработана современная концепция устойчивости упругопластических систем. В 1972 году он защищает докторскую диссертацию на тему "Вопросы устойчивости упругопластических систем", которая дала мощный толчок научным исследованиям в Твери на кафедре СМТУиП в этом направлении. В основе разработанной методологии исследования устойчивости лежал комплексный анализ процессов деформирования, где все малые начальные несовершенства рассматривались как постоянно действующие возмущения, учитывалось влияние ползучести материалов, а критическое состояние определялось в рамках теории бифуркаций Пуанкаре для нелинейных систем. При этом теория бифуркаций стала лишь первым этапом исследования, дополненным глубоким анализом послебифуркационного поведения

конструкций, изучением докритического и послекритического выпучивания систем с начальными несовершенствами, а также исследованием процессов длительного выпучивания в условиях ползучести после “мгновенного” нагружения конструкций. Результатом концепции стало создание методики определения как предела устойчивости после кратковременного нагружения, так и критического времени жизни конструкций. Эта концепция не только легла в основу всех последующих исследований кафедры СМТУиП в области устойчивости конструктивных элементов, но и получила широкое признание научного сообщества. В 1994 году концепция была опубликована в первом томе фундаментальной 40-томной энциклопедии РАН “Машиностроение” (раздел “Принципы и основные уравнения механики деформируемого твердого тела”), что стало свидетельством высокой оценки вклада Тверской научной школы и ее руководителя В.Г. Зубчанинова в развитие современной механики.



Кафедра СМТУиП (1980 г.)

В.Г. Зубчанинов, развивая свою концепцию устойчивости, в 1970-х годах последовательно разработал теорию послебифуркационного выпучивания и устойчивости сжато-изогнутых стержней и теории выпучивания и устойчивости стержней с начальными несовершенствами. В 1977 г. он впервые дал полный анализ развития зон пластического деформирования при выпучивании и получил основные уравнения процесса выпучивания в вариациях и в скоростях. Был получен весьма важный для инженерных расчетов научный результат, позволяющий производить эти расчеты без учета образования зон упругой разгрузки

по модели нелинейно упругого материала. Исследования в этом направлении были впоследствии развиты в работах В.Ф. Зубовича, С.А. Кулькова, В.П. Володина и других учеников, которые создали практические методики расчета, эффективные алгоритмы и специализированные программы для ЭВМ.

Другим важным направлением в 1970-х годах стала теория устойчивости пластин и оболочек за пределами упругости. В лаборатории механических испытаний Тверского политехнического института была реализована обширная программа экспериментальных исследований устойчивости пластин и оболочек при сложном нагружении. В.Г. Зубчаниновым в 1973 г. впервые было проведено исследование по анализу сложного докритического нагружения при выпучивании пластин и было экспериментально подтверждено, что сложное нагружение действительно имеет место. Проведенные исследования выявили, что траектории деформирования характеризуются малой и средней кривизной, а сами процессы близки к квазипростым. Траектории деформирования оказались малой и средней кривизны, а процессы были близки к квазипростым. Тем самым В.Г. Зубчанинов объяснил наблюдающееся хорошее соответствие экспериментально определенных критических значений нагрузок и посчитанных по классической теории буфуркаций А.А. Ильюшина, разработанной для случаев простого нагружения на основе теории упругопластических деформаций. Дальнейшие исследования в этом направлении были развиты В.Г. Зубчаниновым в совместных работах с его учениками В.Н. Лотовым, В.В. Гараниковым, Н.Л. Охлопковым, М.Ш. Мошковым, В.Н. Ведерниковым. Было обнаружено, что сложное нагружение оказывает слабое влияние при использовании машин силового типа, а существенное влияние сложного нагружения проявляется при изучении ряда докритических процессов деформирования на машинах кинематического типа.

Для решения проблемы устойчивости с учетом сложного нагружения начались глубокие исследования в области теории пластичности. В 1975 г. В.Г. Зубчаниновым в теорию пластичности было введено новое понятие квазипростого образа процесса нагружения, которое позволило четко понять разницу между деформационной теорией пластичности Генки-Надаи и теории малых упругопластических деформаций Ильюшина. Было предложено определяющее соотношение в дифференциальной форме, описывающее квазипростые процессы (теория пластичности квазипростых процессов). В 1982 г. В.Г. Зубчаниновым была предложена теория пластичности для траектории малого кручения. Из этой теории, как частный случай, следовало определяющее соотношение знаменитой гипотезы компланарности А.А. Ильюшина. Параллельно проводимые в лаборатории механических испытаний экспериментальные исследования позволили получить важные экспериментальные данные, на основе которых был предложен аппроксимации для функционалов процесса, необходимых для решения конкретных практических задач. Все это позволило В.Г. Зубчанинову в 1983 г. создать общую теорию бифуркационной устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении, а также впоследствии решить ряд задач по теоретическому исследованию процессов выпучивания

сжатых пластин, оболочек и тонкостенных стержней за пределом упругости совместно с В.П. Володиным, Н.Л. Охлопковым и С.Л. Субботиным. Проблема выпучивания и устойчивости оболочек и пластин с начальными несовершенствами до конца не решена и требует дальнейших исследований с применением расчетного метода СН-ЭВМ в теоретическом и физическом эксперименте.

Разработанная концепция устойчивости упругопластических систем включает в себя важный аспект учета ползучести материалов при нормальной и повышенной температурах. В серии совместных исследований В.Г. Зубчанинова с В.В. Гараниковым, С.Л. Субботиным и О.Е. Софьиным было установлено наличие микроползучести металлов при напряжениях, существенно ниже общепринятого технического предела текучести, и показана практическая бесперспективность псевдобифуркационной теории устойчивости в условиях ползучести.

Начиная с 1989 года, основным предметом важных и плодотворных исследований профессора В.Г. Зубчанинова стала общая теория определяющих соотношений в теории упругопластических процессов. В 1989 г. В.Г. Зубчанинов разработал общие определяющие соотношения связи между напряжениями и деформациями в теории упругопластических процессов для пятимерного пространства. Им были получены две основные формы дифференциально-нелинейных определяющих соотношений, содержащих пять функционалов пластичности (один отвечает за скалярные свойства материала, а четыре – за векторные) и четыре полярных угла сближения и депланации, характеризующих векторные свойства материалов. Как частный случай из этих соотношений следовали все известные к тому времени феноменологические теории процессов и течения – теории малого кручения, средних кривизн, среднего кручения, гипотеза компланарности, классические теории течения и теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением.

В 1996 г. В.Г. Зубчаниновым был выдвинут постулат локальной размерности образа процесса и постулат физической определенности для начально-изотропных сред, что позволило упростить математическое представление определяющих соотношений теории упругопластических процессов. Было показано, что пятимерное девиаторное пространство, отнесенное к реперу Френе, может быть разложено на ряд пересекающихся подпространств: два трехмерных, пересекающихся по одной из осей; четырехмерное и двумерное; двумерное и четырехмерное. Одно из них является физически пустым, другое – изображающим, а образ процесса – трехмерным для аналитических траекторий и четырехмерным – для неаналитических. В связи с этим в определяющих соотношениях вместо пяти функционалов остается только четыре или три. Для выяснения, сколько же именно, была необходима постановка базовых экспериментов.

Развитие теории процессов пластического деформирования потребовало мощного толчка в экспериментальных исследованиях для установления новых закономерностей деформирования материалов при сложном нагружении, поэтому одной из важнейших задач была разработка и создание автоматизированного

комплекса механических испытаний конструкционных материалов. Под руководством В.Г. Зубчанинова с коллективом авторов (В.А. Филинов, Д.В. Акимов, Н.Л. Охлопков, А.П. Андреев, Д.Е. Иванов и др.) в 80-х годах был создан и до сих пор функционирует уникальный автоматизированный комплекс механических испытаний СН-ЭВМ, который дал возможность получить совершенно новые представления об упругопластическом поведении конструкционных материалов. Например, были открыты такие истории управляемых процессов пластического деформирования, которые позволяют реализовать существенное упрочнение материалов. Так, для стали 45 обнаружено упрочнение до 30-35% в диапазоне деформаций до 2 %, а для легированных сталей - до 70% и более. Реализованные на испытательном комплексе криволинейные траектории деформирования позволили убедиться в том, что при сложном нагружении не существует единой мгновенной поверхности текучести материалов; спиральные траектории позволили впервые провести систематические испытания по установлению законов сложной разгрузки. Испытания на комплексе СН-ЭВМ также позволили получить новые нестандартные характеристики механических свойств материалов, изучить их скалярные и векторные свойства.

На этом комплексе под руководством В.Г. Зубчанинова были открыты многие новые закономерности пластического деформирования металлов, в том числе закон сложной разгрузки (2008). Результаты опытов позволили обобщить понятия предельных поверхностей, показать, что постулат пластичности выполняется не только в теории течения, но и для определяющих соотношений теории процессов. Был выдвинут постулат физической определенности (1993) для начально-изотропных сред, позволивший снизить размерность определяющих соотношений в репере Френе с пяти до трех. Была сформулирована гипотеза ортогональности (2002), позволившая другим путем получить определяющие соотношения общей математической теории пластичности, обобщить принцип градиентальности А.А. Ильюшина в теории течения на случай использования теории процессов, определить направление развития деформационной анизотропии и др. Были разработаны методы базовой экспериментальной проверки достоверности различных вариантов моделей пластического деформирования материалов. Показано, например, что гипотеза компланарности и теория малого кручения выполняются достаточно, если величина параметра кручения траектории меньше 30. На комплексе до настоящего времени проводятся исследования сложных процессов нагружения и деформирования материалов на тонкостенных трубчатых образцах, подвергающихся одновременному независимому действию растяжения-сжатия, кручения и внутреннего давления по многозвенным, ломаным, плоским и пространственным траекториям деформирования и нагружения, криволинейным плоским и пространственным траекториям типа окружностей, спиралей, винтовых линий и др. Их основная задача – проверка физической достоверности теории сложных процессов упругопластического деформирования и нагружения, ее определяющих соотношений, аппроксимаций функций процессов сложного нагружения, выявление новых закономерностей



Коллектив, работавший над созданием автоматизированного испытательного комплекса СН-ЭВМ (1980 г.)

вязкоупругопластического поведения конструкционных материалов, в том числе их векторных и скалярных свойств.

В.Г. Зубчаниновым получены определяющие соотношения для сложного нагружения по различным траекториям деформирования и нагружения. В данные соотношения входят функционалы пластичности, которые зависят от параметров сложности процесса: длины дуги, кривизны и кручения траектории, скалярных параметров (среднего напряжения, температуры и др.). Поэтому в последнее время в тверской научной школе проводятся исследования с целью определения функционалов пластичности и аппроксимаций, которые позволяют использовать теорию процессов в практических расчетах, в частности, для решения краевых задач упругопластического деформирования материалов.

В.Г. Зубчаниновым разработаны рабочие математические модели теории процессов пластического деформирования для различных классов траекторий, а его учениками Н.Л. Охлопковым, С.Л. Субботиным, В.И. Гульяевым, А.А. Алексеевым, Е.Г. Алексеевой, Д.В. Зубчаниновым проведены численные расчеты и



Обсуждение результата эксперимента (2004 г.)

показана достоверность моделей при сравнении с экспериментальными данными. Структура аппроксимаций, предложенных В.Г. Зубчаниновым, и их физическая достоверность обосновываются многочисленными экспериментами. Экспериментальные работы по изучению закономерностей упругопластического деформирования поликристаллических металлов и сплавов при сложном нагружении, исследованию скалярных и векторных свойств материалов, проверке постулата изотропии, определению функционалов пластичности и построения их аппроксимирующих функций проводились в разное время на экспериментальном комплексе СЧ-ЭВМ под руководством В.Г. Зубчанинова совместно с Д.В. Акимовым, Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым, Д.Е. Ивановым, В.И. Гультяевым, Д.В. Зубчаниновым, В.Н. Ведерниковым, А.А. Алексеевым, Е.Г. Алексеевой, С.А. Соколовым, С.В. Черемных, А.С. Двужиловым, И.А. Саврасовым, А.Н. Булгаковым и др. В ходе проведенных исследований была экспериментально подтверждена достоверность фундаментального положения теории процессов - постулата изотропии. Верификация осуществлялась посредством реализации комплексных экспериментальных программ, включающих многосвязные ломаные и криволинейные траектории при их ортогональных преобразованиях вращения и отражения, а также траектории со сложными разгрузками. Разработана классификация базовых типов испытаний, которая позволяет в экспериментальных исследованиях выявить воздействие различных параметров,

отражающих влияние сложного нагружения на процессы упругопластического деформирования. Предложены аппроксимации реальных диаграмм деформирования и диаграмм прослеживания процессов сложного упругопластического деформирования, а также методика определения входящих в них параметров.

Помимо плодотворной научной деятельности профессор В.Г. Зубчанинов с успехом занимался и преподавательской, читал курсы лекций для студентов по сопротивлению материалов, теории упругости и пластичности, а также специальные дисциплины для аспирантов кафедры. Большой вклад был сделан профессором В. Г. Зубчаниновым в развитие технического и инженерного образования, для студентов и аспирантов им написаны такие известные в стране учебники и учебные пособия как “Основы теории упругости и пластичности” (М.: Высшая школа, 1990), “Механика сплошных деформируемых сред” (2000), “Сопротивление материалов” (2005) и др.

Профессор В. Г. Зубчанинов организовал и провел в Твери на базе ТвГТУ многие республиканские межвузовские научные семинары и 9 Всесоюзных и Международных симпозиумов по прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела (1981, 1986, 1992, 1997, 2000, 2005, 2010, 2015, 2020), которые сыграли большую роль в развитии этих направлений в нашей стране. Программы симпозиумов охватывали общие теоретические, экспериментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Последний проведенный IX международный научный симпозиум “Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела”, проведенный в 2020 г. был посвящен 90-летию профессора В.Г. Зубчанинова. К заседаниям симпозиума в дистанционном режиме подключились более 40 ученых-механиков из России и стран СНГ, а всего к участию в работе симпозиума зарегистрировали более 60 докладов.

Характерной чертой личности В.Г. Зубчанинова является активная жизненная позиция и неизменность своего кредо - “делать науку”. И это было не просто профессией, а подлинным призванием. Его огромный творческий потенциал, соединенный с энтузиазмом организатора науки, позволил ему создать на базе кафедры СМТУиП коллектив единомышленников, состоящий из его учеников. Большое значение профессор В.Г. Зубчанинов, как заведующий кафедрой, придавал повышению квалификации своих сотрудников. Прежде всего, каждый из молодых преподавателей и аспирантов проходил солидную годовую педагогическую практику под руководством лектора соответствующего потока по курсу сопротивления материалов, а впоследствии - по курсам строительной механики и теории упругости. Обязательным являлось посещение лекций и лабораторно-практических занятий профессоров и доцентов кафедры, а также приглашенных педагогов и учёных из ведущих вузов страны. На кафедре по приглашению В.Г. Зубчанинова в разное время читали лекции и выступали с проблемными докладами такие крупные, выдающиеся учёные и педагоги, как чл.-корр. РАН А.А. Ильюшин, академики РАН Е.И. Шемякин, И.Г. Горячева, Н.Ф. Морозов, И.И. Ворович, академик НАН Украины А.А. Лебедев, профессора А.М. Жуков,



А.Р. Ржаницын, Л.А. Толоконников, Д.Д. Ивлев, Р.А. Васин, Ю.Р. Лешик, Н.М. Матченко, А.А. Трещёв, И.Г. Терегулов, В.С. Бондарь, В.С. Гудрамович, В.Г. Малинин и многие другие, что способствовало повышению профессиональной квалификации преподавателей и аспирантов кафедры.

На кафедре СМТУиП ТвГТУ все годы работают научный, научно-методический и аспирантский семинары. С 1996 г. под руководством В. Г. Зубчанинова ежегодно проводится межвузовский научный семинар “Тверские научные чтения в механике деформируемого твердого тела” для аспирантов и молодых ученых, который играет большую роль в подготовке кадров высшей квалификации (кандидатов и докторов наук). На этом семинаре аспиранты и



Сотрудники кафедры СМТУиП на первом симпозиуме по устойчивости вместе с А. А. Ильюшиным (1981 г.)



Оргкомитет симпозиума (2005 г.)

преподаватели кафедры делают научные и научно-методические доклады о своей работе за прошедший учебный год, таким образом проводится их аттестация по правой части индивидуальных планов работы преподавателя. Это весьма эффективная форма как контроля, так и стимулирования работы ППС и аспирантов, введенная профессором В.Г. Зубчаниновым.



Профессор А. М. Жуков выступает с докладом в ТвГТУ (1985 г.)

В. Г. Зубчанинов щедро делился идеями с заинтересованными молодыми учеными и коллегами: за свою многолетнюю научно-педагогическую деятельность он подготовил более 50 докторов и кандидатов технических наук, среди которых докторские диссертации защитили Н.Л. Охлопков, В.В. Гараников, С.Л. Субботин, В.Н. Лотов, В.И. Гультяев, а кандидатские диссертации В.П. Володин, В.Ф. Зубович, Е.В. Харичев, А.П. Воронцов, Д.Е. Иванов, В.Н. Ведерников, С.А. Кульков, Джон Чарльз, О.Е. Софьин, Е.Г. Алексеева, М.Ю. Александров и многие другие.

С 1982 года по 2016 год профессор В.Г. Зубчанинов был бессменным председателем кандидатского, а затем докторского диссертационного совета вуза по специальностям 01.02.04 Механика деформируемого твердого тела и 05.02.04 Трение и износ в машинах (технические науки). За это время диссертационный Совет присудил ученые степени кандидата и доктора наук многим десяткам сотрудников ТвГТУ и других вузов и НИИ страны и региона. За большие заслуги в работе по аттестации научных и научно-педагогических кадров президиум ВАК России наградил В. Г. Зубчанинова своей почетной грамотой в 1996 году. Во вновь открывшемся в 2024 году диссертационном совете при ТвГТУ по специальности 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки) профессор В.Г. Зубчанинов также стал председателем совета.



После успешной защиты кандидатской диссертации Е.Г. Алексеевой (2011 г.)

Благодаря личному вкладу В.Г. Зубчанинова существенное развитие получила лабораторная база возглавляемой им кафедры СМТУиП. В лаборатории механических испытаний был полностью обновлен парк испытательных машин, разработан и создан уникальный автоматизированный испытательный комплекс СН-ЭВМ, не имеющий аналогов в мировой практике. Комплекс экспонировался на ВДНХ СССР в 1990 г. и был отмечен Почетной грамотой и медалью. Другим крупным достижением и признанием научного статуса кафедры под руководством В.Г. Зубчанинова стало поручение научного совета Минвуза СССР ее коллективу формирования Координационного плана научных исследований вузов СССР на 1985-90 гг. в области механики и назначение профессора В.Г. Зубчанинова зам. председателя секции математики, механики и астрономии НТС Минвуза СССР. Согласно этому плану, кафедра стала ведущей по направлению изучения пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела и выпустила, по итогам работы, 6 научных сборников трудов по каждому из направлений этого плана. Также под руководством В.Г. Зубчанинова на кафедре СМТУиП был реализован целый ряд научных и научно-технических программ по грантам РФФИ и Минвуза РФ.

Профессор В. Г. Зубчанинов вел активную общественную научно-педагогическую деятельность. Он являлся членом Российского национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, членом научного



Члены диссертационного совета по МДТТ после заседания совета (2011 г.)

совета РАН по механике деформируемого твердого тела, президентом тверского отделения АПК РФ, долгое время (1982–2007) был членом экспертного Совета по машиностроению и курировал специальности 01.02.04 и 01.02.06 Высшей аттестационной комиссии (ВАК) Министерства науки и образования РФ по аттестации научных кадров. Он был действительным членом ряда общественных академий, таких как “Академия проблем качества РФ”, “Петровская (Санкт-Петербургская) Академия наук и искусств”, “Верхневолжская инженерная Академия”, “Российская Академия естественных наук” (РАЕН), членом ряда редколлегий научных журналов (“Проблемы прочности и пластичности” при институте механики Нижегородского государственного университета, “Вестник Чебоксарского государственного университета. Механика предельных состояний” и др.). В различные годы он был членом научного Совета АН СССР и РАН по проблеме прочности и пластичности, членом научно-методического Совета по сопротивлению материалов, теории упругости и пластичности, строительной механики научно-методического Совета Минвуза СССР, членом НТС Госстандарта СССР, заместителем председателя секции математики, механики и астрономии НТС Минвуза СССР, членом экспертного Совета по механике Госкомвуза СССР, членом ВАК СССР и РФ более 25 лет и др.

Многолетняя плодотворная работа профессора В.Г. Зубчанинова отмечена множеством наград и медалей, среди которых:



Кафедра СМТУиП (1998 г.)



Кафедра СМТУиП (2009 г.)

- орден “Знак Почета” (1981 год) за подготовку высококвалифицированных инженерных и научно-педагогических кадров;
- знак Министерства высшего и среднего специального образования СССР “За отличные успехи в работе” (1982 год);
- медаль “Ветеран труда” (1990 год);

- медаль АН СССР за развитие фундаментальных и прикладных наук (1990 год);
- знак Министерства высшего и среднего специального образования РФ “Почетный работник высшего профессионального образования РФ” (2000 год);
- знак Губернатора Тверской области “Крест святого Михаила Тверского” (2000 год);
- серебряную медаль Российского общества инженеров строительства “За особые заслуги в строительстве в Тверской области” (2001 год);
- медаль им. академика М.В. Келдыша “За заслуги перед отечественной космонавтикой” (2005 год);
- орден Российской академии естественных наук “За заслуги в развитии науки и экономики России” (2005 год).



Вручение медали имени А.А. Ильюшина (2024 г.)

Свою самую значимую награду – первую именную медаль имени А.А. Ильюшина, своего Учителя, профессор В.Г. Зубчанинов получил 27 июня 2024 года. Эта медаль была учреждена Российским национальным комитетом по теоретической и прикладной механике (РНКТПМ) Российской академии наук только в 2024 году и будет присуждаться ежегодно за выдающиеся достижения в механике деформируемого твёрдого тела. Вручала медаль В.Г. Зубчанинову

председатель РНКТПМ, академик РАН Ирина Георгиевна Горячева вместе с единомышленниками и друзьями Владимира Георгиевича, которые приехали в Тверь на заседание диссертационного совета.

За все годы знакомства с профессором В.Г. Зубчаниновым у его учеников ни разу не возникало повода для сомнения в правильности выбранного жизненного пути в науке и научно-педагогической деятельности. И в этом, безусловно, огромная заслуга Владимира Георгиевича, которого ученики с глубокой благодарностью и искренней гордостью называют своим Учителем. В этом слове действительно заложен глубокий смысл, так как это именно тот человек, чья мудрость, поддержка и твердая жизненная позиция во многом определяют становление специалиста и формирование личности. Тот, кто не просто учит, а вдохновляет. Владимир Георгиевич стал именно таким ориентиром. А его благодарное и трепетное отношение к своим учителям – прекрасный образец для подражания его ученикам. Профессор В.Г. Зубчанинов с гордостью считал себя учеником А.А. Ильюшина и очень дорожил подаренной ему Алексеем Антоновичем монографией “Пластичность” (1948 г.) с написанной на ней словами: “Проф. В.Г. Зубчанинову. Здесь начала нашей с Вами пластичности. 20.07.91. Ильюшин”.

А. А. ИЛЬЮШИН

ПЛАСТИЧНОСТЬ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ
ДЕФОРМАЦИИ

проф. В.Г. Зубчанинову
Здесь начала
нашей с Вами
пластичности
20.07.91.
Ильюшин

ОГНЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

В.Г. Зубчанинов — это воплощение неугасимой преданности науке. Его трудолюбие, стремление к познанию и ответственное отношение к механике деформируемого твердого тела является примером. И какую бы высокую административную должность он ни занимал, всегда находилось время для своих учеников, родной кафедры и научной работы. Именно наука была для него отдушиной среди бюрократических будней, а возвращение к кафедральной деятельности после должности ректора лишь подтвердило его истинное призвание. Даже в условиях значительной административной нагрузки Владимир Георгиевич сумел сохранить научную активность, что говорит о его колоссальной работоспособности и подлинной преданности делу науки.

Благодаря В.Г. Зубчанинову в Твери сложилась признанная школа по механике деформируемого твердого тела, работы которой знают и с которой стремятся сотрудничать ведущие ученые России и стран СНГ. Бесконечная благодарность Владимиру Георгиевичу за его постоянное стремление передать ученикам все свои знания и опыт, заставить их мыслить самостоятельно, невзирая ни на чьи авторитеты. Это и есть отличительная черта настоящего учителя, Учителя с большой буквы.

Многочисленные ученики, друзья и коллеги Зубчанинова Владимира Георгиевича навсегда сохранят светлую память о нем.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ**В.Г. ЗУБЧАНИНОВА****1960**

1. Устойчивость стержней за пределом упругости в некоторых конструкциях // Инженерный сборник. М.: Изд-во Института механики Академии наук СССР. Т. 28. С. 204–211.
2. Устойчивость стержней как элементов конструкций за пределом упругости // Инженерный сборник. М.: Изд-во Института механики АН СССР. Т. 27. С. 101–113.

1961

1. К вопросу об упругопластической устойчивости стержней // Инженерный журнал. Т. 1. Вып. 3. С. 139–145.
2. Осесимметричная форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки за пределом упругости // Известия Академии наук СССР. ОТН. Механика и машиностроение. № 5. С. 131–132.

1963

1. Об устойчивости пластинки, сжатой в одном направлении // Труды Калининского торфяного института. М. – Л.: Госэнергоиздат. С. 264–266.

1965

1. Об упругопластической устойчивости пластин // Инженерный журнал. Т. 5. Вып. 2. С. 299–305.
2. Упругопластическая устойчивость стержней // Инженерный журнал. Т. 5. Вып. 5. С. 983–991.
3. Экспериментальное исследование процесса потери устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Инженерный журнал. Т. 5. Вып. 3. С. 583–586.

1969

1. К проблеме неустойчивости упругопластических систем // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. № 2. С. 109–115.
2. Упругопластическая устойчивость пластин, подкрепленных металлическим слоем // Механика полимеров. № 5. С. 909–915.

1970

1. К теории устойчивости пластин за пределом упругости // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. № 4. С. 172–175.
2. Об упругопластической устойчивости слоистых стержней // Прикладная механика. Т. 6. Вып. 2. С. 127–129.
3. О влиянии сложного нагружения на выпучивание цилиндрической оболочки при одновременном действии внутреннего давления и осевого сжатия // Известия вузов. Строительство и архитектура. № 9. С. 25–27 (совм. с В.Н. Лотовым).
4. Об устойчивости стержней в разгружающих системах за пределом упругости // Известия вузов. Строительство и архитектура. № 2. С. 61–66.
5. Послебифуркационное поведение пластин за пределом упругости с учетом возникновения разгрузки и вторичных пластических деформаций // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М.: Наука. С. 235–239.

1971

1. Выпучивание замкнутой цилиндрической оболочки при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления // Вопросы механики. Вып. 9. С. 154–168 (совм. с В.Н. Лотовым).
2. К вопросу об упругопластической устойчивости стержней // Прочность и пластичность. М.: Наука. С. 149–154.
3. О неустойчивости упругопластических стержней в разгружающих системах // Вопросы механики. Вып. 9. С. 101–111.
4. Об устойчивости пластин за пределом упругости // Упругость и неупругость. Вып. 2. С. 145–157.
5. Об устойчивости стержня, сжатого внецентренно приложенной следящей силой // Вопросы механики. Вып. 9. С. 140–149 (совм. с Л.Н. Шиманской).
6. Послебифуркационное поведение прямоугольной пластинки за пределом упругости // Теория пластин и оболочек: материалы симпозиума, 26–30 января 1971 г., Казань / редкол. М.С. Корнишин [и др.]. М.: Наука. С. 85–89.
7. Упругопластическая устойчивость стержней в разгружающих системах // Упругость и неупругость. Вып. 1. С. 146–158.

1972

1. К вопросу об устойчивости слоистых элементов конструкций // Вопросы механики. Вып. 15. С. 99–103.
2. О процессе выпучивания цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Вопросы механики. Вып. 15. С. 91–99.
3. Об использовании временных поддерживающих связей для повышения устойчивости конструкций // Вопросы механики: труды Калининского политехнического института. Вып. 13 (15). С. 140–142.

1973

1. К вопросу о сложном нагружении в пластинах при выпучивании за пределом упругости // Механика сплошных сред. Тула: ТПИ. С. 72–83 (совм. с В.Н. Лотовым).
2. О понятии пластической устойчивости и неустойчивости и некоторые проблемы неупругой устойчивости конструкций // Механика сплошных сред. Тула: ТПИ. С. 61–72.
3. Об условии пластичности изотропных материалов // Сборник научных трудов Калининского политехнического института. Калинин: КПИ. С. 22–26.
4. Сложное нагружение в пластинах при выпучивании за пределом упругости // Теория оболочек и пластин: труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин / отв. ред. А.Л. Гольденвейзер, Н.В. Колкунов. М.: Наука. С. 130–133.
5. Экспериментальное исследование упругопластической устойчивости рам // Теория оболочек и пластин: труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин / отв. ред. А.Л. Гольденвейзер, Н.В. Колкунов. М.: Наука. С. 27–36.

1974

1. Обзор исследований по устойчивости элементов конструкций за пределом упругости // Вопросы механики. Вып. 26. С. 3–14.

1975

1. Исследование процесса выпучивания цилиндрических оболочек при нагружении их по траектории в виде двузвенных ломаных // Теория пластин и оболочек: труды

- Х Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Тбилиси: Мецниереба. С. 424–434 (совм. с В.Н. Лотовым).
2. Квазипростой образ процесса нагружения в задачах устойчивости пластин и оболочек // Вопросы механики. Вып. 3. С. 3–14.
 3. О концепции неупругой устойчивости // Упругость и неупругость. № 4. С. 240.
 4. Об устойчивости стержней в рамах за пределом упругости // Вопросы механики. Вып. 3. С. 4–17.
 5. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при сложном нагружении за пределом упругости // Теория пластин и оболочек: труды IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Л.: Судостроение. С. 367–369 (совм. с В.Н. Лотовым).

1977

1. Неупругое выпучивание сжато-изогнутых стержней // Прикладная механика. Т. 13. № 12. С. 90–94.

1980

1. Влияние докритического пути нагружения на устойчивость упругопластических пластин // Теория пластин и оболочек: труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван: ЕрГУ. С. 25–30 (совм. с В.В. Гараниковым и В.Н. Лотовым).
2. Основные уравнения процесса выпучивания упругопластических стержней // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ. С. 98–104 (совм. с В.Ф. Зубовичем).

1981

1. О выпучивании и устойчивости стержней за пределом упругости в условиях ползучести // Прочность и надежность элементов конструкций. Киев: Наукова думка. С. 76–81.
2. О современных проблемах неупругой устойчивости // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: материалы Всесоюзного симпозиума, сентябрь, 1981 г. / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Калинин: КГУ. С. 12–60.
3. Устойчивость и пластичность цилиндрических оболочек при сжатии с кручением в условиях сложного докритического нагружения // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: материалы Всесоюзного симпозиума, Калинин, 4–7 сентября 1981 г. / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Калинин: КГУ. С. 126–133 (совм. с М.Ш. Мошковичем).

1982

1. К вопросу использования общей математической теории пластичности в теории устойчивости // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: материалы всесоюзного симпозиума. Калинин: КГУ. С. 100–117.
2. Экспериментальное исследование влияния упругопластической тренировки сжатия стержней на их несущую способность // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: материалы всесоюзного симпозиума. Калинин: КГУ. С. 19–25 (совм. с А.П. Воронцовым).

1983

1. Пластичность и устойчивость // Механика деформированного твердого тела: сборник научных трудов / отв. ред. Л.А. Толоконников. Тула: ТПИ. С. 8–21 (совм. с А.А. Ильюшиным).
2. Расчеты на устойчивость элементов конструкций из полимерных материалов // Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение (совм. с М.А. Колтуновым и В.П. Майбородой).

1984

1. Повышение несущей способности сжатых стержней путем снижения степени начальных несовершенств // Пластичность и устойчивость в механике деформируемого твердого тела: сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Калинин: КПИ. С. 19–26 (совм. с А.П. Воронцовым).
2. Результаты экспериментального исследования сплава В-95 // Пластичность и устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Калинин: КГУ. С. 57–66 (совм. с М.Ш. Мошковым).

1985

1. Влияние кругового выреза на несущую способность цилиндрических оболочек // Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика: труды I Всесоюзного симпозиума. Тбилиси: ТГУ. С. 223–226 (совм. с В.Н. Лотовым, В.Н. Ведерниковым).
2. Модифицированная теория устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости // Актуальные проблемы механики оболочек: сборник научных трудов / отв. ред. В.Н. Паймушин. Казань: КАИ. С. 20–29.
3. Нелинейная теория выпучивания и устойчивости оболочек и пластин при сложном нагружении // Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика: труды I Всесоюзного симпозиума. Тбилиси: ТГУ. С. 211–218.
4. Термонапряженное состояние при препарировании зубов человека // Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика: труды I Всесоюзного симпозиума. Тбилиси: ТГУ. С. 219–222 (совм. с В.Н. Лотовым, С.Б. Ивановой).
5. Устойчивость неупругих пластин с вырезами // Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика: труды I Всесоюзного симпозиума. Тбилиси: ТГУ. С. 107–110 (совм. с В.В. Гараниковым, В.Н. Лотовым).

1986

1. Влияние сложного нагружения на пластические свойства сплава В95 // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии: сборник научных трудов / отв. ред. А.А. Лебедев. Киев: Наукова думка. С. 110–117 (совм. с М.Ш. Мошковым).
2. Локально-простые процессы деформирования // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: материалы II Всесоюзного симпозиума, 27–30 июня 1986 г. / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Калинин: КГУ. С. 24–31.
3. О законах теории упругопластических процессов при сложном нагружении в плоских задачах // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии: сборник научных трудов / отв. ред. А.А. Лебедев. Киев: Наукова думка. С. 110–117.

4. О некоторых фундаментальных идеях А.А. Ильюшина в теории устойчивости упругопластических систем // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Калинин: КПИ. С. 9–16.
5. Температурные напряжения и оценка усталостной прочности твердых тканей интактных моляров // Медицинская биомеханика: в 4 т. / отв. ред. В.К. Калнберз. Рига: Министерство здравоохранения Латвийской ССР. Т. 1. С. 522–527 (совм. с А.С. Щербаковым, В.Н. Лотовым, С.Б. Ивановой).
6. Теория устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости при сложном нагружении // Сборник тезисов VIII Всесоюзной конференции по прочности и пластичности. Пермь – Свердловск: УНЦ АН СССР. С. 40–48.
7. Устойчивость и выпучивание упругопластических систем при сложном нагружении // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: материалы II Всесоюзного симпозиума, 27–30 июня 1986 г. / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Калинин: КГУ. С. 10–54.

1987

1. Выпучивание и устойчивость прямоугольных пластин // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Калинин: КГУ. С. 24–31 (совм. с В.П. Володиным).
2. Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости прямоугольных упругопластических пластин // Труды XIV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Кутаиси, 20–23 октября 1987 г.: в 2 т. Тбилиси: ТГУ. Т. 1. С. 309–314 (совм. с В.П. Володиным, В.В. Гараниковым).

1988

1. Влияние локального нагрева кругового выреза на устойчивость упругопластических цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Доклады Академии наук Украинской ССР. Серия А: физико-математические и технические науки. № 5. С. 29–31 (совм. с В.Н. Ведерниковым, В.С. Гудрамовичем, В.Н. Лотовым).
2. Использование связи между скоростями напряжений и деформаций для исследования устойчивости прямоугольных пластин // Проблемы механики оболочек. Калинин: КПИ. С. 71–79 (совм. с В.П. Володиным).

1989

1. Исследование ползучести сплавов АМГ-6, О1570 и металлокомпозита А1-В в интервале температур $\pm 50^\circ\text{C}$ // Проблемы прочности. № 9. С. 27–30 (совм. с В.В. Гараниковым и А.С. Камышковым).
2. Нелинейная микроползучесть сплавов А1-19, АМГ-6, О1570 // Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин: КПИ. С. 64–72 (совм. с В.В. Гараниковым, Ю.А. Котенковым).
3. Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов // Прикладная механика. Т. 25. № 5. С. 3–12.
4. Устойчивость цилиндрических оболочек из стали 45 за пределом упругости // Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин: КПИ. С. 72–76 (совм. с Н.Л. Охлопковым).

1990

1. Влияние разгрузки материала на ползучесть сплавов О1570 и АМГ-6 // Проблемы прочности. № 9. С. 33–34 (совм. с В.В. Гараниковым).

2. Математические основы механики деформируемого твердого тела. Тверь: ТвеПИ. 59 с.
3. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа. 368 с.
4. Устойчивость цилиндрических оболочек при сложном нагружении // Труды XV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Казань: КГУ. С. 426–431 (совм. с Н.Л. Охлопковым).

1991

1. Определяющие соотношения теории упругопластических процессов // Прикладная механика. Т. 27. № 12. С. 3–13.
2. Расчеты и испытания на прочность. Методы испытаний стержней, пластин и оболочек на устойчивость // Рекомендация Р-54-314-91 Госстандарта СССР. М.: ВНИИИНАШ. 77 с.
3. Силовой датчик: а. с. 4272335. № 1624284 / заявл. 30.06.1987; опубл. 30.01.1991, Бюл. № 4. (совм. с Д.Е. Ивановым, А.П. Андреевым).

1992

1. Актуальные проблемы теории пластичности и устойчивости // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 1. С. 10–94.
2. Определяющие соотношения теории неупругих процессов. Сообщение 2: Экспериментальные основы // Проблемы прочности. № 6. С. 24–26.
3. Определяющие соотношения теории неупругих процессов в пространстве напряжений. Сообщение 1: Теоретические основы // Проблемы прочности. № 5. С. 3–13.

1993

1. Влияние предварительного сложного нагружения на ползучесть сплава АМГ-6 // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 2. С. 161–163 (совм. с А. Саади, В.В. Гараниковым).
2. К вопросу опытной проверки физической достоверности частных теорий пластичности // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 2. С. 105–122.
3. Лекции по механике деформированного твердого тела: в 3 ч. Тверь: ТвеПИ.
4. Локально-простые процессы нагружения сплава АМГ-6 в (Р+р) опытах // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 2. С. 163–166 (совм. с А. Саади).
5. Постулат физической определенности // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 3. С. 4–21.
6. Теория выпучивания и устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости при сложном нагружении // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 2. С. 3–33.

7. Устойчивость внецентренно сжатых стержней, подвергнутых предварительному упругопластическому деформированию // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 2. С. 33–41 (совм. с С.А. Кульковым и А.П. Воронцовым).
8. Экспериментальное исследование пластических свойств стали 45 на многозвенных пространственных траекториях деформаций // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 3. С. 164–177 (совм. с А.В. Акимовым, Н.Л. Охлопковым, В. Дабулем).
9. Экспериментальное исследование процесса сложного нагружения сплава 01570 по траекториям в виде двузвенных ломаных при различных температурах // Проблемы прочности. № 3. С. 35–39 (совм. с В.В. Гараниковым, А. Саади).
10. Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения сплава АМГ-6 // Проблемы прочности. № 5. С. 36–42.
11. Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения стали 45 по двузвенным траекториям // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 2. С. 136–144 (совм. с М.Ш. Мошковым).
12. Экспериментальное исследование процессов упругопластического деформирования по плоским траекториям // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 2. С. 174–179 (совм. с А.В. Акимовым, Н.Л. Охлопковым).
13. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования сталей 40 и 40Х при сложном нагружении по плоским траекториям // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 3. С. 44–93 (совм. с А.В. Акимовым и Д.Е. Ивановым).
14. Экспериментальное исследование устойчивости круговых цилиндрических оболочек при сложном нагружении в пространстве деформаций // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы III Симпозиума (Тверь, 3–5 сентября 1992 г.): в 3 ч. Тверь: ТвеПИ. Ч. 3. С. 177–185 (совм. с Н.Л. Охлопковым, Ч.Т. Джоном).

1994

1. К вопросу о физической достоверности гипотезы компланарности // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении: межвузовский сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 38–45.
2. Некоторые результаты экспериментальных исследований сложного деформирования трубчатых образцов из стали 45 по многозвенным пространственным траекториям // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении: межвузовский сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 80–85 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В. Дабулем).
3. О напряженно-деформированном состоянии пространственного чистого сдвига // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении: межвузовский сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 3–13.

4. Определяющие соотношения общей теории пластичности // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении: межвузовский сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 14–37.
5. Проверка физической достоверности частных теорий пластичности на многозвенных траекториях деформации // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении: межвузовский сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 112–121.
6. Развитие проблем нелинейной механики деформируемого твердого тела в трудах Тульской школы // Механика деформируемого твердого тела: сборник научных трудов. Тула: ТулГУ. С. 15–27.
7. Численная реализация алгоритма определения бифуркационной нагрузки плоской формы изгиба двутавровой балки за пределом упругости // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении: межвузовский сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 86–102 (совм. с С.Л. Субботиным).

1995

1. Исследование процессов сложного деформирования материалов на криволинейных траекториях постоянной кривизны и кручения // Тезисы докладов IX Международной конференции по проблемам прочности и пластичности. М. – Киев: РАН, НАН Украины. С. 18–20 (совм. с Н.Л. Охлопковым).
2. Процессы сложного деформирования материалов за пределом упругости // Тезисы докладов IX Международной конференции по проблемам прочности и пластичности. М. – Киев: РАН, НАН Украины. С. 17–18.
3. Устойчивость: в 2 ч. Тверь: Твепи. Ч. 1. 200 с.
4. Устойчивость тонкостенных элементов конструкций за пределом упругости с учетом сложного нагружения // Известия вузов. Строительство. № 11. С. 26–32 (совм. с Н.Л. Охлопковым, С.Л. Субботиным).

1996

1. Определяющие соотношения теории процессов пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Труды IX Международной конференции по прочности и пластичности. М.: Институт проблем механики РАН. Т. 1. С. 80–85.
2. О некоторых особенностях упрочнения конструкционных сталей при деформировании по замкнутым криволинейным траекториям // Проблемы прочности. № 5. С. 17–22 (совм. с Н.Л. Охлопковым).
3. Пластическое деформирование стали по замкнутым криволинейным траекториям // Проблемы прочности. № 4. С. 19–26 (совм. с Н.Л. Охлопковым).
4. Устойчивость: в 2 ч. Тверь: ТГТУ. Ч. 2. 192 с.
5. Экспериментальное исследование процессов пластического деформирования металлов при сложном нагружении // Труды IX Международной конференции по прочности и пластичности. М.: Институт проблем механики РАН. Т. 1. С. 86–91 (совм. с Н.Л. Охлопковым).

1997

1. Автоматизированный комплекс для исследования упруговязкопластических свойств материалов при сложном нагружении: а. с. 7202. № 97108023/20; заявл. 20.05.1997; опубл. 16.07.1998 (совм. с А.В. Акимовым, Н.Л. Охлопковым).

2. Об устойчивости тонкостенных оболочек при сложном докритическом нагружении // Известия вузов. Строительство. № 6. С. 27–34 (совм. с Н.Л. Охлопковым).
3. Сложное нагружение при выпучивании тонкостенных стержней с начальными несовершенствами // Известия вузов. Строительство. № 4. С. 24–29 (совм. с С.Л. Субботиным).
4. Упрочнение конструкционных материалов при сложном деформировании по замкнутым плоским траекториям // Проблемы прочности. № 3. С. 19–29 (совм. с Н.Л. Охлопковым).
5. Экспериментальное исследование закономерностей пластического деформирования металлов по плоским криволинейным траекториям // Прикладная механика. Т. 33. № 7. С. 65–71 (совм. с Н.Л. Охлопковым).

1998

1. Исследование векторных и скалярных свойств стали 9Х2 при деформировании по траекториям в виде логарифмической спирали // Международная конференция «Итоги развития механики в Туле», Тула, 12–15 октября 1998 г.: тезисы докладов. Тула: ТулГУ. С. 32–33 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
2. К вопросу об устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек при сложном докритическом нагружении // Известия вузов. Строительство. № 11–12. С. 268–274 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
3. О деформировании конструкционных сталей по замкнутым траекториям непропорционального нагружения // Математическое моделирование систем и процессов. № 6. С. 30–37 (совм. с Н.Л. Охлопковым).
4. О некоторых соотношениях теории упругопластических процессов для трехмерных траекторий деформирования // Устойчивость, пластичность и ползучесть при сложном нагружении: сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 27–40 (совм. с Н.Л. Охлопковым).
5. Об определяющих функциях процессов пластического деформирования // Устойчивость, пластичность и ползучесть при сложном нагружении: сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 3–26.
6. Постулат локальной размерности образа процесса и определяющие соотношения в теории пластичности // Прикладная механика. Т. 34. № 5. С. 86–96.
7. Развитие механики деформируемого твердого тела в Тверском государственном техническом университете // Материалы Юбилейной конференции ученых и преподавателей Тверского государственного технического университета. Тверь: ТГТУ. С. 49.
8. Расчет процессов сложного деформирования по многозвенным ломаными траекториям // Известия вузов. Строительство. № 9. С. 9–15 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
9. Упругопластическая устойчивость цилиндрических оболочек при сложном докритическом нагружении // Актуальные проблемы механики оболочек: труды международной конференции. Казань: КГУ. С. 91–93 (совм. с В.Н. Ведерниковым, В.В. Гараниковым, В.И. Гулятьевым, А.В. Акимовым).
10. Устойчивость и выпучивание нелинейно-упругих сжатых стержней при ползучести // Устойчивость, пластичность и ползучесть при сложном нагружении: сборник

научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 76–87 (совм. с О.Е. Софьиным, С.Л. Субботиным).

11. Экспериментальное исследование поверхностей текучести стали 45 при некоторых траекториях сложного нагружения // Материалы Юбилейной конференции ученых и преподавателей ТвГТУ. С. 50–51 (совм. с В.Н. Ведерниковым и В.В. Гараниковым).
12. Экспериментальное исследование процессов сложного активного и пассивного деформирования металлов по траекториям в виде архимедовых спиралей // Устойчивость, пластичность и ползучесть при сложном нагружении: сборник научных трудов / отв. ред. В.Г. Зубчанинов. Тверь: ТГТУ. С. 103–114 (совм. с А.В. Акимовым, Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).

1999

1. О деформировании металлов по плоским криволинейным траекториям. Сообщение 1. Векторные и скалярные свойства // Проблемы прочности. № 4. С. 5–11 (совм. с В.В. Гараниковым, Н.Л. Охлопковым).
2. О деформировании металлов по плоским криволинейным траекториям переменной кривизны. Сообщение 2. Функции процессов // Проблемы прочности. № 4. С. 12–18 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
3. Сложное деформирование металлов по плоским криволинейным траекториям переменной кривизны // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы IV Международного научного симпозиума (Тверь, 16–19 июня 1998 г.). Тверь: ТГТУ. С. 77–87 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
4. Устойчивость при ползучести // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы IV Международного научного симпозиума (Тверь, 16–19 июня 1998 г.). Тверь: ТГТУ. С. 3–62.
5. Экспериментальное исследование векторных и скалярных свойств стали 9Х2 при деформировании по плоским криволинейным траекториям. Сообщение 1: траектории вида логарифмических спиралей // Проблемы прочности. № 5. С. 36–41 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
6. Экспериментальное исследование векторных и скалярных свойств стали 9Х2 при деформировании по плоским криволинейным траекториям. Сообщение 2: траектории вида астроида // Проблемы прочности. № 5. С. 50–55 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
7. Экспериментальное исследование процессов деформирования металлов при сложном нагружении // Современные проблемы прочности: научные труды III Международного семинара им. В.А. Лихачева «Современные проблемы прочности» 20–24 сентября 1999 г., Старая Русса: в 2 т. Великий Новгород: НГУ им. Ярослава Мудрого. Т. 2. С. 59–65 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).

2000

1. Исследование процессов упругопластического деформирования оболочек при сложном нагружении // Актуальные проблемы механики оболочек: труды Международной конференции, посвященной 100-летию профессора Х.М. Муштари, 90-летию

- профессора К.З. Галимова и 80-летию профессора М.С. Корнишина, Казань, 26–30 июня 2000 г. Казань: Новое знание. С. 161–166 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
2. Механика сплошных деформируемых сред. Тверь: ТГТУ. 703 с.
 3. Проблемы математической теории пластичности // Проблемы прочности. № 1. С. 22–41.
 4. Расчеты процессов сложного нагружения материалов по многозвенным ломаным траекториям в девиаторном пространстве напряжений // Современные проблемы прочности: научные труды IV Международного семинара им. В.А. Лихачева «Современные проблемы прочности», Великий Новгород, 18–22 сентября 2000 г. Великий Новгород: НГУ им. Ярослава Мудрого. Т. 1. С. 189–194 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
 5. Экспериментальное исследование пластичности и ползучести сплава АК-8 при сложном нагружении // Известия вузов. Строительство. № 2–3. С. 130–135 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
 6. Сложное деформирование металлов по плоской криволинейной траектории вида архимедовой спирали // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении: сборник научных трудов. Тверь: ТвГТУ. Вып. 2. С. 78–84 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
 7. Сложное деформирование металлов по плоской криволинейной траектории в виде астроида // Прикладная механика. Т. 36. № 7. С. 130–136 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
 8. Сложное нагружение при чистом формоизменении // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении: сборник научных трудов. Вып. 2. Тверь: ТГТУ. С. 13–20 (совм. с Д.В. Зубчаниновым).
 9. Устройство для измерения деформации при сложном нагружении: пат. 13092 Рос. Федерация. № 99120485/20 / заявл. 27.09.1999; опубл. 20.03.2000, Бюл. № 8 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).

2001

1. Закономерности сложного упруговязкопластического деформирования стали 12X18H10T на винтовых пространственных траекториях нагружения // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: труды 4-й Международной конференции (Санкт-Петербург, 26–28 июня 2001 года). СПб.: Нестор. С. 133 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
2. Искусственное старение материала // Современные проблемы прочности: научные труды V Международного семинара им. В.А. Лихачева «Современные проблемы прочности», 17–21 сентября 2001 года, Старая Русса: в 2 т. Великий Новгород: НГУ им. Ярослава Мудрого. Т. 2. С. 17–20 (совм. с В.И. Гульяевым).
3. Исследование процессов деформирования материалов на криволинейных траекториях переменной кривизны // Проблемы прочности и пластичности: научные труды V Международного семинара им. В.А. Лихачева «Современные проблемы прочности», 17–21 сентября 2001 года, Старая Русса: в 2 т. Мудрого. Т. 1. С. 93–97 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
4. К основам общей математической теории пластичности // Упругость и неупругость. М.: МГУ. С. 139–145.

5. Общая теория устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: материалы V Международного научного симпозиума, посвященного 70-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники России профессора В.Г. Зубчанинова, Тверь, 14–16 декабря 2000 г. Тверь: ТГТУ. С. 3–18.
6. Предел устойчивости сжатых элементов конструкций при ползучести // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: материалы V Международного научного симпозиума, посвященного 70-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники России профессора В.Г. Зубчанинова, Тверь, 14–16 декабря 2000 г. Тверь: ТГТУ. С. 19–23 (совм. с С.Л. Субботиным).
7. Проверка физической достоверности гипотезы компланарности на многосвязных ломаных траекториях в пространстве напряжений // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: материалы V Международного научного симпозиума, посвященного 70-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники России профессора В.Г. Зубчанинова, Тверь, 14–16 декабря 2000 г. Тверь: ТГТУ. С. 55–61 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
8. Проблемы математической теории пластичности // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород: сборник статей / под ред. А.Ю. Ишлинского. М.: МГГУ. С. 219–242.
9. Сложное нагружение при чистом формоизменении // Проблемы механики неупругих деформаций: сборник статей к 70-летию Д.Д. Ивлева / гл. ред. А.Ю. Ишлинский. М.: Физматлит. С. 143–149.
10. Сложное нагружение металлов по плоской криволинейной траектории // Известия вузов. Строительство. № 6 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
11. Устойчивость упругопластических пластин при сложном нагружении в условиях ползучести // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: труды 4-й Международной конференции (Санкт-Петербург, 26–28 июня 2001 года). СПб.: Нестор. С. 134 (совм. с С.Л. Субботиным).
12. Экспериментальное обоснование теории процессов пластического деформирования материалов на криволинейных траекториях // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: материалы V Международного научного симпозиума, посвященного 70-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники России профессора В.Г. Зубчанинова, Тверь, 14–16 декабря 2000 г. Тверь: ТГТУ. С. 203–205 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
13. Экспериментальное исследование искусственного старения материала // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: материалы V Международного научного симпозиума, посвященного 70-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники России профессора В.Г. Зубчанинова, Тверь, 14–16 декабря 2000 г. Тверь: ТГТУ. С. 61–62 (совм. с В.И. Гульяевым).

2002

1. Гипотеза ортогональности в теории пластичности // Проблемы механики деформируемого твердого тела. СПб.: СПбГУ. С. 137–140.
2. Математическая теория пластичности: монография. Тверь: ТГТУ. 300 с.

3. Общие соотношения связи между напряжениями и деформациями в теории пластичности // Вестник Тверского государственного технического университета. № 1. С. 35–39.
4. О процессах сложного нагружения материалов // Актуальные проблемы строительства: сборник материалов III Международной конференции. Тула: ТулГУ. С. 29–31 (совм. с Д.В. Зубчаниновым).
5. Общая теория устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении // Механика оболочек и пластин: сборник докладов XX Международной конференции по теории оболочек и пластин (17–19 сентября 2002 г.) / отв. ред. В.Г. Баженов. Нижний Новгород: ННГУ. С. 39–41.
6. Предел устойчивости сжатых элементов пластин за пределом упругости при ползучести // Проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород: ННГУ. № 64. С. 10–14 (совм. с С.Л. Субботиным).
7. Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при сложном нагружении за пределом упругости // Механика оболочек и пластин: сборник докладов XX Международной конференции по теории оболочек и пластин (17–19 сентября 2002 г.) / отв. ред. В.Г. Баженов. С. 146–150 (совм. с Д.В. Зубчаниновым, В.И. Гулятьевым).
8. Экспериментальное исследование закономерностей сложной разгрузки стали 45 и 9Х2 // Механика оболочек и пластин: сборник докладов XX Международной конференции по теории оболочек и пластин (17–19 сентября 2002 г.) / отв. ред. В.Г. Баженов. С. 142–146 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).

2003

1. Выпучивание пологих цилиндрических панелей за пределом упругости при ползучести // Современные проблемы прочности: научные труды VI Международного симпозиума им. В.А. Лихачева «Современные проблемы прочности», Великий Новгород, 20–24 октября 2003 г. Великий Новгород: НГУ им. Ярослава Мудрого. С. 62–67 (совм. с С.Л. Субботиным).
2. Закономерности пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: труды V Международной конференции / редкол.: Ю.С. Васильев, Б.Е. Мельников. СПб.: СПбГТУ. С. 198.
3. Исследование закономерностей деформирования по криволинейным траекториям постоянной кривизны с изменяющимся направлением процесса // Современные проблемы прочности: научные труды VI Международного симпозиума им. В.А. Лихачева «Современные проблемы прочности», Великий Новгород, 20–24 октября 2003 г. Великий Новгород: НГУ им. Ярослава Мудрого. С. 47–54 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
4. Исследование закономерностей изменения скалярных и векторных свойств материалов на плоских многозвенных траекториях нагружения // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: труды V Международной конференции / редкол.: Ю.С. Васильев, Б.Е. Мельников. СПб.: СПбГТУ. С. 198–199 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
5. К теории пластичности для траекторий малой кривизны и локально простых процессов // Современные проблемы механики и прикладной математики: материалы

- международной конференции. Воронеж: ВГУ. С. 123–126 (совм. с Д.В. Зубчаниновым).
6. О влиянии сложного нагружения-разгружения на закономерности пластического деформирования материалов // Научно-технические ведомости СПбГТУ. № 3 (33). С. 64–67 (совм. с Д.В. Зубчаниновым).
 7. Об активных и пассивных процессах, полной и неполной пластичности при сложном нагружении // Проблемы нелинейной механики: сборник статей. Тула: ТулГУ. С. 164–177.
 8. Проблемы теории пластичности // Проблемы механики: сборник статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / под ред. Д.М. Климова. М.: Физматлит. С. 394–405.
 9. Сопротивление материалов: учебное пособие: в 2 кн. Тверь: ТГТУ. Кн. 1. 224 с.
 10. Устойчивость сжатых прямоугольных пластин за пределом упругости // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сборник материалов IV Международной научно-технической конференции. Тула: ТулГУ. С. 5 (совм. с М.Ю. Александровым).
 11. Экспериментальная пластичность: в 2 кн. Тверь: ТГТУ. Кн. 1. Процессы сложного деформирования. 170 с. (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
 12. Экспериментальное исследование влияния неполной пластичности на сложное нагружение-разгружение материалов // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сборник материалов IV Международной научно-технической конференции. Тула: ТулГУ. С. 23–25 (совм. с Д.В. Зубчаниновым, В.И. Гультяевым).
 13. Экспериментальное исследование закономерностей процессов сложного нагружения-разгружения // Современные проблемы прочности: научные труды VI Международного симпозиума им. В.А. Лихачева «Современные проблемы прочности», Великий Новгород, 20–24 октября 2003 г. Великий Новгород: НГУ им. Ярослава Мудрого. С. 68–73 (совм. с Д.В. Зубчаниновым, В.И. Гультяевым).
 14. Экспериментальное обоснование трехчленных определяющих соотношений теории процессов для пространственных траекторий нагружения // Современные проблемы механики и прикладной математики: материалы международной конференции. Воронеж: ВГУ. С. 127–132 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).

2004

1. Бифуркационное и критическое время упругопластических пластин // Известия Тульского государственного университета. Серия «Строительные материалы, конструкции и сооружения». Вып. 6. С. 36–41 (совм. с С.Л. Субботиным).
2. Нагрузка надежности сжатых пластин за пределом упругости // Известия Тульского государственного университета. Серия «Строительные материалы, конструкции и сооружения». Вып. 6. С. 41–44 (совм. с С.Л. Субботиным).
3. О влиянии состояний полной и неполной пластичности материала на их глобальную диаграмму деформирования и векторные свойства // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ. № 489. С. 136–140 (совм. с Д.В. Зубчаниновым, В.И. Гультяевым).

4. Процессы и состояния полного и неполного пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ. № 489. С. 141–152.
5. Процессы и состояния полного и неполного пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Известия Тульского государственного университета. Серия «Математика, механика, информатика». Т. 10. Вып. 3. С. 82–97.
6. Экспериментальная пластичность: в 2 кн. Тверь: ТГТУ. Кн. 2. Процессы сложного нагружения. 184 с. (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).

2005

1. Математическая модель пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Проблемы прочности и пластичности: межвузовский сборник. Нижний Новгород: ННГУ. Вып. 67. С. 5–13.
2. Общая математическая теория пластичности и ее конкретизация в форме теории процессов и течения // Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных и научных кадров: материалы 49-й Международной научно-технической конференции, Москва, 25–26 марта 2005 г.; школа-семинар «Современные модели термовязкопластичности». М.: МГТУ «МАМИ». Ч. 1. С. 3–37.
3. О влиянии состояний полной и неполной пластичности материалов на их глобальную диаграмму деформирования и векторные свойства // Современные проблемы математики, механики, информатики: тезисы докладов Международной научной конференции, 22–26 ноября 2005 г. Тула: ТулГУ. С. 141–142 (совм. с Д.В. Зубчаниновым, В.И. Гульяевым).
4. О стабилизации процессов пластического деформирования цилиндрических оболочек при сложном нагружении // Актуальные проблемы строительства: сборник материалов VI Международной конференции (30 июня – 2 июля 2005 г.). Тула: ТулГУ. С. 23–24.
5. Процессы и состояния полного и неполного пластического деформирования при сложном нагружении // Современные проблемы математики, механики, информатики: тезисы докладов Международной научной конференции, 22–26 ноября 2005 г. Тула: ТулГУ. С. 140–141.
6. Расчет сжатых пластин при неупругих деформациях с позиций современной концепции устойчивости // Современные проблемы математики, механики, информатики: тезисы докладов Международной научной конференции, 22–26 ноября 2005 г. Тула: ТулГУ. С. 142–145 (совм. с С.Л. Субботиным).
7. Сопротивление материалов: учебное пособие: в 2 кн. Тверь: ТГТУ. Кн. 2. 350 с.
8. Структурные изменения стали 45 в процессе деформирования // Известия Тульского государственного университета. Серия «Строительные материалы, конструкции и сооружения». Вып. 8. С. 26–29 (совм. с В.И. Гульяевым, Д.В. Зубчаниновым).
9. Экспериментальное исследование процессов пластического деформирования цилиндрических оболочек при сложном нагружении // Известия Тульского государственного университета. Серия «Строительные материалы, конструкции и сооружения». Вып. 8. С. 29–37 (совм. с М.Ю. Александровым, Д.А. Ханьгиным).

10. Экспериментальные исследования процессов сложного пластического деформирования материалов по траекториям типа веера // Проблемы прочности и пластичности: межвузовский сборник. Нижний Новгород: ННГУ. Вып. 67. С. 14–19 (совм. с В.И. Гулятьевым, Д.В. Зубчаниновым).

2006

1. К модели неполной пластичности материалов Е.И. Шемякина // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина / редкол.: Д.Д. Ивлев, Н.Ф. Морозов. М.: Физматлит. С. 284–287.
2. Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред // Упругость и неупругость. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. С. 130–138.
3. Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред // Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: труды VI Международного научного симпозиума. Тверь: ТГТУ. С. 4–13.
4. Образ процесса нагружения в девиаторном пространстве деформаций для плоской многозвенной траектории // Вестник Тверского государственного технического университета. Вып. 8. С. 13–17 (совм. с М.Ю. Александровым, Д.А. Ханьгиным).
5. Сложное нагружение и разгружение конструкционных материалов // Современные проблемы математики, механики, информатики: тезисы докладов Международной научной конференции, 28–30 ноября 2006 г. Тула: ТулГУ. С. 133–135 (совм. с В.И. Гулятьевым, Д.В. Зубчаниновым).
6. Современное состояние математической теории процессов пластической деформации сплошных сред // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: аннотации докладов: в 3 т. Нижний Новгород: ННГУ. Т. III. С. 98.
7. Устойчивость и пластичность: в 3 т. Тверь: ТГТУ. Т. 3. Доклады. 446 с.
8. Устойчивость сжатых элементов конструкций за пределом упругости при ползучести // Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: труды VI Международного научного симпозиума. Тверь: ТГТУ. С. 14–30 (совм. с С.Л. Субботиным).
9. Экспериментальное исследование сложного деформирования стали 45 по траекториям типа «плоский винт» // Известия Тульского государственного университета. Серия «Строительные материалы, конструкции и сооружения». Вып. 9. С. 77–83 (совм. с В.И. Гулятьевым, Д.В. Зубчаниновым).

2007

1. Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сборник статей к 75-летию со дня рождения В.Г. Зубчанинова / отв. ред.: Е.И. Шемякин, Д.Д. Ивлев. Тверь: ТГТУ. С. 32–43.
2. О гипотезе ортогональности, принципе градиентальности и постулате пластичности // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сборник статей к 75-летию со дня рождения В.Г. Зубчанинова / отв. ред.: Е.И. Шемякин, Д.Д. Ивлев. Тверь: ТГТУ. С. 24–31.

3. Об активных и пассивных процессах сложного нагружения-разгружения в теории пластичности // Современные проблемы термовязкопластичности. М.: МГТУ «МАМИ». С. 3–18.
4. Построение образа процесса нагружения материала на пространственных винтовых траекториях деформации // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сборник статей к 75-летию со дня рождения В.Г. Зубчанинова / отв. ред.: Е.И. Шемякин, Д.Д. Ивлев. Тверь: ТГТУ. С. 110–114 (совм. с Н.Л. Охлопковым, В.В. Гараниковым).
5. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов: учебное пособие: в 2 ч. Тверь: ТГТУ. Ч. 1. 152 с. (совм. с В.Н. Ведерниковым, Е.Г. Алексеевой).
6. Устойчивость и пластичность: в 2 т. М.: Физматлит. Т. 1. Устойчивость. 446 с.
7. Экспериментальное исследование стали 45 по траекториям типа «плоский винт» // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости: сборник статей к 75-летию со дня рождения В.Г. Зубчанинова / отв. ред.: Е.И. Шемякин, Д.Д. Ивлев. Тверь: ТГТУ. С. 104–109 (совм. с В.И. Гульяевым, Д.В. Зубчаниновым).
8. Экспериментальное исследование предельной поверхности материала // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 69. С. 90–94.
9. Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения материалов на многозвенных траекториях // Современные проблемы термовязкопластичности. М.: МГТУ «МАМИ». С. 19–24 (совм. с В.И. Гульяевым, Д.В. Зубчаниновым).
10. Экспериментальное исследование сложного деформирования материала сталь 45 на многозвенных траекториях // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 69. С. 95–98.

2008

1. Гипотеза ортогональности, принцип градиентальности в теории пластичности // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. № 5. С. 68–73.
2. Закон сложной разгрузки материалов в теории пластичности // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 70. С. 7–17.
3. Некоторые проблемы современной теории пластичности // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долго-вечности конструкций и методы их решения: сборник докладов: в 2 т. СПб.: СПбГПУ. Т. 2. С. 136–138.
4. О проверке постулата изотропии в теории процессов сложного пластического деформирования // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 70. С. 18–23 (совм. с В.И. Гульяевым).
5. О достоверности постулата изотропии в теории пластичности. // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: сборник докладов: в 2 т. СПб.: СПбГПУ. Т. 2. С. 138–142.
6. Устойчивость и пластичность: в 2 т. М.: Физматлит. Т. 2. Пластичность. 336 с.
7. Экспериментальное исследование сложного нагружения материалов на траектории типа веера // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: сборник тезисов. СПб.: СПбГПУ. Т. 2. С. 142–145 (совм. с В.И. Гульяевым, В.Н. Ведерниковым).

2009

1. Модифицированная теория течения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельных состояний. № 1 (6). С. 81–97.
2. Модифицированная теория течения и математические модели процессов и течений пластического деформирования // Современные проблемы ресурса материалов и конструкций: труды III школы-семинара, Москва, 09–10 апреля 2009 г. М.: МГТУ «МАМИ». С. 119–133.
3. Модифицированная теория течения и математические модели процессов и течений пластического деформирования // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 71. С. 20–25 (совм. с В.И. Гульяевым, Д.В. Зубчаниновым).
4. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов: учебное пособие: в 2 ч. Тверь: ТГТУ. Ч. 2. 208 с. (совм. с В.Н. Ведерниковым, Е.Г. Алексеевой).

2010

1. Методики проведения лекционно-практических занятий и экзаменационных сессий // Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности и строительная механика: сборник научных трудов, посвященный 85-летию кафедры СМТУиП / под ред. В.Г. Зубчанинова, Н.Л. Охлопкова. Тверь: ТвГТУ. С. 60–64.
2. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит. 352 с.
3. Моделирование процессов сложного пластического деформирования материалов по траекториям типа смещенного веера // Современные проблемы математики и механики: материалы Всероссийской молодежной научной конференции, 13–15 октября 2010 года. Томск: ТГУ. С. 6–8 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
4. Моделирование процессов сложного пластического деформирования материалов по сложным многозвенным траекториям с участками постоянной кривизны // Краевые задачи и математическое моделирование: тематический сборник научных статей: в 3 т. / под ред. В.О. Каледина. Новокузнецк: КемГУ. Т. 1. С. 15–23 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
5. Моделирование процессов сложного упругопластического моделирования материалов // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та. Серия: Механика предельного состояния. Чебоксары: ЧГПУ. № 2 (8). С. 172–181 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
6. Обобщенный критерий полной и неполной пластичности сплошных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. № 2 (8). С. 161–171.
7. О запаздывании векторных свойств материалов // Сборник материалов XI Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» (30 июня – 2 июля 2010 г.). Тула: ТулГУ. С. 24 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
8. Пластическое деформирование материалов по криволинейным траекториям переменной кривизны // Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности и строительная механика: сборник научных трудов, посвященный 85-летию кафедры СМТУиП / под ред. В.Г. Зубчанинова, Н.Л. Охлопкова. Тверь: ТвГТУ. С. 141–144 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
9. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности и строительная механика: сборник научных трудов, посвященный 85-летию кафедры СМТУиП / под ред. В.Г. Зубчанинова, Н.Л. Охлопкова. Тверь: ТвГТУ. С. 104–116.

10. Учет упрочнения в расчетах процессов сложного упругопластического нагружения // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 3. С. 207–212 (совм. с А.А. Алексеевым, С.Л. Субботиным).

2011

1. О моих учителях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 1 (9). С. 23–37.
2. О проверке постулата изотропии на сложных двузвенных траекториях // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VII Международного научного симпозиума, посвященного 80-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь: ТвГТУ. С. 13–25 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
3. О соотношениях между напряжениями и деформациями в теории пластичности при сложном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. № 73. С. 120–131.
4. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. № 1. С. 27–37.
5. Сравнение аппроксимирующих функций для построения диаграммы деформирования // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VII Международного научного симпозиума, посвященного 80-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь: ТвГТУ. С. 54–58 (совм. с Н.А. Рогальским).
6. Теория процессов и постулат изотропии А.А. Ильюшина // Упругость и неупругость. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. С. 73–79.
7. Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 1 (9). С. 38–60.
8. Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии А.А. Ильюшина // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VII Международного научного симпозиума, посвященного 80-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь: ТвГТУ. С. 30–49.
9. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек при сложном нагружении и разгрузке материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 2 (10). С. 21–24 (совм. с В.И. Гулятьевым).
10. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек из стали 45 при сложном докритическом нагружении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 2 (10). С. 16–20 (совм. с В.И. Гулятьевым).

2012

1. Запаздывание векторных и скалярных свойств материалов при сложном нагружении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.

- И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 4 (14). С. 26–39 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
2. К вопросу об исследовании эффекта Баушингера и построении поверхности текучести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 4 (14). С. 40–45 (совм. с А.А. Алексеевым).
 3. О допуске на остаточную деформацию при определении пределов текучести металлов // Сборник материалов 53-й Международной научной конференции «Актуальные проблемы прочности»: в 2 т. Витебск, Беларусь: ВГТУ. Т. 2. С. 108–110 (совм. с В.И. Гультяевым, А.А. Алексеевым).
 4. Об эффекте Баушингера и поверхности текучести при пластическом деформировании металлов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 3 (13). С. 3–8 (совм. с В.Т. Гультяевым, А.А. Алексеевым).

2013

1. Исследование эффекта Баушингера и границы текучести при упругопластическом деформировании металлов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. № 1. С. 94–105 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультяевым).
2. Об устойчивости, геометрической и физической нелинейности в механике деформируемого твердого тела // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. № 2-2. С. 112–116.
3. Об экспериментальном исследовании эффекта Баушингера и поверхности текучести стали У8 // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 2 (16). С. 55–62 (совм. с В.И. Гультяевым, А.А. Алексеевым, В.Н. Ведерниковым).
4. Об эффекте Баушингера при простой знакопеременной и сложной частичной разгрузке // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова, Тула, 16–20 сентября 2013 г. Тула: ТулГУ. С. 299–304 (совм. с А.А. Алексеевым, Е.Г. Алексеевой, В.Н. Ведерниковым, В.И. Гультяевым).
5. Об эффекте Баушингера и поверхности текучести при пластическом деформировании материалов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2013 г.: в 2 ч. Воронеж: Научная книга. Ч. 1. С. 140–145 (совм. с В.И. Гультяевым, А.А. Алексеевым).
6. Теория идеальной пластичности, предельных состояний и Д.Д. Ивлев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 3 (17). С. 5–20.

2014

1. К проблеме построения поверхности текучести в теории пластичности // Вестник Тверского государственного технического университета. № 1 (25). С. 13–19 (совм. с А.А. Алексеевым).

2. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов // Математическое моделирование в естественных науках. Т. 1. С. 88–91 (совм. с А.С. Двужилиловым).
3. Математическое моделирование упругопластического деформирования стали по прямолинейным ломаным траекториям // Математическое моделирование в естественных науках. Т. 1. С. 9–12 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
4. Моделирование процессов упругопластического деформирования металлов при сложном нагружении в векторном пространстве А.А. Ильюшина // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Международной научной конференции, Тула, 15–19 сентября 2014 г. Тула: ТулГУ. С. 195–202 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
5. О влиянии кривизны траекторий деформирования на классификацию и запаздывание свойств материалов при сложном нагружении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 1 (19). С. 78–87 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
6. О запаздывании скалярных и векторных свойств материалов в теории пластичности при сложном нагружении // Вестник Тверского государственного технического университета. № 1 (25). С. 26–34 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
7. О механических свойствах стали 30ХГСА при простом и сложном нагружениях // Вестник Тверского государственного технического университета. № 2 (26). С. 78–82 (совм. с А.С. Двужилиловым, А.В. Федяевым, В.И. Гультияевым, А.А. Алексеевым).
8. О построении поверхности текучести стали 45 и проверке постулата изотропии на прямолинейных траекториях при многократных знакопеременных нагружениях // Вестник ПНИПУ. Механика. № 3. С. 71–88 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
9. Применение модифицированной модели теории процессов к расчетам упругопластического деформирования стали по ломаным траекториям // Успехи механики сплошных сред: сборник докладов Международной конференции, приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина, 28 сентября – 4 октября 2014, Владивосток, Россия. Иркутск: Мегапринт. С. 200–203 (совм. с А.А. Алексеевым).
10. Расчеты сложного упругопластического деформирования металлов по модифицированной модели теории процессов // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVII Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г.: в 2 т. / отв. ред. А.О. Ватульян. Ростов н/Д: ЮФУ. Т. 1. С. 216–220 (совм. с А.А. Алексеевым).
11. Свойство запаздывания векторных свойств материалов для гладких траекторий при сложном нагружении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 2 (20). С. 21–28 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
12. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. Т. 76. № 1. С. 18–25 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
13. Экспериментальное исследование эффекта Баушингера при многократном знакопеременном нагружении // Вестник Тверского государственного технического университета. № 1 (25). С. 58–63 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым, В.Н. Ведерниковым).

2015

1. Запаздывание векторных свойств при упругопластическом деформировании материалов по гладким траекториям постоянной кривизны // Математическое моделирование в естественных науках. Т. 1. С. 166–169 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
2. Испытание конструкционных материалов по пространственным винтовым траекториям // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. Т. 3. № 3. С. 50–52 (совм. с В.И. Гультяевым, С.Л. Субботиным, В.В. Гараниковым).
3. К вопросу запаздывания векторных свойств материалов при сложном нагружении по криволинейным траекториям // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VIII Международного научного симпозиума, посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь: ТвГТУ. С. 88–92 (совм. с Е.Г. Алексеевой).
4. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов в плоских задачах // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. Казань: КФУ. С. 1522–1523 (совм. с А.А. Алексеевым).
5. Mathematical modeling of plastic deformation of materials on complex flat trajectories // Физика и механика материалов. № 2. Т. 24. С. 107–118 (совм. с А.А. Алексеевым, Е.Г. Алексеевой).
6. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским криволинейным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. Т. 77. № 2. С. 113–123 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультяевым).
7. Моделирование процессов упругопластического деформирования стали по сложным плоским траекториям // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.): в 2 ч. Чебоксары: ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Ч. 1. С. 49–54 (совм. с А.А. Алексеевым).
8. Об экспериментальном исследовании эволюции поверхности текучести ряда конструкционных материалов // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VIII Международного научного симпозиума, посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь: ТвГТУ. С. 149–151 (совм. с А.А. Алексеевым).
9. Сложное нагружение и разгружение конструкционных материалов типа стали Ст-45 в условиях нормальных температур // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. Т. 3. № 3. С. 47–49 (совм. с В.И. Гультяевым, С.Л. Субботиным, В.В. Гараниковым).
10. Теория упругопластического деформирования материалов и общий постулат изотропии А.А. Ильюшина // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VIII Международного научного симпозиума, посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь: ТвГТУ. С. 9–24.
11. Численное исследование процессов сложного упругопластического деформирования стали по криволинейным траекториям // Математическое моделирование в естественных науках. Т. 1. С. 8–12 (совм. с А.А. Алексеевым).

12. Численное моделирование и построение образа процесса упругопластического деформирования стали по сложным плоским окружным траекториям // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 4 (26). С. 39–49 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
13. Численное моделирование процессов упругопластического деформирования стали по плоским криволинейным траекториям // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), 24–31 мая 2015 г., Алушта. М.: МАИ. С. 265–267 (совм. с А.А. Алексеевым).
14. Экспериментальное исследование и численное моделирование процессов деформирования металлов при комбинированном нагружении // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы VIII Международного научного симпозиума, посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь: ТвГТУ. С. 83–87 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).

2016

1. Испытание стали 45 при упругопластическом деформировании по сложным траекториям постоянной и переменной кривизны // Деформация и разрушение материалов. № 9. С. 14–19 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
2. Математическое моделирование упругопластического деформирования стали по сложным плоским криволинейным траекториям // Механика и математическое моделирование в технике: сборник тезисов Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. С. 27–30 (совм. с А.А. Алексеевым, Е.Г. Алексеевой, В.И. Гультияевым).
3. Моделирование упругопластического деформирования стали при непропорциональном нагружении по плоским окружным траекториям // Математическое моделирование в естественных науках. Т. 1. С. 100–105 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым, Е.Г. Алексеевой).
4. Проверка постулата изотропии и численное моделирование процессов деформирования материалов на сложных гладких траекториях // Физика и механика материалов. Т. 29. № 2. С. 150–157 (совм. с А.А. Алексеевым, Е.Г. Алексеевой).
5. Процессы упругопластического деформирования материалов по плоским траекториям // Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, 20–21 января 2016 года / под ред. Г.Л. Бровко [и др.]. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. С. 132–135 (совм. с А.А. Алексеевым).
6. Расчеты процессов пластического деформирования металлов при непропорциональном нагружении по плоским криволинейным траекториям // Проблемы механики. № 3. С. 54–57 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
7. Теория упругопластического деформирования материалов А.А. Ильюшина, ее критерии и общий постулат изотропии // Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, 20–21 января 2016 года / под ред. Г.Л. Бровко [и др.]. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. С. 83–93.

2017

1. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories // *Materials Physics and Mechanics*. Vol. 32. No 3, pp. 298–304. doi: 10.18720/MPM.3232017_10 (with A.A. Alekseev, E.G. Alekseeva, V.I. Gultiaev).
2. Испытания конструкционных материалов типа сталь 45 по скручивающимся пространственным винтовым траекториям // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 1. Тверь: ТвГТУ. С. 87–89 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультьевым).
3. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования материалов // Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы научно-практической конференции. Вып. 2. Тверь: ТвГУ. С. 104–109 (совм. с А.А. Алексеевым, Е.Г. Алексеевой, В.И. Гультьевым).
4. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. № 3. С. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультьевым).
5. О влиянии кривизны на классификацию траекторий деформирования и запаздывание свойств материалов при упругопластическом деформировании // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 1. Тверь: ТвГТУ. С. 76–81 (совм. с Е.Г. Алексеевой, А.А. Алексеевым).
6. Testing of steel 45 under complex loading along the cylindrical screw trajectories of deformation // *Materials Physics and Mechanics*. Vol. 32. No 3, pp. 305–311. doi: 10.18720/MPM.3232017_11 (with V.I. Gultiaev, A.A. Alekseev, V.V. Garanikov, S.L. Subbotin).
7. Упругопластическое деформирование стали при сложном нагружении по траектории типа спираль Архимеда // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 1. Тверь: ТвГТУ. С. 82–86 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультьевым).

2018

1. About drawing the yield surface for steel 45 and verifying the postulate of isotropy on straight-line paths under repeated sign-variable loadings // *PNRPU Mechanics Bulletin* 3, pp. 71–88. DOI: 10.15593/perm.mech/eng.2018.1.03 (with A.A. Alekseev, V.I. Gultiaev).
2. Испытание стали 45 при сложном нагружении по цилиндрической винтовой траектории // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 2. Тверь: ТвГТУ. С. 50–54 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультьевым, В.Н. Ведерниковым).
3. Моделирование процессов упругопластического деформирования по ломаным неаналитическим траекториям и проверка постулата изотропии // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела:

- межвузовский сборник научных трудов. Вып. 2. Тверь: ТвГТУ. С. 42–49 (совм. с Е.Г. Алексеевой, А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
4. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29–46.
 5. Численное моделирование процессов упругопластического деформирования конструкционных сталей по многозвенным ломаными прямолинейными траекториями // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIX Международной конференции. Ростов н/Д: ЮФУ. Т. 1. С. 114–118 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).

2019

1. Deformation of cylindrical shells of steel 45 under complex loading // E3S Web of Conferences. P. 04025 (with S. Cheremnykh, V.I. Gultyaev).
2. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally // Materials Physics and Mechanics. Vol. 42. No 5, pp. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6 (with A.A. Alekseev, V.I. Gultiaev, E.G. Alekseeva).
3. Modeling of elastoplastic steel deformation in two-link broken trajectories and delaying of vector and scalar material properties // Materials Physics and Mechanics. No 4. Vol. 42, pp. 436–444. DOI: 10.18720/MPM.4242019_8 (with A.A. Alekseev, V.I. Gultiaev, E.G. Alekseeva).
4. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по плоским многозвенным траекториям // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов: в 4 т. Уфа: БашГУ. Т. 3. С. 305–307 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
5. Моделирование процессов упругопластического деформирования стали по многозвенным криволинейным траекториям деформирования // Материалы докладов 52-й Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов: в 2 т. Витебск: ВГТУ. Т. 2. С. 367–369 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
6. Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 61. С. 32–44. DOI: 10.17223/19988621/61/4 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым, Е.Г. Алексеевой).

2020

1. Modeling of deformation processes of structural steels along circular paths // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425. P. 012186 doi: 10.1088/1742-6596/1425/1/012186 (with A.A. Alekseev, V.I. Gultiaev).
2. Влияние замены неаналитических траекторий с точками излома гладкими траекториями на сложность процессов деформирования и нагружения материалов // Вестник ПНИПУ. Механика. № 2. С. 52–63 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультияевым).
3. К вопросу об определяющих законах связи общей математической теории пластичности // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. № 2 (206). С. 48–52.

4. Математическое моделирование процессов сложного нагружения стали по многозвенным ломаным траекториям деформирования // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела: межвузовский сборник научных трудов / под ред. В.Г. Зубчанинова, А.А. Алексеева. Тверь: ТвГТУ. С. 42–47 (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультяевым).
5. Об основных законах общей математической теории пластичности и пределах их применимости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. № 6. С. 73–81.
6. Экспериментальное и теоретическое исследование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по некоторым многозвенным траекториям // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 3 (45). С. 64–71. (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультяевым).

2021

1. Некоторые вопросы теории упругопластических процессов деформирования материалов при сложном нагружении // Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. С.81–92.
2. Modeling of elastoplastic deformation of low-carbon steel along multi-link plane strain trajectories // AIP Conference Proceedings. «29th Russian Conference on Mathematical Modeling in Natural Sciences». P. 020001. (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультяевым, Е.Г. Алексеевой).
3. Проверка постулата изотропии при сложном кинематическом нагружении материала сталь 45 по траекториям деформирования в виде полуокружностей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 4 (50). С. 16–24. (совм. с В.И. Гультяевым, А.А. Алексеевым, И.А. Саврасовым).
4. Экспериментальное исследование стали 45 по некоторой гладкой криволинейной траектории деформирования // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 3 (49). С. 33–41. (совм. с В.И. Гультяевым, А.А. Алексеевым, И.А. Саврасовым).
5. Численный анализ упругопластического деформирования стали по сложной многозвенной траектории с участками постоянной кривизны // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы IX Международного научного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь, С. 8–13. (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гультяевым).
6. Методика экспериментального исследования пластичности поликристаллических материалов на испытательном комплексе СН-ЭВМ // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: материалы IX Международного научного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. Тверь, С. 34–36. (совм. с В.И. Гультяевым, А.А. Алексеевым, И.А. Саврасовым).

7. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским траекториям // Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. С. 171-176. (совм. с А.А. Алексеевым, В.И. Гулятьевым).

2023

1. Проверка постулата изотропии при деформировании алюминиевого сплава В95 по прямолинейным траекториям с углом излома 135 градусов // Авиационные двигатели. № 2 (19). С. 37-42. (совм. с В.И. Гулятьевым, А.А. Алексеевым, И.А. Саврасовым, С.Л. Субботиным, В.В. Гараниковым).
2. Экспериментальное исследование латуни Л63 при сложном нагружении по двухзвенным ломаным // Авиационные двигатели. № 1 (18). С. 99-103. (совм. с В.И. Гулятьевым, А.А. Алексеевым, А.С. Двужилковым).
3. Исследование латуни Л63 по гладкой криволинейной траектории типа «веер смещенных окружностей» // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. № 1 (55). С. 26-32. (совм. с В.И. Гулятьевым, А.С. Двужилковым).
4. Проверка постулата изотропии при деформировании сплава В95 по двухзвенным ломаным траекториям // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. № 5. С. 47-52. (совм. с В.И. Гулятьевым, А.А. Алексеевым, И.А. Саврасовым).

В. Г. Зубчанинов¹

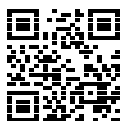
О МОИХ УЧИТЕЛЯХ

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Аннотация. В статье изложены воспоминания В. Г. Зубчанинова о становлении его научной карьеры под руководством выдающихся отечественных ученых – Л. А. Толоконникова, Н. Н. Моисеева, И. И. Воровича и А. А. Ильюшина. Особое внимание уделено формированию научных школ, развитию теории упругопластической устойчивости и роли личного взаимодействия учёного с наставниками. Рассматриваются вопросы преемственности в научной и педагогической деятельности, а также вклад упомянутых учёных в развитие отечественной механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: научная школа, теория устойчивости, упругопластичность, А. А. Ильюшин, Л. А. Толоконников, история механики, педагогическая преемственность.

Зубчанинов Владимир Георгиевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности; e-mail: vgz@rambler.ru



для цитирования: Зубчанинов В. Г. О моих учителях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 58–80. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.002. EDN: YYKLVY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

¹Настоящая статья была впервые опубликована в журнале Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2011, №1(9), С. 23–37.

© Зубчанинов В. Г. 2025

Поступила: 01.02.25; принята в печать: 01.09.25; опубликована: 22.12.25.

V. G. Zubchaninov²

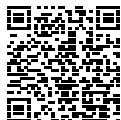
ABOUT MY TEACHERS

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The article presents the recollections of V.G. Zubchaninov regarding the development of his scientific career under the guidance of prominent Soviet scholars — L. A. Tolokonnikov, N. N. Moiseev, I. I. Vorovich, and A. A. Ilyushin. Special attention is given to the formation of scientific schools, the advancement of the theory of elastoplastic stability, and the personal influence of mentors. The paper addresses issues of scientific and pedagogical continuity and the contribution of these scholars to the development of solid mechanics in Russia.

Keywords: scientific school, stability theory, elastoplasticity, A. A. Ilyushin, L. A. Tolokonnikov, history of mechanics, pedagogical continuity.

Vladimir G. Zubchaninov, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: vgz@rambler.ru;



to cite this article: [Zubchaninov V. G.](#) About My Teachers // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 58–80. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.002

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

²This article was originally published in the journal Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost., 2011, No. 1(9), pp. 23–37.

Received: 01.02.25;

accepted: 01.09.25;

published: 22.12.25.

После окончания средней школы на Дальнем Востоке в 1949 г. я выбрал физико-математический факультет Ростовского на Дону государственного университета (бывшего ранее Варшавского университета), выдержав конкурс в 4 человека на место. Ростов произвёл на меня громадное впечатление: такой крупный, красивый и оживлённый город я видел впервые в своей жизни. Там было всегда тепло. Город всегда благоухал в белой акации. В день открытых дверей при поступлении в университет вместе с толпой абитуриентов я посетил лабораторию механических испытаний на кафедре теоретической механики, созданную ранее известным профессором Коробовым. Эта лаборатория была оснащена оборудованием и испытательными машинами гораздо богаче, чем во многих технических вузах. Нас встретил высокий, интеллигентный, похожий на гвардейца Семёновского или Преображенского полка времён Петра Первого преподаватель в очках – Леонид Александрович Толоконников, доцент кафедры теоретической механики. Он продемонстрировал одну из работ по устойчивости упругого сжатого двутаврового стержня трёхметровой длины. При достижении критического значения силы Л.А.Толоконников почему-то выделив меня из других абитуриентов, предложил слегка толкнуть стержень пальцем. Я выполнил это указание, а стержень неожиданно для меня и для всех стал колебаться как гибкий прут. Опыт произвёл на меня колоссальное впечатление и определил всю мою дальнейшую научную творческую жизнь. Проблема устойчивости гибких элементов конструкций стала для меня одним из главных направлений научной деятельности. Леонид Александрович стал моим первым учителем. Он приехал работать в Ростовский университет по распределению после окончания аспирантуры на кафедре теории упругости Московского государственного университета в 1949 г. у члена-корр. АН СССР Алексея Антоновича Ильюшина. Леонид Александрович был замечательным, обаятельным человеком и учёным. Вместе с ним в 1950 г. к нам на физмат приехали работать будущие академики РАН Никита Николаевич Моисеев и Иосиф Израилевич Ворович. Это были друзья по жизни. Они вместе учились в МГУ на мехмате. Моисеев окончил университет в 1940 году на два года раньше Воровича, а затем один год учился в Военно-воздушной академии им. Н.Е.Жуковского. Затем воевал с немцами. Ворович, успешно сдав летнюю сессию за 4-й курс, был призван в армию. Воевал на Волховском фронте. Продолжил образование также в Военно-воздушной академии, которую окончил в 1944 году, аспирантуру – в 1950 году и вместе с Моисеевым был направлен в Ростовский-на-Дону университет.

Молодые доценты Л.А.Толоконников, Н.Н.Моисеев и И.И.Ворович очень быстро сплотили вокруг себя способных студентов. В их числе оказался и я. Это была настоящая университетская школа! Они внесли свежую струю мехмата МГУ в образование и научную работу Ростовского-на-Дону университета, что оставило у нас, студентов, неизгладимый след на всю жизнь. Запомнился организованный этой великолепной тройкой научный семинар, посвященный математическим проблемам механики: теории упругости, пластичности, аэро- и гидродинамики. Этот семинар сыграл значительную роль в моем становлении

как ученого механика. Благодаря ему я на 3-м курсе перешел со специальности “математика” на специальность “механика”. Главными в работе семинара были конкретные задачи механики и прикладной математики. Мы, студенты, обожали своих учителей и подражали им. Они разворошили спокойную, классическую университетскую жизнь. Они умели и отдыхать. По их примеру с тех пор я люблю сухое виноградное вино, особенно “Хванчкару”, “Оджалешви”, “Каберне”. Л.А.Толоконников стал моим научным руководителем по курсовым работам и диплому, который был посвящен проблеме устойчивости цилиндрических оболочек за пределом упругости. Леонид Александрович и Иосиф Израилевич написали прекрасные отзывы о моей дипломной работе. В нашей стране Л.А.Толоконников явился основоположником нелинейной теории упругости. Он читал нам авторский курс по этой дисциплине, а также по теории упругих оболочек, теоретической механике и некоторым другим дисциплинам. Познакомившись в университете, мы дружили с Леонидом Александровичем всю жизнь. Я был его первым учеником и очень горжусь этим. Однажды, уже на 5-м курсе, он пригласил меня к себе домой отобедать, по дороге купил вино “Три семерки”. За стаканом доброго вина мы долго и от души разговаривали на разные и не только профессиональные темы. Это были моменты нашего откровения и доверия.

В 1958 году Л.А.Толоконников переехал в Тулу и основал там известную в стране школу в области нелинейной теории упругости и пластичности применительно к технологическим процессам обработки металлов давлением и к другим важным практическим проблемам машиностроения и оборонной промышленности. В 1958 году Толоконников защитил в МГУ докторскую диссертацию. Его научным руководителем был А.А.Ильюшин. А я в том же году поступил к А.А.Ильюшину в аспирантуру в институт механики АН СССР по рекомендации Леонида Александровича.

За годы своей насыщенной жизни Леонид Александрович Толоконников подготовил более 100 кандидатов наук и несколько десятков докторов наук. Он говорил: “Мои ученики – мои студенты”. Среди них ныне известные ученые профессора Н.М.Матченко, А.А.Маркин, А.А.Трешев, С.П.Яковлев и другие, рано ушедшие из жизни Г.С.Тарасьев, Г.В.Бригадиров и В.Г.Громов. Леонид Александрович помогал и поддерживал меня всю свою жизнь. Он был моим оппонентом на защите кандидатской диссертации и вообще наставником всей моей научной деятельности. Он подарил мне свою книгу “Механика деформируемого твердого тела”, на титульном листе которой надпись: “Дорогому Володе, а теперь – Владимиру Георгиевичу!!! Человек получает совершенное удовлетворение, когда ученики превосходят породившего их” (11 сентября 1979 года, г.Калинин). Как дороги для меня эти слова близкого и любимого человека, талантливого и крупнейшего ученого!

Леонид Александрович был яркой личностью, сочетавшей в себе качества ученого, педагога, воспитателя молодежи, спортсмена и другие дарования. В пять утра каждый день он уже бегал от инфаркта в известном в г.Туле парке,

зимой ходил на лыжах и очень любил свою жену Марию Васильевну и сына Олега. В жизни он успел сделать чрезвычайно много, всегда спешил жить, двигался по жизни на повышенной скорости, несмотря на плохое зрение на больших скоростях водил свою автомашину.



Моисеев Н. Н., Толоконников Л. А., Воронович И. И.

Иосиф Израилевич Ворович (1920 - 2001) был великолепным ученым и педагогом. Его лекции по теории упругости, прикладной теории упругости и сопротивлению материалов поражали своей глубиной и фундаментальностью. По

окончании университета Иосиф Израилович предлагал мне остаться в университете, но у меня в Ростове не было жилья и я поехал в г.Красногорск под Москву в специальное конструкторское бюро при механическом заводе. В 1958 году И.И.Ворович, защитив докторскую диссертацию, стал заведующим кафедрой теории упругости, а после открытия при университете НИИ механики и прикладной математики – директором этого НИИ. В 2001 году я подарил Иосифу Израиловичу свою новую книгу “Механика сплошных деформируемых сред” и получил от него телеграмму следующего содержания: “Сердечно поздравляю Вас со славным 70-летием и выходом в свет прекрасного труда. К моему поздравлению присоединяются механики Ростова-на-Дону и члены Ростовского математического общества. Желаю долгих лет жизни и плодотворной работы на благо отечественной науки”. Еще раньше, когда мне исполнилось лишь 50 лет, он писал мне: “Мы рады, что на всех этапах своей деятельности Вы остаетесь верным лучшим традициям университетской науки – в точности и общности постановки и решения задач, в требовательности к студентам и преподавателям, а прежде всего – к себе!” Мы, студенты, глубоко уважали И.И.Воровича за его доброжелательность и интеллект. Этот неординарный ученый и обаятельный человек был женат на моей однокурснице по университету Любе Коган.

Ровестник Октября Никита Николаевич Моисеев (1917 - 2000) был очень энергичным, увлекающимся человеком, из потомственных русских интеллигентов, настоящий москвич. Его отец был приват-доцентом Московского университета. В 1941 году он окончил мехмат Московского государственного университета по специальности “Функциональный анализ” и в том же году, призванный в Красную Армию, был направлен на учебу в Военно-воздушную академию им. Н.Е.Жуковского, где уже в 1942 году получил диплом инженера. Воевал на Волховском фронте старшим техником по обслуживанию самолетов. В 1948 – 1950 годах работал в МВТУ им. Баумана и одновременно в НИИ-2, затем в 1950 – 1955 годах в Ростовском-на-Дону университете, с 1956 года – в Московском физтехе. Сочетание университетского фундаментального и прикладного технического образования ему очень помогло. Он читал нам курс аэродинамики. Лекции проходили очень интересно. Сам он увлекался во время повествования, делал много описок на доске, но окончательный результат всегда был верным. Он часто, опаздывая на занятия, висел на подножках трамвая и вообще был большим демократом и своим парнем. На экзаменах он выходил из аудитории, спускался на первый этаж, на кафедру, давая возможность желающим воспользоваться шпаргалками. А для того, чтобы не застать студентов во время списывания, медленно поднимаясь по лестнице с первого этажа, громко разговаривал со своими спутниками, предупреждая об опасности своего появления. Меня он называл всегда “Зубом” и говорил мне: “Тебе надо было поступать учиться в МВТУ им. Баумана, у тебя отличное инженерное мышление”. В 1955 году, когда я учился в аспирантуре института механики АН СССР, он пригласил меня на защиту своей докторской диссертации в Стекловку. Защита

прошла блестяще. После он стал деканом аэродинамического факультета физтеха, затем организовал там факультет прикладной математики и управления. Его огромной заслугой является разработка и компьютерный расчет последствий одновременного взрыва нескольких водородных бомб. Он показал, что такой взрыв приведет к явлению, называемому теперь “ядерной зимой”, которая будет иметь роковые последствия для человечества.

Никита Николаевич был хорошим спортсменом. В Ростовском-на-Дону университете он организовал секцию альпинизма. В результате я также увлекся этим видом спорта: был несколько раз на Домбае в студенческом лагере “Алибек”, ходил с друзьями через Клухорский перевал в Сухуми и получил 3-й разряд по альпинизму. Узнав, что я лыжник-первоступник, Никита Николаевич хотел непременно посостязаться со мной. В школьные годы я в 1946 и 1947 годах был чемпионом Кировской области по лыжам и слалому, а в 1948 и 1949 годах – чемпионом Амурской железной дороги от Читы до Хабаровска. Такой случай представился зимой 1957 года, когда мы поехали на дачу к его родителям на станцию Сходня под Москвой. Это была увлекательная гонка. Победила дружба. Никита Николаевич часто приезжал в Тверь в “космический” НИИ-2. Когда ему сказали, что я работаю ректором политеха, воскликнул: “Хочу видеть Зуба!”. И он был моим гостем, ночевал у меня дома на ул. Коноплянниковой. Я показывал ему центральный корпус вуза, нашу кафедру и лабораторию. Он был очень интересным собеседником, всегда в движении, не терявший зря ни одной минуты.

Вот что я могу рассказать о моих первых учителях в науке – замечательных людях, талантливейших ученых и педагогах. Это от них я узнал, что любовь к науке должна сочетаться с педагогической деятельностью и любовью к своим ученикам. Узнал, что педагогика – это ты сам, твое сердце, твой разум и интеллект, твой личный пример, а не формальные учебники и скучные лекции по педагогике и организации научной работы, которыми теперь пичкают студентов и магистрантов.

Алексея Антоновича Ильюшина я впервые увидел в 1955 году на кафедре теории упругости МГУ на Моховой. В это время я уже работал инженером-исследователем в специальном конструкторском бюро Красногорского механического завода, где меня многое не устраивало, в том числе отсутствие постоянного жилья. Я попросил совета у Л.А.Толоконникова и приехал на встречу с ним на кафедру теории упругости, где он консультировался у Алексея Антоновича по своей докторской диссертации. Это была судьбоносная встреча.

Еще в Ростове-на-Дону я приобрел книгу А.А.Ильюшина “Пластичность” 1948 года издания. И уже тогда он в моих глазах был корифеем науки. По совету Л.А.Толоконникова я поступил в 1955 году в аспирантуру института механики АН СССР. Директором этого института был сам А.А.Ильюшин! Я с успехом выдержал конкурс в 10 человек на одно место при поступлении, набрав столько баллов, что стал вторым по счету в списке на зачисление. Это давало

право выбирать себе научного руководителя. И я выбрал – Алексея Антоновича Ильюшина.

На предварительной беседе в директорском кабинете в здании на Ленинградском проспекте у Белорусского вокзала он спросил меня: “Чем Вы хотите заниматься?” Я уже знал ответ на этот вопрос, поэтому сказал: “Пластической устойчивостью как Вы и Толоконников”. Тогда Алексей Антонович дал мне первое задание: “Посмотрите книгу Прагера и Ходжа “Теория идеально пластических тел”. Там в приложении есть обзор Прагера, где он что-то ворчит по поводу Шенли и пересмотру основных принципов теории пластической устойчивости”.

Шенли (США) в 1946 г. рассмотрел задачу о выпучивании центрально сжатого стержня в условиях непрерывного нагружения и обнаружил, что его выпучивание может начаться при касательно-модульной нагрузке, меньшей приведено-модульной нагрузки Кармана. Это нарушение единственности процесса деформирования при касательно-модульной нагрузке сам Шенли не связывал с потерей устойчивости, так как выпучивание происходило в условиях возрастания нагрузки и не приводило к катастрофическому развитию деформации. Неустойчивость наступала в предельной точке (точке бифуркации Пуанкере). Тем не менее, концепция Шенли дала повод к полемике по вопросу об истинном значении критической силы за пределом упругости. Так Дуберг и Уайлдер определили критическую силу как силу, при которой стержень начнет изгибаться. Любому инженеру или экспериментатору ясно, что определить этот момент практически для идеально прямого стержня невозможно, а при наличии начальных несовершенств этот момент совпадает с нулевым значением сжимающей нагрузки. Тем не менее, определение Дуберга дало повод Ю.Н.Работнову, Пфлюгеру, а затем В.Д.Клюшникову и Э.И.Григолюку трансформировать концепцию Шенли в “концепцию Дюберга, Работнова”, в которой касательно-модульная нагрузка принималась за критическую. А истина была проста: нарушение единственности истории деформирования и потеря устойчивости процесса деформирования могут не совпадать; единственность решения предполагает устойчивость, но утверждение о том, что устойчивость предполагает единственность решения может быть неверным. Неверная оценка концепции Шенли сторонниками касательного модуля сыграли с ними злую шутку.

С этого началась моя научная работа с великим ученым–механиком XX века Алексеем Антоновичем Ильюшиным и борьба с любителями касательно-модульного подхода в теории устойчивости брать в запас. Будучи директором института механики (1954 –1960 годы) Алексей Антонович был чрезвычайно загружен работой. Поэтому встречался я с ним нечасто. После успешной сдачи мною кандидатского минимума, состоявшего из 6 предметов (философии, английского языка, теории упругости, теории пластичности, уравнений математической физики и их приложения в механике, теории функций комплексного переменного и ее приложения в механике) состоялся наш разговор, во время



В. Г. Зубчанинов, А. А. Ильюшин

которого Алексей Антонович поставил передо мной задачу на год вперед: мы обсудили постановку новой проблемы устойчивости неупругих стержней, входящих в состав догружающих и разгружающих конструкций. Эта новая постановка задач устойчивости упругопластических конструкций учитывала взаимодействие их элементов при выпучивании. Выявилась особая роль вариаций усилий и перемещений узлов элементов, которая оказалась весьма существенной для оценки критического состояния конструкций и их элементов за пределом упругости. Но как это взаимодействие учесть – оставалось загадкой.

Следующая встреча состоялась после года моего упорного труда. Она происходила дома у Алексея Антоновича на Чистых прудах и длилась 12 часов – с 8 утра до 20 часов вечера. Это было поразительно! У меня сохранились конспекты этой уникальной консультации, исписанные вдоль и поперек листы. Однако проблема оставалась нерешённой. В заключение нашей встречи Алексей Антонович с огорчением сказал мне: “Я не знаю сейчас, как решить эту проблему. Давайте поменяем тему. Через три месяца Вы сделаете работу”. Он предложил мне решить задачу по устойчивости треугольной пластины по его классической теории. Но я настолько влез в уже предложенную проблему, что сразу отказался от новой темы и попросил дать мне подумать еще один месяц. Я чувствовал,

что решение проблемы где-то близко и оно уже в моей голове, на выходе. Решение как в сказке пришло ко мне во сне. Я жил тогда в общежитии аспирантов АН СССР на Академической улице. Посреди ночи я встал, сел за стол и начал работать. К утру проблема была решена, а диссертация завершена. Так бывает. После этого Алексей Антонович снова на Чистых прудах дал мне “добро” на оформление и защиту кандидатской диссертации. Оказалось, что пластически деформируемый стержень в конструкции имеет целый спектр критических состояний в зависимости от того – догружает или разгружает вариация нагрузки элемент конструкции. Это был прорыв в теории пластической устойчивости систем. Это была новая теория устойчивости стержней за пределом упругости, которая поставила точку в полувековом споре ученых об истинной критической нагрузке в задачах пластической устойчивости элементов конструкций. Работу я назвал “Устойчивость стержней как элементов конструкций за пределом упругости”. Она уместилась на 47 страницах. Это было в 1958 г, а соответствующая статья была опубликована в инженерном сборнике, том 27 за 1960 год.

На защите в Московском государственном университете в 1960 году работа была поддержана единогласно. По окончании защиты Дима Быков, аспирант А.А.Ильюшина, а ныне известный ученый, профессор, подошел ко мне и сказал: “Володя, все было ясно и понятно в твоём докладе. Но когда ты зачитал выводы, меня от неожиданности словно обухом по голове ударили”. Может быть, из-за этой неожиданности полученного фундаментального результата никто после моего доклада на защите не задавал вопросов. Один единственный вопрос поступил от легендарного профессора МГУ, генерала М.М.Филоненко-Бородича автора знаменитых учебников по сопротивлению материалов и теории упругости. Вместе с Алексеем Антоновичем мы открыли в теории устойчивости совершенно новое направление – устойчивость элементов конструкций догружающих и разгружающих систем, практическое значение которого не понято многими исследователями до сих пор. Эта теория открывает огромные возможности по снижению материалоемкости конструкций, по повышению их устойчивости и несущей способности с использованием управляемых процессов пластически допускаемого деформирования систем и предложенного мной метода упруго-пластической тренировки элементов конструкций с использованием временных поддерживающих систем. За этой теорией будущее в ракетостроении, в строительстве, машиностроении и других областях техники. Как это часто бывает, время, видимо, еще не пришло. А из числа тех, кто оценил это научное достижение одним из первых необходимо назвать имена великолепного историка механики члена-корреспондента АН СССР профессора Э.И.Григолюка и профессора А.С.Вольмира – крупного специалиста в области устойчивости, автора знаменитой монографии “Устойчивость деформируемых систем” (1967г.)

Э.И. Григолюк в 1972 г. в книге, посвящённой механике в СССР за 50 лет, отметил, что вывод о касательно-модульной и приведено-модульной нагрузках, ограничивающих интервал действительных критических усилий, был бы весьма

привлекателен. Однако, А.А. Ильюшин и В.Г. Зубчанинов (1960 г.) разработали теорию, в которой стержни в разгружающих конструкциях теряют устойчивость выше приведено-модульного значения. А.С. Вольмир (1967 г.) поддержал новую теорию в его книге, а В.Д. Клюшников в 1976 г. в обзорной статье сборника “Механика. Новое в зарубежной науке, №7” недальновидно отметил, что в рамках критерия о бифуркации процесса проблемы догружающих и разгружающих систем не существует. Это была грубая ошибка, которая похоронила критерий касательного модуля как концепцию бифуркационной неустойчивости.

Я продолжил свои исследования в области упругопластической устойчивости элементов конструкций и к 1972 году подготовил докторскую диссертацию. Результатом этой работы было второе мое детище – концепция устойчивости упругопластических систем, которая, благодаря поддержке академика К.С. Колесникова и упорному сопротивлению академика В.В. Болотина, вошла в энциклопедию РАН “Машиностроение”. Я уважал Владимира Васильевича Болотина за его прекрасную книгу “Неконсервативные задачи теории устойчивости”, но в теории пластической устойчивости он не смог мне ничего возразить и противопоставить. Я защитил докторскую диссертацию на тему “Вопросы устойчивости упругопластических систем” в Московском инженерно-строительном институте в 1972 году на совете, который возглавлял заведующий кафедрой сопротивления материалов этого института Иван Иванович Цурков – замечательный человек, талантливый ученый, ученик А.А. Ильюшина. После успешной защиты он сказал мне: “Ну теперь, Владимир Георгиевич, у тебя будет множество учеников, поскольку из твоей диссертации уже потекло много живительных ручейков”. Так оно и случилось. Это было началом возникновения тверской научной школы механиков-прочнистов и ее истоком. В следующем 1973 году я был избран заведующим кафедрой сопротивления материалов и остаюсь на этой работе до сих пор.

На защиту моей докторской диссертации Алексей Антонович приехал поддержать меня прямо с общего собрания АН СССР и выступил с положительной оценкой выполненной работы. Мне стало известно, что по поручению Ю.Н. Работнова на мою защиту должен был приехать В.Д. Клюшников. Однако, до открытого противостояния дело не дошло в силу слабой позиции сторонников концепции касательного модуля. По поводу моих исследований А.А. Ильюшин как-то в шутку сказал мне: “Ненавижу Зубчанинова! Он все перевернул в этой устойчивости!” Дело в том, что в основу своей концепции устойчивости наряду с исследованием процессов и ползучести я стал рассматривать начальные несовершенства конструкций как возмущающие факторы, а университетская классика этого не допускала. Инженерам это было понятно, экспериментаторам – понятно. А математикам и университетским механикам – нет. Алексей Антонович в конце концов это принял, поскольку обладал удивительным физическим чутьем. Когда я на диспутах и семинарах приводил свои знаменитые графики, иллюстрирующие мою концепцию устойчивости, то он

говорил: “Это твое и только тебе принадлежит”. Он был доволен, что теория течения в теории устойчивости крупно проиграла его теории.

В 1960 году А.А.Ильюшин оставил пост директора института механики и сосредоточился на научной и учебной работе в МГУ на кафедре “Теория упругости”, которой заведовал с 1942 года, сменив на этой должности А.С.Лейбензона, своего учителя. А.С.Лейбензон так охарактеризовал своего ученика: “Он (А.А.Ильюшин) представляет собой счастливое сочетание гениального теоретика, прекрасного конструктора и искусного экспериментатора, проникающего в самую суть исследуемых им технических проблем”. А.А.Ильюшин спас своего учителя, вытащив его из застенков сталинских лагерей.



В. Г. Зубчанинов, А. А. Ильюшин

А.А.Ильюшин окончил мехмат МГУ в 23 года, в 25 лет он защитил в МГУ кандидатскую диссертацию, а в 27 лет – докторскую, в 30 лет он – профессор, в 32 года – член-корреспондент АН СССР, в 36 лет – действительный член Российской академии ракетных и артиллерийских наук, в 37 лет – лауреат Сталинской премии 1-й степени за цикл работ по пластичности, с 29 лет – консультант наркомата боеприпасов, в 36 лет – заместитель директора ракетного НИИ-88 (ныне ЦНИИМАШ в г.Королеве Московской области), в 49 лет –

ректор Ленинградского университета, в 51 год – заместитель главного конструктора в Арзамасе-16. И еще следует отметить, что он некоторое время работал заместителем председателя Верховного Совета РСФСР. Алексей Антонович – это явление XX века, глыба в науке, это истинный ученый, инженер, человек.

Особо хочу подчеркнуть, что в 1935 году в МГУ А.А.Ильюшин для своих студентов, аспирантов и преподавателей не только создал лабораторию динамических испытаний вязкопластических свойств материалов, но и был ее заведующим. Пусть нынешние аспиранты подумают о роли эксперимента в научных исследованиях и обучении и не чуждаются работы в лаборатории. А А.А.Ильюшин писал о себе: “Я больше теоретик, хотя все годы занимался экспериментами”. Тоже самое я могу сказать про себя. Хочу, чтобы мои ученики сочетали в себе эти качества, так как без эксперимента в теории пластичности и вообще в механике деформируемого твердого тела делать нечего.

Классическая деформационная теория пластичности была создана А.А.Ильюшиным в 1941 году за два месяца. Она принесла ему мировую славу. В ноябре-декабре 1941 года, когда шли бои под Москвой, наши войска испытывали “снарядный голод” и вся артиллерия становилась бессильной. Дело было также в том, что в условиях войны половина всего производимого в стране черного металла расходовалась не на корпуса танков, самолетов и кораблей, а на артснаряды. Проектирование и расчеты снарядов в то время во всем мире велись методами теории упругости, а сам снаряд в стволе испытывал пластическое деформирование. А.А.Ильюшин с помощью созданной им деформационной теории пластичности разработал новую методику, нормы и технологию производства артснарядов. Их могли производить на заводах даже подростки. В 1942 году новые взгляды на выстрел были очень быстро приняты военными, промышленниками, министерством боеприпасов и стали законом для всех. “Снарядный голод” резко пошел на убыль и сменился даже изобилием. Это был огромный вклад А.А.Ильюшина в Победу нашего народа в Великой Отечественной войне, без этого вклада были бы невозможны военные операции типа Сталинградской битвы. Один умный генерал Н.Д.Иванов сказал Алексею Антоновичу в середине 1942 года: “Вы сами не представляете, что сделали для войны и Победы”.

Далее в 1947 году А.А.Ильюшина приглашают в организованный ракетный НИИ-88 в подмосковном Калининграде (ныне г.Королев) научным руководителем (заместителем начальника по науке). Заведующим конструкторским отделом был С.П.Королев, отделом прочности – А.В.Кармишин, отделом аэродинамики – Х.А.Рахматулин. Перед НИИ стоял один главный вопрос: как определить давление на самолеты и ракеты при больших сверхзвуковых скоростях полета? Алексей Антонович в 1947 году сформулировал и доказал закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей, сводящий пространственную задачу к плоской. Академики М.В.Келдыш, Л.И.Седов утверждали, что такого закона быть не может. Однако закон был принят в ракетном ЦАГИ

как ничему не противоречащий. На его основе была разработана теория панельного флаттера. Это было научное достижение колоссального практического и оборонного значения. Казалось бы, за все это Алексею Антоновичу следовало дать звание Героя Социалистического Труда. Но увы! Почему?! Алексей Антонович рассказывал мне, что закон плоских сечений пришел ему в голову ночью, когда он отдыхал у себя дома на Чистых прудах и смотрел на занавести и отражающиеся на них полосы огней проезжающих машин.

В 1952 году А.А.Ильюшина по приказу И.В.Сталина назначают в Арзамас-16 заместителем генерального конструктора Ю.Б.Харитона по разработке атомной и водородной бомб. Вместе с ним туда были направлены известные ученые академик М.А.Лаврентьев, организатор Сибирского отделения АН СССР, а также академик Н.Боголюбов. Они выполняли роль экспертов во всех решениях И.В.Курчатова, Зельдовича и Ю.Б.Харитона. Как вспоминал сам Алексей Антонович, своих экспертов “курчатовцы” невзлюбили и относились к ним враждебно.

А.А.Ильюшин сыграл решающую роль в создании водородной бомбы, поддержав идею А.Д.Сахарова в использовании термоядерного заряда. Однако награда его и здесь миновала. Неясно почему, история умалчивает на сей счет, хотя догадаться можно. Алексей Антонович неоднократно выдвигался в действительные члены АН СССР и РАН, но каждый раз некая группа академиков “проваливала” его при голосовании, они даже каким-то образом уговорили Л.И.Брежнева не подписывать указ о присвоении ему звания Героя Социалистического Труда, а наградить лишь орденом Октябрьской Революции. А.А.Ильюшина выдвигали в действительные члены Академии такие крупные таланты нашей науки, виднейшие ученые страны как академики Л.Лейбензон, С.Христианович, Н.Мусхелишвили, А.Некрасов, Б.Юрьев, М.Лаврентьев, Н.Боголюбов, А.Ишлинский, И.Артоболевский, А.Благонравов, Ю.Работнов и другие. И к их мнению не прислушались! Обидно за Отечество! И все же А.А.Ильюшин был гением, талантищем в науке, но подобно Д.И.Менделееву, он также совершенно несправедливо не стал действительным членом РАН. Обидно за Державу. Лично для меня он остается глыбой в науке, Человеком с большой буквы. Не каждую сотню лет такие люди рождаются на Земле. Академия наук в долгу перед этим великим ученым, научное наследие которого вошло в сокровищницу мировых достижений XX века. В музее МГУ он навечно занесен на доску почета.

У Алексея Антоновича была замечательная семья: жена Ольга Константиновна, дочь Елена, сын Алексей, внуки. Он любил свою семью. Из каждой своей командировки он всегда привозил для них какие-нибудь небольшие подарки. Жил он скромно, без излишеств. Я нечасто бывал у него дома на Чистых прудах, но всегда поражался его доброжелательности и гостеприимству. Таким был мой учитель Алексей Антонович Ильюшин, оказавший огромное влияние на мою деятельность в науке. Запомнились наши совместные поездки к нам в Тверь на Селигер, на конференции в Ташкент к Т.Рашидову и К.Бабамуратову, в Тбилиси, в Киев к Ю.Н.Шевченко, А.А.Лебедеву и Г.С.Писаренко, в Пермь к А.Поздееву, в Нижний Новгород к А.Г.Угодчикову, в Тулу к Л.А.Толоконникову. Однажды мы вместе отдыхали в Кисловодске. И всюду на прогулках нам удавалось обсудить с Алексеем Антоновичем наши общие проблемы в теории пластичности и устойчивости. И везде он это охотно делал. Он был щедрым и доброжелательным человеком.

Созданная им в МГУ кафедра “Теория упругости” имела уникальный по своему составу коллектив. В 60-е годы на кафедре работали такие известные ученые, профессора как В.С.Ленский, В.А.Ломакин, М.А.Колтунов, В.В.Москвитин, П.М.Огибалов, В.М.Панферов, М.Р.Короткина, доценты Б.П.Кишкин, И.В.Кеппен. В институте механики МГУ были созданы первые в стране лаборатории по пластичности материалов при сложном нагружении и по испытаниям полимерных материалов. Кафедра стала мне родной. Я часто по средам приезжал в Москву и посещал лекции Алексея Антоновича и известный всем механикам страны научный семинар на кафедре. Сам сделал на нем несколько докладов. Оценка заслушиваемых на семинаре докладов была очень важна тогда для каждого ученого-механика. Состав кафедры теперь другой и, к сожалению, подобных семинаров вселенского масштаба больше уже нет. Печально, но факт. Помню, как мы вместе с Б.Победрей докладывали свои докторские диссертации сначала на семинаре, а затем в кабинете у декана механики. Нас слушали А.А.Ильюшин и П.М.Огибалов. На доклад нам отвели всего по 10 минут каждому. Представьте, как нелегко было за это время, да еще только с мелом в руке у доски, рассказать о работе, над которой трудился много лет. Но мы справились и оба получили “добро” на защиту.

У Алексея Антоновича было много учеников. Он подготовил более 100 кандидатов и несколько десятков докторов наук. Среди них хочу отметить наиболее талантливых: Л.А.Толоконникова, А.С.Кравчука, Р.А.Васина, Д.Л.Быкова, В.И.Малого, Б.Е.Победрю, И.А.Кийко, Ю.Р.Лепика, И.И.Поспелова, В.П.Дегтярева и др. Я имею полное моральное право к этому перечню добавить и себя самого. На подаренной мне Алексеем Антоновичем монографии “Пластичность” можно прочитать написанные им слова: “Проф. В.Г.Зубчанинову. Здесь начала (1948 г.) нашей с Вами пластичности. 20.07.91. Ильюшин” Такая оценка дорогого стоит. Он признал меня своим учеником.

Алексей Антонович часто бывал в Твери, на нашей кафедре сопротивления материалов, теории упругости и пластичности. В 1977 году при первом посещении Твери он подарил мне книгу “Пластичность” (1963 год), на которой оставил надпись: “Для руководства к действию” результатом этого действия стали разработанные мной концепция устойчивости и общая теория устойчивости вязкоупругих систем при сложном нагружении, ряд частных теорий пластичности, обоснование соотношений его знаменитой гипотезы компланарности в теории пластических процессов, разработка автоматизированного испытательного комплекса СН-ЭВМ, работающего и сегодня на благо науки, построение общей теории определяющих соотношений теории процессов и др..

А.А.Ильюшин был председателем и сопредседателем всех проводившихся в Твери при его жизни научных симпозиумов по устойчивости и пластичности. Первый симпозиум состоялся в 1981 году. Я очень волновался, так как противников его проведения было достаточно, в т.ч. сторонников касательно-модульников во главе с В.Д.Клюшниковым и др. До этого было проведено несколько конференций по устойчивости в строительной механике академиком В.В.Болотиным. Алексей Антонович сказал тогда мне: “Что Вы так волнуетесь? Симпозиум по устойчивости уже вошел в историю!” После этого симпозиума наш Тверской государственный технический университет стал ведущим центром в стране в области упруго-пластической устойчивости конструкций и остается таковым по сей день. Более того, в решении одного из симпозиумов было записано, что лабораторная база кафедры – лучшая в России и в Тверском государственном техническом университете необходимо открыть подготовку специалистов-экспериментаторов. Это предложение внес великий экспериментатор российской механики 20 века профессор А.М.Жуков. Однако Минвуз и обком остались глухи к этому призыву, и Тверь упустила уникальную возможность стать научно-экспериментальным центром России мирового уровня. Хотя это возможно реализовать и сейчас. До сих пор ни один вуз страны не готовит механиков-экспериментаторов и строителей-экспериментаторов. А о прочности материалов нужно знать все в любой отрасли промышленности и строительства. Что касается конференций по устойчивости в строительной механике, то они более не проводились, а симпозиум по устойчивости проводился каждые пять лет в г.Твери.

А.А.Ильюшин – основоположник теории устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости (1946-48 годы). Благодаря разработанной А.А.Ильюшиным теории процессов пластического деформирования при сложном нагружении (1954 –1983 годы), мне удалось обобщить теорию устойчивости Ильюшина для процессов докритического и послекритического сложного нагружения и в результате, скажу без лишней скромности, я стал основоположником теории устойчивости тонкостенных элементов конструкций при сложном нагружении за пределом упругости. На этом научном направлении защитились почти все мои ученики, которые вместе со мной и составляют костяк тверской научной

школы в области механики деформируемого твердого тела. Роль моего учителя А.А.Ильюшина в становлении этой школы безусловно велика.

В последние десятилетия XX века значение региональных научных школ значительно возросло. Необходимо отметить такие крупные научные центры в Туле, Перми, Нижнем Новгороде, Чебоксарах, Казани, Ростове-на-Дону, Твери, Самаре, Воронеже. Москва постепенно передала им свое ведущее положение во многих областях механики. Видимо, это естественный процесс. Московский государственный университет существенно ослабил свои исследования в области пластичности и прочности. В РАН был ликвидирован научный Совет по проблемам прочности и пластичности, который бессменно возглавлял А.А.Ильюшин. Смею утверждать, что “ильюшинское” направление в теории пластичности с конца 80-х годов прошлого столетия сместилось в Тверь, в технический университет, а также в ряд других научных центров страны. В Твери продолжают интенсивно вестись фундаментальные теоретические и экспериментальные исследования в области теории процессов пластического деформирования материалов при сложном нагружении с учетом их ползучести, деформационной анизотропии, влияния изменений структуры и др. Построенную мною общую теорию определяющих соотношений в теории пластичности можно отнести к моему третьему самому крупному достижению мирового уровня в этой области познания. Такая самооценка достигнутого может показаться нескромной. Но мне уже 80, а признание и понимание научных достижений всегда, как известно, приходит с запозданием. И это естественно для тех, кто работая в науке, намного опережает свое время.

Пластичников высокого мирового уровня в стране осталось мало, а безответственности за судьбу инженерных сооружений, аппаратов и машин – много. Для подтверждения этого можно привести достаточное количество примеров. Для меня дорога высокая оценка моей научной деятельности выдающимся ученым-механиком современности академиком РАН Евгением Ивановичем Шемякиным и академиком Национальной академии наук и искусств Чувашии Ивлевым Дюис Даниловичем. Это замечательные люди, гордость нашей науки! Евгений Иванович – сибиряк. Одно время он был заместителем председателя Сибирского отделения АН СССР, а затем председателем ВАК. Он долгое время заведовал кафедрой волновой и газовой динамики МГУ, друг Алексея Антоновича Ильюшина. Ему он часто говорил: “Алексей Антонович! Займитесь горной механикой”. Евгений Иванович был моим большим другом. Это очень доброжелательный и отзывчивый человек, большой ученый с удивительным научным чутьем, физическим воображением и интуицией. И что надо подчеркнуть, он умел находить общий язык с молодежью, со своими учениками.

Дюис Данилович Ивлев уже в 29 лет был доктором наук. Это одаренный, талантливый ученый, умный человек. А на Руси издавна получается так, что умных людей не жалуют, им завидуют. Может быть, поэтому он махнул рукой на Москву и создал сильные научные школы в Самаре и Воронеже, Чебоксарах. Он крупнейший специалист в области теории пластических течений сплошных

сред. Его книга “Математическая теория пластичности”, написанная в соавторстве с академиком А.Ю.Ишлинским, уникальна.



В. Г. Зубчанинов, Д. Д. Ивлев

Для меня было большой честью, что ряд университетов приобрел мою книгу “Механика сплошных деформируемых сред”. Особенно приятна мне была просьба академика РАН Никиты Федоровича Морозова прислать ее для использования в Санкт-Петербургском государственном университете. Никита Федорович – очень приятный в общении, энергичный в делах и ясно мыслящий человек. Сейчас он достойно возглавляет научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела. В 2000 году он приезжал ко мне на 70-летний юбилей и впервые познакомился с Тверью и нашим университетом. Затем повторил такие поездки в 2005 и 2010 годах, удивительная стабильность.

В 2005 году в Твери состоялось совещание, которое можно сказать, имело историческое значение для нашей науки. На него собрались видные российские ученые: Е.И.Шемакин, В.Г.Зубчанинов, Д.Д.Ивлев, Р.А.Васин, В.Г.Баженов,

В.Г.Малинин, Н.М.Матченко, А.А.Маркин, Н.Л.Охлопков, И.Г.Горячева, словом пластичники. Были обсуждены насущные проблемы науки и сотрудничества ученых. Затем последовало совещание-семинар в Москве у профессора В.С.Бондаря. Таким образом, встречи и совместная работа ученых страны продолжаются. В 2007 году мы провели научный семинар ведущих ученых прочнистов-пластичников снова у нас в Твери, в ТГТУ. Приятно осознавать, что благодаря нашим исследованиям, Тверь стала одним из признанных научных центров России. Важная и очень нужная людям наука о прочности развивается, впереди – новые достижения на благо нашего Отечества.

В январе 2011 г. моему учителю исполнилось 100 лет со дня рождения. К этому событию я опубликовал в 2010 г. научную монографию “Механика процессов пластических сред” в издательстве “Физматлит” и посвятил памяти Алексея Антоновича Ильюшина. Это первая книга, которая посвящена теории процессов в 21 веке.

На симпозиуме в МГУ 20 января 2011 года во время своего пленарного доклада “Теория процессов, полная и неполная пластичность и постулат изотропии” я с удовольствием вручил эту книгу дочери Алексея Антоновича – Елене Алексеевне Ильюшиной – удивительной женщине, от которой сегодня мы узнали много нового о творческом наследии Алексея Антоновича Ильюшина.

Я благодарен своим родителям Георгию Владимировичу и Марии Петровне, подарившим мне жизнь, своим учителям, научившим меня творчески познавать жизнь в науке и во всех ее проявлениях.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубчанинов В. Г. Устойчивость стержней как элементов конструкций за пределом упругости // Инженерный сборник. М.: Изд-во Института механики АН СССР. Т. 27. С. 101–113.
- [2] Зубчанинов В. Г. Осесимметричная форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки за пределом упругости // Известия Академии наук СССР. ОТН. Механика и машиностроение. № 5. С. 131–132.
- [3] Зубчанинов В. Г. Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов // Прикладная механика. 1989. Т. 25, № 5. С. 3–12.
- [4] Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т. I. Устойчивость. Москва : Физматлит, 2007. 448 с.

- [5] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. Москва : Физматлит, 2010. 352 с.
- [6] Зубчанинов В. Г. Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии А. А. Ильюшина // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 1 (9). 38–60 с.
- [7] Зубчанинов В. Г. Об устойчивости, геометрической и физической нелинейности в механике деформируемого твердого тела // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. № 2, ч. 2. С. 112–116.
- [8] Зубчанинов В. Г. Развитие проблем нелинейной механики деформируемого твердого тела в трудах Тульской школы // Механика деформируемого твердого тела. Тула : ТулГУ, 1994. С. 15–26.
- [9] Зубчанинов В. Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А. А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29–46.
- [10] Толоконников Л. А. О влиянии сжимаемости материала на упругопластическую устойчивость пластин и оболочек // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1949. № 6. С. 71–78.
- [11] Толоконников Л. А. К вопросу об устойчивости круглых пластин, сжатых равномерно распределенным давлением по контуру // Ученые записки Ростовского-на-Дону гос. ун-та. 1953. Т. 18, № 3. С. 71–77.
- [12] Толоконников Л. А. Уравнения устойчивости пластин при упругопластическом деформировании // Ученые записки Ростовского-на-Дону гос. ун-та. 1953. Т. 18, № 3. С. 65–70.
- [13] Толоконников Л. А. Конечные симметричные деформации полосы // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18, № 5. С. 619–626.
- [14] Толоконников Л. А. Теория устойчивости пластинок при упругопластических деформациях // Ученые записки Ростовского-на-Дону гос. ун-та. 1955. Т. 32, № 4. С. 105–129.
- [15] Толоконников Л. А. Конечные деформации при чистом изгибе прямоугольной полосы // Инженерный сборник. 1955. Т. 12. С. 188–192.
- [16] Толоконников Л. А. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 3. С. 439–444.
- [17] Толоконников Л. А. Уравнения теории упругости в перемещениях // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, № 6. С. 815–822.
- [18] Толоконников Л. А. Критические давления на круглую пластинку // Известия АН СССР. ОТН. 1958. № 10. С. 22–26.
- [19] Толоконников Л. А. Плоская деформация несжимаемого материала // Доклады АН СССР. 1958. Т. 119, № 6. С. 58–63.
- [20] Толоконников Л. А. Основные соотношения квадратичной теории упругости // Ученые записки Ростовского-на-Дону гос. ун-та. 1959. Т. 66, № 7. С. 36–41.
- [21] Толоконников Л. А. Конечные плоские деформации несжимаемого материала // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 1. С. 68–71.
- [22] Толоконников Л. А. Варианты разномодельной теории упругости // Механика полимеров. 1969. № 2. С. 96–99.
- [23] Толоконников Л. А., Новожилов В. В., Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости // Механика в СССР за 50 лет, т. III. Москва : Наука, 1972. С. 71–78.
- [24] Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. Москва : Высшая школа, 1979. 318 с.
- [25] Ильюшин А. А. К вопросу о вязкопластическом течении материала // Тр. конф. по пластическим деформациям (1936). Москва : Изд-во АН СССР, 1938.
- [26] Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций // Прикладная математика и механика. 1943. Т. 7, № 4. С. 245–272.

- [27] Ильюшин А. А. Связь между теорией Сен-Венана-Леви-Мизеса и теорией малых упругопластических деформаций // Прикладная математика и механика. 1945. Т. 9, № 3. С. 207–218.
- [28] Ильюшин А. А. Пластичность. Упругопластические деформации. Москва : Гостехиздат, 1948. 376 с.
- [29] Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18, № 6. С. 641–666.
- [30] Ильюшин А. А. Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, № 3. С. 399–411.
- [31] Ильюшин А. А. О приращении пластической деформации на поверхности текучести // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, № 4. С. 603–666.
- [32] Ильюшин А. А. О постулате пластичности // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25, № 3. С. 504–507.
- [33] Ильюшин А. А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. Москва : Изд-во АН СССР, 1961. С. 3–29.
- [34] Ильюшин А. А. Еще о постулате изотропии // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 201–204.
- [35] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва : Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
- [36] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. Москва : МГУ, 1971. 247 с.
- [37] Ильюшин А. А., Ленский В. С. О соотношениях и методах современной теории пластичности // Успехи механики деформируемых сред. Москва : Наука, 1975. С. 240–255.
- [38] Ильюшин А. А., Зубчанинов В. Г. Пластичность и устойчивость // Механика деформированного твердого тела: сборник научных трудов / Под ред. Л. А. Толоконников. Тула : ТПИ, 1983. С. 8–21.
- [39] Ильюшин А. А. Труды, т. 2: Пластичность (1946–1966). Москва : Физматлит, 2004. 408 с.
- [40] Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Доклады АН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 546–549.
- [41] Ивлев Д. Д. Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 4. С. 709–714.
- [42] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва : Наука, 1966. 232 с.
- [43] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. Москва : Наука, 1971. 232 с.
- [44] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1: Теория идеальной пластичности. Москва : Физматлит, 2001. 446 с.
- [45] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 2: Общие вопросы. Москва : Физматлит, 2002. 448 с.

REFERENCES

- [1] Zubchaninov V. G. Stability of Rods as Structural Elements beyond the Elastic Limit // Engineering Collection. Moscow: Publishing House of the Institute of Mechanics of the USSR Academy of Sciences. Vol. 27. P. 101–113. (in Russian).
- [2] Zubchaninov V. G. Axisymmetric Mode of Loss of Stability of a Circular Cylindrical Shell beyond the Elastic Limit // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Solid Mechanics and Engineering. no. 5. P. 131–132. (in Russian).
- [3] Zubchaninov V. G. On the Constitutive Relations of the Theory of Elastoplastic Processes // Applied Mechanics. 1989. Vol. 25, no. 5. P. 3–12. (in Russian).
- [4] Zubchaninov V. G. Stability and Plasticity. Vol. I: Stability. Moscow : Fizmatlit, 2007. 448 p. (in Russian).

- [5] Zubchaninov V. G. Mechanics of Processes in Plastic Media. Moscow : Fizmatlit, 2010. 352 p. (in Russian).
- [6] Zubchaninov V. G. Process Theory, Complete and Incomplete Plasticity of Continua, and Ilyushin's Isotropy Postulate // Herald of Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakolev. Series "Limit State Mechanics". 2011. no. 1 (9). P. 38–60. (in Russian).
- [7] Zubchaninov V. G. On Stability, Geometric and Physical Nonlinearity in the Mechanics of Deformable Solids // Proceedings of Tula State University. Natural Sciences. 2013. no. 2, part 2. P. 112–116. (in Russian).
- [8] Zubchaninov V. G. Development of Nonlinear Solid Mechanics in the Works of the Tula School // Mechanics of Deformable Solids. Tula : Tula State University, 1994. P. 15–26. (in Russian).
- [9] Zubchaninov V. G. General Mathematical Theory of Plasticity and the Macroscopic Determinacy and Isotropy Postulates of A. A. Ilyushin // Moscow University Herald. Series 1: Mathematics. Mechanics. 2018. no. 5. P. 29–46. (in Russian).
- [10] Tolokonnikov L. A. On the Effect of Material Compressibility on Elastoplastic Stability of Plates and Shells // Moscow University Herald. Series: Mathematics, Mechanics, Astronomy. 1949. no. 6. P. 71–78. (in Russian).
- [11] Tolokonnikov L. A. On the Stability of Circular Plates under Uniformly Distributed Edge Pressure // Proceedings of Rostov-on-Don State University. 1953. Vol. 18, no. 3. P. 71–77. (in Russian).
- [12] Tolokonnikov L. A. Equations of Plate Stability under Elastoplastic Deformation // Proceedings of Rostov-on-Don State University. 1953. Vol. 18, no. 3. P. 65–70. (in Russian).
- [13] Tolokonnikov L. A. Finite Symmetric Deformations of a Strip // Applied Mathematics and Mechanics. 1954. Vol. 18, no. 5. P. 619–626. (in Russian).
- [14] Tolokonnikov L. A. Stability Theory of Plates under Elastoplastic Deformations // Proceedings of Rostov-on-Don State University. 1955. Vol. 32, no. 4. P. 105–129. (in Russian).
- [15] Tolokonnikov L. A. Finite Deformations in Pure Bending of a Rectangular Strip // Engineering Collection. 1955. Vol. 12. P. 188–192. (in Russian).
- [16] Tolokonnikov L. A. On the Relation between Stresses and Strains in Nonlinear Elasticity Theory // Applied Mathematics and Mechanics. 1956. Vol. 20, no. 3. P. 439–444. (in Russian).
- [17] Tolokonnikov L. A. Equations of Elasticity Theory in Displacements // Applied Mathematics and Mechanics. 1957. Vol. 21, no. 6. P. 815–822. (in Russian).
- [18] Tolokonnikov L. A. Critical Pressures on a Circular Plate // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Solid Mechanics. 1958. no. 10. P. 22–26. (in Russian).
- [19] Tolokonnikov L. A. Plane Deformation of an Incompressible Material // Doklady of the USSR Academy of Sciences. 1958. Vol. 119, no. 6. P. 58–63. (in Russian).
- [20] Tolokonnikov L. A. Fundamental Relations of the Quadratic Theory of Elasticity // Proceedings of Rostov-on-Don State University. 1959. Vol. 66, no. 7. P. 36–41. (in Russian).
- [21] Tolokonnikov L. A. Finite Plane Deformations of an Incompressible Material // Applied Mathematics and Mechanics. 1959. Vol. 23, no. 1. P. 68–71. (in Russian).
- [22] Tolokonnikov L. A. Variants of Multi-Model Elasticity Theory // Mechanics of Polymers. 1969. no. 2. P. 96–99. (in Russian).
- [23] Tolokonnikov L. A., Novozhilov V. V., Chernykh K. F. Nonlinear Theory of Elasticity // Mechanics in the USSR over 50 Years, Vol. III. Moscow : Nauka, 1972. P. 71–78. (in Russian).
- [24] Tolokonnikov L. A. Mechanics of Deformable Solids. Moscow : Vysshaya Shkola, 1979. 318 p. (in Russian).
- [25] Ilyushin A. A. On the Visco-Plastic Flow of Materials // Proceedings of the Conference on Plastic Deformations (1936). Moscow : Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1938. (in Russian).
- [26] Ilyushin A. A. Some Problems of the Theory of Plastic Deformations // Applied Mathematics and Mechanics. 1943. Vol. 7, no. 4. P. 245–272. (in Russian).

- [27] Ilyushin A. A. Relation between the Sen-Venan-Levi-Mises Theory and the Theory of Small Elastoplastic Deformations // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1945. Vol. 9, no. 3. P. 207–218. (in Russian).
- [28] Ilyushin A. A. *Plasticity: Elastoplastic Deformations*. Moscow : Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
- [29] Ilyushin A. A. On the Relation between Stresses and Small Strains in Continuum Mechanics // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1954. Vol. 18, no. 6. P. 641–666. (in Russian).
- [30] Ilyushin A. A. Issues of the General Theory of Plasticity // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1960. Vol. 24, no. 3. P. 399–411. (in Russian).
- [31] Ilyushin A. A. On the Increment of Plastic Strain at the Yield Surface // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1960. Vol. 24, no. 4. P. 603–666. (in Russian).
- [32] Ilyushin A. A. On the Plasticity Postulate // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1961. Vol. 25, no. 3. P. 504–507. (in Russian).
- [33] Ilyushin A. A. *Foundations of the General Mathematical Theory of Plasticity // Problems of Plasticity Theory*. Moscow : Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1961. P. 3–29. (in Russian).
- [34] Ilyushin A. A. More on the Isotropy Postulate // *Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Solid Mechanics and Engineering*. 1962. no. 1. P. 201–204. (in Russian).
- [35] Ilyushin A. A. *Plasticity: Fundamentals of the General Mathematical Theory*. Moscow : Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1963. 272 p. (in Russian).
- [36] Ilyushin A. A. *Continuum Mechanics*. Moscow : Moscow State University Press, 1971. 247 p. (in Russian).
- [37] Ilyushin A. A., Lensky V. S. Relations and Methods of Modern Plasticity Theory // *Advances in the Mechanics of Deformable Media*. Moscow : Nauka, 1975. P. 240–255. (in Russian).
- [38] Ilyushin A. A., Zubchaninov V. G. *Plasticity and Stability // Mechanics of Deformed Solids: Collected Papers / Ed. by L. A. Tolokonnikov*. Tula : TPI, 1983. P. 8–21. (in Russian).
- [39] Ilyushin A. A. *Works, Vol. 2: Plasticity (1946–1966)*. Moscow : Fizmatlit, 2004. 408 p. (in Russian).
- [40] Ivlev D. D. On Relations Determining Plastic Flow under Tresca's Yield Condition and Its Generalizations // *Doklady of the USSR Academy of Sciences*. 1959. Vol. 124, no. 6. P. 546–549. (in Russian).
- [41] Ivlev D. D. On Perfectly Plastic Flow of Materials with Residual Microstresses // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1962. Vol. 26, no. 4. P. 709–714. (in Russian).
- [42] Ivlev D. D. *Theory of Ideal Plasticity*. Moscow : Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).
- [43] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. *Theory of Strain-Hardening Plastic Solids*. Moscow : Nauka, 1971. 232 p. (in Russian).
- [44] Ivlev D. D. *Mechanics of Plastic Media. Vol. 1: Theory of Ideal Plasticity*. Moscow : Fizmatlit, 2001. 446 p. (in Russian).
- [45] Ivlev D. D. *Mechanics of Plastic Media. Vol. 2: General Issues*. Moscow : Fizmatlit, 2002. 448 p. (in Russian).

В. С. Бондарь

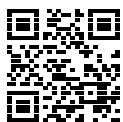
ПОСТРОЕНИЕ ВАРИАНТА ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ УПРОЧНЕНИИ

Московский политехнический университет, Москва, Россия

Аннотация. На основе уравнений теории пластического течения при комбинированном упрочнении получен прикладной вариант теории упругопластических процессов. Приводится базовый эксперимент, на котором проводится идентификация параметров аппроксимации функционалов пластичности. Верификация прикладного варианта теории упругопластических процессов проводится при сложном нагружении с разгрузкой и обратном нагружении по многозвенной траектории деформаций в виде треугольника. Сравнение результатов расчета и эксперимента дается на ответной траектории напряжений, на скалярных и векторных свойствах.

Ключевые слова: теория пластичности, комбинированное упрочнение, теория упругопластических процессов, базовый эксперимент, идентификация, верификация.

Бондарь Валентин Степанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической механики и компьютерного моделирования; e-mail: tm@mospolytech.ru; <https://orcid.org/0000-0001-6303-4396>



для цитирования: Бондарь В. С. Построение варианта теории упругопластических процессов на основе теории течения при комбинированном упрочнении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 81–91. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.003. EDN: QNQKVT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. S. Bondar

CONSTRUCTION OF A VARIANT OF THE THEORY OF ELASTOPLASTIC PROCESSES BASED ON THE THEORY OF FLOW IN COMBINED HARDENING

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia

Abstract. Based on the equations of the theory of plastic flow in combined hardening, an applied version of the theory of elastoplastic processes is obtained. A basic experiment is given, in which the identification of the parameters of the approximation of the plasticity functionals is carried out. Verification of the applied version of the theory of elastoplastic processes is carried out under complex loading with unloading and reverse loading along a multi-link deformation trajectory in the form of a triangle. Comparison of the calculation and experimental results is given on the response stress trajectory, on scalar and vector properties.

Keywords: theory of plasticity, combined hardening, theory of elastoplastic processes, basic experiment, identification, verification.

Bondar Valentin Stepanovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Technical Mechanics and Computer Modeling; **e-mail:** tm@mospolytech.ru; **https://orcid.org/0000-0001-6303-4396**



to cite this article: Bondar V.S. Construction of a Variant of the Theory of Elastoplastic Processes Based on the Theory of Flow in Combined Hardening // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 81–91. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.003

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Построение математических моделей в теории пластичности является до настоящего времени весьма актуальной проблемой. Наибольшее распространение в практических расчетах нашли дифференциальные теории: варианты теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А. А. Ильюшина [1, 2] и теории пластического течения при комбинированном упрочнении, базирующиеся на концентрации микронапряжений, предложенной В. В. Новожиловым [3].

Существенный вклад в развитие теории упругопластических процессов и в изучение процессов сложного нагружения на основе экспериментальных исследований ряда конструкционных материалов при нагружениях по широкому спектру плоских и пространственных траекторий деформаций принадлежит Тверской школе механиков под руководством В. Г. Зубчанинова.

Из теорий пластического течения одной из достаточно экспериментально обоснованных на широком спектре конструкционных материалов и программ сложного нагружения является теория пластичности [4–6].

В настоящей работе рассматривается построение прикладного варианта теории упругопластических процессов и функционалов пластичности на основе уравнений теории пластичности при комбинированном упрочнении. Формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных параметров, на которых построена аппроксимация функционалов пластичности.

Верификация прикладного варианта теории упругопластических процессов проводится на экспериментальных исследованиях [7] процесса сложного нагружения и сложной разгрузки стали 45 на плоской многозвенной траектории деформаций в виде треугольника с углами излома траектории деформаций равными 135, 135 и 90°. Сравнения результатов расчета и эксперимента приводится на ответной траектории напряжений, на скалярных и векторных свойствах.

1. Векторные представления напряженно-деформированного состояния. Для изучения процессов нагружения согласно векторному представлению А. А. Ильюшина [1, 2] компоненты вектора напряжений \bar{S} определяются следующим образом:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s_{11} \\ \sqrt{3}\left(s_{22} + \frac{s_{11}}{2}\right) \\ \sqrt{3}s_{12} \\ \sqrt{3}s_{13} \\ \sqrt{3}s_{23} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_o, \quad \sigma_o = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad S = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \sigma_u. \quad (2)$$

Здесь σ_{ij} и s_{ij} – тензор и девиатор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; σ_o – среднее напряжение; σ_u – интенсивность напряжений.

При нагружении тонкостенного трубчатого образца в случае одноосного растяжения (сжатия) вектор напряжений имеет следующий вид:

$$\bar{S} = [\sigma_{11} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (3)$$

в случае кручения

$$\bar{S} = [0 \ 0 \ \sqrt{3}\sigma_{12} \ 0 \ 0]^T, \quad (4)$$

в случае обобщенного плоского состояния

$$\bar{S} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \\ \sqrt{3}\sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Компоненты вектора деформаций $\bar{\Theta}$ определяются следующим образом:

$$\bar{\Theta} = \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \\ \Theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(e_{22} + \frac{e_{11}}{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}e_{12} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}e_{23} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}e_{31} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_o, \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}, \quad \Theta = \sqrt{\frac{2}{3}}e_{ij}e_{ij} = \varepsilon_u. \quad (7)$$

Здесь ε_{ij} – тензор деформаций; e_{ij} – девиатор деформаций; ε_o – средняя деформация; ε_u – интенсивность деформаций.

Длина дуги траектории деформации (накопленная деформация) определяется выражением:

$$s = \int \left(\frac{2}{3} de_{ij} de_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

В случае одноосного растяжения (сжатия) тонкостенного трубчатого образца компоненты вектора деформаций имеют вид:

$$\bar{\Theta} = [\frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (9)$$

в случае кручения

$$\bar{\Theta} = [0 \ 0 \ \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{12} \ 0 \ 0]^T, \quad (10)$$

в случае обобщенного плоского состояния

$$\bar{\Theta} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Угол между вектором напряжений и касательной к траектории деформаций характеризует векторные свойства и этот угол называется углом сближения ϑ .

$$\vartheta = \arccos \frac{\bar{S} \cdot d\bar{\Theta}}{S \cdot d\bar{\Theta}}. \quad (12)$$

Изменение интенсивности напряжений по траектории деформаций характеризует скалярные свойства.

2. Векторное представление уравнений теории пластического течения. Уравнения теории пластического течения при комбинированном упрочнении в векторном виде представляются следующим образом. Приращение полной деформации $d\bar{\Theta}$ равно сумме приращений упругой $d\bar{\Theta}^e$ и пластической $d\bar{\Theta}^p$ деформаций

$$d\bar{\Theta} = d\bar{\Theta}^e + d\bar{\Theta}^p. \quad (13)$$

Приращение упругой деформации определяется из закона Гука, а приращение пластической деформации – из градиентального закона.

$$d\bar{\Theta}^e = \frac{d\bar{S}}{3G}, \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{\Theta}^p}{ds^p} = \frac{1}{C_p(s^p)} (\bar{S} - \bar{A}). \quad (15)$$

Здесь $C_p(s^p)$ – радиус поверхности нагружения; вектор \bar{A} – смещение поверхности нагружения; s^p – длина дуги траектории пластической деформации; G – упругий модуль.

Для поверхности нагружения принимается следующее уравнение:

$$|\bar{S} - \bar{A}| = C_p(s^p). \quad (16)$$

Эволюционное уравнение для смещения центра поверхности нагружения имеет следующий вид:

$$d\bar{A} = g d\bar{\Theta}^p + (g_{\Theta} \bar{\Theta}^p + g_A \bar{A}) ds^p, \quad (17)$$

где g, g_{Θ}, g_A – определяющие функции, выражающиеся через материальные и определяемые из базового эксперимента.

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_{\Theta} = \beta E_a, \quad g_A = -\beta. \quad (18)$$

Если продифференцировать уравнение (15) по s и использовать (13)–(17), то можно получить уравнение

$$N_2 \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} + N_1 \frac{d\bar{S}}{ds} + N_0 \bar{S} = D_0 \bar{\Theta} + D_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + D_2 \frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2}. \quad (19)$$

Здесь

$$N_0 = \frac{M_4}{3G} - M_2, \quad N_1 = \left(1 + \frac{M_1}{3G}\right) \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-1} - \frac{M_3}{3G} \frac{d^2 s^p}{ds^2} \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-3}, \quad (20)$$

$$N_2 = \frac{M_3}{3G} \left(\frac{ds^p}{ds}\right)^{-2},$$

$$D_0 = M_4, \quad D_1 = M_1 \left(\frac{ds^p}{ds} \right)^{-1} - M_3 \frac{d^2 s^p}{ds^2} \left(\frac{ds^p}{ds} \right)^{-3}, \quad D_2 = M_3 \left(\frac{ds^p}{ds} \right)^{-2}, \quad (21)$$

$$M_1 = g - g_A C_p(s^p) + \frac{dC_p(s^p)}{ds^p}, \quad M_2 = g_A, \quad M_3 = C_p(s^p), \quad M_4 = g\Theta. \quad (22)$$

На основе общей теории пластичности А. А. Ильюшина [1, 2] вектора деформаций, напряжений и производных напряжений представляются в репере Френе $\{\bar{p}_i\}$ в следующем виде:

$$\bar{\Theta} = D_i \bar{p}_i, \quad \bar{S} = P_i \bar{p}_i, \quad \frac{d\bar{S}}{ds} = P_i^* \bar{p}_i, \quad \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} = P_i^{**} \bar{p}_i, \quad (23)$$

или репере $\{d^i \bar{\Theta}/ds^i\}$:

$$\bar{\Theta} = G_i \frac{d^i \bar{\Theta}}{ds^i}, \quad \bar{S} = Q_i \frac{d^i \bar{\Theta}}{ds^i}, \quad \frac{d\bar{S}}{ds} = Q_i^* \frac{d^i \bar{\Theta}}{ds^i}, \quad \frac{d^2 \bar{S}}{ds^2} = Q_i^{**} \frac{d^i \bar{\Theta}}{ds^i} \quad (24)$$

Из последних трех уравнений (24) можно получить уравнения для производных третьего, четвертого и пятого порядков для деформаций, далее подставить в (23) и тогда получится уравнение, аналогичное уравнению (19). Откуда следует, что теория пластического течения при комбинированном упрочнении является вариантом общей теории пластичности А. А. Ильюшина.

3. Прикладной вариант теории упругопластических процессов.

При активном упругопластическом деформировании с учетом величин материальных параметров сталей и сплавов [4–6] принимаются следующие допущения:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} &\approx \bar{\Theta}^p, \quad s \approx s^p, \\ \frac{ds^p}{ds} &\approx 1, \quad \frac{d^2 s^p}{ds^2} \approx 0, \\ \frac{M_4}{2G M_2} &\ll 1, \quad \frac{M_1}{2G} \ll 1, \quad \frac{M_3}{2G} \ll 1 \\ \left| D_2 \frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2} \right| &\ll \left| D_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + D_0 \bar{\Theta} - N_0 \bar{S} \right|. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда уравнение (19) будет иметь вид:

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + N_S \bar{S} + N_\Theta \bar{\Theta}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} N &= g - g_A C_p(s) + \frac{dC_p(s)}{ds}, \\ N_S &= g_A, \quad N_\Theta = g\Theta, \end{aligned} \quad (27)$$

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_A = -\beta, \quad g\Theta = \beta E_a.$$

Уравнение (26) можно получить на основе уравнения А. А. Ильюшина [1, 2]

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + N_S \bar{S} + X_S \bar{x} \quad (28)$$

при $\bar{x} = \bar{\Theta}$.

Уравнение (26) в работе В. Г. Зубчанинова [8] определяется как "нелокальная форма" теории процессов.

В случае разгрузки и учета эффекта Баушингера для вектора смещения \bar{A} вводится следующее уравнение:

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = g \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + g_{\Theta} \bar{\Theta} + g_A \bar{A} \quad (29)$$

Тогда условия упругого и пластического состояний примут следующий вид:

$$\begin{aligned} |\bar{S} - \bar{A}| < C_p(s) \cup (\bar{S} - \bar{A}) \cdot d\bar{\Theta} \leq 0 & - \text{упругость,} \\ |\bar{S} - \bar{A}| = C_p(s) \cap (\bar{S} - \bar{A}) \cdot d\bar{\Theta} > 0 & - \text{пластичность.} \end{aligned} \quad (30)$$

И окончательно в случае упругости

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = 3G \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \frac{d\bar{A}}{ds} = 0, \quad (31)$$

а в случае пластичности имеют место уравнения (26) и (29).

4. Материальные функции, базовый эксперимент, метод идентификации. Для полученного варианта теории упругопластических процессов необходимо определить следующие материальные параметры G , $C_p(s)$, E_a , β , σ_a на основе следующих результатов экспериментов при одноосном нагружении образцов осевой силой:

- диаграмма растяжения;
- диаграмма растяжения после предварительного сжатия.

В работах [4–6] приведен метод определения материальных параметров на основе этих экспериментов.

Следует отметить, что диаграмму растяжения после предварительного сжатия можно построить, используя принцип Мазинга.

Далее в таблицах 1,2 приведены материальные параметры стали 45.

G , МПа	E_a , МПа	β	σ_a , МПа
80700	6770	265	160

Таблица 1.

s	0	0,0013	0,008	0,018	0,027	0,047	0,21
C_p , МПа	350	330	280	286	296	305	325

Таблица 2.

5. Верификация прикладного варианта теории упругопластических процессов. В качестве верификации прикладного варианта используются результаты экспериментальных исследований стали 45 по плоской траектории деформаций в виде треугольника (рис. 1), рассмотренные в работах В. Г. Зубчанинова [7, 8]. Углы излома траектории составляют 135, 135 и 90°. На рис. 2, 3 и 4 представлены расчетные (сплошные кривые) и экспериментальные (светлые кружки) траектории напряжений, векторные и скалярные свойства.

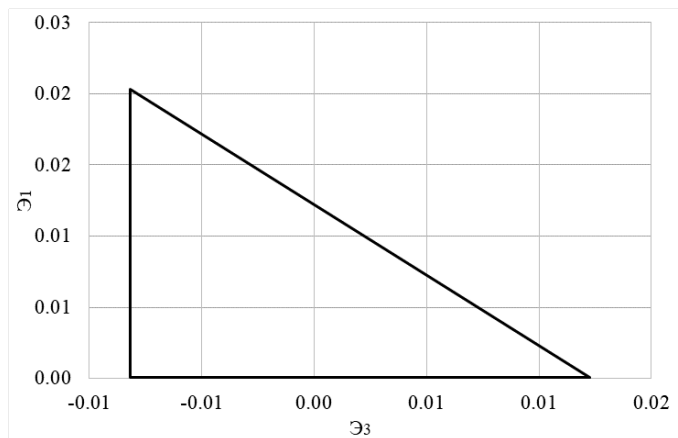


Рис. 1. Траектория деформаций в виде треугольника

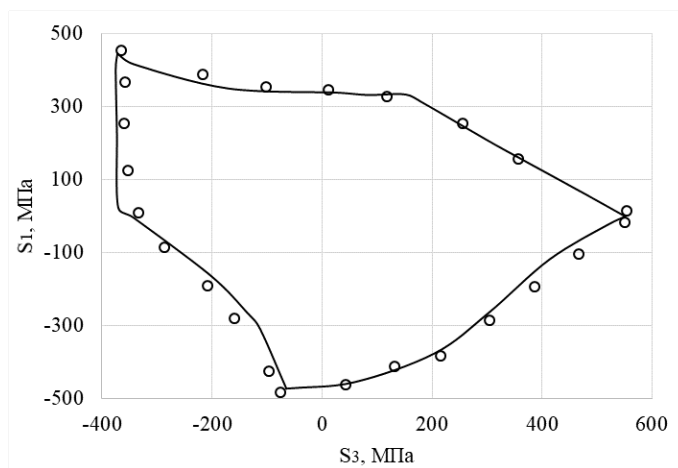


Рис. 2. Траектория напряжений

После первого излома траектории деформаций на 135° на траектории напряжений наблюдается двухкомпонентный линейный упругий участок разгрузки,

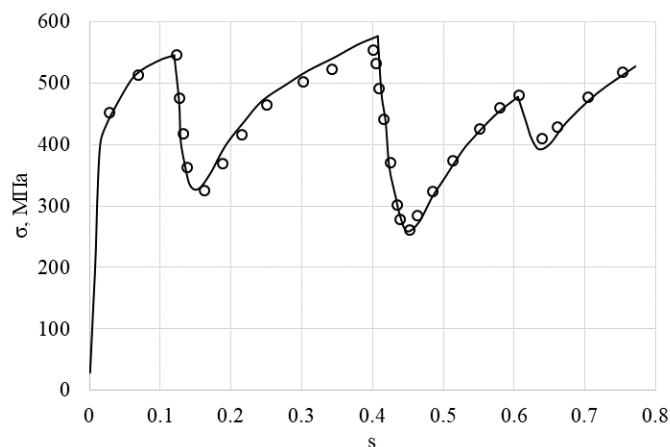


Рис. 3. Скалярные свойства

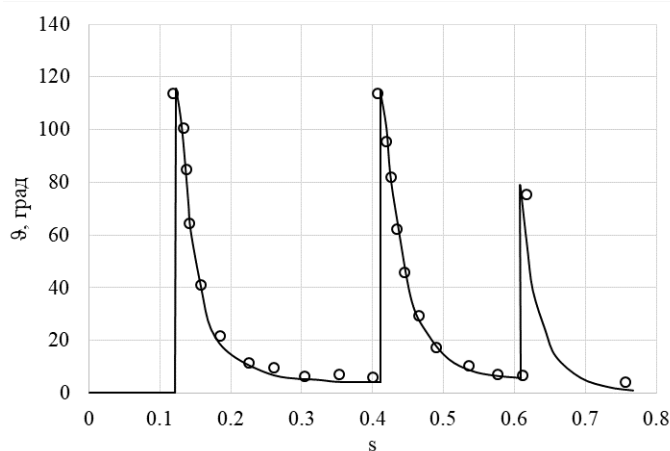


Рис. 4. Векторные свойства

а затем нелинейный пластический. После второго излома траектории деформации на 135° на траектории напряжений наблюдается однокомпонентный линейный упругий участок разгрузки, где изменяется только компонента вектора напряжений S_1 . Далее на нелинейном пластическом участке изменяются уже две компоненты вектора напряжений, хотя на этом участке продолжает изменяться только одна компонента вектора деформаций \mathcal{E}_1 . После третьего излома траектории деформаций на 90° наблюдается двухкомпонентный нелинейный пластический участок, хотя на этом участке изменяется только одна компонента вектора деформаций \mathcal{E}_3 .

На рис. 3, где представлены скалярные свойства, имеют место три нырка на диаграмме деформирования. Следует отметить, что первый и второй нырки имеют существенно разную глубину, хотя они отвечают одинаковым углам излома в 135° . Глубина третьего нырка существенно меньше, т.к. и излом траектории деформации здесь значительно меньше – всего 90° .

На рис. 4, где представлены векторные свойства, наблюдается исчерпание отклонения вектора напряжений от касаний к траектории деформаций в конце каждого звена траектории деформаций, т.е. каждый излом траектории деформаций осуществляется из состояния, когда вектор напряжений практически лежит на траектории деформаций.

Окончательно следует отметить, что отличие расчётных и экспериментальных результатов удовлетворительное и составляет не более 10%. Таким образом, вариант теории упругопластических процессов может быть использован для практических исследований процессов сложного нагружения.

Заключение. Получены уравнения теории упругопластических процессов и определены функционалы пластичности, входящие в вариант теории. Аппроксимации функционалов пластичности могут быть определены на основе экспериментальной диаграммы деформирования материала при одноосном растяжении. Рассмотрены расчетно-экспериментальные исследования процесса сложного нагружения по плоской траектории деформаций в виде треугольника, на которой имеет место сложная разгрузка. Отличие расчетных и экспериментальных результатов не превышает 10%, что говорит о возможности использования варианта теории для практических исследований процессов сложного нагружения.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100 %.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100 %.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва : Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
- [2] Ильющин А. А. Механика сплошной среды. Москва : Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
- [3] Новожилов В. В., Кадашев Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Ленинград : Машиностроение, 1990. 224 с.
- [4] Бондарь В. С., Даншин В. В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. Москва : Физматлит, 2008. 176 с.
- [5] Бондарь В. С. Неупругость. Варианты теории. Москва : Физматлит, 2004. 144 с.

- [6] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York : Begell House, 2013. 194 p.
- [7] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. Москва : Физматлит, 2010. 352 с.
- [8] Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л., Гараников В. В. Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования. Тверь : ТГТУ, 2003. 172 с.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity: Foundations of the General Mathematical Theory. Moscow : Academy of Sciences Press, 1963. 271 p. (in Russian).
- [2] Ilyushin A. A. Mechanics of Continuous Media. Moscow : Moscow State University Press, 1990. 310 p. (in Russian).
- [3] Novozhilov V. V., Kadashevich Y. I. Microstresses in Structural Materials. Leningrad : Mashinostroenie, 1990. 224 p. (in Russian).
- [4] Bondar V. S., Danshin V. V. Plasticity: Proportional and Non-Proportional Loadings. Moscow : Fizmatlit, 2008. 176 p. (in Russian).
- [5] Bondar V. S. Inelasticity: Variants of the Theory. Moscow : Fizmatlit, 2004. 144 p. (in Russian).
- [6] Bondar V. S. Inelasticity: Variants of the Theory. New York : Begell House, 2013. 194 p.
- [7] Zubchaninov V. G. Mechanics of Plastic Media Processes. Moscow : Fizmatlit, 2010. 352 p. (in Russian).
- [8] Zubchaninov V. G., Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity, Vol. 1: Complex Deformation Processes. Tver : TSTU Press, 2003. 172 p. (in Russian).

В. В. Глаголев¹, Л. В. Глаголев¹, И. М. Лавит¹, А. И. Лутхов¹, А. А. Маркин¹

О НАХОЖДЕНИИ АДДИТИВНЫХ СЛАГАЕМЫХ J-ИНТЕГРАЛА НА ПРИМЕРЕ СОЕДИНЕНИЯ ВНАХЛЕСТ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ АДГЕЗИОННЫМ СЛОЕМ

Тульский государственный университет, Тула, Россия

Аннотация. На примере деформирования упругопластического адгезионного слоя, связывающего упругие несущие тела, рассмотрен подход к представлению значения J-интеграла в виде аддитивных слагаемых, отвечающих за наличие напряжений на торцевой поверхности адгезионного слоя, обратимую и необратимую части. Рассмотрены аналитическое решение и решение методом конечных элементов с квадратичным законом распределение поля перемещений на конечном элементе задач нагружения исследуемых образцов, реализующих смешанную моду нагружения I+II адгезионного слоя при соединении несущих тел внахлест. Задачи рассматриваются в состоянии плоской деформации. Выявлено, что решения задач нагружения приводят к наличию векторов напряжений на торцевой поверхности адгезионного слоя, которая сопрягается со свободной поверхностью. Продемонстрировано хорошее согласование рассматриваемых решений по средним касательным напряжениям и диагональным напряжениям в упругой области и средним касательным в упругопластической области адгезионного слоя. При численном решении задач смешанного нагружения по моде I+II определены составляющие I и II моды нагружения J-интеграла, а также его обратимые и необратимые составляющие. Для относительно тонкого адгезионного слоя без упрочнения показано влияние предела текучести на диссипативное слагаемое. Показано, что уменьшение толщины адгезионного слоя приводит к росту всех средних напряжений для упругой модели и средних диагональных компонент тензора для упругопластического поведения адгезионного слоя при росте длины зоны необратимых деформаций. В случае слоя нулевой толщины, когда значение J-интеграла определяет сингулярное распределение поля напряжений, показана близость частных решений задач с упругопластическим поведением тонкого адгезионного слоя.

Ключевые слова: адгезионный слой, метод конечных элементов, J-интеграл, Ansys.

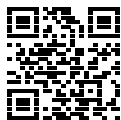
Глаголев Вадим Вадимович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики и математики; e-mail: vadim@tsu.tula.ru; <https://orcid.org/0000-0003-0371-7704>; AuthorID: 16756

Глаголев Леонид Вадимович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник управления научно-исследовательских работ; e-mail: len4ic92@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-2313-2084>; AuthorID: 662387

Лавит Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной механики и математики; e-mail: IgorLavit@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8683-5943>; AuthorID: 6507255755

Лутхов Андрей Игоревич, аспирант кафедры вычислительной механики и математики;
e-mail: tip460@mail.ru; <https://orcid.org/0009-0009-6196-0076>; AuthorID: 1278930

Маркин Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор,
профессор-консультант кафедры вычислительной механики и математики;
e-mail: markin-nikram@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0003-1456-8281>;
AuthorID: 4335



для цитирования: Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Лавит И.М., Лутхов А.И., Маркин А.А. О нахождении аддитивных слагаемых J-интеграла на примере соединения внахлест упругопластическим адгезионным слоем // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 92–110. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.004. EDN: SCEGGP

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

V. V. Glagolev, L. V. Glagolev, I. M. Lavit, A. I. Lutkhov, A. A. Markin

ON FINDING ADDITIVE SUMMANDS OF J-INTEGRAL ON THE EXAMPLE OF OVERLAP JOINT BY ELASTOPLASTIC ADHESIVE LAYER

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. On the example of deformation of elastic-plastic adhesive layer binding elastic bearing bodies, the approach to representation of the J-integral value in the form of additive summands responsible for the presence of stresses on the end surface of the adhesive layer, reversible and irreversible parts is considered. Analytical solution and solution by the finite element method with quadratic law of displacement field distribution on the finite element of loading problems of the investigated specimens realizing mixed loading mode I+II of the adhesive layer at overlapping connection of bearing bodies are considered. The problems are considered in the state of plane deformation. It is revealed that the solutions of loading problems lead to the presence of stress vectors on the end surface of the adhesive layer, which is contiguous with the free surface. A good agreement of the considered solutions for average tangential stresses and diagonal stresses in the elastic region and average tangential stresses in the elastic-plastic region of the adhesive layer is demonstrated. At numerical solution of mixed loading problems by mode I+II, the components of I and II loading modes of the J-integral, as well as its reversible and irreversible components, are determined. For a relatively thin adhesive layer without hardening, the effect of yield strength on the dissipative summand is shown. It is shown that a decrease in the thickness of the adhesive layer leads to an increase in all average stresses for the elastic model and average diagonal components of the tensor for the elastic-plastic behavior of the adhesive layer as the length of the irreversible deformation zone increases. In the case of a layer of zero thickness, when the value of the J-integral determines the singular distribution of the stress field, the proximity of partial solutions of problems with elastoplastic behavior of a thin adhesive layer is shown.

Keywords: adhesive layer, finite element method, J-integral, Ansys.

Vadim V. Glagolev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;
e-mail: vadim@tsu.tula.ru;

<https://orcid.org/0000-0003-0371-7704>; AuthorID: 16756

Leonid V. Glagolev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher;
e-mail: len4ic92@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-2313-2084>; AuthorID: 662387

Igor M. Lavit, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;
e-mail: IgorLavit@yandex.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-8683-5943>; AuthorID: 6507255755

Andrey I. Lutkhov, Postgraduate; e-mail: tip460@mail.ru;

<https://orcid.org/0009-0009-6196-0076>; AuthorID: 1278930

Alexey A. Markin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; e-mail: markin-nikram@yandex.ru;

<https://orcid.org/0000-0003-1456-8281>; AuthorID: 4335



to cite this article: Glagolev V. V., Glagolev L. V., Lavit I. M., Lutkhov A. I., Markin A. A. ON FINDING ADDITIVE SUMMANDS OF J-INTEGRAL ON THE EXAMPLE OF OVERLAP JOINT BY ELASTOPLASTIC ADHESIVE LAYER // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 92–110. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.004

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Квазистатическое продвижение трещины в упругой среде связывает удельную (к единице образуемой поверхности) энергию с J -интегралом [1,2]. Наличие упругопластических свойств среды приводит к появлению в представлении J -интеграла слагаемого, связанного с диссипацией энергии [3, 4]. В линейно упругой среде для модели трещины в виде математического разреза J -интеграл определяется коэффициентом интенсивности напряжений [5–10]. Для предельного состояния трещины, согласно концепции квазихрупкого разрушения, реальные механические свойства поврежденного материала неявно учитываются в критическом значении J -интеграла [11–13]. При этом составляющие J -интеграла, связанные с диссипативным механизмом деформирования, не рассматриваются.

В случае рассмотрения предельного состояния трещиноподобного дефекта адгезионного слоя (АС) композита, как правило, принимают толщину равной нулю. При этом дефект рассматривается в виде трещины Гриффитса [14, 15], а критическое значение J -интеграла формально находится по известным методикам механики квазихрупкого разрушения [11, 13]. Однако, АС имеют механические свойства в том числе и выраженные упругопластические [16, 17]. При этом пределы текучести адгезивов на несколько порядков уступают соответствующим характеристикам несущих слоев композита. Это обстоятельство приводит к рассмотрению деформирования композита при упругопластическом поведении адгезива конечной толщины в рамках упругих несущих слоев. Расчет J -интеграла в рамках упругого поведения предельно тонкого адгезива приводит к аналогичному значению при рассмотрении трещины в адгезиве нулевой толщины [18]. Для упругопластического поведения адгезива представляет интерес выделение из J -интеграла его диссипативной части. Данный показатель может быть рассмотрен в качестве характеристики процесса разрушения адгезива. В данной работе на примере деформирования адгезива, связывающего тела внахлест, рассмотрен подход к выделению из значения J -интеграла аддитивных составляющих в том числе и слагаемого, отвечающего за необратимое деформирование, в рамках численного решения задачи.

1. Постановка задачи. Схема нагружения образца представлена на рис. 1. Тела 1 и 2 с равными длинами и толщинами деформируются обратно, а материал АС 3, сопрягающий тела 1 и 2, полагается упругопластическим без упрочнения.

Взаимодействие АС с сопряженными им телами рассмотрим в рамках концепции «слоя взаимодействия». Следуя [19], запишем уравнения равновесия для тела 1:

$\bar{\varepsilon}_{12}$ — компоненты тензоров средних напряжений и деформаций АС с компо-

$$\text{нентами: } \bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{12} =$$

$$\frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{22} = \frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0}, \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21} = \bar{\varepsilon}_{12} = 0.5 \left[\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right], \quad (4)$$

где u_k^+ , u_k^- — соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя; $k = 1, 2$. Согласно концепции «слоя взаимодействия» между границами АС и консолями 1 и 2 жесткое сцепление, и для векторов напряжений по границам слоя 3 постулируется равенство модуля и противоположность направления.

Вариационные уравнения равновесия (1) и (2) для упругих тел 1 и 2 замкнем законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (5)$$

где E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона тел 1 и 2; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — объемная деформация; δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала слоя 3 определяющие соотношения вводим относительно средних компонент тензоров напряжений и деформаций. В области упругого деформирования получим:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (6)$$

где E_3 , ν_3 — модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезива.

Для упругопластического деформирования АС, определяющие соотношения принимаем в виде постоянства интенсивности касательных напряжений [20]:

$$T_p = \sqrt{(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33})^2 + (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{33})^2 + 6\bar{\sigma}_{12}^2} / \sqrt{6} = \text{const}, \quad (7)$$

при упругом деформировании гидростатического давления относительно объемной деформации:

$$\bar{\sigma} = \frac{E_3}{3(1 - 2\nu_3)} \bar{\varepsilon}, \quad (8)$$

где $\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$.

Значение постоянной в (7) определяет предел текучести по интенсивности касательных напряжений. Соответствующий предел текучести может быть определен через предел текучести при одноосном растяжении $T_p = \sigma_0/\sqrt{3}$, где σ_0 — предел текучести адгезива при одноосном растяжении с одним ненулевым главным напряжением.

Система (1)-(7) является замкнутой относительно поля перемещений $u(x_1, x_2)$ в сопряженных клею телах 1 и 2 (рис. 1) и может быть решена при заданных граничных условиях.

2. Решение задачи. Рассмотрим решение задачи (1)-(8) методом конечных элементов с квадратичным законом распределения поля перемещений на конечном элементе. Задача рассматривается в состоянии плоской деформации. Для решения упругопластической задачи используем метод «упругих решений» А.А. Ильюшина [21], рассмотренный в [22] применительно к задаче нормального разрыва адгезионного слоя.

В качестве механических и геометрических характеристик композита из работы [23] выбираем следующие: для материала пластин 1 и 2 в рассматриваемой схеме нагружения используем алюминиевый сплав Al6082-T651 с механическими характеристиками: $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.3$. В качестве адгезива рассмотрим смолу Araldite AV138 с механическими свойствами: $E_3 = 4.9$ ГПа, $\nu_3 = 0.35$, $\sigma_0 = 36.49$ МПа. Общая длина образца $2a + l$ бралась равной 180 мм, толщина пластин в направлении ортогональном плоскости $x_1 O x_2$ $B = 25$ мм, длина сопрягаемого адгезивом участка $l = 50$ мм, толщина пластин $h = 3$ мм, толщина слоя $\delta_0 = 0.2$ мм. Значение внешней критической нагрузки равнялось $F = 9300$ Н, что соответствует критической внешней нагрузке $P = F/(hB)$.

В качестве тестовой задачи рассмотрим аналитическое решение (1)-(7) [19], полученное в рамках подхода «дифференциального сдвига» [24] с учетом распределения поля перемещений в пластинах 1 и 2: $u_1^{(1)}(x_1, x_2) = u_1^+(x_1)$, $u_2^{(1)}(x_1, x_2) = 0$, $u_1^{(2)}(x_1, x_2) = u_1^-(x_1)$, $u_2^{(2)}(x_1, x_2) = 0$, где верхний индекс 1, 2 определяет номер тела и верхнюю (+) и нижнюю (-) границу слоя, а нижний индекс 1, 2 — координатную ось. Согласно [19] используем гипотезу упругого деформирования диагональных компонент тензора напряжений в слое следующей из предположения пластической несжимаемости и возможностью разделения деформаций на упругие и пластические.

Для выбранного метода численного решения рассмотрим следующие граничные условия для постановки задачи (1)-(7) при обозначении границ согласно рис. 1:

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(x_1, x_2) = 0, \sigma_{12} = 0 \quad x_1, x_2 \in [C, D]; u_2^{(2)}(x_1, x_2) = 0, \sigma_{12} = 0 \\ x_1, x_2 \in [M', M'']; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(x_1, x_2) = 0, \sigma_{12} = 0 \quad x_1, x_2 \in [F, A']; u_2^{(2)}(x_1, x_2) = 0, \sigma_{12} = 0 \\ x_1, x_2 \in [G', M]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$u_1^{(2)}(x_1, x_2) = u_2^{(2)}(x_1, x_2) = 0, \quad x_1, x_2 \in [M, M']; \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0$$

$$x_1, x_2 \in [A, M'], [D, G]; \quad (11)$$

$$\sigma_{11} = -P, \quad \sigma_{12} = 0 \quad x_1, x_2 \in [C, F]. \quad (12)$$

Для границ слоя потребуем выполнения условий отсутствия перемещений в направлении оси x_2 :

$$u_2^{(1)}(x_1, x_2) = 0 \quad x_1, x_2 \in [A', G]; \quad u_2^{(2)}(x_1, x_2) = 0, \quad x_1, x_2 \in [A, G']. \quad (13)$$

На рис. 2 графики 4, 5, 6 определяют средние напряжения $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{12}$ по адгезионному слою при реализации постановки (1)-(13) методом конечных элементов, графики 1, 2, 3 для соответствующих напряжений основаны на аналитическом решении работы [25].

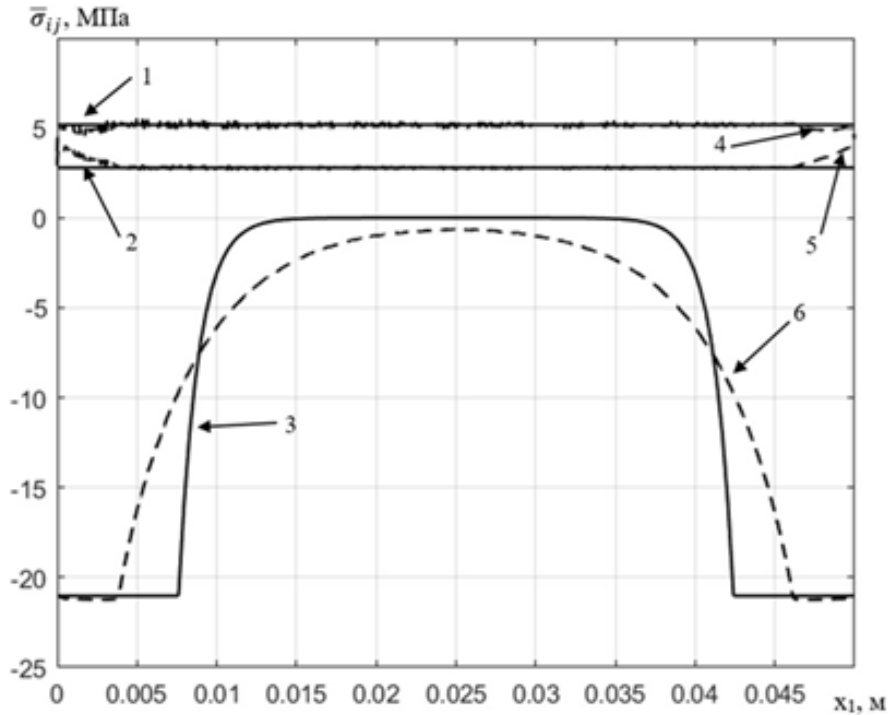


Рис. 2. Сравнение упрощенного аналитического и конечноэлементного решений

Из анализа графиков на рис. 2 видим хорошее согласование по средним касательным напряжениям и диагональным в упругой области и средним касательным в упругопластической области. Несмотря на различие в поведении диагональных компонент тензора средних напряжений в слое на стадии упругопластического деформирования их максимальное значение не превосходит напряжений упругого решения. Однако решение упругопластической задачи без допущений, позволяющих получить аналитическое решение, приводит к несколько меньшей длине зоны необратимых деформаций слоя.

Рассмотрим граничные условия, соответствующие проведению эксперимента в работе [23]:

$$\sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0 \quad x_1, x_2 \in [C, D]; \quad \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0 \quad x_1, x_2 \in [M', M'']; \quad (14)$$

$$\sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0 \quad x_1, x_2 \in [F, A']; \quad \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0 \quad x_1, x_2 \in [G', M]; \quad (15)$$

$$u_1^{(2)}(x_1, x_2) = u_2^{(2)}(x_1, x_2) = 0, \quad x_1, x_2 \in [M, M'']; \quad \sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0 \\ x_1, x_2 \in [A, M'], [D, G]; \quad (16)$$

$$\sigma_{11} = -P, \sigma_{12} = 0 \quad x_1, x_2 \in [C, F]. \quad (17)$$

Граничные условия (9)-(13) и (14)-(17) в вариационной постановке (1), (2) ставятся на поверхностях консолей. Напряженное состояние слоя, в том числе и на его границах определяется согласно полю средних деформаций (3), (4) посредством граничных перемещений слоя.

На рис. 3 построены графики распределения средних по слою напряжений при конечноэлементном решении задачи (1)-(8), (14)-(17) для механических и геометрических характеристик композита, соответствующих проведению эксперимента в работе [17]. Графики 1, 2, 3 соответствуют напряжениям $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{12}$ и приложению критической внешней нагрузки.

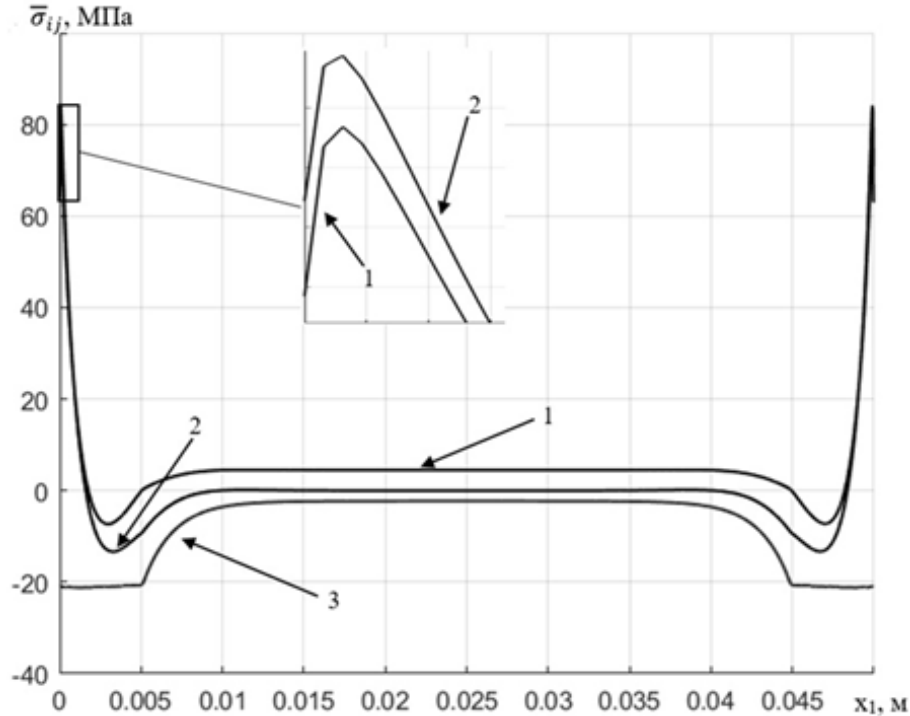


Рис. 3. Распределение напряжений в упругопластическом слое

Сравнивая решения рис. 2 и рис. 3 видим близость распределения средних касательных напряжений в слое и принципиальное отличие распределения диагональных компонент тензора средних напряжений слоя. Для граничных условий (9)-(13) значение средних диагональных компонент практически на порядок меньше средних касательных напряжений, а для условий (14)-(17) средние диагональные напряжения существенно превышают средние касательные напряжения, кроме того в окрестности торца адгезионного слоя напряжения $\bar{\sigma}_{22} > \bar{\sigma}_{11}$, а в упругой области имеет место: $\bar{\sigma}_{22} < \bar{\sigma}_{11}$.

На рис. 4 проведено сравнение решение задачи (1)-(8), (14)-(17) для линейно упругого поведения адгезионного слоя.

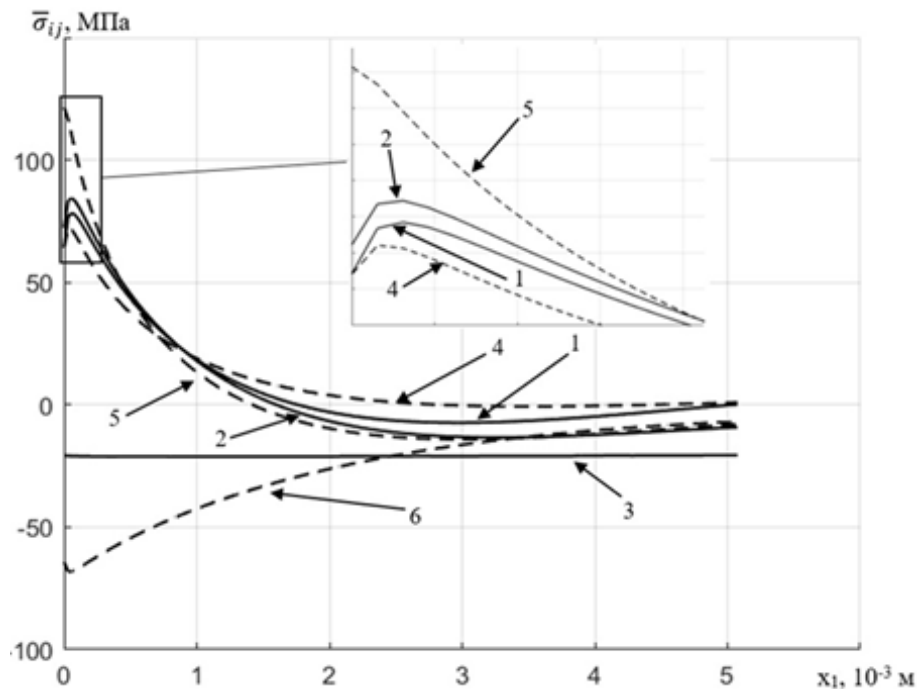


Рис. 4. Сравнение напряжений в адгезионном слое при его различных моделях поведения

Графики 1, 2, 3 определяют напряжения $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{12}$ при упругопластическом поведении адгезива, а 4, 5, 6 соответствуют указанным напряжениям при упругом деформировании в критическом состоянии. Уменьшение линейного параметра приводит к росту всех средних напряжений для упругой модели и средних диагональных компонент тензора для упругопластического поведения адгезионного слоя при росте длины зоны необратимых деформаций.

Рассматривая решения на рис. 2-4 видим, что решение задачи приводит к наличию векторов напряжений на торцевой поверхности АС, которая сопрягается со свободной поверхностью. Решение на рис. 3, 4 в некоторой окрестности

торцевой поверхности, имеет ниспадающий участок, связанный наличием свободной поверхности. Отметим, что наличие векторов напряжений на торцевой поверхности имеет место в ряде известных упрощенных решений данной задачи [24–27], а также в численных решениях МКЭ вблизи сингулярных точек.

Рассмотрим значение характеристики типа J-интеграла и его составляющую, отвечающую за необратимое деформирование при упругопластической модели поведения адгезионного слоя, при малых значениях линейного параметра.

3. Нахождение J-интеграла и его диссипативной части. На рис. 5 представлена окрестность адгезионного слоя с длиной пластической зоны l_p и контур интегрирования $\gamma = AMM'S$ интеграла $J = \int_{\gamma} \left(n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma_1$, охватывающий область диссипации, где ψ — удельная (к единице объема) свободная энергия; n_1 — проекция вектора нормали к поверхности контура на направление оси x_1 ; \mathbf{q} — распределенная нагрузка.

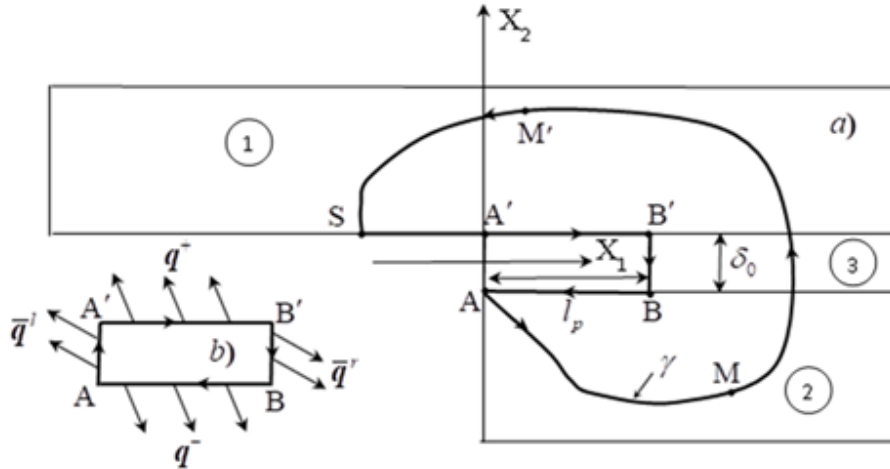


Рис. 5. Контур интегрирования окрестности торцевой поверхности адгезионного слоя

Интеграл J является интегралом типа J-интеграла, который, согласно работе [23], может быть рассмотрен в следующих представлениях:

$$J = \delta_0 (\psi_c + w_c) + \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}, \quad (18)$$

$$J = \delta_0 \psi_e - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_p} - \int_0^{l_p} \left(\mathbf{q}^- \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_1} + \mathbf{q}^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_1} \right) dx_1, \quad (19)$$

где $\mathbf{q}^+ = \sigma_{12}^+ \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}^+ \mathbf{e}_2$; $\mathbf{q}^- = -\sigma_{12}^- \mathbf{e}_1 - \sigma_{22}^- \mathbf{e}_2$; $\sigma_{12}^\pm, \sigma_{22}^\pm$ — граничные напряжения слоя; $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}$ — средние напряжения на торцах слоя; $\delta_0 w_c = - \int_S \frac{\partial w}{\partial x_1} ds$; w_c — удельная диссипация на торце слоя $w_c = w|_{x_1=0}$; ψ_c — удельная свободная энергия на торце слоя $\psi_c = \psi|_{x_1=0}$; ψ_e — удельная свободная энергия на торце участка начала упругопластического деформирования слоя $\psi_e = \psi|_{x_1=l_p}$; $\bar{\mathbf{u}} = 0.5 (\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)$ — вектор средних перемещений на торце слоя; $\bar{\mathbf{q}}^l = -\bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 - \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$ — граничные напряжения слоя на торце слоя ($x_1 = 0$); $\bar{\mathbf{q}}^r = \bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$ — граничные напряжения на торце участка начала упругопластического деформирования слоя ($x_1 = l_p$).

Представим (18) в виде суммы следующих слагаемых:

$$J = \delta_0 (\psi_c + w_c) + \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = J^e + J^w + J^b, \quad (20)$$

$J^b = \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}$ — часть J-интеграла, связанная с наличием напряжений на торцевой поверхности $\bar{\mathbf{q}}^l$, в том числе получаемых из решения задачи в вариационных (ослабленных, следуя [29]) формулировках задач (см. рис. 3 и рис. 4); $J^e = \delta_0 \psi_c$ — обратимая часть J-интеграла; $J^w = \delta_0 w_c$ — необратимая часть J-интеграла.

В силу близости диагональных компонент тензора напряжений в слое при упругом и упругопластическом деформировании (см. рис. 4) и постоянства касательных напряжений в области упругопластического деформирования для удельных работ напряжений и энергий на торцах упругопластического участка тонкого адгезионного слоя принимаем:

$$\begin{aligned} \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_p} &= 0.5 \delta_0 (\bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11})|_{x_1=l_p} + \\ &+ 0.25 \delta_0 \left(\bar{\sigma}_{12} \left[\frac{\partial u_2^+ (x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^- (x_1)}{\partial x_1} \right] \right) \Big|_{x_1=l_p}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= -0.5 \delta_0 (\bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11})|_{x_1=0} - \\ &- 0.5 \delta_0 \left(\bar{\sigma}_{12} \left[\frac{\partial u_2^+ (x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^- (x_1)}{\partial x_1} \right] \right) \Big|_{x_1=0}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\delta_0 \psi_c = 0.5 \left(\delta_0 \left[\bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}|_{x_1=0} + \bar{\sigma}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}|_{x_1=0} + 2 \bar{\sigma}_{12} \bar{\varepsilon}_{12}|_{x_1=l_p} \right] \right), \quad (23)$$

$$\delta_0 \psi_e = 0.5 \left(\delta_0 \left[\bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11}|_{x_1=l_p} + \bar{\sigma}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}|_{x_1=l_p} + 2 \bar{\sigma}_{12} \bar{\varepsilon}_{12}|_{x_1=l_p} \right] \right), \quad (24)$$

Из (18), (19) приходим к выражению необратимой части энергии J-интеграла при упругопластическом поведении тонкого адгезионного слоя в границах упруго деформируемых консолей рассматриваемого композита:

$$J^w = \delta_0 (\psi_e - \psi_c) - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_p} - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} - \int_0^{l_p} \left(\mathbf{q}^- \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_1} + \mathbf{q}^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_1} \right) dx_1. \quad (25)$$

Таким образом нахождение напряженно-деформированного состояния упругопластической области (см. рис. 5b) согласно (25) с учетом (21)-(24) будет определять диссипативную часть J-интеграла.

При модели обратимого деформирования слоя в связи с отсутствием области упругопластического деформирования $l_p = 0$ из (25) приходим к нулевому значению диссипативной части J-интеграла.

Для предельно тонкого слоя значение J-интеграла может быть найдено заданием для АС нулевой толщины с жестким сцеплением консолей 1 и 2 (см. рис. 1):

$$J^m = J_I + J_{II}, \quad (26)$$

где $J_{I,II} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} K_{I,II}$. В этом случае значение J-интеграла может быть вычислено с использованием комплекса ANSYS при помощи метода VCCT [30], встроенного в интерфейс раздела Fracture. В схеме нагружения, определяемой граничными условиями (9)-(12), при заданных геометрических, механических характеристиках консолей и критической внешней нагрузке, (26) принимает значение $J_C^{m1} = J_I + J_{II} = 0.06 \frac{\text{Н}}{\text{м}} + 121.9 \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 121.96 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, а для (14)-(17) значение: $J_C^{m2} = J_I + J_{II} = 130.27 \frac{\text{Н}}{\text{м}} + 223.95 \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 354.21 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Расчетная схема нагружения граничными условиями (9)-(12) близка к нагружению по моде II, а расчетная схема с граничными условиями (14)-(17) реализует выраженную смешанную моду нагружения I+II. Значения J-интегралов в этом случае формируют сингулярные распределения компонент напряжений в слое.

Рассмотрим решения для соответствующих задач при рассмотрении адгезионного в рамках конечной толщины и определяющих соотношений. Для случая упругопластического деформирования АС по (20) определим диссипативную часть J-интеграла.

В задаче, реализующей нагружение близкое к моде II при выполнении граничных условий (9)-(12), воспользуемся решением работы [28], которое для линейно упругого и упругопластического поведения без упрочнения приводит в случае относительно малых толщин слоя практически к одному и тому же

асимптотическому значению: $J_C^{l1} = 122.4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Данное значение хорошо согласуется с величиной J_C^{m1} , однако при этом реализуется принципиально разный механизм формирования рассматриваемой энергетической характеристики. При упругопластическом деформировании АС в силу ограниченности компонент напряжений его удельная свободная энергия также ограничена, кроме того в данном решении вертикальные перемещения границ АС тождественно равны нулю, что приводит из (21), (22) к выражению: $\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} (J^e + J^b) = 0$ и значение J-интеграла при малой толщине АС будет определяется диссипативной составляющей $\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} J = J^w = J_C^{l1}$. При упругом деформировании значение J-интеграла формируется за счет роста касательных напряжений, значения которых обратно пропорциональны $\sqrt{\delta_0}$ [18]. В этом случае нефизичная сингулярность на торцевой поверхности АС приводит к результату: $\lim_{\delta_0 \rightarrow 0} J = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} (J^e + J^b) = J_C^{l1}$.

Рассмотрим задачу, реализующую нагружение АС по смешанной моде I+II, в рамках МКЭ решения рассматриваемой задачи в случае толщины АС $\delta_0 = 10^{-5}$ м. При упругопластической модели поведения композита получаем значение $J^e = 190.6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $J^b = 25.8 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $J^w = 152.1 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ при длине пластической зоны $l_p = 5.8$ мм, которые в сумме дают следующее значение: $J_C^{l2} = 368.5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, отличающее от J_C^{m2} на 4%.

Уменьшив предел текучести адгезива в два раза. При заданной критической нагрузке критическое значение J-интеграла принимает значение $J_C^{l2} = 416.8 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, при следующих составляющих: $J^e = 241 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $J^b = 3.9 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $J^w = 171.9 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ и длине пластической зоны $l_p = 14.8$ мм. Таким образом имеет место влияние пластических свойств адгезива на критическое значение J-интеграла и его компонент. При этом увеличивается не только диссипативная составляющая, но и обратимая.

4. Заключение. На примере нагружения упругопластического адгезионного слоя смешанной модой нагружения I+II, реализуемой в соединении несущих тел внахлест для различных граничных условий, определено его напряженно-деформированное состояние. На основе численного решения задачи, определены составляющие J-интеграла обратимого и необратимого деформирования, а также погрешность решения, связанная с распределением напряженно-деформированного состояния в окрестностях особых точек. Показано влияние механических характеристик на аддитивные составляющие J-интеграла тонкого адгезионного слоя. Рассмотрено сравнение полученного результата с моделью слоя нулевой толщины.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The authors contribution is equal.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cherepanov G. P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76, no. 5. P. 519536. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014.
- [2] Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // ASME Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35, no. 2. P. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206.
- [3] Berto F., Glagolev V. V., Markin A. A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // International Journal of Fracture. 2020. Vol. 224, no. 2. P. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0.
- [4] Kolednik O., Schöngrundner R., Fischer F. D. A new view on J-integrals in elastic-plastic materials // International Journal of Fracture. 2014. Vol. 187, no. 1. P. 77–107. DOI: 10.1007/s10704-013-9920-6.
- [5] Малик А. В., Лавит И. М. Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 88–102. EDN: XWDXQT. DOI: 10.17223/19988621/54/8.
- [6] Murakami Y. A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method // Engineering Fracture Mechanics. 1976. Vol. 8, no. 4. P. 643–655. DOI: 10.1016/0013-7944(76)90038-2.
- [7] Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. М. : Мир, 1990 1014 с.
- [8] Rybicki E. F., Kanninen M. F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // Engineering Fracture Mechanics. 1977. Vol. 9, no. 4. P. 931–938. DOI: 10.1016/0013-7944(77)90013-3.
- [9] Caicedo J., Portela A. Direct computation of stress intensity factors in finite element method // European Journal of Computational Mechanics. 2017. Vol. 26. no. 3. P. 309–335. DOI: 10.1080/17797179.2017.1354578.
- [10] Ustinov K. B., Massabo R., Lisovenko D. S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Engineering Failure Analysis. 2020. Vol. 110. 104410. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410.
- [11] Пестриков В. М., Морозов Е. М. Механика разрушения. Курс лекций. СПб. : ЦОП "Профессия", 2012. 552 с.
- [12] Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М. : Наука, 1985. 502 с.
- [13] Irwin G. R., Kies J. A. Critical energy rate analysis of fracture strength // Welding Journal Research Supplement. 1954. Vol. 33. P. 193–198.
- [14] Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1921. Vol. 221. P. 163–189. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006.

- [15] Huang K., Shimada T., Ozaki N., Hagiwara Y., Sumigawa T., Guo L., Kitamura T. A unified and universal Griffith-based criterion for brittle fracture // International Journal of Solids and Structures. 2017. Vol. 128. P. 67–72. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.08.018.
- [16] Santos M. A. S., Campilho R. D. S. G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // International Journal of Fracture. 2017. Vol. 207. P. 55–71. DOI:10.1007/s10704-017-0219-x.
- [17] Dionisio J. M. M., Ramalho L. D. C., Sanchez-Arce I. J., Campilho R. D. S. G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // International Journal of Fracture. 2021. Vol. 232. P. 77–91. DOI:10.1007/s10704-021-00594-z.
- [18] Bogacheva V. E., Glagolev V. V., Glagolev L. V., Markin A. A. On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation // PNRPU Mechanics Bulletin. 2022. Vol. 3. P. 116–124. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.12.
- [19] Glagolev V. V., Markin A. A. Model of shear elastic-plastic deformation of a thin adhesive layer // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55, no. 6. P. 837–843. DOI: 10.3103/S0025654420060072.
- [20] Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность: [в 2 томах]. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 446 с.
- [21] Ильюшин А. А. Пластичность. Упругопластические деформации. М.-Л. : Гостехиздат, 1948. 376 с.
- [22] Глаголев В. В., Глаголев Л. В., Маркин А. А. Определение напряженно-деформированного состояния упругопластических тел с боковым трещиноподобным дефектом с использованием модели с линейным размером // Прикладная механика и техническая физика. 2018. № 6. С.143–154. EDN: YPHTDF. DOI: 10.15372/PMTF20180614.
- [23] Dionisio J. M. M., Ramalho L. D. C., Sanchez-Arce I. J., Campilho R. D. S. G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // International Journal of Fracture. 2021. Vol. 232. P. 77–91. DOI: 10.1007/s10704-021-00594-z.
- [24] Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten // Luftfahrtforschung. 1938. Vol. 15. P. 41–47.
- [25] Богачева В. Э., Глаголев В. В., Глаголев Л. В. Влияние модели поведения тонкого адгезионного слоя в соединении внахлест на значение J-интеграла // Проблемы прочности и пластичности. 2024. Т. 86, № 4. С. 432–444. EDN: BHDERZ. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-432-444.
- [26] Goland M., Reissner E. The stresses in cemented joints // Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME. 1944. Vol. 66. P. 17–27.
- [27] Adams R. D., Peppiatt N. A. Stress analysis of adhesive-bonded lap joints // Journal of Strain Analysis. 1974. Vol. 9, no. 3. P. 185–196. DOI: 10.1243/03093247V093185.
- [28] Hart-Smith L. J. Adhesive-bonded single-lap joints // NASA Technical Report CR-112236. 1973.
- [29] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М. : Мир, 1987. 524 с.
- [30] Ismail A. E., Jamian S., Kamarudin K., Nor M. K. M., Ibrahim M. N., Chiron M. A. An overview of fracture mechanics with ANSYS // International Journal of Integrated Engineering. 2018. Vol. 10, no. 5. P. 59–67. DOI: 10.30880/ijie.2018.10.05.010.

REFERENCES

- [1] Cherepanov G. P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76, no. 5. P. 519536. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014.

- [2] Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // ASME Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35, no. 2. P. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206.
- [3] Berto F., Glagolev V. V., Markin A. A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // International Journal of Fracture. 2020. Vol. 224, no. 2. P. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0.
- [4] Kolednik O., Schöngrundner R., Fischer F. D. A new view on J-integrals in elastic-plastic materials // International Journal of Fracture. 2014. Vol. 187, no. 1. P. 77–107. DOI: 10.1007/s10704-013-9920-6.
- [5] Malik A. V.; Lavit I. M. Method of calculation of stress intensity factor for a fixed normal fracture crack under dynamic loading // Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics. 2018. № 54. P. 88–102. EDN: XWDXQT. DOI: 10.17223/19988621/54/8. (in Russian).
- [6] Murakami Y. A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method // Engineering Fracture Mechanics. 1976. Vol. 8, no. 4. P. 643–655. DOI: 10.1016/0013-7944(76)90038-2.
- [7] Murakami Yu. Handbook of stress intensity factors. M. : Mir, 1990. 1014 p. (in Russian).
- [8] Rybicki E. F., Kanninen M. F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // Engineering Fracture Mechanics. 1977. Vol. 9, no. 4. P. 931–938. DOI:10.1016/0013-7944(77)90013-3.
- [9] Caicedo J., Portela A. Direct computation of stress intensity factors in finite element method // European Journal of Computational Mechanics. 2017. Vol. 26. no. 3. P. 309–335. DOI: 10.1080/17797179.2017.1354578.
- [10] Ustinov K. B., Massabo R., Lisovenko D. S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Engineering Failure Analysis. 2020. Vol. 110. 104410. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410.
- [11] Pestrikov V. M., Morozov E. M. Fracture mechanics. Course of lectures. SPb. : COP "Profession", 2012. 552 p. (in Russian).
- [12] Parton V. Z., Morozov E. M. Mechanics of elastic-plastic fracture. M. : Nauka, 1985. 502 p. (in Russian).
- [13] Irwin G. R., Kies J. A. Critical energy rate analysis of fracture strength // Welding Journal Research Supplement. 1954. Vol. 33. P. 193–198.
- [14] Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1921. Vol. 221. P. 163–189. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006.
- [15] Huang K., Shimada T., Ozaki N., Hagiwara Y., Sumigawa T., Guo L., Kitamura T. A unified and universal Griffith-based criterion for brittle fracture // International Journal of Solids and Structures. 2017. Vol. 128. P. 67–72. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.08.018.
- [16] Santos M. A. S., Campilho R. D. S. G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // International Journal of Fracture. 2017. Vol. 207. P. 55–71. DOI:10.1007/s10704-017-0219-x.
- [17] Dionisio J. M. M., Ramalho L. D. C., Sanchez-Arce I. J., Campilho R. D. S. G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // International Journal of Fracture. 2021. Vol. 232. P. 77–91. DOI:10.1007/s10704-021-00594-z.
- [18] Bogacheva V. E., Glagolev V. V., Glagolev L. V., Markin A. A. On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation // PNRPU Mechanics Bulletin. 2022. Vol. 3. P. 116–124. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.12.
- [19] Glagolev V. V., Markin A. A. Model of shear elastic-plastic deformation of a thin adhesive layer // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55, no. 6. P. 837–843. DOI: 10.3103/S0025654420060072.
- [20] Zubchaninov V. G. Stability and plasticity: [in 2 volumes]. M. : FIZMATLIT, 2007. 446 p. (in Russian).

- [21] Ilyushin A. A. Plasticity. Elastic-plastic deformations. M.-L. : Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
- [22] Glagolev V. V., Glagolev L. V., Markin A. A. Determination of the stress-strain state of elastoplastic bodies with lateral crack-like defect using a model with linear dimension // Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. № 6. P.143–154. EDN: YPHTDF. DOI: 10.15372/PMTF20180614. (in Russian).
- [23] Dionisio J. M. M., Ramalho L. D. C., Sanchez-Arce I. J., Campilho R. D. S. G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // International Journal of Fracture. 2021. Vol. 232. P. 77–91. DOI: 10.1007/s10704-021-00594-z.
- [24] Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten // Luftfahrtforschung. 1938. Vol. 15. P. 41–47.
- [25] Bogacheva V. E., Glagolev V. V., Glagolev L. V. Influence of the model of behavior of a thin adhesive layer in an overlap joint on the value of J-integral // Problems of Strength and Plasticity. 2024. Vol. 86, no. 4. P. 432–444. EDN: BHDERZ. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-432-444. (in Russian).
- [26] Goland M., Reissner E. The stresses in cemented joints // Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME. 1944. Vol. 66. P. 17–27.
- [27] Adams R. D., Peppiatt N. A. Stress analysis of adhesive-bonded lap joints // Journal of Strain Analysis. 1974. Vol. 9, no. 3. P. 185–196. DOI: 10.1243/03093247V093185.
- [28] Hart-Smith L. J. Adhesive-bonded single-lap joints // NASA Technical Report CR-112236. 1973.
- [29] Brebbia K., Telles J., Vroubel L. Methods of boundary elements. M. : Mir, 1987. 524 p.
- [30] Ismail A. E., Jamian S., Kamarudin K., Nor M. K. M., Ibrahim M. N., Chiron M. A. An overview of fracture mechanics with ANSYS // International Journal of Integrated Engineering. 2018. Vol. 10, no. 5. P. 59–67. DOI: 10.30880/ijie.2018.10.05.010.

В. И. Гулятьев, А. А. Алексеев, А. Н. Булгаков

ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА СЛОЖНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ ПО СООТНОШЕНИЯМ В.Г. ЗУБЧАНИНОВА

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Аннотация. В статье описаны результаты экспериментальных исследований упругопластического деформирования тонкостенных цилиндрических оболочек, изготовленных из конструкционного материала сталь 45. Опыты выполнены с применением автоматизированного оборудования в лаборатории кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. В процессе сложного деформирования образцов по заданным траекториям при резкой смене направления процесса деформирования наблюдается эффект снижения (нырок) напряжений, учет которого важен при прогнозировании отклика на реализуемый процесс. Математическое моделирование, полученных в ходе экспериментов результатов, выполнено по методике, предложенной профессором В.Г. Зубчаниновым. Для плоской двухзвенной траекторий деформирования с углом излома 135° подобраны параметры аппроксимации, выполнен анализ и сформулированы предложения по повышению точности аппроксимации.

Ключевые слова: пластичность, сложное деформирование, процесс нагружения, экспериментальные исследования, аппроксимация, математическое моделирование.

Гулятьев Вадим Иванович, д.т.н., проф.; e-mail: vig0@mail.ru;

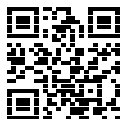
<https://orcid.org/0000-0001-6872-4505>; AuthorID: 174778

Алексеев Андрей Алексеевич, к.т.н., доц.; e-mail: alexeew@bk.ru;

<https://orcid.org/0000-0001-9336-1099>; AuthorID: 640538

Булгаков Александр Николаевич, асс.; e-mail: Elstatik@bk.ru;

<https://orcid.org/0009-0002-9059-1459>; AuthorID: 1091674



для цитирования: Гулятьев В. И., Алексеев А. А., Булгаков А. Н., Эксперименты на сложное деформирование конструкционных материалов и их аппроксимация по соотношениям В.Г. Зубчанинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 111–124. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.005. EDN: SYSYLA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

V. I. Gulyaev, A. A. Alekseev, A. N. Bulgakov

EXPERIMENTS ON COMPLEX DEFORMATION OF STRUCTURAL MATERIALS AND THEIR APPROXIMATION USING V.G. ZUBCHANINOV'S RELATIONS

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The article describes the results of experimental studies of the elastic-plastic deformation of thin-walled cylindrical cells made of the structural material Steel 45. The experiments were performed using automated equipment in the laboratory of the Department of Resistance of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity of Tver State Technical University. In the process of complex deformation of samples along specified trajectories, with a sharp change in the direction of the deformation process, the effect of stress reduction (diving) is observed, which is important in predicting the response to the process being implemented. The mathematical modeling of the experimental results was performed according to the methodology proposed by Professor V.G. Zubchaninov. For flat two-link deformation trajectories with a fracture angle of 135° , the approximation parameters were selected, the analysis was performed, and proposals were formulated to improve the accuracy of the approximation.

Keywords: plasticity, complex deformation, loading process, experimental studies, approximation, mathematical modeling.

Vadim I. Gultiaev, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: vig0@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-6872-4505>; AuthorID: 174778

Andrey A. Alekseev, CSc in Technical Sciences, Associate Professor; e-mail: alexeew@bk.ru;
<https://orcid.org/0000-0001-9336-1099>; AuthorID: 640538

Aleksandr N. Bulgakov, Assistant of Department; e-mail: Elstatik@bk.ru;
<https://orcid.org/0009-0002-9059-1459>; AuthorID: 1091674



to cite this article: Gulyaev V. I., Alekseev A. A., Bulgakov A. N. Experiments on complex deformation of structural materials and their approximation using V.G. Zubchaninov's relations // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 111–124. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.005

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Изучение поведения конструкционных материалов при сложном нагружении и деформировании является важным аспектом современной механики деформируемого твердого тела. Понимание и учёт упругопластических свойств материалов играет ключевую роль при проектировании ответственных инженерных конструкций, элементов летательных аппаратов, силовых установок, механизмов автодорожной и железнодорожной техники, узлов промышленного оборудования и т.д.

На протяжении XX века учёными было разработано множество теорий и моделей, описывающих упругопластическое поведение материалов [1]. При этом особое внимание уделялось экспериментальным методам изучения напряжённо-деформированного состояния при сложных видах нагружения и деформирования, позволяющих получить более полную картину работы материала по сравнению с одноосными испытаниями. Однако проведение таких экспериментов имело ряд ограничений, связанных с трудоёмкостью, недостаточной точностью измерений и сложностью обработки данных.

Развитие вычислительной техники позволило автоматизировать процесс проведения и анализа результатов экспериментов. В частности, внедрение автоматизированных исследовательских комплексов, объединяющих силовое оборудование с вычислительными машинами, разработка новых тензометрических приборов открыло новые перспективы для высокоточной регистрации механических воздействий, деформаций и последующего математического моделирования поведения материалов.

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении и деформировании с использованием автоматизированного комплекса СН-ЭВМ. В ходе исследования проведена аппроксимация полученных экспериментальных данных с применением математических моделей теории процессов сложного пластического деформирования. Полученные результаты позволяют не только уточнить параметры аппроксимации, но и сформировать основу для развития современных подходов в области теории пластичности.

1. Материалы и методы. В качестве образцов на комплексе СН-ЭВМ используются тонкостенные цилиндрические оболочки (рис. 1). Перед проведением эксперимента каждый образец проходит проверку геометрических параметров в 12 точках на длине рабочей части $l=110$ мм. Для рассматриваемого опыта наружный диаметр оболочки $D=32.02\pm 0.01$ мм, толщина стенки $h=1.01\pm 0.02$ мм, радиус срединной поверхности $R=15.51\pm 0.03$ мм. По результатам измерений установлено, что параллельность торцевых поверхностей и величина радиального биения цилиндрической оболочки находятся в пределах установленных допусков, изделие соответствует заданным техническим требованиям и может быть допущено к опыту.

Все испытанные образцы были изготовлены из одной партии углеродистой конструкционной нелегированной специальной стали марки 45, химический состав подтвержден результатами спектрального анализа и соответствует ГОСТ

1050-2013. В целях подтверждения начальной изотропии материала образцов и определения механических характеристик первоначально пять образцов были испытаны на простое (пропорциональное) нагружении [2]. По результатам этих опытов материал образцов с достаточной степенью точности можно считать начально изотропным. Поскольку $R \gg h$ напряженное состояние в рабочей части образца размером считалось близким к однородному. В пластической зоне материал считался несжимаемым.

Автоматизированный испытательный комплекс СН-ЭВМ лаборатории механических испытаний кафедры Сопротивления материалов теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета позволяет проводить многоканальное измерение осевой нагрузки P с погрешностью $\pm 0.2\%$, крутящего момента $M_{кр}$ с погрешностью $\pm 0.6\%$, внутреннего давления p с погрешностью $\pm 0.7\%$, изменения длины рабочей части образца Δl с погрешностью $\pm 0.3\%$, изменения радиуса ΔR с погрешностью измерения $\pm 0.5\%$, а также угла взаимного поворота сечений φ с погрешностью $\pm 0.3\%$. Более подробно описание комплекса приводится в работах [3, 4]. Для расчета компонент тензоров напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) использовались формулы:

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi R h}; \quad \sigma_{22} = p \frac{R}{h}; \quad \sigma_{12} = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 h}; \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} \approx 0; \quad \sigma_{33} \approx 0$$

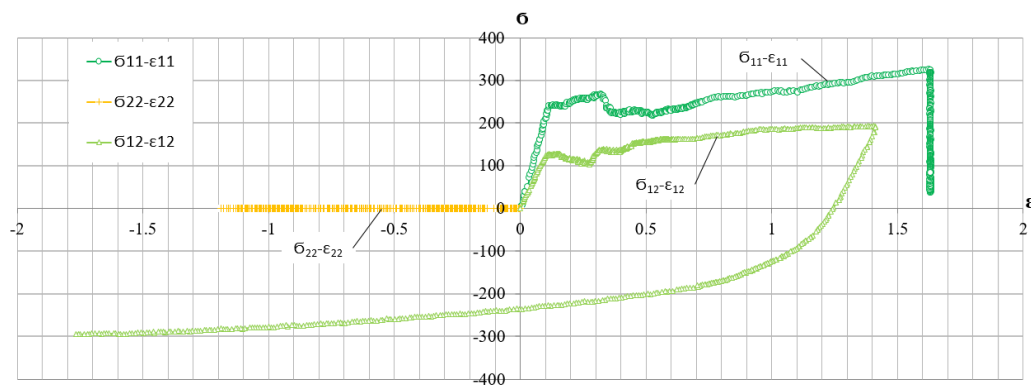
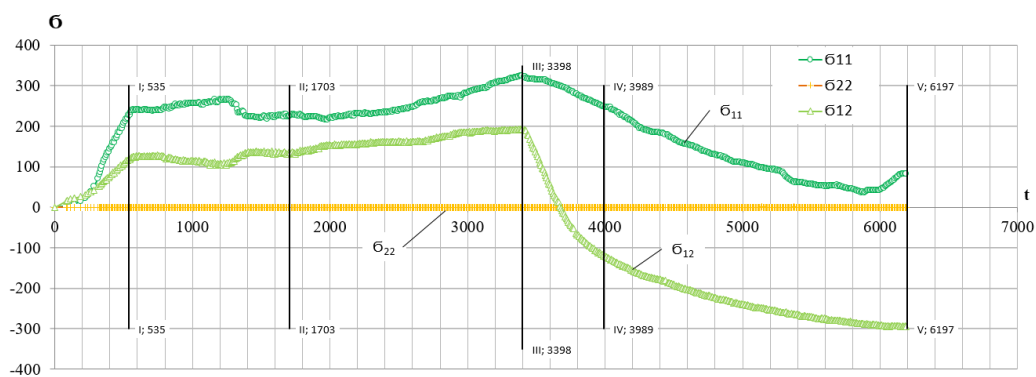
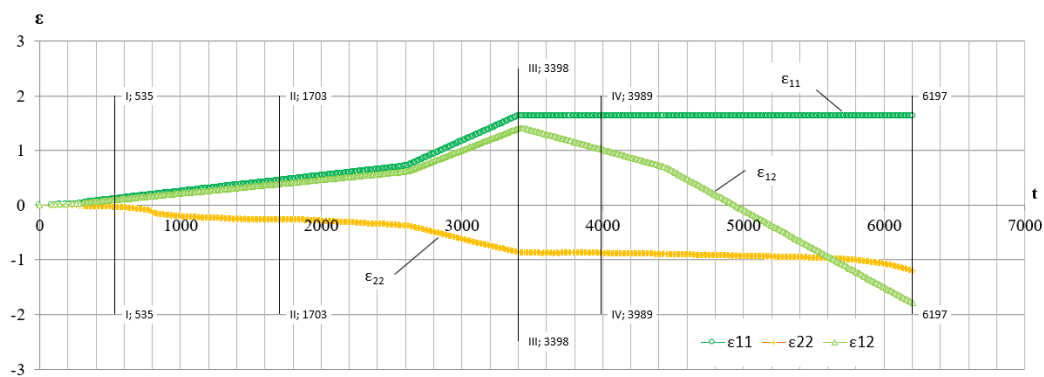
$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta R}{R}; \quad \varepsilon_{12} = \varphi \frac{R}{2l}; \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} \approx 0; \quad \varepsilon_{33} \approx 0$$

В таблице 1 приведены выборочные данные с комплекса для образца 14, испытанного на знакопеременное кручение после предварительного растяжения с кручением. Среднее значение предела текучести, полученного при испытании на растяжение $\sigma^T = \sigma_T / \sqrt{2/3} = 313 \pm 2$ МПа, значение модуля продольной упругости $E = 218 \pm 9$ ГПа, удвоенный модуль сдвига из испытания на кручение $2G = 141 \pm 3$ ГПа, коэффициент Пуассона принимается $\mu = 0.3$, пластический коэффициент Пуассона $\mu_p \rightarrow 0.5$.

На рисунке 2 приведены диаграммы деформирования σ – ε , на рисунках 3-4 диаграммы зависимостей напряжений и деформаций от времени.



Рис. 1. Оболочка после испытаний

Рис. 2. Диаграммы деформирования σ (МПа) – ε (%)Рис. 3. Диаграммы напряжений σ (МПа) по времени t (сек)Рис. 4. Диаграммы деформаций ε (%) по времени t (сек)

Методика проведения обработки результатов экспериментальных исследований, используемая в данной работе, базируются на векторном представлении

напряжений и деформаций по А.А. Ильюшину [5]. Значения компонент тензоров девиаторов напряжений S_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и деформаций Θ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), модуля векторов напряжений σ в девиаторном пространстве напряжений Σ_3 , модуля вектора деформаций Θ в девиаторном пространстве деформаций E_3 и длины дуги траектории s производился по формулам [1]:

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}}{2} \right); \quad S_2 = \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{2}}; \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12}$$

$$\Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_{11}; \quad \Theta_2 = \sqrt{2} \left(\varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{11} \right); \quad \Theta_3 = \sqrt{2} \varepsilon_{12}$$

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}; \quad \Theta = \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2}; \quad S = \sqrt{\Delta \Theta_1^2 + \Delta \Theta_2^2 + \Delta \Theta_3^2}$$

Косинус угла отклонения ϑ_1 вектора напряжений $\bar{\sigma}$ от касательной к траектории деформирования \bar{p}_1 в каждой точке определялся по формуле:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left(S_1 \frac{\Delta \Theta_1}{\Delta s} + S_2 \frac{\Delta \Theta_2}{\Delta s} + S_3 \frac{\Delta \Theta_3}{\Delta s} \right)$$

2. Аппроксимация и математическое моделирование. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования по плоским двухзвенным траекториям осуществлялось решением дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка малости [1, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{dS_i}{ds} &= M_1 \frac{d\Theta_i}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{S_i}{\sigma} \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} &= -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1 \end{aligned}$$

где S_i, Θ_i ($i = 1, 2, 3$) - координаты векторов напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\Theta}$; s - длина дуги траектории деформирования.

Функционалы процесса, зависящие от параметров внутренней геометрии траектории деформаций, определялись по формулам, предложенным В.Г. Зубчаиновым [7–9]:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \Phi(s) + A f_0^P \Omega(\Delta s) - \Delta \sigma_k \\ M_1 &= 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q \\ f &= \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}, \quad f_0 = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \end{aligned}$$

где $\Delta s = s - s_k^T$ - приращение длины дуги траектории после её излома в точке K ; $\Delta \sigma_k = \Phi(s_k^T) - \sigma_k^T$ - разница в точках излома между значениями универсальной функции Одквидста-Ильюшина и расчетным значением модуля вектора напряжений σ_k^T ; $2G_p = \Phi(s)/s$ - удвоенный пластический модуль при простом нагружении; G_p^0 - то же в точке излома траектории; f - функция, учитывающая

ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования, f_0 то же в точке излома. Для описания скалярного нырка напряжений после излома траектории деформирования использована функция:

$$\Omega(\Delta s) = - [\gamma \cdot \Delta s \cdot e^{-\gamma \Delta s} + b \cdot (1 - e^{-\gamma \Delta s})]$$

где A , b , γ , p , q – параметры аппроксимаций.

№	$\varepsilon_{11}, \%$	$\varepsilon_{22}, \%$	$\varepsilon_{12}, \%$	σ_{11}, MPa	σ_{22}, MPa	σ_{12}, MPa
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.00	0.00	0.00
2	0.0160	-0.0040	0.0243	23.90	0.45	31.15
3	0.0400	-0.0160	0.0416	80.07	0.00	51.70
4	0.0640	-0.0120	0.0555	129.06	0.00	68.39
5	0.0880	-0.0200	0.0763	178.66	0.00	94.72
6	0.1080	-0.0240	0.0972	228.85	0.00	118.16
7	0.1280	-0.0360	0.1145	240.80	0.00	127.48
8	0.1400	-0.0560	0.1215	240.20	0.00	125.23
9	0.1960	-0.1440	0.1631	246.77	0.00	120.09
10	0.2520	-0.2080	0.2151	256.93	0.00	113.67
11	0.3160	-0.2280	0.2741	266.49	0.00	109.49
12	0.4520	-0.2600	0.3921	228.25	0.00	133.90
13	0.4960	-0.2600	0.4268	224.67	0.00	144.82
14	0.6600	-0.3440	0.5691	236.62	0.00	162.80
15	1.1440	-0.6120	0.9890	281.43	0.00	185.27
16	1.6240	-0.8640	1.4054	325.65	0.00	193.94
17	1.6320	-0.8720	1.3880	316.68	0.00	154.77
18	1.6280	-0.8680	1.3568	315.49	0.00	118.16
19	1.6320	-0.8680	1.3290	315.49	0.00	93.76
20	1.6320	-0.8760	1.2978	308.91	0.00	54.91
21	1.6320	-0.8720	1.2735	304.73	0.00	27.94
22	1.6320	-0.8720	1.2423	299.35	0.00	-1.93
23	1.6320	-0.8680	1.2145	293.98	0.00	-27.94
24	1.6320	-0.8720	1.1833	285.61	0.00	-49.13
25	1.6320	-0.8720	1.1520	277.25	0.00	-67.43
26	1.6320	-0.8680	1.1243	270.08	0.00	-82.20
27	1.6280	-0.8680	1.1173	269.48	0.00	-83.81
28	1.6320	-0.8720	1.0584	257.53	0.00	-106.93
29	1.6320	-0.8800	0.9577	237.81	0.45	-135.50
30	1.6320	-0.8920	0.6732	177.46	0.45	-185.92
31	1.6320	-0.9240	-0.0590	111.74	0.45	-239.22
32	1.6320	-0.9560	-0.7391	59.15	0.00	-268.76

Таблица 1. Экспериментальные данные (Образец 14)

Для аппроксимации универсальной функции Одквидста-Ильюшина материала с площадкой текучести, использовались выражения:

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} 2Gs, & \text{при } s < s^T \text{ участок I} \\ \sigma^T, & \text{при } s^T \leq s \leq s_*^T \text{ участок II} \\ \sigma^T + \sigma_a \cdot (1 - e^{-\beta(s-s_*^T)}), & \text{при } s > s_*^T \text{ участок III} \end{cases}$$

3. Программы испытаний. Программы экспериментов реализовывались в плоскости $\Theta_1 - \Theta_3$ векторного пространства деформаций. На рисунке 5 (а) показаны экспериментальная и расчетная программы, отклик на реализуемую программу в плоскости $S_1 - S_3$ приведен на рисунке 5 (б). Программа представляет собой пропорциональное растяжение с кручением до значения $\Theta_1 = \Theta_3 = 2\%$, при достижении которого производился излом траектории на угол 135° , после которого осуществлялось знакопеременное кручение.

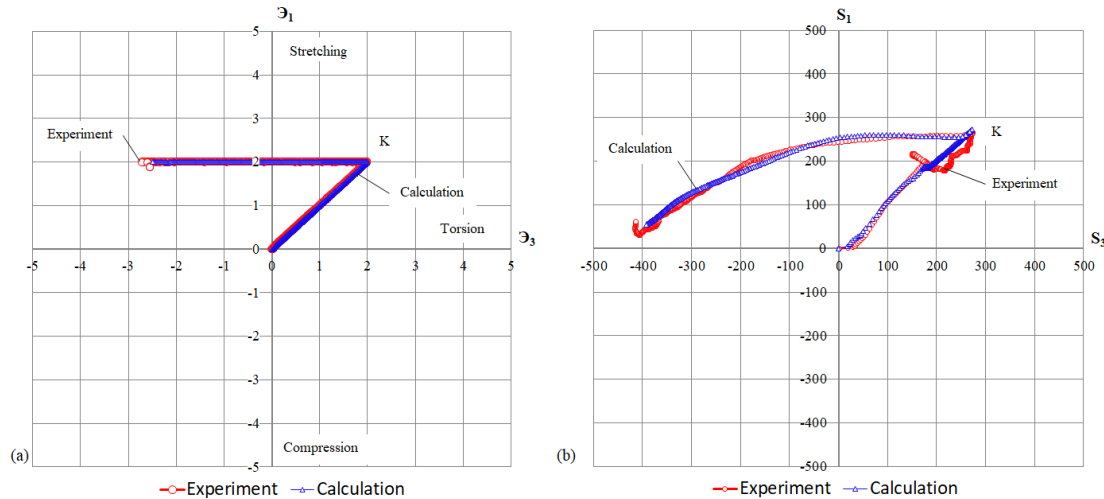
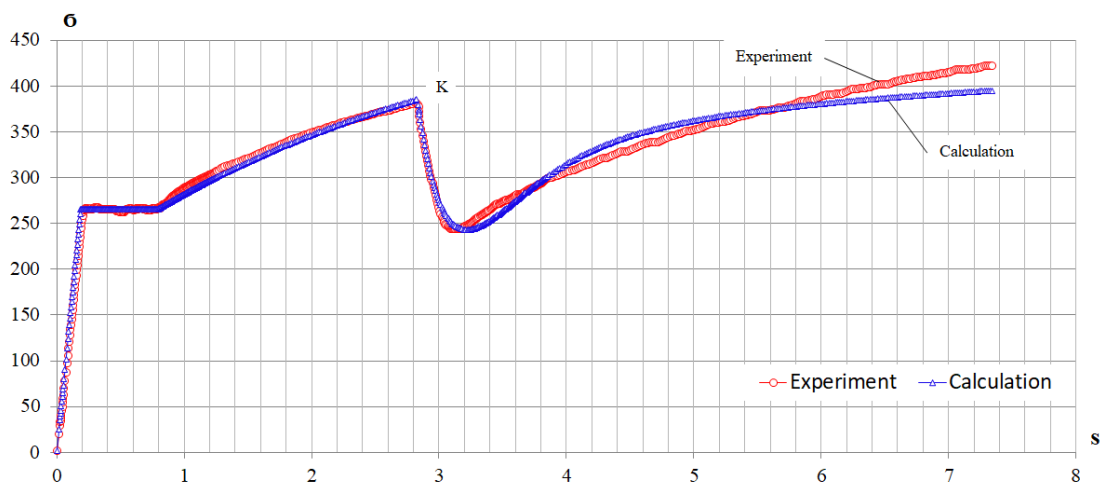
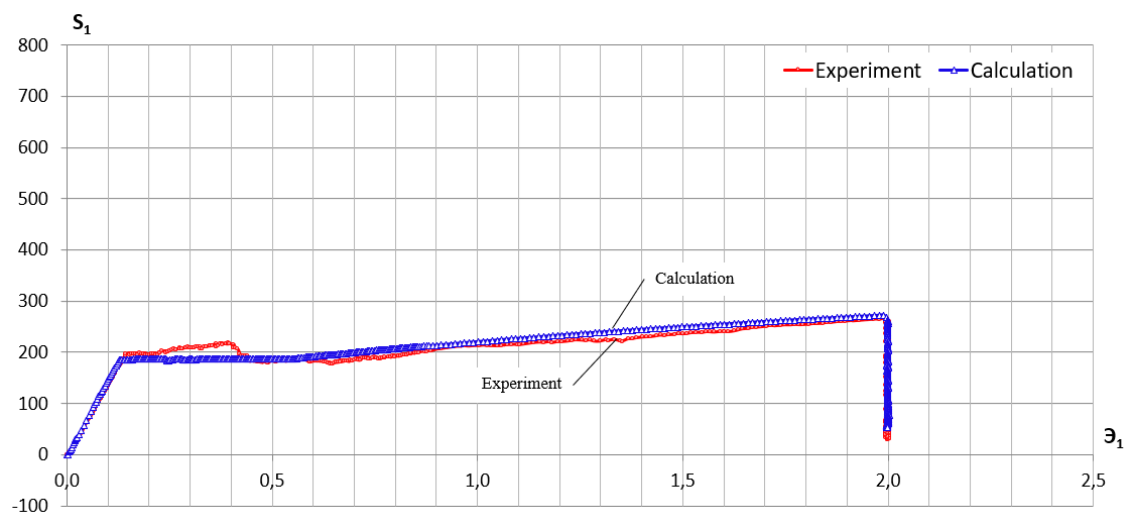


Рис. 5. Экспериментальные и расчетные программы деформирования образцов (а), % и отклик на программу экспериментов (б), МПа

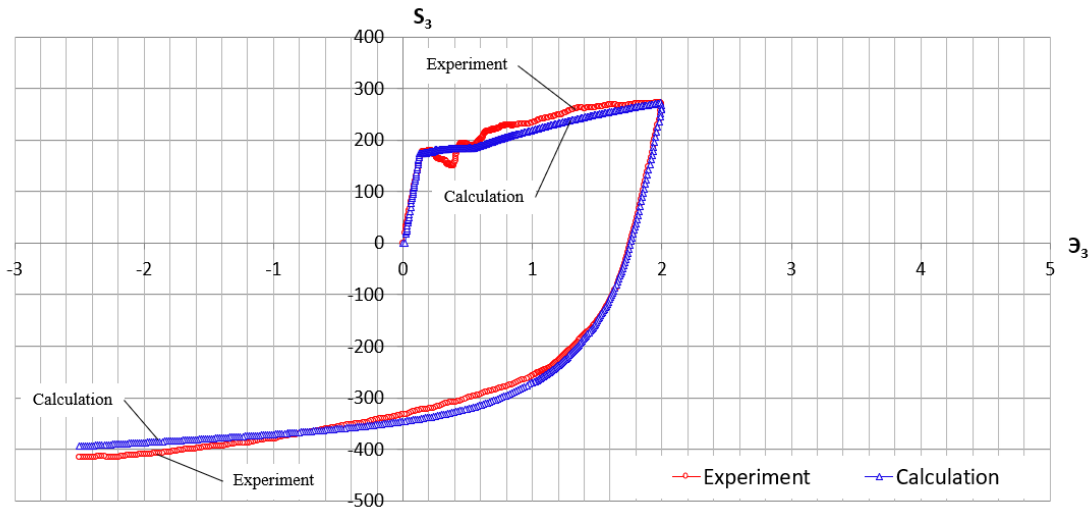
4. Основные результаты. По результатам обработки опытных данных была построена диаграмма деформирования $\sigma - s$ (рис. 6). После излома траектории, в точке K ($\Theta_1 = \Theta_3 = 2\%$), на диаграмме наблюдается «нырок» модуля вектора напряжений. Экспериментальная кривая $\sigma = \sigma(s)$ проходит ниже универсальной кривой $\sigma = \Phi(s)$, при этом примерно оставаясь параллельной ей. Наибольшее отклонение расчетной кривой от экспериментальной кривой на участке до излома не превышает 7,1 МПа, после излома 27,3 МПа.

Рис. 6. Диаграммы деформирования σ (МПа) – s (%)

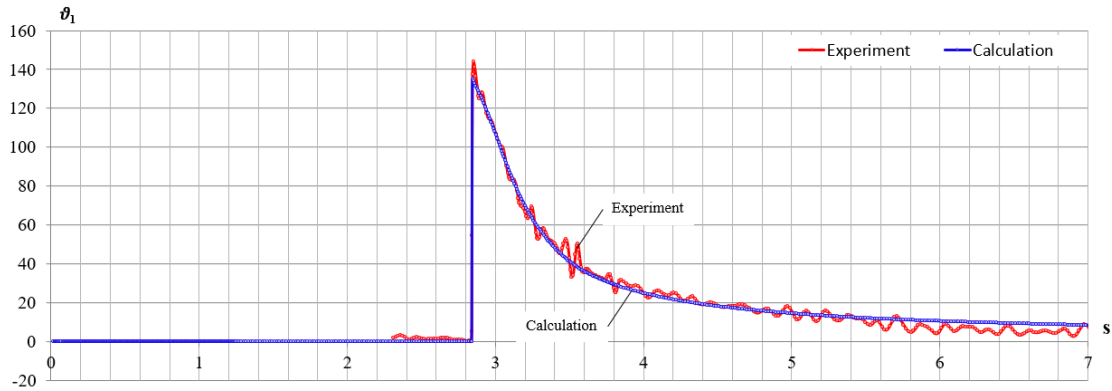
На рисунке 7 показаны локальные диаграммы деформирования в плоскости $S_1 - \Theta_1$, на рисунке 8 в плоскости $S_3 - \Theta_3$. Расчетные кривые лежат достаточно близко к экспериментальным.

Рис. 7. Диаграммы локальные S_1 (МПа) – Θ_1 (%)

На рисунке 9 приведены зависимости угла сближения ϑ_1 от длины дуги траектории s . На участке до излома траектории, при простом пропорциональном деформировании угол сближения, характеризующий векторные свойства материалов имеет значения близкие к 0. После излома траектории деформирования

Рис. 8. Диаграммы локальные S_3 (МПа) – ϵ_3 (%)

наблюдается скачкообразное возрастание угла на величину близкую к значению угла излома 135° с последующим уменьшением по закону близкому к экспоненциальному. Наибольшее отклонение расчетной диаграммы от экспериментальной не превышает 10%.

Рис. 9. Диаграммы угла сближения ϑ_1 (град) – s (%)

На рисунке 10 показаны совмещённые диаграммы используемые при подборе параметров аппроксимации. Кривая $\sigma = \Phi(s)$ построена при значениях параметров $s^T=0.2$ %, $s_*^T=0.79$ %, $\sigma^T=264.5$ МПа, $\sigma_a=235$ МПа, $\beta=0.35$. Кривая $\sigma = \sigma(s)$ построена при значениях параметров $A=308.3$, $f_0=0.90$, $b=0.30$, $\gamma=2.96$, $p=1.04$, $q=0.75$. Подбор параметров аппроксимации производился по

условию минимизации значения модуля разности экспериментальных и расчетных значений.

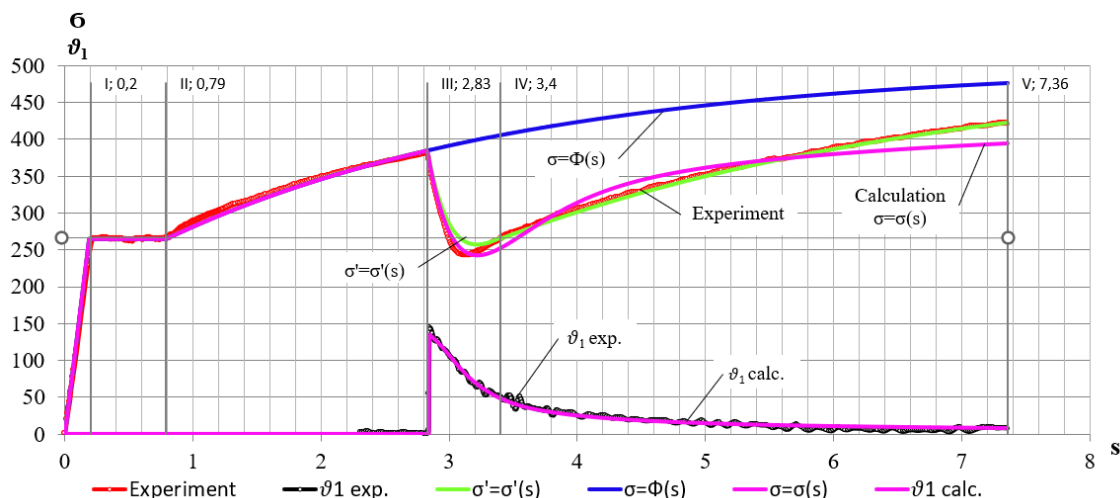


Рис. 10. Совмещенные диаграммы, описывающие процесс определения параметров аппроксимации σ (МПа), ϑ_1 (град), s (%)

Для повышения точности аппроксимации предложено введение дополнительного участка IV, в момент, когда после нырка достигается значение равное σ^T , начиная с которого кривую можно аппроксимировать, используя выражение для универсальной кривой с другим параметром β . На рисунке 10 кривая $\sigma' = \sigma'(s)$ построена при $A=280$ и $\beta=0.28$. Она проходит выше экспериментальной кривой на участке III, однако более точно описывает поведение на участке IV.

Заключение. Таким образом, модель теории упругопластических процессов, использующая аппроксимации В.Г. Зубчанинова достаточно точно описывает поведение материала сталь 45 при деформировании по плоским двухзвенным траекториям с углом излома 135 градусов. Дальнейший интерес представляет сравнение параметров аппроксимации при зеркальном отражении траектории деформирования и больших углах излома. Результаты могут быть полезны при разработке новых теорий и моделей [10], методов математического моделирования [11], при оценке срока службы материалов [12,13], исследовании механизмов деформации [14,15] и т.д.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 352 с. – ISBN 978-5-9221-1235-2.
- [2] Гультяев, В. И. Экспериментальное изучение упругопластического деформирования конструкционных материалов на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ / В. И. Гультяев, А. Н. Булгаков // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 2(56). – С. 53-64. – DOI 10.37972/chgpu.2023.56.2.006.
- [3] Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.
- [4] Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 2. Процессы сложного деформирования., Тверь: ТГТУ, 2004. – 184 с.
- [5] Ильюшин А.А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность / Составители Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 480 с. - ISBN 5-9221-0364-4.
- [6] Алексеев, А. А. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским траекториям / А. А. Алексеев, В. Г. Зубчанинов, В. И. Гультяев // Упругость и неупругость : материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина, Москва, 20–21 января 2021 года. – Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова Издательский Дом (типография), 2021. – С. 171-176.
- [7] Зубчанинов В.Г. Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов / В.Г. Зубчанинов // Прикл. Механика. 1989. Т.25. №5. – С.3-12.
- [8] Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред. – Тверь: ЧуДо, 2000. – 703 с. – ISBN-5-7995-0148-9.
- [9] Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности / В.Г. Зубчанинов // – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
- [10] Бондарь, В. С. Теории пластичности при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций / В. С. Бондарь, Д. Р. Абашев, Д. Ю. Фомин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 35-47. – DOI 10.15593/perm.mech/2021.3.04.
- [11] Молодцов, И. Н. Определяющие уравнения с диссипативными напряжениями / И. Н. Молодцов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2023. – № 3. – С. 47-55. – DOI 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-8.
- [12] Naimark O, Oborin V, Bannikov M, Ledon D. Critical Dynamics of Defects and Mechanisms of Damage-Failure Transitions in Fatigue // Materials. 2021; 14(10):2554. <https://doi.org/10.3390/ma14102554>.

- [13] Jin-Ha Hwang, Yun-Jae Kim, Jin-Weon Kim, Sang-Eon Kim Initial cyclic hardening behavior of cracked structures under large-amplitude cyclic loading // Engineering Fracture Mechanics, Volume 254, 2021, 107911, ISSN 0013-7944, <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107911>.
- [14] Yanan Hu, Xuejun Deng, Qianhua Kan, Shengchuan Wu, Yali Li, Liming Lei, Leilei Wang, Guozheng Kang Influence of temperature on deformation and damage mechanisms of wire + arc additively manufactured 2219 aluminum alloy // Engineering Fracture Mechanics, Volume 292, 2023, 109675, ISSN 0013-7944. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109675>.
- [15] Nobutada Ohno, Hisashi Nakamoto, Yusuke Morimatsu, Dai Okumura Modeling of cyclic hardening and evaluation of plastic strain range in the presence of pre-loading and ratcheting // International Journal of Plasticity, Volume 145, 2021, 103074, ISSN 0749-6419. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2021.103074>.

REFERENCES

- [1] Zubchaninov V. G. Mechanics of Plastic Media Processes. Moscow : FIZMATLIT, 2010. P. 352. ISBN: 978-5-9221-1235-2.
- [2] Gulyaev V. I., Bulgakov A. N. Experimental Study of Elastoplastic Deformation of Structural Materials on the Automated Testing System SN-EVM // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2023. no. 2(56). P. 53–64. DOI: 10.37972/chgpu.2023.56.2.006.
- [3] Zubchaninov V. G., Ohlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity: Monograph. Book 1. Complex Deformation Processes. Tver : Tver State Technical University, 2003. P. 172.
- [4] Zubchaninov V. G., Ohlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental Plasticity: Monograph. Book 2. Complex Deformation Processes. Tver : Tver State Technical University, 2004. P. 184.
- [5] Ilyushin A. A. Collected Works (1946–1966). Vol. 2. Plasticity / Ed. by E. A. Il'yushina, M. R. Korotkina. Moscow : FIZMATLIT, 2004. P. 480. ISBN: 5-9221-0364-4.
- [6] Alekseev A. A., Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I. Modeling of Complex Elastoplastic Deformation Processes of Materials Along Planar Trajectories // Elasticity and Inelasticity: Proceedings of the International Scientific Symposium Dedicated to the 110th Anniversary of A. A. Ilyushin. Moscow : Moscow State University Publishing House, 2021. P. 171–176.
- [7] Zubchaninov V. G. On the Constitutive Equations of the Theory of Elastoplastic Processes // Applied Mechanics. 1989. Vol. 25, no. 5. P. 3–12.
- [8] Zubchaninov V. G. Mechanics of Continuous Deformable Media. Tver : ChuDo, 2000. P. 703. ISBN: 5-7995-0148-9.
- [9] Zubchaninov V. G. Mathematical Theory of Plasticity. Tver : Tver State Technical University, 2002. P. 300.
- [10] Bondar' V. S., Abashev D. R., Fomin D. Yu. Theories of Plasticity Under Complex Loading Along Planar Strain Trajectories // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2021. no. 3. P. 35–47. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.04.
- [11] Molodtsov I. N. Constitutive Equations with Dissipative Stresses // Moscow University Bulletin. Series 1: Mathematics. Mechanics. 2023. no. 3. P. 47–55. DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-8.
- [12] Critical Dynamics of Defects and Mechanisms of Damage-Failure Transitions in Fatigue / O. Naimark [et al.] // Materials. 2021. Vol. 14, no. 10. P. 2554. DOI: 10.3390/ma14102554.
- [13] Initial Cyclic Hardening Behavior of Cracked Structures Under Large-Amplitude Cyclic Loading / Jin-Ha Hwang [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 254. P. 107911. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107911.

- [14] Influence of Temperature on Deformation and Damage Mechanisms of Wire + Arc Additively Manufactured 2219 Aluminum Alloy / Yanan Hu [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. 2023. Vol. 292. P. 109675. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2023.109675.
- [15] Modeling of Cyclic Hardening and Evaluation of Plastic Strain Range in the Presence of Pre-loading and Ratcheting / Nobutada Ohno [et al.] // International Journal of Plasticity. 2021. Vol. 145. P. 103074. DOI: 10.1016/j.ijplas.2021.103074.

Д. О. Евтихов¹, И. Л. Савостьянова^{1,2}, С. И. Сенашов^{1,2}, О. Н. Черепанова²

КРУЧЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРОКАТНОГО ПРОФИЛЯ, АРМИРОВАННЫХ УПРУГИМИ ВОЛОКНАМИ

¹Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика
М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

²Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

Аннотация. Рассмотрена задача об упругопластическом кручении стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами. Для решения задачи использовался метод законов сохранения. На основе аналитического решения разработаны программы для ЭВМ для нахождения упругопластической границы стержня. Приведены результаты работы программы с различными значениями крутящего параметра для стержней типа "тавр" "двутавр" "швеллер" "крест" и Z-образных профилей. Расчеты производились на персональном компьютере, время представленных в статье расчетов по построению упругопластических границ составляет 35 - 90 минут, в зависимости от вида стержня.

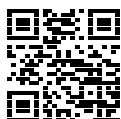
Ключевые слова: Упругопластическая граница, задача кручения стержней прокатного профиля, стержни, армированные упругими волокнами, законы сохранения.

Евтихов Денис Олегович, аспирант кафедры информационных экономических систем; e-mail: evtikhov_do@sibsau.ru; AuthorID:1036711

Савостьянова Ирина Леонидовна, зам. директора НОЦ Институт космических исследований и высоких технологий; зав. учебно-исследовательской лабораторией фундаментальной и прикладной механики; e-mail: ruppa@inbox.ru; AuthorID:742389

Сенашов Сергей Иванович, профессор кафедры информационных экономических систем; профессор кафедры математического моделирования и процессов управления; e-mail: Sen@sibsau.ru; AuthorID:214483

Черепанова Ольга Николаевна, директор Института математики и фундаментальной информатики; e-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru; AuthorID:151098



для цитирования: Евтихов Д. О., Савостьянова И. Л., Сенашов С. И., Черепанова О. Н. Кручение упругопластических стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 125-138. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.006. EDN: UBFKAC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

D. O. Evtikhov¹, I. L. Savostyanova^{1,2}, S. I. Senashov^{1,2}, O. N. Cherepanova².

TORSION OF ELASTIC-PLASTIC BARS OF ROLLED PROFILE REINFORCED WITH ELASTIC FIBERS

¹*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

²*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

Abstract. The problem of elastic-plastic torsion of rolled profile rods reinforced with elastic fibers is considered. Conservation laws were used to solve the problem. Computer programs for finding the elastic-plastic boundary of the rod are developed. The results of the program operation with different values of the torque parameter for bars T-beam, I-beam, channel, cross and Z-shaped profiles are given. The calculations were performed on a personal computer, the calculation time of the elastic-plastic boundaries presented in the article is 35-90 minutes depending on the type of rod.

Keywords: Elastic-plastic boundary, torsion problem of rolled profile rods, rods reinforced with elastic fibers, conservation laws.

Denis O. Evtikhov, Scientific Researcher; e-mail: evtikhov_do@sibsau.ru; AuthorID:1036711

Irina L. Savostyanova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: ruppa@inbox.ru; AuthorID:742389

Sergey I. Senashov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: Sen@sibsau.ru; AuthorID:214483

Olga N. Cherepanova, Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: OCherepanova@sfu-kras.ru; AuthorID:151098



to cite this article: Evtikhov D. O., Savostyanova I. L., Senashov S. I., Cherepanova O. N. Torsion of elastic-plastic bars of rolled profile reinforced with elastic fibers // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 125-138. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.006

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Значительный вклад в развитие теории пластичности внесли выдающиеся ученые А.А. Ильюшин, Д.Д. Ивлев, В.Г. Зубчанинов. [1, 2] Их фундаментальные работы заложили основу для современных исследований напряженно-деформированного состояния композиционных материалов, представляющих особый интерес для инженерных исследований.

Современные тенденции в материаловедении демонстрируют возрастающий интерес к композиционным материалам. В работе [3] представлены результаты создания нового композита, изготавливаемого методами порошковой металлургии с использованием комбинации углеродных волокон и желез; показано, что величины прочности при изгибе и растяжении могут превышать 2000 и 1000 МПа. Методология структурно-функционального анализа, рассмотренная в [4], предлагает новый подход к проектированию силовых элементов из композиционных материалов. Разработанные структуры демонстрируют значения удельной несущей способности, приближающиеся к теоретическому максимуму. Исследования [5] посвящены анализу упругого поведения двухслойных композитных систем с адгезионным соединением в условиях плоской деформации. Работа [6] рассматривается поведение материалов при динамических нагрузках, характерных для высокоскоростного соударения. И в [7] рассмотрены композитные системы с упругопластической матрицей и упругими волокнами, ориентированными вдоль оси элемента.

Отдельной задачей, актуальной для инженерных исследований, является задача нахождения упругопластической границы в скручиваемых стержнях. Решение этой задачи позволит дать оценку предела прочности изделия. Так же с точки зрения инженерной практики важно, чтобы пластическому деформированию подвергались только близкие к внешней поверхности слои материала, и чтобы в процессе деформирования не произошло разрушение упрочняемого изделия и не ухудшились его эксплуатационные характеристики. В последнее время широкое распространение получили стержни прокатного профиля, армированные упругими волокнами. Они обладают рядом преимуществ перед металлическими изделиями. Как правило, они меньше весят, и армирование позволяет им выдерживать большие нагрузки до разрушения, чем их металлические аналоги. Однако, устоявшихся методов расчета их несущей способности в настоящее время практически нет.

Традиционные методы симметричного анализа дифференциальных уравнений [8] получили развитие в работах [9–11], где продемонстрирована эффективность законов сохранения для решения краевых задач. Преимущество этого подхода определяется тем, что законы сохранения глобальны по своей сути, в отличие от локальных симметрий, рассмотренных ранее [12].

Развитие решения поставленных проблем приводят к задаче определения упругопластической границы в армированных упругими волокнами стержнях прокатного профиля [14]. До появления работ [15–17] отсутствовали эффективные методы решения задач определения упругопластической границы. Предложенный авторами на основе законов сохранения подход позволил получить

аналитические решения для определения границы пластических деформаций. В данной работе предложен метод построения упругопластической границы в скручиваемых стержнях прокатного профиля, армированных упругими волокнами.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу кручение стержня прокатного профиля под действием крутящего момента. Предполагается что матрица из прокатного профиля усилена упругими волокнами. Граница контакта слоев расположена вдоль оси oz . Боковая граница стержня свободна от напряжений, но граница находится в пластическом состоянии. Компоненты тензора напряжений в точке вычисляются через систему контурных интегралов, выведенных из законов сохранения, вычисленных по боковой границе и границе волокон. Критерий перехода в пластическое состояние формулируется через сравнение второго инварианта девиатора напряжений с критическим значением предела текучести материала. В тех точках, где достигается предел текучести определяется пластическое состояние, в остальных – упругое. Это позволяет построить границу между пластической и упругой областями. Данная методика дает способ вычислить упругопластические границы для основных прокатных профилей стержней. Отметим, что предлагаемая методика развивается на основе предыдущих успешных решений для двумерных задач пластичности, для анализа кручения изотропных стержней и упругих сред для тел конечных размеров.

Рассмотрим прямолинейный стержень, изготовленный из упруго-пластического материала, армированный упругими n волокнами.

Матрица стержня имеет модуль упругости G и предел текучести при чистом сдвиге k . Волокна расположены вдоль стержня в произвольном порядке, параллельно оси z . Каждое волокно имеет круглое сечение, центр располагается в точке A_i с координатами $(x_i; y_i)$, радиус волокна равен R , модуль упругости G_i . Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы. Касательное напряжение между волокном и матрицей равно $\tau < k$.

Заданный процесс описывается уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

и уравнением совместности деформаций

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + a, \quad (2)$$

где $a = -2G\theta$, θ - угол закручивания, G - модуль упругости.

Граничные условия на боковой поверхности стержня, свободной от напряжений, и находящейся в пластическом состоянии $\tau_{xz}n_0 + \tau_{yz}m_0 = 0$, $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$, где n_0, m_0 - компоненты вектора нормали к боковой поверхности; которые можно записать в виде:

$$\tau_{xz} = \pm mk + \tau_{yz} = \pm nk, \quad (3)$$

На границе между волокном и матрицей выполняются условия $\tau_{xz}m_i - \tau_{yz}n_i = \tau$, $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$, где n_i, m_i - компоненты вектора нормали к боковой поверхности i -го волокна, которые запишем в виде.

$$\tau_{xz} = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \tau_{yz} = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2} \quad (4)$$

Далее в формулах (3) - (4) выбирается верхний знак.

Законы сохранения уравнений (1) - (2)

Для удобства дальнейших вычислений введем следующие обозначения

$$\tau_{xz} = u, \tau_{yz} = v$$

Тогда задача (1) - (4) запишется так

$$F_1 = u_x + v_y = 0, F_2 = u_y - v_x - a = 0. \quad (5)$$

на боковой поверхности

$$u \pm mk, v \mp nk$$

на границе волокна и матрицы

$$u = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, v = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2}$$

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (5) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (6)$$

где ω_1, ω_2 - некоторые линейные операторы, одновременно не равные тождественно нулю.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2. \quad (7)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ - функции только от x, y .

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 + \alpha_y^2 &= 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \alpha^1 = \omega_1, \\ \beta^1 &= -\omega_2, \alpha^2 = \omega_2, \beta^2 = \omega_1, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -a\omega_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -a\beta^1, \quad (8)$$

Рассмотрим для системы уравнений (8) два решения:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^1 &= -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= -a \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}, \gamma^2 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
\beta^1 &= -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
\gamma^1 &= 0, \gamma^2 = -a \arctg \frac{y - y_0}{x - x_0},
\end{aligned} \tag{10}$$

где x_0, y_0 - постоянные.

Вычисление напряженного состояния в точке x_0, y_0

Пусть x_0, y_0 - произвольная точка, принадлежащая связующему, и пусть в этой точке сохраняющийся ток имеет особенность вида (9) или (10). Тогда из (6) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma} A dx - B dy - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} A dx - B dy - \oint_{\varepsilon} A dx - B dy = 0, \tag{11}$$

где ε - окружность: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$.

Сечение стержня показано на рисунке 1.

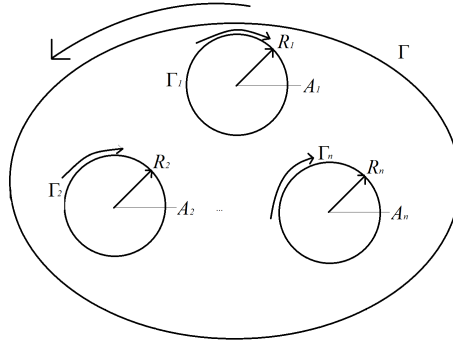


Рис. 1. Сечение стержня

Рассмотрим решение (9), полагая $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi, y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$ тогда из (11) с учетом (9), при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned}
2\pi\tau_{xz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0} (m_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - a \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0}) dy - \\
& - (m_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dx + \\
& + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} (\frac{(m_i\tau + n_i\sqrt{k^2 - \tau^2})(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0k \frac{(-n_i\tau + m_i\sqrt{k^2 - \tau^2})(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dy - \\
& - (m_i\tau + n_i\sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_i\tau + m_i\sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dx,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
2\pi\tau_{yz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0} (m_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dy - \\
& - (-m_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - a \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}) dx + \\
& + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} (\frac{(m_i\tau + n_i\sqrt{k^2 - \tau^2})(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0k \frac{(-n_i\tau + m_i\sqrt{k^2 - \tau^2})(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dy - \\
& - (- (m_i\tau + n_i\sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_i\tau + m_i\sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) dx,
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, формулы (12) и (13) позволяют вычислить напряженное состояние в любой точке связующего материала. Те точки, где $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$ - будут находиться в пластическом состоянии, остальные точки среды, а также волокна, будут оставаться упругими. Предложенный метод решения позволяет построить упругопластическую границу в скручиваемом стержне и тем самым оценить его несущую способность.

На основе приведенных выше формул нами были в среде Maple разработаны программы для ЭВМ [18–22]. Результаты расчета некоторых из них представлены далее.

На рисунке 2 представлено изменение упругопластические границы прокатного профиля П-образного сечения, армированного упругими волокнами в зависимости от изменения значения крутящего параметра a .

Профиль "швеллер П-образного сечения" используется в качестве опорного изделия в строительстве и тяжелом машиностроении. Подходит для создания межэтажных перекрытий, лестниц, элементов строительной и специальной техники. Может иметь прямые и наклонные грани полок.

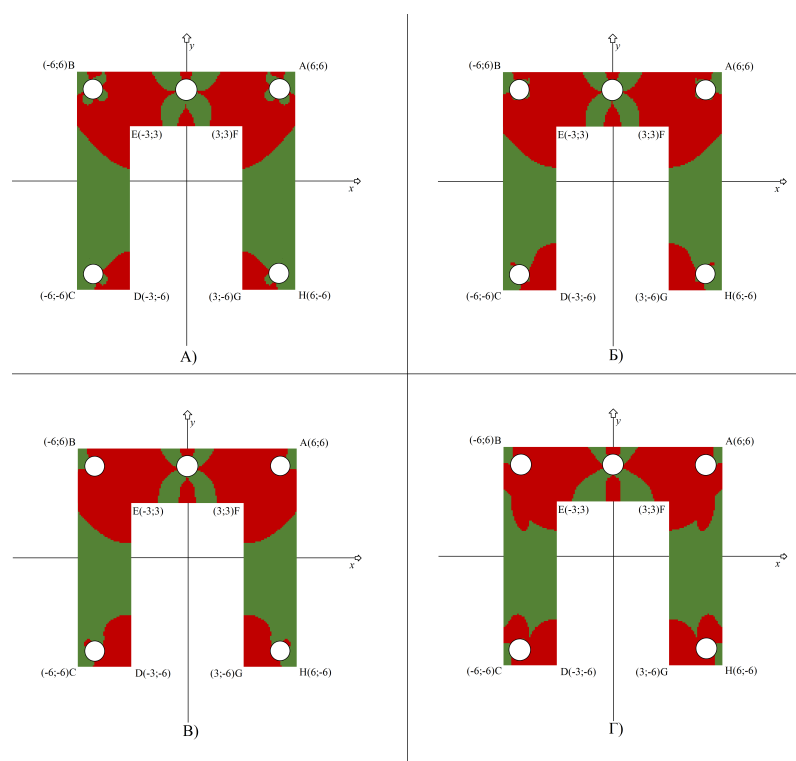


Рис. 2. Упругопластическая граница профиля П-образного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А) $a=-0,6$ Б) $a=-1$ В) $a=-1,6$ Г) $a=-3$.

На рисунках 3, 4 представлено изменение упругопластические границы прокатного профилей Т-образного и Н-образного сечения, армированного упругими волокнами в зависимости от изменения значения крутящего параметра a .

"Тавр" имеет Т-образную форму, "двутавр" Н-образную. Оба профиля используются, главным образом, в строительстве и тяжелом машиностроении. Наличие ребра жесткости обеспечивает профилю повышенную прочность, поэтому он хорошо переносит нагрузки на изгиб. "Двутавры" могут иметь параллельные или наклонные грани полок.

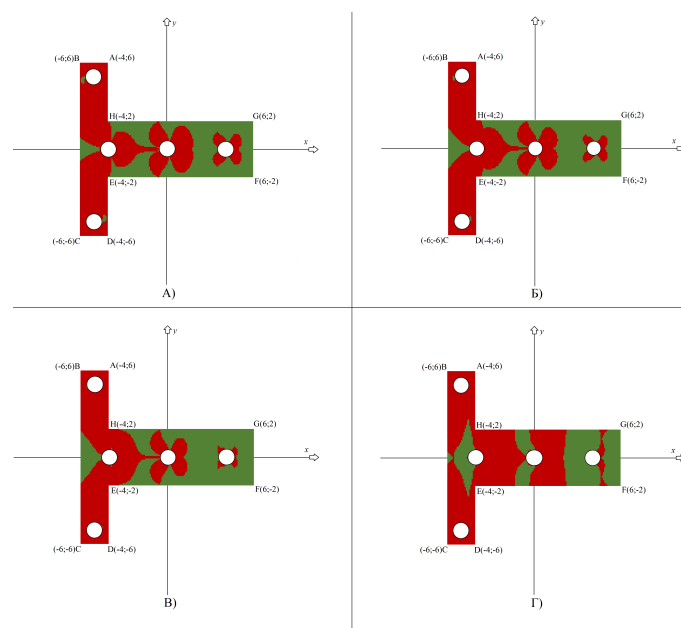


Рис. 3. Упругопластическая граница профиля Т-образного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А) $a=0,6$ Б) $a=-1$ В) $a=-1,6$ Г) $a=-3$.

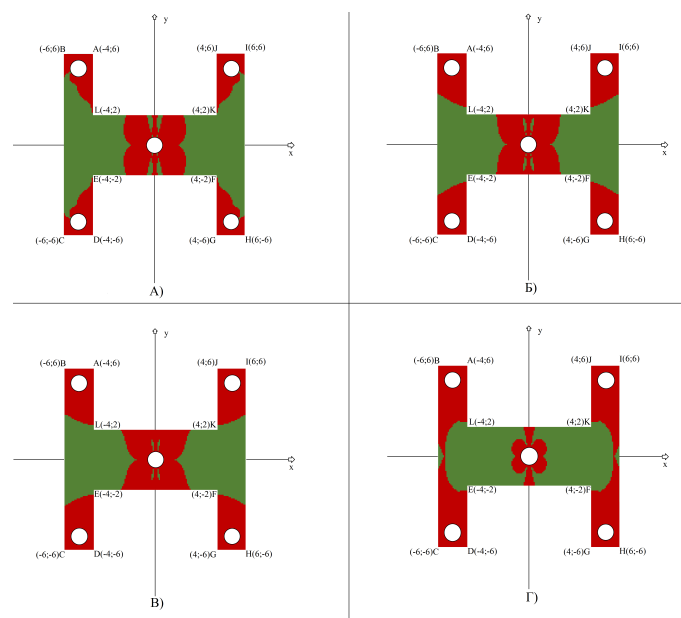


Рис. 4. Упругопластическая граница профиля Н-образного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А) $a=0,6$ Б) $a=-1$ В) $a=-1,6$ Г) $a=-3$

На рисунке 5 представлено изменение упругопластические границы прокатного профиля Z-образного сечения, армированного упругими волокнами, в зависимости от изменения значения крутящего параметра a .

Профиль Z был разработан специально для вагоностроительной отрасли - он широко применяется при производстве железнодорожных платформ и полувагонов.

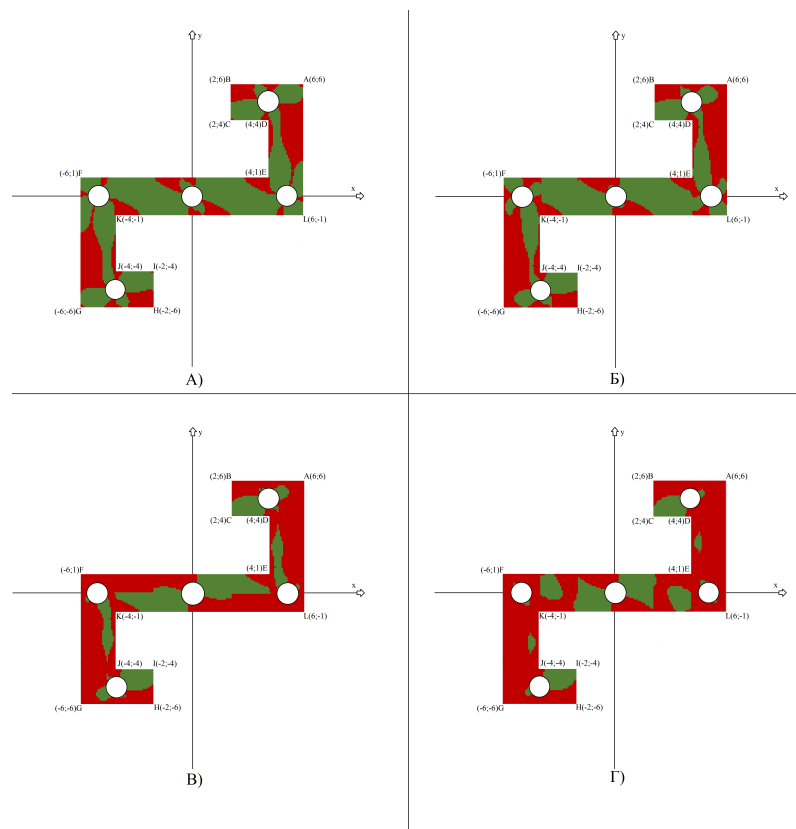


Рис. 5. Упругопластическая граница профиля Z-образного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А) $a=-0,6$ Б) $a=-1$ В) $a=-1,6$ Г) $a=-3$

На рисунке 6 представлено изменение упругопластические границы прокатного профиля крестообразного сечения, армированного упругими волокнами в зависимости от изменения значения крутящего параметра a .

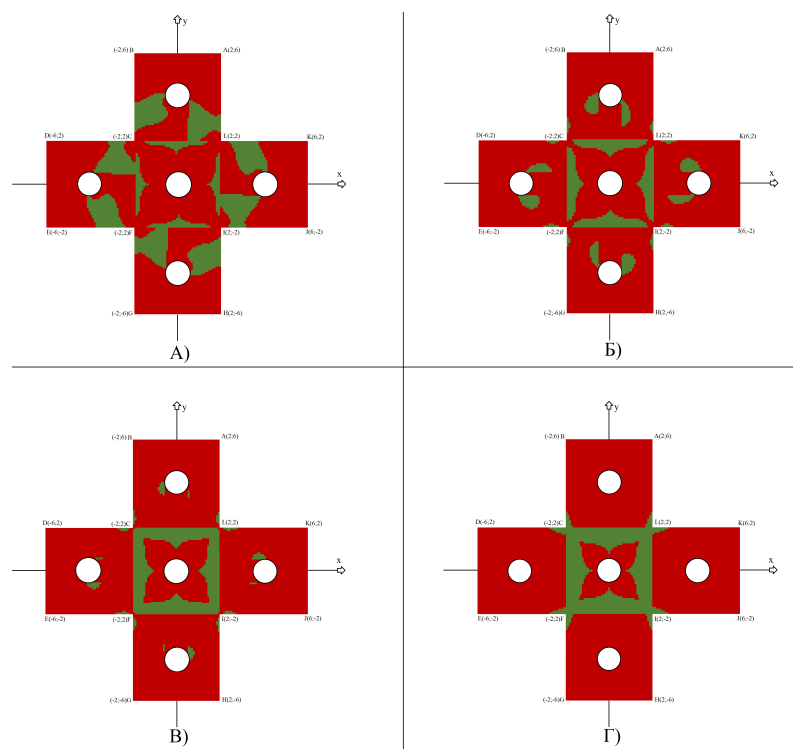


Рис. 6. Упругопластическая граница профиля крестообразного сечения, при изменении значения крутящего параметра в А) $a = -0,6$ Б) $a = -1$ В) $a = -1,6$ Г) $a = -3$.

Заключение. Рассмотрена задача о упругопластическом кручении стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами. Для решения задачи использовались законы сохранения. На основе аналитических решений разработаны программы для ЭВМ, определяющие упругопластические границы стержня. Приведены результаты работы программы с различными значениями крутящего параметра для стержней типа тавр, двутавр, швеллер, крест и Z-образных профилей. Расчеты производились на персональном компьютере, время расчетов представленных в статье упругопластических границ составляет 35 - 90 минут, в зависимости от вида стержня.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. 100%.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. 100%.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Механика процессов пластических сред / В. Г. Зубчанинов. - Москва: Физматлит, 2010. - 352 с. ; ISBN 978-5-9221-1235-2
- [2] Математическая теория пластичности: Монография / В. Г. Зубчанинов; М-во образования Рос. Федерации. Твер. гос. техн. ун-т. — Тверь: Твер. гос. техн. ун-т, 2002. — 299 с. ; ISBN 5-7995-0200-0
- [3] Композитная сталь / Н. С. Саркисян, А. О. Саркисян, А. А. Колчин [и др.] // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 202-207. – DOI 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207. – EDN EAQPSQ.
- [4] Структурно-функциональный анализ как основа проектирования структуры массозффективных силовых элементов конструкций из композиционных материалов / / П. В. Соловьев, Ю. С. Первушин, В. С. Жернаков, А. В. Ахмедьянов // Композиты и наноструктуры. – 2023. – Т. 15, № 4. – С. 237-246. – DOI 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246. – EDN FASWSZ.
- [5] Богачева, В. Э. Разрыв по моде I адгезионного слоя с учетом диагональных компонент тензора напряжений / В. Э. Богачева, Л. В. Глаголев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. – № 4(54). – С. 47-56. – DOI 10.37972/chgru.2022.54.4.005. – EDN ULGOYA.
- [6] Голышев А. А. Влияние керамического волокна SiC в металломатричном композите на его стойкость при высокоскоростном нагружении/ А. А. Голышев, С. Д. Долгова // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 6(376). – С. 145-149. – DOI 10.15372/PMTF20220616. – EDN PUGZHK.
- [7] Сенашов С. И. Изгиб композитного бруса / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова, А. Н. Яхно // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2024. – Т. 25, № 1. – С. 25-32. – DOI 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32. – EDN RRHQRV.
- [8] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 126 с.
- [9] Сенашов, С. И. Об упругопластическом кручении стержня / С. И. Сенашов, О. Н. Черепанова, А. В. Кондрин // Решетневские чтения. – 2013. – Т. 2. – С. 115-116. – EDN SJCMAN.
- [10] Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012.-139 с.
- [11] Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Упруго-пластичность и законы сохранения. СибГУ им. М.Ф. Решетнева, Красноярск, 2023.-184 с.
- [12] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
- [13] Сенашов, С. И. Напряженное состояние композитной консоли / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16, № 1. – С. 56-61. – DOI 10.36236/1999-7590-2024-16-1-56-61. – EDN VKPMVJ.
- [14] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 126 с.
- [15] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.192 с.
- [16] Senashov S. I. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2012. – Vol. 8. – P. 071. – DOI 10.3842/SIGMA.2012.071. – EDN RGOBNN.

- [17] Сенашов С. И. Об упругопластическом кручении стержня / С. И. Сенашов, О. Н. Черепанова, А. А. Кондрин // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. – 2013. – № 3(49). – С. 100-103. – EDN RFWONN.
- [18] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614228 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого профиля типа «тавр», армированного упругими волокнами: № 2025612747 : заявл. 12.02.2025 : опубл. 20.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.
- [19] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614229 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого профиля типа «двутавр», армированного упругими волокнами: № 2025612437 : заявл. 12.02.2025 : опубл. 20.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.
- [20] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614585 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого П-образного профиля, армированного упругими волокнами: № 2025612762 : заявл. 12.02.2025 : опубл. 24.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.
- [21] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614586 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого Z-образного профиля, армированного упругими волокнами: № 2025612454: заявл. 12.02.2025 : опубл. 24.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.
- [22] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614704 Российская Федерация. Построение упругопластической границы скручиваемого крестообразного профиля, армированного упругими волокнами: № 2025612438 : заявл. 12.02.2025 : опубл. 25.02.2025 / Д. О. Евтихов, И. Л. Савостьянова, С. И. Сенашов, Черепанова О. Н.

REFERENCES

- [1] Mechanics of processes of plastic media / V. G. Zubchaninov. - Moscow: Fizmatlit, 2010. - 352 c. ; ISBN 978-5-9221-1235-2 (in Russian).
- [2] Mathematical theory of plasticity: Monograph / V. G. Zubchaninov; Ministry of Education of the Russian Federation. Federation. Tver. gos. tehn. un. university. - Tver: Tver State Technical University, 2002. - 299 c. ; ISBN 5-7995-0200-0 (in Russian).
- [3] Composite steel / N. S. Sarkisyan, A. O. Sarkisyan, A. A. Kolchin [et al.] // Composites and Nanostructures. - 2024. - T. 16, № 3. - С. 202-207. - DOI 10.36236/1999-7590-2024-16-3-202-207. - EDN EAQPSQ. (in Russian).
- [4] Structural and functional analysis as a basis for designing the structure of mass-effective force elements of composite material structures // P. V. Soloviev, Yu. S. Pervushin, V. S. Zhernakov, A. V. Akhmedyanov // Composites and nanostructures. - 2023. - T. 15, № 4. - С. 237-246. - DOI 10.36236/1999-7590-2023-15-4-237-246. - EDN FASWSZ. (in Russian).
- [5] Bogacheva, V. E. Breaking by mode I of the adhesion layer taking into account the diagonal components of the stress tensor / V. E. Bogacheva, L. V. Glagolev // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of limit state. 2022. - № 4(54). - С. 47-56. - DOI 10.37972/chgpu.2022.54.4.005. - EDN ULGOYA. (in Russian).
- [6] Golyshev A. A. Influence of SiC ceramic fiber in metal matrix composite on its resistance under high-speed loading/ A. A. Golyshev, C. D. Dolgova // Applied Mechanics and Technical Physics. - 2022. - T. 63, № 6(376). - С. 145-149. - DOI 10.15372/PMTF20220616. - EDN PUGZHK. (in Russian).
- [7] Senashov S. I. Bending of a composite beam / S. I. Senashov, I. L. Savostyanova, A. N. Yakhno // Siberian Aerospace Journal. - 2024. - T. 25, № 1. - С. 25-32. - DOI 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32. - EDN RRHQRY. (in Russian).

- [8] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic-plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 126 c. (in Russian).
- [9] Senashov, S. I. On elastoplastic torsion of a rod / S. I. Senashov, O. N. Cherepanova, A. B. Kondrin // Reshetnev Readings. - 2013. - VOL. 2. - P. 115-116. - EDN SJCMAN. (in Russian).
- [10] Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. Mathematical issues of two-dimensional equations of ideal plasticity. Sib. gos. aerospace. un-t. Krasnoyarsk, 2012.-139 p. (in Russian).
- [11] Senashov S. I., Savostyanova I. L. Elastic-plasticity and conservation laws. M.F. Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, 2023.-184 p.
- [12] Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. M., Nauka, 1978. (in Russian).
- [13] Senashov, S. I. Stress state of a composite cantilever / S. I. Senashov, I. L. Savostyanova // Composites and Nanostructures. - 2024. - T. 16, № 1. - C. 56-61. - DOI 10.36236/1999-7590-2024-16-1-56-61. - EDN VKPMVJ. (in Russian).
- [14] Annin B. D., Cherepanov G. P. Elastic-plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 126 c. (in Russian).
- [15] Kiriakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations. Novosibirsk: Izd-vo SO RAS, 2001.192 p. (in Russian).
- [16] Senashov S. I. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2012. – Vol. 8. – P. 071. – DOI 10.3842/SIGMA.2012.071. – EDN RGOBNN.
- [17] Senashov S. I. On elastoplastic torsion of a rod / S. I. Senashov, O. N. Cherepanova, A. A. Kondrin // Bulletin of the Siberian State Aerospace University named after academician M.F. Reshetnev. - 2013. - № 3(49). - C. 100-103. - EDN RFWONN. (in Russian).
- [18] Certificate of state registration of computer program No. 2025614228 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of a torsion profile of “Tavr” type reinforced with elastic fibers: No. 2025612747 : applied. 12.02.2025 : publ. 20.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.
- [19] Certificate of state registration of computer program No. 2025614229 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of a torsion profile of “Dvutavr” type reinforced with elastic fibers: No. 2025612437 : submitted. 12.02.2025 : publ. 20.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.
- [20] Certificate of state registration of computer program No. 2025614585 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of a torsional Π -shaped profile reinforced with elastic fibers: No. 2025612762 : submitted. 12.02.2025 : publ. 24.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.
- [21] Certificate of state registration of computer program No. 2025614586 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of a torsional Z-shaped profile reinforced with elastic fibers: No. 2025612454 : submitted. 12.02.2025 : publ. 24.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.
- [22] Certificate of state registration of computer program No. 2025614704 Russian Federation. Construction of elastic-plastic boundary of torsional cross-shaped profile reinforced with elastic fibers: No. 2025612438 : applied. 12.02.2025 : publ. 25.02.2025 / D. O. Evtikhov, I. L. Savostyanova, S. I. Senashov, Cherepanova O. N.

Э. Б. Завойчинская, Г. Е. Лавриков

К АНАЛИЗУ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОМ НАГРУЖЕНИИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ЦИКЛАМИ

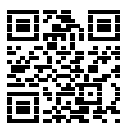
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия

Аннотация. Процесс хрупкого разрушения рассматривается как иерархический случайный процесс развития дефектов на микро-, мезо- и макроструктурных уровнях. Предельные состояния каждого уровня определяются линиями уровней микротвердости. Согласно подходу А. А. Ильюшина и его развитию В. Г. Зубчаниновым процесс усталостного разрушения определяется процессом нагружения. По модели усталостного масштабно-структурного разрушения записывается система определяющих соотношений для функции распределения вероятности хрупкого усталостного разрушения в зависимости от процесса нагружения и строятся кривые многоциклового усталости по уровням дефектности при нерегулярном циклическом нагружении. Для сплава 2024-T42 и стали S25C при симметричных нагружениях, состоящих из двух и трех блоков с разными амплитудами и числами циклов, представляются результаты расчетов по модели и их соответствие опытным данным.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, многоцикловая усталость, микротвердость по Виккерсу, кривая усталости по уровню микротвердости, нерегулярное нагружение.

Завойчинская Элеонора Борисовна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости; e-mail: elen@velesgroup.com; <https://orcid.org/0009-0001-9642-5008>; AuthorID: 8942

Лавриков Георгий Евгеньевич, студент кафедры теории упругости; e-mail: george.lavrikov@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0003-8258-2066>; AuthorID: 1197792



для цитирования: Завойчинская Э.Б., Лавриков Г.Е. К анализу предельных состояний материалов при нерегулярном нагружении с несимметричными циклами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 139–151. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.007. EDN: UXKW RP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

E. B. Zavoichinskaya, G. E. Lavrikov

ON THE ANALYSIS OF LIMIT STATES OF MATERIALS AT IRREGULAR LOADING WITH ASYMMETRIC CYCLES

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Abstract. The process of brittle failure is considered as a hierarchical stochastic process of defect development at the micro-, meso- and macrostructural levels. The limit states of each level are determined by the lines of microhardness levels. According to the approach of A. A. Ilyushin and its development by V. G. Zubchaninov, the fatigue failure process is determined by the loading process. According to the model of scale-structural fatigue, a system of constitutive relations is written for the probability distribution function of brittle failure depending on the loading process, and high-cycle fatigue curves are constructed based on defect levels at irregular cyclic loading. For alloy 2024-T42 and steel S25C at symmetric loading consisting of two and three blocks with different amplitudes and numbers of cycles, the results of calculations using the model and their correspondence to experimental data are presented.

Keywords: brittle failure, highcycle fatigue, Vickers microhardness, microhardness fatigue curve, irregular loading

Eleonora B. Zavoychinskaya, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor;
e-mail: elen@velesgroup.com;

<https://orcid.org/0009-0001-9642-5008>; AuthorID: 8942

Georgii E. Lavrikov, Student; e-mail: george.lavrikov@yandex.ru;

<https://orcid.org/0009-0003-8258-2066>; AuthorID: 1197792



to cite this article: Zavoichinskaya E. B., Lavrikov G. E. On the analysis of limit states of materials at irregular loading with asymmetric cycles // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 139–151. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.007

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Необходимость обеспечить длительную работоспособность элементов инженерных систем под воздействием эксплуатационных циклических нагрузок определяет актуальность задачи прогнозирования долговечности при многоцикловом нерегулярном нагружении. Цель данного исследования построить модель усталостного разрушения при различных программных нагружениях. В известных работах предлагаются критериальные зависимости для конкретных диапазонов амплитуд и определенных групп материалов. Основным недостатком, на наш взгляд, является то, что эти зависимости не основываются на эволюции процесса разрушения, который развивается в материале на разных масштабно-структурных уровнях.

Анализ известных экспериментально-теоретических результатов [1–10] по исследованию усталостного разрушения приводит к необходимости его рассматривать как иерархический разномасштабный случайный процесс прохождения определенных структурных уровней развития хрупкого и вязкого разрушений на микро-, мезо- и макроструктурных уровнях. В этой работе предлагается использовать один из таких подходов [11–13] для описания развития хрупкого разрушения при нагружениях следующего вида:

$$\sigma(\tau) = \sum_{q=1}^Q (\sigma_{m,q} + \sigma_{a,q} \sin \omega t) \left(h \left(\frac{\tau - \hat{t}_{a,q-1}}{t} \right) - h \left(\frac{\tau - \hat{t}_{a,q}}{t} \right) \right), \quad (1)$$

$$\tau \in [0, t], \quad \sum_{q=1}^Q \hat{t}_{a,q} = t, \quad \hat{t}_{a,q} - \hat{t}_{a,q-1} = \frac{2\pi n_{a,q}}{\omega} = \frac{n_{a,q}}{n} t,$$

где $\hat{t}_{a,q}$, $q = 1, \dots, Q$ – характерные времена действия постоянных компонент $\sigma_{m,q}$ и амплитуд $\sigma_{a,q}$, $\omega = 2\pi\nu$, ν – частота нагружения, n – число циклов нагружения, $\nu = n/t$, t – время действия нагружения, $n_{a,q}$, $q = 1, \dots, Q$ – количество циклов нагружения с амплитудой $\sigma_{a,q}$, $h(\xi)$ – функция Хевисайда.

1. Масштабно-структурные уровни разрушения. При анализе хрупкого разрушения выделяется шесть масштабно-структурных уровней. Для каждого уровня определяется понятие дефекта j -ого масштабного уровня в некотором представительном объеме V_c ($V_c = L^3$ – объем твердого тела, в котором возможно зарождение начальной макротрещины-лидера длины L) [11, 12]. Дефект j -ого уровня характеризуется линейным размером $l_j = l_j(\tau)$ на интервале времени $\tau \in [0, t]$ и плотностью дефектов $q_j = q_j(\tau)$ в объеме V_c , задаваемой формулой: $q_j(\tau) = \lim_{\Delta V \rightarrow V_c} \Delta q_j(\tau) / \Delta V$, где $\Delta q_j = \Delta q_j(\tau)$ – среднее количество дефектов в объеме ΔV в момент времени $\tau \in [0, t]$, $j = 1, \dots, 6$. Вводится некоторая непрерывная возрастающая функция j -го уровня $l_j^* = l_j^*(\tau)$ от линейного размера $l_j = l_j(\tau)$ и плотности $q_j = q_j(\tau)$. Примером такой функции может служить функция вида: $l_j^*(\tau) = l_j(\tau) (q_j(\tau) V_c)^\gamma$, $\gamma = \text{const}$, $j = 1, \dots, 6$,

$\tau \in [0, t]$, которая имеет размерность длины. Исследование развития микро-, мезо- и макротрещин осуществляется с помощью разных физических методов: анализ изменения плотности, оценка магнитных и электрических характеристик, изучение акустических, тепловых и рентгеновских полей. В инженерной практике для мониторинга разрушения конструкций используются методы неразрушающего контроля, базирующиеся на различных физических принципах, таких как электронная дефектоскопия, ультразвуковая диагностика, вихревая проверка, магнитная дефектоскопия, рентгеноструктурный анализ, акустико-эмиссионный анализ, радиационная дефектоскопия, цифровая спекл-интерферометрия и другие, которые описаны во многих научных публикациях. Современным физическим подходом является метод исследования микротвердости в процессе разрушения [1, 2, 10]. Анализ этим методом позволяет установить связь между предельными состояниями дефектов каждого уровня и конкретным значением микротвердости по Виккерсу. Положим, что представительный объем V_c характеризуется непрерывной функцией времени на интервале $\tau \in [0, t]$ – микротвердостью $HV = HV(\tau)$. Тогда образование дефекта j -ого масштабного уровня начинается с достижения функцией $l_{j-1}^* = l_{j-1}^*(\tau)$ предельного значения $l_{f,j-1}^*$ и функцией микротвердости $HV = HV(\tau)$ некоторого характерного значения $HV(\tau_{j-1})$ в момент времени τ_{j-1} , $j = 1, \dots, 6$, $\tau_0 = 0$. Вследствие случайного распределения дефектов по объему V_c процесс усталостного разрушения является стохастическим, а значения $l_j^*(\tau)$ и $HV(\tau)$ для каждого момента времени τ , $\tau \in [0, t]$ – случайными величинами.

2. Модель усталостного масштабно-структурного разрушения.

Для каждого уровня $j = 1, \dots, 6$ определяется функция распределения вероятности неразрушения $F_j = F_j(\tau)$, также известная как функция надежности. Эта функция описывает вероятность, с которой значение усредняющей функции l_j^* в момент времени τ окажется меньше критического значения $l_{f,j}^*$, то есть $F_j(\tau) = P(l_j^*(\tau) < l_{f,j}^*)$ определяет вероятность, с которой в момент времени τ не произойдет разрушение j -го уровня. Вероятность разрушения j -го уровня, обозначаемая как $Q_j = Q_j(\tau)$, находится как разность между заданным пороговым значением вероятности разрушения $Q_{j,th}$ и функцией надежности $F_j(\tau)$. В рассматриваемой работе $Q_{j,th}$ принимается равным 1, $Q_j(\tau) = 1 - F_j(\tau)$. Таким образом, $Q_j(\tau)$ представляет вероятность, с которой в момент времени τ произойдет разрушение j -го уровня.

В соответствии с постулатом макроскопической определенности, предложенном А.А. Ильюшиным [14] и развитым в работах В.Г. Зубчанинова [15], для каждого j -го уровня функция $Q_j = Q_j(\tau)$ определяется процессом нагружения на интервале времени $\tau \in [0, t]$. Для определения зависимости $Q_j = Q_j(\tau)$ и взаимодействия между уровнями используется рекуррентная система уравнений. Эти уравнения, по сути, описывают эволюцию вероятности разрушения $Q_j = Q_j(\tau)$, учитывая взаимосвязь между различными уровнями системы. Ключевым элементом в решении этой системы является интегральный оператор

Гильберта-Шмидта. Этот оператор позволяет учесть влияние предшествующих событий на вероятность разрушения текущего уровня. Решение данной рекуррентной системы с использованием оператора Гильберта-Шмидта дает полную картину вероятности разрушения каждого уровня системы во времени, учитывая взаимодействие между уровнями.

Собственные числа оператора задаются функциями прочностных свойств материала $\sigma_j = \sigma_j(\omega, N_j)$ и $\sigma_j^0 = \sigma_j^0(\omega, N_j)$, при которых дефект j -го уровня достигает предельного состояния, а функция $HV = HV(\tau)$ – характерного значения $HV(\tau_j)$ при одночастотном симметричном и пульсирующем нагружении с одной амплитудой соответственно. Для функции распределения вероятности макроразрушения $Q = Q(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, $0 \leq Q(\tau) \leq 1$, предлагается следующее выражение:

$$Q(\tau) = Q_5(\tau) + Q_4^*(\tau) + Q_5^*(\tau) + Q_6(\tau). \quad (2)$$

Функция $Q_4^* = Q_4^*(\tau)$ представляет собой вероятность разрушения, обусловленного дефектами четвертого уровня, при развитии дефектов пятого уровня. Аналогичным образом, функция $Q_5^* = Q_5^*(\tau)$ описывает вероятность разрушения по дефектам пятого уровня на шестом уровне дефектности.

Кривые усталости для каждого из шести уровней дефектности описываются с помощью системы уравнений:

$$Q_j(\tau_j) = Q_{j,th}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (3)$$

$$Q_j^*(\tau_{j+1}) = 1 - Q_{j,th}, \quad Q_j^*(\tau_j) = Q_{j,th}, \quad j = 4, 5, \quad (4)$$

где τ_j – долговечность на j -ом уровне. Кривая усталости по образованию одной или нескольких макротрещин-лидеров конечной длины удовлетворяет следующему уравнению:

$$Q(t_f) = Q_{th}, \quad (5)$$

где t_f – долговечность по образованию макротрещины конечной длины с некоторой заданной вероятностью Q_{th} (в этой работе $Q_{th} = 1$). После образования макротрещины-лидера ее дальнейшее развитие исследуется методами механики разрушения, что выходит за рамки этой работы. Предлагаемая модель представляет собой сочетание детерминистического (уравнения кривых усталости) и вероятностного (вероятности перехода между уровнями дефектности) подходов к анализу долговечности материала.

Для нахождения материальных функций в настоящем исследовании по экспериментальным данным устанавливается пара (σ_4, N_4) . Амплитуда напряжения σ_4 при этом приравнивается условному пределу выносливости или пределу усталости материала σ_{-1} по макроразрушению по коротким трещинам. Только при изменении количества циклов нагружения на порядки происходит существенное изменение микро- и макроструктуры. Отсюда можно принять следующие допущения: $\lg N_j = \lg N_4 + 4 - j$, $j = 1, 2, 3$. Пара (σ_5, N_5) выбирается по кривой усталости по образованию единичных макротрещин; $\sigma_6 = \sigma_s$, где σ_s – предел текучести материала.

В дальнейшем рассматриваются безразмерные значения характерных времен $t_{a,q} \equiv \hat{t}_{a,q}/t$ и временных переменных $\tau \equiv \tau/t$. Нагружение (1) принимает следующий вид:

$$\sigma(\tau) = \sum_{q=1}^Q (\sigma_{m,q} + \sigma_{a,q} \sin 2\pi n\tau) (h(\tau - t_{a,q-1}) - h(\tau - t_{a,q})), \quad \tau \in [0, 1]. \quad (6)$$

При нагружении (6) модель усталостного масштабно-структурного разрушения описывается следующими зависимостями:

$$Q_j(\tau) = (\lg \tau - \lg \tau_{j-1})^\chi * \sum_{q=1}^Q \left(\frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_j^0(\omega, t_q T_j) (\lg t_q T_j - \lg \tau_{j-1}(\sigma_j^0))^\chi} - \frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_j^0(\omega, t_{q-1} T_j) (\lg t_{q-1} T_j - \lg \tau_{j-1}(\sigma_j^0))^\chi} + \frac{\sigma_{a,q} - \sigma_{m,q}}{\sigma_j(\omega, t_q T_j) (\lg t_q T_j - \lg \tau_{j-1}(\sigma_j))^\chi} - \frac{\sigma_{a,q} - \sigma_{m,q}}{\sigma_j(\omega, t_{q-1} T_j) (\lg t_{q-1} T_j - \lg \tau_{j-1}(\sigma_j))^\chi} \right), \quad \lg \tau \geq \lg \tau_{j-1}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (7)$$

$$Q_j(\tau_j) = 1, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (8)$$

$$Q_j^*(\tau) = (\lg \tau - \lg \tau_{j-1})^{\chi^*} * \sum_{q=1}^Q \left(\frac{\alpha_q(C_j - \sigma_{a,q})}{\sigma_j^0(\omega, t_q T_j) (\lg t_q T_j - \lg \tau_{j-1}(\sigma_j^0))^{\chi^*}} - \frac{\alpha_q(C_j - \sigma_{a,q})}{\sigma_j^0(\omega, t_{q-1} T_j) (\lg t_{q-1} T_j - \lg \tau_{j-1}(\sigma_j^0))^{\chi^*}} + \frac{(1 - \alpha_q)(C_j - \sigma_{a,q})}{\sigma_j(\omega, t_q T_j) (\lg t_q T_j - \lg \tau_{j-1}(\sigma_j))^{\chi^*}} - \frac{(1 - \alpha_q)(C_j - \sigma_{a,q})}{\sigma_j(\omega, t_{q-1} T_j) (\lg t_{q-1} T_j - \lg \tau_{j-1}(\sigma_j))^{\chi^*}} \right), \quad \lg \tau \geq \lg \tau_j, \quad j = 4, 5, \quad (9)$$

$$\alpha_q = \frac{\sigma_{m,q}}{\sigma_{a,q}}, \quad Q(\tau) = Q_5(\tau) + Q_4^*(\tau) + Q_5^*(\tau) + Q_6(\tau), \quad (10)$$

$$Q(t_f) = 1, \quad (11)$$

где введено следующее обозначение: $T_j = N_j/(\nu t)$, $j = 1, \dots, 6$; C_j – максимальная амплитуда нагружения (6), при которой дефекты $(j+1)$ -го уровня достигают предельного состояния; χ, χ^* – материальные константы материала.

3. Результаты исследования двухблочного симметричного нагружения алюминиевого сплава 2024-T42. В работах [1, 2] представляются результаты анализа исследований микротвердости по Виккерсу образцов из алюминиевого сплава 2024-T42 при симметричном нагружении с постоянной амплитудой. Микротвердость по Виккерсу устанавливается путем внедрения в

тестируемый материал правильной алмазной пирамиды, имеющей четыре грани, с углом 136° между противоположными гранями. Значение микротвердости по Виккерсу, обозначаемое HV , рассчитывается как отношение прилагаемой нагрузки к площади полученного отпечатка. Результаты измерений микротвердости представлены на рис. 1(а) в виде графика зависимости $\overline{HV} = \overline{HV}(n)$, где $\overline{HV} = (HV_0 - HV(n))/(HV_0 - HV_f)$, HV_0 – первоначальная микротвердость, HV_f – микротвердость при макроразрушении и амплитуде осевого нагружения σ_a , $HV = HV(n)$ – микротвердость при нагружении с амплитудой σ_a и числе циклов n . Из рисунка видно, что, например, при наименьшей амплитуде $\sigma_a = 125$ МПа величина $\overline{HV} = const$ до, в среднем, $6 \cdot 10^4$ циклов (или 4% от общей долговечности). По мере увеличения числа циклов нагружения происходит разрыхление материала и снижение его микротвердости. Предельные состояния дефектов каждого уровня, $j = 1, \dots, 5$, характеризуются одинаковой микротвердостью. На рис. 1(а) линии уровня, обозначенные 1-4, определяют начало образования дефектов последующего уровня соответственно, а линия номер 5 – макроразрушение.

По экспериментальным данным для алюминиевого сплава 2024-T42 при симметричном нагружении с одной амплитудой, $\nu = 25$ Гц, выбираются следующие базовые характеристики модели: $\sigma_1 = 50$ МПа, $\sigma_2 = 69$ МПа, $\sigma_3 = 94$ МПа, $\sigma_4 = 125$ МПа, $N_4 = 2 \cdot 10^6$ циклов, $\sigma_5 = 255$ МПа, $N_5 = 10^5$ циклов, которые на рис. 1(б) отмечены черными крестами, $\chi = 3/2$, $\chi^* = 1/2$. На рис. 1(б) изображены области развития дефектов, а также кривые усталости, соответствующие пяти уровням дефектности (обозначены пунктиром с цифровыми значениями) и кривая усталости по макроразрушению (сплошная линия) по модели (7)-(11) при симметричном нагружении с постоянной амплитудой, которые хорошо соответствуют опытным данным [1] (сплошные треугольники). Получено, что дефектам 1-го уровня соответствует микротвердость $\overline{HV} \in [0, 0.35]$ (сплошные кружки и полые звезды), 2-го уровня – $\overline{HV} \in [0.35, 0.45]$ (полые ромбы), 3-го уровня – $\overline{HV} \in [0.45, 0.6]$ (сплошные квадраты), 4-го уровня – $\overline{HV} \in [0.6, 0.65]$ (сплошные ромбы), 5-го уровня – $\overline{HV} \in [0.65, 1]$ (сплошные треугольники). Кривые усталости по уровням дефектности 1-4 соответствуют линиям уровня одинаковой микротвердости 1-4 на рис. 1(а), кривая усталости по макроразрушению (сплошная линия 4-5 на рис. 1(б)) соответствует линии уровня номер 5 с рис. 1(а) ($\overline{HV} = 1$). В работе [1] представлены опытные данные для первой группы тестов с амплитудами $\sigma_{a,1} = \sigma_{max}$, $\sigma_{a,2} = 3/4 \cdot \sigma_{max}$ и второй группы тестов с $\sigma_{a,1} = 3/4 \cdot \sigma_{max}$, $\sigma_{a,2} = \sigma_{max}$ при разных числах циклов n_1, n_2 (σ_{max} – максимальная амплитуда нагружения). Были построены области развития дефектов и кривые усталости по соотношениям (7-11) для обеих групп тестов. Получено удовлетворительное соответствие опытным данным. В первой группе тестов при одинаковом σ_{max} по модели долговечность отличается, в среднем, в 1.3 раза по сравнению с долговечностью, полученной в эксперименте, а во второй группе тестов – в 1.2 раза; при одинаковом числе циклов до макроразрушения N_f максимальное напряжение цикла в обоих

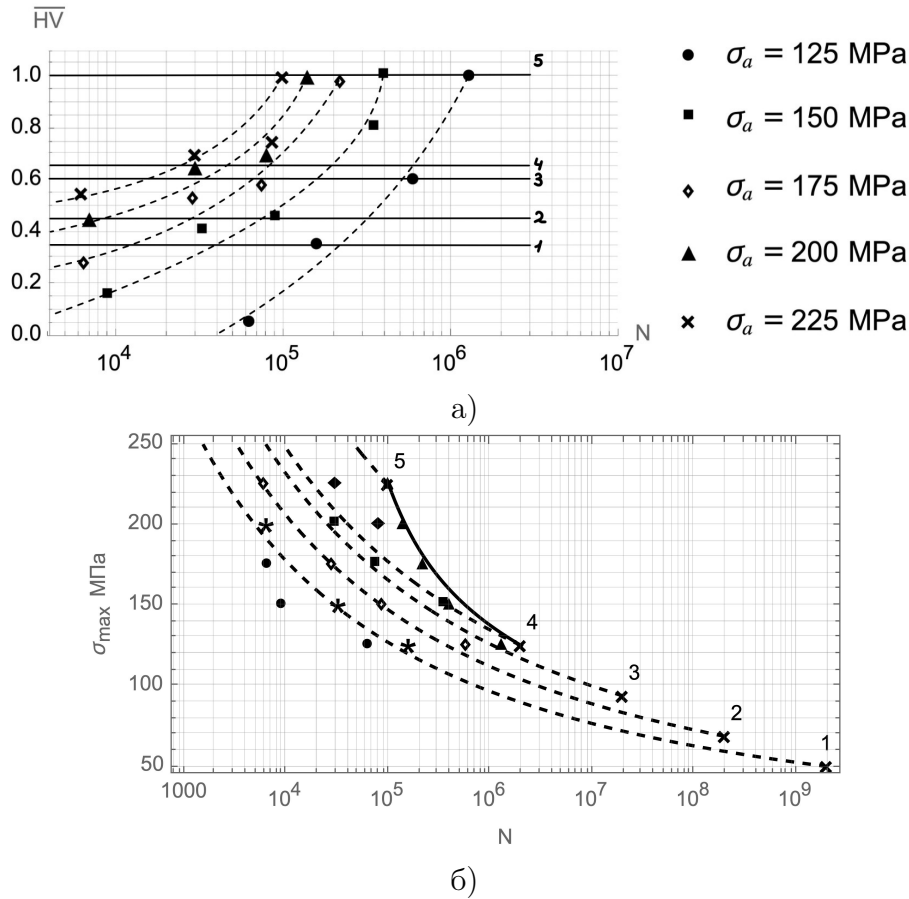


Рис. 1. а) Микротвердость по Виккерсу $\overline{HV} = \overline{HV}(n)$ для разных уровней амплитуд; б) Кривые усталости по уровням дефектности и по макроразрушению при равной относительной твердости для алюминиевого сплава 2024-T42

группах тестов, в среднем, на 3%. При анализе доли относительной долговечности алюминиевого сплава 2024-T42 при нагружении с одной амплитудой и двухблочном нагружении с меньшей второй амплитудой и разными числами циклов найдено, что основным является развитие макродефектов, в среднем 70% общей долговечности, доля долговечности по развитию мезо- и микродефектов составляет 10% и 20% соответственно. При двухблочном нагружении с большей второй амплитудой и разными числами циклов основным является развитие микродефектов, в среднем около 70% общей долговечности, доля долговечности по развитию мезодефектов составляет 30%. По итогам анализа экспериментальных данных [1, 2] обнаруживается, что суммарное накопление поврежденности находится в пределах от 0.5 до 1.3, представляется случайной функцией, описываемой логарифмически нормальным распределением вероятности её значений, при среднем значении, равном единице.

4. Результаты анализа для стали S25C при программном симметричном нагружении. Проводится анализ по модели экспериментальных данных для 0.25% углеродистой стали (S25C) при симметричном консольном изгибе с вращением, $\nu = 50$ Гц [3], материальные константы следующие: $\sigma_1 = 150$ МПа, $\sigma_2 = 208$ МПа, $\sigma_3 = 234$ МПа, $\sigma_4 = 260$ МПа, $N_4 = 10^7$ циклов, $\sigma_5 = 365$ МПа, $N_5 = 1.8 \cdot 10^4$ циклов, $\chi = \chi^* = 1/2$. На рис. 2 изображены области формирования дефектов и кривые усталости при переменном нагружении одной амплитуды. Эти данные показаны для пяти уровней дефектности, обозначенных пунктирными линиями с соответствующими числовыми значениями. Кривая усталости по макроразрушению отображена сплошной линией. Значения материальных констант выделены черными крестиками. Отмечается хорошая степень согласованности полученных данных с результатами экспериментов [3] (обозначены полыми кружками). На рис. 2 приведены экспериментальные данные для различных вариантов блочного нагружения для стали S25C. Эти варианты включают в себя двух- и трехблочные режимы с разными амплитудами и количествами циклов. Проведены расчеты для четырех двухблочных режимов: 1/3 долговечности – нагружение с амплитудой, равной пределу выносливости, два режима – с увеличением амплитуды на 10% и 20% соответственно, и еще два режима – с уменьшением амплитуды на 10% и 20% соответственно, действующими 2/3 долговечности. Анализ опытных данных показал, что в двух режимах с возрастающей амплитудой долговечность определяется по кривой усталости по максимальной амплитуде напряжения, что согласуется с результатами расчетов. В режимах с убывающей амплитудой долговечность незначительно выше (до 15%) по сравнению с долговечностью при максимальной амплитуде напряжения. Расчеты, выполненные для обратных тестов, продемонстрировали зависимость долговечности от порядка приложения амплитуд нагружения при их одинаковых максимальных значениях: в случаях с убывающими амплитудами долговечность уменьшается в среднем до 6 раз, а максимальное напряжение уменьшается в среднем до 10% по сравнению с тестами с возрастающими амплитудами при одинаковой долговечности. На рис. 3 представлены области развития дефектов, кривые усталости для пяти уровней дефектности (пунктирные линии) и кривая усталости по макроразрушению (сплошная линия) для тестов V, VI в координатах $\sigma_{max} \sim \lg N$, полученные на основе определяющих соотношений (7)-(11). На рис. 3(а) также показана кривая усталости для нагружения с одной амплитудой с рис. 2 (пунктирная линия). Экспериментальные данные тестов V и VI отображены сплошными треугольниками. На рис. 3(б) экспериментальные и расчетные данные полностью совпадают со случаем симметричного нагружения, представленным сплошной линией на рис. 2. Опытные данные для четырех рассмотренных трехблочных режимов с различным уровнем амплитуд хорошо описываются предложенной моделью. В случаях с возрастающей амплитудой кривые усталости практически совпадают с кривой

усталости при нагружении с максимальной амплитудой, а в случаях с убывающей амплитудой наблюдается небольшое увеличение долговечности, в среднем до 10%.

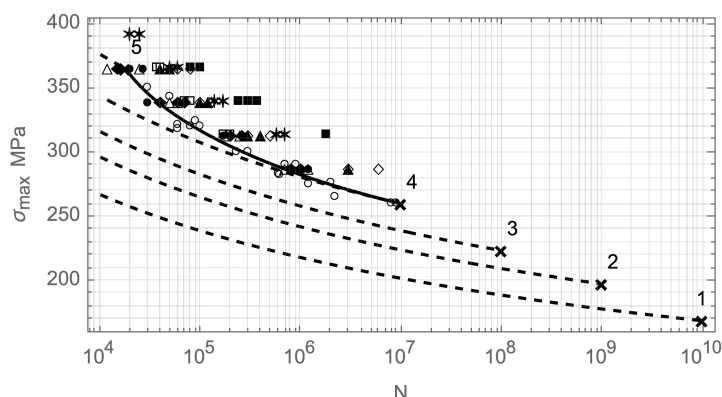


Рис. 2. Кривые усталости по уровням дефектности и по макроразрушению для стали S25C при одночастотном симметричном нагружении и опытные данные [3]

Во всех исследованных вариантах для стали S25C при определенном уровне максимального напряжения доля относительной долговечности от общей выглядит следующим образом: по формированию микродефектов первого и второго уровней в среднем 1%, по образованию мезодефектов третьего уровня — 10% и по развитию макроразрушения по мезодефектам — 89%. В других случаях вклад в долговечность: по развитию дефектов внутри зерна на первом, втором и третьем уровнях в среднем равен 1%, по развитию мезодефектов четвертого уровня — 10% и по образованию и развитию макродефектов пятого уровня — 89%.

Заключение. Современное состояние проблемы прогнозирования долговечности связывается с построением многоуровневых вероятностных моделей усталостного разрушения, основанных на физических закономерностях развития процесса. В этой работе предлагается одна из таких моделей для нерегулярных циклических нагружений с несимметричными циклами. Записываются выражения для кривых усталости по уровням дефектности, соответствующим определенным уровням микротвердости, при нагружениях, состоящих из двух и трех блоков с разными амплитудами и числами циклов, для сплава 2024-T42 и стали S25C.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Представлены результаты, полученные Г. Е. Лавриковым: определяющие соотношения модели усталостного масштабного-структурного разрушения в случае нерегулярного нагружения с несимметричными циклами; итоги анализа модели для алюминиевого сплава 2024-T42.

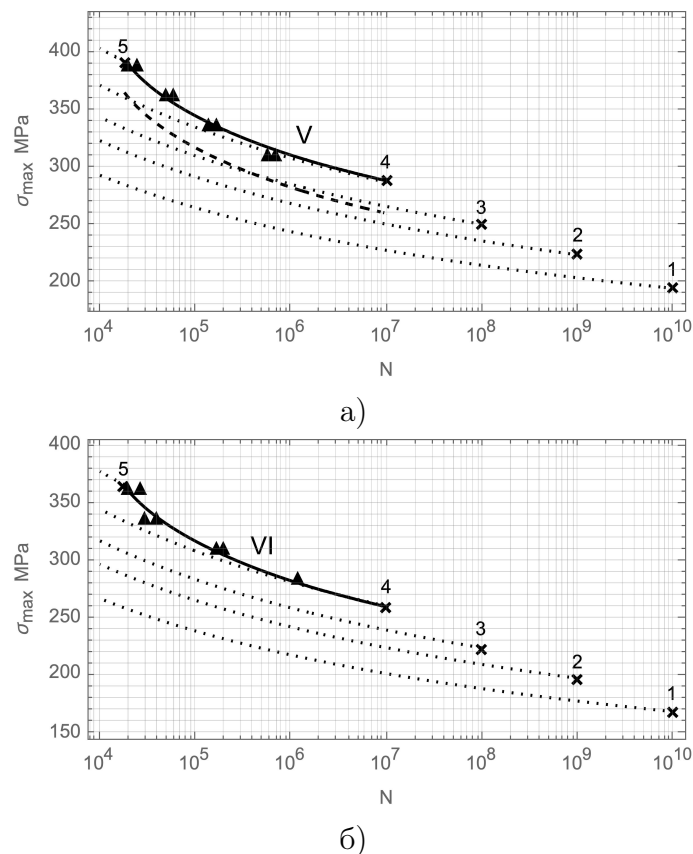


Рис. 3. Кривые усталости по уровням дефектности и по макроразрушению для S25C и опытные данные [3]: (a) - тест V, (b) - тест VI

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. The results obtained by G. E. Lavrikov are presented: the constitutive relations of scale-structural fatigue model in the case of irregular loading with asymmetric cycles; the results of the analysis of the model for aluminum alloy 2024-T42.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pavlou D. G. A phenomenological fatigue damage accumulation rule based on hardness increasing, for the 2024-T42 aluminum // Engineering Structures. 2002. V. 24. № 11. P. 1363-1368. DOI: 10.1016/S0141-0296(02)00055-X.
- [2] Pavlou D. G. Fatigue design challenges: Recent linear and nonlinear models // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. № 700. DOI: 10.1088/1757-899X/700/1/012028.

- [3] Kawada Y., Sekido Y., Sasaki S. Some experiments on the fatigue life under double and triple stresses // Bulletin of the JSME. 1960. V. 3. № 10. P. 275-281. DOI: 10.1299/jsme1958.3.275
- [4] Nie B., Liu S., Wu Y., Song Y., Qi H., Shi B., Zhao Z., Chen D. Very High Cycle Fatigue Damage of TC21 Titanium Alloy under High/Low Two-Step Stress Loading // Crystals. 2023. V.13. №1. DOI: 10.3390/cryst13010139
- [5] Liu X., Zhang Y., Wang B., Sun X. Influence of the mean stress on the fatigue life of welded joints under variable amplitude loading // International Journal of Fatigue. 2022. V. 163. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.106972
- [6] Antunes A. M. B. S., Baptista C. A. R. P., Barboza M. J. R., Carvalho A. L. M., Mogili N. V. V. Effect of the interrupted aging heat treatment T6I4 on the tensile properties and fatigue resistance of AA7050 alloy // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2019. V. 41. DOI: 10.1007/s40430-019-1821-9
- [7] Murakami Y., Takagi T., Wada K., Matsunaga H. Essential structure of S-N curve: Prediction of fatigue life and fatigue limit of defective materials and nature of scatter // International Journal of Fatigue. Volume 146. 2021. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2020.106138.
- [8] Fitzka M., Mayer H. Constant and variable amplitude fatigue testing of aluminum alloy 2024-T351 with ultrasonic and servo-hydraulic equipment // International Journal of Fatigue. 2016. V. 91. Part 2. P. 363–372. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2015.08.017
- [9] Carvalho A., Martins J., Voorlwad H. Fatigue damage accumulation in aluminum 7050-T7451 alloy subjected to block programs loading under step-down sequence // Procedia Engineering. 2010. V. 2. № 1. P. 2037-2043. DOI: 10.1016/j.proeng.2010.03.219
- [10] Kaimkuriya A., Sethuraman B., Gupta M. Effect of Physical Parameters on Fatigue Life of Materials and Alloys: A Critical Review // Technologies. 2024ю V.12. № 7. DOI: 10.3390/technologies12070100
- [11] Завойчинская Э. Б. Общие закономерности и критерии разрушения твердых тел на разных масштабно-структурных уровнях при длительном нагружении (обобщающая статья) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2022, Т. 88, № 7. С. 48-62. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-7-48-62
- [12] Zavoychinskaya E. B. A stochastic theory of scale-structural fatigue and structure durability at operational loading // Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Eds. V.A. Sadovnichiy, M.Z. Zgurovsky. Cham : Springer, 2021. P. 71–89.
- [13] Завойчинская Э. Б., Раутиан Н. А., Лавриков Г. Е. Математическое моделирование масштабно-структурного разрушения при программных циклических нагружениях металлов и сплавов // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61. № 5. С. 640-658. DOI: 10.31857/S0374064125050064
- [14] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [15] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.

REFERENCES

- [1] Pavlou D. G. A phenomenological fatigue damage accumulation rule based on hardness increasing, for the 2024-T42 aluminum // Engineering Structures. 2002. V. 24. № 11. P. 1363-1368. DOI: 10.1016/S0141-0296(02)00055-X.
- [2] Pavlou D. G. Fatigue design challenges: Recent linear and nonlinear models // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. № 700. DOI: 10.1088/1757-899X/700/1/012028.
- [3] Kawada Y., Sekido Y., Sasaki S. Some experiments on the fatigue life under double and triple stresses // Bulletin of the JSME. 1960. V. 3. № 10. P. 275-281. DOI: 10.1299/jsme1958.3.275
- [4] Nie B., Liu S., Wu Y., Song Y., Qi H., Shi B., Zhao Z., Chen D. Very High Cycle Fatigue Damage of TC21 Titanium Alloy under High/Low Two-Step Stress Loading // Crystals. 2023. V.13. №1. DOI: 10.3390/cryst13010139

- [5] Liu X., Zhang Y., Wang B., Sun X. Influence of the mean stress on the fatigue life of welded joints under variable amplitude loading // *International Journal of Fatigue*. 2022. V. 163. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.106972
- [6] Antunes A. M. B. S., Baptista C. A. R. P., Barboza M. J. R., Carvalho A. L. M., Mogili N. V. V. Effect of the interrupted aging heat treatment T6I4 on the tensile properties and fatigue resistance of AA7050 alloy // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2019. V. 41. DOI: 10.1007/s40430-019-1821-9
- [7] Murakami Y., Takagi T., Wada K., Matsunaga H. Essential structure of S-N curve: Prediction of fatigue life and fatigue limit of defective materials and nature of scatter // *International Journal of Fatigue*. Volume 146. 2021. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2020.106138.
- [8] Fitzka M., Mayer H. Constant and variable amplitude fatigue testing of aluminum alloy 2024-T351 with ultrasonic and servo-hydraulic equipment // *International Journal of Fatigue*. 2016. V. 91. Part 2. P. 363–372. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2015.08.017
- [9] Carvalho A., Martins J., Voorlwad H. Fatigue damage accumulation in aluminum 7050-T7451 alloy subjected to block programs loading under step-down sequence // *Procedia Engineering*. 2010. V. 2. № 1. P. 2037-2043. DOI: 10.1016/j.proeng.2010.03.219
- [10] Kaimkuriya A., Sethuraman B., Gupta M. Effect of Physical Parameters on Fatigue Life of Materials and Alloys: A Critical Review // *Technologies*. 2024ю V.12. № 7. DOI: 10.3390/technologies12070100
- [11] Zavoychinskaya E. B. General principles and criteria of failure of solids on different scale-structural levels under static and alternating loading. Industrial laboratory. Diagnostics of materials. 2022. V. 88, № 7, P. 48-62. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-7-48-62. (in Russian)
- [12] Zavoychinskaya E. B. A stochastic theory of scale-structural fatigue and structure durability at operational loading // *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics*. Eds. V.A. Sadovnichiy, M.Z. Zgurovsky. Cham : Springer, 2021. P. 71–89.
- [13] Zavoychinskaya E. B., Rautian N. A., Lavrikov G. E. Mathematical modeling of scale-structural failure at program cyclic loading of metals and alloys // *Differential Equations*. 2025. V. 61. № 5. P. 640-658. DOI: 10.31857/S0374064125050064. (in Russian)
- [14] Ilyushin A. A. Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory. M.: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1963. 273 p. (in Russian)
- [15] Zubchaninov V. G. Mechanics of plastic media processes. M.: Fizmatlit, 2010. 352 p. (in Russian)

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ГЕМИТРОПНЫХ ИНВАРИАНТОВ В МЕХАНИКЕ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В работе обсуждаются вопросы применения теории рациональных инвариантов для построения кубических аппроксимаций энергетических форм для потенциалов силовых и моментных напряжений гемитропных микрополярных упругих тел. Для построения таких потенциалов наиболее подходит метод А-представлений, позволяющий без труда получить аппроксимацию заданной степени в виде полиномиальной линейной комбинации рациональных инвариантов относительно гемитропной группы отображений трехмерного пространства. В рамках настоящего исследования анализируется полный неприводимый набор из 86 индивидуальных и совместных гемитропных целых рациональных алгебраических инвариантов для системы двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга. Полученный набор инвариантов затем используется для построения кубической энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела и указания полного набора из 37 определяющих постоянных. Получены вспомогательные формулы для вывода определяющих уравнений микрополярной упругости.

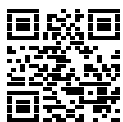
Ключевые слова: наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный алгебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, кубическая аппроксимация, гемитропное микрополярное упругое тело

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru;

<https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Системы целых рациональных гемитропных инвариантов в механике микрополярного континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 152–170. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.008. EDN: VBHKSU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

SYSTEMS OF INTEGER RATIONAL HEMITROPIC INVARIANTS IN MICROPOLAR CONTINUUM MECHANICS

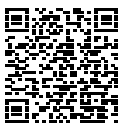
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with an application of theory of invariant to determining cubic approximations of energy forms of potentials of force and couple stressed in hemitropic micropolar elastic solids. At this aim, the most suitable are A-representations, which allow one to easily obtain an approximation of sufficient accuracy for the stress potentials as a polynomial linear combination of rational invariants with respect to the hemitropic group of three-dimensional transformations are proposed. Within the framework of this study, a complete irreducible set of 86 individual and joint hemitropic integer rational algebraic invariants for systems of two symmetric and two antisymmetric second-rank tensors is considered. This set of invariants is then used to determine a cubic energy form of hemitropic micropolar elastic solid and specify a complete set of 37 constitutive constants. Requisite formulae are derived for obtaining constitutive equations of micropolar elasticity.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, cubic approximation, hemitropic micropolar elastic solid

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sci. Phys. & Math., MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** evmurashkin@gmail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>; AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, Dr. Sci. Phys. & Math., Prof., Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; **e-mail:** radayev@ipmnet.ru; <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>; AuthorID: 103116



to cite this article: Murashkin E. V., Radayev Y. N. Systems of integer rational hemitropic invariants in micropolar continuum mechanics // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 152–170. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.008

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Теория алгебраических инвариантов [1–6] имеет важное значение при построении аппроксимаций заданной степени для энергетических форм потенциалов напряжений в механике сплошных сред [7–18]. В особенности это справедливо при построении математических моделей гемитропных микрополярных упругих сред. В этом случае, наиболее подходящим является А-представление [17, 18] энергетических форм, являющееся линейной комбинацией индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов относительно гемитропной группы.

Основным понятием теории алгебраических инвариантов является индивидуальный инвариант тензора. Определение индивидуального псевдоинварианта алгебраического веса a для псевдотензора можно найти в монографии [1]. Заметим, что при $a = 0$ инвариант носит название абсолютного инварианта, при $a \neq 0$ — относительного или псевдоинварианта.

Точно также определяется совместный инвариант набора, состоящего из нескольких тензоров.

Хорошо известно, что для заданной системы тензоров можно построить бесконечное множество инвариантов (индивидуальных/совместных). Если среди них имеются неравные тождественно нулю, то число таковых также будет бесконечным; это ясно хотя бы из того, что целая рациональная функция (с числовыми коэффициентами) от нескольких инвариантов системы также будет (при известных условиях) инвариантом той же системы; таким свойством обладает, во всяком случае, произведения инвариантов.

В связи с указанным обстоятельством возникает понятие неприводимого инварианта системы, т.е. такого инварианта, который не является целой рациональной функцией от некоторых других инвариантов той же системы. Множество всех неприводимых инвариантов системы называется её полной системой инвариантов. Иначе говоря, инварианты системы тензоров образуют её полную систему инвариантов, если всякий инвариант системы представляет собой целую рациональную функцию инвариантов и если, кроме того, никакой из инвариантов не является целой рациональной функцией остальных (или некоторых из них).

Настоящее исследование направлено на последовательное использование результатов теории алгебраических инвариантов при построении энергетических форм потенциалов силовых и моментных напряжений микрополярных упругих тел. С этой целью приводится и анализируется полная неприводимая система 86 индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных составляющих асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба–кручения. Система инвариантов затем используется для построения кубической аппроксимации энергетической формы гемитропного тела.

Изложение в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, развитые в предыдущих статьях [17–30].

1. Инвариантные следы, образующие целый рациональный базис инвариантов относительно гемитропной группы преобразований. Рассмотрим систему двух симметричных \mathbf{A} , \mathbf{B} и двух антисимметричных \mathbf{V} , \mathbf{W} тензоров второго ранга. Следует отметить, что рассуждения о совместных и индивидуальных инвариантах такой системы существенно зависят от размерности пространства. Положим далее, что она равна 3. Полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов указанной системы тензоров состоит из 86 неприводимых элементов [2, 5, 6]:

$$\begin{aligned}
 &1.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}]; & 2.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2]; & 3.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^3]; & 4.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}]; \\
 &5.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^2]; & 6.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^3]; & 7.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2]; & 8.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2]; \\
 &9.) \operatorname{tr} [\mathbf{AB}]; & 10.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 11.) \operatorname{tr} [\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; & 12.) \operatorname{tr} [\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2]; \\
 &13.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}]; & 14.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2]; & 15.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVA}^2]; & 16.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}]; \\
 &17.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2]; & 18.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BVB}^2]; & 19.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}]; & 20.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2]; \\
 &21.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWA}^2]; & 22.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}]; & 23.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2]; & 24.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BWB}^2]; \\
 &25.) \operatorname{tr} [\mathbf{VW}]; & 26.) \operatorname{tr} [\mathbf{VAB}]; & 27.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}]; & 28.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}]; \\
 &29.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2]; & 30.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}]; & 31.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}]; & 32.) \operatorname{tr} [\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; \\
 &33.) \operatorname{tr} [\mathbf{VB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 34.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AB}]; & 35.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 36.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; \\
 &37.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}]; & 38.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}^2]; & 39.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BVA}^2]; & 40.) \operatorname{tr} [\mathbf{WAB}]; \\
 &41.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}]; & 42.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}]; & 43.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2]; & 44.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}]; \\
 &45.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}]; & 46.) \operatorname{tr} [\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; & 47.) \operatorname{tr} [\mathbf{WB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 48.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AB}]; \\
 &49.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]; & 50.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]; & 51.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}]; & 52.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}^2]; \\
 &53.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BWA}^2]; & 54.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}]; & 55.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2]; & 56.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}]; \\
 &57.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}]; & 58.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2]; & 59.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2]; & 60.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWA}^2]; \\
 &61.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVA}^2]; & 62.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}]; & 63.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2]; & 64.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}]; \\
 &65.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}]; & 66.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2]; & 67.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2]; & 68.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BWB}^2]; \\
 &69.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BVB}^2]; & 70.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWAB}]; & 71.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWBA}]; & 72.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}]; \\
 &73.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}]; & 74.) \operatorname{tr} [\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}]; & 75.) \operatorname{tr} [\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}]; & 76.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}^2]; \\
 &77.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWA}^2\mathbf{BA}]; & 78.) \operatorname{tr} [\mathbf{VWB}^2\mathbf{AB}]; & 79.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}]; & 80.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}]; \\
 &81.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}]; & 82.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}]; & 83.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{BWA}^2]; & 84.) \operatorname{tr} [\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}^2]; \\
 &85.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{BVA}^2]; & 86.) \operatorname{tr} [\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}^2].
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров. Каждый из инвариантных следов снабжается индивидуальным идентификационным номером 1.) – 86.).

Важно заметить, что в силу ассоциативности внутреннего произведения инварианты (1) можно вычислить различными способами. Например:

$$(\mathbf{W}^2)\mathbf{BV}(\mathbf{A}^2) = \mathbf{W}(\mathbf{WB})(\mathbf{VA})\mathbf{A} = \mathbf{W}(\mathbf{WB})\mathbf{V}(\mathbf{AA}).$$

В монографии [1, с. 327] Г.Б. Гуревич существенно использует смешанные компоненты тензоров для расчета алгебраических инвариантов. Такой способ оказывается удобным и не зависит от метрики пространства. В таком случае инварианты (1) в заданной криволинейной координатной системе примут вид:

- | | | |
|--|--|--|
| 1.) A_s^s ; | 2.) $A_s^k A_k^s$; | 3.) $A_s^k A_k^l A_l^s$; |
| 4.) B_s^s ; | 5.) $B_s^k B_k^s$; | 6.) $B_s^k B_k^l B_l^s$; |
| 7.) $V_s^k V_k^s$; | 8.) $W_s^k W_k^s$; | 9.) $A_s^k B_k^s$; |
| 10.) $A_s^k A_k^l B_l^s$; | 11.) $B_s^k B_k^l A_l^s$; | 12.) $A_s^k A_k^l B_l^m B_m^s$; |
| 13.) $V_s^k V_k^l A_l^s$; | 14.) $V_s^k V_k^l A_l^m A_m^s$; | 15.) $V_s^k V_k^l A_l^m V_m^p A_p^q A_q^s$; |
| 16.) $V_s^k V_k^l B_l^s$; | 17.) $V_s^k V_k^l B_l^m B_m^s$; | 18.) $V_s^k V_k^l B_l^m V_m^p B_p^q B_q^s$; |
| 19.) $W_s^k W_k^l A_l^s$; | 20.) $W_s^k W_k^l A_l^m A_m^s$; | 21.) $W_s^k W_k^l A_l^m W_m^p A_p^q A_q^s$; |
| 22.) $W_s^k W_k^l B_l^s$; | 23.) $W_s^k W_k^l B_l^m B_m^s$; | 24.) $W_s^k W_k^l B_l^m W_m^p B_p^q B_q^s$; |
| 25.) $V_s^k W_k^s$; | 26.) $V_s^k A_k^l B_l^s$; | 27.) $V_s^k A_k^l A_l^m B_m^s$; |
| 28.) $V_s^k B_k^l B_l^m A_m^s$; | 29.) $V_s^k A_k^l A_l^m B_m^p B_p^s$; | 30.) $V_s^k A_k^l A_l^m B_m^p A_p^s$; |
| 31.) $V_s^k B_k^l B_l^m A_m^p B_p^s$; | 32.) $V_s^k A_k^l A_l^m B_m^p B_p^q A_q^s$; | 33.) $V_s^k B_k^l B_l^m A_m^p A_p^q B_q^s$; |
| 34.) $V_s^k V_k^l A_l^m B_m^s$; | 35.) $V_s^k V_k^l A_l^m A_m^p B_p^s$; | 36.) $V_s^k V_k^l B_l^m B_m^p A_p^s$; |
| 37.) $V_s^k V_k^l A_l^m V_m^p B_p^s$; | 38.) $V_s^k V_k^l A_l^m V_m^p B_p^q B_q^s$; | 39.) $V_s^k V_k^l B_l^m V_m^p A_p^q A_q^s$; |
| 40.) $W_s^k A_k^l B_l^s$; | 41.) $W_s^k A_k^l A_l^m B_m^s$; | 42.) $W_s^k B_k^l B_l^m A_m^s$; |
| 43.) $W_s^k A_k^l A_l^m B_m^p B_p^s$; | 44.) $W_s^k A_k^l A_l^m B_m^p A_p^s$; | 45.) $W_s^k B_k^l B_l^m A_m^p B_p^s$; |
| 46.) $W_s^k A_k^l A_l^m B_m^p B_p^q A_q^s$; | 47.) $W_s^k B_k^l B_l^m A_m^p A_p^q B_q^s$; | 48.) $W_s^k W_k^l A_l^m B_m^s$; |
| 49.) $W_s^k W_k^l A_l^m A_m^p B_p^s$; | 50.) $W_s^k W_k^l B_l^m B_m^p A_p^s$; | 51.) $W_s^k W_k^l A_l^m W_m^p B_p^s$; |
| 52.) $W_s^k W_k^l A_l^m W_m^p B_p^q B_q^s$; | 53.) $W_s^k W_k^l B_l^m W_m^p A_p^q A_q^s$; | 54.) $V_s^k W_k^l A_l^s$; |
| 55.) $V_s^k W_k^l A_l^m A_m^s$; | 56.) $V_s^k V_k^l W_l^m A_m^s$; | 57.) $W_s^k W_k^l V_l^m A_m^s$; |
| 58.) $V_s^k V_k^l W_l^m A_m^p A_p^s$; | 59.) $W_s^k W_k^l V_l^m A_m^p A_p^s$; | 60.) $V_s^k V_k^l A_l^m W_m^p A_p^q A_q^s$; |
| 61.) $W_s^k W_k^l A_l^m V_m^p A_p^q A_q^s$; | 62.) $V_s^k W_k^l B_l^s$; | 63.) $V_s^k W_k^l B_l^m B_m^s$; |
| 64.) $V_s^k V_k^l W_l^m B_m^s$; | 65.) $W_s^k W_k^l V_l^m B_m^s$; | 66.) $V_s^k V_k^l W_l^m B_m^p B_p^s$; |
| 67.) $W_s^k W_k^l V_l^m B_m^p B_p^s$; | 68.) $V_s^k V_k^l B_l^m W_m^p B_p^q B_q^s$; | 69.) $W_s^k W_k^l B_l^m V_m^p B_p^q B_q^s$; |
| 70.) $V_s^k W_k^l A_l^m B_m^s$; | 71.) $V_s^k W_k^l B_l^m A_m^s$; | 72.) $V_s^k W_k^l A_l^m A_m^p B_p^s$; |
| 73.) $V_s^k W_k^l B_l^m B_m^p A_p^s$; | 74.) $W_s^k V_k^l A_l^m A_m^p B_p^s$; | 75.) $W_s^k V_k^l B_l^m B_m^p A_p^s$; |
| 76.) $V_s^k W_k^l A_l^m A_m^p B_p^q B_q^s$; | 77.) $V_s^k W_k^l A_l^m A_m^p B_p^q A_q^s$; | 78.) $V_s^k W_k^l B_l^m B_m^p A_p^q B_q^s$; |
| 79.) $V_s^k V_k^l W_l^m A_m^p B_p^s$; | 80.) $W_s^k W_k^l V_l^m A_m^p B_p^s$; | 81.) $V_s^k V_k^l A_l^m W_m^p B_p^s$; |
| 82.) $W_s^k W_k^l A_l^m V_m^p B_p^s$; | 83.) $V_s^k V_k^l B_l^m W_m^p A_p^q A_q^s$; | 84.) $V_s^k V_k^l A_l^m W_m^p B_p^q B_q^s$; |
| 85.) $W_s^k W_k^l B_l^m V_m^p A_p^q A_q^s$; | 86.) $W_s^k W_k^l A_l^m V_m^p B_p^q B_q^s$; | |

Следует отметить, что в монографии [2, С. 65, Таблица 2] и ее английском оригинале присутствуют досадные опечатки. Среди индивидуальных инвариантов матрицы \mathbf{a} присутствует инвариант \mathbf{b}^3 . В строке для набора совместных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных матриц второго ранга \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{u} и \mathbf{v} отсутствуют инварианты $\mathbf{u}^2\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{b}^{2*†}$ (инварианты 83.) – 86.) в списке (1)), вместо инвариантов $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^{*†}$ (инварианты 72.) – 75.) в списке (1)) присутствуют инварианты $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{b}\mathbf{a}^{2*}$. Однако, в руководствуясь статьями [5, 6] можно составить верный полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга (см. [6, Р. 80, Table 1]). Однако, первую часть статьи [5] следует читать с осторожностью, т.к. по утверждению самого автора в ней также присутствуют неточности.

Для целей нашего исследования необходимо взять лишь 20 гемитропных инвариантов первой, второй и третьей степеней из полный набора индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов (1):

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 16; 19; 22; 25; 26; 40; 54; 62. \quad (2)$$

Сначала выберем линейные инварианты из списка (1):

$$1; 4. \quad (3)$$

Следует заметить, что линейные инварианты (3) могут быть заданы альтернативным способом, т.е. в терминах $A_{\cdot k}^{k\cdot}$ и $B_{\cdot k}^{k\cdot}$.

Сформируем затем набор квадратичных инвариантов из приведенного элементов списка (1). Ясно, что указанные инварианты суть (номера указывают на сами инварианты):

$$2; 5; 1 \times 1, 1 \times 4; 4 \times 4; 7; 8; 9; 25. \quad (4)$$

Набор (4) состоит из 9 квадратичных гемитропных инвариантов, которые были использованы для построения квадратичной энергетической формы [17, 18].

Для определения аппроксимаций более высокой степени (третьей, четвертой, пятой, шестой ...) энергетических форм в конечном итоге необходимо расширить систему рациональных инвариантов до инвариантов более высоких целых степеней (3, 4, 5, ...). Кубические гемитропные инварианты интересны тем, что с их помощью легко находятся квадратичные поправки к линейным определяющим уравнениям теории микрополярной упругости.

Найдем далее неприводимую систему кубических инвариантов, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (2) общей степени 3. Полный перечень из 28 кубических гемитропных инвариантов принимает вид:

$$\begin{aligned} 7 \times 1, 7 \times 4; 8 \times 1, 8 \times 4; 1^3, 1^2 \times 4, 1 \times 4^2, 1 \times 2, 1 \times 5, 1 \times 9, \\ 1 \times 25; 4^3, 4 \times 2, 4 \times 5, 4 \times 9, 4 \times 25; 3; 6; 10; 11; 12; 16; 14; \\ 22; 26; 40; 54; 62; \end{aligned} \quad (5)$$

объединяя который с квадратичным набором (4) можно получить кубическую аппроксимацию энергетической формы обобщенного гемитропного микрополярного упругого тела, выполнив вместо \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{V} , \mathbf{W} , подстановку, указанную ниже в следующем разделе.

2. Пример: кубическая аппроксимация энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела Опираясь на результаты предыдущего раздела построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба–кручения. Для этого в данных выше формулах ёследует выполнить замену:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{sym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{B} &= \text{sym } \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{V} &= \text{asym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{W} &= \text{asym } \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \quad (6)$$

В смешанных компонентах соотношения (6) примут вид ³

$$\begin{aligned} A_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}], & B_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}], \\ V_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}], & W_{s\cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Смешанные тензорные компоненты в (7) могут быть заданы альтернативным эквивалентным способом (например, $A_{s\cdot}^{\cdot k}$ и $B_{s\cdot}^{\cdot k}$).

Воспользовавшись заменой (6) и принимая в расчет схему нумерации из работ [17, 18], система квадратичных гемитропных инвариантов (4) примет вид

$$\begin{aligned} {}^2\text{I}_1 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}]^2, & {}^2\text{I}_2 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}]^2, \\ {}^2\text{I}_3 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}], & {}^2\text{I}_4 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}], \\ {}^2\text{I}_5 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}], & {}^2\text{I}_6 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}], \\ {}^2\text{I}_7 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}], & {}^2\text{I}_8 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}], \\ {}^2\text{I}_9 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}], \end{aligned} \quad (8)$$

³Отметим, что выражения вида $\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}$ корректно интерпретируются как сумма двух тензоров, поскольку $\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} = \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}$.

а систему гемитропных кубических инвариантов, полученную в предыдущем разделе статьи, примем в форме

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathfrak{J}_1 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^k]^3, & {}^3\mathfrak{J}_2 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^k]^3, \\
 {}^3\mathfrak{J}_3 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_4 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^s], \\
 {}^3\mathfrak{J}_5 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m], & {}^3\mathfrak{J}_6 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{l\cdot}^m], \\
 {}^3\mathfrak{J}_7 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m], & {}^3\mathfrak{J}_8 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{l\cdot}^m], \\
 {}^3\mathfrak{J}_9 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m]^2 [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^k], & {}^3\mathfrak{J}_{10} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^k]^2 [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{11} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{l\cdot}^m], & {}^3\mathfrak{J}_{12} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{l\cdot}^m], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{13} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{14} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^s], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{15} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{16} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{17} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^m] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^k - \epsilon_{l\cdot}^k], & {}^3\mathfrak{J}_{18} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^m] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^k - \epsilon_{l\cdot}^k], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{19} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^m] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^k - \kappa_{l\cdot}^k], & {}^3\mathfrak{J}_{20} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^m] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^k - \kappa_{l\cdot}^k], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{21} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{22} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{l\cdot}^s], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{23} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{24} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{25} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], & {}^3\mathfrak{J}_{26} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{l\cdot}^s], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{27} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^m] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^k - \kappa_{l\cdot}^k], & {}^3\mathfrak{J}_{28} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^m] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^k - \kappa_{l\cdot}^k].
 \end{aligned} \tag{9}$$

А-представление кубической аппроксимации энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела, соответствующее системе квадратичных (8) и кубических (9) инвариантов, запишем в компактной форме:

$$\mathcal{U} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^9 {}^2C_{\mathfrak{c}} {}^2\mathfrak{I}_{\mathfrak{c}} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{28} {}^3C_{\mathfrak{a}} {}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}}, \tag{10}$$

где введены новые обозначения для определяющих модулей: ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) — определяющие модули квадратичного приближения; ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$) — определяющие модули, связанные с квадратичными поправками; ${}^2\mathfrak{I}_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) — квадратичные инварианты; ${}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$) — кубические инварианты. Стоит отметить чувствительность некоторых определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям

трехмерного пространства, что связано с возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба-кручения.

После этого становится понятна алгебраическая сущность 37 определяющих постоянных ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) и ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$): это неопределенные коэффициенты в линейной комбинации неприводимой системы квадратичных и кубических инвариантов (8) и (9).

3. Вспомогательные формулы для вывода определяющих уравнений гemitропной микрополярной упругости. Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, соответствующие энергетической форме (10), получены как в виде

$$t_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot})}, \quad \mu_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{k\cdot})}. \quad (11)$$

Вычислим вспомогательные производные для получения (11). Для этого найдем сначала производные от квадратичных инвариантов. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^2I_1}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = [\epsilon_{s\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial {}^2I_2}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = [\kappa_{s\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial {}^2I_3}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \epsilon_{q\cdot}^{p\cdot} + \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial {}^2I_4}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{k\cdot} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \kappa_{q\cdot}^{p\cdot} + \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial {}^2I_5}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^{s\cdot} - \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{k\cdot} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \epsilon_{q\cdot}^{p\cdot} - \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial {}^2I_6}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^{s\cdot} - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{k\cdot} - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \kappa_{q\cdot}^{p\cdot} - \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial {}^2I_7}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \frac{1}{2} [\kappa_{s\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial {}^2I_7}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{s\cdot}^{s\cdot} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial {}^2I_8}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{q\cdot})} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^{s\cdot} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] = \frac{1}{2} [\kappa_{q\cdot}^{p\cdot} + \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{I}_8}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{q\cdot}^p + \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}], \\
\frac{\partial^2 \mathbf{I}_9}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] = \frac{1}{2} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}], \\
\frac{\partial^2 \mathbf{I}_9}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{q\cdot}^p - \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}],
\end{aligned} \tag{13}$$

Отметим, что для дельт Кронекера справедливы равенства:

$$\delta_{\cdot p}^{q\cdot} = \delta_{q\cdot}^p = \delta_q^p. \tag{14}$$

Производные от кубических инвариантов примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_1}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{3}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}]^2 [\delta_m^p \delta_q^m + g_{lq} g^{pl}] = \frac{3}{4} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}]^2 \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_2}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{3}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}]^2 [\delta_m^p \delta_q^m + g_{lq} g^{pl}] = \frac{3}{4} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}]^2 \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_3}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{\cdot k}^{l\cdot}] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{\cdot l}^{s\cdot}] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{\cdot l}^{s\cdot}] + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{\cdot k}^{l\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^s + g_{lq} g^{ps}] = \\
&\quad = \frac{3}{8} [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} + \epsilon^{sp}] + [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^{p\cdot}] [\epsilon_{q\cdot}^s + \epsilon_{\cdot q}^{s\cdot}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_4}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{3}{8} [[\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} + \kappa^{sp}] + [\kappa_{s\cdot}^p + \kappa_{\cdot s}^{p\cdot}] [\kappa_{q\cdot}^s + \kappa_{\cdot q}^{s\cdot}]], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_5}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot l}^{m\cdot}] + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot l}^{m\cdot}] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \\
&\quad = \frac{1}{4} [\epsilon_{q\cdot}^p + \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot l}^{m\cdot}] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_6}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{q\cdot}^p + \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot l}^{m\cdot}], \quad \frac{\partial^3 \mathfrak{J}_6}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} = \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^s + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_7}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] \delta_q^p, \quad \frac{\partial^3 \mathfrak{J}_7}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} = \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p + \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot l}^{m\cdot}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_8}{\partial (\kappa_{p\cdot}^q)} &= \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p + \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot l}^{m\cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] \delta_q^p,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_9}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^k] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{m\cdot}^m] \delta_p^q, & \frac{\partial^3 \mathfrak{J}_9}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^k]^2 \delta_p^q, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{10}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^k]^2 \delta_p^q, & \frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{10}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^s + \epsilon_{k\cdot}^k] [\kappa_{s\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^k] \delta_p^q, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{11}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{s\cdot}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{m\cdot}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p + \kappa_{q\cdot}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{m\cdot}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{11}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{m\cdot}^m] = \frac{1}{4} [\epsilon_{q\cdot}^p + \epsilon_{q\cdot}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{m\cdot}^m], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{12}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{s\cdot}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{m\cdot}^m] = \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p + \kappa_{q\cdot}^p] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{m\cdot}^m], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{12}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p + \kappa_{q\cdot}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{m\cdot}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^s + \kappa_{k\cdot}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{13}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{k\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s + \kappa_{l\cdot}^s] = \\
&= \frac{1}{8} \left[[\epsilon_{q\cdot}^l + \epsilon_{q\cdot}^l] [\kappa_{l\cdot}^p + \kappa_{l\cdot}^p] + [\epsilon^{pl} + \epsilon^{lp}] [\kappa_{lq} + \kappa_{ql}] + \right. \\
&\quad \left. + [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{s\cdot}^p] [\kappa_{q\cdot}^s + \kappa_{q\cdot}^s] + [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} + \kappa^{sp}] \right], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{13}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{s\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l + \epsilon_{k\cdot}^l] [\delta_l^p \delta_q^s + g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} \left[[\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{q\cdot}^k] [\epsilon_{k\cdot}^p + \epsilon_{k\cdot}^p] + [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} + \epsilon_{qk}] \right], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{14}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\delta_l^p \delta_q^s + g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} \left[[\kappa_{q\cdot}^k + \kappa_{q\cdot}^k] [\kappa_{k\cdot}^p + \kappa_{k\cdot}^p] + [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}] \right], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{14}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{k\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{s\cdot}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l\cdot}^s + \epsilon_{l\cdot}^s] = \\
&= \frac{1}{8} \left[[\kappa_{q\cdot}^l + \kappa_{q\cdot}^l] [\epsilon_{l\cdot}^p + \epsilon_{l\cdot}^p] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\epsilon_{lq} + \epsilon_{ql}] + \right. \\
&\quad \left. + [\kappa_{s\cdot}^p + \kappa_{s\cdot}^p] [\epsilon_{q\cdot}^s + \epsilon_{q\cdot}^s] + [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\epsilon^{ps} + \epsilon^{sp}] \right],
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{15}}{\partial(\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{\cdot k}^l] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^s] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{q\cdot}^l + \kappa_{\cdot q}^l] [\epsilon_{l\cdot}^p - \epsilon_{\cdot l}^p] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] \\
&\quad + [\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^k] [\kappa_{k\cdot}^p + \kappa_{\cdot k}^p] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{15}}{\partial(\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^s] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^p] [\epsilon_{q\cdot}^s - \epsilon_{\cdot q}^s], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{16}}{\partial(\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{\cdot k}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{q\cdot}^l + \kappa_{\cdot q}^l] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^p] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{16}}{\partial(\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l + g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^l + \kappa_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^s] + [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \\
&\quad + [\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^k] [\kappa_{k\cdot}^p + \kappa_{\cdot k}^p] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}], \tag{17} \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{17}}{\partial(\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{2} [\epsilon_{q\cdot}^p - \epsilon_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{18}}{\partial(\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^m] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^m] = \frac{1}{2} [\epsilon_{q\cdot}^p - \epsilon_{\cdot q}^p] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^m], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{18}}{\partial(\kappa_p^q)} &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^s - \epsilon_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \quad \frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{19}}{\partial(\epsilon_p^q)} = \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{19}}{\partial(\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \\
&\quad + \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] = \frac{1}{2} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{20}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^{m\cdot}] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^{m\cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{2} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^l + \kappa_{\cdot m}^{m\cdot}] + \frac{1}{4} [\kappa_{s\cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{21}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{\partial 12}{\partial (\epsilon_p^q)} = \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^{l\cdot}] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^{s\cdot}] + \\
&+ \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^{s\cdot}] + \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^{l\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q\cdot}^l - \epsilon_{\cdot q}^{l\cdot}] [\epsilon_{l\cdot}^p - \epsilon_{\cdot l}^{p\cdot}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\epsilon^{pl} - \epsilon^{lp}] + \\
&+ [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^{p\cdot}] [\epsilon_{q\cdot}^s - \epsilon_{\cdot q}^{s\cdot}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + \\
&+ [\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^p - \epsilon_{\cdot k}^{p\cdot}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{22}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^{s\cdot}] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^{l\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^p + \kappa_{\cdot s}^{p\cdot}] [\epsilon_{q\cdot}^s - \epsilon_{\cdot q}^{s\cdot}] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + \\
&+ [\kappa_{q\cdot}^k + \kappa_{\cdot q}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^p - \epsilon_{\cdot k}^{p\cdot}] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{22}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^{l\cdot}] [\epsilon_{l\cdot}^s - \epsilon_{\cdot l}^{s\cdot}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q\cdot}^l - \epsilon_{\cdot q}^{l\cdot}] [\epsilon_{l\cdot}^p - \epsilon_{\cdot l}^{p\cdot}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\epsilon^{pl} - \epsilon^{lp}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{23}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{\cdot k}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^{s\cdot}] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{q\cdot}^l - \kappa_{\cdot q}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^{p\cdot}] + [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{23}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^{s\cdot}] + \\
&+ \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{\cdot k}^{l\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^{p\cdot}] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^{s\cdot}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \\
&+ [\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^p - \kappa_{\cdot k}^{p\cdot}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} - \kappa_{qk}],
\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{24}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{\cdot k}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^l - \kappa_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{q\cdot}^l - \kappa_{\cdot q}^l] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^p] + [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + [\kappa_{s\cdot}^p + \kappa_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^s] - \\
&- [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + [\kappa_{q\cdot}^k + \kappa_{\cdot q}^k] [\kappa_{k\cdot}^p - \kappa_{\cdot k}^p] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\kappa_{kq} - \kappa_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{25}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q\cdot}^l - \epsilon_{\cdot q}^l] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^p] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \\
&+ [\epsilon_{s\cdot}^p + \epsilon_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^s] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{25}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q\cdot}^k + \epsilon_{\cdot q}^k] [\epsilon_{k\cdot}^p - \epsilon_{\cdot k}^p] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}], \tag{19} \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{26}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^l - g_{kq} g^{pl}] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] = \\
&= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^p + \kappa_{\cdot s}^p] [\kappa_{q\cdot}^s - \kappa_{\cdot q}^s] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{26}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^l] [\kappa_{l\cdot}^s - \kappa_{\cdot l}^s] + \\
&+ \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k] [\epsilon_{k\cdot}^l - \epsilon_{\cdot k}^l] [\delta_l^p \delta_q^s - g_{lq} g^{ps}] = \\
&= \frac{1}{8} [\epsilon_{q\cdot}^l - \epsilon_{\cdot q}^l] [\kappa_{l\cdot}^p - \kappa_{\cdot l}^p] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \\
&+ [\kappa_{q\cdot}^k + \kappa_{\cdot q}^k] [\epsilon_{k\cdot}^p - \epsilon_{\cdot k}^p] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{27}}{\partial (\epsilon_p^q)} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\kappa_{k\cdot}^s - \kappa_{\cdot k}^s] \delta_q^p, \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}_{27}}{\partial (\kappa_p^q)} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m] = \frac{1}{4} [\kappa_{q\cdot}^p - \kappa_{\cdot q}^p] [\epsilon_{l\cdot}^l + \epsilon_{\cdot m}^m],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}}{\partial (\epsilon_{p^{\cdot}q}^{\cdot})} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s^{\cdot}k}^{\cdot} - \kappa_{s^{\cdot}s}^{\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] [\kappa_{l^{\cdot}}^{\cdot} + \kappa_{m^{\cdot}}^{\cdot}] = \frac{1}{4} [\kappa_{q^{\cdot}}^{\cdot p} - \kappa_{q^{\cdot}}^{\cdot p}] [\kappa_{l^{\cdot}}^{\cdot} + \kappa_{m^{\cdot}}^{\cdot}], \\
\frac{\partial^3 \mathfrak{J}}{\partial (\kappa_{p^{\cdot}q}^{\cdot})} &= \frac{1}{8} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k^{\cdot}}^{\cdot s} - \epsilon_{k^{\cdot}}^{\cdot s}] [\kappa_{l^{\cdot}}^{\cdot} + \kappa_{m^{\cdot}}^{\cdot}] + \frac{1}{4} [\epsilon_{s^{\cdot}}^{\cdot k} - \epsilon_{s^{\cdot}}^{\cdot k}] [\kappa_{k^{\cdot}}^{\cdot s} - \kappa_{k^{\cdot}}^{\cdot s}] \delta_q^p = \\
&= \frac{1}{4} \left[[\epsilon_{q^{\cdot}}^{\cdot p} - \epsilon_{q^{\cdot}}^{\cdot p}] [\kappa_{l^{\cdot}}^{\cdot} + \kappa_{m^{\cdot}}^{\cdot}] + [\epsilon_{s^{\cdot}}^{\cdot k} - \epsilon_{s^{\cdot}}^{\cdot k}] [\kappa_{k^{\cdot}}^{\cdot s} - \kappa_{k^{\cdot}}^{\cdot s}] \delta_q^p \right].
\end{aligned} \tag{20}$$

4. Выводы. Настоящее исследование посвящено вопросам применения теории инвариантов построения кубических аппроксимаций энергетических форм для потенциалов силовых и моментных напряжений гемитропных микрополярных упругих тел. Для построения таких потенциалов наиболее подходит метод А-представлений, позволяющий без труда получить аппроксимацию необходимой степени точности потенциала напряжений в виде полиномиальной линейной комбинации рациональных инвариантов относительно гемитропной группы отображений трехмерного пространства.

- (1) Указан полный неприводимый набор из 86 индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов для системы двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга. Список инвариантов приводится в форме, не включающей метрического тензора [1].
- (2) Полученный набор инвариантов использован для построения кубической энергетической формы гемитропного микрополярного тела и формирования полного набора из 37 определяющих постоянных.
- (3) Получены вспомогательные формулы (производные от инвариантов), необходимые для вывода определяющих уравнений для силовых и моментных напряжений, включающие квадратичные поправки, справедливые в произвольной криволинейной системе координат.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы подтверждают соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией).

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors confirm that their authorship meets the international ICMJE criteria (all authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication).

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л. : ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [2] Спенсер Э. Теория инвариантов. Мир, 1974.
- [3] Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред. Санкт-Петербург: Изд-во политехн. ун-та, 2012.
- [4] Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. Онти. Глав. ред. техн.-теоретич. лит-ры, 1937.
- [5] Spencer AJM, Rivlin RS. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // Archive for rational mechanics and analysis. 1962. Vol. 9. P. 45–63.
- [6] Spencer AJM. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // Archive for rational mechanics and analysis. 1965. Vol. 18, no. 1. P. 51–82.
- [7] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. Théorie des corps déformables. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [8] G unther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1958. Vol. 10. P. 195–213.
- [9] Kessel Siegfried. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. 1964. Vol. 16. P. 1–22.
- [10] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [11] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [12] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [13] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin : Springer Science & Business Media, 1972.
- [14] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [15] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [16] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [17] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [18] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [19] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. Vol. 165, no. 4. P. 389–403. DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
- [20] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 3111–3119. DOI: 10.3103/S0025654423700255.
- [21] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.

- [22] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [23] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 3(57). С. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 4(58). С. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [25] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 4(54). С. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
- [26] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2022. № 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
- [27] Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. 2023. № 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. DOI: 10.1134/s1995080223060392.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, no. 5. P. 2378–2390. DOI: 10.1134/s1995080224602480.
- [30] Krylova E. Yu, Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.

REFERENCES

- [1] Gurevich G. B. *Fundamentals of the Theory of Algebraic Invariants*. Moscow : GITTL, 1948. 408 p.
- [2] Spencer E. *Invariant theory*. Moscow : Mir, 1974.
- [3] Zhilin P. A. *Rational mechanics of continuous media*. Saint Petersburg : Izd-vo politekhn. un-ta, 2012.
- [4] Sushkevich A.K. *Fundamentals of Higher Algebra*. Moscow : Onti. Glav. red. tekhn.-teoretich. lit-ry, 1937.
- [5] Spencer AJM, Rivlin RS. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part I // *Archive for rational mechanics and analysis*. 1962. Vol. 9. P. 45–63.
- [6] Spencer AJM. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors: part II // *Archive for rational mechanics and analysis*. 1965. Vol. 18, no. 1. P. 51–82.
- [7] Cosserat Eugène Maurice Pierre, Cosserat François. *Théorie des corps déformables*. Paris : A. Hermann et fils, 1909. VI+226 p.
- [8] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1958. Vol. 10. P. 195–213.

- [9] Kessel Siegfried. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-kontinuums // Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges. 1964. Vol. 16. P. 1–22.
- [10] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729.
- [11] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964 / Springer. 1966. P. 153–158. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5_16.
- [12] Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua // Mechanics of Generalized Continua / Ed. by Ekkehart Kröner. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1968. P. 109–113.
- [13] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer. Berlin : Springer Science & Business Media, 1972.
- [14] Besdo D. A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat-continuum // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 105–131.
- [15] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt : Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
- [16] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin : Springer Science & Business Media, 1986. xv+345 p.
- [17] Radaev Y. N. The multiplier rule in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2018. Vol. 22. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.
- [18] Radaev Y. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of strength and ductility. 2020. Vol. 82, no. 4. P. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
- [19] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Heat Conduction of Micropolar Solids Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2023. Vol. 165, no. 4. P. 389–403. DOI: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
- [20] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 9. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [21] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 1. P. 555–580. DOI: 10.1134/s0025654424700274.
- [22] Murashkin E. V., Radaev Y. N. Coupled Thermoelasticity of Hemitropic Media. Pseudotensor Formulation // Mechanics of Solids. 2023. Vol. 58, no. 3. P. 802–813. DOI: 10.3103/s0025654423700127.
- [23] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the polyvariance of the basic equations of coupled thermoelasticity of a micropolar solid // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 3(57). P. 112–128. DOI: 10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
- [24] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Multiweight thermomechanics of hemitropic micropolar solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. no. 4(58). P. 86–120. DOI: 10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
- [25] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. № 4(54). C. 108–115. DOI: 10.37972/chgpu.2022.54.4.009.

-
- [26] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On two main natural forms of the potential of asymmetric tensors of force and couple stresses in the mechanics of hemitropic solids // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2022. № 3(53). С. 86–100. DOI: 10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
- [27] Murashkin E. V. On the relationship between micropolar constitutive parameters of thermodynamic potentials // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. IYa Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya. 2023. № 1(55). С. 110–121. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
- [28] Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 6. P. 2440–2449. DOI: 10.1134/s1995080223060392.
- [29] Murashkin E. V., Radayev Y. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, no. 5. P. 2378–2390. DOI: 10.1134/s1995080224602480.
- [30] Krylova E. Yu, Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic, and ultraisotropic micropolar elastic solids // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, no. 3. P. 1311–1320. DOI: 10.1134/s0025654424603719.

И. Р. Муртазин, А. С. Семенов, А. В. Емельянов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И МИКРОСТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ МНОГОЗВЕННОМ ПАССИВНОМ НАГРУЖЕНИИ НИКЕЛЕВЫХ ТРУБЧАТЫХ ОБРАЗЦОВ

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. В работе представлены результаты экспериментальных исследований трубчатых поликристаллических образцов из технически чистого никеля марки НП2 на активное (одноосное растяжение после предварительного сжатия) и пассивное (кручение с растяжением/сжатием внутри поверхности текучести) нагружение. Результаты экспериментов наглядно демонстрируют связь микроструктуры образцов с их механическими характеристиками. Целью исследования является валидация и идентификация параметров разработанной микроструктурной упругопластической модели при различных режимах деформирования. Микроструктурная модель поликристаллического материала учитывает наличие и взаимодействие входящих в него произвольно ориентированных кристаллитов, поэтому сравнение модели с экспериментом проводится для осредненных по представительному объему полей микронапряжений и микродеформаций. Предложенная модель монокристалла является модификацией теорий скольжения Тейлора и Каето и учитывает наличие различных механизмов скольжения, которые активируются при достижении сдвиговыми напряжениями соответствующих значений локальных пределов текучести. В процессе идентификации параметров используется универсальный алгоритм поиска минимума функционала, основанный на методе градиентного спуска, позволяющий осуществлять поиск параметров в заданном диапазоне значений. Предложенный критерий идентификации основан на минимизации статистических показателей: среднего квадратичного отклонения расчетной кривой от экспериментальной; близости к единице значения линейного коэффициента корреляции между данными кривыми; разницы площадей под сравниваемыми кривыми (энергетический критерий). В расчетах напряженно-деформированного состояния поликристаллического агрегата используется метод конечно-элементной гомогенизации для случаев различных механизмов скольжения и ориентации кристаллитов. Результаты сравнения расчетов с экспериментальными данными показали, что предложенная микроструктурная модель поликристаллического материала позволяет с хорошей точностью описать процесс накопления пластических деформаций при сложном пассивном нагружении.

Ключевые слова: монокристалл, поликристалл, микроструктура, эксперимент, валидация, параметры модели, кривые деформирования, пассивное нагружение, никель, метод конечных элементов.

Муртазин Ильнар Робертович, инженер-исследователь ПИШ НОЦ "Цифровой инжиниринг в атомной и термоядерной энергетике", ассистент высшей школы механики и процессов управления; e-mail: murtazin_ir@spbstu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7580-5669>; AuthorID: 1059960

Семенов Артем Семенович, доктор физико-математических наук, профессор высшей школы механики и процессов управления; e-mail: semenov_as@spbstu.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8225-3487>; AuthorID: 6571

Емельянов Антон Владимирович, зав. лабораторией НИЛ "Политехтест КСМ"; e-mail: em-ant1990@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0002-7736-5652>; AuthorID: 966108



для цитирования: Муртазин И. Р., Семенов А. С., Емельянов А. В. Экспериментальное исследование и микроструктурное моделирование упругопластического деформирования при многозвенном пассивном нагружении никелевых трубчатых образцов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 171–193. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.009. EDN: MAYLCO

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

I. R. Murtazin, A. S. Semenov, A. V. Emelianov

EXPERIMENTAL STUDY AND MICROSTRUCTURAL MODELING OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION UNDER MULTI-LINK PASSIVE LOADING OF NICKEL TUBULAR SPECIMENS

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St.Petersburg, Russia

Abstract. The paper presents the results of experimental studies of tube polycrystalline specimens made of pure NP2 grade nickel for active (uniaxial tension after preliminary compression) and passive (torsion with tension/compression within the boundaries of the yield surface) loading. The results of the experiments clearly demonstrate the relationship between the microstructure of the specimens and their mechanical properties. The aim of the study is to validate and identify the parameters of the developed microstructural elastoplastic model under various loadings. It is implied that a polycrystalline object is considered as a set of arbitrarily oriented crystallites included in it, so the comparison of the model with an experiment is carried out in terms of microstress and strain averaged over a representative volume. The proposed model is a significant extension of the theory of Taylor and Cailletaud single crystals strain hardening and takes into account up to 10 different slip mechanisms that are activated when the stress value of the local yield strength are reached. During the parameter identification process, a universal algorithm for finding the minimum functional is used, based on the gradient descent method, which allows to search for parameters in a given range of values. The proposed identification criterion is accompanied by well-known statistical indicators: the method of least squares, which characterizes the minimization of the standard deviation of the calculated curve from the experimental one; proximity to unity of the value of the linear correlation coefficient between these curves; minimization of the difference in areas under the compared curves (energy criterion). In computations of the stress-strain state of a polycrystalline aggregate, the finite element homogenization method is used for cases of different slip mechanisms and crystallite orientations. The comparison of computation results with experimental data showed that the proposed microstructural model of polycrystalline material allows to describe with good accuracy the process of plastic strain accumulation under complex passive loading.

Keywords: single crystal, polycrystal, microstructure, experiment, validation, model parameters, stress-strain curves, passive loading, nickel, finite element method.

Ilnar R. Murtazin, Research Engineer at the National Research Center "Digital Engineering in Nuclear and Thermonuclear Power Engineering", Assistant at the Higher School of Mechanics and Control Processes; **e-mail:** murtazin_ir@spbstu.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-7580-5669>; AuthorID: 1059960

Artem S. Semenov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Higher School of Mechanics and Control Processes; **e-mail:** semenov_as@spbstu.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-8225-3487>; AuthorID: 6571

Anton V. Emelianov, Head of the laboratory of the Research Institute "Politechtest KSM";
e-mail: em-ant1990@yandex.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-7736-5652>; AuthorID: 966108



to cite this article: Murtazin I. R., Semenov A. S., Emelianov A. V. Experimental study and microstructural modeling of elastic-plastic deformation under multi-link passive loading of nickel tubular specimens // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 171–193. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.009

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В настоящее время методы проектирования элементов конструкций и сооружений характеризуются повышенными требованиями к долговечности, надежности и безопасности, в том числе при работе в условиях сложного пассивного непропорционального нагружения. Немаловажным аспектом здесь является нетривиальность в определении неупругого отклика конструкции. В то время как при пассивном нагружении получившая наибольшее распространение теория пластического течения постулирует упругое поведение, на практике зачастую наблюдается эффект накопления пластических деформаций при нагружении внутри поверхности текучести, то есть в случае, когда интенсивность напряжений строго меньше предела текучести. Особенно заметны подобные эффекты при циклическом воздействии, сопровождающемся односторонним накоплением микропластических деформаций и усталостных повреждений. Одним из возможных подходов повышения точности оценки долговечности ответственных элементов конструкций и сооружений является использование высокоточных моделей неупругого деформирования материала с учетом его микроструктуры. Для успешного применения которых требуется разработка специфических методик проведения натурных испытаний и процедур идентификации параметров модели.

Экспериментальные исследования процессов пассивного нагружения и их теоретическое описание с позиции теории упругопластических процессов [1] были выполнены В.Г. Зубчаниновым [2–12]. Определение процессов пассивного деформирования и пассивного нагружения, как условий отрицательности элементарной работы формоизменения $dA_\Phi = \mathbf{s} \cdot d\mathbf{e} < 0$ и элементарной дополнительной работы формоизменения $dB_\Phi = \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} < 0$ предложено В.Г. Зубчаниновым в [12]. Определения «активного» и «пассивного» деформирования при сложном нагружении соответствуют терминам «нагружение» и «разгрузка» при одноосном растяжении/сжатии.

Одни из первых экспериментальных исследований процессов сложного пассивного нагружения и их теоретическое описание с позиции многоповерхностной теории пластичности [13, 14] были выполнены И.Н. Изотовым, испытывавшим поликристаллические трубчатые тонкостенные образцы из технически чистого никеля при комбинированном растяжении/сжатии и кручении (Р-М опыты) [13].

В отличие от классической феноменологической теории пластического течения ряд теорий пластичности обладают принципиальной возможностью описания пластического деформирования при пассивном нагружении. К их числу относятся теория упругопластических процессов А.А. Ильюшина [1], эндохронная теория пластичности [15] и реологические (структурные) модели В.А. Пальмова [16]. Однако формулировки определяющих уравнений указанных теорий ориентированы, прежде всего, на уточненное описание активного деформирования, а параметры материала определяются без учета специфики процессов при пассивном нагружении. Эти особенности учитываются в многоповерхностной теории пластичности с одной активной поверхностью нагружения [13, 14, 17–20].

В данной работе рассматривается еще один подход для описания процесса накопления пластических деформаций при сложном пассивном нагружении, основанный на микроструктурной модели пластичности [21–26], которая учитывает поведение отдельных кристаллитов, а также на применении метода гомогенизации, позволяющего проанализировать отклик поликристаллического агрегата на макроуровне. Целью исследований являлось установление принципиальной возможности описания пластического деформирования при сложном пассивном нагружении на основе предложенного подхода, его экспериментальная валидация и разработка методов идентификации параметров микроструктурной модели.

В разделе 1 представлены результаты экспериментальных исследований трубчатых толстостенных образцов из технически чистого никеля при одноосном (растяжение после предварительного сжатия) и многоосном (комбинированное кручение с растяжением/сжатием по многозвенным траекториям) нагружении.

Раздел 2 посвящен описанию микроструктурных моделей упругопластического деформирования. Рассматривается модель монокристалла Каето [22, 23, 26] и ее обобщение в форме модели мультимеханизмов неупругого деформирования [27]. В данном разделе также представлена методика идентификации параметров рассматриваемой модели на основе экспериментальных данных и описание метода конечно-элементной гомогенизации.

В разделе 3 приводится сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. Анализируется точность идентификации параметров модели в зависимости от числа кристаллитов в поликристалле и числа экспоненциальных членов (механизмов упрочнения) в аппроксимации диаграммы деформирования. Представлено сравнение результатов расчетов с использованием микроструктурной модели и теории пластического течения с данными экспериментов при сложном многозвенном пассивном нагружении.

Ключевым итогом работы является апробация предложенной модифицированной микроструктурной модели, ее применение к оригинальным результатам натурных испытаний. Разработанная методика расчета поликристаллического объекта как совокупности входящих в него разориентированных кристаллитов (метод конечно-элементной гомогенизации) позволяет установить связь микроструктурных особенностей объекта с его макромеханическими характеристиками.

1. Материалы и методика экспериментальных исследований. Экспериментальные исследования были выполнены в испытательном центре «Политехтест» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Программа экспериментальных исследований включала три вида испытаний:

- одноосное растяжение,
- одноосное растяжение после предварительного сжатия,

- комбинированное кручение с растяжением/сжатием по многозвенным траекториям.

Процесс нагружения предполагался изотермическим, а деформации – малыми. Эксперименты осуществлялись на универсальной испытательной машине Instron 8850.

В качестве образцов были использованы полые толстостенные цилиндрические образцы из поликристаллического никеля марки НП2 (никель полуфабрикатный) в состоянии поставки, нарезанные из исходно цельной трубы. Погонная масса цельной трубы составляла около 2,1 кг/м, что соответствует заявленной плотности никеля. Рассматривались, две серии образцов, отличающихся условиями термообработки. Длина трубчатого образца 150/200 мм в зависимости от серии экспериментов, внешний диаметр в рабочей части 25 мм, толщина стенки 3,5 мм. Размер рабочей зоны вдоль оси образца составляет 25 мм для одноосных и 50 мм для многоосных испытаний. Концы образцов, захватываемые зажимами испытательной машины, плотно закрываются цилиндрическими пробками диаметром 18 мм из нержавеющей стали марки AISI304. Во избежание краевых эффектов концы пробок скругляются. Радиус скругления равен 12,5 мм. На рис. 1 показаны образцы из никеля с пробками, испытательная машина, а также образец в захватах машины с высокоточными индукционными датчиками Instron для измерения осевого удлинения при растяжении/сжатии и угла закручивания при кручении.

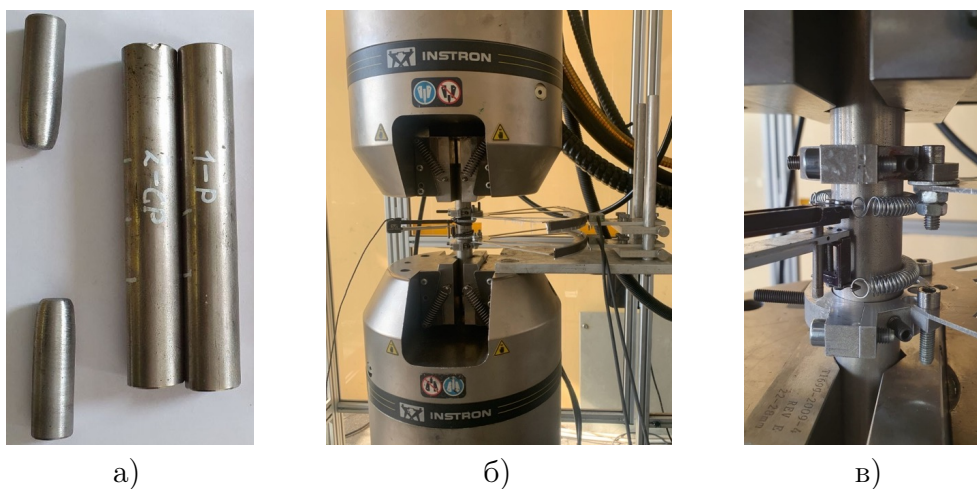


Рис. 1. Эксперимент: а) никелевые трубчатые образцы с пробками, б) испытательная машина Instron 8850, в) образец в оснастке с датчиками измерения осевого удлинения и угла закручивания

Во всех экспериментах осуществлялся режим мягкого нагружения со скоростью 10 МПа/с [28]. На рис. 2 показаны результаты экспериментов двух серий

образцов: одноосные знакопостоянный и знакопеременный тесты образцов первой серии и одноосный знакопеременный тест для образцов второй серии.

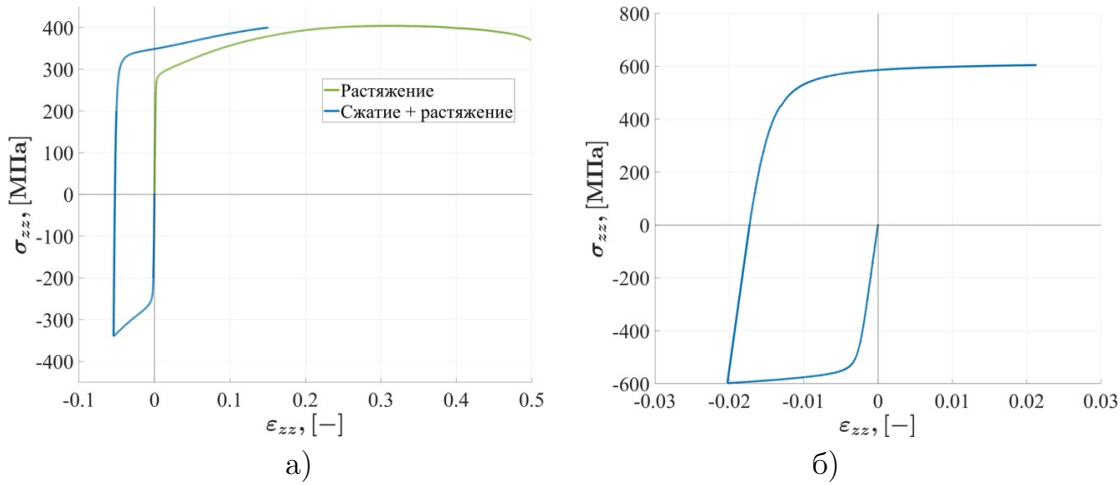


Рис. 2. Результаты экспериментов при одноосном нагружении для образцов: а) первой серии, б) второй серии

В виду явно отличающихся характеристик серий был проведен спектральный анализ, а также дополнительное исследование по изучению микроструктуры образцов после испытания. Спектральный анализ показал, что образцы обеих серий содержат более 99% никеля. В [29] указывается, что размер зерна является основным микроструктурным параметром, влияющим на механические свойства никеля. На рис. 3 показаны результаты металлографических исследований данных образцов после одноосных испытаний на участках удаленных от рабочей зоны.

Как видно из рисунков, несмотря на близкие размеры зерен, причина расхождения результатов объясняется большей степенью гетерогенности структуры, а также разноориентации кристаллитов образцов первой серии по сравнению со второй [30]. Дальнейшее рассмотрение ограничено образцами второй серии.

На рис. 4 показаны траектории деформирования (в пространстве деформаций с осями $\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{z\varphi}/\sqrt{3}$) для двух заданных многозвенных путей нагружения (в пространстве напряжений с осями $\sigma_{zz} - \sigma_{z\varphi}\sqrt{3}$), отличающихся уровнями первичного нагружения (526,4 МПа и 574,4 МПа).

Траектория пассивного нагружения задавалась лежащей целиком внутри достигнутой при первичном растяжении поверхности нагружения Мизеса, полученной в предположении наличия смешанного изотропно-кинематического упрочнения.

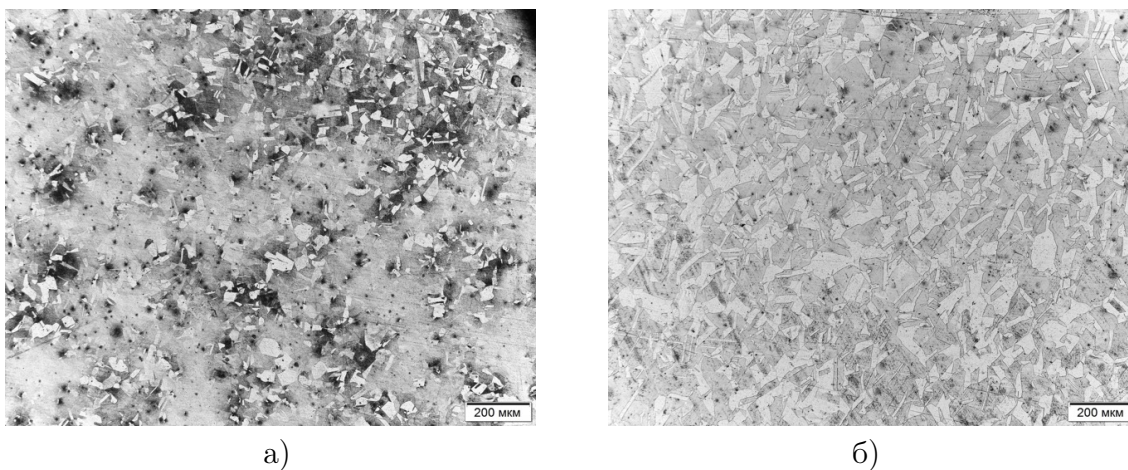


Рис. 3. Результаты металлографических исследований для образцов: а) первой серии, б) второй серии

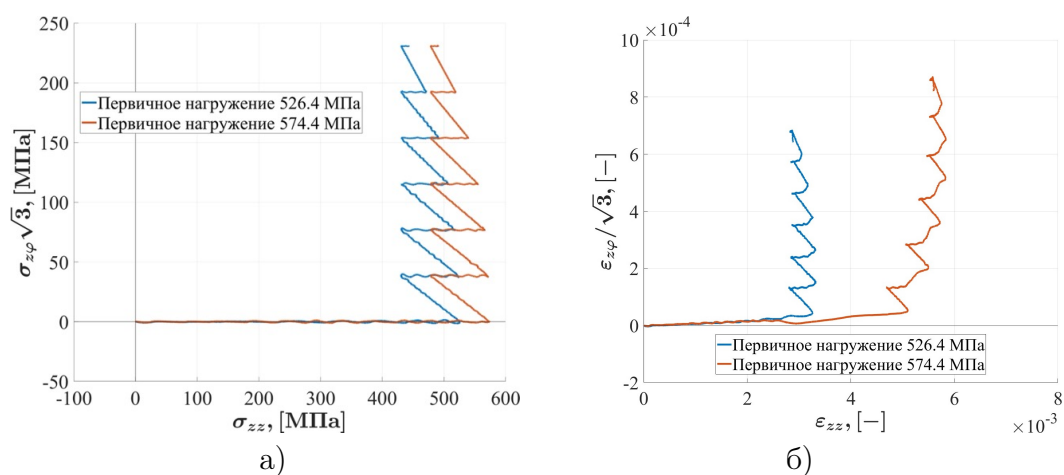


Рис. 4. Результаты экспериментов при многоосном пассивном нагружении: а) заданные многозвенные пути нагружения, б) траектории деформирования (отклик материала) для двух уровней первичного нагружения 526,4 МПа и 574,4 МПа

Таким образом, на каждом двухзвенном этапе пассивного нагружения сначала происходит уменьшение осевых напряжений при одновременном росте касательных, а затем при постоянных касательных напряжениях осевые напряжения увеличиваются, оставаясь с некоторым запасом в пределах поверхности нагружения. Касательные напряжения на каждом этапе увеличиваются на 22 МПа.

Результаты экспериментов показали, что при пассивном нагружении наблюдается накопление пластических деформаций. Визуально это проявляется в перекрестных эффектах (нормальные/касательные) и непропорциональности изменения, несвойственного линейно упругому поведению. При постоянных значениях касательных напряжений происходит увеличение соответствующих сдвиговых деформаций с ростом осевых напряжений. Соответствующие постоянным углам сложного пассивного нагружения отклики материала в пространстве деформаций демонстрируют изменение (увеличение) соответствующих углов. При увеличении уровня первичного нагружения наблюдаемые эффекты становятся более заметными. Так, при увеличении уровня первичного нагружения на 9% значение максимальных осевых деформаций увеличивается на 77%, значение максимальных сдвиговых деформаций увеличивается на 29%.

2. Методы микроструктурного моделирования. Микроструктурные (микромеханические, физические, кристаллографические, континуально дислокационные) модели позволяют учесть процессы изменения структуры (скольжение, двойникование, особые свойства межзеренных границ, эволюцию дефектов) и особенности механизмов деформирования на разных структурных уровнях. Для описания поведения поликристаллического материала на макроуровне в данной работе используется метод двухуровневой конечно-элементной гомогенизации. Следует отметить, что использование альтернативных упрощенных схем гомогенизации (метода самосогласования, статистических моделей (верхняя и нижняя оценки Фойгта, Рейсса и др.)) не позволяет адекватно описать эффект взаимного влияния кристаллитов.

2.1. Модель мультимеханизмов неупругого деформирования. Для прогнозирования напряженно-деформированного состояния отдельных кристаллитов в составе представительного объема поликристалла при сложных программах нагружения рационально применять микроструктурные модели упругопластического деформирования материала [21–26], учитывающие, что пластические деформации происходят в соответствии с механизмом скольжения по активным системам скольжения и в значительной мере зависят от кристаллографической ориентации кристаллита по отношению к направлению внешнего механического воздействия.

Предполагается, что пластическое деформирование осуществляется как результат возможного скольжения в N_{SS} системах скольжения, характеризующихся нормалью к α плоскости скольжения \mathbf{n}^α и направлением скольжения \mathbf{l}^α ($\alpha = 1..N_{SS}$). Активизируемых систем скольжения может быть несколько (например, октаэдрические и кубические), также и механизмов деформирования (например, пластичность и ползучесть), кроме этого возможны различные стадии упрочнения. Для учета перечисленных особенностей вводится микроструктурная модель *мультимеханизмов* [27], являющаяся обобщением модели Кае-то [22], тензор скорости неупругой (пластической) деформации при наличии N_M

различных механизмов неупругого деформирования определяется равенством:

$$\dot{\epsilon}^p = \sum_{i=1}^{N_M} \sum_{\alpha=1}^{N_{SS}} \dot{\gamma}_i^\alpha \mathbf{P}_i^\alpha, \quad (1)$$

где $\dot{\gamma}_i^\alpha$ – скорость сдвиговой деформации в α -ой системе скольжения i -го механизма деформирования, $\mathbf{P}_i^\alpha = 1/2(\mathbf{n}_i^\alpha \otimes \mathbf{l}_i^\alpha + \mathbf{l}_i^\alpha \otimes \mathbf{n}_i^\alpha)$ – тензор Шмида, определяемый исключительно геометрией и ориентацией кристаллической решетки. Модель монокристалла Каето соответствует случаю $N_M = 1$.

В случае единого типа кристаллической решетки для всех механизмов неупругого деформирования ($\mathbf{P}_i^\alpha \equiv \mathbf{P}^\alpha$), то есть при сохранении возможности учета различных механизмов упрочнения в рамках одной фазы материала, уравнение (1) упрощается

$$\dot{\epsilon}^p = \sum_{\alpha=1}^{N_{SS}} \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{P}^\alpha, \quad (2)$$

где $\dot{\gamma}^\alpha = \sum_{i=1}^{N_M} \dot{\gamma}_i^\alpha$.

Введем условие пластичности (уравнение поверхности нагружения для одной системы скольжения монокристалла) в общем виде для многофазной модели, следствием которого могут быть определены скорости неупругих сдвиговых деформаций $\dot{\gamma}_i^\alpha$:

$$f_i^\alpha = |\tau^\alpha - X_i^\alpha| - R_i^\alpha - \tau_i^0 = 0, \quad (3)$$

где α – номер системы скольжения, i – номер механизма упрочнения, f_i^α – функция нагружения (определяющая биплоскость текучести), $\tau^\alpha = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}^\alpha$, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, X_i^α, R_i^α – внутренние переменные, характеризующие кинематическое и изотропное упрочнение (определяющие местоположение центра и удаление от него биплоскости текучести), определяемые в соответствии с выражениями:

$$X_i^\alpha = C_i x_i^\alpha, \quad \dot{x}_i^\alpha = [\text{sign}(\tau^\alpha - X_i^\alpha) - D_i x_i^\alpha] \dot{\lambda}_i^\alpha, \quad (4)$$

$$R_i^\alpha = b_i Q_i \sum_{\beta=1}^{N_{SS}} h_i^{\alpha\beta} r_i^\beta, \quad \dot{r}_i^\alpha = (1 - b_i r_i^\alpha) \dot{\lambda}_i^\alpha, \quad (5)$$

где $h_i^{\alpha\beta} = q_i + (1 - q_i) \delta_{\alpha\beta}$ – матрица изотропного упрочнения, позволяющая учесть перекрестное (латентное) упрочнение при $q_i \neq 0$, $\dot{\lambda}_i^\alpha = \dot{\gamma}_i^\alpha \text{sign}(\tau_i^\alpha - X_i^\alpha)$, $\tau_i^0, q_i, b_i, Q_i, C_i, D_i$ – константы материала ($i = 1..N_M$).

Зависимость между полными деформациями и напряжениями при мягком одноосном нагружении вдоль ребра кристаллической решетки [100] для случаев кинематического и изотропного упрочнения определяется выражениями:

$$\epsilon_{[100][100]} = \frac{\sigma_{[100][100]}}{E_{[100]}} - \frac{8}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{N_M} \frac{1}{D_i} \ln \left[1 - \frac{D_i}{\sqrt{6} C_i} \left\langle \sigma_{[100][100]} - \sqrt{6} \tau_i^0 \right\rangle \right], \quad (6)$$

$$\varepsilon_{[100][100]} = \frac{\sigma_{[100][100]}}{E_{[100]}} - \frac{8}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{N_M} \frac{1}{b_i} \ln \left[1 - \frac{1}{\sqrt{6} Q_i H_i (1 + 7q_i)} \langle \sigma_{[100][100]} - \sqrt{6} \tau_i^0 \rangle \right], \quad (7)$$

где угловые скобки Макойли определяются соотношением:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Введенный оператор позволяет учесть включение i -ого механизма при преодолении сдвиговыми напряжениями предела текучести для данного механизма.

Инверсия уравнений (6)-(7) в общем случае многофазной модели невозможна, но удается получить аналитическую зависимость в параметрическом виде, используя в качестве параметра пластические множители для каждого механизма ($\lambda_i^\alpha \equiv \lambda_i$ при нагружении вдоль $[100]$):

$$\sigma_{[100][100]} = \sqrt{6} \left[\tau_i^0 + Q_i (1 + 7q_i) (1 - e^{-b_i \lambda_i}) + \frac{C_i}{D_i} (1 - e^{-D_i \lambda_i}) \right], \quad (9)$$

$$\varepsilon_{[100][100]}^p = \sum_{i=1}^{N_M} \frac{8}{\sqrt{6}} \lambda_i.$$

2.2. Конечно-элементная гомогенизация.

Для описания поведения поликристаллического материала на макроуровне используется метод конечно-элементной гомогенизации. Рассматривается кубический представительный объем с разбиением $3 \times 3 \times 3$, содержащий 216 кристаллитов, соответствующих гауссовым точкам трехмерного конечного элемента и ориентированных произвольным образом (нормальное распределение в пределах общего телесного угла) путем задания трех углов Эйлера $\varphi = 2\pi Z_1$, $\theta = \arccos(1 - 2Z_2)$, $\psi = 2\pi Z_3$, где Z_1, Z_2, Z_3 – независимые равномерные случайные распределения. В случае идентификации параметров уместно проводить расчеты на фиксированной кристаллографической ориентации [31].

Ниже рассмотрены два варианта граничных условий (10) и (11). Для идентификации параметров на основе одноосных экспериментов задаются кинематические граничные условия (10) на гранях, перпендикулярных направлению действия нагрузки

$$\begin{aligned} u_x|_{\Gamma_1} &= \varepsilon_{xx} l/2 = u_0/2, & u_x|_{\Gamma_2} &= -\varepsilon_{xx} l/2 = -u_0/2, \\ u_y|_{\Gamma_1} &= u_y|_{\Gamma_2}, & u_z|_{\Gamma_1} &= u_z|_{\Gamma_2}, \\ u_x|_{\Gamma_3} &= u_x|_{\Gamma_4}, & u_z|_{\Gamma_3} &= u_z|_{\Gamma_4}, \\ u_x|_{\Gamma_5} &= u_x|_{\Gamma_6}, & u_y|_{\Gamma_5} &= u_y|_{\Gamma_6}, \end{aligned} \quad (10)$$

где u_x, u_y, u_z – компоненты вектора перемещений, Γ_1 - Γ_6 – грани кубического представительного объема с направлениями нормалей по осям $+x, -x, +y, -y$,

$+z, -z$ соответственно, ε_{xx} – заданное значение осевой деформации, l – характерный осевой размер представительного объема, u_0 – заданная величина перемещения.

Подобный выбор обусловлен необходимостью контролировать деформации при расчете в виду наличия близкого к горизонтальному участку упрочнения, так как в случае силовых граничных условий может наблюдаться сильный разброс результатов при малом отклонении осредненных по представительному объему значений напряжений.

При расчете на сложное пассивное нагружение используются силовые граничные условия (11) на гранях, перпендикулярных направлению действия нагрузки. Для всех сценариев нагружения также используются условия периодичности по граням, неперпендикулярным направлению действия нагрузки

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{\Gamma_1} &= \sigma_{xx}|_{\Gamma_2} = \sigma_0, \\ \tau_{xy}|_{\Gamma_1} &= \tau_0, \quad \tau_{xy}|_{\Gamma_2} = -\tau_0, \\ \tau_{xy}|_{\Gamma_3} &= \tau_0, \quad \tau_{xy}|_{\Gamma_4} = -\tau_0, \\ u_z|_{\Gamma_1} &= u_z|_{\Gamma_2}, \quad u_z|_{\Gamma_3} = u_z|_{\Gamma_4}, \\ u_x|_{\Gamma_5} &= u_x|_{\Gamma_6}, \quad u_y|_{\Gamma_5} = u_y|_{\Gamma_6}, \end{aligned} \tag{11}$$

где σ_{xx}, τ_{xy} – компоненты нормальных и касательных напряжений, σ_0, τ_0 – заданные значения напряжений.

2.3. Процедура идентификации параметров материала.

Идентификация параметров микроструктурной модели проводилась согласно алгоритму, предложенному в [31], в основе которого лежит метод градиентного спуска [32]. Алгоритм идентификации реализован в вычислительной среде MATLAB [33], позволяющей решать задачи нелинейной оптимизации с ограничениями. Используется инструмент *fmincon*, являющийся встроенной функцией MATLAB. Для определения напряженно-деформированного состояния поликристаллического агрегата с новым набором констант материала программа MATLAB запускает конечно-элементный вычислительный комплекс PANTOCRATOR [34]. Его отличительной особенностью является возможность проводить расчеты с использованием микроструктурной модели. Также он обеспечивает автоматизированный процесс конечно-элементной гомогенизации.

Ключевое отличие предлагаемой процедуры оптимизации заключается в формулировке минимизируемого функционала. Он представляет собой сумму трех простейших величин (выражение (12)), в основе которых лежат широко известные статистические показатели (выражения (13)-(15)). Для корректного учета влияния каждого из вспомогательных функционалов было проведено обезразмеривание. Причем величины Y_1 и Y_3 влияют тем больше, чем больше становится разница между кривыми, так как они могут принимать значения больше 1.

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 \rightarrow \min. \tag{12}$$

Функционал Y_1 подразумевает рассмотрение среднеквадратического отклонения экспериментальной величины напряжений от расчетной

$$Y_1 = \frac{\sqrt{\sum (\sigma_{zz}^{exp} - \sigma_{xx}^{calc})^2}}{\max(|\sigma_{zz}^{exp}|)}. \quad (13)$$

Функционал Y_2 подразумевает рассмотрение линейного коэффициента корреляции Пирсона между двумя величинами и его близость к 1 [35]:

$$Y_2 = \frac{\sum (\sigma_{zz}^{exp} - \overline{\sigma_{zz}^{exp}}) \sum (\sigma_{xx}^{calc} - \overline{\sigma_{xx}^{calc}})}{\sqrt{\sum (\sigma_{zz}^{exp} - \overline{\sigma_{zz}^{exp}})^2 \sum (\sigma_{xx}^{calc} - \overline{\sigma_{xx}^{calc}})^2}} - 1, \quad (14)$$

где переменные с чертой означают среднее значение величины по массиву данных.

Функционал Y_3 подразумевает рассмотрение разницы площадей под зависимостями. В контексте механики деформируемого твердого тела речь идет об отождествлении потенциальной энергии деформирования [36, 37]:

$$Y_3 = \frac{\left| \int_0^{\varepsilon_{zz}^{max}} \sigma_{zz}^{exp} d\varepsilon_{zz} - \int_0^{\varepsilon_{xx}^{max}} \sigma_{xx}^{calc} d\varepsilon_{xx} \right|}{\int_0^{\varepsilon_{zz}^{max}} \sigma_{zz}^{exp} d\varepsilon_{zz}}. \quad (15)$$

Таким образом, идентификация параметров производится в предположении минимальной суммы вкладов трех критериев.

3. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. Идентификация параметров микроструктурной модели производилась на основе результатов одноосных экспериментов (для образцов второй серии, см. рис. 2б) согласно методам, описанным в разделе 2.3.

В качестве искоемых микроструктурных параметров пластичности рассматривались $\tau_i^0, b_i, Q_i, C_i, D_i$. Предполагалось, что при комнатной температуре активизируются только октаэдрические системы скольжения. Параметры изотропного и кинематического упрочнения определялись одновременно из одного опыта на сжатие с последующим растяжением. В модели учитывалась анизотропия упругих свойств кристаллитов в предположении кубической симметрии (соответствующей ГЦК решетке никеля), что также может оказывать влияние на неупругое деформирование [38]. В связи с этим наряду с модулем Юнга $E = E_{[100]}$ и коэффициентом Пуассона $\nu = \nu_{[100][010]}$ модуль сдвига $G = G_{[100][010]}$ также является независимым идентифицируемым параметром.

При решении нелинейных краевых задач, связанных с идентификацией констант материала микроструктурной модели использовались граничные условия (10). Предполагалось, что начальные напряжения и деформации у кристаллитов отсутствуют.

Для представительного объема поликристалла, соответствующего одной материальной точке конструкции, использовалась локальная декартова система координат (x, y, z) , отличная от ранее введенной для описания экспериментов на трубчатых образцах цилиндрической системы координат (r, φ, z) . Нагружение

представительного объема осуществлялось вдоль оси x . Сопоставление расчетных и экспериментальных данных проводилось в предположении локального соответствия ($\sigma_{xx}^{RVE} \Rightarrow \sigma_{zz}^{Tube}$, $\sigma_{xy}^{RVE} \Rightarrow \sigma_{z\varphi}^{Tube}$, $\varepsilon_{xx}^{RVE} \Rightarrow \varepsilon_{zz}^{Tube}$, $\varepsilon_{xy}^{RVE} \Rightarrow \varepsilon_{z\varphi}^{Tube}$).

На рис. 5 показано сравнение результатов расчетов с идентифицированными параметрами с экспериментальными данными при одноосном нагружении в зависимости от количества кристаллитов N_C (непосредственно связанных с числом конечных элементов N_E равенством $N_C = 8N_E = 8N_D^3$, где N_D – количество элементов при разбиении представительного объема вдоль одного направления) и от количества механизмов упрочнения N_M , а также от варьирования кристаллографических ориентаций в случае $N_D = 3$, $N_M = 2$.

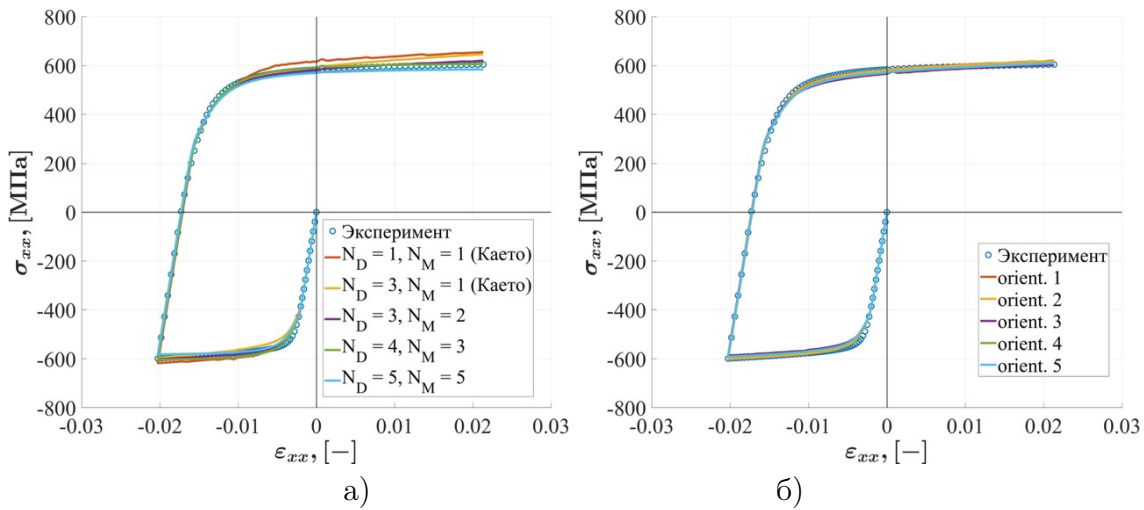


Рис. 5. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными в зависимости от а) параметров N_D (характеризует число кристаллитов) и N_M (механизмов деформирования); б) варьирования кристаллографических ориентаций (в случае $N_D = 3$, $N_M = 2$)

Результаты расчетов демонстрируют хорошее соответствие экспериментальным данным. Наблюдается монотонная сходимость результатов с ростом параметров N_D и N_M . Использование модели с $N_M > 1$ повышает точность описания эксперимента. Варьирование ориентаций кристаллитов в представительном объеме характеризуется статистической стабильностью.

В табл. 1 представлены параметры микроструктурной модели для случаев $N_M = 1$ и $N_M = 2$ при разбиении $N_D = 3$.

Результаты эксперимента и расчетов указывают на то, что кинематическое упрочнение превалирует над изотропным.

На рис. 6 показано сравнение расчетов с использованием микроструктурной модели и теории пластического течения с результатами эксперимента при многоосном пассивном нагружении (см. рис. 4). Видно, что теория пластического

Таблица 1. Результаты идентификации параметров микроструктурной модели для случаев $N_M = 1$ и $N_M = 2$ при $N_D = 3$

Параметры	$N_M = 1$ (Каето)	$N_M = 2$ (Мультимеханизм)
G , [МПа]	76656.5	87736.9
τ_1^0 , [МПа]	177.3	187.0
q_1 , [-]	0.7	0.7
b_1 , [-]	17.2	17.6
Q_1 , [МПа]	17.2	6.52
C_1 , [МПа]	271.5	423.2
D_1 , [-]	0.185	0.204
τ_2^0 , [МПа]	–	192.6
q_2 , [-]	–	0.7
b_2 , [-]	–	0.054
Q_2 , [МПа]	–	0.928
C_2 , [МПа]	–	6920.7
D_2 , [-]	–	359.8

течения, не учитывающая накопление пластических деформаций при пассивном нагружении, дает существенно заниженные прогнозы осевых и сдвиговых деформаций. Таким образом, использование микроструктурной модели позволяет повысить точность описания процессов пассивного нагружения. Следует отметить, что на этапе первичного пропорционального нагружения все результаты совпадают, отличия возникают при сложном непропорциональном нагружении по многозвенной траектории.

Микроструктурная модель описывает эффект накопления пластических деформаций при пассивном нагружении благодаря наличию в поликристалле кристаллитов ориентированных таким образом, что пластическое состояние в них возникает при меньших уровнях нагрузки, чем в основной массе кристаллитов.

На рис. 7 и 8 показаны распределения полей пластических деформаций ε_{xx}^p и ε_{xy}^p в представительном объеме поликристалла в конечный момент времени нагружения. Наблюдается значительная микронеоднородность распределения пластических деформаций в объеме. Возникают зоны пластических деформаций разных знаков при одноосном растяжении представительного объема поликристалла. Решения нелинейных краевых задач с использованием микроструктурной модели мультимеханизмов получены с помощью конечно-элементного вычислительного комплекса PANTOCRATOR [34].

Из полученных результатов видно, что наблюдается тенденция к накоплению и неоднородному распределению микропластических деформаций, что оказывает влияние на процесс многоциклового усталости.

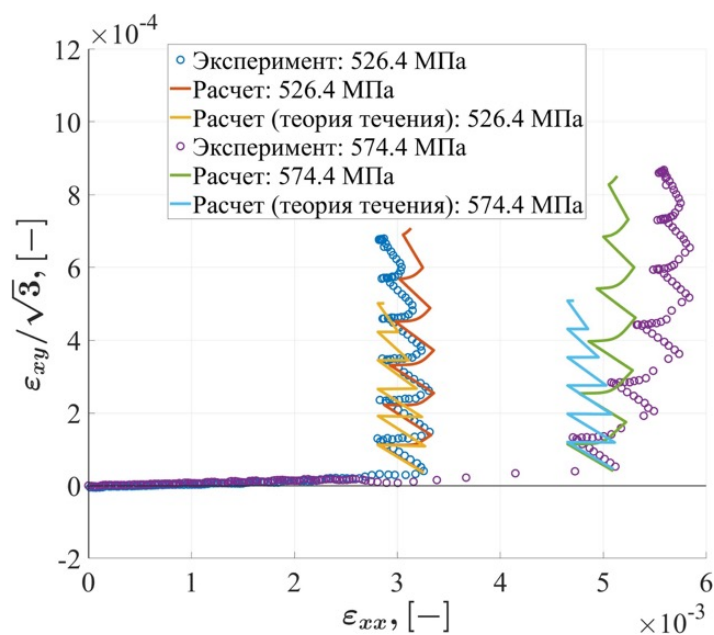


Рис. 6. Сравнение результатов расчета на многозвенное пассивное нагружение с экспериментальными данными для двух уровней первичного нагружения 526,4 МПа и 574,4 МПа

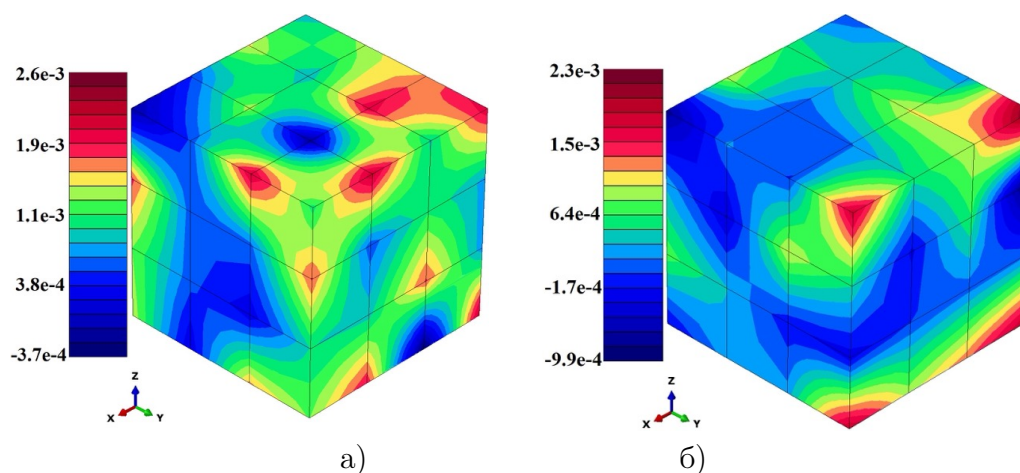


Рис. 7. Распределения полей пластических деформаций в конечный момент времени нагружения (случай первичного нагружения 526,4 МПа): а) $\varepsilon_{xx}^p, [-]$, б) $\varepsilon_{xy}^p, [-]$

Закключение.

Результаты экспериментальных исследований при сложном многозвенном пассивном нагружении (комбинированное растяжение/сжатие и кручение) на

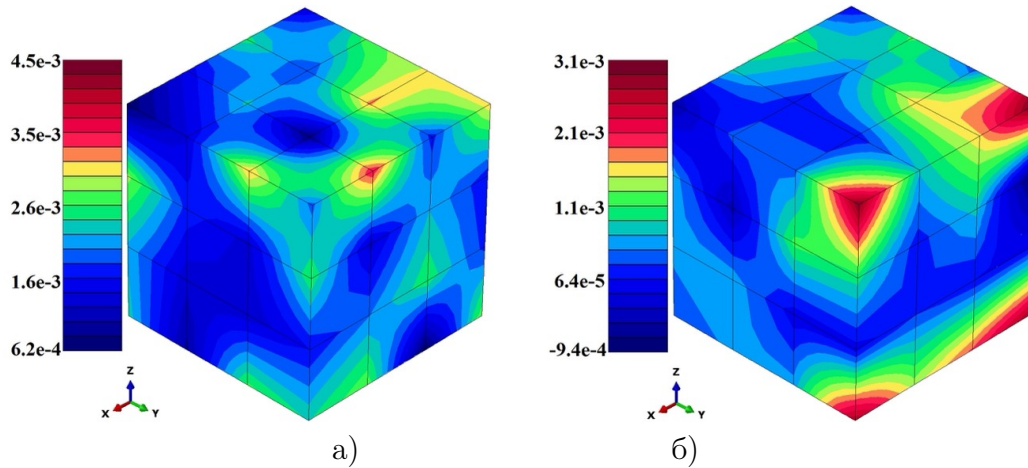


Рис. 8. Распределения пластических деформаций в конечный момент времени нагружения (случай первичного нагружения 574,4 МПа): а) ε_{xx}^p , [–], б) ε_{xy}^p , [–]

трубчатых поликристаллических образцах из технически чистого никеля продемонстрировали эффект накопления пластических деформаций.

Получившая широкое распространение на практике теория пластического течения с изотропно-кинематическим упрочнением не описывает эффект накопления пластических деформаций при пассивном нагружении (когда траектория нагружения лежит внутри поверхности нагружения).

Микроструктурная модель поликристаллического материала, основанная на конечно-элементной гомогенизации откликов разориентированных кристаллитов, поведение которых моделируется с помощью теории скольжения, позволяет описать процесс накопления пластических деформаций при сложном пассивном нагружении. Указанная возможность возникает благодаря наличию в поликристалле кристаллитов, ориентированных таким образом, что пластическое состояние в них возникает при меньших уровнях нагрузки, чем в основной массе кристаллитов.

Результаты расчетов с использованием микроструктурной модели демонстрируют хорошее соответствие экспериментальным данным. Наблюдается монотонная сходимость результатов с ростом числа кристаллитов в поликристалле и числа учитываемых механизмов упрочнения для аппроксимации диаграммы деформирования.

Идентификация параметров микроструктурной модели на основе данных опытов на макроуровне требует специальных процедур нелинейной оптимизации с ограничениями. Наилучшие результаты показал критерий идентификации, основанный на одновременной минимизации среднего квадратичного отклонения расчетной кривой от экспериментальной, близости к единице значения линейного коэффициента корреляции между данными кривыми и разницы площадей под сравниваемыми кривыми (энергетический критерий).

Для образцов одинакового химического состава наблюдается взаимосвязь между микроструктурой, определенной по данным металлографического анализа и экспериментально определенными пластическими свойствами материала. Это указывает на рациональность развития микроструктурных моделей в целях повышения точности прогнозов напряженно-деформированного состояния, запасов прочности и долговечности элементов конструкций.

Среди феноменологических теорий пластичности принципиальной возможностью описания пластического деформирования при пассивном нагружении обладают: теория упругопластических процессов, эндохронная теория пластичности, реологические (структурные) модели и многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью нагружения.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. И. Р. Муртазин: разработка модели, проведение расчетов, написание текста рукописи, А. С. Семенов: обзор литературы, научное консультирование, разработка микроструктурной модели, редактирование текста рукописи, А. В. Емельянов: проведение экспериментов, согласование финальной версии рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 25-19-00921 "Многоуровневые микроструктурные модели неупругого деформирования и разрушения моно- и поли-кристаллических жаропрочных сплавов при сложном термомеханическом нагружении".

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. I. R. Murtazin: model development, calculations, writing the text of the manuscript, A. S. Semenov: literature review on the topic of the article, scientific consulting, model development, editing of the text of the manuscript, A. V. Emelianov: carrying out of experiments, approving the final version of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 25-19-00921 "Multilevel microstructural models of inelastic deformation and fracture of mono- and poly-crystalline heat-resistant alloys under complex thermomechanical loading".

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М. : Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [2] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М. : Физматлит, 2010. 352 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Математическая теория пластичности. Тверь : Тверской государственный технический, 2002. 300 с.
- [4] Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л., Гараников В. В. Экспериментальная пластичность. Книга 1. Тверь : Тверской государственный технический, 2003. 172 с.
- [5] Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т.2. Пластичность. М. : Физматлит, 2008. 336 с.
- [6] Зубчанинов В. Г. Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 27–37. DOI: 10.3103/S0025654411010043.

- [7] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультяев В. И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. С. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12.
- [8] Зубчанинов В. Г., Гультяев В. И., Зубчанинов Д. В. Экспериментальное исследование процессов сложного нагружения материалов на многозвенных траекториях // Современные проблемы термовязкопластичности. Труды II школы-семинара. М. : МАМИ, 2007. С. 19–24.
- [9] Проверка постулата изотропии при сложном кинематическом нагружении материала сталь 45 по траекториям деформирования в виде полуокружностей / В. И. Гультяев [и др.] // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 4 (50). С. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.003.
- [10] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Алексеева Е. Г. Математическое моделирование процессов пластического деформирования материалов по сложным плоским траекториям // Механика и физика материалов. 2015. № 2 (24). С. 107–118.
- [11] Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования / В. Г. Зубчанинов [и др.] // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 61. С. 32–44. DOI: 10.17223/19988621/61/4.
- [12] Зубчанинов В. Г. О гипотезе ортогональности, принципе градиентальности и постулате пластичности // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 1. С. 48–55.
- [13] Изотов И. Н., Ягн Ю. И. Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения // Доклады АН СССР. 1961. № 139 (3). С. 576–579.
- [14] Semenov A. S., Melnikov B. E. Multisurface Theory of Plasticity with One Active Surface: Basic Relations, Experimental Validation and Microstructural Motivation // Advanced Structured Materials. 161. Switzerland : Springer Nature, 2022. P. 207–232. DOI: 10.1007/978-3-030-97675-0_8.
- [15] Кадашевич Ю. И., Мосолов А. Б. Эндохронная теория вязкопластичности анизотропных тел // Доклады АН СССР. 1991. № 317 (3). С. 613–615.
- [16] Пальмов В. А. Колебания упруго-пластических тел. М. : Наука, 1976. 328 с.
- [17] Мельников Б. Е., Семенов А. С. Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью пластической податливости // Труды ЛГТУ. 1991. № 441. С. 26–31.
- [18] Мельников Б. Е., Семенов А. С. Описание эволюции поверхностей равной податливости в многоповерхностной теории пластичности // Труды СПбГТУ. 1996. № 456. С. 52–61.
- [19] Определение свойств поля пластических податливостей на никелевых образцах / И. Н. Изотов [и др.] // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2009. № 78. С. 165–174.
- [20] Мельников Б. Е., Семенов А. С. Исследование поля пластических податливостей при сложных пассивных путях нагружения // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского политехнического университета. 2016. № 4 (254). С. 151–163. DOI: 10.5862/JEST.254.16.
- [21] Asaro R.J. Crystal plasticity // J. Appl. Mech. 1983. no. 50. P. 921–934.
- [22] Cailletaud G. A. A micromechanical approach to inelastic behaviour of metals // International Journal of Plasticity. 1992. no. 8 (1). P. 55–73.
- [23] Cailletaud G. A., et al. Some elements of microstructural mechanics // Computational Materials Science. 2003. no. 27. P. 351–374. DOI: 10.1016/S0927-0256(03)00041-7.
- [24] Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры. Физическая мезомеханика /

- П. В. Трусов [и др.] // International Journal of Plasticity. 2012. № 1 (15). С. 33–56. DOI: 10.24411/1683-805X-2012-00007.
- [25] Трусов П. В., Швейкин А. И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск : СО РАН, 2019. 605 с. DOI: 10.15372/MULTILEVEL2019TPV.
- [26] Конечно-элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин Часть 1. Модели материала, критерии разрушения, идентификация параметров / А. С. Семенов [и др.] // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2019. № 1 (83). С. 70—81.
- [27] Семенов А. С., Грищенко А. И., Муртазин И. Р. Микроструктурные модели мультимеханизмов неупруго деформирования: основные уравнения и примеры использования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2025. (в печати).
- [28] Муртазин И. Р., Семенов А. С., Емельянов А. В. Исследование процессов сложного пассивного нагружения: моделирование и эксперимент // Неделя науки ФизМех: сборник материалов Всероссийской научной конференции, 3–7 апреля 2023 г. 2023. С. 282–285.
- [29] Prasad A. Sliding contact at plastically graded surfaces and applications to surface design : Ph. D. thesis / A. Prasad ; Massachusetts Institute of Technology. 2007.
- [30] Intelligent multiscale simulation based on process-guided composite database / Z. Liu [et al.] // Preprint. 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2003.09491.
- [31] Murtazin I. R., Melnikov B. E., Semenov A. S. Simulation of inelastic response of polycrystalline nickel based on micromechanical model homogenization // Advanced Problem in Mechanics III: Proceedings of the XLIX International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics". 2023. P. 427–444. DOI: 10.1007/978-3-031-37246-9.
- [32] Гасников А. В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска: учебное пособие. М. : МФТИ, 2018. 291 с. ISBN: 978-5-7417-0667-1.
- [33] MATLAB Documentation. 2025. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab> (online; accessed: 2025-05-09).
- [34] Семенов А. С. PANTOCRATOR-конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V Межд. конф. «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности констр. и методы их решения». 2003. С. 466–480.
- [35] Pearson K. Notes on regression and inheritance in the case of two parents // Proceedings of the Royal Society of London. 1895. P. 240—242.
- [36] Жилин П. А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2003. 340 с. ISBN: 5-7422-0465-5.
- [37] Пальмов В. А. Фундаментальные законы природы в нелинейной термомеханике деформируемых тел. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2008. 143 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/si20-155.
- [38] Муртазин И. Р., Семенов А. С. Влияние анизотропии упругих свойств кристаллитов на неупругое деформирование поликристаллического никеля // Неделя науки ФизМех: сборник материалов Всероссийской научной конференции, 4–9 апреля 2022 г. 2022. С. 205–208.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity: Fundamentals of the general mathematical theory. Moscow : Izd-vo AN USSR, 1963. 273 p. (in Russian).

- [2] Zubchaninov V. G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow : Fizmatlit, 2010. 352 c. (in Russian).
- [3] Zubchaninov V. G. Mathematical theory of plasticity. Tver : Tver State Technical University, 2002. 300 c. (in Russian).
- [4] Zubchaninov V. G., Okhlopkov N. L., Garanikov V. V. Experimental plasticity. Book 1. Tver : Tver State Technical University, 2003. 172 c. (in Russian).
- [5] Zubchaninov V.G. Stability and plasticity. Vol. 2. Plasticity. Moscow : Fizmatlit, 2008. 336 c. (in Russian).
- [6] Zubchaninov V. G. The isotropy postulate and the law of complex unloading of continuum // Izv. RAN. Solid state mechanics. 2011. № 1. C. 27–37. DOI: 10.3103/S0025654411010043. (in Russian).
- [7] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gulyaev V.I. Modeling of elastic-plastic deformation of work material along multielement piecewise zig-zag linear trajectories // PNRPU Mechanics Bulletin. 2017. № 3. C. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12. (in Russian).
- [8] Zubchaninov V. G., Gulyaev V. I., Zubchaninov D. V. Experimental study of complex loading processes of materials on multi-link trajectories // Modern problems of thermoviscoplasticity. Moscow : MAMI, 2007. C. 19–24. (in Russian).
- [9] Verification of isotropy postulate under complex kinematic loading of steel 45 along the strain trajectories as semicircles / V. I. Gulyaev [et al.] // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2021. no. 4 (50). P. 16–24. DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.003.
- [10] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., E.G. Alekseeva. Mathematical modeling of plastic deformation of materials on complex flat trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2015. № 2 (24). C. 107–118. (in Russian).
- [11] Processes of complex loading of structural steel along a five-link piecewise deformation trajectory / V. G. Zubchaninov [и др.] // Vestn. Tomsk State University. Matem. and the mech. 2019. № 61. C. 32–44. DOI: 10.17223/19988621/61/4. (in Russian).
- [12] Zubchaninov V. G. On the hypothesis of orthogonality, the principle of gradience and the postulate of plasticity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2007. № 1. C. 48–55. (in Russian).
- [13] Izotov I. N., Yagn Yu. I. Study of the plastic deformation of a metal with strain anisotropy created by preloading // Doklady AN SSSR. 1961. № 139 (3). C. 576–579. (in Russian).
- [14] Semenov A. S., Melnikov B. E. Multisurface Theory of Plasticity with One Active Surface: Basic Relations, Experimental Validation and Microstructural Motivation // Advanced Structured Materials. 161. Switzerland : Springer Nature, 2022. P. 207–232. DOI: 10.1007/978-3-030-97675-0_8.
- [15] Kadashevich Yu. I., Mosolov A. B. Endochronic theory of viscoplasticity of anisotropic bodies // Doklady AN SSSR. 1991. no. 317 (3). P. 613–615. (in Russian).
- [16] Palmov V. A. Vibrations of Elasto-Plastic Bodies. Nauka, 1976. 328 p. (in Russian).
- [17] Melnikov B. E., Semenov A. S. The multisurface theory of plasticity with one active surface of equal plastic compliances // Works of LGTU. 1991. no. 441. P. 26–31.
- [18] Melnikov B. E., Semenov A. S. Description of the evolution of surfaces of equal compliance in the multisurface theory of plasticity // Works of LGTU. 1996. no. 456. P. 52–61.
- [19] Determination of plastic compliance properties of nickel samples / I.N. Izotov [и др.] // St. Petersburg State Polytechnical University Journal. 2009. № 2 (78). C. 165–174.
- [20] Melnikov B. E., Semenov A. S. Study of plastic compliance field under complex passive loading // NTV SPbSTU. 2016. no. 4 (254). P. 151–163. DOI: 10.5862/JEST.254.16. (in Russian).
- [21] Asaro R.J. Crystal plasticity // J. Appl. Mech. 1983. no. 50. P. 921–934.

- [22] Cailletaud G. A. A micromechanical approach to inelastic behaviour of metals // International Journal of Plasticity. 1992. no. 8 (1). P. 55–73.
- [23] Cailletaud G. A., et al. Some elements of microstructural mechanics // Computational Materials Science. 2003. no. 27. P. 351–374. DOI: 10.1016/S0927-0256(03)00041-7.
- [24] Multilevel models of inelastic deformation of materials and their application for description of internal structure evolution. Physical mesomechanics / P. V. Trusov [et al.] // International Journal of Plasticity. 2012. no. 1 (15). P. 33–56. DOI: 10.24411/1683-805X-2012-00007.
- [25] Trusov P. V., Shveykin A. I. Multilevel models of mono- and polycrystalline materials: theory, algorithms and applied examples. Novosibirsk : SB RAS Publ., 2019. 605 p. DOI: 10.15372/MULTILEVEL2019TPV.
- [26] Finite-element analysis of thermal fatigue of gas turbine blades. Part 1. Material models, fracture criterions, parameter identification / A. S. Semenov [и др.] // Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University). 2019. № 1 (83). С. 70–81.
- [27] Semenov A. S., Grishchenko A.I., Murtazin I. R. Microstructural models of multi-mechanisms of inelastic deformation: basic equations and application examples // PNRPU Mechanics Bulletin. 2025. (in Russian).
- [28] Murtazin I. R., Semenov A. S., Emelianov A.V. Investigation of complex passive loading processes: modeling and experiment // Week of Science PhysMech: proceedings of the All-Russian Scientific Conference, April 3-7, 2023. 2023. P. 282–285. (in Russian).
- [29] Prasad A. Sliding contact at plastically graded surfaces and applications to surface design : Ph.D. thesis / A. Prasad ; Massachusetts Institute of Technology. 2007.
- [30] Intelligent multiscale simulation based on process-guided composite database / Z. Liu [et al.] // Preprint. 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2003.09491.
- [31] Murtazin I. R., Melnikov B. E., Semenov A. S. Simulation of inelastic response of polycrystalline nickel based on micromechanical model homogenization // Advanced Problem in Mechanics III: Proceedings of the XLIX International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics". 2023. P. 427–444. DOI: 10.1007/978-3-031-37246-9.
- [32] Gasnikov A. V. Modern numerical optimization methods. The universal gradient descent method: a tutorial. Moscow : MIPT, 2018. 291 p. ISBN: 978-5-7417-0667-1.
- [33] MATLAB Documentation. 2025. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab> (online; accessed: 2025-05-09).
- [34] Semenov A. S. PANTOCRATOR - finite element program specialized on the nonlinear problem solution // Proceedings of the V International Conference. "Scientific and technical problems of forecasting the reliability and durability of constr. and methods of their solution". 2003. P. 466–480. (in Russian).
- [35] Pearson K. Notes on regression and inheritance in the case of two parents // Proceedings of the Royal Society of London. 1895. P. 240–242.
- [36] Zhilin P. A. Theoretical mechanics. Fundamental laws of mechanics. St. Petersburg : Izd-vo SPbSTU, 2003. 340 p. ISBN: 5-7422-0465-5.
- [37] Palmov V. A. Fundamental laws of nature in nonlinear thermomechanics of solids. St. Petersburg : Izd-vo SPbSTU, 2008. 143 p. (in Russian). DOI: 10.18720/SPBPU/2/si20-155.
- [38] Murtazin I. R., Semenov A. S. Effect of anisotropy of elastic properties of crystallites on inelastic deformation of polycrystalline nickel // Week of Science PhysMech: proceedings of the All-Russian Scientific Conference, April 4–9, 2022 r. 2022. P. 205–208. (in Russian).

А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ СЖАТИИ

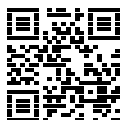
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе на основе реологической модели упруговязкопластической смеси в линейаризированной трехмерной постановке исследуется устойчивость круговой пластины при всестороннем сжатии. Приведены уравнения для определения критического значения нагрузки для толстостенной и тонкостенной конструкции пластины.

Ключевые слова: смесь, напряжения, перемещения, деформации, упругость, пластичность, вязкость, упрочнение, устойчивость.

Спорыхин Анатолий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования; **e-mail:** anatoli.sporyhin@yandex.ru

Щеглова Юлия Дмитриевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования; **e-mail:** scheglova@gmail.com



для цитирования: Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д. Исследование процессов деформирования и потери устойчивости круговой пластины при сжатии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 194–202. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.010. EDN: NEKUTA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

A. N. Sporykhin, Yu. D. Shcheglova

STUDY OF DEFORMATION PROCESSES AND LOSS OF STABILITY OF A CIRCULAR PLATE UNDER COMPRESSION

I. Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, the stability of a circular plate under uniform compression is investigated based on a rheological model of an elastic-viscoplastic mixture in a linearized three-dimensional formulation. Equations are given for determining the critical load value for thick-walled and thin-walled plate structures.

Keywords: mixture, stress, displacement, deformation, elasticity, plasticity, viscosity, strengthening, stability.

Anatoliy N. Sporykhin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; **e-mail:** anatoli.sporyhin@yandex.ru

Yulia D. Shcheglova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; **e-mail:** scheglova@gmail.com



to cite this article: Sporykhin A. N., Shcheglova Yu. D. Study of deformation processes and loss of stability of a circular plate under compression // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 194–202. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.010

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. Известно, что многие создаваемые материалы, к которым можно отнести полимеры, битумы и многое другое являются продуктами, состоящими из n компонент (сред), в результате чего они представляются моделями сплошной среды со сложными реологическими свойствами, что и определяет актуальность исследования и применения обобщенных моделей упруговязко-пластических (EVP) сред.

Здесь отметим [1], что модель S_p^α представляет собой последовательное соединение α ($\alpha = 1, 2, \dots, L$) моделей тела $S_p^1 = H - Stv - K$, состоящего из последовательно соединенных тел: Гука – H , Сен-Венана – Stv , Кельвина – K . При этом у каждой S_p^α модели собственные константы, а число α определяет порядок обобщенной модели.

1. Докритическое напряженно-деформированное состояние круговой пластины при сжатии. В рамках обобщенной модели EVP тела [1] исследуется напряженно-деформированное состояние и устойчивость круговой пластины при всестороннем сжатии усилиями интенсивности q . Толщина пластины $2h$ и радиус R .

Следуя [1, 2], запишем соотношения, которые полностью определяют свойства обобщенной модели S_p^α .

Тело остается упругим при условии

$$S_{ij}S^{ij} < k_1^2, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_L, \quad (1)$$

где S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений. При этом для последовательно соединенных моделей выполняется закон Гука

$$\sigma_{ij}^\alpha = \lambda_\alpha \varepsilon_{nn}^{e\alpha} \delta_{ij} + 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^{e\alpha}, \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L, \quad (2)$$

где λ_α , μ_α – параметры Ламе.

При достижении условия $S_{ij}S^{ij} \geq k_1^2$ полная деформация складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 + \dots + \varepsilon_{ij}^L = \varepsilon_{ij}^{e1} + \varepsilon_{ij}^{p1} + \varepsilon_{ij}^{e2} + \varepsilon_{ij}^{p2} + \dots + \varepsilon_{ij}^{eL} + \varepsilon_{ij}^{pL}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что полная деформация смеси представляет собой сумму деформаций отдельных ее компонент $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2, \dots, \varepsilon_{ij}^L$, так как модели S_p^α соединены последовательно.

В пластической области смесь является несжимаемой, что ведет к выполнению условия

$$\varepsilon_{nn}^{p\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, L). \quad (4)$$

Тогда можно сделать вывод, что компоненты тензора девиатора тензора деформаций $\varepsilon_{ij}^{p\alpha}$ совпадают с компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{ij}^{p\alpha}$.

Также из последовательного соединения моделей следует равенство напряжений, приложенных к каждой из моделей

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = \dots = S_{ij}^L = S_{ij} \quad (\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \dots = \sigma_{ij}^L). \quad (5)$$

В пластической области для любой компоненты смеси выполняется условие пластичности

$$(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}) (S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}) = k_\alpha^2 \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L, \quad (6)$$

где c_α – коэффициент упрочнения, η_α – коэффициент вязкости, k_α – предел текучести для каждой из моделей S_p^α .

Ассоциированный закон пластического течения, связывающий компоненты тензора скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}$ с компонентами тензора напряжений, имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha} = \psi_\alpha (S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha \dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha}) \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L, \quad (7)$$

где ψ_α – скалярный положительный множитель для модели S_p^α .

Соотношения Коши связывают полные компоненты тензора малых деформаций с компонентами вектора перемещений

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i, \quad (8)$$

где символ обозначает ∇_j ковариантную производную по j -ой компоненте.

Уравнения равновесия

$$\nabla_i \sigma_j^i = 0 \quad (9)$$

замыкают систему уравнений (1)-(8), которые используются для определения напряженно-деформированного состояния EVP смеси произвольного порядка.

Задача решается в цилиндрической системе координат (r, θ, x_3) . С учетом осевой симметрии из определяющих уравнений рассматриваемой задачи (1)-(9) напряженно-деформированное докритическое состояние определяется в виде

$$\begin{aligned} \overset{o}{\sigma}_{rr} = \overset{o}{\sigma}_{\theta\theta} = -q, \quad \overset{o}{\sigma}_{33} = 0, \quad \overset{o}{\sigma}_{ij} = 0, \quad i \neq j, \\ \overset{o}{\varepsilon}_{rr} = \sum_{\alpha=1}^L \frac{1}{2\mu_\alpha} \overset{o}{S}_r + \sum_{\alpha=1}^L \overset{o}{\varepsilon}_r^{p\alpha} = \overset{o}{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} \overset{o}{\varepsilon}_{33}, \\ \overset{o}{\varepsilon}_r^{p\alpha} = \frac{K_\alpha - \frac{q}{3}}{c_\alpha} \left(e^{-\frac{c_\alpha}{\eta_\alpha} t} - 1 \right) = \overset{o}{\varepsilon}_\theta^{p\alpha} = \frac{1}{2} \overset{o}{\varepsilon}_{33}^{p\alpha}, \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L, \\ \overset{o}{S}_r = \overset{o}{S}_\theta = -\frac{q}{3}, \quad \overset{o}{S}_{33} = \frac{2}{3}q, \quad K_\alpha = \frac{k_\alpha}{\sqrt{6}}. \end{aligned} \quad (10)$$

2. Исследование устойчивости круговой пластины при сжатии. Согласно [3] исследование устойчивости основного состояния сплошной среды (смеси) объема V , на части поверхности Σ_p которого заданы поверхностные усилия P , сводится к решению линеаризованных уравнений движения в вариациях

$$\left(\sigma_{ij} + \overset{o}{\sigma}_{jk} u_{i,k} \right)_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0. \quad (11)$$

Здесь связь между амплитудными величинами напряжений и деформаций, которая следует из линеаризованных уравнений (2)-(7), имеет вид [1, 3]

$$\sum_{\alpha=1}^L \frac{1}{2\mu_\alpha} \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \sum_{\alpha=1}^L \frac{\overset{o}{b}_\alpha}{1 - 3\overset{o}{b}_\alpha} \varepsilon_{nn} \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^L \frac{\overset{o}{a}_\alpha}{1 - \overset{o}{a}_\alpha k_\alpha^2} \varepsilon_{kl} \overset{o}{f}_{kl}^\alpha \overset{o}{f}_{ij}^\alpha, \quad (12)$$

$$\overset{o}{f}_{kl}^\alpha = \overset{o}{S}_{kl} - c_\alpha \varepsilon_{kl}^\alpha,$$

где обозначено

$$\overset{o}{a}_\alpha = \frac{\hat{a}_\alpha}{k_\alpha^2 \hat{a}_\alpha - 2\mu_\alpha}, \quad \overset{o}{b}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha}, \quad (13)$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{4\mu_\alpha^2}{k_\alpha^2 (2\mu_\alpha + c_\alpha + s\eta_\alpha)}, \quad \sum \alpha = 1, 2, \dots, L.$$

Амплитудные величины деформаций и перемещений по-прежнему связаны соотношениями вида

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad (14)$$

Граничные условия на поверхности Σ_p принимают форму

$$\left(\sigma_{ij} + \overset{o}{\sigma}_{jk} u_{i,k} \right) n_j = P_i, \quad (15)$$

здесь n_j – компоненты вектора нормали на поверхности тела Σ_p .

Соотношения (12)–(15), представленные в декартовой системе координат, записаны для амплитудных величин с сохранением прежних обозначений, а также с учетом выделенного временного множителя e^{st} , где $s = i\omega$ – комплексная величина.

Линеаризованные уравнения движения (11) в случае докритического состояния, представленного соотношениями (10), имеют вид

$$[\sigma_{ij} - q(\delta_{j1} u_{i,1} + \delta_{j2} u_{i,2})]_{,j} - \rho s^2 u_i = 0. \quad (16)$$

Граничные условия (15) будут иметь форму

$$[\sigma_{ij} - q(\delta_{j1} u_{i,1} + \delta_{j2} u_{i,2})] n_j = P_i. \quad (17)$$

Для сжимаемой обобщенной EVP среды в случае однородного напряженного докритического состояния, определенного соотношениями (10) ($t \rightarrow \infty$), линеаризованная связь (12) между амплитудными величинами напряжений и деформаций в рамках трехмерной теории устойчивости представляется в виде

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} a_{jk} u_{k,k} + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sum_1^3 k, \quad (18)$$

где

$$a_{jk} = (\delta_{jk} + B_{jj} + A_{jj}) \mu_*^{-1}, \quad G_{ij} = \frac{1}{2} \mu_*^{-1} = G, \quad \mu_* = \sum_{\alpha=1}^L \frac{1}{2\mu_\alpha}, \quad (19)$$

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^L \frac{\overset{o}{b}_\alpha}{1 - 3\overset{o}{b}_\alpha} \delta_{ij}, \quad B_{ij} = \sum_{\alpha=1}^L \frac{\overset{o}{a}_\alpha}{1 - \overset{o}{a}_\alpha k_\alpha^2} \overset{o}{f}_{kk}^\alpha \overset{o}{f}_{ij}^\alpha, \quad \sum k.$$

Здесь коэффициенты a_{ij} и G_{ij} комплексные величины, так как зависят от характеристического показателя $s = i\omega$ и, очевидно, соотношения (18) можно трактовать как уравнения состояния EVP смеси, но с комплексными физико-механическими параметрами.

Также отметим, что при $c_\alpha = 0$ получаем коэффициенты a_{ij} и G_{ij} для сжимаемой вязкопластической смеси обобщенной модели тела Бингама [4], а при $\eta_\alpha = 0$ для обобщенной модели Ишлинского-Ивлева [5], а при $\hat{a}_\alpha = 0$, $\hat{a}_\alpha^0 = 0$ для сжимаемой упругой смеси обобщенного закона Гука.

Возможен переход и к другим обобщенным моделям тел. Представление линейаризированных уравнений состояния в виде (18) имеет единую форму для различных обобщенных моделей сред, что позволяет определить решение уравнений трехмерной теории устойчивости (16) в общем виде. Решения для указанных выше моделей тел приведены в работах [3, 6, 7].

В случае квазистатической постановки задачи, которой далее и ограничимся, общее решение уравнений трехмерной теории устойчивости (16) с учетом (18), (19) имеет вид [3]

$$u_n = \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_3} \psi,$$

$$u_\tau = -\frac{\partial}{\partial n} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x_3} \psi,$$

$$u_3 = \frac{a_{11} - q}{G + a_{31}} \left(\Delta + \frac{G}{a_{11} - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Функции ψ_i определяются из уравнений

$$\left(\Delta + \xi_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi_i = 0, \quad \psi = \psi_2 + \psi_3, \quad \sum i,$$

а корни ξ_i^2 согласно [4] имеют вид

$$\xi_1^2 = \frac{G}{G - q}, \quad \xi_{2,3}^2 = F \pm \left(F^2 - \frac{a_{33}G}{(a_{11} - q)(G - q)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В предположении об отсутствии нагрузки на поверхностях пластины, соответствующих значениям переменной $x_3 = \pm h$, из (17) получаем граничные условия

$$\sigma_{33} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad \sigma_{r3} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad \sigma_{\theta 3} \Big|_{x_3=\pm h} = 0. \quad (20)$$

Решение основных уравнений, следуя требованию четности компоненты перемещений u_3 по переменной x_3 , выберем в форме

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_{n,\delta=0}^{\infty} C_{\delta n}^1 I_n(\delta r) \operatorname{sh} \frac{\delta}{\xi_1} x_3 \sin n\theta, \\ \psi_2 &= \sum_{n,\delta=0}^{\infty} C_{\delta n}^2 I_n(\delta r) \operatorname{sh} \frac{\delta}{\xi_2} x_3 \cos n\theta, \\ \psi_3 &= \sum_{n,\delta=0}^{\infty} C_{\delta n}^3 I_n(\delta r) \operatorname{sh} \frac{\delta}{\xi_3} x_3 \cos n\theta.\end{aligned}\tag{21}$$

Здесь $I_n(\delta r)$ – функция Бесселя первого рода. Выбор решения в виде (21) позволяет удовлетворить различным граничным условиям в интегральном смысле при $r = R$ вследствие произвольности величин δ . Можно убедиться, что одним из таких вариантов являются граничные условия жесткой заделки. В данном случае в функциях (21) надо положить

$$I'_n(\delta R) = 0, \quad \delta = \frac{\chi_\delta}{R}, \quad I'_n(\chi_\delta) = 0.\tag{22}$$

Тогда подстановкой (21) в граничные условия (20), учитывая при этом (22), следуя обычному алгоритму решения, получим уравнение в форме

$$\det \|d_{ij}\| = 0$$

где $i, j = 1, 2$, при этом элементы детерминанта определяются соотношениями

$$\begin{aligned}d_{11}(\xi_2) &= \xi_2^{-1} \left(a_{33} \frac{a_{11} - q}{G + a_{13}} \left(\frac{G}{a_{11} - q} - \xi_2^2 \right) + a_{13} \xi_2^2 \right) \operatorname{sh} \frac{\delta h}{\xi_2}, \\ d_{12} &= d_{11}(\xi_3), \\ d_{22}(\xi_3) &= \xi_3^{-1} \left(a_{33} \frac{a_{11} - q}{G + a_{13}} \left(\frac{G}{a_{11} - q} - \xi_3^2 \right) - 1 \right) \operatorname{ch} \frac{\delta h}{\xi_3}, \\ d_{21} &= d_{22}(\xi_2).\end{aligned}\tag{23}$$

В случае тонкостенной пластины будем иметь следующее выражение для нагрузки

$$q = \frac{1}{3} \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}} (\delta h)^2 \left[1 - (\delta h)^2 \frac{6(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + G(5a_{33} - 2a_{13})}{15a_{33}G} \right].\tag{24}$$

Условие для определения критического значения нагрузки представляется уравнением

$$\max\{\operatorname{Re} s_k\} = 0.\tag{25}$$

При этом если порядок α обобщенной модели тела S_p^α равен единице в (19) и (23)-(25), то приходим к результатам работы [1], соответствующим классической модели EVP тела S_p^1 .

В заключении отметим, что статический подход к статическим задачам трехмерной теории устойчивости с использованием как обобщенных, так и классических вариантов теории течения допустим лишь в тех случаях, когда в уравнениях состояния не учитываются вязкие свойства среды. Так, в частности, для обобщенной модели Ишлинского-Ивлева, в том числе и классической, допустим статический подход, так как параметр $s = i\omega$ не входит в коэффициенты a_{ij} и G_{ij} уравнения состояния (18), и в этом случае, очевидно, уравнения (23) и, соответственно, уравнение (24) следует рассматривать как уравнения для определения $q_{кр}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. А. Н. Спорыхин построение модели многокомпонентной упруговязкопластической смеси, постановка задачи устойчивости, написание текста рукописи, согласование финальной версии рукописи, Ю. Д. Щеглова решение задачи устойчивости, обзор литературы по теме статьи, компьютерный набор текста рукописи, редактирование текста рукописи.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. A. N. Sporykhin construction of a model of a multicomponent elastic-viscoplastic mixture, formulation of the stability problem, writing the text of the manuscript, approval of the final version of the manuscript, Yu. D. Shcheglova solution of the stability problem, review of literature on the topic of the article, computer typesetting of the manuscript, editing of the text of the manuscript.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Спорыхин А. Н. Моделирование процессов деформирования и потери устойчивости упруговязкопластических смеси // Изв. РАН. МТТ. 2020. №6. С. 141-146. EDN: JBOAQP. DOI: 10.31857/S0572329920060148.
- [2] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
- [3] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1997. 361 с.
- [4] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
- [5] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.
- [6] Лурье А. И. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Тр. Ленингр. индустр. ин-та. 1937. Т. 3. №6. С. 31-36.
- [7] Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.

REFERENCES

-
- [1] Sporykhin A. N. Modeling of deformation processes and loss of stability of elastic-viscoplastic mixtures // Izv. RAS. MTT. 2020. No. 6. P. 141-146. EDN: JBOAQP. DOI: 10.31857/S0572329920060148. (in Russian).
 - [2] Ivlev D. D., Bykovtsev G. I. Theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971. 231 p. (in Russian).
 - [3] Sporykhin A. N. The method of perturbations in problems of stability of complex media. Voronezh: Voronezh state University, 1997. 361 p. (in Russian).
 - [4] Reiner M. Rheology. Moscow: Nauka, 1965. 223 p. (in Russian).
 - [5] Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 701 p. (in Russian).
 - [6] Lurye A. I. On the theory of systems of linear differential equations with constant coefficients // Proceedings of the Leningrad Industrial Institute. 1937. Vol. 3. No. 6. Pp. 31-36. (in Russian).
 - [7] Guz A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Kyiv: Vishcha shkola, 1986. 512 p. (in Russian).

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПОТЕЗЫ КОМПЛАНАРНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ НАПРЯЖЕНИЙ

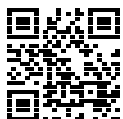
Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Аннотация. Представлены расчетные формулы и алгоритм численного решения уравнений теории упругопластических процессов в форме гипотезы компланарности при задании процесса нагружения по напряжениям. Показано, что в случае постоянного модуля девиатора напряжений (при отсутствии упрочнения на диаграмме деформирования; прохождении площадки текучести; нагружении по дуге окружности с центром в начале координат пространства напряжений) численное решение становится неопределенным из-за обращения в ноль главного определителя системы расчетных уравнений. При аппроксимации траектории нагружения, например, дугами окружностей со смещенным центром решение такой неопределенности не имеет.

Ключевые слова: пластичность, нагружение в пространстве напряжений, гипотеза компланарности, численное интегрирование.

Субботин Сергей Львович, доктор технических наук, профессор кафедры конструкций и сооружений; e-mail: sbtn@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8881-1390>; AuthorID: 174777

Алексеев Андрей Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности; e-mail: alexeev@bk.ru; AuthorID: 640538



для цитирования: Субботин С.Л., Алексеев А.А. Особенности численного интегрирования уравнений гипотезы компланарности в пространстве напряжений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 203–213. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.011. EDN: NHUYVN

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

S. L. Subbotin, A. A. Alekseev

FEATURES OF NUMERICAL INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF THE COPLANARITY HYPOTHESIS IN STRESS SPACE

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The calculation formulas and the algorithm for the numerical solution of the equations of the theory of elastic-plastic processes in the form of a coplanarity hypothesis when specifying the process of loading by stresses are presented. It is shown that in the case of a constant modulus of the stress deviator (in the absence of hardening on the deformation diagram; passing the yield plateau; loading along an arc of a circle with the center at the origin of the stress space coordinates), the numerical solution becomes indefinite due to the vanishing of the main determinant of the system of calculation equations. When approximating the loading trajectory, for example, by arcs of circles with a displaced center, the solution does not have such an uncertainty.

Keywords: plasticity, stress space loading, coplanarity hypothesis, numerical integration.

Sergey L. Subbotin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Structures and Constructions; **e-mail:** sbtn@yandex.ru; AuthorID: 174777

Andrey A. Alekseev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity; **e-mail:** alexeev@bk.ru; AuthorID: 640538



to cite this article: Subbotin S. L., Alekseev A. A. Features of numerical integration of the equations of the coplanarity hypothesis in stress space // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 203–213. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.011

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение. В теории упругопластических процессов различают жесткое и мягкое нагружение. Жестким считается кинематическое нагружение, при котором процесс нагружения осуществляется по деформациям, а напряжения должны быть определены из уравнений теории упругопластических процессов. Мягкое (силовое) нагружение ведется по напряжениям, а деформации вычисляются. Для экспериментов, выполненных при жестком нагружении, напряжения являются откликом на заданную траекторию деформаций. Если полученную траекторию напряжений считать заданной, то расчет по теории упругопластических процессов должен дать исходную траекторию деформаций. Такой расчет имеет свои особенности, а в некоторых случаях вообще не может быть реализован. Определяющее соотношение теории упругопластических процессов, которое имеет вид гипотезы компланарности А. А. Ильюшина [1–3] наиболее удобно применять в практических расчетах [4–7].

1. Основные формулы гипотезы компланарности в напряжениях и деформациях. Общее соотношение теории упругопластических процессов в форме гипотезы компланарности А. А. Ильюшина имеет вид [1–3]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (1)$$

где N , P – функционалы теории упругопластических процессов, $\bar{\sigma}$ – вектор напряжений, σ – его модуль, $d\bar{\Theta}/ds$ – вектор скорости деформаций, касательный к траектории деформаций; $d\bar{\sigma}/ds$ – вектор скорости напряжений. Соотношение (1) устанавливает связь между действующими напряжениями и направлениями приращений упругопластических деформаций

Не нарушая общности алгоритма можно рассмотреть случай плоских траекторий через координаты векторов напряжений S_1 , S_3 и деформаций Θ_1 , Θ_3 . Тогда соотношение (1) в скалярной форме записывается в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{ds} &= N \frac{d\Theta_1}{ds} + (P - N) \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}}{\sigma^2} S_1, \\ \frac{dS_3}{ds} &= N \frac{d\Theta_3}{ds} + (P - N) \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}}{\sigma^2} S_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Если траектория нагружения задана в пространстве напряжений, то от интегрирования по длине s траектории деформации нужно перейти к интегрированию по длине Σ траектории напряжений. Замена производных по формулам

$$\frac{dS_1}{ds} = \frac{dS_1}{d\Sigma} \cdot \frac{d\Sigma}{ds}, \quad \frac{d\Theta_1}{ds} = \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} \cdot \frac{d\Sigma}{ds}, \quad (3)$$

и так далее, приводит систему (2) к виду

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{d\Sigma} &= \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + (P - N) \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma}}{\sigma^2} S_1, \\ \frac{dS_3}{d\Sigma} &= \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} + (P - N) \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma}}{\sigma^2} S_3.\end{aligned}\quad (4)$$

Для заданной траектории напряжений известны величины

$$S_1, S_3, \sigma = \sqrt{S_1^2 + S_3^2}, \quad \frac{dS_1}{d\Sigma}, \quad \frac{dS_3}{d\Sigma},$$

поэтому из системы (4) следует система уравнений для определения Θ_1 и Θ_3

$$\begin{aligned}\left[N + (P - N) \frac{S_1^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + (P - N) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \cdot \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_1}{d\Sigma}, \\ (P - N) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \cdot \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + \left[N + (P - N) \frac{S_3^2}{\sigma^2} \right] \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} &= \frac{dS_3}{d\Sigma}.\end{aligned}\quad (5)$$

Главный определитель системы уравнений (5) после преобразований приводится к выражению $P \cdot N$.

С учетом того, что $S_3^2 = \sigma^2 - S_1^2$, $S_1^2 = \sigma^2 - S_3^2$ из (5) следует

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta_1}{d\Sigma} &= \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1^2}{\sigma^2} \right] \frac{dS_1}{d\Sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \cdot \frac{dS_3}{d\Sigma}, \\ \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} &= \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \cdot \frac{dS_1}{d\Sigma} + \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_3^2}{\sigma^2} \right] \frac{dS_3}{d\Sigma}.\end{aligned}\quad (6)$$

Такой же результат получается непосредственно из выражения (1), которое можно привести к виду

$$\frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{1}{N} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} - \left(\frac{P}{N} - 1 \right) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \bar{\sigma}.\quad (7)$$

Скалярное умножение (1) на вектор напряжений $\bar{\sigma}$ дает выражение

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma},$$

откуда

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{1}{P} \bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}.\quad (8)$$

Тогда подстановка (8) в (7) приводит к соотношению

$$\frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{1}{N} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}}{\sigma^2} \bar{\sigma},\quad (9)$$

из которого в скалярной форме с учетом, что

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}$$

и представления (3) следует система уравнений (6).

При численном решении уравнений (6) нужно учитывать, что функционалы N и P удобно представлять как функции модуля вектора деформации $\Theta = \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_3^2}$ и угла ϑ_1 между вектором напряжения и касательной к траектории деформации $d\bar{\Theta}/ds$, называемого углом сближения, для которого

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} = \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}}{\sigma} = \frac{S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma}}{\sigma \cdot \frac{ds}{d\Sigma}}, \quad (10)$$

где

$$\frac{ds}{d\Sigma} = \left| \frac{d\bar{\Theta}}{d\Sigma} \right| = \left| \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \right| \frac{ds}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\Theta_1}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{d\Theta_3}{d\Sigma} \right)^2}. \quad (11)$$

При этом, для заданной траектории напряжений координаты вектора деформаций и длина дуги траектории деформаций

$$\Theta_1 = \int_0^\Sigma \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} d\Sigma, \quad \Theta_3 = \int_0^\Sigma \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} d\Sigma, \quad s = \int_0^\Sigma \frac{ds}{d\Sigma} d\Sigma. \quad (12)$$

Производные $d\Theta_1/d\Sigma$, $d\Theta_3/d\Sigma$, $ds/d\Sigma$ определяются по формулам (6) и (11), или непосредственно из решения системы уравнений (5).

Функционал P , в соответствии с (8) и (10), может быть заменен на

$$\frac{d\sigma}{ds} = P \cos \vartheta_1 \quad \text{или} \quad P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}. \quad (13)$$

Тогда из (13) и (10) получаем

$$P = \frac{S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}}{S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds}} = \frac{S_1 \frac{dS_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{dS_3}{d\Sigma}}{S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma}}. \quad (14)$$

Подстановка (6) в (14) приводит к тождеству $P = P$.

Из (14) следует формула

$$S_1 \frac{d\Theta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\Theta_3}{d\Sigma} = \frac{1}{P} \left(S_1 \frac{dS_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{dS_3}{d\Sigma} \right). \quad (15)$$

Тот же результат получается из подстановки в левую часть формулы (15) выражений (6). С учетом (15) формула (10) для тригонометрической функции

угла сближения принимает вид

$$\cos \vartheta_1 = \frac{S_1 \frac{dS_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{dS_3}{d\Sigma}}{P \sigma \frac{ds}{d\Sigma}}. \quad (16)$$

Дифференцирование (10) по длине траектории деформации для плоской траектории дает формулу [3]

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} = \kappa_1 - \frac{N}{\sigma} \sin \vartheta_1$$

или

$$N = \left(\kappa_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) \frac{\sigma}{\sin \vartheta_1} = \left(\kappa_1 - \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} \cdot \frac{d\Sigma}{ds} \right) \frac{\sigma}{\sin \vartheta_1}, \quad (17)$$

где κ_1 – кривизна плоской траектории деформации.

Формулы (11), (12), (13), (16), (17) связывают функционалы N , P и выражаемые через них $\frac{d\sigma}{ds}$, $\frac{ds}{d\Sigma}$, ϑ_1 .

При этом функционалы N и P должны задаваться так, чтобы они соответствовали заданной траектории нагружения и экспериментальному отклику в виде траектории деформаций независимо от формы представления экспериментальных результатов: $S_1(\Sigma)$, $S_3(\Sigma)$, $\vartheta_1(\Sigma)$, $\vartheta_3(\Sigma)$ или $\vartheta_1(s)$, $\vartheta_3(s)$, $S_1(s)$, $S_3(s)$.

2. Алгоритм интегрирования уравнений теории упругопластических процессов по напряжениям. При расчете процесса нагружения по уравнениям (6) вычисления выполняются по следующему алгоритму [8].

1. Задаются начальные значения

$$\Sigma^{(0)}, \vartheta_1^{(0)}, \vartheta_3^{(0)}, S_1^{(0)}, S_3^{(0)}, \sigma^{(0)} = \sqrt{\left(S_1^{(0)}\right)^2 + \left(S_3^{(0)}\right)^2}, \frac{dS_1^{(0)}}{d\Sigma}, \frac{dS_3^{(0)}}{d\Sigma},$$

причем должно выполняться условие

$$\left| \frac{d\sigma}{d\Sigma} \right| = \sqrt{\left(\frac{dS_1^{(0)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{dS_3^{(0)}}{d\Sigma} \right)^2} = 1,$$

а так же функционалы N , P по формулам, принятым в рассматриваемом варианте теории упругопластических процессов. Например, для начального линейно упругого участка траектории они равны удвоенному модулю упругости второго рода $N = P = 2G$.

По этим заданным значениям с учетом также заданного значения $s^{(0)}$ находят по формулам (6) и (11)

$$\frac{d\vartheta_1^{(0)}}{d\Sigma}, \frac{d\vartheta_3^{(0)}}{d\Sigma}, \frac{ds^{(0)}}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta_1^{(0)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{d\vartheta_3^{(0)}}{d\Sigma} \right)^2}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{S_1^{(0)} \frac{dS_1^{(0)}}{d\Sigma} + S_3^{(0)} \frac{dS_3^{(0)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(0)} \frac{ds^{(0)}}{d\Sigma}}.$$

2. Для каждого шага $\Delta\Sigma$ по длине траектории нагружения задаются $\frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma}$ и $\frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma}$, при этом опять обязательным является условие

$$\left| \frac{d\bar{\sigma}}{d\Sigma} \right| = \sqrt{\left(\frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2} = 1,$$

и вычисляются прогнозируемые значения

$$\Sigma^{(i)} = \Sigma^{(i-1)} + \Delta\Sigma \quad (i = 1, 2, 3...), \quad \frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} = \frac{d\Theta_1^{(i-1)}}{d\Sigma}, \quad \frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} = \frac{d\Theta_3^{(i-1)}}{d\Sigma},$$

$$\frac{ds^{(i)}}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2},$$

$$S_1^{(i)} = S_1^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{dS_1^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \quad S_3^{(i)} = S_3^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{dS_3^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma,$$

$$\sigma^{(i)} = \sqrt{\left(S_1^{(i)} \right)^2 + \left(S_3^{(i)} \right)^2},$$

$$\Theta_1^{(i)} = \Theta_1^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Theta_1^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \quad \Theta_3^{(i)} = \Theta_3^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Theta_3^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma,$$

$$s^{(i)} = s^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{ds^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma,$$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{S_1^{(i)} \frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} + S_3^{(i)} \frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(i)} \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma}}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{S_1^{(i)} \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} + S_3^{(i)} \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(i)} \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma}}.$$

Величины функционалов N и P вычисляются по заданным формулам.

3. Для этого же шага вычисляются корректируемые значения

$$\frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} = \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{S_1^{(i)}}{\sigma^{(i)}} \right)^2 \right] \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1^{(i)} S_3^{(i)}}{(\sigma^{(i)})^2} \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma},$$

$$\frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1^{(i)} S_3^{(i)}}{(\sigma^{(i)})^2} \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} + \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \left(\frac{S_3^{(i)}}{\sigma^{(i)}} \right)^2 \right] \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma},$$

$$\frac{ds^{(i)}}{d\Sigma} = \sqrt{\left(\frac{d\Theta_1^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{d\Theta_3^{(i)}}{d\Sigma} \right)^2},$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1^{(i)} &= \vartheta_1^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vartheta_1^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{d\vartheta_1^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \quad \vartheta_3^{(i)} = \vartheta_3^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vartheta_3^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{d\vartheta_3^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \\ s^{(i)} &= s^{(i-1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{ds^{(i-1)}}{d\Sigma} + \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma} \right) \Delta\Sigma, \\ \cos \vartheta_1 &= \frac{S_1^{(i)} \frac{d\vartheta_1^{(i)}}{d\Sigma} + S_3^{(i)} \frac{d\vartheta_3^{(i)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(i)} \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma}}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{S_1^{(i)} \frac{dS_1^{(i)}}{d\Sigma} + S_3^{(i)} \frac{dS_3^{(i)}}{d\Sigma}}{\sigma^{(i)} \frac{ds^{(i)}}{d\Sigma}},\end{aligned}$$

а также величины N и P .

4. Для учета в расчете скорректированного в пункте 3 значения $\cos \vartheta_1$ выполняется повторная коррекция по формулам предыдущей коррекции пункта 3.

5. Для подготовки к следующему шагу выполняется переобозначение найденных для данного шага величин в начальные значения для следующего шага

$$S_1^{(i-1)} = S_1^{(i)}, \quad S_3^{(i-1)} = S_3^{(i)}, \quad \vartheta_1^{(i-1)} = \vartheta_1^{(i)}, \quad \vartheta_3^{(i-1)} = \vartheta_3^{(i)}, \quad \Sigma^{(i-1)} = \Sigma^{(i)}, \quad s^{(i-1)} = s^{(i)}.$$

6. Выводятся на экран компьютера (на печать, в файл) найденные для данного шага величины

$$\Sigma^{(i)}, \quad S_1^{(i)}, \quad S_3^{(i)}, \quad \sigma^{(i)}, \quad s^{(i)}, \quad \vartheta_1^{(i)}, \quad \vartheta_3^{(i)}, \quad \cos \vartheta_1, \quad N, \quad P, \quad \frac{d\sigma}{ds}.$$

7. Для следующего шага расчет повторяется с пункта 2. Расчет заканчивается при достижении конечного значения длины траектории нагружения Σ .

Рассмотрим некоторые особенности решения. В общем случае простого нагружения, то есть когда величины S_1 и S_3 изменяются пропорционально одному параметру, для траектории в пространстве напряжений имеет место соотношение

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{dS_1/d\Sigma}{dS_3/d\Sigma},$$

Тогда с учетом (6) отношение

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta_1/d\Sigma}{d\vartheta_3/d\Sigma} &= \frac{\left(\left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1^2}{\sigma^2} \right] + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \frac{dS_3/d\Sigma}{dS_1/d\Sigma} \right) \frac{dS_1}{d\Sigma}}{\left(\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_1 S_3}{\sigma^2} \frac{dS_1/d\Sigma}{dS_3/d\Sigma} + \left[\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{S_3^2}{\sigma^2} \right] \frac{dS_3}{d\Sigma} \right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{N} + \frac{1}{P} - \frac{1}{N}}{\frac{1}{P} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N}} \cdot \frac{dS_1/d\Sigma}{dS_3/d\Sigma} = \frac{dS_1/d\Sigma}{dS_3/d\Sigma},\end{aligned}\tag{18}$$

и окончательно

$$\frac{d\vartheta_1/d\Sigma}{d\vartheta_3/d\Sigma} = \frac{S_1}{S_3}.\tag{19}$$

Косинус угла сближения по (10)

$$\begin{aligned}\cos \vartheta_1 &= \frac{S_1 \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} + S_3 \frac{d\vartheta_3}{d\Sigma}}{\sigma \frac{ds}{d\Sigma}} = \frac{d\vartheta_1}{d\Sigma} \frac{S_1 + S_3 \frac{d\vartheta_3/d\Sigma}{d\vartheta_1/d\Sigma}}{\sqrt{S_1^2 + S_3^2} \sqrt{\left(\frac{d\vartheta_1}{d\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta_3}{d\Sigma}\right)^2}} = \\ &= \frac{S_1 + S_3 \frac{S_1}{S_3}}{\sqrt{S_1^2 + S_3^2} \sqrt{1 + \left(\frac{d\vartheta_3/d\Sigma}{d\vartheta_1/d\Sigma}\right)^2}} = \frac{S_1^2 + S_3^2}{\left(\sqrt{S_1^2 + S_3^2}\right)^2} = 1,\end{aligned}$$

Это значит что угол $\vartheta_1 = 0$.

При простом (пропорциональном) нагружении для площади текучести $\sigma = \text{const}$ и $ds = \sqrt{(d\vartheta_1)^2 + (d\vartheta_3)^2} \neq 0$, поэтому $\frac{d\sigma}{ds} = 0$, причем $\cos \vartheta_1 = 1$, следовательно

$$P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} = 0.$$

В этом случае главный определитель системы уравнений (5) обращается в ноль, а в системе (6) величина $\frac{1}{P} = \infty$. В результате производные деформаций $\frac{d\vartheta_1}{d\Sigma}$ и $\frac{d\vartheta_3}{d\Sigma}$ становятся неопределенными.

Такая же неопределенность имеет место и для траектории напряжений в виде центральной окружности для которой $|\vec{\sigma}| = \sigma = \text{const}$. Для траектории напряжений в виде дуги окружности со смещенным центром относительно начала координат такой неопределенности не возникает. Для такой дуги окружности должен быть задан начальный участок нагружения от начала координат до начала дуги окружности.

При простом нагружении по компоненте S_3 на первом участке

$$0 \leq \Sigma \leq \Sigma_1 = a + R,$$

где a – смещение центра окружности (может быть как положительными, так и отрицательным), R – радиус окружности,

$$S_1 = 0, \quad S_3 = \Sigma, \quad \frac{dS_1}{d\Sigma} = 0, \quad \frac{dS_3}{d\Sigma} = 1, \quad \sqrt{\left(\frac{dS_1}{d\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{dS_3}{d\Sigma}\right)^2} = 1.$$

На втором участке с дугой окружности при $\Sigma > \Sigma_1$ полярный угол $\varphi = \frac{\Sigma - \Sigma_1}{R}$ (отсчитывается от оси S_3), тогда

$$S_1 = R \sin \varphi = R \sin \frac{\Sigma - \Sigma_1}{R}, \quad S_3 = a + R \cos \varphi = a + R \cos \frac{\Sigma - \Sigma_1}{R},$$

$$\frac{dS_1}{d\Sigma} = \cos\left(\frac{\Sigma - \Sigma_1}{R}\right), \quad \frac{dS_3}{d\Sigma} = -\sin\left(\frac{\Sigma - \Sigma_1}{R}\right), \quad \sqrt{\left(\frac{dS_1}{d\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{dS_3}{d\Sigma}\right)^2} = 1.$$

Величина a и R задаются подбором из условия наилучшего соответствия траектории экспериментальным данным.

Заключение. Представленные результаты показывают, что хотя расчетные формулы теории упругопластических процессов в прямой форме (жесткое нагружение) и обратной (мягкое нагружение) теоретически равнозначны, практическое решение требует достаточно точно задавать траектории нагружения. Например, если экспериментальная траектория деформаций задана в виде окружности, то отклик в пространстве напряжений имеет вид, также близкий к окружности [4, 9]. Однако, как показано выше, задание траектории напряжений в виде окружности не позволяет точно воспроизвести исходную траекторию деформации в численном расчете. В случае, когда траектория деформации представляет собой двузвенную ломаную [10], использование смещенной окружности в качестве траектории напряжений при удачном подборе параметров дает расчетную траекторию деформации достаточно близкую к исходной двузвенной ломаной траектории.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. Москва : Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [2] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. Москва : Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. Москва : Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / V. G. Zubchaninov [et al.] // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42, no. 5. P. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6.
- [5] Абиров Р. А. К физической достоверности определяющих соотношений при нагружении с изломом // Проблемы машиноведения. Материалы V Международной научно-технической конференции. Омск, 2021. С. 9–12.

- [6] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 1: Conditions of mathematical well-posedness and methods for solving boundary value problems // *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 650–656. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
- [7] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51, no. 1. P. 91–113. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
- [8] Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва : Наука, 1973. 832 с.
- [9] Экспериментальная проверка постулата изотропии при деформировании стали 45 по ортогональным криволинейным траекториям постоянной кривизны / В. И. Гультияев [и др.] // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2021. № 1(47). С. 86–94.
- [10] Проверка постулата изотропии при деформировании сплава В95 по двузвенным ломаными траекториям / В. Г. Зубчанинов [и др.] // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2023. № 5. С. 47–52.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. *Plasticity. Fundamentals of the General Mathematical Theory*. Moscow : Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1963. 273 p.
- [2] Ilyushin A. A. *Continuum Mechanics*. Moscow : Moscow State University Press, 1990. 310 p.
- [3] Zubchaninov V. G. *Mechanics of Plastic Media Processes*. Moscow : Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [4] Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42, no. 5. P. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6.
- [5] Abirov R. A. On the physical credibility of constitutive equations under loading with discontinuity // *Problems of Machine Science. Proceedings of the 5th International Scientific and Technical Conference*. Omsk, 2021. P. 9–12.
- [6] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 1: Conditions of mathematical well-posedness and methods for solving boundary value problems // *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 650–656. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
- [7] Peleshko V. A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 2: Identification and verification // *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51, no. 1. P. 91–113. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
- [8] Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Moscow : Nauka, 1973. 832 p.
- [9] Experimental verification of the isotropy postulate during deformation of steel 45 along orthogonal curved trajectories of constant curvature / V. I. Gulyaev [et al.] // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State*. 2021. no. 1(47). P. 86–94.
- [10] Verification of the isotropy postulate during deformation of V95 alloy along double-segment broken trajectories / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*. 2023. no. 5. P. 47–52.

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев, В. И. Гульяев

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ПЛОСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

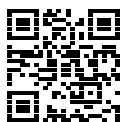
Аннотация. В статье представлены расчетные формулы и методика практического определения функционалов теории упругопластических процессов по экспериментальным данным для плоских траекторий деформирования. Приведены результаты вычисления функционалов пластичности для эксперимента на сложное нагружение ($P + M$ опыт) по плоской криволинейной траектории в пространстве деформаций. Приведенная методика определения функционалов может быть использована для обработки экспериментальных данных и построения аппроксимаций функционалов пластичности.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, гипотеза компланарности, функционалы пластичности, обработка экспериментальных данных.

Субботин Сергей Львович, доктор технических наук, профессор кафедры конструкций и сооружений; e-mail: sbtn@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-8881-1390>; AuthorID: 174777

Алексеев Андрей Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности; e-mail: alexeev@bk.ru; AuthorID: 640538

Гульяев Вадим Иванович, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильных дорог, оснований и фундаментов; e-mail: vig0@mail.ru; AuthorID: 174778



для цитирования: Субботин С. Л., Алексеев А. А., Гульяев В. И. Методика вычисления функционалов теории упругопластических процессов по результатам экспериментов для плоских траекторий деформирования // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 214–230. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.012. EDN: KKQJQD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

S. L. Subbotin, A. A. Alekseev

METHODOLOGY FOR CALCULATING THE FUNCTIONALS OF THE THEORY OF ELASTIC-PLASTIC PROCESSES BASED ON THE RESULTS OF EXPERIMENTS FOR PLANE STRAIN TRAJECTORIES

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The calculation formulas and the methodology of practical determination of the functionals of the theory of elastic-plastic processes from experimental data for plane strain trajectories are presented. The results of calculating the plasticity functionals for an experiment on complex loading ($P + M$ experiment) along a plane curvilinear trajectory in the strain space are given. The presented methodology for determining the functionals can be used to process experimental data and construct approximations of the plasticity functionals.

Keywords: plasticity, complex loading, coplanarity hypothesis, plasticity functionals, experimental data processing.

Sergey L. Subbotin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Structures and Constructions; **e-mail:** sbtn@yandex.ru; AuthorID: 174777

Andrey A. Alekseev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity; **e-mail:** alexeev@bk.ru; AuthorID: 640538

Vadim I. Gulyaev, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Highways, Foundations and Footings; **e-mail:** vig0@mail.ru; AuthorID: 174778



to cite this article: Subbotin L. S., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Methodology for calculating the functionals of the theory of elastic-plastic processes based on the results of experiments for plane strain trajectories // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 214–230. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.012

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. Экспериментальные исследования и проводимый на их основе анализ закономерностей упругопластического деформирования поликристаллических металлов и сплавов играют ключевую роль в развитии теории пластичности. На основе экспериментальных данных разрабатываются новые математические модели в теории пластичности, а также проводится их верификация и устанавливаются пределы применимости. Результаты большого количества экспериментальных исследований при сложном нагружении материалов и варианты математических теории пластичности частично представлены в работах [1-8].

Одной из наиболее общих и активно развивающихся феноменологических теорий пластичности на сегодняшний день является теория упругопластических процессов, предложенная А.А. Ильюшиным [1, 2], развитие положений этой теории, а также макроэкспериментальные исследования их достоверности представлены в работах научной школы В.Г. Зубчанинова и других исследователей [3-4, 8-16]. Математические модели теории упругопластических процессов находят широкое применение в расчетах процессов упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном комбинированном нагружении [4-7, 16-19]. В рамках теории упругопластических процессов используется векторное (геометрическое) представление истории изменения напряжений и деформаций в виде образа процесса нагружения или деформирования. Этот образ включает траекторию, в каждой точке которой задаются характеристики процесса: векторы напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\epsilon}$ формоизменения, их приращения $d\bar{\sigma}$ и $d\bar{\epsilon}$, а также скалярные параметры (температура, среднее напряжение, средняя деформация и др.). Связь между напряжениями и деформациями в теории процессов описывается определяющими соотношениями, которые учитывают как скалярные, так и векторные свойства материалов. Скалярные свойства отражают связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, а векторные свойства характеризуют несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений.

В практических расчетах удобно применять определяющее соотношение теории упругопластических процессов, которое имеет вид гипотезы компланарности А.А. Ильюшина [2, 3]. Она устанавливает связь между действующими напряжениями и направлениями приращений упругопластических деформаций, и в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \frac{d\bar{\epsilon}}{ds} + (P - N) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\epsilon}}{ds}}{\sigma^2} \cdot \bar{\sigma}, \quad (1)$$

где N , P – функционалы пластичности.

В работе [12] приведены конкретизированные формулы для определения функционалов по экспериментальным данным для плоского напряженного состояния и трехмерных винтовых траекторий деформаций методом подбора аналитических функций, соответствующих экспериментальным данным. Функционалы пластичности часто имеют сложный вид, что затрудняет их непосредственное использование в математических моделях. Поэтому часто используют аппроксимации функционалов [3, 4], позволяющие заменить их более простыми выражениями с обеспечением достаточной точности.

В данной статье представлена методика практического определения функционалов теории упругопластических процессов по экспериментальным данным для плоских траекторий деформирования. Также, в наглядной графической форме представлены результаты вычисления функционалов пластичности для программы эксперимента по сложной криволинейной траектории деформаций [20], реализованной на испытательном комплексе СН-ЭВН под руководством профессора В.Г. Зубчанинова.

2. Расчетные формулы для определения функционалов по экспериментальным данным для траекторий, принимаемых плоскими.

Формула для функционала P получается из скалярного произведения вектора напряжений $\bar{\sigma}$ и производной от вектора напряжений по длине траектории деформаций (вектора скорости напряжения) $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$, принимаемой в соответствии с гипотезой компланарности А.А. Ильюшина (1)

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \cdot \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}. \quad (2)$$

Поскольку $\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} = \sigma^2$, отсюда следует

$$P = \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}}{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}} = \frac{S_1 \cdot \frac{dS_1}{ds} + S_3 \cdot \frac{dS_3}{ds}}{S_1 \cdot \frac{d\Theta_1}{ds} + S_3 \cdot \frac{d\Theta_3}{ds}}. \quad (3)$$

Здесь и далее учтено представление векторов напряжений, деформаций и их производных по длине траектории деформации, принимаемой плоской, в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= S_1 \hat{e}_1 + S_3 \hat{e}_3, & \bar{\Theta} &= \Theta_1 \hat{e}_1 + \Theta_3 \hat{e}_3, \\ \frac{d\bar{\sigma}}{ds} &= \frac{dS_1}{ds} \hat{e}_1 + \frac{dS_3}{ds} \hat{e}_3, & \frac{d\bar{\Theta}}{ds} &= \frac{d\Theta_1}{ds} \hat{e}_1 + \frac{d\Theta_3}{ds} \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где \hat{e}_1 и \hat{e}_3 – единичные векторы (орты), направленные по осям 1 и 3.

Формула для производной от модуля вектора напряжений по длине дуги траектории деформаций $\frac{d\sigma}{ds}$ получается дифференцированием формулы

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_3^2}, \quad (5)$$

тогда

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}}{\sigma}. \quad (6)$$

Эта же формула может быть получена из скалярного произведения (рисунок 1)

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = |\bar{\sigma}| \frac{d\Sigma}{ds} \cos \vartheta = \sigma \cdot \frac{d\sigma}{ds}, \quad (7)$$

где $\sigma = |\bar{\sigma}|$ – модуль вектора напряжений; $\frac{d\Sigma}{ds} = \left| \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \right|$ – модуль вектора скорости напряжений; ϑ – угол между векторами $\bar{\sigma}$ и $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$; $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \cos \vartheta$ – проекция вектора $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ на направление вектора напряжений $\bar{\sigma}$ (см. рис. 1).

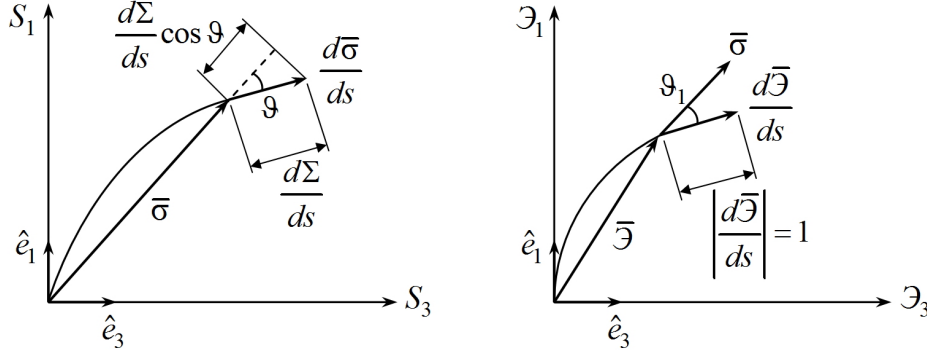


Рис. 1. Траектории нагружения (слева) и деформирования (справа) с приписанными векторами напряжений, деформаций и их приращениями

Отсюда следует

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}}{\sigma} = \frac{S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}}{\sigma}. \quad (8)$$

Формула для тригонометрической функции угла сближения $\cos \vartheta_1$ получается (см. рис. 1) из скалярного произведения вектора напряжений и производной от вектора деформаций по длине дуги траектории деформаций (вектора скорости деформаций):

$$\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Sigma}}{ds} = |\bar{\sigma}| \cdot \left| \frac{d\bar{\Sigma}}{ds} \right| \cos \vartheta_1 = \sigma \cdot 1 \cdot \cos \vartheta_1, \quad (9)$$

откуда

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Sigma}}{ds}}{\sigma} = \frac{S_1 \frac{d\Xi_1}{ds} + S_3 \frac{d\Xi_3}{ds}}{\sigma}. \quad (10)$$

Сопоставление формул для P , $\frac{d\sigma}{ds}$ и $\cos \vartheta_1$ дает соотношения

$$\frac{d\sigma}{ds} = P \cos \vartheta_1 \quad \text{или} \quad P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}. \quad (11)$$

Для определения функционала N записывается скалярное произведение вектора $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ на единичный вектор $\hat{\nu} = \nu_1 \hat{e}_1 + \nu_3 \hat{e}_3$, перпендикулярный вектору напряжений $\bar{\sigma}$, с использованием соотношения гипотезы компланарности (1)

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \cdot \hat{\nu} + (P - N) \frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\Theta}}{ds}}{\sigma^2} \cdot \bar{\sigma} \cdot \hat{\nu}. \quad (12)$$

Ввиду перпендикулярности векторов $\hat{\nu}$ и $\bar{\sigma}$, их скалярное произведение равно нулю, тогда

$$N = \frac{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu}}{\frac{d\bar{\Theta}}{ds} \cdot \hat{\nu}} = \frac{\frac{dS_1}{ds} \nu_1 + \frac{dS_3}{ds} \nu_3}{\frac{d\Theta_1}{ds} \nu_1 + \frac{d\Theta_3}{ds} \nu_3}. \quad (13)$$

Компоненты вектора $\hat{\nu}$ находятся из условий

$$\bar{\sigma} \cdot \hat{\nu} = S_1 \nu_1 + S_3 \nu_3 = 0, \quad |\hat{\nu}| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_3^2} = 1, \quad (14)$$

тогда

$$\nu_3 = -\frac{S_1}{S_3} \nu_1, \quad \pm \nu_1 \sqrt{1 + \left(\frac{S_1}{S_3}\right)^2} = 1, \quad (15)$$

откуда

$$\nu_1 = \pm \frac{S_3}{\sigma}, \quad \nu_3 = \mp \frac{S_1}{\sigma}. \quad (16)$$

Таким образом, окончательно формула для определения функционала N имеет вид

$$N = \frac{S_1 \frac{dS_3}{ds} - S_3 \frac{dS_1}{ds}}{S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds}}. \quad (17)$$

Существенно отметить, что при $\vartheta_1 = 0$ выполняются соотношения

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \quad \text{или} \quad \frac{S_1}{\sigma} = \frac{d\Theta_1}{ds}; \quad \frac{S_3}{\sigma} = \frac{d\Theta_3}{ds}; \quad (18)$$

$$\cos \vartheta_1 = \frac{S_1 \frac{S_1}{\sigma} + S_3 \frac{S_3}{\sigma}}{\sigma} = \frac{S_1^2 + S_3^2}{\sigma^2} = 1. \quad (19)$$

Тогда знаменатель формулы для N обращается в нуль:

$$S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds} = \sigma \frac{d\Theta_1}{ds} \frac{d\Theta_3}{ds} - \sigma \frac{d\Theta_3}{ds} \frac{d\Theta_1}{ds} = 0 \quad (20)$$

При этом, если числитель формулы (17) для N не обращается в нуль, то есть $S_1 \frac{dS_3}{ds} - S_3 \frac{dS_1}{ds} \neq 0$, то величина функционала $N = \pm\infty$. Иначе говоря, если вектор напряжений $\bar{\sigma}$ направлен по касательной к траектории деформации, то $\vartheta_1 = 0$, а $N = \pm\infty$. Числитель формулы для N также может быть равен нулю, если вектор $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}$ по направлению совпадает с вектором напряжений $\bar{\sigma}$. В этом случае $\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu} = 0$.

Другая формула для вычисления функционала N может быть получена дифференцированием выражения $\cos \vartheta_1$ по (10), тогда

$$\frac{d \cos \vartheta_1}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{ds}}{\sigma} \right). \quad (21)$$

Отсюда, с учетом что $\left| \frac{d^2 \bar{\sigma}}{ds^2} \right| = \kappa_1$ – кривизна траектории деформации, следует [3]

$$N = \frac{\sigma}{\sin \vartheta_1} \left(\kappa_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right). \quad (22)$$

Как и для предыдущей формулы (17), знаменатель этой формулы обращается в ноль, если $\vartheta_1 = 0$. Числитель формулы обращается в ноль, если выполняется условие

$$\kappa_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} = 0. \quad (23)$$

По определению кривизны плоской траектории деформации

$$\kappa_1 = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{Rd\varphi} = \frac{1}{R}. \quad (24)$$

Если $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\vartheta_1}{ds}$, то вектор напряжений $\bar{\sigma}$ не меняет своего направления на участке ds траектории деформации и остается перпендикулярным к вектору $\hat{\nu}$. Отсюда следует

$$\left(\bar{\sigma} + \frac{d\bar{\sigma}}{ds} ds \right) \cdot \hat{\nu} = \bar{\sigma} \cdot \hat{\nu} + \frac{d\bar{\sigma}}{ds} ds \cdot \hat{\nu} = 0; \quad \bar{\sigma} \cdot \hat{\nu} = 0; \quad \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu} = 0. \quad (25)$$

Причем, если в этой точке траектории $\vartheta_1 \neq 0$, то

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu} \neq 0; \quad N = \frac{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu}}{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \cdot \hat{\nu}} = 0. \quad (26)$$

При вычислении функционала N по формуле (22), содержащей $\sin \vartheta_1$ и $\frac{d\vartheta_1}{ds}$ нужно учитывать знак угла ϑ_1 . Угол ϑ_1 принимается положительным, если угол между вектором напряжений $\bar{\sigma}$ и радиусом кривизны (перпендикулярным

к касательной к траектории деформаций) больше 90° ; при этом угле меньше 90° угол ϑ_1 принимается отрицательным (рисунок 2).

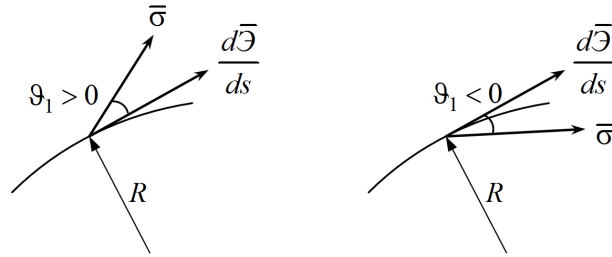


Рис. 2. К определению знака угла сближения

3. Методика практического вычисления P , N , $\frac{d\sigma}{ds}$, $\cos \vartheta_1$ по экспериментальным данным для плоских траекторий.

Программы физических экспериментов по сложному упругопластическому деформированию тонкостенных цилиндрических образцов, проводимые на испытательном комплексе СН-ЭВН [8], задаются для плоских траекторий через декартовы проекции \mathfrak{E}_1 и \mathfrak{E}_3 вектора деформации в параметрическом виде. Малые отклонения координат вектора деформаций \mathfrak{E}_1 и \mathfrak{E}_3 от задаваемой в эксперименте траектории деформаций, вызванные случайными причинами, приводят к тому, что заданная длина участка траектории деформаций Δs_n меньше суммы длин расстояний между соседними экспериментальными точками (рис. 3), то есть

$$\Delta s_n < \sum_{i=0}^n \sqrt{\Delta \mathfrak{E}_{1i+1}^2 + \Delta \mathfrak{E}_{3i+1}^2}, \quad (27)$$

где

$$\Delta \mathfrak{E}_{1i+1} = \mathfrak{E}_{1i+1} - \mathfrak{E}_{1i}, \quad \Delta \mathfrak{E}_{3i+1} = \mathfrak{E}_{3i+1} - \mathfrak{E}_{3i}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

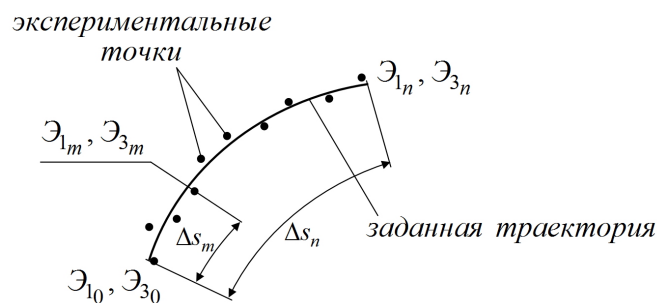


Рис. 3. Отклонения экспериментальных точек от задаваемой в эксперименте программы испытания

Ввиду случайности отклонений, для сглаживания экспериментальной траектории деформации каждую экспериментальную точку можно спроектировать на теоретическую траекторию и вычислить длину участка траектории до текущей точки m по формуле

$$\Delta s_m = \sum_{j=0}^m \sqrt{\Delta \vartheta_{1j+1}^2 + \Delta \vartheta_{3j+1}^2} \cdot \frac{\Delta s_n}{\sum_{i=0}^n \sqrt{\Delta \vartheta_{1i+1}^2 + \Delta \vartheta_{3i+1}^2}}. \quad (29)$$

Далее по величине Δs_m находят сглаженные значения компонент ϑ_{1m} и ϑ_{3m} для этой точки как функции s_m в соответствии с уравнением данного участка траектории, а также их производные $\frac{d\vartheta_{1m}}{ds}$ и $\frac{d\vartheta_{3m}}{ds}$.

Параметрическое представление траекторий деформаций должно обладать ясным геометрическим представлением на плоскости $\vartheta_1 - \vartheta_3$, чтобы использовать их при обработке экспериментальных данных по задаваемым программам. Например, для параметрического задания прямолинейного участка траектории деформаций (рис. 4, а):

$$\begin{aligned} \vartheta_{1m} &= \Delta s \sin \varphi, \quad \vartheta_{3m} = \vartheta_{30} - \Delta s \cos \varphi, \\ \frac{d\vartheta_{1m}}{ds} &= \sin \varphi, \quad \frac{d\vartheta_{3m}}{ds} = -\cos \varphi, \\ d\vartheta_{1m} &= \sin \varphi \cdot ds, \quad d\vartheta_{3m} = -\cos \varphi \cdot ds, \quad \sqrt{d\vartheta_{1m}^2 + d\vartheta_{3m}^2} = ds. \end{aligned} \quad (30)$$

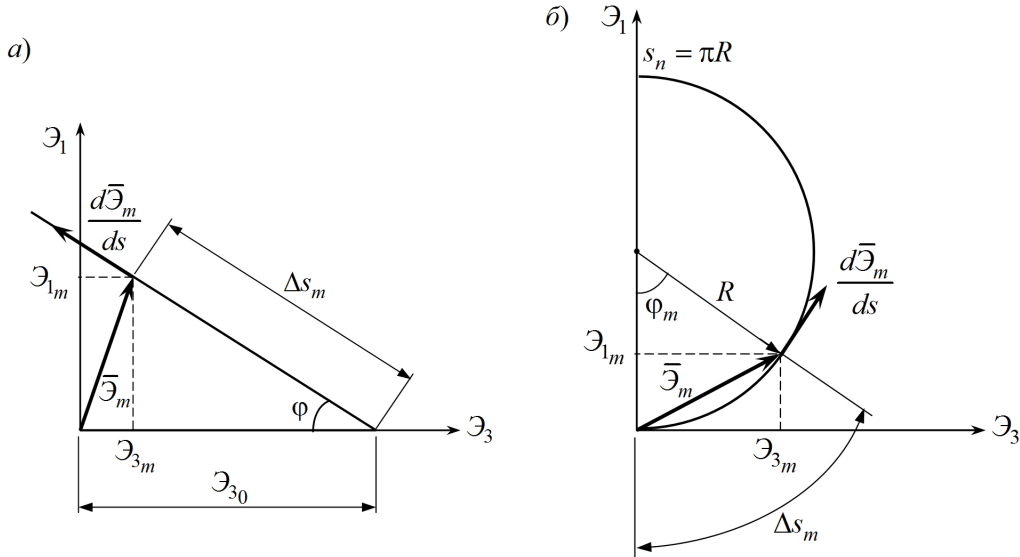


Рис. 4. Параметрическое задание траектории деформаций: а) – прямолинейный участок; б) – дуга окружности

Для параметрического задания участка траектории деформаций в виде дуги окружности радиуса R (рис. 4, б) удобно использовать полярный угол $\varphi_m = \Delta s_m / R$, тогда

$$\begin{aligned}\Theta_{1m} &= R - R \cos \varphi_m = R \left(1 - \cos \frac{\Delta s_m}{R} \right), \quad \Theta_{3m} = R \sin \varphi_m = R \sin \frac{\Delta s_m}{R}, \\ \frac{d\Theta_{1m}}{ds} &= \frac{d\Theta_{1m}}{d\varphi_m} \frac{d\varphi_m}{ds} = \sin \frac{\Delta s_m}{R}, \quad \frac{d\Theta_{3m}}{ds} = \frac{d\Theta_{3m}}{d\varphi_m} \frac{d\varphi_m}{ds} = \cos \frac{\Delta s_m}{R}, \\ d\Theta_{1m} &= \sin \varphi_m ds, \quad d\Theta_{3m} = \cos \varphi_m ds, \quad \sqrt{d\Theta_{1m}^2 + d\Theta_{3m}^2} = ds.\end{aligned}\quad (31)$$

Для вычисления значений P , N , $\frac{d\sigma}{ds}$, $\cos \vartheta_1$ по экспериментальным данным необходимы значения координат вектора напряжений S_1 и S_3 и их производные $\frac{dS_1}{ds}$, $\frac{dS_3}{ds}$ по длине дуги траектории деформаций.

На начальном линейно-упругом участке значения координат вектора напряжений S_1 и S_3 , а также их производные вычисляются по формулам закона Гука. Например, в произвольной точке k траектории

$$S_{1k} = 2G\Theta_{1k}, \quad S_{3k} = 2G\Theta_{3k}, \quad \frac{dS_{1k}}{ds} = 2G \frac{d\Theta_{1k}}{ds}, \quad \frac{dS_{3k}}{ds} = 2G \frac{d\Theta_{3k}}{ds}, \quad (32)$$

где G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига) материала образца.

Экспериментальные значения для расчета удобно привести к равноотстоящим точкам. Точки с постоянным шагом по длине траектории деформаций s можно получить по экспериментальным точкам линейной интерполяцией

$$\begin{aligned}S_{1k} &= S_{1m} + \frac{S_{1m+1} - S_{1m}}{s_{m+1} - s_m} (s_k - s_m), \\ S_{3k} &= S_{3m} + \frac{S_{3m+1} - S_{3m}}{s_{m+1} - s_m} (s_k - s_m),\end{aligned}\quad (33)$$

где S_{1m} , S_{1m+1} , S_{3m} , S_{3m+1} – значения S_1 и S_3 в экспериментальных точках с длиной траектории деформаций s_m и s_{m+1} соответственно; s_k – длина траектории деформаций в точке k , наиболее близкой к точкам m и $m+1$. Для полученных равноотстоящих точек можно выполнить сглаживание величин S_{1k} и S_{3k} для уменьшения влияния случайных отклонений.

Для вычисления выровненных значений \tilde{S}_{1k} ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n$) сглаженных многочленом третьей степени (кубической параболой) по пяти точкам можно использовать формулы, полученные по методу наименьших квадратов [21]:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{10} &= \frac{1}{70} (69S_{10} + 4S_{11} - 6S_{12} + 4S_{13} - S_{14}), \\ \tilde{S}_{11} &= \frac{1}{35} (2S_{10} + 27S_{11} + 12S_{12} - 8S_{13} + 2S_{14}), \\ \tilde{S}_{12} &= \frac{1}{35} (-3S_{10} + 12S_{11} + 17S_{12} + 12S_{13} - 3S_{14}),\end{aligned}$$

4. Результаты обработки и вычисления значений P , N , $\frac{d\sigma}{ds}$, $\cos \vartheta_1$ по экспериментальным данным для плоской криволинейной траектории деформаций.

На рисунках 5-10 представлены результаты обработки по описанной выше методике двумерного эксперимента на сложное нагружение (осевой силой и крутящим моментом) тонкостенного трубчатого образца из стали 45.

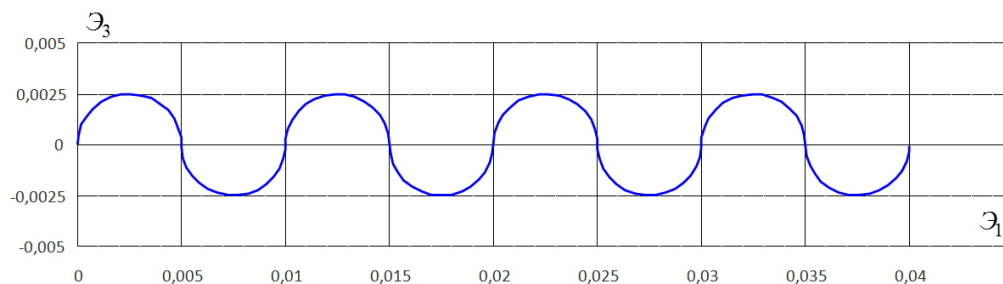


Рис. 5. Траектория деформаций (параметрически заданная)

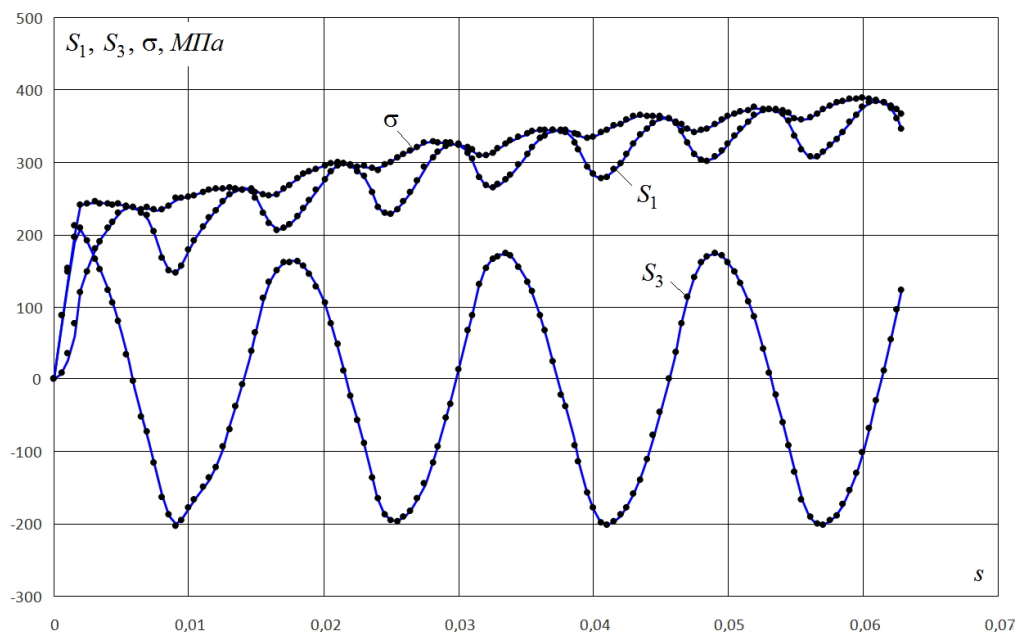


Рис. 6. Диаграммы деформирования: зависимости S_1 , S_3 , σ от длины дуги s

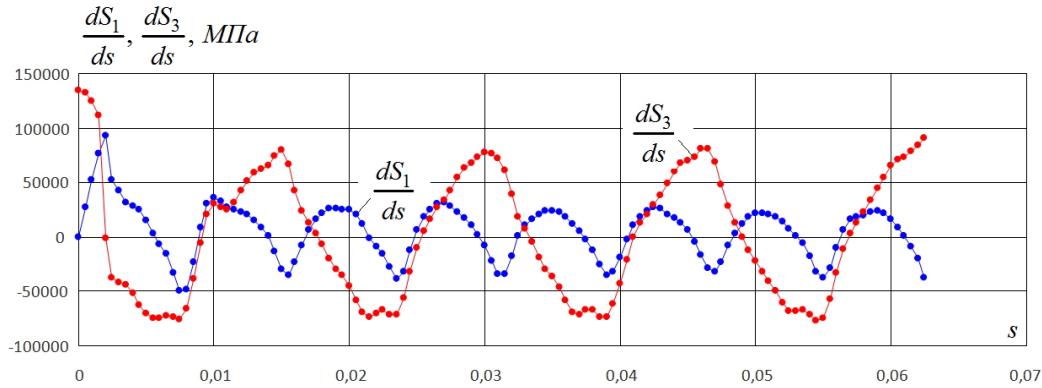


Рис. 7. Графики зависимостей производных координат вектора напряжений от длины дуги s

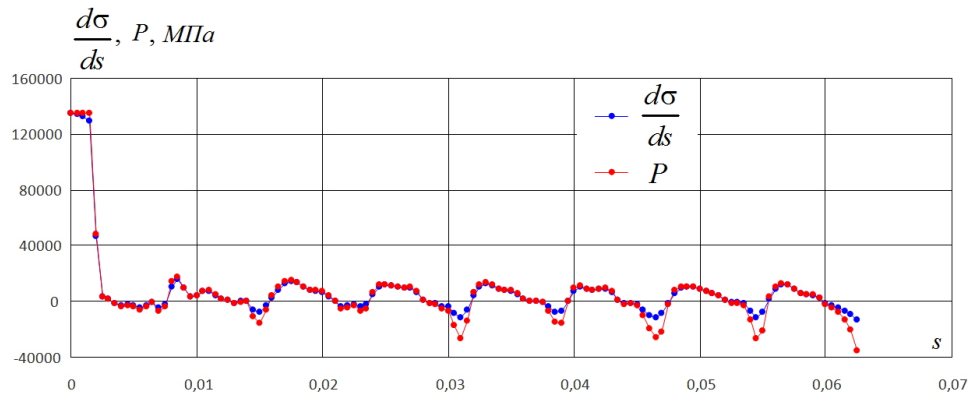
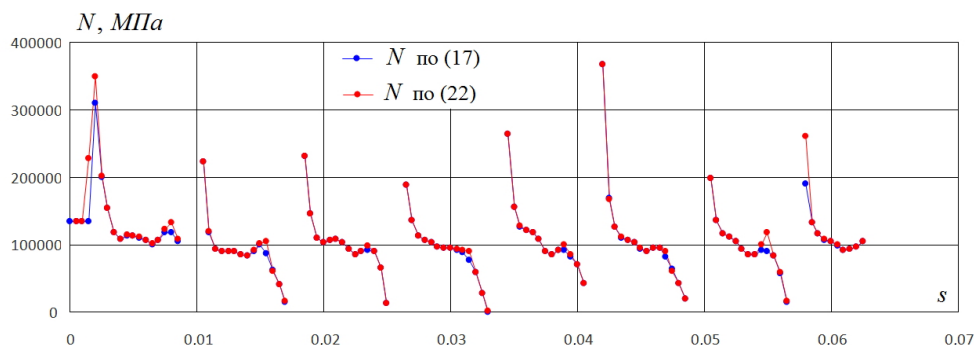
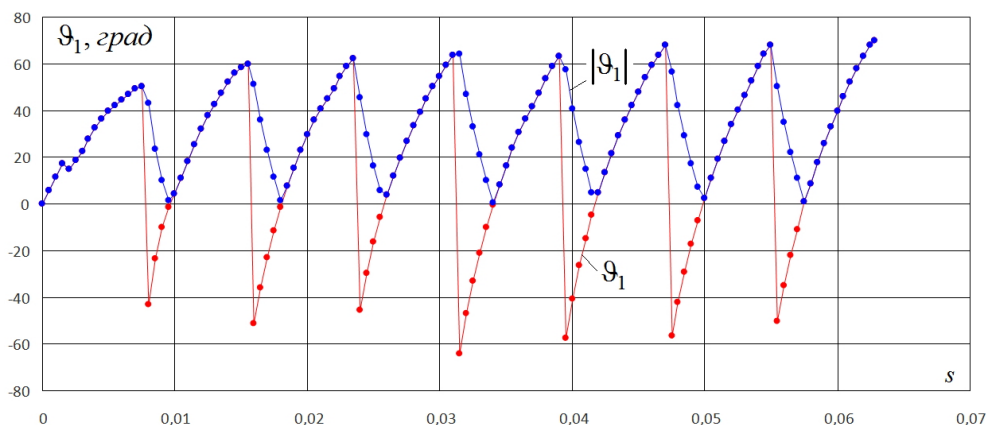


Рис. 8. Графики зависимостей функционалов $\frac{d\sigma}{ds}$, P от длины дуги s

Представленная на рисунке 5 программа эксперимента [20], выполненного на испытательном комплексе СН-ЭВМ, представляла собой в пространстве деформаций плоскую гладкую кривую, состоящую из восьми последовательных полуокружностей радиуса 0,0025. Для ее реализации трубчатый образец подвергался комбинированному растяжению по координате \mathcal{E}_1 от нуля до конечного значения $\mathcal{E}_1^* = 0,04$ и знакопеременному кручению по \mathcal{E}_3 от нуля до $\mathcal{E}_3^* = \pm 0,0025$. Расчетная длина дуги траектории деформирования составляет 0,0628.

На рисунке 6 представлены зависимости координат вектора напряжений S_1 и S_3 , а также его модуля σ от длины дуги s траектории деформаций.

Экспериментальные данные на рис. 6 обозначены точками, результаты сглаживания сплошными кривыми синего цвета. Как видно, графики на рисунках

Рис. 9. Графики зависимости функционала N от длины дуги s Рис. 10. Диаграмма $\vartheta_1 - s$

носят колебательный характер и прослеживается их периодичность, а результаты сглаживания преобразуют данные в относительно гладкие кривые с достаточно плавными производными.

Далее на рисунке 7 приведены графики зависимостей производных $\frac{dS_1}{ds}$, $\frac{dS_3}{ds}$ от длины дуги s траектории деформаций, которые были определены по приведенной выше методике с шагом для равноотстоящих точек $\Delta s = 0,0005$.

На рисунке 8 показаны диаграммы зависимостей функционалов P и $\frac{d\sigma}{ds}$ от s , а на рисунке 9 – функционала N от s . Значения функционала N на рис. 9 определены по двум разным формулам (17) и (22).

Как видно обе формулы дают очень близкие результаты, наибольшие расхождения наблюдаются при переходе с одного участка окружности траектории деформаций на другой, поскольку в этих точках меняется знак угла сближения ϑ_1 . Также при значениях угла ϑ_1 близких к нулю, значение $N \rightarrow \infty$, поэтому на

графике присутствуют разрывы. Анализируя полученные графики на рис. 8 и 9 можно заметить в пластической области явную периодичность или повторяемость значений уже начиная со второй окружности траектории деформирования.

На рисунке 10 представлена диаграмма зависимости $\vartheta_1 - s$, характеризующая векторные свойства материала, на которой показаны как значения ϑ_1 с учетом знака, так и абсолютные значения ϑ_1 . Такое резкое изменение знака угла сближения ϑ_1 происходит в местах стыка полуокружностей траектории деформаций.

Таким образом, представленная в статье методика определения функционалов теории упругопластических процессов для плоских траекторий деформаций может быть использована для обработки экспериментальных данных и построения аппроксимаций функционалов пластичности. При определении функционала N по формуле (22) необходимо учитывать знак угла сближения между касательной к траектории деформации и вектором напряжения, поэтому наиболее удобной для вычисления N является формула (17).

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М. : Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [2] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М. : Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М. : Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. Т.2. Пластичность. М. : Физматлит, 2008. 336 с.
- [5] Прикладная теория пластичности / Ф. М. Митенков [и др.]. М. : Физматлит, 2015. 284 с.
- [6] Аннин Б. Д., Жигалкин В. М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York : Begell House, 2013.
- [8] Гультяев В. И., Алексеев А. А. Экспериментально-теоретическое исследование деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении за пределом упругости. Тверь : ТвГТУ, 2023. 164 с.

- [9] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И. Испытание стали 45 при упругопластическом деформировании по сложным траекториям постоянной и переменной кривизны // Деформация и разрушение материалов. 2016. № 9. С. 14–19.
- [10] Проверка постулата изотропии при деформировании сплава В95 по двухзвенным ломаными траекториям / В. Г. Зубчанинов [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2023. № 5. С. 47–52.
- [11] Экспериментальные исследования сложного нагружения латуни Л63 на двухзвенных ломаных траекториях типа «смещенный веер» / В. Г. Зубчанинов [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 18–25.
- [12] Субботин С. Л., Алексеев А. А. Конкретизация обобщения гипотезы компланарности для упругопластических процессов в трехмерном изображающем пространстве А. А. Ильюшина // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 85–95.
- [13] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
- [14] Молодцов И. Н. Особенности применения теории упругопластических процессов при сложном нагружении по криволинейным траекториям деформации // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2022. № 4. С. 48–55.
- [15] Васин Р. А. Теория упругопластических процессов и исследование структурно-механических свойств материалов // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 19–26.
- [16] Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally / V. G. Zubchaninov [et al.] // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42, no. 5. P. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6.
- [17] Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования / В. Г. Зубчанинов [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 32–44. DOI: 10.17223/19988621/61/4.
- [18] Алексеев А. А. Моделирование процесса упругопластического деформирования стали 45 по траекториям типа спирали Архимеда // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 1. С. 102–109.
- [19] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 1: условия математической корректности и методы решения краевых задач // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 61–68. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
- [20] Экспериментальное исследование стали 45 по некоторой гладкой криволинейной траектории деформирования / В. И. Гультияев [и др.] // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 33–41.
- [21] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1973. 832 с.

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory. Moscow : Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1963. 273 p.
- [2] Ilyushin A. A. Continuum Mechanics. Moscow : Publishing House of Moscow State University, 1990. 310 p.
- [3] Zubchaninov V. G. Mechanics of Processes of Plastic Media. Moscow : Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [4] Zubchaninov V. G. Stability and Plasticity. Vol. 2: Plasticity. Moscow : Fizmatlit, 2008. 336 p.
- [5] Applied Theory of Plasticity / F. M. Mitenkov [et al.]. Moscow : Fizmatlit, 2015. 284 p.

- [6] Annin B. D., Zhigalkin V. M. Behavior of Materials under Complex Loading. Novosibirsk : Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 1999. 342 p.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the Theory. New York : Begell House, 2013.
- [8] Gulyaev V. I., Alekseev A. A. Experimental and Theoretical Study of Deformation of Structural Materials under Complex Loading beyond the Elastic Limit. Tver : TvSTU, 2023. 164 p.
- [9] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gulyaev V. I. Testing of Steel 45 under Elasto-Plastic Deformation along Complex Paths of Constant and Variable Curvature // *Deformatsiya i razrusheniye materialov*. 2016. no. 9. P. 14–19.
- [10] Verification of the Isotropy Postulate during Deformation of B95 Alloy along Two-Link Broken Trajectories / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*. 2023. no. 5. P. 47–52.
- [11] Experimental Studies of Complex Loading of L63 Brass on Two-Link Broken Trajectories of the "Offset Fan" Type / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2023. no. 1(55). P. 18–25.
- [12] Subbotin S. L., Alekseev A. A. Concretization of Generalization of the Coplanarity Hypothesis for Elastic-Plastic Processes in a Three-Dimensional Space by A. A. Ilyushin // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2022. no. 1(51). P. 85–95.
- [13] Peleshko V. A. Applied and Engineering Versions of the Theory of Elastic-Plastic Processes of Active Complex Loading. Part 2: Identification and Verification // *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2016. no. 1. P. 110–135. DOI: 10.3103/S0025654416010106.
- [14] Molodtsov I. N. Features of the Application of the Theory of Elastic-Plastic Processes under Complex Loading along Curvilinear Deformation Trajectories // *Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*. 2022. no. 4. P. 48–55.
- [15] Vasin R. A. Theory of Elastic-Plastic Processes and the Study of Structural and Mechanical Properties of Materials // *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2011. no. 1. P. 19–26.
- [16] Modeling of Elastoplastic Deformation of Structural Steel by a Trajectory Containing Three Circles Touching Internally / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42, no. 5. P. 528–534. DOI: 10.18720/MPM.4252019_6.
- [17] The Processes of Complex Loading Structural Steel for a Five-Link Piecewise Broken Strain Path / V. G. Zubchaninov [et al.] // *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2019. no. 61. P. 32–44. DOI: 10.17223/19988621/61/4.
- [18] Alekseev A. A. Modeling of Elastoplastic Deformation of Steel 45 along Archimedes Spiral Type Trajectories // *Computational Continuum Mechanics*. 2021. Vol. 14, no. 1. P. 102–109.
- [19] Peleshko V. A. Applied and Engineering Versions of the Theory of Elastoplastic Processes of Active Complex Loading. Part 1: Conditions of Mathematical Well-Posedness and Methods for Solving Boundary Value Problems // *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2015. no. 6. P. 61–68. DOI: 10.3103/S0025654415060060.
- [20] Experimental Study of Steel 45 along a Certain Smooth Curvilinear Deformation Trajectory / V. I. Gulyaev [et al.] // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2021. no. 3(49). P. 33–41.
- [21] Korn G., Korn T. Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers. Moscow : Science, 1973. 832 p.

А. А. Трещев, Д. О. Бесстрашнов

3-D МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ МАТЕРИАЛА С НЕСОВЕРШЕННОЙ УПРУГОСТЬЮ

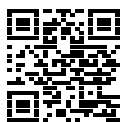
Тулский государственный университет, Тула, Россия

Аннотация. Представлена 3-D конечно-элементная модель деформирования разомкнутой круговой цилиндрической оболочки, не относящейся к классу тонких или конструкции средней толщины. Опирается принята типа жесткого защемления по образующим. Модель свободна от технических гипотез, применяемых при расчете оболочечных конструкций. Поэтому математическая модель определения напряженно-деформированного состояния толсто-стенной оболочки базируется на нелинейном трехмерном подходе. В разработанной модели учтена структурная специфика конструкционных материалов, каковыми являются ортотропные композиты с меняющимися жесткостными параметрами при изменении вида напряженного состояния, что можно характеризовать как наведенная механическая неоднородность структуры. Данный факт усложняет конкретные расчеты конструкций. В связи с этим в расчетной модели были преобразованы объемные десятиузловые изопараметрические конечные элементы в виде тетраэдра с тремя степенями свободы в узле. Корректного учета деформационных свойств ортотропной структуры композита, обладающего несовершенной упругостью, удалось добиться путем использования энергетической связи тензоров деформаций и напряжений, сформулированной в компонентах нормированного пространства в главных осях ортотропии материала. Для решения общей нелинейной задачи использовалась методика переменных параметров упругости. Процесс реализации разработанной модели позволил получить информацию о всех характеристиках деформирования оболочки в полном объеме, основные из которых приведены и проанализированы в данной статье.

Ключевые слова: ортотропный композит, деформационная неоднородность, незамкнутая цилиндрическая оболочка кругового очертания, нормированное тензорное пространство.

Трещев Александр Анатольевич, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РААСН, заведующий кафедрой строительство, строительные материалы и конструкции; e-mail: taa58@yandex.ru; AuthorID: 453902

Бесстрашнов Дмитрий Олегович, ассистент кафедры строительство, строительные материалы и конструкции; e-mail: mr.D-Best@yandex.ru; AuthorID: 1221273



для цитирования: Трещев А. А., Бесстрашнов Д. О. 3-D модель деформирования ортотропной незамкнутой оболочки из материала с несовершенной упругостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 231–245. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.013. EDN: IATUXXK

Статья опубликована на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)*.

A. A. Treschev, D. O. Besstrashnov

3-D MODEL OF DEFORMATION OF AN ORTHOTROPIC OPEN SHELL MADE OF A MATERIAL WITH IMPERFECT ELASTICITY

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. A 3-D finite element model of deformation of an open circular cylindrical shell, which does not belong to the class of thin or medium-thick structures, is presented. The support is assumed to be of the type of rigid pinching by the formers. The model is free from technical hypotheses used in the calculation of shell structures. Therefore, the mathematical model for determining the stress-strain state of a thick-walled shell is based on a nonlinear three-dimensional approach. The developed model takes into account the structural specifics of structural materials, such as orthotropic composites with varying stiffness parameters when the kind of stress state changes, which can be characterized as induced mechanical heterogeneity of the structure. This fact complicates the specific calculations of structures. In this regard, the volumetric ten-node isoparametric finite elements in the form of a tetrahedron with three degrees of freedom at the node were transformed in the computational model. Correct consideration of the deformation properties of the orthotropic structure of a composite with imperfect elasticity was achieved by using the energy coupling of strain and stress tensors, formulated in the components of the normalized space in the main axes of the orthotropy of the material. To solve the general nonlinear problem, the method of variable elasticity parameters was used. The process of implementing the developed model made it possible to obtain information about all the characteristics of shell deformation in full, the main of which are given and analyzed in this article.

Keywords: structural orthotropy, deformation anisotropy, thermoelasticity, unrelated problem, cylindrical shell.

Alexander A. Treschev, Doctor of Technical Sciences, Professor; e-mail: taa58@yandex.ru; AuthorID: 453902

Dmitry O. Besstrashnov, Assistant; e-mail: mr.D-Best@yandex.ru; AuthorID: 1221273



to cite this article: Treschev A. A., Besstrashnov D. O. 3-D model of deformation of an orthotropic open shell made of a material with imperfect elasticity // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2025. No 3(65). p. 231–245. DOI: 10.37972/chgpu.2025.65.3.013

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Введение. При развитии современной техники и в строительстве широкое распространение получили композитные материалы, особенностью которых являются структурная ортотропия, осложненная деформационной анизотропией, которая представляется чувствительностью к виду напряженного состояния. Такие материалы широко используются для изготовления элементов толстостенных пространственных конструкций, таких как цилиндрические оболочки различных видов, оболочки положительной гауссовой кривизны, толстые диски, плиты и так далее. Для деформационно-прочностных расчетов подобных объектов требуется разработать математические модели, учитывающие особенности свойств современных материалов, адекватные реальному процессу нагружения и конфигурации сооружений. При этом основой точности расчетных методик должны послужить надежные определяющие соотношения, соответствующие известным экспериментальным данным по деформированию указанных материалов. Такими уравнениями состояния являются потенциальные соотношения, предложенные в работах [1–3]. Там же и в публикациях [4, 5] проанализированы серьезные недостатки предыдущих исследований широко известных авторов, на которых здесь останавливаться не будем.

2. Уравнения связи тензоров деформаций и напряжений для ортотропных композитов, обладающих деформационной неоднородностью. Применив к потенциалу деформаций [2, 3] процедуру дифференцирования Кастильяно, приходим к уравнениям связи тензоров деформаций и напряжений для структурно ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией:

$$e_{ij} = C_{ijkm}\sigma_{km}, \quad i, j, k, m = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$; $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{23}^2 + 2\tau_{13}^2}$;

$$\begin{aligned} C_{1111} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) + 0, 5[B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - \\ &\quad - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{22}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\ &\quad + B_{1133}\alpha_{33}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) - B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}); \\ C_{1122} &= A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); C_{1133} = A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33}); \\ C_{2222} &= (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) + 0, 5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - \\ &\quad - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\ &\quad + B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}); \quad C_{2233} = A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33}); \\ C_{3333} &= (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33}) + 0, 5[B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - \\ &\quad - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1133}\alpha_{11}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - \\ &\quad - B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); \quad C_{1212} = 0, 5\{A_{1212} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \\ &\quad - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\}; \\ C_{2323} &= 0, 5\{A_{2323} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \\ &\quad - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\}; \\ C_{1313} &= 0, 5\{A_{1313} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \end{aligned}$$

$-2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\};$
 $C_{1212} = C_{2121}; \quad C_{2323} = C_{3232}; \quad C_{1313} = C_{3131}.$ Остальные компоненты тензора податливостей C_{ijij} тождественно равны нулю.

В публикации [3] проведена идентификация сформулированной модели, заключающейся в вычислении параметров, формулирующих в энергетическом представлении. Константы потенциала [3] были вычислены по технически измеренным параметрам при тензометрировании растягиваемых, сжимаемых эталонов материала, вырезанных в направлениях главных осей ортотропии, а также при испытании на сдвиг в соответствующих ортогональных плоскостях. Эти константы представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; & B_{kkkk} &= (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2; \\ A_{ijij} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ + \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; & B_{ijij} &= -(\nu_{ij}^+/E_j^+ - \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \\ A_{ijji} &= 1/G_{ij}; & \nu_{ij}^+/E_j^+ &= \nu_{ji}^+/E_i^+; & \nu_{ij}^-/E_j^- &= \nu_{ji}^-/E_i^-; & i, j, k &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

где E_k^\pm, ν_{ij}^\pm – секущие модули деформаций и параметры отношений поперечных деформаций к продольным, полученные из испытаний в направлениях главных осей ортотропии (положительный знак приписан к опытам на растяжение, а отрицательный – на сжатие); G_{ij} – модули сдвига в соответствующих ортогональных плоскостях ортотропии.

Кроме того, там же [3] установлены ограничения на константы потенциала по Друкеру и доказана теорема единственности решений прикладных задач, подтверждающая справедливость фундаментального закона не исчезания энергии [6, 7]. Конкретные жесткостные параметры ортотропных материалов, проявляющих деформационную анизотропию, широко представлены в научно-технических публикациях [1–17].

3. Постановка задачи и ее решение. Учитывая несомненные преимущества уравнений состояния [2, 3], они были включены в процедуру формирования конечно-элементной модели деформационного расчета коротких толсто-стенный незамкнутых цилиндрических оболочек. Для этой цели были применены объемные десятиузловые изопараметрические конечные элементы в форме тетраэдра с тремя степенями свободы в узле. Чтобы получить удовлетворительные результаты при расчете произвольного объемного тела с помощью полученной матрицы жесткости для тетраэдра с четырьмя узловыми точками, требуется достаточно большое количество конечных элементов, так как напряжения и деформации внутри объема элемента постоянны, а следовательно, при переходе от элемента к элементу они будут изменяться скачкообразно и претерпевать разрывы. Более естественно предположить о линейном характере изменения напряжений и деформаций внутри объема тетраэдра, что в свою очередь требует задания функций перемещений по квадратичному закону.

Это последнее обстоятельство влечет за собой необходимость задания дополнительной информации о геометрии тетраэдра. Проще всего для тетраэдра, имеющего четыре узловые точки, ввести в рассмотрение еще шесть узловых

точек, расположенных посередине длины каждого из шести его ребер (рис. 1). В результате получим десять узловых точек, что приведет к увеличению числа степеней свободы элемента до 30. Вид элементов второго порядка представлен на рис. 1.

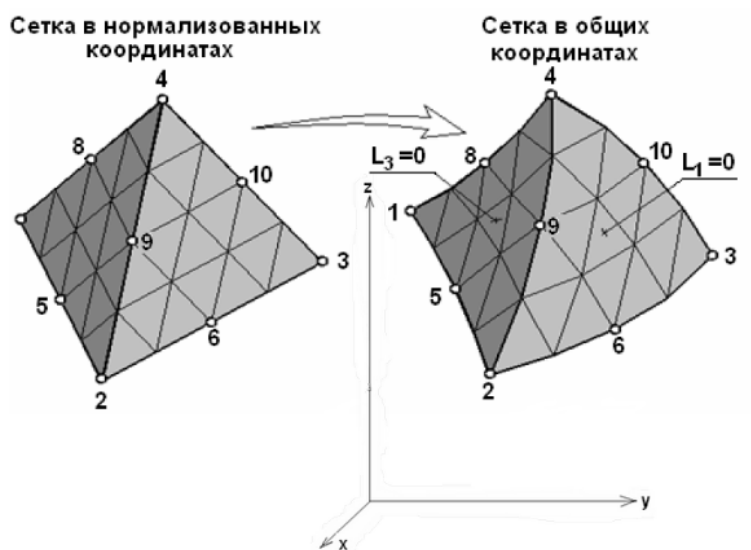


Рис. 1. Конечный элемент в виде тетраэдра второго порядка

Дальнейшую процедуру вычисления матрицы жесткости удобнее производить, используя естественные объемные координаты тетраэдра L_i . Координата L_i соответствует отношению расстояния от точки A внутри тетраэдра до плоскости, противоположной узлу i , к расстоянию от противоположащего узла до той же плоскости, например, $L_1 = n_1/h_2$. Кроме того, L_i может быть интерпретировано как отношение объема подэлемента A_{234} к объему всего элемента V_{1234} , т. е. $L_1 = V_1/V$, или в общем случае:

$$L_i = V_i/V. \quad (3)$$

Связь между декартовыми координатами (x, y, z) и объемными координатами (L_1, L_2, L_3, L_4) записывается так:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Из первой строки выражения (4) следует, что $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$. Обращая матрицу, входящую в (4), получаем связь объемных координат и декартовых:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i – определяются следующими равенствами (6) с круговой перестановкой индексов.

$$\begin{aligned} a_2 &= \det \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}; & b_2 &= -\det \begin{vmatrix} 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \\ c_2 &= -\det \begin{vmatrix} x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \\ x_1 & 1 & z_1 \end{vmatrix}; & d_2 &= -\det \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Основным преимуществом объемных координат является простота и удобство вычисления интегралов по объему тетраэдра. Перемещения представимы в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{1}{6V} \{ (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)u_1 + (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)u_2 + \\ &+ (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)u_3 + (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)u_4 \}. \end{aligned}$$

С помощью объемных координат L_i записывается связь между $\{U\}$ и $\{q\}$:

$$\{U\} = [C] \{q\}, \quad (7)$$

где

$$[A] = [\{\Phi\}^T \{\Phi\}^T \{\Phi\}^T], \quad \{\Phi\} = \{L_1 L_2 L_3 L_4\} \quad (8)$$

Выражение для компоненты перемещения $u(x, y, z)$ тетраэдра с десятью узловыми точками можно принять в виде:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z + \alpha_5xy + \alpha_6xz + \alpha_7yz + \alpha_8x^2 + \alpha_9y^2 + \alpha_{10}z^2. \quad (9)$$

Выражения для v и w могут быть выписаны по аналогии с полиномом (9).

Тридцать произвольных параметров в зависимостях для u, v, w могут быть выражены через соответствующие компоненты перемещений узловых точек аналогично (7):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \{\psi\}^T & 0 & 0 \\ 0 & \{\psi\}^T & 0 \\ 0 & 0 & \{\psi\}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{u_{yz}\} \\ \{v_{yz}\} \\ \{w_{yz}\} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где векторы $\{\psi\}$ и $\{u_{yz}\}$ размерами 1×10 таковы:

$$\begin{aligned} \{\psi\} &= \{L_1, L_2, L_3, L_4, 4L_1L_4, 4L_2L_4, 4L_3L_4, 4L_1L_2, 4L_2L_3, 4L_3L_1\}, \\ \{u_{yz}\} &= \{u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_9u_{10}\}. \end{aligned}$$

Аналогично запишутся векторы $\{u_{yz}\}$ и $\{w_{yz}\}$.

Вектор деформаций $\{\varepsilon\}$ через обобщенные узловые координаты 10 точек выражается так:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [d] & 0 & 0 \\ 0 & [e] & 0 \\ 0 & 0 & [f] \\ [e] & [d] & 0 \\ 0 & [f] & [e] \\ [f] & 0 & [d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{yz} \\ v_{yz} \\ w_{yz} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Здесь:

$$[d] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \frac{1}{6V} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 4(L_1\alpha_4 + L_4\alpha_1), 4(L_2\alpha_4 + L_4\alpha_2), 4(L_3\alpha_4 + L_4\alpha_3), 4(L_1\alpha_2 + L_2\alpha_1), 4(L_2\alpha_3 + L_3\alpha_2), 4(L_3\alpha_1 + L_1\alpha_3)]. \quad (12)$$

Векторы $[e]$ и $[f]$ записываются аналогично (12) с заменой α_i соответственно на b_i и c_i .

Так как все компоненты деформаций изменяются линейно внутри объема тетраэдра, целесообразно выразить их путем линейной интерполяции через функции от узловых деформаций, которые могут быть вычислены через координаты четырех основных узлов тетраэдра с помощью выражения (11). Так, например, узловые деформации $\{\varepsilon_x\}_{yz}$ из первой строки выражения (11) запишутся в форме:

$$\{\varepsilon_x\}_{yz} = [N] \{u_{yz}\}, \quad (13)$$

где $\{\varepsilon_x\}_{yz} = \{\varepsilon_{x_1}\varepsilon_{x_2}\varepsilon_{x_3}\varepsilon_{x_4}\}$ -линейные деформации по оси x в четырех основных узловых точках.

Матрица $[N]$ вычисляется путем последовательной подстановки в (12) координат этих узлов:

$$[N] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 4a_4 & 0 & 0 & 4a_2 & 0 & 4a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 4a_4 & 0 & 4a_1 & 4a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 4a_4 & 0 & 4a_2 & 4a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 4a_1 & 4a_2 & 4a_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

С помощью зависимостей (13) и (14) можно выразить узловые деформации через узловые перемещения:

$$\{\varepsilon\}_{yz} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_x\}_{yz} \\ \{\varepsilon_y\}_{yz} \\ \{\varepsilon_z\}_{yz} \\ \{\gamma_{xy}\}_{yz} \\ \{\gamma_{yz}\}_{yz} \\ \{\gamma_{xz}\}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [M] & 0 \\ 0 & 0 & [L] \\ [M] & [N] & 0 \\ 0 & [L] & [M] \\ [L] & 0 & [N] \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где матрицы $[M]$ и $[L]$ вычисляются аналогично матрице $[N]$ путем последовательной подстановки в $[e]$ и $[f]$ координат основных четырех узлов, а $[0]$ есть нулевая матрица размером (4×10) .

Выражение (15) перепишем в матричной форме:

$$\{\varepsilon\}_{yz} = [S] \{q\}, \quad (16)$$

вид матрицы $[S]$ порядка (24×30) и вектора $\{q\}$ порядка (30×1) ясен из выражения (15).

Используя теперь линейную интерполяцию (7), примененную нами выше при аппроксимации перемещений $\{U\}$ через узловые перемещения $\{q\}$, для аппроксимации деформаций $\{\varepsilon\}$ через узловые деформации $\{\varepsilon_{yz}\}$ можем записать:

$$\{\varepsilon\} = [\Phi_\varepsilon] \{\varepsilon\}_{yz}, \quad (17)$$

где

$$[\Phi_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \{\Phi\}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{\Phi\}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\Phi\}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\Phi\}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Phi\}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{\Phi\}^T \end{bmatrix}, \quad (18)$$

а $\{\Phi\}$ определяется согласно (8).

Подставляя $\{\varepsilon\}_{yz}$ из выражения (16) в (17), получаем:

$$\{\varepsilon\} = [\Phi_\varepsilon] [S] \{q\} \quad (19)$$

Матрица связи между напряжениями и деформациями с учетом выражений (1), (2):

$$[E_\varepsilon] = [C_{ijk}]^{-1} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (20)$$

и принимая во внимание (19), запишем окончательную матрицу жесткости порядка (30×30) для тетраэдра с 10-ю узловыми точками:

$$[K] = \int_V [S]^T [\Phi_\varepsilon]^T [E_\varepsilon] [\Phi_\varepsilon] [S] dV. \quad (21)$$

Так как матрица $[S]$ не зависит от параметров интегрирования, то её можно вынести за знак интеграла:

$$[K] = [S]^T \left(\int_V [\Phi_\varepsilon]^T [E_\varepsilon] [\Phi_\varepsilon] dV \right) [S]. \quad (22)$$

Интегрирование по объему V выражения в круглых скобках (22) приводит к простой зависимости для матрицы жесткости в замкнутом виде:

$$[K] = [S]^T [D] [S], \quad (23)$$

где

$$[D] = \begin{bmatrix} E_{\varepsilon 1,1} [r] & E_{\varepsilon 1,2} [r] & E_{\varepsilon 1,3} [r] & 0 & 0 & 0 \\ E_{\varepsilon 2,1} [r] & E_{\varepsilon 2,2} [r] & E_{\varepsilon 2,3} [r] & 0 & 0 & 0 \\ E_{\varepsilon 3,1} [r] & E_{\varepsilon 3,2} [r] & E_{\varepsilon 3,3} [r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{\varepsilon 4,4} [r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\varepsilon 5,5} [r] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\varepsilon 6,6} [r] \end{bmatrix}, \quad (24)$$

здесь $[r]$ – матрица числовых коэффициентов, получаемая в результате интегрирования:

$$[r] = \frac{V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Таким образом, была сформулирована 3-D конечно-элементная модель объемного тела. При этом материал деформируемого тела ортотропен и чувствителен к виду напряженного состояния. Расчетная схема и разбивка на конечные элементы тела жестко защемленной оболочки по опорным образующим приведены на рис. 2 и 3. График сходимости КЭ модели приведен на рис. 4.

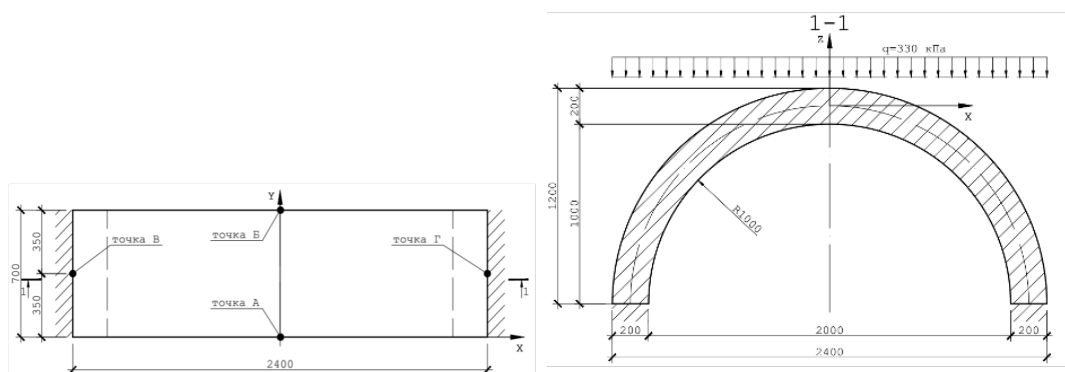


Рис. 2. Расчетная схема оболочки

Расчеты по разработанной КЭ модели сопоставлялись с результатами, полученными с использованием наиболее известных теорий деформирования ортотропных материалов, учитывающих влияние вида напряженного состояния на параметры тензора податливостей R.M.Jones – D.A.R.Nelson [10, 11, 13, 14] и С.А.Амбарцумяна [18], а также – с данными, получаемыми по классической теории. В качестве материала был принят графитоккомпозит АТJ-S, механические

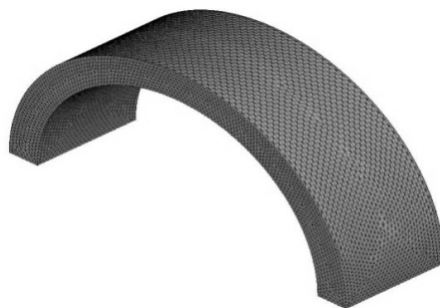


Рис. 3. Схема разбивки оболочки на КЭ

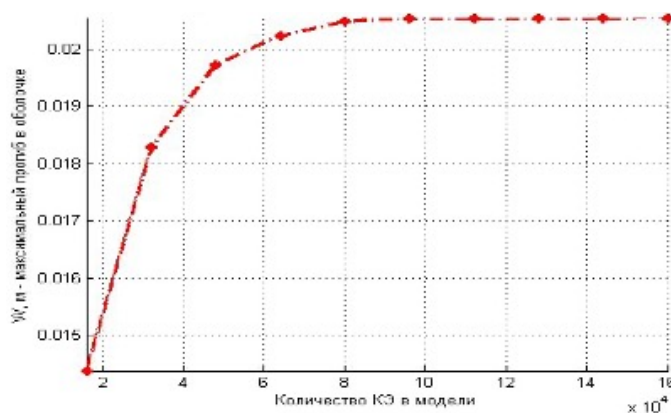


Рис. 4. Сходимость КЭ модели

характеристики которого заимствованы из работы [10–14]. Как результат проведенных расчетов была получена полная информация о распределении параметров НДС оболочки. Здесь приведем лишь отдельные характерные картины распределения этих параметров, которые представлены на рис. 5 – 10.

4. Результаты решения краевой задачи и их анализ. Анализируя представленные на рис. 5–10 результаты следует отметить, что классический подход к расчету коротких ортотропных цилиндрических оболочек не учитывающий деформационную анизотропию графитокompозита ATJ-S может привести к погрешностям в напряжениях от 58% до 78%. Аналогичные погрешности, возникающие при определении перемещений поверхностей оболочки, достигают 35%. Результаты расчета оболочки по моделям R.M.Jones – D.A.R.Nelson

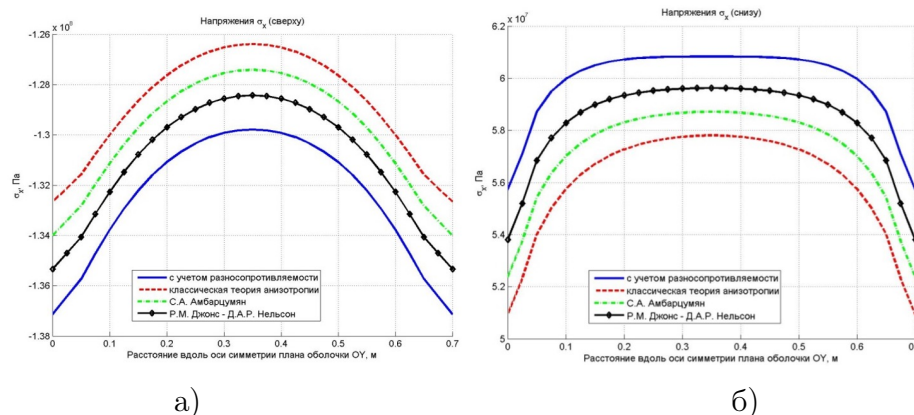


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений σ_x вдоль линии А-Б, Па: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

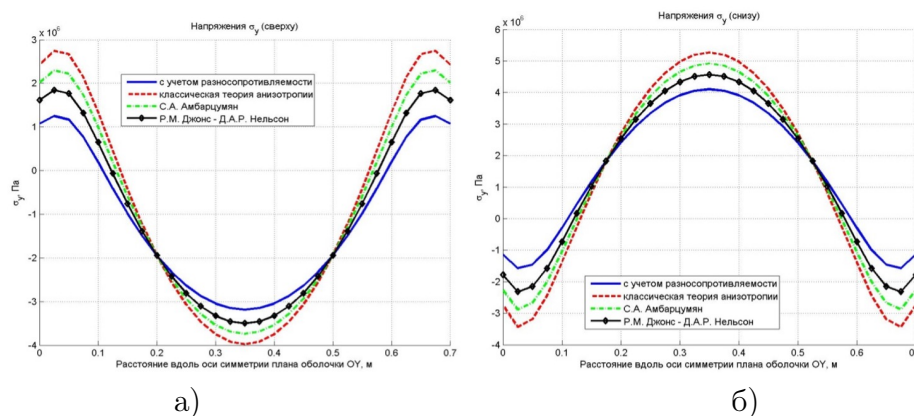


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений σ_y вдоль линии А-Б, Па: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

[10, 11, 13, 14] и С.А.Амбарцумяна [18] отличаются от данных классической теории на меньшие величины до 16–36% и до 18%. Это можно объяснить не корректным учетом влияния сложного напряженного состояния на параметры тензора податливостей, который заложен в моделях [10, 11, 13, 14] и [18] по сравнению с подходом, основанным на нормированном тензорном пространстве напряжений [1–5].

5. Выводы. В заключении отметим, что при проектировании оболочечных конструкций, имеющих цилиндрическое очертание и выполненных из композитных материалов, необходимо более тщательно учитывать их специфические механические свойства, а также уделять особое внимание выбору расчетных моделей и определяющих соотношений.

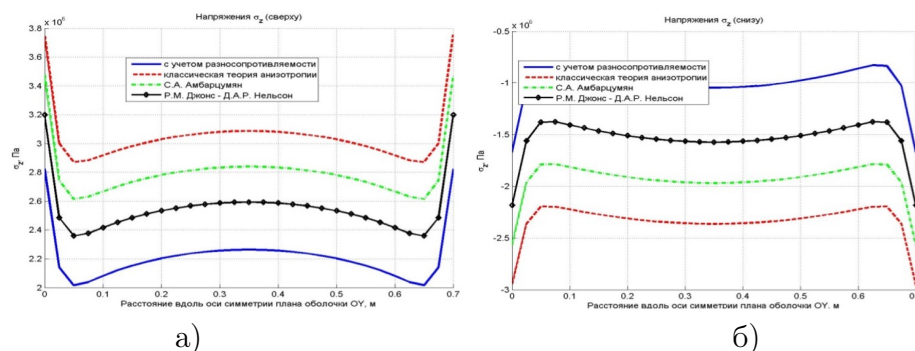


Рис. 7. Распределение нормальных напряжений σ_z вдоль линии А-В, Па: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

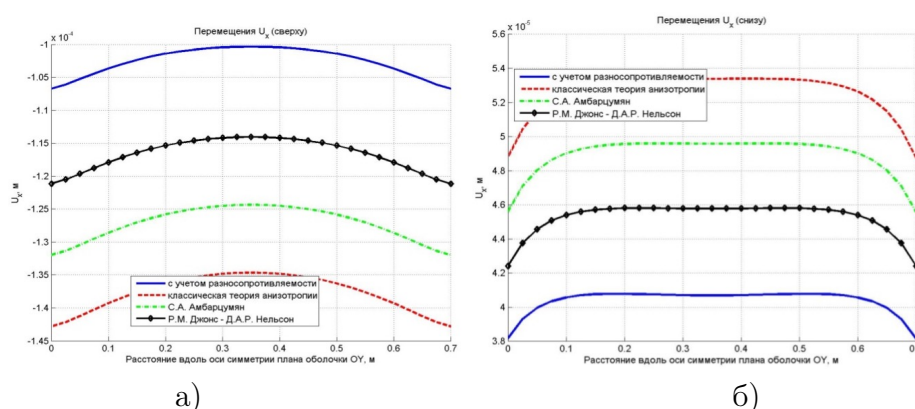


Рис. 8. Распределение перемещений U_x вдоль линии А-В, м: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Вклад авторов. Все авторы внесли существенный вклад в разработку концепции, проведение исследования и подготовку статьи, прочли и одобрили финальную версию перед публикацией.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Источник финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

ADDITIONAL INFORMATION

Authors' contribution. All authors have made a significant contribution to the development of the concept, research and preparation of the article, read and approved the final version before publication.

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests.

Funding. This study was not supported by any external sources of funding.

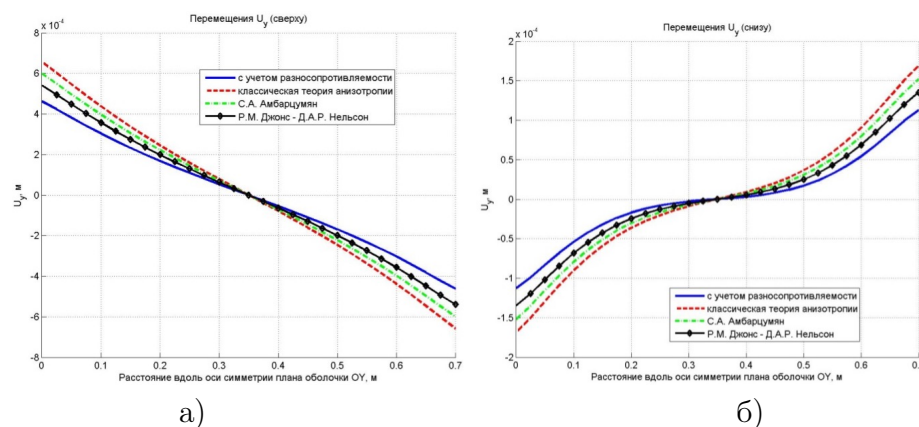


Рис. 9. Распределение перемещений U_Y вдоль линии А-Б, м: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

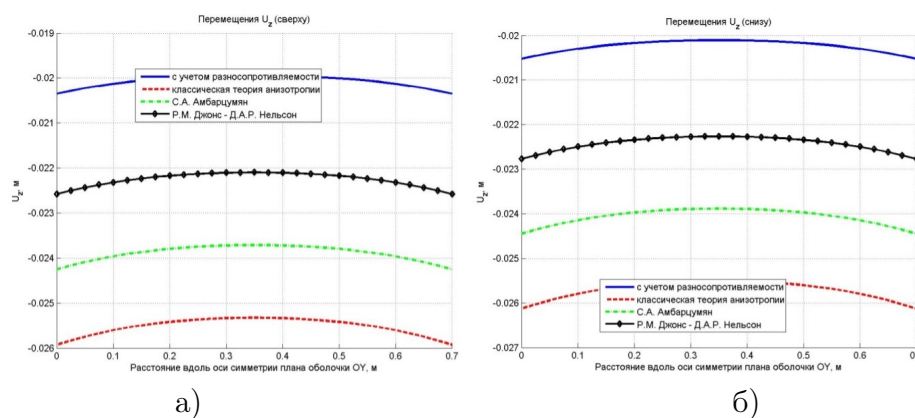


Рис. 10. Распределение перемещений U_Z вдоль линии А-Б, м: в верхних волокнах (а); в нижних волокнах (б)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трещев А.А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2017. № 4-1 (324). С. 71–74.
- [2] Трещев А.А., Завьялова Ю.А., Лапшина М.А. Вариант модели деформирования ортотропных композитных материалов // *Эксперт: Теория и практика*. 2020. № 3(6). С. 62–68.
- [3] Defining equations of deformation of materials with double anisotropy / A.A. Treschev [et al.] // *Chebyshevskii sbornik*. 2021. Vol. 22, no. 4. P. 369–383.
- [4] Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной и наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения: монография. М.; Тула : РААСН; ТулГУ, 2016.
- [5] Трещев А.А. Теория деформирования и прочности разнотропных материалов: учебник. Тула : ТулГУ, 2020.

- [6] Каудерер Г. Нелинейная механика. Москва : Изд-во иностр. лит., 1961.
- [7] Турсунов Б.С. О свойствах потенциала напряжений упругих тел // ПММ. 1970. Т. 34, № 1. С. 15–22.
- [8] Schmueser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells // AIAA Journal. 1983. Vol. 21, no. 12. P. 1742–1747.
- [9] Reddy L.N., Bert C.W. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials // ZAMM. 1982. Vol. 62, no. 6. P. 213–219.
- [10] Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Orthotropic Materials // AIAA Journal. 1977. Vol. 15, no. 10. P. 1436–1443.
- [11] Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
- [12] Розе А.В., Жигун И.Г., Душин М.Н. Трехармированные тканые материалы // Механика полимеров. 1970. № 3. С. 471–476.
- [13] Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for nonlinear deformation of graphite // AIAA Journal. 1976. Vol. 14, no. 10. P. 1427–1435.
- [14] Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. 1977. Vol. 15, no. 1. P. 16–25.
- [15] Золочевский А.А., Кузнецов В.Н. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении // Динамика и прочность тяжелых машин. 1989. С. 84–92.
- [16] Трещев А.А., Теличко В.Г. Теория деформирования пространственных железобетонных конструкций: монография. М.; Тула : РААСН; ТулГУ, 2019.
- [17] Конечно-элементная модель расчета пространственных конструкций из материалов с усложненными свойствами / А.А. Трещев [и др.] // Известия ТулГУ. Технические науки. 2012. № 10. С. 106–114.
- [18] Амбарцумян С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 51–61.

REFERENCES

- [1] Treshchev A.A. Potential dependence between deformations and stresses for orthotropic physically nonlinear materials // Fundamental and applied problems of engineering and technology. 2017. no. 4-1 (324). P. 71–74.
- [2] Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A. Variant of the deformation model of orthotropic composite materials // Expert: Theory and Practice. 2020. no. 3(6). P. 62–68.
- [3] Defining equations of deformation of materials with double anisotropy / A.A. Treshchev [et al.] // Chebyshevskii sbornik. 2021. Vol. 22, no. 4. P. 369–383.
- [4] Treshchev A.A. Theory of deformation and strength of materials with initial and induced sensitivity to the type of stress state. Defining relationships. Moscow; Tula : RAASN; TulSU, 2016.
- [5] Treshchev A.A. Theory of deformation and strength of highly resistant materials. Tula : TulSU, 2020.
- [6] Kauderer G. Nonlinear mechanics. Moscow : Publishing House of Foreign Literature, 1961.
- [7] Tursunov B.S. On the properties of the stress potential of elastic bodies // PMM. 1970. Vol. 34, no. 1. P. 15–22.
- [8] Schmueser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells // AIAA Journal. 1983. Vol. 21, no. 12. P. 1742–1747.
- [9] Reddy L.N., Bert C.W. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials // ZAMM. 1982. Vol. 62, no. 6. P. 213–219.
- [10] Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Orthotropic Materials // AIAA Journal. 1977. Vol. 15, no. 10. P. 1436–1443.

-
- [11] Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
 - [12] Rose A.V., Zhigun I.G., Dushin M.N. Three-reinforced woven materials // Mechanics of polymers. 1970. no. 3. P. 471–476.
 - [13] Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite // AIAA Journal. 1976. Vol. 14, no. 10. P. 1427–1435.
 - [14] Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. 1977. Vol. 15, no. 1. P. 16–25.
 - [15] Zolochovsky A.A., Kuznetsov V.N. Calculation of anisotropic shells from multi-modular materials under non-axisymmetric loading // Dynamics and strength of heavy machines. 1989. P. 84–92.
 - [16] Treshchev A.A., Telichko V.G. Theory of deformation of spatial reinforced concrete structures. Moscow; Tula : RAASN; TulSU, 2019.
 - [17] A finite element model for calculating spatial structures made of materials with complicated properties / A.A. Treshchev [et al.] // Izvestiya TulSU. Technical sciences. 2012. no. 10. P. 106–114.
 - [18] Ambartsumyan S.A. Basic equations and relations of the multi-module theory of elasticity of an anisotropic body // Izvestiya AN SSSR. MTT. 1969. no. 3. P. 51–61.

УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

Алексеев Андрей Алексеевич (alexeew@bk.ru) – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь, Россия.

Богданов Андрей Николаевич (bogdanov@imec.msu.ru) – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории газодинамики взрыва и реагирующих систем Научно-исследовательского института механики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Буренин Анатолий Александрович (aab@imim.ru) – член-корреспондент РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Власов Александр Николаевич (bah1955@yandex.ru) – доктор технических наук, директор Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН), г. Москва.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (georgiev@mech.math.msu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Иванов Дмитрий Валерьевич (ivanovdv.84@ya.ru) – профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Игумнов Леонид Александрович (igumnov@mech.unn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань, Россия.

Келлер Илья Эрнстович (kie@icmm.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия.

Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru) – академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Коссович Леонид Юрьевич (president@sgu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия.

Лисовенко Дмитрий Сергеевич (dslisov@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su) – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Максимова Людмила Анатольевна (maximova_ng@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Матвеев Сергей Владимирович (sergio2100@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Матченко Николай Михайлович (ekc_05@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Минаева Надежда Витальевна (nminaeva@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Миронов Борис Гурьевич (mbg.chspu@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич (evmurashkin@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Немировский Юрий Владимирович (nemiryury@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Непершин Ростислав Иванович (nepershin_ri@rambler.ru) – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет "Станкин", г. Москва, Россия.

Орлов Виктор Николаевич (orlowvn@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич (radayev@ipmnet.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия.

Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия.

Спыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru) – член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Чернышов Александр Данилович (post@vgta.vrn.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Белоруссия.

Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал "Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния" издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://limit21.ru>

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статья должна быть отправлена вместе со всеми документами указанными в правилах для авторов на сайте журнала в двух вариантах: в электронном на адрес журнала predel21@mail.ru и бумажном на адрес редакции. Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем – до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст,

который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **библиографические списки на русском и английском языках**; **сведения о всех авторах на русском и английском языках**: должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2e с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещены на сайте издания. К статье должны быть приложены два файла с библиографическими списками на русском и английском языках подготовленными в системе разметки BibTeX. Рисунки представляются отдельно в формате pdf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с действующим ГОСТ.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Алексеев А. А., Гулътяев В. И., Субботин С. Л.</i> Памяти Владимира Георгиевича Зубчанинова	7
Зубчанинов В. Г. О моих учителях	58
<i>Бондарь В. С.</i> Построение варианта теории упругопластических процессов на основе теории течения при комбинированном упрочнении	81
<i>Глаголев В. В., Глаголев Л. В., Лавит И. М., Лутхов А. И., Маркин А. А.</i> О нахождении аддитивных слагаемых J-интеграла на примере соединения внахлест упругопластическим адгезионным слоем	92
<i>Гулътяев В. И., Алексеев А. А., Булгаков А. Н.</i> Эксперименты на сложное деформирование конструкционных материалов и их аппроксимация по соотношениям В.Г. Зубчанинова	111
<i>Евтихов Д. О., Савостьянова И. Л., Сенашов С. И., Черепанова О. Н.</i> Кручение упругопластических стержней прокатного профиля, армированных упругими волокнами	125
<i>Завойчинская Э. Б., Лавриков Г. Е.</i> К анализу предельных состояний материалов при нерегулярном нагружении с несимметричными циклами	139
<i>Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.</i> Системы целых рациональных гемитропных инвариантов в механике микрополярного континуума	152
<i>Муртазин И. Р., Семенов А. С., Емельянов А. В.</i> Экспериментальное исследование и микроструктурное моделирование упругопластического деформирования при многосвязном пассивном нагружении никелевых трубчатых образцов	171
<i>Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д.</i> Исследование процессов деформирования и потери устойчивости круговой пластины при сжатии	194
<i>Субботин С. Л., Алексеев А. А.</i> Особенности численного интегрирования уравнений гипотезы компланарности в пространстве напряжений	203
<i>Субботин С. Л., Алексеев А. А., Гулътяев В. И.</i> Методика вычисления функционалов теории упругопластических процессов по результатам экспериментов для плоских траекторий деформирования	214
<i>Трещев А. А., Бесстрашнов Д. О.</i> 3-D модель деформирования ортотропной незамкнутой оболочки из материала с несовершенной упругостью	231
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА	246
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	249

**ВЕСТНИК
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
2025. № 3 (65)**

Отв. за выпуск: А. А. Алексеев

Технические редакторы: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Компьютерная верстка: С. В. Тихонов, Е. В. Мурашкин, С. В. Матвеев

Макет: С. В. Тихонов

Подписано в печать 18.12.2025. Выход в свет 22.12.2025.
Формат 70х100/8. Бумага писчая.
Печать оперативная. Typeset by L^AT_EX 2_ε. Усл. печ. л. 31,5.
Тираж 500 экз. Цена свободная. Заказ № 565

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

Отпечатано в редакционно-издательском центре Чувашского государственного
педагогического университета им. И. Я. Яковлева
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38