

ББК 95.4; 22.251  
Ч-823

Подписной индекс в каталоге Роспечать: 33285  
ISSN: 2073-5499

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2010. № 2(8). Ч. 1**

**Учредитель:** ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

**Главный редактор:** Г. Н. Григорьев

**ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ И  
НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

**Главный редактор выпуска:** Д. М. Климов

**Заместитель главного редактора выпуска:** Ю. Н. Радаев

**Ответственный секретарь выпуска:** В. А. Ковалев

**Редакционная коллегия:** Амензаде Р. Ю., Баженов В. Г., Буренин А. А., Варданян С. В., Глаголев В. В., Демьянов Ю. А., Зубчанинов В. Г., Ивлев Д. Д., Каюмов Р. А., Ломакин Е. В., Максимова Л. А., Маркин А. А., Матченко Н. М., Манжиров А. В., Миронов Б. Г., Мирсалимов В. М., Михайлов Г. К., Немировский Ю. В., Непершин Р. И., Победря Б. Е., Ревуженко А. Ф., Редкозубов С. А., Сенашов С. И., Спорыхин А. Н., Тамуж В. П., Тихонов С. В., Трещев А. А., Хромов А. И., Чигарев А. В., Шашкин А. И., Шуканов А. А.

**Адрес редакции:** 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

**Тел.:** (8352) 62-03-12; (8352) 62-02-83, (8352) 62-16-19

**Email:** predel21@mail.ru

**WWW:** <http://predel.chgpu.edu.ru>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36234 от 15.05.2009 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 2010

*К 80-летию*

**Ивлева Дюиса Даниловича,**

*доктора физико-математических наук, профессора,*

*заслуженного деятеля науки Российской Федерации*



Д. М. Климов, В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев

## К 80-ЛЕТИЮ Д.Д. ИВЛЕВА

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*

*Московский городской университет управления Правительства Москвы*

*Самарский государственный университет*

6 сентября 2010 г. исполняется 80 лет Дюису Даниловичу Ивлеву — доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации. Д.Д. Ивлеву принадлежит свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе семь монографий. Его вклад в математическую теорию пластичности и механику деформируемого твердого тела с полным правом можно назвать выдающимся. Д.Д. Ивлев — основатель и руководитель научной школы механики идеально пластических тел и конструкций, базирующейся в университетских и академических центрах Воронежа, Самары, Владивостока, Чебоксар. Огромная часть научной и педагогической деятельности Д.Д. Ивлева связана с подготовкой кадров высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела. В настоящее время в рамках возглавляемой им научной школы работает свыше 20 докторов и более 100 кандидатов наук. Главное в творческой деятельности Д.Д. Ивлева — бескомпромиссное служение научной истине и неустанный поиск на самых передовых рубежах современной науки. 55 лет его научной и общественной деятельности, выдающиеся научные достижения позволяют причислить Д.Д. Ивлева к категории мыслителей, являющихся национальным достоянием России.

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в г. Чебоксары в семье преподавателя Чувашского Педагогического института Ивлева Данила Осиповича. В августе 1941 года Ивлев Д. О. был призван в ряды Красной Армии, среди его правительственных наград медаль “За взятие Берлина”.

После окончания средней школы в 1948 г. Д.Д. Ивлев покидает Чебоксары и поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который заканчивает в 1953 г. В 1956 г. после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ он успешно защитил диссертацию “Приближенное решение упруго-пластических задач методом малого параметра” в совете при МГУ (оппонентами по этой работе выступили В.В. Соколовский и Г.С. Шапиро; председательствовал на защите Ю.Н. Работнов) и получил ученую степень кандидата физико-математических наук. С февраля 1957 г. по октябрь 1958 г. он работает в должности младшего научного сотрудника Института механики АН СССР. В 1959 г., после защиты диссертационной работы “Пространственная задача теории идеальной пластичности”, которая также представлялась в совет при МГУ, Д.Д. Ивлев получает

степень доктора физико-математических наук. Оппонентами по докторской диссертационной работе выступили Л.А. Галин, Л.М. Качанов и Г.С. Шапиро, председательствовал на защите А. Ю. Ишлинский.

В октябре 1959 г. Д.Д. Ивлев, будучи 29-летним доктором физико-математических наук и уже достаточно широко известным ученым в области математической теории пластичности по приглашению ректора Воронежского университета Б.И. Михантьева приезжает в г. Воронеж. В декабре 1959 г. Д.Д. Ивлев возглавил созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок активизировать научную и педагогическую работу. Лекции и научные семинары под руководством профессора Д.Д. Ивлева отличались способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. В 60-е годы в Воронежском государственном университете на математико-механическом факультете Д.Д. Ивлев работал вместе с профессорами М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, В.И. Соболевым. Творческое взаимодействие механиков и математиков Воронежского университета было заложено именно в те годы. Созданная Д.Д. Ивлевым воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые в те годы научные исследования были связаны с рядом фундаментальных и прикладных проблемам механики сплошных деформируемых сред. Работы Д.Д. Ивлева и его учеников постоянно были в фокусе внимания ученых как нашей страны, так и за ее пределами; их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным и ощущается до сих пор. В 1961 г. Д.Д. Ивлеву было присвоено ученое звание профессора. Под руководством профессора Д.Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР.

Параллельно с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в ВГУ профессор Д.Д. Ивлев в течение ряда лет заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, куда его пригласил ректор В.С. Постников. В эти же годы Д.Д. Ивлев по предложению ректора Л.Н. Талова читает лекции в Воронежском педагогическом институте. Следует отметить, что уже в годы работы в Воронежском университете началось сотрудничество Д.Д. Ивлева с одним из своих аспирантов — Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды — научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Одним из талантливых учеников Д.Д. Ивлева тех лет также был В.В. Дудукаленко. Г.И. Быковцев стал первым деканом нового факультета — прикладной математики и механики, возглавил созданную им кафедру технической кибернетики и теории автоматического регулирования. Через несколько лет, после известных событий, связанных с абсолютно несправедливыми и неприемлемыми обвинениями, выдвинутыми против его научной и педагогической деятельности,<sup>1</sup> Геннадий Иванович возглавил кафедру механики деформируемого твердого тела в Куйбышевском (Самарском) государственном университете. С избранными научными статьями Г.И. Быковцева заинтересованный читатель может познакомиться по книге: Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сб. ст. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

<sup>1</sup>Оценка этих событий имеется в статье: Яровой Г.П., Радаев Ю.Н. К 70-летию Г.И. Быковцева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №9/1(59). 2007. С. 9-30.

В 1966 г. Д.Д. Ивлев возвращается в Москву, где сначала работает профессором МВТУ им. Н.Э. Баумана (1966–1970 гг.) и заведует кафедрой высшей математики, а затем (1971–1982 гг.) — заведующим кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном политехническом институте (сейчас Московский государственный открытый университет). Вместе со своими учениками профессорами Г.И. Быковцевым и И.А. Бережным параллельно он активно участвует в создании научной школы механики деформируемого твердого тела в г. Куйбышеве.

В 1982 г. Д.Д. Ивлев приезжает на родину в г. Чебоксары, где в период с 1982 г. по 1993 г. работает сначала заведующим кафедрой математического анализа, а затем — заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела в Чувашском государственном университете им. И.Н. Ульянова. В 1985–1993 гг. он является деканом физико-математического факультета. В 1993 г. Д.Д. Ивлев переходит на работу в Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, где в настоящее время заведует кафедрой математического анализа.

Работы Д.Д. Ивлева посвящены механике деформируемого тела, в основном математической теории пластичности.<sup>2</sup> Ряд результатов Д.Д. Ивлева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела. Далее нам представляется уместным дать необходимые сведения о развитии математической теории пластичности и ее современном состоянии.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (В. Saint-Venant, 1870 г.) [1], [2] на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска (Н. Tresca). Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения  $k$ . Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе “О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре” [3], представленной во Французскую Академию наук в 1773 г. В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по некоторой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скальванию по этой плоскости.

Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния и поэтому его теория

---

<sup>2</sup>Среди них семь монографий: “Теория идеальной пластичности” (1966); “Теория упрочняющегося пластического тела” (в соавторстве с Г.И. Быковцевым, 1971); “Метод возмущений в теории упруго-пластического тела” (в соавторстве с Л.В. Ершовым, 1978); “Теория пластичности” (в соавторстве с Г.И. Быковцевым, 1998); “Математическая теория пластичности” (в соавторстве с А.Ю. Ишлинским, 2001); фундаментальная двухтомная монография “Механика пластических сред” (2001, 2002); “Предельное состояние деформируемых тел и горных пород” (в соавторстве с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным, Ю.Н. Радаевым, С.И. Сенашевым, Е.И. Шемякиным, 2008).

нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (M. Levy, 1871 г.) [4]. Статьи Сен-Венана и Леви появились одна за другой в *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона—Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций.<sup>3</sup> Теория Леви, поскольку она основана на “неассоциированном” законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга.<sup>4</sup>

Соотношения Сен-Венана для плоской пластической деформации — статически определяемая система уравнений гиперболического типа, что и позволило позднее развить теорию полей скольжения, связываемую обычно с именами Генки (H. Hencky, 1923 г.) и Гейрингер (H. Geiringer, 1930 г.). Математический аппарат, соответствующий соотношениями Сен-Венана для плоской задачи, оказался, таким образом, вполне адекватным экспериментальным и теоретическим представлениям о течении идеально пластического тела. Заметим, что уравнения теории плоского напряженного состояния (в отличие от случая плоской деформации) не могут быть получены как частный случай пространственных уравнений.

Уравнения пространственной задачи математической теории пластичности длительное время оставались неизученными. И в настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния. Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что *для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения*. “Задачи трехмерного пластического течения трудны и мало изучены”. Так сформулировано отношение к вопросам пространственной задачи математической теории пластичности авторов известной обзорной статьи: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности / В кн.: *Механика в СССР за 50 лет*. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 79-118.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви—Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболически. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории

<sup>3</sup>В настоящее время закон течения, устанавливающий пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций, называют законом Леви—Мизеса.

<sup>4</sup>Об этом ярко свидетельствуют работы: Михлин С.Г. Основные уравнения математической теории пластичности. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. 71 с.; Христианович С.А., Михлин С.Г., Девисон Б.Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды: Неустановившееся движение в каналах и реках. Математическая теория пластичности. Движение грунтовых вод / Изд-во АН СССР. Математический институт им. В.А. Стеклова; Под ред. Н.Е. Кочина. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. 407 с. (См. ч. II: С.Г. Михлин. Математическая теория пластичности. С. 157-218. Здесь на с. 163 приводятся пространственные уравнения Леви.)

идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [5], с. 144-146). Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптически (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви—Мизеса, действительные характеристики отсутствуют.<sup>5</sup> Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования (см. [6]– [11]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения.

Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Кулона—Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние, и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов.<sup>6</sup> Фигуры

<sup>5</sup>Как представляется, задача поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона—Треска, для огромного большинства пространственных состояний уравнения теории пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Не спасает положения учет упругих деформаций и различных гипотез упрочнения. Все равно для абсолютного большинства пространственных состояний соответствующие уравнения эллиптически. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругопластических деформаций, и для редко применяемых в настоящее время “неассоциированных” законов пластического течения.

<sup>6</sup>Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д.К. Чернов оставался вне поля зрения официальной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Жизнь, научное творчество и практическая инженерная деятельность Д.К. Чернова подробно освещены в книге: Д.К. Чернов и наука о металлах. (Под ред. акад. Н.Т. Гудцова.) М., Л.: Металлургиздат, 1950. 564 с. В это издание включены основные научные труды этого выдающегося

скольжения, которые наблюдались Д.К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся в известной монографии: Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1952. 556 с. (см. с. 103). Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. В начальный период развития теории пластичности при изучении пластического течения широко использовались представления о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия.<sup>7</sup> В предисловии мы уже говорили о соответствии между изменениями в структуре сильно деформированных металлов и при формации горных пород, отмечаемыми и описываемыми в петрографии. Поэтому теория линий скольжения в руках геологов может служить средством расшифровки процессов образования горных цепей и континентальных плато, восстановления истории движения земной коры (в том числе и ее континентальной части).<sup>8</sup> Таким образом, теория скольжения находит свое подтверждение на двух существенно отличающихся масштабных уровнях.

К настоящему времени уже стало ясно, что предельные состояния твердых тел должны также описываться статически определенными уравнениями гиперболического типа.<sup>9</sup> Теория предельного состояния первоначально развивалась в рамках механики сыпучих сред. Основоположник теории К. Кулон сформулировал (1773 г.) основные положения теории предельного состояния и ввел представление о поверхности сползания, которые были применены для решения ряда важных прикладных задач. Систематическое изложение теории предельного состояния сыпучих сред на основе представления о сетке скольжения было дано В.В. Соколовским в 1942 г. (см.: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 208 с.; третье издание: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 244 с.). Теории предельного состояния и идеальной пластичности, таким образом, имеют общие основы, однако они далеко не тождественны. Теория идеальной пластичности основана на представлении об условии пластичности, которое, вообще говоря, может приводить либо к статически определенным, либо к статически неопределенным состояниям. Теория предельного состояния в качестве своего предмета исследования берет лишь статически определенные состояния, которые могут быть достигнуты, скажем, при пропорциональном возрастании внешних нагрузок. Для предельного состояния все "предыдущие" свойства материала не играют никакой роли, поскольку предельное состояние определяется из замкнутой системы формально статически определенных соотношений, не имеющих ничего общего с допредельным поведением тела.

---

ученого. Его научная биография опубликована также в книге: Гумилевский Л.И. Чернов. (Научн. ред. проф. И.Я. Конфедератов.) М.: Молодая гвардия, 1975. 208 с.

<sup>7</sup>В настоящее время более эффективными являются прямой конечно-разностный численный анализ.

<sup>8</sup>Применение математической теории пластичности и концепции скольжения к задачам геологии и геофизики читатель может найти в монографиях: Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.; Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Изд-во Мир, 1969. 864 с.

<sup>9</sup>См.: Ивлев Д.Д. Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. №5(39). С. 33-41.

Экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Кулона—Треска.<sup>10</sup> Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится, тем более, что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текучести от условия Кулона—Треска. Тем не менее, можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытными данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов до конца не удастся. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т.е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Кулона—Треска. Таким образом, критерий текучести Кулона—Треска, по-видимому, действительно лучше, чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т.е. большего соответствия условия Кулона—Треска физике пластической деформации, высказывались многие авторы.<sup>11</sup>

Итак, формально статически определяемая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности. Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (А. Нааг, Th. von Karman) выдвинули условие “полной пластичности” [13], которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска,<sup>12</sup> и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определяемыми.

В 1923 г. Генки (Н. Hencky) [14] предложил использовать условие полной пластичности Хаара—Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определяемой системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона—Треска исследовались Р. Шилдом (R. T. Shield) [15]

<sup>10</sup>См., например, [?], с. 55, 57; [?], с. 29-34. Обычно при этом указывают на экспериментальные данные А. Надаи (A. Nadai) и Лоде (W. Lode, 1928 г.). Именно в результате выполненных ими в Геттингене при участии Прандтля экспериментов и был сделан вывод о предпочтительности условия пластичности Мизеса. *В опытах Надаи и Лоде окончательно установлено условие пластичности Мизеса, причем показано его преимущество перед условием наибольших касательных напряжений.* (Цит. по: Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. С. 57.) Имеется перевод оригинальной работы Лоде: Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов: Сб. ст.// Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 168-205.

<sup>11</sup>Дискуссия по этому поводу имеется на с. 86, 87 упомянутой выше обзорной статьи А.А. Вакуленко и Л.М. Качанова.

<sup>12</sup>Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Кулона—Треска и соответствует ребру призмы Кулона—Треска. Ясно, что состояние полной пластичности может быть описано также в рамках условия пластичности Мизеса. Однако в этом случае ассоциированный с условием пластичности Мизеса закон течения приводит к неправильно определенной системе кинематических уравнений.

для ребер и граней призмы Кулона—Треска. Осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Кулона—Треска, были построены Р. Шилдом (R.T. Shield) в той же самой работе [15]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [16] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности Хаара—Кармана, доказав статическую определенность и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А.Ю. Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла, полагавшего, что “такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара—Кармана для металлов физически нереальна и она вводит ошибку неизвестной величины” (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 321). Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви—Мизеса определить связанного с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании гипотезы Хаара—Кармана и замене закона течения Леви—Мизеса на *обобщенный* ассоциированный с условием пластичности Кулона—Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара—Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [17], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций,<sup>13</sup> следующие из *обобщенного* ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые, в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи *двух* условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров [22]. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: “Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение  $2k$ . Таким образом для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение.” Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от “неассоциированного” определяющего закона Леви [4] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана

<sup>13</sup>А.Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

[1], [2] на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [18], [19], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара—Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона—Треска) и *обобщенный* ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращение пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в *регулярных* точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T. Koiter) в 1953 г.<sup>14</sup> Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

В работах Д.Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определенными и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска, также гиперболически и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения.<sup>15</sup>

<sup>14</sup>Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface// Quart. Appl. Math. V. 11. №3. 1953. P. 350-354.

<sup>15</sup>Этот результат был получен в работе [20]. Классическое изложение теории пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, имеется в монографии [11], с. 205-246.

Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определимых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности “продиктованы скорее заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса” (см.: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 100). Тем не менее они замечают, что решения, полученные по схеме полной пластичности, могут иметь несомненный интерес, полемизируя при этом с Р. Хиллом, критически оценившим условие полной пластичности Хаара—Кармана как “искусственное и нереальное условие текучести” (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 320, 321). Не вызывает возражений высказываемая ими мысль о том, что ценность того или иного решения пространственной задачи устанавливается возможностью либо построить согласованное кинематически допустимое поле, либо продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. В противном случае вопрос о значимости решения остается открытым. Ясно, что исключительную ценность представляют полные решения, когда удается построить согласованное кинематически допустимое поле и продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. Таким образом, неполные решения обладают лишь относительной ценностью, а полные — абсолютной. На практике, однако, чаще всего удается построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны. Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так, или иначе, но большинство прикладных задач решены по идеально пластической схеме не полно.

В дальнейшем Д.Д. Ивлевым была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести и в результате показано, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Любопытно отметить, что как статические, так и кинематические уравнения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для граней призмы Кулона—Треска, соответствующих кинематически определимым режимам течения, также являются гиперболическими; характеристические направления ориентированы так же, как и главные направления тензора напряжений, т.е. характеристики касаются главных направлений тензора напряжений.<sup>16</sup>

<sup>16</sup>См. работу [21]. Полное исследование характеристик уравнений осесимметричной задачи при условии пластичности Треска для различных режимов пластического течения читатель может найти в [8], с. 258-268.

Подобным же образом дело обстоит и в пространственной задаче: в случае грани произвольного кусочно-линейного условия текучести характеристические поверхности касаются главных направлений тензора напряжений.

В 1971 г. Д.Д. Ивлев и Г.И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности как идеального, так и упрочняющегося тела, как с учетом упругих деформаций, так и без их учета, на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений.<sup>17</sup> Полученные ими результаты устанавливают, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т.е. эллиптичны; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптичны.

В 1966 г. выходит в свет монография Д.Д. Ивлева “Теория идеальной пластичности”. В этом оригинальном сочинении с высоким мастерством были изложены новые результаты и принципы математической теории идеальной пластичности и, прежде всего, теория пространственной и обобщенной плоской задачи. Заметим, что эта монография стоит в одном ряду с замечательными руководствами по теории пластичности, написанными советскими учеными-механиками, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами.<sup>18</sup> И в настоящее время “Теория идеальной пластичности” Д.Д. Ивлева служит незаменимым руководством для тех, кто пытается глубже проникнуть в основы математической теории идеальной пластичности, опираясь на блестящее и последовательное изложение, данное грандом этой науки.

В механике упрочняющихся пластических тел Д.Д. Ивлев (совместно с Г.И. Быковцевым) последовательно развивал представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения, предложенные ранее в исследованиях А.Ю. Ишлинского и В. Прагера (W. Prager). Результаты их совместных исследований легли в основу классической монографии, которая по сути представляет собой каноническое изложение математической теории пластичности упрочняющегося тела в случае малых деформаций. В этой монографии читатель найдет исчерпывающий анализ общих уравнений теории течения и свойств их решений, включая анализ сильных и слабых разрывов с помощью аппарата геометрических и кинематических условий совместности Адамара—Томаса (J. Hadamard, T. Tomas).

<sup>17</sup>См.: Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с. Научная биография Г.И. Быковцева, отражающая его выдающийся вклад в развитие теории пространственной задачи математической теории пластичности, имеется в статье: Яровой Г.П., Радаев Ю.Н. К 70-летию Г.И. Быковцева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №9/1(59). 2007. С. 9-30.

<sup>18</sup>Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с. (это последнее третье издание; второе издание: Соколовский В.В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 396 с.; первое издание книги было выпущено в свет издательством АН СССР в 1946 г.);

Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.;

Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. (первое издание этой книги: Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 324 с.).

Исследования Д.Д. Ивлева в области математической теории пластичности подытожены в фундаментальной двухтомной монографии “Механика пластических сред”.<sup>19</sup>

Помимо перечисленных, Д.Д. Ивлеву принадлежат различные результаты в области предельного состояния конструкций, статики и динамики сыпучих сред, устойчивости равновесия упругоэластических тел, гидродинамики, теории трещин и механики разрушения. Следует отметить обстоятельный обзор работ по механике разрушения с изложением основных результатов этой части механики деформируемого твердого тела, сделанный им в момент острой дискуссии, посвященной механике трещин (см.: Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1967. №6. С. 88-128). Дискуссиям в механике посвящена важная и весьма поучительная статья: Ивлев Д.Д. Три дискуссии в механике // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. №4(54). С. 115-123. В ней Д.Д. Ивлев с присущей ему корректностью, тактом и бережным отношением к научным фактам затрагивает важную тему о дискуссии по механике квазихрупкого разрушения и дает свою оценку имевшим место событиям, тем более, что Д.Д. Ивлев лично участвовал в этой дискуссии. Мы также ранее высказывались по этому поводу в статье: Радаев Ю.Н. К 75-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №5(39). 2005. С. 5-32. Наши оценки результатов имевшей место более сорока лет назад дискуссии совпадают. В частности, Д.Д. Ивлев в указанной выше статье пишет: “Прав Ю.Н. Радаев, когда написал: *“Через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке”*.”

В течение трех последних десятилетий рядом ученых проводятся исследования в рамках научного направления, вектор которого был задан Д.Д. Ивлевым в его работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности конца 50-х годов. Как уже указывалось, это один из самых сложных и наименее изученных разделов механики деформируемого твердого тела. Тем не менее, за последние два десятилетия удалось существенно продвинуться в создании общей теории трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и предложить общую схему интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризуемых наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [23] и [24]. Исследования в области пространственной задачи теории идеальной пластичности были подытожены в монографиях: Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.; Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И., Радаев Ю.Н., Сенашов С.И., Шемякин Е.И. Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.

В первой из указанных монографий сделана попытка дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке,

<sup>19</sup>См.: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 448 с.; Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругоэластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 448 с.

делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Исходной точкой построения общей теории пространственных уравнений выступает одна замечательная инвариантная векторная форма пространственных уравнений, анализ которой позволяет сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. Затем рассматриваются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, основные кинематические соотношения для приращений перемещений, следующие из него, а также исследуется кинематика течения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Показано, что скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т.е. когда Гауссова кривизна положительна, на поверхности максимальной скорости сдвига. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений вдоль изостатических траекторий выводятся преобразованием векторного уравнения равновесия к изостатической координатной сетке. Устанавливается возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

Значительное внимание уделяется исследованию трехмерных уравнений математической теории пластичности в триортогональных изостатических координатах [25]. Основным интересом здесь представляются уравнения совместности приращений деформаций и пространственные соотношения Коши. Уравнения совместности для приращений малых деформаций в триортогональной изостатической системе координат исследуются вместе дополнительными соотношениями, связывающими физические компоненты тензора несовместности. Существенных уравнений совместности шесть. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, имеется лишь три независимых уравнения совместности. Явно указываются и рассматриваются системы независимых уравнений совместности, сформулированные в изостатической координатной сетке. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении трех независимых уравнений совместности удовлетворялись три оставшихся уравнения совместности. Показано, что нарушения сплошности на поверхности идеально пластического тела распространяются вглубь тела вдоль асимптотических линий на слоях векторного поля, указывающего направления наибольшего главного нормального напряжения. Поскольку асимптотические линии *наименее* искривлены по сравнению с любыми другими линиями на поверхности (в том смысле, что нормальная кривизна асимптотических линий равна нулю), то нарушения сплошности проникают вглубь идеально пластического тела по наименее искривленным траекториям. Именно в этом смысле можно вести речь о минимальном искривлении траекторий распространения трещин в твердых телах.

Анализ плоской и осесимметричной задач выполнен с использованием аппарата производящих функций, определяющих канонические преобразования пространственных координат. Альтернативный вариант вывода всех основных геометрических соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений, сформулированных для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, простым понижением на одну единицу их размерности был выполнен в статье [26].

В рамках построения математической теории пластичности с уравнениями гиперболического аналитического типа был выполнен групповой анализ уравнений пространственной, плоской и осесимметричной задачи. В отношении пространственных уравнений эта работа еще далека от завершения и продолжается поиск новых симметрий пространственных уравнений Д.Д. Ивлева. Методы группового анализа все шире проникают в механику деформируемого твердого тела, позволяя в некоторых случаях получать точные решения важнейших прикладных задач.<sup>20</sup> Получены новые результаты применения классических методов Ли к нелинейным уравнениям теории пластичности. Определены группы симметрий уравнений в частных производных теории пластичности, алгебры симметрий (алгебры Ли) и оптимальные системы одномерных подалгебр для пространственной, плоской и осесимметричной задач. Оптимальные системы позволяют найти ряд новых решений трехмерных уравнений теории пластичности инвариантно-групповой природы. Применение групповых методов (особенно это касается пространственной задачи) требует выполнения огромного объема рутинных преобразований и вычислений, которые были проведены с помощью систем символьных вычислений. Чтобы оценить примерный объем вычислительной работы заметим, что лишь для одной естественной конечномерной (размерности 12) подалгебры алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности, оптимальная система одномерных подалгебр насчитывает один трехпараметрический элемент, 12 двухпараметрических, 66 однопараметрических элементов и 108 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного однопараметрического элемента и двадцати двух индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений плоской задачи (плоское деформированное состояние) имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного двухпараметрического элемента, 11 однопараметрических и 20 индивидуальных элементов.

Преподавание математической теории пластичности в российских университетах имеет свою историю и традиции. В настоящее время они прочно связаны с именами Д.Д. Ивлева и Г.И. Быковцева. Отличительной чертой их преподавательской деятельности является сочетание прикладного содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения. Такой синтез требовал также прочтения особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко

---

<sup>20</sup>При этом не следует однако преувеличивать возможности группового анализа. В настоящее время его роль как средства нахождения новых точных решений задач механики деформируемого твердого тела является более чем скромной.

освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования.

Д.Д. Ивлев — член Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, член редколлегии журнала “Известия РАН — Механика твердого тела”, член экспертного совета по математике и механике ВАК Минобрнауки РФ, председатель диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, заслуженный деятель науки и техники РФ (1992 г.), лауреат Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники (2006 г.) Среди учеников Д.Д. Ивлева — доктора и кандидаты наук, которые работают в различных городах России — Москве, Воронеже, Самаре, Чебоксарах, Владивостоке.

Мы поздравляем Дюиса Даниловича с 80-летием — замечательной датой, которая является важнейшей вехой на пути его научного поиска. Мы желаем ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *De Saint-Venant, B.* Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. — 1870. — Т. 70. — Р. 473–480.

[2] *De Saint-Venant, B.* Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. — 1871. — Т. 16. — Р. 308–316, 373–382.<sup>21</sup>

[3] *Coulomb, C. A.* Essay sur l'application des règles de maximes et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture / C. A. Coulomb // Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'académie Royale des Sciences. Année 1773. — Paris : L'imprimerie Royale, 1776.

[4] *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости : сб. ст. / М. Леви // Теория пластичности. — М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — С. 20–23.<sup>22</sup>

[5] *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. — М. : Мир, 1964. — 308 с.

[6] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. — М. : Гостехтеоретиздат, 1956. — 407 с.

[7] *Фрейденталь, А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. — М. : Физматгиз, 1962. — 432 с.

<sup>21</sup>Имеется перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости : сб. ст. // Теория пластичности. М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 11–19.

<sup>22</sup>Оригинальная работа: Levy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1870. Т. 71. Р. 1323–1325.

- [8] Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [9] Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [10] Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
- [11] Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [12] Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч.1 : Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Ленинград [СПб.] : Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.
- [13] Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах : сб. ст. / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.<sup>23</sup>
- [14] Генки, Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах : сб. ст. / Г. Генки // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 80–101.
- [15] Шилд, Р. Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии : сб. переводов / Р. Т. Шилд // Механика. – 1957. – № 1. – С. 102–122.<sup>24</sup>
- [16] Ишлинский, А. Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля / А. Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8, вып. 3. – С. 201–224. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1 : Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М. : Наука, 1986. С. 17–42.)
- [17] Ишлинский, А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Ученые записки МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108. (См. там же: С. 62–83. В заключительном подстрочном замечании А. Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)
- [18] Ивлев, Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.<sup>25</sup>
- [19] Ивлев, Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3. – С. 546–549.<sup>26</sup>
- [20] Ивлев, Д. Д. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 3. – С. 137. (Статья воспроизводится также в книге: Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 20–21.)

<sup>23</sup>Оригинальная работа: Haar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien // Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. H. 2. S. 204–218.

<sup>24</sup>Оригинальная работа: Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. Vol. 233A. №. 1193. P. 267–287.

<sup>25</sup>См. также: Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 5–14.

<sup>26</sup>См. также: Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 15–20.

[21] *Ивлев, Д. Д.* К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска / Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114. (См. там же: С. 263–267.)

[22] *Радаев, Ю. Н.* О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – № 6(56). – 2007. – С. 102–114.

[23] *Радаев, Ю. Н.* О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 1. – С. 86–94.

[24] *Радаев, Ю. Н.* К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 2003. – № 5. – С. 102–120.

[25] *Радаев, Ю. Н.* О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке / Ю. Н. Радаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 2008. – № 5. – С. 79–89.

[26] *Радаев, Ю. Н.* К теории плоской деформации идеально пластического тела / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – № 3(62). – 2008. – С. 272–289.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Д. Д. ИВЛЕВА

### 1955

1. К теории простого деформирования пластических тел // Прикладная математика и механика. – 1955. – Т. 19, Вып. 6. – С. 734–735.

### 1956

2. К использованию линейной тензорной связи в пластичности // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, Вып. 2. С. 289–292.
3. Выпучивание эксцентричной трубы // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1956. – № 10. – С. 112–166.

### 1957

4. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких круговому // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
5. Упруго-пластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник МГУ. – 1957. – № 2. – С. 51–52 (совм. с Л. В. Ершовым).
6. Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 5. – С. 113–118.
7. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 113. – № 2. – С. 294–296.
8. Приближенное решение задач теории малых упруго-пластических деформаций // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 113, № 2. – С. 527–528.
9. Упруго-пластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 7. – С. 129–131 (совм. с Л. В. Ершовым).
10. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 8. – С. 149–152 (совм. с Л. В. Ершовым).
11. Упруго-пластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 9. – С. 130–134 (совм. с Л. В. Ершовым).
12. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1957. – № 10. – С. 89–93.
13. Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т. 21, вып. 5. – С. 716–718.
14. Приближенное решение плоских упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. – 1957. – № 5. – С. 17–26 (совм. с Л. В. Ершовым).

### 1958

15. О потере устойчивости вращающихся дисков // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125 (совм. с Л. В. Ершовым).
16. О некоторых работах К. Н. Шевченко по теории пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 2. – С. 159–162.
17. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.

18. Приближенное решение упругопластических осесимметрических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. – 1958. – № 2. – С. 47–56 (совм. с Л. В. Ершовым).
19. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 4. – С. 480–486.
20. О некоторых частных решениях уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности и обобщение решения Л. Прандтля о сжатии пластической полосы шероховатыми плитами // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 673–678.
21. К построению теории идеальной пластичности // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 6. – С. 850–855.
22. Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 11. – С. 107–109.
23. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 6. – С. 488–490.

#### 1959

24. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1959. – № 1. – С. 132–133.
25. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 6. – С. 546–549.
26. О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 2. – С. 247–281.
27. К теории разрушения твердых тел // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 3. – С. 618–624.
28. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. – 1959. – № 3. – С. 137.
29. Об изотропном упрочнении пластических тел // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 4. – С. 777–779.
30. К определению перемещений в задаче Л. А. Галина // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 5. – С. 987–988.
31. К теории идеальной пластической анизотропии // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 6. – С. 1107–1114.
32. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114.

#### 1960

33. К теории идеально затвердевающих сред // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 4. – С. 742–745.
34. Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 6. – С. 1232–1235.
35. О границе пластического состояния материала // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1960. – № 1. – С. 161.

36. О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 1. – С. 144–146.
37. О постулате изотропии в теории пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.
38. К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 4. – С. 707–710.
39. Об экстремальных свойствах условий пластичности // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 5. – С. 951–955.
40. К построению гидродинамики вязкой жидкости // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 135, № 2. – С. 280–282.
41. О работе В.С. Ленского “Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении” // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 179–180.
42. К теории вдавливания штампа в пластическую среду // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1960. – № 3. – С. 214–216 (совм. с В. А. Жалнинным).
43. О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство // Журнал практической механики и технической физики. – 1960. – № 4. – С. 75–78.

#### 1961

44. Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 1. – С. 173–174 (совм. с Г. И. Быковцевым).
45. К теории неустановившейся ползучести // Проблемы механики сплошной среды : сб. ст., посв. 70-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – С. 157–160.
46. Об определении поверхности выпучивающегося материала при вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 2. – С. 332–335.
47. К теории сферического деформированного состояния идеально пластических сред // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 1. – С. 72–75 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
48. Об устойчивости полосы при сжатии // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049 (совм. с Л. В. Ершовым).
49. К построению теории упругости // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 6. – С. 1321–1324.
50. Об основных соотношениях теории анизотропной сыпучей среды // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 2. – С. 116–121 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
51. О математическом описании поведения упругого изотропного тела при помощи кусочнолинейного потенциала // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 5. – С. 897–905.
52. О кручении винтовых стержней из идеально жесткопластического материала // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 5. – С. 124–126.

53. О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – № 6. – С. 153–154 (совм. с В. А. Жалниным, В. С. Мищенко).
54. Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1126–1128 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
55. О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. – 1961. – № 6. – С. 197–203.

**1962**

56. Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, вып. 4. – С. 709–714.
57. К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочнолинейных условиях пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 6. – С. 95–102.

**1963**

58. К теории сжимаемых идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 3. – С. 589–592 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
59. О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линейаризованном условии пластичности // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 3. – С. 115–118 (совм. с В. В. Дудукаленко).
60. К теории сложных сред // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 148, № 1. – С. 64–67.
61. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1963. – № 3. – С. 102–104 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
62. О предельном состоянии осесимметричных тел при условиях сопротивления сдвигу и отрыву // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 79–85 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
63. О кручении анизотропно упрочняющихся стержней при линейаризованном законе пластического течения // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 173–175 (совм. с В. В. Дудукаленко).
64. О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений // Журнал прикладной механики и технической физики. 1963. – № 5. – С. 154–157 (совм. с И. А. Бережным).
65. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочнолинейных потенциалах // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 12–16 (совм. с В. А. Знаменским).
66. О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 5. – С. 1024–1026 (совм. с В. В. Дудукаленко).

**1964**

67. К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1964. – № 5. – С. 102–108 (совм. с Г. И. Быковцевым, Т. Н. Мартыновой).

68. О функциях нагружения анизотропного упрочняющегося пластического материала // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 4. – С. 794–797 (совм. с Г. И. Быковцевым, В. В. Дудукаленко).
69. О предельном состоянии слоистых пластин и оболочек вращения // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 77–86 (совм. с Ю. П. Листровой, Ю. В. Немировским).
70. Об устойчивости пластин в общем случае нелинейной деформационной теории при малых деформациях // Прикладная механика. – 1964. – № 2. – С. 117–123 (совм. с И. Д. Легеней).
71. Пластичности теория (математич.) // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 37–39.
72. Пластический шарнир // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 37.
73. Пластичности условия // Физический энциклопедический словарь. – М. : Сов. энцикл., 1964. – С. 39.

#### 1965

74. О влиянии вязкости на механическое поведение упруго-пластических сред // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 163, № 3. – С. 595–598 (совм. с И. А. Бережным).
75. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1965. – Т. 164, № 4 (совм. с Т. Н. Мартыновой).
76. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочнолинейных потенциалах // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1965. – № 1. – С. 56–69 (совм. с Г. И. Быковцевым, Т. Н. Мартыновой).
77. К теории устойчивости пластины в общем случае деформационной теории : тр. всесоюз. конф. по устойчивости. – М. : Стройиздат, 1965.

#### 1966

78. Теория идеальной пластичности. – М. : Наука, 1966. – 232 с.

#### 1967

79. О некоторых случаях интегрируемости соотношений теории упрочняющихся пластических сред при сингулярных поверхностях текучести // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1967. – № 1. – С. 143–144 (совм. с Л. В. Ершовым).
80. О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 2. – С. 346–348.
81. Об условиях квазихрупкого разрушения // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 5. – С. 537–542 (совм. с Л. В. Ершовым).
82. О деформационных теориях пластичности при сингулярных поверхностях нагружения // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 32, вып. 5. – С. 887–889.
83. О диссипативной функции в теории пластических сред // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1037–1039.
84. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеально-пластических телах // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1039–1042 (совм. с Г. И. Быковцевым, Ю. М. Мяснянкиным).
85. Об одном построении теории трещин // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1967. – № 6. – С. 91–94.

86. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1967. – № 6. – С. 88–128.

**1968**

87. О соотношениях на поверхности разрыва напряжений в трехмерных идеально жесткопластических телах // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 3. – С. 472–477 (совм. с Г. И. Быковцевым, Ю. М. Мяснянкиным).
88. О кинематических соотношениях на поверхности скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 4. – С. 623–631 (совм. с Г. И. Быковцевым, Ю. М. Мяснянкиным).
89. К задаче о внедрении гладкого клинообразного в плане штампа с плоским основанием в жесткопластическое пространство // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 115–118 (совм. с Р. И. Непершиным).

**1969**

90. О деформационных теориях пластичности // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды : сб. ст., посв. 60-летию акад. Л. И. Седова. – М., 1969. – С. 233–239.

**1970**

91. О диссипативных функциях в теории вязкопластических сред // Проблемы механики сплошной среды : (к 60-летию акад. В. В. Новожилова). – 1970. – С. 67–70 (совм. с И. А. Бережным, Е. В. Макаровым)
92. Об одной неполной задаче теории идеальной пластичности // Труды НИИ математики ВГУ. – 1970. – С. 145–148.
93. О деформационных моделях теории пластичности и сплошных сред // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 40, вып. 3. – С. 553–557 (совм. с И. А. Бережным, Е. В. Макаровым).

**1971**

94. Об уравнениях теории идеальной пластичности в компонентах скоростей перемещений // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 41, вып. 1. – С. 183–185 (совм. с А. Д. Чернышевым).
95. Теория упрочняющегося пластического тела. – М. : Наука, 1971. – 232 с. (совм. с Г. И. Быковцевым).

**1972**

96. О приобретенной анизотропии пластических тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа : сб. ст., посв. 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. – М., 1972. – С. 601–605 (совм. с И. А. Бережным, В. В. Дудукаленко).
97. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 42, вып. 5. – С. 957–959.
98. О построении модели сыпучих сред исходя из определения диссипативной функции // Основы пластичности : сб. тр. симпозиума. – Варшава, 1973. – С. 601–605 (совм. с И. А. Бережным, В. Б. Чадовым).

**1973**

99. О построении модели сыпучих сред на основе диссипативных функций // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 123. – № 6 (совм. с И. А. Бережным, В. Б. Чадовым).

100. Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 159–166 (совм. с Р. И. Непершиным).
101. Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния // Труды НИИ математики ВГУ. – Воронеж, 1973. – Вып. 10. – С. 1–3.

**1974**

102. О диссипативной функции в теории анизотропных пластических сред // Известия вузов. Машиностроение. МВТУ. – 1974. – С. 21–24 (совм. с В. Б. Чадовым).
103. О некоторых моделях, построенных на основе механизмов упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 1 (совм. с И. А. Бережным, Н. В. Герасимовым).
104. О функции нагружения для идеально пластических моделей // Избранные проблемы прикладной механики : сб. ст., посв. 60-летию акад. В. Н. Челомея. – М., 1974. – С. 113–117 (совм. с И. А. Бережным, В. И. Цейлером).

**1975**

105. Об определении перемещений в упруго-пластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред : (к 100-летию со дня рождения акад. Б. Г. Галеркина). – М., 1975. – С. 236–240.
106. О построении поверхностей сложных жесткопластических моделей // Механика деформируемых тел и конструкций : сб. ст. – М. : Машиностроение, 1975. – С. 62–70 (совм. с И. А. Бережным, В. И. Цейлером).
107. О течении жидкости с управляемой вязкостью // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223, № 3. – С. 582–584 (совм. с И. А. Бережным, Н. В. Герасимовым, В. И. Цейлером).
108. О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223. – № 4. – С. 810–811 (совм. с И. А. Бережным, Р. К. Логвиновой).

**1976**

109. Об определяющих неравенствах в теории пластичности // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 4. – С. 824–826 (совм. с И. А. Бережным)

**1977**

110. Диссипативная функция в теории пластичности // Механика деформируемого тела : межвуз. сб. – Куйбышев, 1977. – Вып. 3. – С. 5–22 (совм. с И. А. Бережным).

**1978**

111. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М. : Наука, 1978. – 208 с. (совм. с Л. В. Ершовым).
112. Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 80–87. (совм. с Е. В. Макаровым, Ю. М. Марушкой)

**1980**

113. Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 3. – С. 540–549 (совм. с И. А. Бережным).

**1981**

114. Определяющие неравенства в теории упругопластического тела : тез. докл. V Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. – Алма-Ата, 1981 (совм. с И. А. Бережным).

**1982**

115. Об уравнениях стареющих пластических тел // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1982. – Т. 25. – № 5. – С. 22–25 (совм. с Н. Х. Арутюняном).
116. Об обобщении решения Л. Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации : сб. ст. в честь 60-летия акад. И. Ф. Образцова. – М. : Машиностроение, 1982. – С. 137–144 (совм. с Л. В. Ершовым, А. В. Романовым).
117. Об обобщении решения Прандтля в сферической системе координат // Прикладная математика и механика. – 1982. – Т. 46, вып. 5. – С. 524–527 (совм. с А. В. Романовым).

**1983**

118. О влиянии внутреннего механизма вязкости на поведение идеально пластических сред // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47, вып. 3. – С. 524–527 (совм. с М. А. Артемовым).
119. Об одной предельной модели сплошной среды // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1074–1076 (совм. с И. Т. Артемьевым).

**1984**

120. К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 1. – С. 111–116 (совм. с И. Т. Артемьевым).
121. Об одном точном неавтономном решении теории идеальной пластичности // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 275. – № 5. – С. 1080–1083 (совм. с А. В. Романовым).
122. Об одном классе точных неавтономных задач теории идеальной пластичности // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела : сб. ст., посв. 60-летию акад. Ю. Н. Работнова. – М. : Наука, 1984. – С. 90–97 (совм. с А. В. Романовым).

**1985**

123. Краевая задача для сред с предельным сопротивлением всестороннему растяжению // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1985. – С. 3–9 (совм. с И. Т. Артемьевым).

**1986**

124. О течении идеально вязкой среды // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1986. – С. 33–42 (совм. с А. А. Горбуновым).
125. Об упругопластическом состоянии клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1986. – № 1. – С. 157–161 (совм. с И. Т. Артемьевым).
126. О нижней границе несущей способности тел, определяемой условиями предельного состояния : аннотации докл. VI Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. – Ташкент, 1986. – С. 51 (совм. с И. Т. Артемьевым, А. А. Горбуновым).
127. Об определяющих соотношениях в теории предельного сопротивления сдвигу и среднему напряжению // Актуальные задачи механики сплошных сред. – Чебоксары, 1986. – С. 45–52 (совм. с А. А. Горбуновым).

128. Об изгибе пластической полосы, ослабленной пологими выточками // Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. – Чебоксары, 1986. – С. 57–60 (совм. с Л. Б. Шитовой).

**1988**

129. Определение напряженного состояния в деформируемом объеме порошкового материала методом характеристик // Порошковая металлургия. – 1988. – № 1. – С. 6–10 (совм. с Н. А. Чайниковым).
130. Упругопластические равновесия остроугольного клина при предельном сопротивлении сдвигу, среднему растягивающему напряжению и отрыву // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1988. – № 4. – С. 157–162 (совм. с И. Т. Артемьевым).
131. Линеаризованные уравнения теории анизотропного идеального жесткопластического тела // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложений. – Чебоксары, 1988. – С. 55–58 (совм. с Л. Б. Шитовой).

**1989**

132. Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 2. – С. 183–185 (совм. с Е. А. Григорьевым, Л. Б. Шитовой).
133. Об образовании шейки при растяжении плоского образца с учетом влияния среднего напряжения // Краевые задачи и их приложения. – Чебоксары, 1989. – С. 117–119 (совм. с Л. Б. Шитовой).

**1992**

134. Пластичности теория (математическая) // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 628–631.
135. Пластический шарнир // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 628.
136. Пластичности условие // Физическая энциклопедия. Т. 3. – М., 1992. – С. 631.
137. К теории предельного состояния пластических пористых тел // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 163–165.
138. Об условиях текучести идеально пластического тела // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 107–109 (совм. с А. В. Романовым).
139. О свойствах основных соотношений теории идеальной пластической анизотропии // Актуальные проблемы механики деформ. твердого тела : сб. ст., посв. 70-летию Ж. С. Ержанова. – Алма-Ата, 1992. – С. 69–75 (совм. с И. Т. Артемьевым).

**1993**

140. Теория идеальной пластической анизотропии // Прикладная механика. – 1993. – Т. 29, № 1. – С. 73–78 (совм. с И. Т. Артемьевым).
141. Линеаризованные уравнения теории идеальной пластичности // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1993. – № 5. – С. 107–113 (совм. с И. Т. Артемьевым).
142. О применении обобщенных функций комплексного переменного к двумерной задаче теории упругости // Прочность и надежность конструкций : сб. ст., посв. 50-летию В. Д. Кулиева. – М., 1993. – С. 83–89 (совм. с М. В. Михайловой).

**1994**

143. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Известия АН Чувашской республ. – 1994. – № 2. – С. 16–21 (совм. с М. А. Артемовым).

144. К теории идеально затвердевающих сред // Известия АН Чувашской республ. – 1994. – № 2. – С. 22–25 (совм. с М. А. Артемовым).

145. К теории предельного состояния сыпучих сред. – 5 с. – Деп. в ВИНТИ 16.12.94. 2918-в94. (совм. с Л. Б. Шитовой).

#### 1995

146. О статических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. – № 3. – С. 104–110 (совм. с М. А. Артемовым).

147. О линеаризованных уравнениях кинематически определяемых задач // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 6. – С. 104–110 (совм. с М. А. Артемовым).

148. К теории затвердевающих сред // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 14–21 (совм. с М. А. Артемовым).

149. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально-пластического материала // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 39–48 (совм. с А. М. Васильевой, М. В. Михайловой).

150. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 27–38 (совм. с Т. Л. Захаровой).

151. Об идеально пластическом состоянии полого кругового цилиндра при произвольном возмущении боковой поверхности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1995. – № 1. – С. 29–36 (совм. с А. М. Васильевой).

#### 1996

152. Об одной модели предельного состояния тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 1. – С. 61–64 (совм. с Л. Б. Шитовой).

153. О пластическом течении бруса прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 8–17 (совм. с М. А. Артемовым).

154. О соотношениях теории пластической анизотропии // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 121–125.

155. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Проблемы механики сплошной среды. – Владивосток, 1996. – С. 112–115.

156. О статической определяемости предельного состояния твердого тела при отрыве // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 48–51.

157. О разрывных решениях теории пластичности // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32. – № 7. – С. 65–68 (совм. с М. А. Артемовым).

158. Об одном случае предельного состояния тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 3. – С. 43–45 (совм. с М. А. Артемовым).

159. К теории дифференциальных соответствий в механике сплошной среды // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. – 1996. – № 2. – С. 5–7.

160. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Доклады РАН. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 332–334 (совм. с М. А. Артемовым).

161. О течении трубы, ослабленной пологими выточками // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 28–31 (совм. с Т. Л. Захаровой).
162. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально пластического материала // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 6. – С. 79–87 (совм. с А. М. Васильевой, М. В. Михайловой).
163. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 32–34.
164. Об образовании шейки в растягиваемой вязкопластической полосе // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1996. – № 6. – С. 35–38 (совм. с Т. И. Рыбаковой).

**1997**

165. Об идеально пластическом состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Доклады РАН. – 1997. – Т. 353, № 1. – С. 47–50 (совм. с М. А. Артемовым).
166. К теории идеально затвердевающих сред // Доклады РАН. – 1997. – Т. 355, № 5. – С. 623–625 (совм. с М. А. Артемовым).
167. О напряженном состоянии идеально пластического полого цилиндра, близкого к круговому // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 4. – С. 113–119 (совм. с А. М. Васильевой).
168. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1997. – Т. 38, № 5. – С. 165–172 (совм. с Т. Л. Захаровой).
169. О соотношениях ассоциированного закона течения и нагружения в теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1997. – № 4. – С. 78–94.

**1998**

170. О пространственном течении идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 5–12.
171. О течении трубы, ослабленной выточками // Доклады РАН. – 1998. – Т. 359, № 1. – С. 40–42 (совм. с Т. Л. Захаровой).
172. Об устойчивости вязкопластической полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 358, № 4. – С. 490–491 (совм. с Т. И. Рыбаковой).
173. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 1998. – Т. 361, № 6. – С. 765–767.
174. Об идеальном жесткопластическом течении плоской полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 4. – С. 483–485 (совм. с Л. А. Максимовой).
175. О возмущенном течении растягиваемой идеально пластической полосы // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 5. – С. 632–633 (совм. с Л. А. Максимовой).
176. О соотношениях ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных // Доклады РАН. – 1998. – Т. 363, № 6. – С. 775–776.
177. О предельном состоянии идеально пластического прямоугольного бруса, ослабленного пологими выточками // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 4. – С. 173–179 (совм. с М. А. Артемовым).
178. Теория пластичности. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с. (совм. с Г. И. Быковцевым).

179. Изменение жесткости и процессы микроповреждений в хрупком материале // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 1998. – № 5. – С. 18–28 (совм. с В. В. Дудукаленко).

**1999**

180. Об определении соотношений ассоциированного закона идеально-пластического течения // Прикладные задачи механики сплошных сред. – Воронеж, 1999. – С. 116–123.
181. К теории кинематически определимых состояний идеальнопластических тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 1. – С. 92–98 (совм. с М. А. Артемовым).
182. О соотношениях общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. – Чебоксары. Сводный том. – 1998. – № 3, 4 ; 1999. – № 1, 2. – С. 13–16 (совм. с Л. А. Максимовой).
183. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 6. – С. 39–54 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
184. Полная пластичность в теории идеально пластического тела // Доклады РАН. – 1999. – Т. 368, № 3. – С. 333–334 (совм. с А. Ю. Ишлинским).

**2000**

185. О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатыми плитами // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 129–140 (совм. с И. П. Григорьевым).
186. О плоских течениях идеально жесткопластической среды // Доклады РАН. – 2000. – Т. 370, № 1. – С. 43–45 (совм. с Л. А. Максимовой).
187. О вдавливании индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 3. – С. 131–136 (совм. с Л. А. Максимовой).
188. О течениях изотропных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 5–12 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
189. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Доклады РАН. – 2000. – Т. 371, № 1. – С. 49–51 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
190. О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Доклады АН РАН. – 2000. – Т. 373, № 1. – С. 39–41 (совм. с Л. А. Максимовой).
191. О свойствах течений изотропной среды // Доклады АН РАН. – 2000. – Т. 375, № 2. – С. 191–194 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
192. Об определении связи „деформация – напряжение“ в теории сложного нагружения при выполнении постулата изотропии А. А. Ильюшина // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 2000. – № 4. – С. 15–28.

**2001**

193. О вдавливании жесткого штампа в идеально пластическое полупространство с учетом сдвиговых усилий // Доклады РАН. – 2001. Т. 379, № 2. – С. 196–199 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).

194. Об определении поля скоростей идеально пластического течения в случае общей плоской задачи // Доклады РАН. – 2001. – Т. 379, № 6. – С. 758–763 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).
  195. О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Доклады РАН. – 2001. – Т. 381, № 5. – С. 616–622 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
  196. Математическая теория идеальной пластичности. Состояние и развитие : докл. на VIII Всерос. съезде по теор. и прикл. механике // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 32–44 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
  197. О представлении состояния полной пластичности на диаграмме Мора // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 45–51 (совм. с Л. А. Максимовой).
  198. О соотношениях плоской задачи теории упругопластического тела для неоднородного материала // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республики. Сводный том. – 1999. – № 3, 4 ; 2000. – № 1–4 ; 2001. – № 1–4. – С. 52–59 (совм. с А. В. Горским, П. В. Горским).
  199. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
  200. Математическая теория пластичности. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с. (совм. с А. Ю. Ишлинским).
  201. О предельных течениях изотропных сред // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск, 2001. – С. 223–227 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
  202. Условия изотропии и ассоциированный закон пластического деформирования // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород : сб. ст., посв. 70-летию проф. Л. В. Ершова. – М. : Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 2001. – С. 93–116 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).
- 2002**
203. Механика пластических сред. Т. 2 : Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
  204. О характеристических соотношениях для напряжений пространственной задачи сыпучей среды при полном предельном равновесии // Доклады РАН. – 2002. – Т. 383, № 5. – С. 638–642 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
  205. О характеристических соотношениях для скоростей перемещений в пространственной задаче полного предельного равновесия сыпучей среды // Доклады РАН. – 2002. – Т. 384, № 1. – С. 57–61 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
  206. Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // Доклады РАН. – 2002. – Т. 385, № 6. – С. 766–769 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).

207. О вдавливании плоского штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии контактных касательных напряжений // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 1. – С. 134–139 (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным).
208. О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 4. – С. 57–62 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
209. О свойствах моделей изотропных сред // Проблемы механики деформируемого твердого тела : сб. ст. к 70-летию акад. Н. Ф. Морозова. – СПб, 2002. – С. 149–153 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Л. А. Максимовой).

**2003**

210. О сдавливании идеально пластической пирамиды плоским штампом // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 3. – С. 337–339 (совм. с А. Ю. Ишлинским, Р. И. Непершиным).
211. О статически определимых соотношениях теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 4. – С. 483–486.
212. Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 5. – С. 634–637 (совм. с М. В. Михайловой).
213. О линеаризованных уравнениях статически определимых соотношений теории идеальной пластичности // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 6. – С. 769–771 (совм. с М. В. Михайловой).
214. К теории статически определимых соотношений и предельного состояния пластических тел // Доклады РАН. – 2003. – Т. 392, № 1. – С. 59–62 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
215. Статически определимые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 3. – С. 84–89 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
216. Идеи и результаты А. Ю. Ишлинского в теории пластичности // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 4. – С. 167–174.
217. Идеи и результаты А. Ю. Ишлинского в теории пластичности // Проблемы механики : сб. ст. к 90-летию А. Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 30–38.
218. О соотношениях теории идеальной пластичности при условии пластичности максимального приведенного напряжения // Проблемы нелинейной механики : сб. ст. к 80-летию Л. А. Толоконникова. – Тула, 2003. – С. 178–184 (совм. с А. Ю. Ишлинским).
219. Статически определимые состояния теории идеальной пластичности : тез. докл. междунар. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики”. – Тула. – 2003. – С. 147.
220. Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. – 2003. – № 3. – С. 36–46 (совм. с М. В. Михайловой).
221. Теория идеальной пластичности. Состояние и развитие // Прикладная механика. – 2003. – № 11. – С. 6–46.

**2005**

222. Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2005. – № 5(39). – С. 33–41.

223. Теория предельного состояния и идеальной пластичности : избранные работы. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005. – 357 с.
224. О статически определимых состояниях в теории идеальной пластичности // Вестник Чувашского педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2005. – №2(44). – С. 13–18 (совм. с Л. А. Максимовой).
225. Статически определимые соотношения теории сжимаемых идеально-пластических сред // Теоретическая и прикладная механика : межвед. сб. науч.-метод. ст. Вып. 19 : Белорусский национальный технический университет. – Минск, 2005. – С. 21–24.
226. О соотношениях ассоциированного закона течения теории сжимаемых идеально-упругих сред // Доклады РАН. – 2005. – Т. 405, № 5.
227. О статически определимых соотношениях сжимаемых идеально упругих сред // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 5. – С. 131–134.

**2006**

228. К теории статически определимых состояний деформируемых тел // Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 131–136 (совм. с Л. А. Максимовой).
229. О развитии идеальноупругого состояния // Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 130–133 (совм. с Н. М. Матченко).
230. Об идеях и результатах Е. И. Шемякина в механике предельного состояния твердых деформируемых тел и конструкций // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 46–51.
231. О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 287–290 (совм. с Н. М. Матченко).
232. Предельное состояние твердых тел как состояние статической определенности // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докладов. – Н. Новгород, 2006. – Т. 3. – С. 100.
233. Об эволюции идеальноупругого состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 1 (48). – С. 58–61.
234. Механика сплошной среды как раздел дифференциальной геометрии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 5(52). – С. 215–220.

**2007**

235. О переходе статически неопределимого состояния в статически определенное // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 5–9.
236. Три дискуссии // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 157–163.
237. Чем отличается теория идеальной пластичности от теории предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 3. – С. 3–10.
238. Три дискуссии в механике // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – № 4(54). – С. 115–123.
239. О предельных соотношениях при отрыве для анизотропного материала // Математические модели и методы механики сплошных сред : сб. науч. тр. к 60-летию А.А. Буренина. – Владивосток, 2007. – С. 106–107 (совм. с А. Н. Роштовой).

**2008**

240. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с. (совм. с Л. А. Максимовой, Р. И. Непершиным, Ю. Н. Радаевым, С. И. Сенашевым, Е. И. Шемякиным).

**2009**

241. Коэффициент интенсивности статистической неопределимости и достижение состояния полной пластичности // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1(6). – С. 76–80.

**2010**

242. Об одном вопросе в теории предельного состояния // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. – № 2(66). – С. 19–24.

*Климов Дмитрий Михайлович*

*академик РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*

*e-mail: klimov@ipmnet.ru*

*Ковалев Владимир Александрович*

*доктор физико-математических наук, профессор Московского городского университета управления Правительства Москвы, г. Москва*

*e-mail: kovalev@migm.ru*

*Радаев Юрий Николаевич*

*доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного университета, г. Самара*

*e-mail: radayev@ssu.samara.ru*

*Klimov, Dmitry Mikhailovich*

*Academician of RAS, Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

*Kovalev, Vladimir Alexandrovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow City Government University of Management, Moscow, Russia*

*Radayev, Yuri Nickolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, Russia*

Ивлеву Дюису Даниловичу

## ДОРОГОЙ УЧИТЕЛЬ!

Трудно поверить, что минуло 50 лет с того времени, когда Вы появились в Воронежском университете, и начался период Вашей жизни, который Вы впоследствии назвали воронежским. Для нас, Ваших учеников, это было замечательное время: Вы поставили и методически “отшлифовали” основные и совершенно новые курсы по механике, привлекая при этом к проведению занятий нас, тогдашних аспирантов и старшекурсников. Вы сами прочитали все курсы, которые были закреплены за кафедрой – и курс теории упругости, и курс теории пластичности, и лекции по гидроаэромеханике, и курс теории устойчивости сложных систем и другие курсы. Под Вашим руководством начали работать еженедельные семинары, один – научный, другой – по изучению новых публикаций в области механики сплошной среды. Так Вы поднимали наш профессиональный уровень. Одна только подготовка к семинарам – поиск публикаций, разбор трудных мест, форма изложения – приучала нас к каждодневному напряженному труду, и всем этим процессом Вы серьезно “дирижировали”, внимательно присматриваясь к каждому из нас. Заметим, что и в настоящее время основные курсы по механике в нашем университете по-прежнему читаются в Вашей постановке.

Еще труднее поверить, что в Воронеж Вы приехали 29-летним доктором физико-математических наук. Несмотря на столь юный возраст, Ваше имя уже стояло в одном ряду с известными учеными в области математической теории пластичности. Наряду с А.Ю. Ишлинским, В. Прагером, Ф. Ходжем и другими учеными Вы внесли значительный вклад в развитие нового направления в построении теории пластичности – теории течения – и явились одним из основоположников теории предельного равновесия. Ваш талант ученого-исследователя, прекрасные организаторские способности и превосходный педагогический дар позволили Вам в короткий срок осуществить перестройку работы механиков университета, активизировать их научную и методическую работу. Лекции и научные семинары, проводимые Вами, Дюис Данилович, оставляли незабываемые впечатления, восхищали ясностью мышления и способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. Вы умели вселить уверенность в своих учеников, вдохновить их на научный поиск, поддержать в трудную минуту. Так под созидательным влиянием Вашей личности наступили годы расцвета механики как в Воронежском университете, так и в других вузах г. Воронежа. Созданная Вами воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила союзное, а затем и мировое признание. Проводимые исследования были связаны с фундаментальными проблемами механики сплошных сред, имеющими большое значение в развитии научно-технического прогресса.

Ваш авторитет среди аспирантов и студентов был столь высок, что, несмотря на незначительную разницу в возрасте, Вы были для нас недостижимой высотой.

В декабре 1959 года Вы возглавили организованную Вами кафедру теории упругости и пластичности. При кафедре функционировал научный семинар по современным проблемам механики сплошных сред, в работе которого участвовали преподаватели

вузов, научные работники институтов, работники промышленных предприятий города. Под Вашим руководством ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие учёные из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и др. городов. К нашей работе стали проявлять повышенный интерес ученые нашей страны и зарубежья, заговорили о существенном влиянии воронежской школы профессора Д.Д. Ивлева на формирование математической теории пластичности.

Человек, неравнодушный к окружающим Вас людям, Вы особенное внимание уделяли одаренным своим ученикам, всячески поддерживая их талант и способствуя профессиональному росту. Это качество Вашей личности сыграло определяющую роль в судьбе Г.И. Быковцева, одного из талантливейших Ваших учеников, который смог подняться до уровня своего учителя и как ученый, и как педагог, и как организатор. С именем Г.И. Быковцева связано создание в Воронежском университете факультета прикладной математики и механики, на котором в настоящее время трудится большинство Ваших учеников, а также создание кафедры технической кибернетики и теории автоматического регулирования. Воспитанник научной школы проф. Д.Д. Ивлева Геннадий Иванович продолжил ее новаторские традиции и на новом факультете Воронежского университета, и впоследствии в Самарском и Дальневосточном университетах, а в начале двухтысячных годов – и в качестве заместителя директора Института автоматизации и процессов управления (ИАПУ) Дальневосточного отделения Российской Академии наук.

Ваша научная деятельность, Дюис Данилович, связана с механикой деформируемого твердого тела и ее важнейшей составляющей - теорией пластичности. Весомый вклад внесён Вами в теорию упрочняющегося пластического материала: развиты представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения, предложенные в исследованиях А.Ю. Ишлинского и В. Прагера, предложен алгоритм построения моделей сложных сред, обладающих внутренними механизмами пластичности, вязкости, упругости. В этой области механики сплошных сред Вы совместно со своим учеником проф. Г.И. Быковцевым выполнили фундаментальные исследования общих соотношений теории упрочняющегося пластического материала.

В проводимых Вами и Вашими учениками исследованиях большое внимание было уделено развитию нового логического построения теории пластичности, основанного на использовании диссипативной функции: получили развитие вопросы двойственного, эквивалентного построения теории пластичности - исходя из формулировки условия пластичности и ассоциированного закона пластического течения и исходя из определения диссипативной функции и ассоциированного закона пластического течения. Значительные результаты получены Вами в области построения моделей для сред, обладающих сложными реологическими свойствами.

Вам принадлежит развитие приближённого аналитического метода решения задач для упруго-пластических материалов с неизвестной границей, разделяющей области тела, находящиеся в различных состояниях. Ряд результатов имеет фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела.

Очевидно, перечисленные исследования далеко неполно охватывают проблематику Вашей научной деятельности. В созданной Вами научной школе защищены около трех десятков докторских диссертаций и около ста кандидатских.

Мы признательны Вам за то, что Вы продолжаете поддерживать тесную научную связь с учёными-механиками Воронежа, и отдаете много сил и энергии созданной Вами замечательной научной школе. Каждый Ваш приезд в Воронеж - крупное событие в научной жизни города. Мы знаем Вас также как человека высоких нравственных устоев, человека, не терпимого к фальши и лжи. Чистота и честность в науке – к этому Вы призывали и призываете нас, Ваших учеников, все годы нашего сотрудничества.

Дорогой Дюис Данилович, мы высоко ценим Ваши научную смелость и талант, благодарим Вас за щедрость, сопереживание, доброжелательность и душевное благородство. Сердечно поздравляем Вас с днем рождения и желаем Вам крепкого здоровья, новых творческих импульсов в научной работе и вообще в жизни. Мы гордимся тем, что воронежский период в Вашей деятельности был плодотворным и составил заметную веху в Вашей и нашей жизни.

*М. И. Быкова, Ю. М. Мяснянкин, Н. Д. Вервейко, Т. Д. Семькина,  
С. А. Вульман, А. Н. Спорыхин, О. Д. Горбенко, В. М. Зеленев,  
Г. Ф. Филатов, А. В. Ковалев, А. С. Чеботарев, А. Д. Коробкин,  
А. Д. Чернышов, Е. Н. Коржов, А. И. Шашкин, В. С. Купцов,  
Ю. Д. Щеглова, В. В. Лапыгин, А. Ю. Яковлев, Б. И. Легеня*

Воронеж, 2010 г.

*Р. Ю. оглы Амензаде, Г. Ю. Мехтиева, Л. Ф. кызы Фатуллаева*

## ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ МЕХАНИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

*Бакинский государственный университет*

**Аннотация.** Дается формулировка и доказательство смешанного вариационного принципа для трехмерной теории нелинейной вязко-упругости, позволяющего независимо задавать предположительные поля напряжений и перемещений. Учитывается мгновенная упруго-пластическая деформация. Используются точные выражения для компонент тензора деформации через перемещения. Приводится процедура его модификации на случай кусочно-неоднородного тела, составленного из конечного числа частей. Условия сопряжения на поверхностях контакта принципиально различны и заключаются либо в их полном сцеплении, либо – напряженной посадке. Дается видоизменение построенных функционалов на случай упруго-пластических (нелинейно-упругих) деформаций.

**Ключевые слова:** нелинейность, вязко-упругость, напряжение, деформация, вариация, гетерогенность, сопряжение.

УДК: 539.375

**Введение.** В современной технике широко используются конструкции, изготовленные из материалов, уравнения состояния которых достаточно хорошо описываются соотношениями теории нелинейной вязко-упругости. Важно подчеркнуть, что при этом для ряда важных задач, таких как устойчивость и выпучивание, необходимо учитывать также геометрическую нелинейность. При решении конкретных задач возникают большие трудности математического характера. Это обстоятельство связано с тем, что теоретические исследования в этой области приводят к интегрированию нелинейных краевых задач. Получение здесь аналитических решений весьма затруднительно, а порою невозможно. Поэтому возникает необходимость в разработке и применении к таким важным в прикладном аспекте задачам эффективных приближенных, в частности вариационных методов.

В последние годы существенно изменилась точка зрения на вариационные методы в механике деформируемого твердого тела. Возможности построения вариационных принципов разного рода, т.е. нахождение функционалов, для которых уравнения задачи являются уравнениями Эйлера, оказались значительно более широкими, чем это казалось ранее. Выявилась возможность достаточно свободного выбора независимых функциональных аргументов [1, 2]. В работе [3] в геометрически нелинейной

постановке в скоростях предложен вариационный метод смешанного типа для определения напряженно-деформированного состояния анизотропных нелинейно вязкоупругих тел. Полагалось, что мгновенная деформация линейно-упругая. В [4] дано обобщение этого принципа на случай гетерогенных сред.

В представленной работе дается обобщение этих принципов для случая, когда мгновенная деформация упруго-пластическая и подчиняется уравнениям типа теории течения.

**1. Вариационный принцип смешанного типа для однородных сред.** Рассмотрим в трехмерном Эвклидовом пространстве тело и предположим, что под действием нагрузок в нем возникает мгновенная упруго – пластическая деформация  $\varepsilon_{ij}^M$  и деформация ползучести  $p_{ij}$ , так, что полная деформация  $\varepsilon_{ij}^\Phi$  имеет вид

$$\varepsilon_{ij}^\Phi = \varepsilon_{ij}^M + \dot{p}_{ij},$$

или в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^\Phi = \dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij}. \quad (1.1)$$

Далее, точка над символами означает дифференцирование по физическому времени  $t$ . При этом мгновенная деформация подчиняется уравнениям типа теории течения. Физический закон для такой среды запишем в форме [5]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^M = H_{ijkl} \dot{\sigma}^{kl}, \quad (1.2)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij}^M$ -ковариантный тензор скоростей деформаций,  $\dot{\sigma}^{kl}$ -контравариантный тензор скоростей напряжений, а точка означает дифференцирование по времени  $t$ . Причем механические характеристики  $H_{ijkl} = H_{klij}$  не зависят от скоростей деформаций и напряжений. Условимся считать, что деформация ползучести описывается соотношениями нелинейной теории вязко-упругости. Тогда, с учетом анизотропии имеем, [6]:

$$p_{ij} = \int_0^t F'_{ij} [t - \tau, \sigma^{kl}(\tau)] d\tau \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.3)$$

Здесь  $F_{ij}$ - функция ползучести, а штрих означает частное дифференцирование по параметру  $t - \tau$ ,

$$F'_{ij} [t - \tau, \sigma^{kl}(\tau)] = \frac{\partial}{\partial(t - \tau)} F_{ij} [t - \tau, \sigma^{kl}(\tau)] = -\frac{\partial}{\partial\tau} F_{ij} [t - \tau, \sigma^{kl}(\tau)].$$

Отметим, что соотношение (1.3) является достаточно хорошей аппроксимацией уравнения состояния для широкого класса материалов (металлы и их сплавы, композиты и полимеры), свойства которых невозможно описать в рамках классических моделей теории упругости, пластичности и вязкой жидкости.

Взяв в уравнении (1.3) производную по  $t$ , находим:

$$\dot{p}_{ij} = \int_0^t F''_{ij} [t - \tau, \sigma^{kl}(\tau)] d\tau + F'_{ij} [0, \sigma^{kl}(t)]. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.2) и (1.4) в равенство (1.1), будем иметь:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^\Phi = H_{ijkl} \dot{\sigma}^{kl} + \int_0^t F''_{ij} [t - \tau, \sigma^{kl}(\tau)] d\tau + F'_{ij} [0, \sigma^{kl}(t)]. \quad (1.5)$$

Рассмотрим теперь равновесие (предполагается, что динамическими эффектами можно пренебречь) выбранной среды объема  $V$ , ограниченного достаточно гладкой поверхностью  $S$ . Положим, что на части поверхности  $S_u$  заданы ковариантные компоненты вектора смещения  $u_i^{(0)}$ , а на оставшейся части  $S_\sigma$ - контравариантные составляющие вектора поверхностных сил  $T^{i(0)}$ , определяемые зависимостями

$$T^i = \sigma^{kj} n_j (\delta_k^i + \nabla_k u^i), \quad (1.6)$$

в которых,  $n_j$  - нормаль к поверхности недеформируемого тела,  $\nabla_k$  - оператор ковариантного дифференцирования,  $u^i$  - контравариантные составляющие вектора перемещения,  $\delta_k^i$  - тензор Кронекера.

Пользуясь точными выражениями для компонент тензора деформации, равновесие среды описывается следующей нелинейной краевой задачей:

$$\nabla_j \left[ \sigma^{ij} (\nabla_i u^k + \delta_i^k) \right] = 0, \quad (1.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^\Phi = H_{ijkl} \dot{\sigma}^{kl} + \int_0^t F_{ij}'' [t - \tau, \sigma^{kl}(\tau)] d\tau + F_{ij}' [0, \sigma^{kl}(t)], \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k), \quad (1.9)$$

$$T^k = T^{k(0)} \text{ на } S_\sigma, \quad u_k = u_k^{(0)} \text{ на } S_u, \quad (1.10)$$

причем  $S = S_u \cup S_\sigma$ .

Докажем утверждение, что рассматриваемую краевую задачу можно сформулировать с помощью вариационной теоремы следующим образом: стационарное значение функционала,

$$\delta R = 0,$$

который представлен в виде

$$R = \int_V \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k - \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij}) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \\ - \int_{S_u} (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}) \dot{T}^i dS - \int_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)} \dot{u}_i dS, \quad (1.11)$$

при выполнении равенств (1.8) и (1.9) в качестве уравнений Эйлера приводит к нелинейным уравнениям равновесия (1.7) и нелинейным граничным условиям (1.6).

Найдем вариацию этого функционала в предположении, что функциональные аргументы  $\dot{\sigma}^{ij}$  и  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  варьируются независимо. Будем также учитывать, что оператор варьирования  $\delta$  действует на скорости величин, но не на сами величины. Тогда из (1.11) получим:

$$\delta R = \int_V \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \delta \dot{\sigma}^{ij} + \dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \delta (\nabla_j \dot{u}_k) + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_j \dot{u}_k \delta (\nabla_i \dot{u}^k) - \frac{1}{2} \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^M \dot{\sigma}^{ij} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij}) \delta \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \int_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)} \delta \dot{u}_i dS - \int_{S_u} [(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}) \delta \dot{T}^i] dS, \quad (1.12)$$

здесь учитывался тот факт, что по определению  $\delta \dot{p}_{ij} = 0$ , а для выполнения граничных условий принимаются равенства  $\delta \dot{T}^i = 0$  на  $S_\sigma$  и  $\delta \dot{u}_i = 0$  на  $S_u$ .

Поскольку тензор  $H_{ijkl}$  не зависит от скоростей, то

$$\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^M = H_{ijkl} \delta \dot{\sigma}^{kl}.$$

Умножая последнее равенство на  $\dot{\sigma}^{ij}$  и замечая, что  $H_{ijkl} \dot{\sigma}^{ij} = \dot{\varepsilon}_{kl}^M$ , находим:

$$\dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^M = \dot{\varepsilon}_{ij}^M \delta \dot{\sigma}^{ij}. \quad (1.13)$$

Отдельно рассмотрим четвертое слагаемое в выражении (1.12). Из симметрии тензора напряжений имеем:

$$\frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_j \dot{u}_k \delta (\nabla_i \dot{u}^k) = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}_k \delta (\nabla_j \dot{u}^k),$$

или, в силу очевидных соображений

$$\frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i (g_{kr} \dot{u}^r) \delta (\nabla_j g^{km} \dot{u}_m) = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i (\dot{u}^k) \delta (\nabla_j \dot{u}_k),$$

где  $g_{kr}$  и  $g^{kr}$  соответственно ковариантный и контравариантный метрический тензоры.

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_j \dot{u}_k \delta (\nabla_i \dot{u}^k) = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \delta (\nabla_j \dot{u}_k).$$

Таким образом, установлен факт равенства третьего и четвертого слагаемых в (1.12). Это обстоятельство и формула (1.13) позволяют переписать (1.12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta R = & \int_V \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \delta \dot{\sigma}^{ij} + \dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \delta (\nabla_j \dot{u}_k) - (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij}) \delta \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \\ & - \int_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)} \delta \dot{u}_i dS - \int_{S_u} \left[ (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}) \delta \dot{T}^i \right] dS. \end{aligned} \quad (1.14)$$

По формуле (1.9)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla_i \dot{u}_j + \nabla_j \dot{u}_i + \nabla_i u^k \nabla_j \dot{u}_k + \nabla_j u_k \nabla_i \dot{u}^k \right\},$$

а ее вариация записывается как

$$\delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \delta \nabla_i \dot{u}_j + \delta \nabla_j \dot{u}_i + \nabla_i u^k \delta \nabla_j \dot{u}_k + \nabla_j u_k \delta \nabla_i \dot{u}^k \right\}.$$

Тогда второе слагаемое в (1.12) запишем в форме

$$\dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \delta \nabla_i \dot{u}_j + \dot{\sigma}^{ij} \delta \nabla_j \dot{u}_i + \dot{\sigma}^{ij} \nabla_i u^k \delta \nabla_j \dot{u}_k + \dot{\sigma}^{ij} \nabla_j u_k \delta \nabla_i \dot{u}^k \right\}.$$

После ряда преобразований, характерных для тензорного анализа [7], этому равенству придадим следующий вид:

$$\dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}^{ij} \left\{ \delta_i^k + \nabla_i u^k \right\} \delta \nabla_j \dot{u}_k.$$

Теперь вариационное уравнение запишется посредством равенства

$$\delta R = \int_V \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \delta \dot{\sigma}^{ij} + \dot{\sigma}^{ij} \left[ \delta_i^k + \nabla_i u^k \right] \delta \nabla_j \dot{u}_k + \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \delta (\nabla_j \dot{u}_k) - (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij}) \delta \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV -$$

$$- \int_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)} \delta \dot{u}_i dS - \int_{S_u} \left[ (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}) \delta \dot{T}^i \right] dS. \quad (1.15)$$

Преобразуя по формуле Гаусса-Остроградского второй интеграл в выражении (1.15), получим:

$$\begin{aligned} \int_V \dot{\sigma}^{ij} \left[ \delta_i^k + \nabla_i u^k \right] \delta \nabla_j \dot{u}_k dV &= \int_S \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \left( \nabla_i u^k + \delta_i^k \right) n_j \delta \dot{u}_k \right\} dS - \\ &- \int_V \left\{ \nabla_j \left[ \dot{\sigma}^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right] \delta \dot{u}_k \right\} dV. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Таким же образом вычислим третий интеграл, для которого запишем:

$$\int_V \sigma^{ij} \nabla_j \dot{u}_k \delta \left( \nabla_j \dot{u}_k \right) dV = \int_S \sigma^{ij} n_j \nabla_i \dot{u}^k \delta \dot{u}_k dS - \int_V \nabla_j \left( \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \right) \delta \dot{u}_k dV. \quad (1.17)$$

Так как  $\delta \dot{u}_k = 0$  на  $S_u$ , то поверхностные интегралы в (1.16) и (1.17) отличны от нуля только на поверхности  $S_\sigma$  и таким образом

$$\int_S \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \left( \nabla_i u^k + \delta_i^k \right) n_j \delta \dot{u}_k \right\} dS = \int_{S_\sigma} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \left( \nabla_i u^k + \delta_i^k \right) n_j \delta \dot{u}_k \right\} dS, \quad (1.18)$$

$$\int_S \sigma^{ij} n_j \nabla_i \dot{u}^k \delta \dot{u}_k dS = \int_{S_\sigma} \sigma^{ij} n_j \nabla_i \dot{u}^k \delta \dot{u}_k dS. \quad (1.19)$$

Вследствие подстановки выражений (1.16), (1.17) в (1.15), и собирая члены при одинаковых независимых вариациях, найдем:

$$\begin{aligned} \delta R &= \int_V \left\{ \left[ \dot{\varepsilon}_{ij} - \left( \dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij} \right) \right] \delta \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \\ &- \int_V \left\{ \nabla_j \left[ \dot{\sigma}^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right] + \nabla_j \left( \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \right) \right\} \delta \dot{u}_k dV + \\ &+ \int_{S_\sigma} \left\{ \left[ \dot{\sigma}^{ij} \left( \nabla_i u^k + \delta_i^k \right) + \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \right] n_j - \dot{T}^{k(0)} \delta \dot{u}_k \right\} dS - \int_{S_u} \left( \dot{u}_k - \dot{u}_k^{(0)} \right) \delta \dot{T}^k dS. \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\nabla_j \left[ \dot{\sigma}^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right] + \nabla_j \left( \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \right) = \left\{ \nabla_j \left[ \sigma^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right] \right\}^\bullet,$$

а

$$\dot{\sigma}^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) + \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k = \left\{ \sigma^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right\}^\bullet,$$

выражение  $\delta R$  перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta R &= \int_V \left[ \varepsilon_{ij} - \left( \varepsilon_{ij}^M + p_{ij} \right) \right]^\bullet \delta \dot{\sigma}^{ij} dV - \int_V \left\{ \nabla_j \left[ \sigma^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right] \right\}^\bullet \delta \dot{u}_k dV + \\ &+ \int_{S_\sigma} \left\{ \sigma^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) n_j - T^{k(0)} \right\}^\bullet \delta \dot{u}_k dS - \int_{S_u} \left( \dot{u}_k - \dot{u}_k^{(0)} \right) \delta \dot{T}^k dS = 0. \end{aligned}$$

Учитывая основную лемму вариационного исчисления и формулу (1.6), из условия обращения в нуль вариации  $\delta R$ , получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^M - p_{ij})^\bullet &= 0, \\ \left\{ \nabla_j \left[ \sigma^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right] \right\}^\bullet &= 0, \\ \left( \dot{T}^{k(0)} = T \right)^\bullet &\text{ на } S_\sigma, \\ \left( \dot{u}_k = \dot{u}_k^{(0)} \right)^\bullet &\text{ на } S_u. \end{aligned} \quad (1.20)$$

За начальные условия системы (1.21) примем напряженно-деформированное состояние тела при  $t = 0$ . Это состояние, как это следует из равенства (1.5), является упруго - пластическим, удовлетворяет закону (1.2) и краевым условиям (1.10). Тогда, после интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} \nabla_j \left[ \sigma^{ij} \left( \delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right] &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^\Phi &= \dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij}, \\ T^i &= T^{i(0)} \text{ на } S_\sigma, \\ u_i &= u_i^{(0)} \text{ на } S_u. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Как видно из полученной в результате интегрирования системы (1.20), первое уравнение является уравнением равновесия, а последние два равенства соответствуют краевым условиям (1.10). В совокупности указанное позволяет констатировать, что для функций, описывающих равновесие нелинейно-наследственного тела при мгновенной упруго - пластической деформации, подчиняющейся уравнениям типа теории течения, функционал (1.11) стационарен и выделяет истинные поля напряжений и перемещений из всех статически возможных. Это и доказывает сформулированное выше утверждение.

Если мгновенная деформация нелинейно-упругая, то

$$\varepsilon_{ij}^M = \varphi_{ij} \left( \sigma^{kl}, g^{km} \right),$$

или в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^M = \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \sigma^{kl}} \dot{\sigma}^{kl} = A_{ijkl} \dot{\sigma}^{kl}.$$

Следовательно, в этом случае постановка краевых задач в скоростях будет такой же, как и выше, с той лишь разницей, что вместо  $H_{ijkl}$  фигурируют величины другой физической природы  $A_{ijkl}$ .

Таким образом, приходим к весьма важному выводу, что различные по существу задачи в вариационной постановке (1.11) математически идентичны.

**2. Вариационный принцип для гетерогенных сред.** В настоящее время на практике используются различные по свойствам материалы. Однако однородный (простой) материал редко обладает свойствами, соответствующими требованиям конкретного применения. Опыты и вычисления показали, что, комбинируя материалы, то есть, создавая и используя неоднородность, зачастую можно добиться благоприятного сочетания свойств, которые дают возможность оптимального использования конструктивных сред. Неоднородность можно рассматривать или как идеализацию непрерывного изменения физико-механических свойств от точки к точке, или как

скачкообразное изменение свойств при прохождении через поверхность раздела. Здесь будет рассмотрен второй случай, когда в гетерогенной среде различные фазы (включения) остаются отчетливо выраженными.

Создание и широкое применение в технике, машиностроении, станкостроении, авиастроении и т.д. композитных материалов приводит к необходимости определения напряженно-деформируемого состояния в средах, изготовленных из различных материалов, сопряженных между собой посредством полного сцепления либо - посадки. Широкий класс таких задач для линейной теории упругости в плоской постановке, как известно, удобно решать с использованием методов теории функций комплексного переменного в сочетании с теорией конформного отображения [8]. При решении задач, когда тела имеют сложную пространственную конфигурацию, составлены из конечного числа включений (частей), материалы которых различны и нелинейно вязкоупругие, деформации конечны, возникают дополнительные математические трудности, связанные с наличием в уравнениях разрывных коэффициентов и необходимостью учета условий сопряжения между соседними элементами. Поэтому здесь приводим модификацию изложенного вариационного принципа на случай гетерогенных сред. Перейдем к непосредственному описанию процедуры соответствующего обобщения.

Пусть, как и выше, рассматриваемое тело занимает в трехмерном евклидовом пространстве с криволинейными координатами  $x^\gamma$  область  $V$ , ограниченную замкнутой поверхностью  $S$ . При постановке контактной краевой задачи, которую будем обсуждать в дальнейшем, предполагаем, что тело состоит из  $K$  элементов. Элемент с номером  $k$  занимает объем  $V_k$  с поверхностью  $S_k$ . Принимаем, что  $S_k = S_k^{(1)} + S_k^{(2)}$  где  $S_k^{(1)}$  граница объема  $V_k$ , не имеющая общих точек с  $S$ , а  $S_k^{(2)}$  является частью общей границы тела. Очевидно, что для объемов, которые не имеют общих точек с границей  $S$  имеет место  $S_k = S_k^{(1)}$ .

На поверхности  $S_{k\sigma}^{(2)}$  заданы усилия  $T^{\alpha(0)}$ , а на оставшейся - перемещения  $u_\alpha^{(0)}$ . Дополнительно потребуем, чтобы поверхности  $S_k^{(1)}$  и  $S_k^{(2)}$  были достаточно гладкими. В основу используемой здесь теории гетерогенных сред становятся следующие предпосылки:

- в процессе деформации элементы контактируют друг с другом вдоль всей их общей поверхности;
- деформации конечны.

Далее будем исходить из того, что на поверхностях контакта выполняются условия либо полного сцепления, либо напряженной посадки.

Для  $k$ -го элемента обозначим через  $\sigma_{(k)}^{ij}$  и  $\varepsilon_{ij(k)}$  соответственно тензор напряжений и деформаций,  $u_{i(k)}$  - вектор перемещения,  $n_{i(k)}$  - единичную нормаль к поверхности. Для того чтобы учесть, что материалы разных элементов различны, а их физико-математические свойства описываются соотношениями нелинейной теории вязко - упругости, соотношение (1.1) удобно записать в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(k)}^\Phi = \dot{\varepsilon}_{ij(k)}^M + \dot{p}_{ij(k)},$$

где, следуя (1.5), имеем:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(k)}^M = H_{ijml(k)} \dot{\sigma}_{(k)}^{ml}(x^\gamma, t),$$

$$\dot{p}_{ij(k)} = \int_0^t F_{ij(k)} \left[ t - \tau, \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}(x^\gamma, \tau) \right] d\tau + F'_{ij(k)} \left[ 0, \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}(x^\gamma, t) \right].$$

Рассмотрим равновесие мысленно выбранного объема, прилагая к части границы  $S_k^{(1)}$  силы  $T_{(k)}^{\alpha(00)}$ , действующие на него со стороны других, контактирующих с ним, объемов, либо считая известными перемещения  $u_{i(k)}^{(00)}$ . Тогда для геометрически нелинейной теории оно описывается следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} \nabla_j \left\{ \sigma_{(k)}^{ij} \left( \delta_i^\alpha + \nabla_i u_{(k)}^\alpha \right) \right\} &= 0, \\ \varepsilon_{ij(k)}^\Phi &= \varepsilon_{ij(k)} + p_{ij(k)}, \\ 2\varepsilon_{ij(k)} &= \left\{ \nabla_i u_{j(k)} + \nabla_j u_{i(k)} + \nabla_i u_{(k)}^\alpha \nabla_j u_{\alpha(k)} \right\}, \end{aligned}$$

для  $\forall x^k \in V_k$  и  $u_{i(k)} = \bar{u}_{i(k)}^{(0)}$  на  $S_{ku}$ ,  $T_{(k)}^{\alpha(0)} = \bar{T}_{(k)}^\alpha$  на  $S_{k\sigma}$ .

Здесь весьма важно подчеркнуть, что в самом общем случае, согласно общей постановке задачи,

$$\bar{u}_{i(k)} = \begin{cases} u_{i(k)}^{(0)} & \forall s \in S_{ku}^{(2)}, \\ u_{i(k)}^{(00)} & \forall s \in S_{ku}^{(1)}. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\bar{T}_{(k)}^\alpha = \begin{cases} T_{(k)}^{\alpha(0)} & \forall s \in S_{k\sigma}^{(2)}, \\ T_{(k)}^{\alpha(00)} & \forall s \in S_{k\sigma}^{(1)}. \end{cases} \quad (2.2)$$

К перечисленным уравнениям должны быть добавлены условия сопряжения на  $S_{(k)}^{(1)}$ . Установим два рода контактных условий:

а) условие полного сцепления между соседними элементами, когда

$$T_{(k)}^{i+} = T_{(k)}^{i-}; u_{i(k)}^+ = u_{i(k)}^-, \quad (2.3)$$

где знаками "+" и "-" обозначены значения функций в точках сопряжения при переходе к ним справа и слева от линии контакта;

б) наличие заданной функции скачка смещения  $f_{n(k)}(S)$ , нормального к поверхности границы,

$$u_{n(k)}^+ - u_{n(k)}^- = f_{n(k)}(S) \quad (2.4)$$

и отсутствие сил трения (посадка) на этой поверхности.

$$T_{(k)}^\tau = 0. \quad (2.5)$$

Как и выше, для дальнейших целей, выделим произвольный элемент объемом  $V_k$ . Следуя (1.11), выпишем следующий функционал для этого объема:

$$\begin{aligned} R_k = \int_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}_{(k)}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij(k)} + \frac{1}{2} \sigma_{(k)}^{ij} \nabla_i \dot{u}_{(k)}^m \nabla_j \dot{u}_{m(k)} - \frac{1}{2} \left( \dot{\varepsilon}_{ij(k)}^M + 2\dot{p}_{ij(k)} \right) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \\ - \int_{S_{ku}} \dot{T}^i (\dot{u}_{i(k)} - \bar{u}_{i(k)}) dS - \int_{S_{k\sigma}} \dot{T}_{(k)}^\alpha \dot{u}_{\alpha(k)} dS. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь,  $S_{ku}$  и  $S_{k\sigma}$  участки границы, где считаются известными либо заданными перемещения  $\bar{u}_{i(k)}$  и усилия  $\bar{T}_{(k)}^\alpha$  (см. формулы (2.1) и (2.2)). Отметим, что в (2.6)  $\dot{\sigma}_{(k)}^{ij}$ ,  $\dot{u}_{i(k)}$  - независимые функциональные аргументы. Теперь перейдем к построению функционала для всего объема в целом, когда тело составлено из  $K$  элементов. Это обобщение, в случае многокомпонентности, как будет установлено ниже, отнюдь не является тривиальным. В этом случае функционал (2.6) необходимо модифицировать таким образом, чтобы были учтены условия сопряжения а) или б) между соседними элементами. С этой целью, вначале, просуммируем функционал (2.6) по всем его компонентам. В дальнейшем, без ущерба для изложения и компактности записи, индекс  $k$  у фигурирующих под интегралами величин будем опускать. Тогда, следуя вышеизложенному, запишем:

$$R = \sum_k^K R_k = \sum_{k=1}^K \int_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^m \nabla_j \dot{u}_m - \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij} + 2\dot{p}_{ij}) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \\ - \sum_{k=1}^K \int_{S_{ku}} \dot{T}^i (\dot{u}_i - \bar{\dot{u}}_i) dS - \sum_{k=1}^K \int_{S_{k\sigma}} \dot{T}^\alpha \dot{u}_\alpha dS. \quad (2.7)$$

Далее следует учесть контактные условия. Положим, что на некотором числе контактных поверхностей осуществляются условия типа а), а на оставшихся - условия б). Совершенно очевидно, что поверхностные интегралы в (2.7) для участков сопряжения с условиями типа а) в силу (2.3) взаимно сократятся. Докажем, что в выражении (2.7) останутся лишь поверхностные интегралы по границам, где заданы условия типа б) и по общей поверхности всего объема тела. Для этого в функционале (2.7) выделим стоящий под знаком суммы второй поверхностный интеграл

$$\sum_{k=1}^K \int_{S_{k\sigma}} \dot{T}^\alpha \dot{u}_\alpha dS,$$

который, если разбить область интегрирования и учесть равенство (2.2), можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^K \int_{S_{k\sigma}} \dot{T}^\alpha \dot{u}_\alpha dS = \sum_{k=1}^K \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} \dot{u}_\alpha dS + \sum_{k=1}^K \int_{S_{k\sigma}^{(2)}} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS. \quad (2.8)$$

Принимая во внимание тот факт, что полная поверхность всего тела есть

$$S = \sum_{k=1}^K S_k^{(2)},$$

второй интеграл в правой части (2.8) перепишем как

$$\int_{S_\sigma} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS. \quad (2.9)$$

Преобразуем первый интеграл, фигурирующий в правой части (2.8). Имеем:

$$\sum_{k=1}^K \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} \dot{u}_\alpha dS = \sum_{k=1}^{K_1} \left\{ \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha+(00)} \dot{u}_\alpha^+ dS + \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha-(00)} \dot{u}_\alpha^- dS \right\},$$

где  $K_1$  ( $K_1 < K$ ) - общее число внутренних контактных поверхностей.

Выбирая одну и ту же нормаль и опуская знак "+", у вектора напряжения согласно сделанным предположениям б) правую часть предыдущего равенства запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} (\dot{u}_\alpha^+ - \dot{u}_\alpha^-) dS = \sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS. \quad (2.10)$$

Учитывая (2.9) и (2.10), вместо (2.8) получим следующее равенство

$$\sum_{k=1}^K \int_{S_{k\sigma}} \dot{T}^\alpha \dot{u}_\alpha dS = \int_{S_\sigma} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS + \sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS. \quad (2.11)$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{k=1}^K \int_{S_{ku}} \dot{T}^i (\dot{u}_i - \dot{u}_i) dS = \int_{S_u} \dot{T}^i (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}) dS. \quad (2.12)$$

Если теперь подставить (2.11) и (2.12) в (2.7), получим окончательное выражение функционала:

$$\begin{aligned} R = & \sum_{k=1}^K \int_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^m \nabla_j \dot{u}_m - \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij}) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \\ & - \int_{S_\sigma} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS - \int_{S_u} \dot{T}^i (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}) dS - \sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из вида (2.13) вытекает справедливость сформулированного выше утверждения.

Таким образом, полученный функционал описывает поведение всего многокомпонентного тела. Отметим, что здесь суммирование производится по тем граничным поверхностям, где реализуются условия типа б). Запись (2.13) хороша в том отношении, что в ней выделен член, который исчезает, если потребовать, чтобы  $f_{(n)} = 0$  т.е., чтобы был реализован случай полного сцепления.

**Заключение.** Теперь, в силу высказанных предположений, более определенно отметим сущность предложенных вариационных методов. Центральным местом теории нелинейной вязко-упругости является вопрос о выборе конкретного вида функций  $F_{ij}$ , используемых в качестве ядер интегральных определяющих уравнений наследственного типа (1.3). Обычно при выборе ядер следует руководствоваться следующими соображениями: с одной стороны получить наилучшее согласование с экспериментом, а с другой стороны – обеспечить удобство применения математического аппарата при решении конкретных задач. Данный принцип допускает использование таких ядер, производные которых по  $t - \tau$  не обладают сингулярностью при  $t - \tau = 0$ .

Характерной особенностью построенных функционалов является то, что они выписаны в скоростях. Если построить аналогичные функционалы типа Рейснера, то применение численных методов, например метода Рунге, приводит к решению системы нелинейных алгебраических уравнений или системы трансцендентных уравнений, реализация которых на ЭВМ весьма затруднительна. Применение же аналогичного приближенного метода в данной постановке приводит к решению системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (задача Коши), численная реализация которой значительно проще.

В данном случае начальные условия представляют значения соответствующих функциональных аргументов немедленно после приложения нагрузок. Так как мгновенная деформация упруго-пластическая (нелинейно-упругая), то для их определения необходимо видоизменить функционалы (1.11) и (2.13). С этой целью отбросим в них величины  $\dot{p}_{ij}$ , учитывающие ползучесть, а в качестве времени примем любой монотонно изменяющийся параметр, характеризующий процесс нагружения. Для рассматриваемого класса задач за такой параметр естественно принять величину, какой либо из действующих сил. Этот факт следует из того, что функционалы (1.11) и (2.13) однородны относительно производной по  $t$ . Следовательно, пользуясь подобным приемом, можно записать

$$R = \int_V \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^M \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \int_{S_u} (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}) \dot{T}^i dS - \int_{S_\sigma} \dot{T}^i \dot{u}_i^{(0)} dS,$$

или

$$R = \sum_{k=1}^K \int_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^m \nabla_j \dot{u}_m - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^M \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \\ - \int_{S_\sigma} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS - \int_{S_u} \dot{T}^i (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}) dS - \sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS,$$

задаваясь тем же предположительным распределением перемещений и напряжений, что и при анализе вязко-упругости.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Работнов, Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 382 с.
- [2] *Васидзу, К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 542 с.
- [3] *Амензаде, Р. Ю.* Вариационный принцип нелинейно-вязко-упругости с учетом геометрической нелинейности / Р. Ю. Амензаде, А. Н. Ализаде // ДАН СССР. – 1976. – Т. 230, № 6. – С. 1303–1305.
- [4] *Амензаде, Р. Ю.* Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязко-упругих твердых тел / Р. Ю. Амензаде, М. Б. Ахундов // ДАН СССР. – 2006. – Т. 410, № 1. – С. 45–48.
- [5] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2003. – 704 с.
- [6] *Бугаков, И. И.* Ползучесть полимерных материалов / И. И. Бугаков. – М. : Наука, 1973. – 287 с.
- [7] *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1976. – 536 с.
- [8] *Амензаде, Ю. А.* Развитие теории контактных задач в СССР / Ю. А. Амензаде. – М. : Наука, 1976. – Гл. 8. – 492 с.

*R. Y. Amenzade, G. Y. Mehdiyeva, L. F. Fatullayeva*

**THE VARIATION METHOD OF NONLINEAR HEREDITARY MECHANICS OF  
THE FIRM BODIES**

*Baku State University*

**Abstract.** The formulation and the proof of the mixed variational principle for the three-dimensional theory of nonlinear viscous elasticity, allowing to set independently the presumable fields of pressure and movings is given here. Instant elastic-plastic deformation is considered. The exact expressions for a component of deformation tensor through the movings are used. The procedure of its updating in case of the piecewise-non-uniform body made of the final number of the parts is given. The interface conditions on the contact surfaces are essentially different and consist either of their full coupling, or in intense landing. The modification of the constructed functionals in case of the elasto-plastic (nonlinear-elastic) deformations is given.

**Keywords:** nonlinearity, viscous elasticity, pressure, deformation, a variation, heterogeneity, interface.

*Амензаде Рафаэль Юсиф оглы*

*доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет,  
г. Баку*

**e-mail:** [laura\\_fat@rambler.ru](mailto:laura_fat@rambler.ru)

*Мехтиева Галина Юрьевна*

*доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет,  
г. Баку*

**e-mail:** [laura\\_fat@rambler.ru](mailto:laura_fat@rambler.ru)

*Фатуллаева Лаура Фаиг кызы*

*кандидат физико-математических наук, Бакинский государственный университет, г. Баку*

**e-mail:** [laura\\_fat@rambler.ru](mailto:laura_fat@rambler.ru)

*Amenzade, Rafael Yusif agli*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Baku State University, Baku*

*Mehdiyeva, Galina Yurevna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Baku State University, Baku*

*Fatullayeva, Laura Faig kizi*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Baku State University, Baku*

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ  
ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ С УСЛОВИЕМ ТЕКУЧЕСТИ,  
ЗАВИСЯЩИМ ОТ СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ**

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН*

*Новосибирский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается задача Коши о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой поверхности, на которой действуют нормальное давление, касательные усилия и заданные скорости перемещений. В случае полной пластичности и линейной зависимости условия текучести от среднего напряжения система квазистатических уравнений идеальной пластичности, описывающих напряженно-деформированное состояние среды, является гиперболической. При численном решении этой системы применяется разностная схема для гиперболических систем законов сохранения.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, идеальная пластичность, полная пластичность, предел текучести, гиперболическая система.

УДК: 539.374

Квазистатические уравнения идеальной пластичности для определения напряжений и скоростей перемещений в случае полной пластичности имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) = 2(k_s - m\sigma), \quad (2)$$

$$\sigma < k_s/m, \quad (3)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3, \quad (3)$$

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты симметричного тензора напряжений в декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$ ;  $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  — среднее напряжение;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения;  $k_s > 0, m > 0$  — постоянные;  $e_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $u_i$  — компоненты вектора скоростей перемещений;  $n_i$  — компоненты единичного собственного вектора тензора напряжений, соответствующего некрайнему собственному значению (главному напряжению)  $\sigma_1$ .

Поступила 11.05.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 40 и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00749-а).

Равенство (2) означает линейную зависимость максимального касательного напряжения от среднего давления [1] (такая зависимость (рис. 1) характерна для некоторых грунтов [2]). Равенство (3) означает условие полной пластичности Хаара–Кармана [3], равенство (4) — условие несжимаемости [4], соотношение (5) — условие изотропии [4].

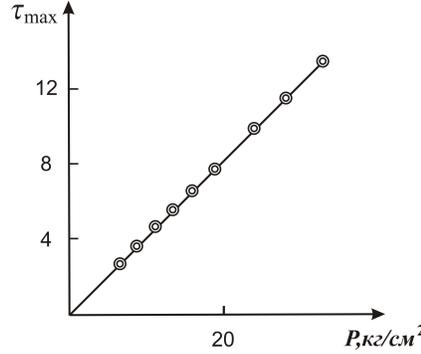


Рис. 1. Физико-механические свойства песка под давлением

Система (1)–(3) исследуется с использованием представления Д. Д. Ивлева тензора напряжений в виде [4]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\xi}{a} + \frac{k_s}{m} + \xi n_1^2, & \sigma_{12} &= \xi n_1 n_2, \\ \sigma_{22} &= \frac{\xi}{a} + \frac{k_s}{m} + \xi n_2^2, & \sigma_{13} &= \xi n_1 n_3, \\ \sigma_{33} &= \frac{\xi}{a} + \frac{k_s}{m} + \xi n_3^2, & \sigma_{23} &= \xi n_2 n_3,\end{aligned}\quad (6)$$

$$\xi = 2\varepsilon(k_s - m\sigma) = 2\varepsilon e^{ap}, \quad a = \frac{-6m}{3\varepsilon + 2m}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Подстановка (6) тождественно удовлетворяет соотношениям (2), (3). При этом главные напряжения равны

$$\sigma_1 = \frac{4}{3}\varepsilon(k_s - m\sigma) + \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{2}{3}\varepsilon(k_s - m\sigma) + \sigma.$$

Зависящие от  $x_1, x_2, x_3$  функции  $p, n_1, n_2, n_3$  определяются из квазилинейной системы уравнений первого порядка, получаемой из (1), (6) и конечного соотношения  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ :

$$p_{,i} + n_j n_{i,j} + k n_i n_{s,s} = 0, \quad i, j, s = 1, 2, 3; \quad k = (3\varepsilon + 2m)/(3\varepsilon - 4m). \quad (7)$$

Вектор скорости частиц при известном тензоре напряжений определяется из условий несжимаемости (4) и изотропии (5).

При  $m = 0$  параметр  $k = 1$  и система (7) формально совпадает с системой уравнений Д. Д. Ивлева [4] теории пластичности Треска при условии полной пластичности. При этом подстановка, удовлетворяющая при  $m = 0$  условию (2) и соотношению (3), отличается от подстановки (6).

Анализ структуры решений системы (7) при  $k = 1$  применим для системы (7) и при  $k \neq 1$ . Если при  $k = 1$  нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора  $\varphi = \pi/4$  и осью, ориентированной вдоль единичного собственного вектора  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  тензора напряжений, то при  $k \neq 1$  угол полураствора  $\varphi = \arctg(1/\sqrt{k})$ .

Система для определения вектора скорости имеет характеристический конус с углом полураствора  $\varphi = \pi/4$ .

Подмодели для системы (7) при  $k \neq 1$  рассмотрены в [5].

Система (4), (5), (7) является гиперболической. Для этой системы рассмотрена задача о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой полости, на которой действуют нормальное давление, касательные усилия и заданные скорости перемещений. В [6] для системы (4), (5), (7) при  $m = 0$  был предложен численный метод решения задачи Коши в ортогональной криволинейной системе координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ , образованной вращением вокруг вертикальной оси  $z$  гладкой выпуклой кривой  $L$  с опорной функцией  $F(\gamma)$  (рис. 2), где координатными поверхностями  $\alpha = \text{const}$  являются эквидистантные поверхности. С учетом (6) этот метод может быть применен к решению задачи Коши для системы (4), (5), (7) при  $m \neq 0$ .

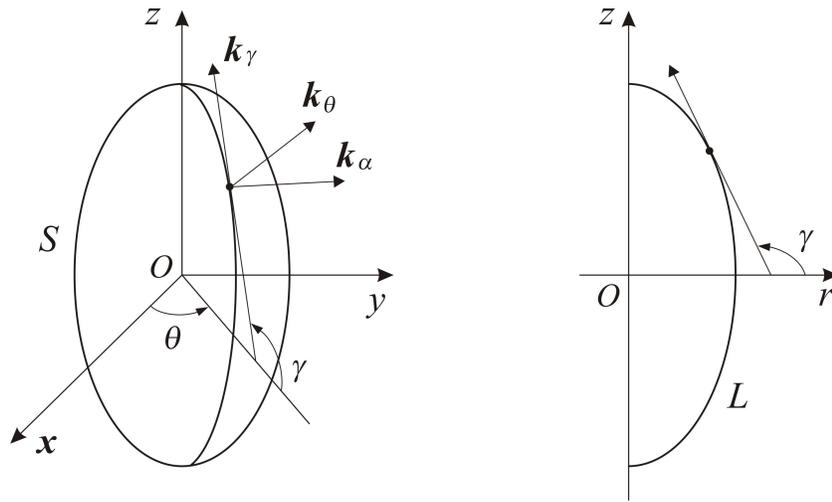


Рис. 2. Ортогональная криволинейная система координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ : координатная поверхность  $S$  ( $\alpha = 0$ ), базисные векторы  $k_\alpha, k_\theta, k_\gamma$  и образующая  $L$  координатной поверхности  $S$

В качестве примера была решена задача о распространении зон пластического состояния от границы эллипсоидальной полости, образованной вращением вокруг оси  $z$  выпуклой кривой  $L$  с опорной функцией  $F(\gamma) = \sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}$ , где  $a, b$  — полуоси эллипса.

Задача решалась в безразмерных переменных. При  $m = 0$  напряжения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= p + n_\alpha^2, & \sigma_{\alpha\theta} &= n_\alpha n_\theta, & \sigma_{\alpha\gamma} &= n_\alpha n_\gamma, \\ \sigma_{\theta\theta} &= p + n_\theta^2, & \sigma_{\gamma\gamma} &= p + n_\gamma^2, & \sigma_{\theta\gamma} &= n_\theta n_\gamma, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\theta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\gamma\gamma}, \sigma_{\theta\gamma}$  — компоненты напряжений в системе координат  $(\alpha, \theta, \gamma)$ , деленные на  $2k_s \varepsilon$ ;  $p = \sigma / (2k_s \varepsilon) - 1/3$ ;  $n_\alpha, n_\theta, n_\gamma$  — компоненты единичного собственного вектора, соответствующего главному напряжению  $\sigma_1$ . При  $m \neq 0$  напряжения вычислялись по формулам (6), в которых следует положить  $n_1 = n_\alpha, n_2 = n_\theta, n_3 = n_\gamma$ .

В численном решении полуось эллипсоида  $a = 2$ , а полуось  $b = 1$ . При  $m = 0$  на поверхности полости ( $\alpha = 0$ ) задавались следующие начальные условия:  $p(0) = 1, n_\alpha(0) = 1, n_\theta(0) = n_\gamma(0) = 0$ . Для сравнения получаемых решений при  $m = 0$  и  $m \neq 0$  начальные значения для  $\xi(0)$  в формулах (6) выбирались таким образом, чтобы нормальные напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}$  при  $\alpha = 0$  совпадали.

На рис. 3 приведены зависимости напряжений  $\sigma_{\alpha\alpha}$  от координаты  $\alpha$  для углов  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi/2$  при  $m = 0$  и  $m = 0,5$ .

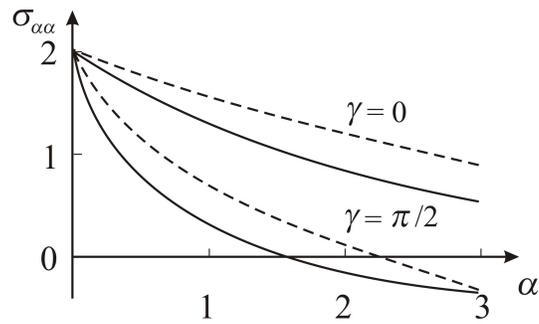


Рис. 3. Распределение напряжений  $\sigma_{\alpha\alpha}$  около эллиптической полости для углов  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi/2$  в зависимости от координаты  $\alpha$ : пунктирные линии —  $m = 0$ , сплошные линии —  $m = 0,5$

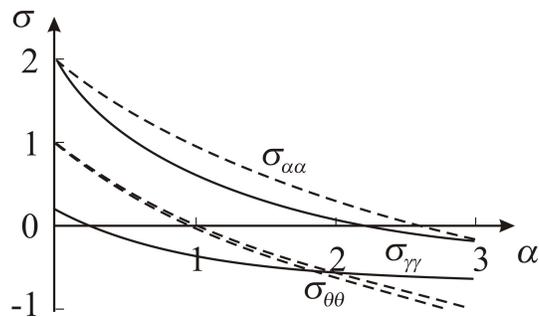


Рис. 4. Распределение напряжений  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\gamma\gamma}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  около эллиптической полости для угла  $\gamma = \pi/4$  в зависимости от координаты  $\alpha$ : пунктирные линии —  $m = 0$ , сплошные линии —  $m = 0,5$

На рис. 4 показаны зависимости напряжений  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{\gamma\gamma}$  от  $\alpha$  для  $\gamma = \pi/4$  при  $m = 0$  и  $m = 0,5$ .

**Заключение.** При линейной зависимости условия текучести от среднего напряжения для случая полной пластичности численно решена задача Коши о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой поверхности, на которой действует нормальное давление.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лоде, В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лоде // Теория пластичности : сб. ст. / под ред. Ю. Н. Работнова. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 168–205.
- [2] *Казаченко, Л. С.* Физико-механические свойства песка под давлением / Л. С. Казаченко, Ю. В. Кулинич // ФТПРПИ. – 1972. – № 1. – С. 22–30.
- [3] *Хаар, А.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. ст. / под ред. Ю. Н. Работнова. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.
- [4] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
- [5] *Аннин, Б. Д.* Об уравнениях идеальной пластичности с условием текучести, зависящим от среднего напряжения / Б. Д. Аннин // Успехи механики сплошных сред : к 70-летию акад. В. А. Левина : сб. науч. тр. – Владивосток : Дальнаука, 2009. – С. 31–34.
- [6] *Аннин, Б. Д.* Алгоритм численного решения задачи Коши для уравнений пластичности Треска / Б. Д. Аннин, В. В. Алёхин, В. В. Остапенко // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 5–13.

B. D. Annin, V. V. Alyokhin

**THE NUMERICAL DECISION OF CAUCHY PROBLEM FOR THE  
EQUATIONS OF IDEAL PLASTICITY WITH THE CONDITION OF FLUIDITY  
DEPENDING ON AVERAGE PRESSURE**

*M. Lavrentev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences*

*Novosibirsk State University*

**Abstract.** Cauchy problem about distribution of the zones of a plastic condition to the boundless environment from the border of a convex surface which normal pressure the tangents of an effort and the set speeds of the movings operate on is considered. In case of full plasticity and linear dependence of the condition of fluidity on the average pressure the system of the quasistatic equations of the ideal plasticity describing the intense-deformed condition of the environment is hyperbolic. At the numerical decision of this system the difference scheme is applied to the hyperbolic systems of the conservation laws.

**Keywords:** pressure, deformation, ideal plasticity, full plasticity, fluidity limit, hyperbolic system.

*Аннин Борис Дмитриевич*

*член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией, Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск*

**e-mail:** annin@hydro.nsc.ru

*Алёхин Владимир Витальевич*

*доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск*

**e-mail:** alekhin@hydro.nsc.ru

*Annin, Boris Dmitrievich*

*Corresponding member, Russian Academy of Sciences, M. Lavrentev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

*Alyokhin, Vladimir Vitalyevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Novosibirsk State University, Novosibirsk*

В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, С. Л. Осетров

## АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

**Аннотация.** Данная работа посвящена исследованию динамического и квазистатического изгиба пластин при малых и больших прогибах с использованием упругопластической и жесткопластической моделей деформирования в геометрически линейной и нелинейной постановках. Решение задач изгиба осуществлялось численным методом на основе модели теории оболочек типа Тимошенко. В результате сравнительного анализа показано, что жесткопластическая модель при классической геометрически линейной постановке неприменима для оценки максимальных прогибов упругопластических пластин. Определены границы применимости жесткопластической модели при немалых прогибах шарнирно опертых круглых пластин.

**Ключевые слова:** численное моделирование, изгиб, пластина, жесткопластическая модель, применимость, упругопластическая модель, геометрически линейная постановка, геометрически нелинейная постановка, статическое деформирование, динамическое деформирование, предельные состояния.

УДК: 539.3

**Введение.** Аналитическим и численным методам расчета жесткопластических конструкций (балки, пластины и оболочки) посвящены многие работы [1-5]. Однако, вопросы применимости жесткопластических моделей при расчете тонкостенных металлических конструкций, обладающих в реальности упругопластическими свойствами, мало изучены. Известно, что для использования жесткопластической модели [5] необходимо, чтобы энергия упругого деформирования была на порядок меньше работы пластического деформирования, а, следовательно, деформации должны на порядок превышать предел текучести. Например, для сталей пластические деформации должны превышать 1%, для алюминиевых сплавов – 3%. При таких изгибных деформациях тонкостенных конструкций, особенно балок и пластин, необходимо учитывать геометрически нелинейные эффекты деформирования, которые, в известных авторам публикациях по жесткопластическому анализу, не учитываются [1-5]. Данная работа посвящена исследованию квазистатического и динамического деформирования круглых пластин при малых и больших прогибах в геометрически линейной и нелинейной постановках с использованием упругопластической и жесткопластической моделей деформирования. Исследование проводится на основе сравнительного анализа результатов численного решения

---

Поступила 15.07.2010

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (код проекта НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00500-а).

задач изгиба пластин с шарнирно-неподвижной и подвижной опорой в различных постановках. Применяемый численный метод прошел многолетнюю верификацию на широком классе задач статики и динамики пластин и оболочек [6, 7, 8].

**1. Численное моделирование процессов динамического и квазистатического изгиба пластин.** Численное решение задач проводится в осесимметричной постановке. Пластина или оболочка рассматриваются в общей цилиндрической системе координат  $roz$ . Кроме того, вводится система координат  $s, \xi$ , связанная с деформируемой срединной поверхностью. Общая и местная система ортогональных координат связаны соотношениями  $ds = dr\psi_z - dz\psi_r$ , где  $\psi_r = -\partial z/\partial s$ ,  $\psi_z = -\partial r/\partial s$  – направляющие косинусы нормали,  $s$  – длина дуги вдоль образующей. Процесс нагружения разбивается на этапы. В пределах каждого этапа приращения перемещений и деформаций полагаются малыми. Текущая геометрия пластины, которая в процессе деформирования превращается в оболочку, представляется в виде:

$$r = r^H + u_r; \quad z = z^H + u_z; \quad ds = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2},$$

где  $r^H = r^H(s)$ ,  $z^H = z^H(s)$  – начальная геометрия,  $u_r = u_r(s, t)$ ,  $u_z = u_z(s, t)$  – перемещения,  $t$  – время. Толщина пластины изменяется во времени  $h = h(s, t)$ . Согласно теории Тимошенко, скорости перемещений задаются в виде:

$$\dot{u}_s(s, \xi, t) = \dot{u}_s(s, t) + \xi \dot{\varphi}(s, t); \quad \dot{u}_\xi(s, \xi, t) = \dot{u}_\xi(s, t),$$

где  $\dot{\varphi}(s, t)$  – угловая скорость поворота поперечного сечения, которая складывается из скорости поворота нормали  $\dot{\psi}(s, t)$  и скорости сдвига  $\dot{\gamma}(s, t)$ .

Скорости деформаций вычисляются через скорости перемещений в метрике текущего состояния:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ii} &= \dot{e}_{ii}^0 + \xi \dot{\chi}_{ii} (i = 1, 2); \quad \dot{e}_{11}^0 = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial s} \psi_z - \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s} \psi_r; \quad \dot{e}_{22}^0 = \frac{\dot{u}_r}{r}; \quad \dot{h} = -h(\dot{e}_{11}^0 + \dot{e}_{22}^0); \\ \dot{\chi}_{11} &= \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s}; \quad \dot{\chi}_{22} = \frac{\dot{\varphi}}{r} \psi_z; \quad \dot{\gamma}^0 = \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial s} \psi_r + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s} \psi_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Полные деформации определяются интегрированием скоростей деформаций по времени. Напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны с упругими деформациями законом Гука. Пластические деформации определяются вариантом теории течения с линейным упрочнением [5]. Вариационные уравнения движения пластины (оболочки) следует из принципа минимума мощности работы:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ [N_1 \psi_z + Q \psi_r] \frac{\delta \delta \dot{u}_r}{\partial s} + \left[ \frac{N_2}{r} + \rho h \ddot{u}_r \right] \delta \dot{u}_r \right\} r ds - (r P_r \delta \dot{u}_r)_{s=0, L} &= 0; \\ \int_0^L \left\{ [Q \psi_z - N_1 \psi_r] \frac{\delta \delta \dot{u}_z}{\partial s} + \rho h \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z \right\} r ds - (r P_z \delta \dot{u}_z)_{s=0, L} &= 0; \\ \int_0^L \left[ M_1 \frac{\delta \delta \dot{\varphi}}{\partial s} + \left( \frac{M_2}{r} \psi_z + Q + \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\varphi} \right) \delta \dot{\varphi} \right] r ds - (r M \delta \dot{\varphi})_{s=0, L} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $L$  – длина пластины;  $\rho$  – плотность материала;  $N_1, N_2, Q, M_1, M_2$  – внутренние усилия и моменты;  $P_r = P_r(t), P_z = P_z(t), M = M(t)$  – внешние силы и моменты, действующие на контуре пластины  $s = 0, L$ .

Для численного решения задачи применяется вариационно-разностный метод и явная схема «крест» [6], оценки устойчивости которой представлены в [9].

Выше описана моментная модель деформирования пластин и оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности. Для того, чтобы получить безмоментную модель, необходимо в уравнениях движения (2) не учитывать перерезывающую силу, т. е. положить  $Q = 0$ . При решении задач в геометрически линейной постановке уравнения формулируются в метрике исходного состояния. Для получения решения задачи квазистатического изгиба пластины на основе описанного выше численного метода решения динамических задач применялся подход, изложенный в [7]. Рассмотрим процесс динамического деформирования круглой пластины радиуса  $R$ , которая под действием равномерного давления  $p$ , превращается в оболочку вращения. Как известно, динамическая составляющая решения определяется темпом нарастания внешних воздействий и низшей частотой колебаний механической системы. Уменьшая скорость нагружения, в пределе можно получить статическое решение. Однако непосредственное использование описанной выше методики решения динамических задач деформирования пластин для моделирования квазистатического процесса не эффективно из-за ограничений, накладываемых на шаг по времени в явной схеме и невозможности исследования предельных состояний и закритического поведения пластины при задании внешнего давления.

Для повышения эффективности численной методики используем следующий прием. Суть его сводится к замене мягкого нагружения пластины внешним давлением на жесткое нагружение, при котором внешнее давление определяется воздействием на пластину жидкости при сжатии поршня. Внешнее давление на пластину осуществим идеализированной сжимаемой жидкостью, которая занимает некоторый объем  $V$ , ограниченный жесткими стенками, поршнем и пластинкой. Волновыми процессами в жидкости пренебрегаем. Уравнение состояния жидкости принимаем линейным:

$$p = \frac{K(V - V_0)}{V_0}, \quad (3)$$

где  $K$  – модуль объемного сжатия,  $V_0$  – начальный объем.

Запишем (3) в приращениях на временном интервале  $\Delta t$ :

$$\Delta p V_0 \alpha = \Delta V_1 - \Delta V_2; \quad \alpha = 1/K, \quad (4)$$

где  $\Delta V_1$  – изменение объема за счет перемещения поршня,  $\Delta V_2$  – изменение объема за счет деформирования пластины. Выразим  $\Delta V_2$  через компоненты вектора скорости перемещений всех узлов оболочки и подставим в (4). В результате получим:

$$\Delta p = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_2^*}{\beta F^2 + \alpha V_0}; \quad \beta = \frac{\Delta t^2}{\pi^2 \rho h R^2}, \quad (5)$$

где  $\Delta V_2^*$  – приращение объема, вычисленное по скоростям перемещений, если давление берется с предыдущего временного слоя;  $F$  – площадь поверхности оболочки.

Алгоритм определения гидростатического давления состоит в следующем. По заданной скорости движения поршня определяем  $\Delta V_1$ . Далее вычисляем скорости перемещения по численной методике, описанной выше, а затем  $\Delta V_2^*$  и  $F$ . Подсчитываем по (5) приращение давления и определяем полное давление, которое используем в качестве внешней нагрузки в (2).

Изложенный прием позволяет увеличить минимальную частоту собственных колебаний оболочки и получить приемлемое статическое решение при скоростях перемещений на два порядка больше, чем при непосредственном задании давления в уравнениях (2) как функции от времени. С использованием данного приема становится возможным моделировать процесс деформирования при достижении нагрузкой предельных значений и исследовать закритическое поведение пластины с учетом больших прогибов.

Рассмотрим далее задачи изгиба толстой и тонкой круглых пластин, закрепленных по контуру с помощью неподвижной и подвижной шарнирной опоры. Геометрические характеристики пластин: радиус  $R = 1$  м, толщина  $h_1 = 0,2$  м и  $h_2 = 0,04$  м.

При упругопластической постановке задачи модуль Юнга принимался  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона –  $\mu = 0,3$ , при жесткопластической постановке – модуль Юнга увеличивался в 1000 раз. При моделировании идеальной пластичности задавалось малое линейное упрочнение. Заметим, что при отсутствии упругого участка и упрочнения разрешающая система уравнений теряет свойство гиперболичности [10], и численная схема счета становится неустойчивой.

**2. Квазистатический изгиб пластины.** На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи квазистатического изгиба пластины толщиной  $h_1 = 0,04$  м с неподвижной опорой в различных постановках: упругопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (на рисунках кривые обозначены - У.П.Н.); жесткопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (Ж.П.Н.); упругопластическая модель в геометрически линейной постановке (У.П.Л.); жесткопластическая модель в геометрически линейной постановке (Ж.П.Л.). На рисунке приведены зависимости внешнего давления ( $p/\sigma_T$ ,  $\sigma_T$  – предел текучести) от максимального прогиба пластины ( $\max u_z/R$ ).

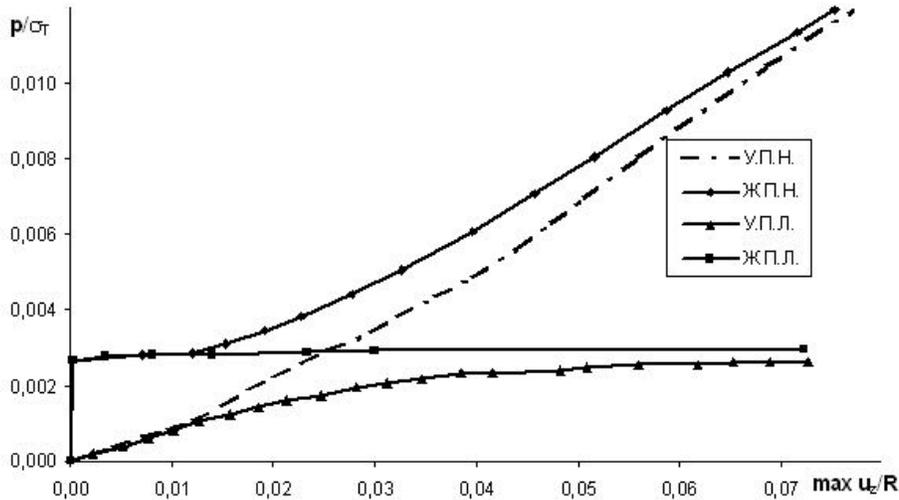


Рис. 1.

Для сравнительного анализа влияния различных моделей на рис. 2 представлены относительные отличия максимальных прогибов пластины с неподвижной опорой, полученных с использованием жесткопластической модели в геометрически нелинейной постановке (на рисунках кривая обозначена – Ж.П.Н.) и упругопластической модели в геометрически линейной постановке (У.П.Л.) от прогибов полученных с использованием упругопластической модели в геометрически нелинейной постановке.

Как видно из рисунков, до прогибов, равных 0,025 радиуса пластины, решение возможно получить только с учетом упругих свойств материала, но при этом проявляются существенные различия между линейной и нелинейной постановкой – отличие становится более 10% при прогибах более 0,012 радиуса пластины. При прогибах более 0,025 радиуса пластины жесткопластическое решение в нелинейной постановке начинает сближаться с упругопластическим и отличие составляет менее 10% при прогибах более 0,05 радиуса пластины.

Аналогичные исследования проводились и для пластины толщиной  $h_2 = 0,2$  м. На рис. 3 представлены результаты сравнительного анализа влияния различных моделей для пластины

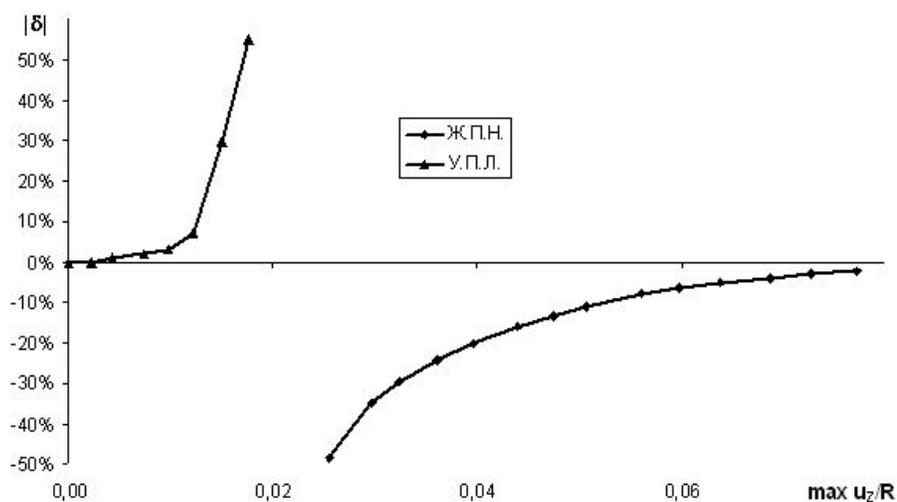


Рис. 2.

с неподвижной и подвижной опорой в обозначениях тех же, что на рис. 2. На рисунке сплошной линией показаны отличия для неподвижной опоры, пунктирной линией – для подвижной опоры.

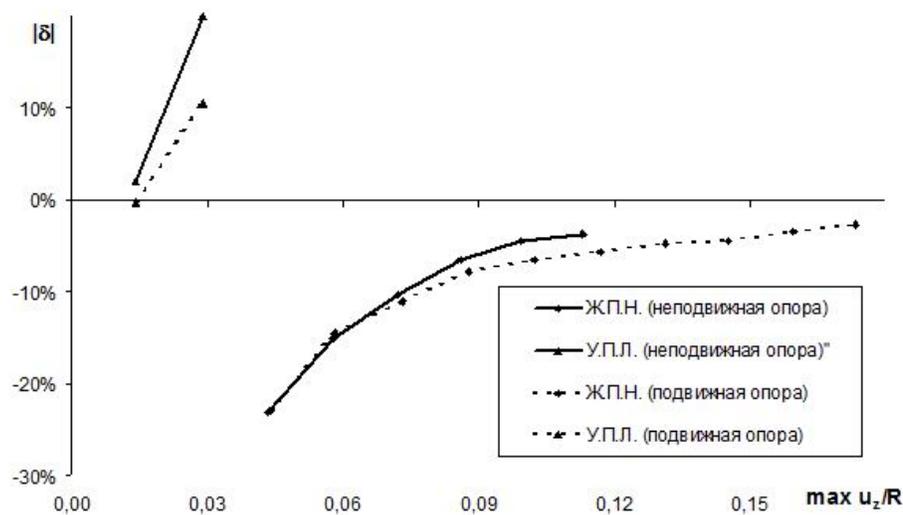


Рис. 3.

До прогибов, равных 0,03 радиуса пластины, решение возможно получить только с учетом упругих свойств материала. Различия между линейной и нелинейной постановкой становиться более 10% при прогибах более 0,02 радиуса пластины для неподвижной опоры и более 0,029 радиуса пластины для подвижной опоры. Жесткопластическое решение в нелинейной постановке начинает сближаться с упругопластическим при прогибах более 0,03 радиуса пластины, отличие составляет менее 10% при прогибах более 0,072 радиуса пластины при неподвижной опоре и более 0,08 радиуса пластины в случае подвижной опоры.

Решения задач изгиба пластин с подвижной опорой качественно мало отличаются от решений с неподвижной опорой. При геометрически линейной постановке задачи нет различия по прогибам между решениями для пластин с подвижными и неподвижными опорами. Отличие между геометрически линейной и нелинейной постановкой в случае неподвижной опоры больше, чем для подвижной и с увеличением прогиба растет за счет большей величины мембранных усилий в случае неподвижной опоры. Следует заметить, что в геометрически нелинейной постановке, в случае неподвижной опоры, прогибы пластины существенно меньше, чем в случае подвижной опоры. Известно, что на практике реализовать шарнирно подвижную опору затруднительно, так как даже при свободном касании края пластины о жесткую поверхность проскальзывание затруднено из-за возникающих сил трения. Поэтому физически правильнее рассматривать жестко-неподвижное закрепление пластины.

Для анализа предельных состояний и закритического поведения на рис. 4 представлены результаты численного решения задачи изгиба пластины толщиной  $h_1 = 0,2$  м с неподвижной и подвижной опорой в различных постановках: упругопластическая и жесткопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (на рисунке кривые обозначены «Нелинейная»); упругопластическая и жесткопластическая модель в геометрически линейной постановке (на рисунке кривые обозначены «Линейная»). На рисунке приведены зависимости внешнего давления ( $p/\sigma_T$ ,  $\sigma_T$  – предел текучести) от максимального прогиба пластины ( $\max u_z/R$ ). Сплошной линией представлено решение в случае неподвижной опоры, пунктирной – подвижной.

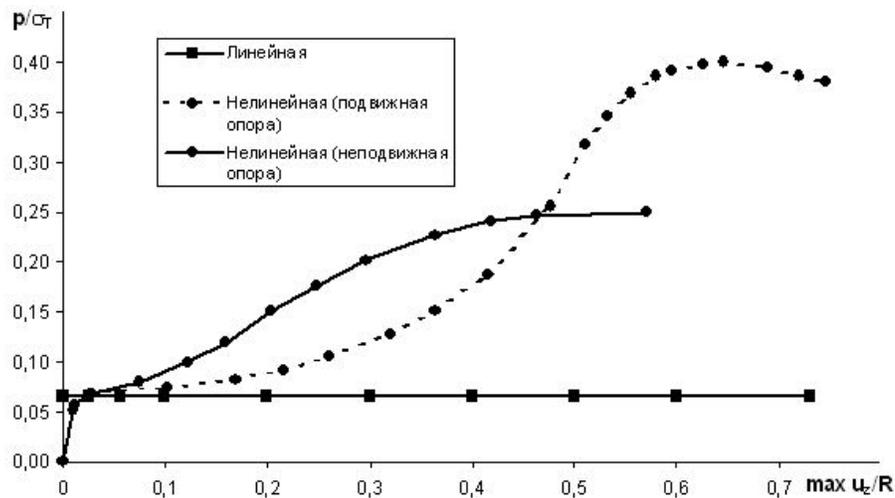


Рис. 4.

Как видно из рисунка, жесткопластическая модель в линейной постановке дает такое значение «предельной» нагрузки, при превышении которой происходит непропорционально большой рост прогибов. При решении задачи в геометрически нелинейной постановке нагрузки достигают максимального значения при прогибах 0,57 радиуса пластины с неподвижной опорой и 0,65 радиуса пластины с подвижной опорой.

**3. Динамический изгиб пластины.** Для моделирования динамического изгиба пластин в качестве граничных условий задавался импульс начальной скорости, равномерно распределенный по поверхности.

На рис. 5 представлены результаты численного решения задачи изгиба пластины толщиной  $h_1 = 0,04$  м с неподвижной опорой в различных постановках: упругопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (на рисунках кривые обозначены – У.П.Н.); жесткопластическая модель в геометрически нелинейной постановке (Ж.П.Н.); упругопластическая

модель в геометрически линейной постановке (У.П.Л.); жесткопластическая модель в геометрически линейной постановке (Ж.П.Л.). На рисунке приведены зависимости максимального безразмерного прогиба пластины ( $\max u_z/R$ ) от начальной скорости ( $\dot{u}_z(t=0) = V_0$ ). Следует отметить, что максимальные изгибные деформации в центре пластин при таких прогибах достигают 6%.

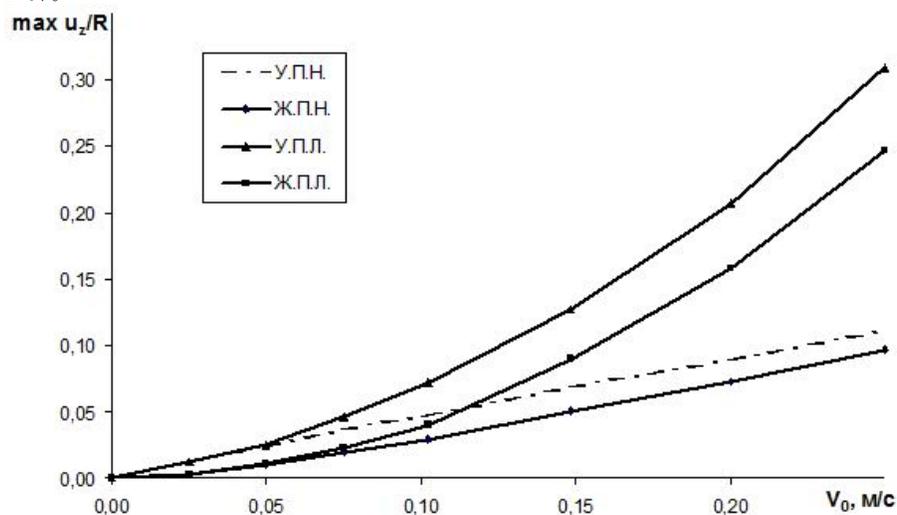


Рис. 5.

Для сравнительного анализа влияния различных моделей на рис. 6 представлены относительные отличия максимальных прогибов пластин с неподвижной опорой, полученных с использованием жесткопластической модели в геометрически нелинейной постановке (на рисунке кривая обозначена – Ж.П.Н.) и упругопластической модели в геометрически линейной постановке (У.П.Л.) от прогибов полученных с использованием упругопластической модели в геометрически нелинейной постановке.

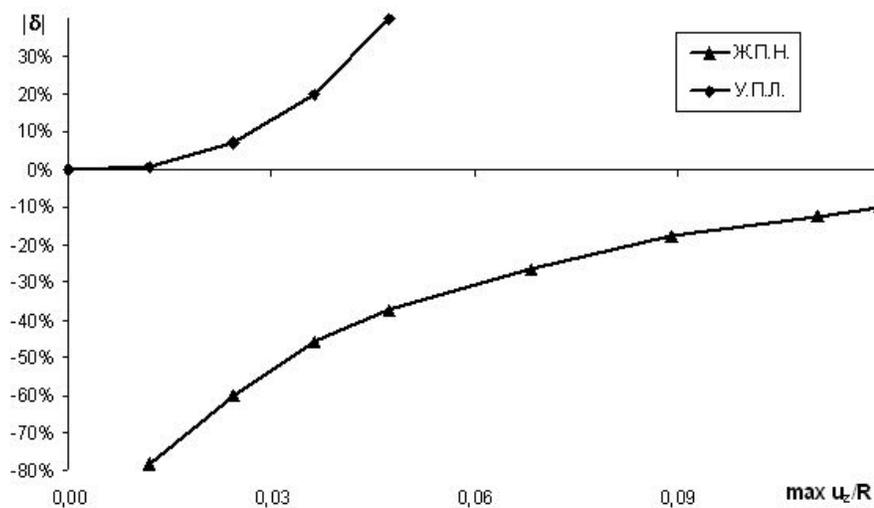


Рис. 6.

Из рисунков видно, что при малых прогибах жесткопластическое решение существенно отличается от упругопластического из-за неучета упругих свойств материала. В дальнейшем результаты начинают сближаться. Различия между жесткопластическим решением и упругопластическим становится менее 10% при прогибах более 0,12 радиуса пластины. При этом начинают проявляться существенные различия между линейной и нелинейной постановкой. Отличие составляет более 10% при прогибах более 0,03 радиуса пластины.

Аналогичные исследования проводились и для пластины толщиной  $h_2 = 0,2$  м. На рис. 7 представлены результаты сравнительного анализа влияния различных моделей для пластины с неподвижной и подвижной опорой в обозначениях тех же, что на рис. 6. На рисунке сплошной линией показаны отличия для неподвижной опоры, пунктирной линией – для подвижной опоры.

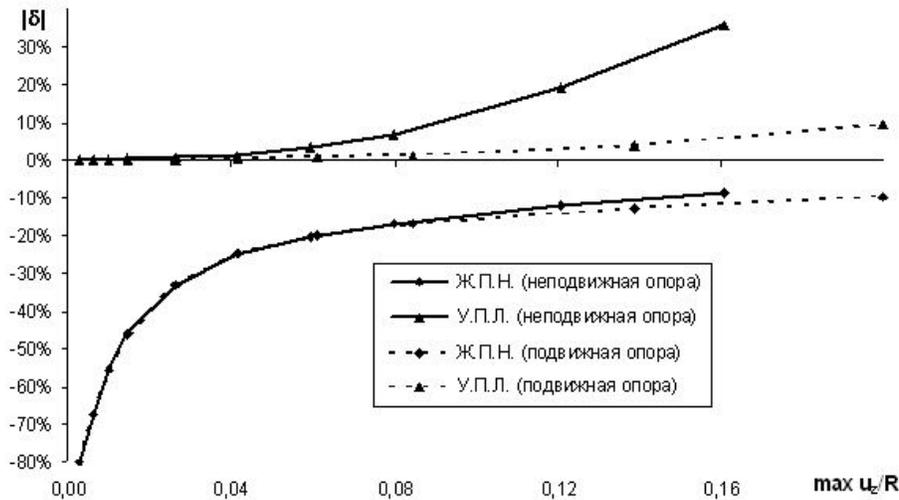


Рис. 7.

Различия между жесткопластическим решением и упругопластическим становится менее 10% при прогибах более 0,15 радиуса пластины для неподвижной опоры и более 0,2 радиуса пластины для подвижной опоры. Различия между линейной и нелинейной постановкой более 10% начинают проявляться при прогибах более 0,09 радиуса пластины для неподвижной опоры и более 0,2 радиуса пластины для подвижной опоры.

**Закключение.** На основе проведенных исследований можно сделать вывод, что жесткопластический анализ неприменим для оценки прогибов упругопластических пластин в рамках классической геометрически линейной теории. Применение его в геометрически нелинейной постановке обосновано только при немалых прогибах, например, в технологических операциях импульсной обработки тонкостенных заготовок давлением [11]. Погрешности жесткопластического анализа прогибов уменьшаются с увеличением толщины пластины, но модель Кирхгофа-Лява применима только для пластин, толщина которых на порядок меньше диаметра. Применение жесткопластического анализа оправдано при квазистатическом нагружении для грубой оценки величины "безопасной" нагрузки пластин, так как прогибы, соответствующие этой нагрузке, не превышают 1-2% от диаметра пластин. Действительная предельная нагрузка в разы отличается от найденной по жесткопластической линейной модели, вследствие неучета геометрически нелинейных эффектов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гопкинс*. Динамика пластической круглой пластинки / Гопкинс, Прагер // *Механика*. – 1955. – Вып. 3. – С. 112–122.
- [2] *Ерхов, М. И.* Теория идеальнопластических сред и конструкций / М. И. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
- [3] *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск. : Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 320 с.
- [4] *Немировский, Ю. В.* Вязкопластическая динамика изотропных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // *ПМТФ*. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 123–134.
- [5] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
- [6] *Баженов, В. Г.* Исследование упругопластического выпучивания оболочек вращения при ударном нагружении / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // *Прикладные проблемы прочности и пластичности : всесоюз. межвуз. сб.* – 1975. – Вып. 2. – С. 44–50.
- [7] *Баженов, В. Г.* Большие деформации оболочек вращения с учетом моментности напряженного состояния / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем : всесоюз. межвуз. сб.* – 1983. – С. 55–63.
- [8] *Баженов, В. Г.* Исследование применимости жесткопластической модели в задачах импульсного деформирования упругопластических пластин при малых и больших прогибах / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, С. Л. Осетров // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния*. – 2008. – № 1. – С. 64–69.
- [9] *Баженов, В. Г.* Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек / В. Г. Баженов, Д. Т. Чекмарев. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. – 159 с.
- [10] *Садовский, В. М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред / В. М. Садовский. – М. : Наука : Физматлит, 1997. – 208 с.
- [11] *Баженов, В. Г.* Исследования больших вязкопластических деформаций цилиндрических оболочек с применением магнитно-импульсного способа нагружения / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, М. В. Петров, А. Г. Угодчиков // *Машиноведение*. – 1983. – № 5. – С. 73–80.

*V. G. Bazhenov, V. K. Lomunov, S. L. Osetrov*

**THE APPLICABILITY ANALYSIS OF THE STIFF-PLASTIC MODEL IN THE PROBLEMS OF A STATIC AND DYNAMIC BEND OF PLATES**

*N. Lobachevsky Scientific Research Institute of Mechanics of the Nizhniy Novgorod State University*

**Abstract.** This work is devoted to a research of a dynamic and quasistatic bend of plates at small and big deflections using elasto-plastic and stiff-plastic deformation models in the geometrically linear and nonlinear statements. The decision of the problems of a bend was carried out by a numerical method on the basis of a model of the covers of Timoshenko type theory. As a result of the comparative analysis it is shown that the stiff-plastic model at classical geometrically linear statement is inapplicable for an estimation of the maximum deflections of the elasto-plastic plates. The applicability borders of the stiff-plastic models are defined at the considerable deflections of the simply supported round plates.

**Keywords:** numerical modelling, a bend, a plate, a stiff-plastic model, applicability, an elasto-plastic model, a geometrically linear statement, a geometrically nonlinear statement, static deformation, dynamic deformation, the limiting conditions (states).

*Баженов Валентин Георгиевич*

*заведующий отделом “Динамика конструкций”, доктор физико-математических наук, профессор, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород*

**e-mail:** bazhenov@mech.unn.ru

*Ломунов Владимир Кириллович*

*старший научный сотрудник, кандидат технических наук, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород*

**e-mail:** lomunov@mech.unn.ru

*Осетров Сергей Львович*

*старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород*

**e-mail:** ocetpob@mail.ru

*Bazhenov, Valentine Georgievich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head, Department of Dynamics of Designs, N. Lobachevsky Scientific Research Institute of Mechanics of the Nizhniy Novgorod State University, Nizhniy Novgorod*

*Lomunov, Vladimir Kirillovich*

*Candidate of Phys. & Math., Senior Research Assistant, N. Lobachevsky Scientific Research Institute of Mechanics of the Nizhniy Novgorod State University, Nizhniy Novgorod*

*Osetrov, Sergey Lvovich*

*Candidate of Phys. & Math., Senior Research Assistant, N. Lobachevsky Scientific Research Institute of Mechanics of the Nizhniy Novgorod State University, Nizhniy Novgorod*

А. А. Бажин, Е. В. Мурашкин

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОЖНЕННЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

*Институт автоматизи и процессов управления ДВО РАН*

**Аннотация.** В настоящей работе решается задача о гидростатическом сжатии одиночного сферического дефекта сплошности, все необратимые деформации относятся на счет явления ползучести. Определенная сложность заключается на таком пути в том, что в окрестности микродефекта деформации всегда большие и следовательно, все рассмотрение следует провести в рамках модели неустановившейся ползучести при больших деформациях. В качестве основы для построения данной модели принимается теория больших упругопластических деформаций, построенная в [3] и степенной закон ползучести.

**Ключевые слова:** напряжение, большие деформации, ползучесть, релаксация, упругость, вязкоупругость.

УДК: 539.3

**Введение.** Металлы, как и все конструкционные материалы, обладают свойствами ползучести в определенном диапазоне напряжений и температуры. Даже при комнатной температуре обычные конструкционные стали или алюминиевые сплавы обнаруживают свойства ограниченной ползучести. Малые же размеры дефектов уже при умеренных внешних нагрузках приводят к необратимому деформированию материала в их окрестностях и к возникновению внутренних остаточных напряжений, которые также существенно влияют на длительную прочность изделий. При этом хотя бы необратимые деформации в окрестностях дефектов сплошности считать малыми нельзя.

Ранее [1] было показано, что в рамках такой теории больших упругопластических деформаций при идеальном характере пластического течения наблюдается эффект приспособляемости одиночных дефектов сплошности к циклическим нагрузкам по типу “нагрузка - разгрузка”. То есть после каждой разгрузки размеры дефекта не изменяются, как и уровень и распределение деформаций и напряжений. Очевидно, что учет реологических свойств материала должен выводить из такой ситуации. Однако оказалось [2], что учет вязких свойств материалов на стадии, предвещающей пластическое течение, или на стадии разгрузки приводит к значительному, по сравнению с наблюдаемым в случае идеальной пластичности, уменьшению размера дефекта, но при использовании модели вязкоупругопластической среды релаксация напряжений не проявляет себя в процессе разгрузки. Для изучения этого явления предлагается модель среды с учетом больших деформаций, когда все необратимые деформации относятся к деформациям ползучести.

**1. Основные модельные зависимости.** За основу возьмем модель больших упругопластических деформаций [3], основные кинематические соотношения которой в прямоугольной

декартовой системе пространственных (эйлеровых) координат могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left( (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_m u_{i,m}, \\ r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij} (e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношениях (1),  $u_i, v_i$  - компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды;  $e_{ij}$  и  $p_{ij}$  - обратимая и необратимая составляющие тензора полных деформаций Альманси  $d_{ij}$ ;  $\frac{D}{Dt}$  - объективная производная тензоров по времени; источник  $\varepsilon_{ij}^p$  в уравнении изменения тензора  $p_{ij}$  - тензор скоростей необратимых деформаций,  $z_{ij} = -z_{ij}$  - нелинейная часть тензора вращений, полностью выписанная в [3], определяющая его отличие от тензора жесткого вращения  $w_{ij}$ .

Следуя формализму неравновесной термодинамики, напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и для рассматриваемого случая несжимаемой среды данные зависимости записываются в виде

$$\sigma_{ij} = -p_1 \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (2)$$

В соотношениях (2)  $p_1$  - добавочное гидростатическое давление,  $W$  - упругий потенциал, который для изотропной среды принимается в форме

$$\begin{aligned} W &= (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - kJ_1J_2 - \zeta J_1^2, \\ J_1 &= e_{jj} - \frac{1}{2} e_{ij}e_{ji}, \quad J_2 = e_{ij}e_{ji} - e_{ij}e_{jk}e_{ki} + \frac{1}{4} e_{ij}e_{jk}e_{ks}e_{si}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\lambda, \mu, a, b, \theta$  - упругие модули среды.

Принимаем, что компоненты тензора скоростей необратимых деформаций связаны с компонентами напряжений законом ползучести Нортона [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^p &= \frac{dV(\Sigma)}{d\sigma_{ij}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma (\sigma_{ij})^n, \\ \Sigma &= \sqrt{\frac{3}{2}} ((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $B$  и  $n$  заданные постоянные,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные значения тензора напряжений.

**2. Постановка задачи. Разрешающаяся система уравнений.** В рамках описанной выше модели больших деформаций были решены задачи о поведении границы сферического микродефекта (микропоры) в условиях эксплуатационных нагрузок.

Рассмотрим шар начального радиуса  $R_0$  с одиночным сферическим дефектом сплошности (микропора) начального радиуса  $r_0$  в центре шара. Процесс деформирования задается краевыми условиями

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0, \quad (5)$$

в которых  $\sigma_{rr}$  - радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат  $r, \varphi, \theta$ ,  $R(t) \gg r_0$  - радиус сферической поверхности, на которой задается внешнее давление,  $s(t)$  - текущий радиус границы микропоры.

Кинематика среды согласно принятому условию несжимаемости определяется с точностью до неизвестной функции  $\varphi(t)$ :

$$u_r = r - (r^3 + \varphi(t))^{\frac{1}{3}}, \quad \varphi(t) = s_0^3 - s^3(t) = R_0^3 - R^3(t), \quad (6)$$

где  $u = u_r$  - единственная не равная нулю компонента вектора перемещений.

Согласно формулам (2) и (3), компоненты напряжений с точностью до неизвестной функции добавочного гидростатического давления вычисляются зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -p_1 + g_1 e_{rr} + g_2 e_{rr}^2 - g_3 e_{rr} e_{\theta\theta} + g_4 e_{rr}^3 + g_5 e_{rr} e_{\theta\theta}^2 + g_6 e_{rr}^2 e_{\theta\theta} - g_7 e_{rr}^4 + \\ & + g_8 \left( e_{rr} e_{\theta\theta}^4 - 4e_{rr} e_{\theta\theta}^3 + 2e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^3 - \frac{1}{2} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^4 \right) - g_9 e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^2 + g_{10} \left( 3e_{rr}^5 - \frac{1}{2} e_{rr}^6 \right) + \\ & + 2g_{11} \left( e_{rr}^4 e_{\theta\theta} + 2e_{rr}^3 e_{\theta\theta}^2 - 4e_{rr}^3 e_{\theta\theta} - \frac{1}{2} e_{rr}^4 e_{\theta\theta}^2 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & -p_1 + g_1 e_{\theta\theta} + g_{12} e_{\theta\theta}^2 - \frac{1}{2} g_3 e_{rr} e_{\theta\theta}^2 + g_{13} e_{\theta\theta}^3 + g_{18} \left( e_{\theta\theta}^5 - \frac{1}{6} e_{\theta\theta}^6 \right) + \\ & + g_{11} \left( \frac{1}{4} e_{rr}^4 e_{\theta\theta}^2 - 2e_{rr}^3 e_{\theta\theta} + \frac{1}{2} e_{rr}^4 e_{\theta\theta} - e_{rr}^3 e_{\theta\theta}^2 \right) + g_{15} e_{rr} e_{\theta\theta}^2 - g_{16} e_{\theta\theta}^4 + \\ & + g_{14} e_{rr}^2 e_{\theta\theta} - g_{17} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^2 + g_8 \left( 2e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^3 + e_{rr} e_{\theta\theta}^4 - \frac{1}{2} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^4 - 4e_{rr} e_{\theta\theta}^3 \right), \end{aligned}$$

$$g_1 = 2\mu, \quad g_2 = \mu + 4a + 4b + 2k, \quad g_3 = 4(2b + k),$$

$$g_4 = 4 \left( a + b + 2k + \frac{3}{2}\zeta \right), \quad g_5 = 2(2b + 3k + 12\zeta), \quad g_6 = g_5 + 4k,$$

$$g_7 = a + b + \frac{19}{2}k + 9\zeta, \quad g_8 = k + 6\zeta, \quad g_9 = 2b + 7k + 24\zeta, \quad g_{10} = \frac{3}{2}(k + \zeta),$$

$$g_{11} = k + 3\zeta, \quad g_{12} = \mu + 4a + 8b + 4k, \quad g_{18} = 9(k + 2\zeta),$$

$$g_{13} = 4(a + 2b + 4k + 6\zeta), \quad g_{14} = \frac{1}{2}g_5 - 6\zeta, \quad g_{15} = \frac{1}{2}g_6 + 12\zeta,$$

$$g_{16} = a + 2b + 19k + 36\zeta, \quad g_{17} = b + \frac{7}{2} + 15\zeta, \quad p_1 = P - \frac{\partial W}{\partial J_1}.$$

Компоненты полных деформаций по известному полю перемещений (6) находятся соотношениями

$$\begin{aligned} d_{rr} = & \frac{1}{2} \left( 1 - H^{-4/3} \right), \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left( 1 - H^{2/3} \right), \quad H = 1 + \frac{\varphi(t)}{r^3}, \\ & d_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2d_{rr}}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно кинематическим зависимостям (1) имеем

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}, \quad (9)$$

$$e_{rr} = 1 - x^{-2/3}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - x^{1/3}, \quad x = \left( \frac{1 - 2p_{rr}}{1 - 2d_{rr}} \right)^3 = H^4 (1 - 2p_{rr})^3.$$

Подстановка (8) и (9) в определяющие соотношения (4) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1} = & Bn \Sigma^{n-1} \left( 1 - H^{-8/3} (1 - 2p_{rr})^{-2}, 1 - H^{1/3} (1 - 2p_{rr}) \right), \\ \Sigma(a, b) = & g_1(a - b) - g_2 a^2 + g_{12} b^2 + g_4 a^3 - g_{13} b^3 + \frac{1}{2} g_3 \left( \frac{1}{2} ab^2 - ab \right) + \\ & + g_{19} \left( a^2 b - \frac{1}{2} a^2 b^2 \right) + g_{10} \left( 3b^5 - \frac{1}{2} a^6 \right) + \frac{1}{3} g_{18} \left( \frac{1}{2} a^6 - 3b^5 \right) - g_7 a^4 + \\ & + \frac{3}{4} g_{11} \left( a^4 b + 2a^3 b^2 - \frac{1}{2} a^4 b^2 - 4a^3 b \right) + g_{16} b^4, \\ & g_{19} = 2b + 7k + 18\zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) в каждой точке среды  $s(t) \leq r \leq R(t)$  является обыкновенным дифференциальным уравнением для вычисления компоненты необратимых деформаций  $p_{rr}$  (или  $p_{\theta\theta}$ ). С другой стороны компоненты напряжений находятся интегрированием уравнения движения

$$\sigma_{rr,r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho_0 \left( \frac{\ddot{\varphi}(t)}{3r^2} + \frac{2}{9} \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{r^5} \right),$$

используя второе граничное условие (5). Вычислив напряжения на внешней границе согласно первому граничному условию (5) получаем интегро-дифференциальную связь между нагружающим давлением  $P(t)$  и функцией  $\varphi(t)$

$$P(t) = 2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{N(e_{rr}, e_{\theta\theta})}{r} dr - \rho_0 \left( \frac{\ddot{\varphi}(t)}{3} \left( \frac{1}{R(t)} - \frac{1}{s(t)} \right) + \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{18} \left( \frac{1}{R(t)^4} - \frac{1}{s(t)^4} \right) \right). \quad (11)$$

**3. Анализ численных экспериментов.** Приведем численные результаты расчетов. На рисунках 1 и 2 проиллюстрированы изменения нагружающего усилия и границы микропоры соответственно. До момента времени  $\tau_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \frac{1}{R_0} t$  происходит активное нагружение образца, при котором по заданному увеличивающемуся нагружающему усилию  $P(t)$ , решая интегро-дифференциальную систему уравнений (10 - 11), находим неизвестную функцию  $\varphi(t)$  и распределение необратимых деформаций  $p_{rr}$ . Начиная с момента  $\tau_1 = 15$  рассмотрим несколько вариантов развития процесса деформирования материала среды. Тогда начальными условиями для уравнений (10 - 11) станут параметры напряженно-деформированного состояния при  $\tau = \tau_1$ .

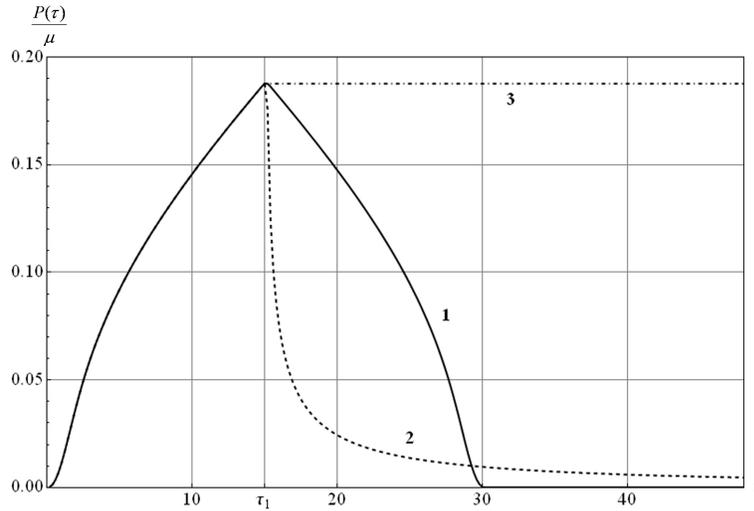


Рис. 1. Изменение нагружающего усилия  $\frac{P(\tau)}{\mu}$

Под цифрой 1 (сплошная линия) на рис. 1, 2 изображен процесс разгрузки материала образца, когда нагружающее усилие сначала уменьшается и становится равным 0 в момент  $\tau = 30$ , а после этого остается некоторое время свободным от внешнего давления. Процесс релаксации напряжений (2, пунктирная линия) соответствует неизменному полю полных деформаций, а перераспределение обратимых и необратимых составляющих необходимо вызывает уменьшение уровня напряжений в теле. Если зафиксировать нагружающее усилие и на таком пути проследить за поведением границы микродефекта (3, штрихпунктирная линия),

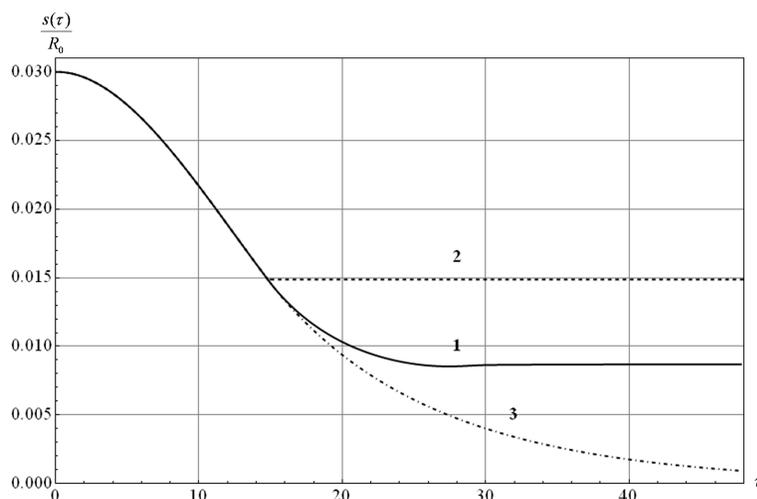


Рис. 2. Изменение радиуса полости  $\frac{s(\tau)}{R_0}$

оказывается, радиус полости постепенно уменьшается, т.е. в окрестности дефекта начинается процесс ползучести материала.

**Заключение.** Предложенная модель процесса нелинейной ползучести при больших деформациях основана на модели больших упругоэластических деформаций, в которой разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие является следствием понятных термодинамических принципов, что является существенным преимуществом примененного подхода. Решенные задачи о ползучести, релаксации напряжений и разгрузке в шаре с одиночным сферическим дефектом сплошности имеют своей целью описание экспериментально известного процесса залечивания микропор. Показано, что построенная модель больших упруго-ползучих деформаций удовлетворительно описывает процессы ползучести материала при активном нагружении и последующем процессе релаксации остаточных напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буренин, А. А. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругоэластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // ДАН. – 2000. – Т. 375, № 6. – С. 767–769.
- [2] Буренин, А. А. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругоэластического материала / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Е. В. Мурашкин // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 110–119.
- [3] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругоэластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады АН СССР. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 199–201.
- [4] Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752с.

*A. A. Bazhin, E. V. Murashkin*

**THE MATHEMATICAL MODELLING OF THE COMPLICATED  
RHEOLOGICAL PROPERTIES OF THE MATERIALS IN THE CONDITIONS  
OF THE BIG DEFORMATIONS**

*Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch, Russian Academy of  
Sciences*

**Abstract.** In the present work the problem about hydrostatic compression of a single spherical entirety defect solves, all irreversible deformations are charged to the creep phenomenon. The certain complexity consists on such way that in the vicinities of an microdefect the deformations are always big and, hence, all consideration should be spent within the limits of a model of unsteady creep at the big deformations. The theory of the big elasto-plastic deformations, build on [3] and the power creep law is accepted as a basis for the construction of the given model.

**Keywords:** the pressure, the big deformations, creep, relaxation, elasticity, viscoelasticity.

*Бажин Александр Александрович*

*аспирант, инженер-математик, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,  
г. Владивосток*

**e-mail:** [aleksandrbazhin@yandex.ru](mailto:aleksandrbazhin@yandex.ru)

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

*кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматики и процес-  
сов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** [murashkin@iacp.dvo.ru](mailto:murashkin@iacp.dvo.ru)

*Bazhin, Alexander Alexandrovich*

*Postgraduate Student, Engineer-Mathematician, Institute of Automation and Control Processes,  
Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

*Murashkin, Evgeniy Valerievich*

*Candidate of Phys. & Math., Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far  
Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

М. В. Богданов, А. В. Ковалев, А. Ю. Яковлев

## О МЕХАНИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕМЕНТОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ ТРАНСЛЯЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ

Воронежский государственный университет

**Аннотация.** В работе методом [3] проводится определение напряженного состояния в составной упругопластической конструкции, состоящей из толстой плиты, ослабленной эллиптическим отверстием, в которое с натягом запрессовано эллиптическое включение. Материал плиты и включения описываются соотношением модели Ишлинского – Прагера [2, 4].

**Ключевые слова:** упругопластическая конструкция, запрессовка, плита с включением, напряженное состояние, модель Ишлинского – Прагера, трансляционное упрочнение.

УДК: 539.374

Задача об определении напряженного и деформированного состояния в составных упругих и упругопластических конструкциях рассматривалась многими авторами, в том числе в [5–8].

В настоящей работе определяется напряженное состояние в толстой плите с эллиптическим отверстием, в которую с натягом запрессовано несколько большее по размеру эллиптическое цилиндрическое включение. На бесконечности плита растягивается взаимно перпендикулярными усилиями  $P_1$  и  $P_2$ , по контуру внутреннего отверстия во включении приложено внутреннее давление  $P_0$ .

Примем, что под влиянием внешних нагрузок включение переходит полностью в пластическое состояние, а в плите возникает пластическая зона, целиком охватывающая контур эллиптического отверстия.

Материал плиты и включения в пластическом состоянии описывается соотношениями модели Ишлинского – Прагера [2, 4] с поверхностями нагружения

$$F_n = (S_{ijn} - c_n e_{ijn}^p) \cdot (S_{ijn} - c_n e_{ijn}^p) - 2k_n^2, \quad (1)$$

где  $S_{ijn}$  – компоненты девиатора тензора напряжений,  $c_n$  – коэффициент упрочнения,  $e_{ijn}^p$  – компоненты тензора пластических деформаций,  $k_n$  – предел текучести материала на сдвиг, индекс  $n$  имеет значение 1 для плиты и 2 для включения.

Задача решается методом возмущений [3] в цилиндрической системе координат  $\rho, \theta, z$  для случая плоской деформации. Ось  $0z$  направлена вдоль оси цилиндра, а начало координат выбираем в центре последнего. В плоскости, перпендикулярной оси  $0z$ , согласно [6, 8] имеем уравнение контура, ограничивающего включение до деформации

$$\rho = \alpha_1(1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \dots), \quad (2)$$

уравнение контура, ограничивающего отверстие в плите до деформации

$$\rho = \alpha(1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \dots), \quad (3)$$

уравнение контура, ограничивающего внутреннее отверстие во включении до деформации

$$\rho = \beta(1 + \delta d_2 \cos 2\theta - \dots), \quad (4)$$

где  $\alpha_1 > \alpha$ , введем  $\varepsilon = \alpha_1 - \alpha$  – малое по сравнению с единицей,  $\alpha, \alpha_1, \beta$  – радиусы круговых контуров в нулевом приближении соответственно: отверстия в плите, внешности включения, внутреннего отверстия во включении,  $\delta$  – малый параметр, характеризующий отклонение контура от окружности, возмущение статических граничных условий  $\left(\delta d_3 = \frac{P_1 - P_2}{2k_1}\right)$ ,  $d_1, d_2, d_3$  – безразмерные константы.

Решение задачи ищем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_n} &= \sigma_{\rho_n}^{(0)} + \delta \sigma_{\rho_n}^{(1)}, & \sigma_{\theta_n} &= \sigma_{\theta_n}^{(0)} + \delta \sigma_{\theta_n}^{(1)}, \\ \tau_{\rho\theta_n} &= \tau_{\rho\theta_n}^{(0)} + \tau_{\rho\theta_n}^{(1)}, & \sigma_{z_n} &= \frac{1}{2}(\sigma_{\rho_n} + \sigma_{\theta_n}), \\ \rho_{\text{кон}} &= R_0 + \delta R_1, & r_s &= 1 + \delta r_s^{(1)}, & c_n &= c_n^{(0)} + \delta c_n^{(1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где верхний индекс указывает на номер приближения,  $n = 1, 2, \delta$  – малый параметр,  $\sigma_{\rho_n}, \sigma_{\theta_n}, \sigma_{z_n}, \tau_{\rho\theta_n}$  – компоненты тензора напряжений,  $r_s$  – радиус упругопластической границы в плите,  $\rho_{\text{кон}}$  – линия контакта включения и плиты.

Ввиду малости величины  $\varepsilon$ , примем за линию контакта плиты и включения внешнюю границу включения, которая при разложении по малому параметру представляется в форме

$$\rho_{\text{кон}} = R^{(0)} + \delta R^{(1)}, \quad (6)$$

где  $R^{(0)} = \alpha_1, R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos 2\theta$ .

Все соотношения записаны в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к  $k_1$  – пределу текучести на сдвиг материала плиты. Величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу упругопластической границы в плите  $r_{s0}$ . Для обозначения безразмерных величин используем прежние обозначения.

За нулевое приближение выберем осесимметричное состояние толстой плиты с круговым отверстием радиуса  $\alpha$ , содержащим с натягом круглый цилиндр с внешним радиусом  $\alpha_1$  и внутренним  $\beta$ . На бесконечности конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями интенсивностями  $P = \frac{P_1 + P_2}{2k_1}$ . Внутренний контур включения нагружен усилиями интенсивностью  $P_0$ . Материал плиты и включения в пластической зоне описывается условием пластичности Мизеса для идеально упругопластического материала ( $c_n = 0$ ).

Следуя [3], для пластины в упругой области имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(0)} &= P - \frac{\chi_1}{\rho^2}, & \sigma_{\theta_1}^{(0)} &= P + \frac{\chi_1}{\rho^2}, & u_{\rho_1}^{(0)} &= \frac{\chi_1}{2G\rho}, \\ e_{\rho_1}^{(0)} &= -\frac{\chi_1}{2G\rho}, & e_{\theta_1}^{(0)} &= \frac{\chi_1}{2G\rho}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\chi_1 = \text{sign}(P + q), q = \sigma_{\rho_1}^{(0)} \Big|_{\rho=\alpha_1}$ .

В пластической зоне пластины имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(0)} &= 2\chi_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1} + 2k\chi_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta} - P_0, & \sigma_{\theta_1}^{(0)} &= 2\chi_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right) + 2k\chi_2 \ln \frac{\alpha_1}{\beta} - P_0, \\ u_{\rho_1}^{(0)} &= \frac{\chi_1}{2G_1\rho}, & e_{\theta_1}^{(0)} &= \frac{\chi_1}{2G_1} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right), & e_{\rho_1}^{(0)} &= -\frac{\chi_1}{2G_1} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $G_1$  – модуль сдвига материала плиты,  $\chi_2 = \pm 1, k = \frac{k_2}{k_1}$ .

Во включении распределение поля напряжений и перемещений имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho_2}^{(0)} &= 2k\chi_2 \ln \frac{\rho}{\beta} - P_0, & \sigma_{\theta_2}^{(0)} &= 2k\chi_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\beta}\right) - P_0, \\ e_{\theta_2}^{p(0)} &= \left(\frac{\chi_1}{2G_1} - (\alpha_1 - \alpha)\alpha_1\right) \frac{1}{\rho^2} - \frac{k\chi_2}{2G_2},\end{aligned}\tag{9}$$

где  $G_2$  – модуль сдвига материала включения. Из условий сопряжения на упругопластической границе в плите определяем радиус упругопластической границы в плите

$$r_{s0} = \frac{1}{2\chi_1} \exp \left( 2\chi_1 \ln \alpha_1 - 2k\chi_2 \ln \left( \frac{\alpha_1}{\beta} \right) + P_0 + P - \chi_1 \right).\tag{10}$$

Рассмотрим первое приближение.

Граничные условия на бесконечности запишутся следующим образом

$$\sigma_{\rho_1}^{\infty} = P - \delta d_3 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta_1}^{\infty} = \delta d_3 \sin 2\theta,\tag{11}$$

где  $P = \frac{P_1 + P_2}{2k}$ ,  $\delta d_3 = \frac{P_1 - P_2}{2k}$ ,  $d_3$  – безразмерная постоянная.

На внутреннем контуре включения граничные условия для первого приближения имеют вид [3]

$$\begin{aligned}\left( \sigma_{\rho_2}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_2}^{(0)}}{d\rho} \beta d_2 \cos 2\theta \right) \Big|_{\rho=\beta} &= 0; \\ \left( \tau_{\rho\theta_2}^{(1)} + 2 \left( \sigma_{\theta_2}^{(0)} - \sigma_{\rho_2}^{(0)} \right) d_2 \sin 2\theta \right) \Big|_{\rho=\beta} &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

На упругопластической границе в плите линеаризированные условия сопряжения также имеют вид [3]

$$\left[ \sigma_{ij_1}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{ij_1}^{(0)}}{\partial \rho} r_s^{(1)} \right] \Big|_{\rho=1} = 0,\tag{13}$$

где  $\sigma_{ij_1}^{(0)}$ ,  $\sigma_{ij_1}^{(1)}$  – компоненты тензора напряжений для нулевого и первого приближения.

Вдоль линии контакта плиты и включения, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho_1}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_1}^{(0)}}{d\rho} R^{(1)} &= \sigma_{\rho_2}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_2}^{(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \\ \tau_{\rho\theta_2}^{(1)} - \left( \sigma_{\theta_2}^{(0)} - \sigma_{\rho_2}^{(0)} \right) s_1 &= \tau_{\rho\theta_1}^{(1)} - \left( \sigma_{\theta_1}^{(0)} - \sigma_{\rho_1}^{(0)} \right) s_1 = 0, \quad \text{при } \rho = R^{(0)},\end{aligned}\tag{14}$$

где  $s_1 = R^{(1)}/R^{(0)}$ .

Рассмотрим случай малого упрочнения [1]  $c_n = \delta c_n^{(1)}$ ,  $n = 1, 2$ .

Согласно алгоритму Ивлева – Ершова при учете граничных условий (11), имеем в упругой области плиты для  $\infty > \rho > 1$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho_1}^{(1)} &= \frac{A_{\text{пл}}}{\rho^2} - (d_3 + 6a_{21}\rho^{-4} + 4a_{22}\rho^{-2}) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta_1}^{(1)} &= \frac{A_{\text{пл}}}{\rho^2} + (d_3 + 6a_{21}\rho^{-4}) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\rho\theta_1}^{(1)} &= (d_3 - 6a_{21}\rho^{-4} - 2a_{22}\rho^{-2}) \sin 2\theta,\end{aligned}\tag{15}$$

где  $A_{\text{пл}}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  – константы, определяемые из условий сопряжения (14) на границе контакта плиты и включения.

В пластической области плиты, согласно [1, 3, 8] получим уравнение

$$\sigma_{\theta_1}^{(1)} - \sigma_{\rho_1}^{(1)} = 2c_1^{(1)} e_{\theta_1}^{p(0)},$$

откуда для напряжений выводим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1}^{(1)} &= A_{\text{пл}} - m_{1\text{пл}} \left( \ln \rho + \frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{\rho} \left( d_3 \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{3}a_{21} \sin \left( \gamma - \frac{\pi}{3} \right) + 2a_{22} \cos \gamma \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta_1}^{(1)} &= A_{\text{пл}} - m_{1\text{пл}} \left( \ln \rho - \frac{1}{2\rho^2} + \frac{5}{4} \right) - \frac{2}{\rho} \left( d_3 \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{3}a_{21} \sin \left( \gamma - \frac{\pi}{3} \right) + 2a_{22} \cos \gamma \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta_1}^{(1)} &= -\frac{2}{\rho} \left( d_3 \cos \left( \gamma + \frac{\pi}{3} \right) - 2\sqrt{3}a_{21} \sin \left( \gamma + \frac{\pi}{3} \right) + 2a_{22} \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{3} \right) \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\gamma = \sqrt{2} \ln \rho$ ,  $m_{1\text{пл}} = \frac{2c_1^{(1)}k}{2G_1 + c_1}$ .

Для пластического включения имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_2}^{(1)} &= \frac{d_2 k x_2 \beta}{\rho} \left( \left( -4 \cos \left( \gamma_2 + \frac{\pi}{6} \right) - 4\sqrt{3} \sin \left( \gamma_2 - \frac{\pi}{6} \right) + 4 \cos \left( \gamma_2 - \frac{\pi}{6} \right) \right) \cos \gamma + \right. \\ &\quad \left. + \left( -4 \sin \left( \gamma_2 + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin \left( \gamma_2 - \frac{\pi}{6} \right) - 4\sqrt{3} \cos \left( \gamma_2 - \frac{\pi}{6} \right) \right) \sin \gamma \right) \cos 2\theta - \\ &\quad - 2d_2 k x_2 + \frac{m_{1\text{вкл}}}{2} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\rho} \right) + m_{2\text{вкл}} \ln \frac{\beta}{\rho}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta_2}^{(1)} = \sigma_{\rho_2}^{(1)} - 2d_2 k x_2 + \frac{m_{1\text{вкл}}}{2} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\rho^2} \right) + m_{2\text{вкл}} \ln \frac{\beta}{\rho},$$

$$\tau_{\rho\theta_2}^{(1)} = \frac{4d_2 \beta k x_2}{\rho} \left( 2 \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\beta}{\rho} - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\beta}{\rho} \right) \right) \sin 2\theta,$$

где  $\gamma_2 = \sqrt{3} \ln \beta$ ,  $m_{1\text{пл}} = 2c_2 \left( \frac{\chi_1}{2G_1} - (\alpha_1 - \alpha)\alpha_1 \right)$ ,  $m_{2\text{пл}} = \frac{2c_2^{(1)}k\chi_2}{2G_2}$ .

Используя соотношения на границе контакта плиты и включения (14), окончательно определяем вид констант  $A_{\text{пл}}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ .

Полученные соотношения (15)–(17) определяют напряженное состояние в плите для первого приближения. Для определения вида упругопластической границы первого приближения  $r_s^{(1)}$  воспользуемся линеаризованными условиями сопряжения [3], из которых следует

$$r_s^{(1)} = -[\sigma_{\theta}^{(1)}] \cdot \left[ \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \Big|_{\rho=1}. \quad (18)$$

Из соотношения (18), используя (15) и (16), находим выражение, определяющее радиус упругопластической границы в плите

$$r_s^{(1)} = \frac{1}{4} (2d_3 + 9a_{21} + 2a_{22}) \cos 2\theta - 2c_{\text{пл}} + \frac{m_{1\text{пл}}}{4}. \quad (19)$$

При  $d_3 = 0$  имеем случай равномерного растяжения конструкции на бесконечности, при  $d_1 = d_2 = 0$  круговое отверстие в плите и круговое включение, при  $c_n = 0$ ,  $n = 1, 2$  – случай конструкции из идеально пластического материала [5].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Артемов, М. А.* О двусосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала / М. А. Артемов // ПМТФ. – 1985. – № 6. – С. 158–163.
- [2] *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [4] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 701 с.
- [5] *Кузнецов, П. Н.* Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эксцентрическим эллиптическим включением, при двусосном растяжении / П. Н. Кузнецов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – Т. 67, № 8/2. – С. 90–97.
- [6] *Марушкей, Ю. М.* Двусосное растяжение упругопластического пространства с включением / Ю. М. Марушкей // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1975. – № 12. – С. 25–30.
- [7] *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
- [8] *Спорыхин, А. Н.* Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2004. – 219 с.

M. V. Bogdanov, A. V. Kovalev, A. Y. Yakovlev

**MECHANICAL INTERACTION OF THE ELASTO-PLASTIC DESIGN  
ELEMENTS TAKING INTO ACCOUNT A TRANSMITTING HARDENING**

*Voronezh State University*

**Abstract.** In this work by the method [3] a tension definition in a compound elasto-plastic design consisting of a thick plate, weakened by an elliptic aperture, in which an elliptic inclusion is molded with a tightness is carried out. Plate and inclusion material is described by a correlation of Ishlinsky-Pragera model [2, 4].

**Keywords:** an elasto-plastic design, pressing, a plate with inclusion, tension (stress), a model of Ishlinsky-Pragera, a transmitting hardening.

*Богданов Михаил Владимирович*

*аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** yakovlev@amm.vsu.ru

*Ковалев Алексей Викторович*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** kav-mail@mail.ru

*Яковлев Александр Юрьевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** yakovlev@amm.vsu.ru

*Bogdanov, Mikhail Vladimirovich*

*Postgraduate Student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

*Kovalev, Aleksey Viktorovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

*Yakovlev, Alexander Yuryevich*

*Candidate Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова

## ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ СЛОЕМ БОЛЕЕ ПОДАТЛИВОГО МАТЕРИАЛА

*Институт автоматизи и процессов управления ДВО РАН*

**Аннотация.** Рассматривается деформирование упруговязкопластической среды между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами при повороте одного из них. Среда ослаблена слоем более податливого материала. Решение строится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций. Рассмотрены обратимое деформирование, вязкопластическое течение, случай остановки цилиндра и деформирование при повороте в обратном направлении. Получены законы движения границ развивающихся областей вязкопластического течения при различных скоростях поворота поверхностей.

**Ключевые слова:** упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

УДК: 539.374

Вязкопластические течения в модели Шведова-Бингама изучались достаточно подробно, в том числе были получены точные решения задач о прямолинейных [6,10] и вискозиметрических течениях [1,11,13]. Следует считать достаточно разработанным соответствующий математический и алгоритмический аппарат для расчетов течений в рамках такой модели [9,12]. В настоящее время наметился определенный интерес к подобным течениям [3-5], когда материал застойных зон и жестких ядер полагается способным допускать обратимые деформации. Настоящей публикацией представляется еще одно решение в рамках теории больших упруговязкопластических деформаций задачи о вискозиметрических течениях среды, ослабленной слоем более податливого материала. Исследуются вопросы об условиях и месте зарождения течения, развитии течения с определением закономерностей продвижения упругопластических границ, о возникновении новых таких границ при торможении течения и вычислении остаточных напряжений.

**1. Основные модельные соотношения.** Задача решается в рамках модели больших упругопластических деформаций, предложенной в [2] и обобщенной на случай учета вязких свойств материала на стадии пластического течения [8]. В прямоугольной декартовой системе координат кинематика среды определяется зависимостями

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\
\frac{Dp_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
r_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk}).
\end{aligned} \tag{1}$$

В соотношениях (1)  $d_{ij}$  — компоненты тензора деформаций Альманси;  $e_{ij}$ ,  $p_{ij}$  — их обратимые и необратимые составляющие;  $u_i$ ,  $v_i$  — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды;  $\frac{D}{Dt}$  — объективная производная тензоров по времени;  $\varepsilon_{ij}^p$  (источник в уравнении переноса для тензора необратимых деформаций) — компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Наличие нелинейной составляющей  $z_{ij}$  тензора вращений  $r_{ij}$ , которая выписана полностью в [2,8], связано с выполнением требования неизменности тензора пластических деформаций  $p_{ij}$  в процессах разгрузки.

Материал считаем несжимаемым и тогда, следуя [2,8], получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0, \\
\sigma_{ij} &= -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при} \quad p_{ij} \neq 0, \\
W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \\
J_k &= \begin{cases} L_k, & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0 \\ I_k, & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \\
I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns},
\end{aligned} \tag{2}$$

В зависимостях (2)  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $p$ ,  $p_1$  — добавочные гидростатические давления,  $W$  — упругий потенциал,  $\mu$  — модуль сдвига,  $b$ ,  $\chi$  — постоянные материала.

В качестве пластического потенциала используется функция нагружения Треска [7]

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^p|, \tag{3}$$

где  $k$  — предел текучести;  $\eta$  — коэффициент вязкости;  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_k^p$  — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций.

Связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \tag{4}$$

**2. Упругое деформирование.** Считаем, что упруговязкопластический материал заполняет область  $r_0 \leq r \leq R$ , расположенную между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями. Его механические свойства задаются параметрами  $\mu_1$ ,  $b_1$ ,  $\chi_1$ ,  $k_1$ ,  $\eta_1$  в отличие от свойств материала слоя  $r_0 < r_1 \leq r \leq r_2 < R$ , аналогичные механические параметры которого будем обозначать  $\mu_2$ ,  $b_2$ ,  $\chi_2$ ,  $k_2$ ,  $\eta_2$  ( $k_2 < k_1$ ). Рассмотрим вначале случай, когда деформирование осуществляется за счет поворота внутреннего цилиндра радиусом  $r = r_0$ , в то время как внешний цилиндр радиусом  $r = R$ , остается неподвижным. Считается, что

на граничных поверхностях выполняются условия прилипания, тогда граничное условие на внешней поверхности имеет вид:

$$u_r = u_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (1)$$

Компоненты вектора перемещений при движении точек среды по окружностям определяются зависимостями

$$u_r = r(1 - \cos \theta(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \theta(r, t), \quad (2)$$

здесь  $\theta(r, t)$  — центральный угол закручивания.

При повороте внутреннего цилиндра сначала происходит только упругое деформирование. В зависимости от свойств материалов и геометрии тела пластическое течение может начаться как в окрестности внутренней жесткой стенки  $r = r_0$ , так и в окрестности внутренней поверхности слоя  $r = r_1$ . Условием возникновения пластического течения на поверхности  $r = r_1$  является неравенство  $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} > \frac{r_1}{r_0}$ . В противном случае пластическое течение начнется на поверхности  $r = r_0$ . Пусть геометрические размеры обеспечивают выполнение данного неравенства. Рассмотрим напряженно-деформируемое состояние, предшествующее началу пластического течения.

Отличными от нуля компонентами тензора деформаций Альманси являются следующие:

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}g^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}g, \quad g = r \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (3)$$

Из зависимостей (2) для компонент напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по деформациям следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)g^2 = -s, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s + \mu g^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu g. \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (5)$$

и используя условие прилипания (1) и условие непрерывности перемещений при  $r = r_1$  и  $r = r_2$ , найдем в области  $r_2 \leq r \leq R$ :

$$\theta = A(c), \quad A(c) = \frac{c}{2\mu_1} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right);$$

в слое  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$\theta = A_1(c), \quad A_1(c) = \frac{c}{2\mu_1} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + \frac{c}{2\mu_2} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r^2} \right); \quad (6)$$

в области  $r_0 \leq r \leq r_1$ :

$$\theta = A_2(c), \quad A_2(c) = \frac{c}{2\mu_1} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{c}{2\mu_2} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right),$$

здесь  $c$  — постоянная интегрирования.

При достижении некоторого значения  $\theta_0 = \theta(r_0, t_0)$  в окрестности внутренней поверхности слоя  $r = r_1$  начинается пластическое течение. Из условия пластичности (3), записанного в форме

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_1} = -k_2,$$

найдем угол поворота  $\theta_0$  внутреннего цилиндра, при котором начинается пластическое течение

$$\theta_0 = \frac{k_2}{2\mu_1} \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{r_1^2}{R^2} + \frac{r_1^2}{r_0^2} - 1 \right) + \frac{k_2}{2\mu_2} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right). \quad (7)$$

**3. Вязкопластическое течение.** Начиная с момента времени  $t = t_0 = 0$ , в окрестности внутренней поверхности слоя развивается область вязкопластического течения  $r_1 \leq r \leq x_1(t)$ ,  $x_1(t)$  — движущаяся граница этой области. В областях  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $x_1(t) \leq r \leq r_2$ ,  $r_2 \leq r \leq R$  по-прежнему происходит упругое деформирование.

Согласно зависимостям (1) для компонент вектора скорости и тензора скоростей деформаций, справедливы кинематические соотношения

$$\begin{aligned} v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi} (r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \\ \varepsilon_{rr}^p &= -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассчитаем параметры напряженно-деформированного состояния в некоторый момент времени  $t = t_1 \geq t_0$ .

Интегрируя уравнения равновесия (квазистатическое приближение) в областях упругого деформирования, с использованием (1) найдем:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} &= \frac{c_1}{r^2}, \quad v_\varphi = 0, \quad c_1 = c(t_1), \\ \theta &= A(c_1) \quad \text{в области} \quad r_2 \leq r \leq R, \\ \theta &= A_1(c_1) \quad \text{в области} \quad x_1(t) \leq r \leq r_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Из второго соотношения в (2) для компонент напряжений в области пластического течения имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} - (p_1 + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

В то же время интегрированием уравнений равновесия можно получить

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{m(t_1)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{m(t_1)}{2\mu r^2}. \quad (4)$$

Из условий непрерывности компонент напряжений следует, что

$$m(t_1) = c_1, \quad s(t_1) = s_1(t_1).$$

Согласно условию пластичности (3) и ассоциированному закону пластического течения (4), получаем

$$\sigma_{r\varphi} = -k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = -\varepsilon_{r\varphi}^p / (k - \eta \varepsilon_{r\varphi}^p). \quad (5)$$

Используя (4) и (5), можно вычислить скорость пластической деформации в области  $r_1 \leq r \leq x_1(t)$

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta_2} \left( \frac{c_1}{r^2} + k_2 \right).$$

С учетом кинематических зависимостей (1) и условия непрерывности перемещений и деформаций на упругопластической границе  $r = x_1$ , в области необратимого деформирования найдем

$$\begin{aligned} \theta &= tF(c_1, r, x_1) + A_1(c_1), & v_\varphi &= rF(c_1, r, x_1), & c_1 &= -k_2x_1^2, \\ F(c_1, r, x_1) &= \frac{2}{\eta_2} \left( k_2 \ln \frac{r}{x_1} + \frac{c_1}{2} \left( \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Используя условие непрерывности функции  $\theta$ , в области  $r_0 \leq r \leq r_1$  получим

$$\theta = tF(c_1, r_1, x_1) + A_2(c_1), \quad v_\varphi = rF(c_1, r_1, x_1). \quad (7)$$

Задавая закон нагружения на внутренней поверхности  $r = r_0$ , получим уравнение для определения упругопластической границы  $x_1$ .

При дальнейшем повороте внутреннего цилиндра в момент времени  $t = t'_1$  напряженное состояние в окрестности жесткой стенки  $r = r_0$  выйдет на поверхность нагружения  $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = -k_1$  и начнет свое развитие еще одна область вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq x_2(t)$ . С этого момента времени уравнения равновесия необходимо проинтегрировать в пяти областях. В первых четырех областях имеют место те же соотношения, что и ранее. В области  $r_0 \leq r \leq x_2(t)$ , используя условие непрерывности функции  $\theta$  и ее производных, найдем

$$\begin{aligned} \theta &= tF(c_1, r_1, x_1) + (t - t'_1)F_1(c_1, r, x_2) + A_2(c_1), \\ v_\varphi &= rF(c_1, r_1, x_1) + rF_1(c_1, r, x_2), & c_1 &= -k_1x_2^2 = -k_2x_1^2, \\ F_1(c_1, r, x_2) &= \frac{2}{\eta_1} \left( k_1 \ln \frac{r}{x_2} + \frac{c_1}{2} \left( \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

При линейном законе движения внутреннего жесткого цилиндра  $\theta(r_0, t) = \theta_0(1 + \alpha t)$  упругопластические границы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  определяются из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \theta_0(1 + \alpha t) &= tF(c_1, r_1, x_1) + (t - t'_1)F_1(c_1, r_0, x_2) - \\ &- \frac{k_1x_2^2}{2\mu_1} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) - \frac{k_1x_2^2}{2\mu_2} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right), & k_1x_2^2 &= k_2x_1^2. \end{aligned} \quad (9)$$

в каждый момент времени  $t = t_2 > t'_1$ . В этом случае функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  выходят на асимптоты. Таким образом, вязкопластическое течение продолжается в областях  $r_0 \leq r \leq x_2$  и  $r_1 \leq r \leq x_1$  и дальше не развивается. Характерный график изменения границы области развивающегося вязкопластического течения представлен на рис.1 (поверхность  $x_1(\tau)$ ,  $\tau = \alpha t$ ), на рис.2. показано распределение угла поворота в зависимости от радиуса. Расчеты проводились при значениях постоянных

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{R} &= 0.2, & \frac{r_1}{R} &= 0.4, & \frac{r_2}{R} &= 0.6, & \frac{\alpha\eta_1}{\mu_1} &= 0.01638, \\ \frac{\alpha\eta_2}{\mu_2} &= 0.2195, & \frac{k_1}{\mu_1} &= 0.00165, & \frac{k_2}{\mu_2} &= 0.0007. \end{aligned} \quad (10)$$

Если скорость поворота жесткого цилиндра изменяется со временем, например, по закону  $\omega = \frac{v_\varphi}{r} = \alpha t$ , то в некоторый момент времени  $t = t'_2$  граница  $x_1(t)$  достигнет внешней поверхности слоя  $r = r_2$ . При этом в области упругого деформирования  $r_2 \leq r \leq R$  справедливы соотношения (2), где  $c_1$  заменено на  $c_2 = -k_1x_2^2$ , в областях  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $x_2 \leq r \leq r_1$  и  $r_0 \leq r \leq x_2$  — зависимости (6), (7) и (8), в которых  $x_1 = r_2$ .

В момент времени  $t = t'_3$  граница  $x_2(t)$  достигает поверхности  $r = r_1$ . Начиная с этого момента времени, пластическое течение продолжается в слоях  $r_0 \leq r \leq r_1$  и  $r_1 \leq r \leq r_2$  и за пределы последнего слоя не развивается. В области  $r_2 \leq r \leq R$ , в которой материал по-прежнему деформируется упруго, выполняются соотношения (2). В областях течения  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$  справедливы зависимости (8) и (6) соответственно, где  $x_1 = r_2$  и  $x_2 = r_1$ .

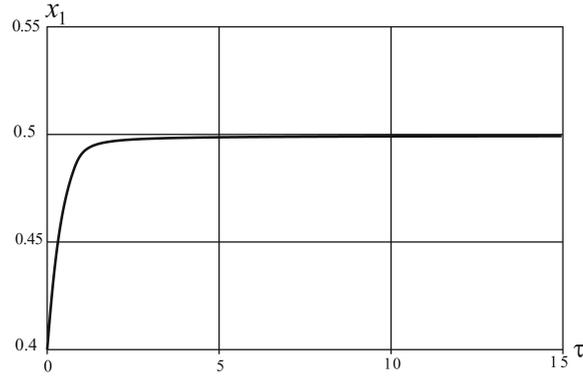


Рис.1. Развитие области вязкопластического течения

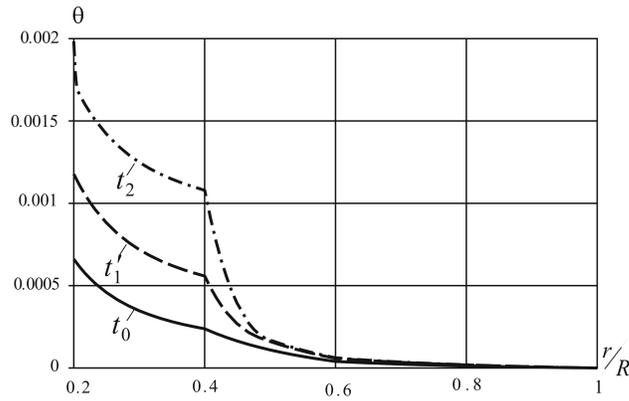


Рис.2. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

Развитие еще одной области течения  $r_2 \leq r \leq x_3(t)$  ( $x_3(t)$  — граница этой области) начнется при дальнейшем движении жесткого цилиндра и увеличении напряжений, когда в момент времени  $t = t'_4$  на поверхности  $r = r_2$  выполнится условие пластичности  $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_2} = -k_1$ . В упругой области  $x_3(t) \leq r \leq R$  имеют место те же соотношения, что и ранее. В областях течения найдем

в области  $r_2 \leq r \leq x_3(t)$ :

$$\theta = (t - t'_4)F_1(c_3, r, x_3) + A(c_3), \quad v_\varphi = rF_1(c_3, r, x_3), \quad c_3 = -k_1 x_3^2; \quad (11)$$

в слое  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$\begin{aligned} \theta &= (t - t'_4)F_1(c_3, r_2, x_3) + tF(c_3, r, r_2) + A_1(c_3), \\ v_\varphi &= rF_1(c_3, r_2, x_3) + rF(c_3, r, r_2); \end{aligned} \quad (12)$$

в области  $r_0 \leq r \leq r_1$ :

$$\begin{aligned} \theta &= (t - t'_4)F_1(c_3, r_2, x_3) + tF(c_3, r_1, r_2) + (t - t'_1)F_1(c_3, r, r_1) + A_2(c_3), \\ v_\varphi &= rF_1(c_3, r_2, x_3) + rF(c_3, r_1, r_2) + rF_1(c_3, r, r_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения границ вязкопластических областей в случае ускоренного вращения жесткого цилиндра необходимо решить уравнения:

$$\begin{aligned}
 F(c_1, r_1, x_1) &= \alpha t_1, & t_0 \leq t_1 \leq t'_1; \\
 F_1(c_1, r_0, x_2) + F(c_1, r_1, x_1) &= \alpha t_2, & k_1 x_2^2 = k_2 x_1^2, \quad t'_1 \leq t_2 \leq t'_2; \\
 F_1(c_2, r_0, x_2) + F(c_2, r_1, r_2) &= \alpha t_3, & t'_2 \leq t_3 \leq t'_3; \\
 F_1(c_3, r_0, r_1) + F_1(c_3, r_2, x_3) + F(c_3, r_1, r_2) &= \alpha t_4, & t'_4 \leq t_4;
 \end{aligned} \tag{14}$$

В момент времени  $t = t'_5$  граница  $x_3(t)$  достигает внешней жесткой поверхности  $r = R$ . На рис.3. показан закон продвижения упругопластической границы  $x_1(\tau)$  в случае ускоренного вращения жесткого цилиндра  $(\tau = \alpha t^2, \quad \frac{\eta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_1} = 0.1638, \quad \frac{\eta_2 \sqrt{\alpha}}{\mu_2} = 2.195)$ .

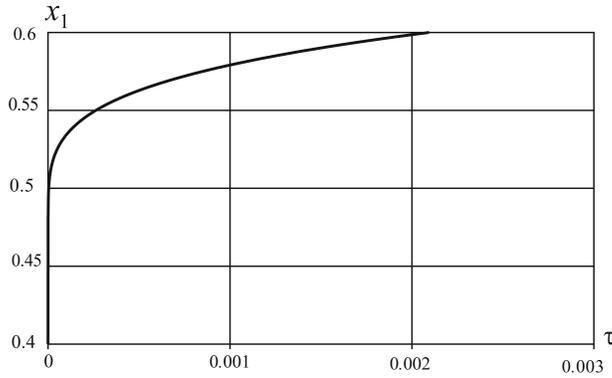


Рис.3. Развитие области вязкопластического течения

Согласно формулам (1) для компонент пластических деформаций, справедливы зависимости

$$\begin{aligned}
 p_{r\varphi} &= \frac{k_1(t - t'_4)}{\eta_1} \left(1 - \frac{x_3^2}{r^2}\right), & \text{в области } r_2 \leq r \leq x_3(t), \\
 p_{r\varphi} &= \frac{t}{\eta_2} \left(k_2 - \frac{k_1 x_3^2}{r^2}\right), & \text{в области } r_1 \leq r \leq r_2, \\
 p_{r\varphi} &= \frac{k_1(t - t'_1)}{\eta_1} \left(1 - \frac{x_3^2}{r^2}\right), & \text{в области } r_0 \leq r \leq r_1, \\
 p_{\varphi\varphi} &= 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, & p_{rr} = 2d_{r\varphi}(e_{r\varphi} - d_{r\varphi}).
 \end{aligned}$$

Распределение угла поворота в зависимости от радиуса в процессе вязкопластического течения показано на рис. 4.

**4. Разгрузка и вязкопластическое течение при повороте внутренней поверхности в обратном направлении.** При остановке внутреннего цилиндра в некоторый момент времени  $t = t^*$  перемещения, деформации и напряжения перестают изменяться во всей области деформирования. Область вязкопластического течения также далее не увеличивается.

Рассмотрим, как будет изменяться напряженно-деформированное состояние, если начиная с момента времени  $t = t^*$ , поворачивать цилиндр в обратную сторону. До достижения функцией  $\theta$  значения  $\theta(t_2^*) = \theta_2$  происходит только обратимое деформирование. В момент времени  $t = t_2^*$ , напряженное состояние в окрестности внутренней поверхности слоя  $r = r_1$  выходит на поверхность нагружения

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_1} = k_2. \tag{1}$$

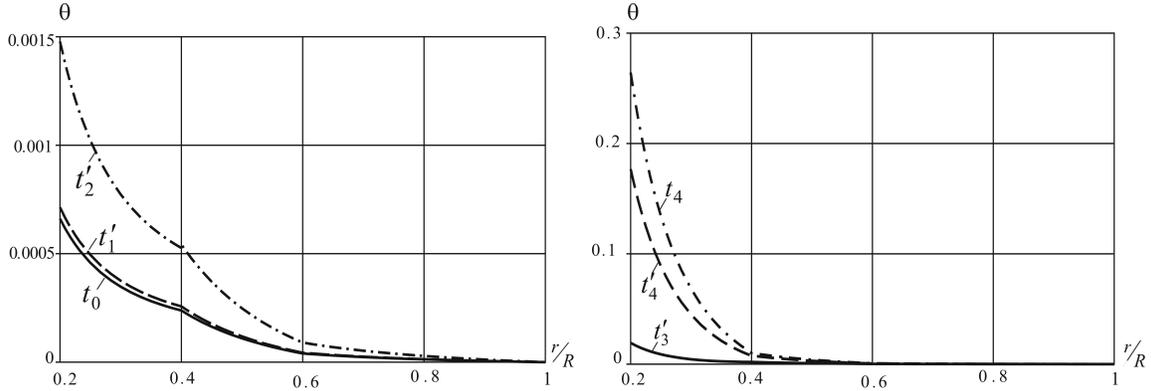


Рис.4. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса

То есть компонента напряжений  $\sigma_{r\varphi} = c(t)/r^2$  сначала уменьшается по абсолютной величине, а начиная с момента времени  $t = t_1^*$  ( $\theta(t_1^*) = \theta_*$ ), возрастает, до тех пор пока в окрестности внутренней поверхности слоя не выполнится условие пластичности (1) и не начнет развиваться новая область пластического течения. В момент времени  $t = t_1^*$  в силу непрерывности напряжений получаем, что  $c(t_1^*) = \sigma_{r\varphi} = 0$  во всей области деформирования.

Пусть внутренний цилиндр поворачивается с постоянной скоростью, и только в областях  $r_0 \leq r \leq x_2$  и  $r_1 \leq r \leq x_1$  ( $x_1, x_2$  — значения упругоупругих границ в момент времени  $t^*$ ) есть накопленные необратимые деформации. Для нахождения значений  $\theta_*$  и  $\theta_2$  необходимо решить задачу упругого равновесия с накопленными необратимыми деформациями. В областях обратимого деформирования  $x_1 \leq r \leq r_2$  и  $r_2 \leq r \leq R$  по-прежнему справедливы зависимости (2). Учитывая, что до момента начала пластического течения компонента  $p_{r\varphi}$  тензора пластических деформаций не изменяется ( $\varepsilon_{r\varphi}^p = 0$ ), определим функцию  $\theta(r, t)$  из равенства  $d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi}$  и условия непрерывности  $\theta(r, t)$  при  $r = x_1$  и  $r = x_2$  в областях:

$$\begin{aligned} r_1 \leq r \leq x_1 : \quad & \theta = t^* F(b_1, r, x_1) + A_1(b), \quad b_1 = c(t^*); \\ x_2 \leq r \leq r_1 : \quad & \theta = t^* F(b_1, r_1, x_1) + A_2(b); \\ r_0 \leq r \leq x_2 : \quad & \theta = t^* F(b_1, r_1, x_1) + (t^* - t'_1) F_1(b, r, x_2) + A_2(b). \end{aligned} \quad (2)$$

Из равенств (1) и  $c(t_1^*) = 0$  определим углы  $\theta_*$  и  $\theta_2$

$$\begin{aligned} \theta_* &= t^* F(b_1, r_1, x_1) + (t^* - t'_1) F_1(b_1, r_0, x_2), \\ \theta_2 &= \theta_* + A_2(b_2), \quad b_2 = k_2 r_1^2. \end{aligned}$$

Начиная с момента времени  $t = t_2^*$ , будет развиваться область вязкопластического течения  $r_1 \leq r \leq x_1^*(t)$ . В областях  $x_1 \leq r \leq r_2$  и  $r_2 \leq r \leq R$ , как и выше, функция  $\theta(r, t)$  определяется соотношениями (2), в которых  $c_1$  следует заменить новым значением  $b_3$ , в области с накопленными необратимыми деформациями  $x_1^*(t) \leq r \leq x_1$  функция  $\theta(r, t)$  находится по формуле (2), где  $b$  заменено текущим значением  $b_3$ . В области пластического течения  $r_1 \leq r \leq x_1^*(t)$  найдем

$$\begin{aligned} \theta &= t F_2(b_3, x_1^*, r) + t^* F(b_1, r, x_1) + A_1(b_3), \\ F_2(b_3, x_1^*, r) &= \frac{2}{\eta_2} \left( k_2 \ln \frac{x_1^*}{r} - \frac{b_3}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{x_1^{*2}} \right) \right), \quad b_3 = k_2 x_1^{*2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из равенства перемещений на поверхностях  $r = r_1$  и  $r = x_2$ , для функции  $\theta(r, t)$  получим в области  $x_2 \leq r \leq r_1$ :

$$\theta = t F_2(b_3, x_1^*, r_1) + t^* F(b_1, r_1, x_1) + A_2(b_3);$$

в области  $r_0 \leq r \leq x_2$ :

$$\theta = tF_2(b_3, x_1^*, r_1) + t^*F(b_1, r_1, x_1) + (t^* - t'_1)F_1(b_1, r, x_2) + A_2(b_3).$$

Задавая закон, по которому движется внутренняя поверхность  $r = r_0$ , получим уравнение для определения границы области вязкопластического течения  $x_1^*(t)$ . Это уравнение необходимо решать до момента времени  $t = t_3^*$ , в который в окрестности внутренней жесткой стенки  $r = r_0$  начнется новое пластическое течение. Начиная с этого момента времени, в области вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq x_2^*(t)$  имеем

$$b_3 = k_2x_1^{*2} = k_1x_2^{*2}, \quad \theta = A_2(b_3) + tF_2(b_3, x_1^*, r_1) + (t - t_3^*)F_3(b_3, x_2^*, r) + t^*F(b_1, r_1, x_1) + (t^* - t'_1)F_1(b_1, r, x_2), \quad (4)$$

$$F_3(b_3, x_2^*, r) = \frac{2}{\eta_1} \left( k_1 \ln \frac{x_2^*}{r} - \frac{b_3}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{x_2^{*2}} \right) \right).$$

В областях  $x_2^*(t) \leq r \leq x_2$ ,  $x_2 \leq r \leq r_1$ ,  $r_1 \leq r \leq x_1^*(t)$ ,  $x_1^*(t) \leq r \leq x_1$ ,  $x_1 \leq r \leq r_2$  и  $r_2 \leq r \leq R$  справедливы те же соотношения, что и ранее.

В момент времени  $t = t_4^*$  движущиеся границы  $x_1^*(t)$  и  $x_2^*(t)$  достигнут соответственно поверхностей  $r = x_1$  и  $r = x_2$ , первоначально ограничивающих пластические области. Рассмотрим напряженно-деформируемое состояние, начиная с этого момента времени. При этом в материале будут следующие семь областей: упругие области  $x_2^*(t) \leq r \leq r_1$ ,  $x_1^*(t) \leq r \leq r_2$  и  $r_2 \leq r \leq R$  и области вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq x_2$ ,  $x_2 \leq r \leq x_2^*(t)$ ,  $r_1 \leq r \leq x_1$  и  $x_1 \leq r \leq x_1^*(t)$ . В областях  $x_1^*(t) \leq r \leq r_2$  и  $r_2 \leq r \leq R$  функция  $\theta(r, t)$  определяется зависимостями (2), где  $c_1$  заменено значением  $b_3$ . В пластической области  $x_1 \leq r \leq x_1^*(t)$  найдем

$$\theta = (t - t_4^*)F_2(b_3, x_1^*, r) + A_1(b_3).$$

В области вязкопластического течения  $r_1 \leq r \leq x_1$  компонента  $p_{r\varphi}$  тензора пластических деформаций определяется по формуле

$$p_{r\varphi} = \frac{t - t_4^*}{\eta_2} \left( \frac{b_3}{r^2} - k_2 \right) - \frac{t_4^* - t^*}{\eta_2} \left( \frac{b_1}{r^2} + k_2 \right). \quad (5)$$

Используя это соотношение и условие непрерывности  $\theta(r, t)$  на поверхностях  $r = x_1$ ,  $r = r_1$  и  $r = x_2^*$ , найдем функцию  $\theta(r, t)$

в области  $r_1 \leq r \leq x_1$ :

$$\theta = (t - t_4^*)F_2(b_3, x_1^*, r) + (t_4^* - t^*)F(b_1, x_1, r) + A_1(b_3);$$

в области  $x_2^*(t) \leq r \leq r_1$ :

$$\theta = (t - t_4^*)F_2(b_3, x_1^*, r_1) + (t_4^* - t^*)F(b_1, x_1, r_1) + A_2(b_3);$$

в области  $x_2 \leq r \leq x_2^*(t)$ :

$$\theta = (t - t_4^*)F_3(b_3, x_2^*, r) + (t - t_4^*)F_2(b_3, x_1^*, r_1) + (t_4^* - t^*)F(b_1, x_1, r_1) + A_2(b_3).$$

В пластической области  $r_0 \leq r \leq x_2$  для компоненты пластических деформаций  $p_{r\varphi}$  имеем

$$p_{r\varphi} = \frac{t - t_4^*}{\eta_1} \left( \frac{b_3}{r^2} - k_1 \right) - \frac{t_4^* - t_3^* - t^* + t'_1}{\eta_1} \left( \frac{b_1}{r^2} + k_1 \right). \quad (6)$$

Тогда в этой области  $\theta(r, t)$  определяется зависимостью

$$\theta = (t - t_4^*)F_3(b_3, x_2^*, r) + (t - t_4^*)F_2(b_3, x_1^*, r_1) + (t_4^* - t^*)F(b_1, x_1, r_1) + (t_4^* - t_3^* - t^* + t'_1)F_1(b_1, x_2, r) + A_2(b_3).$$

Как и ранее, задавая значения  $\theta$  при  $r = r_0$  в каждый момент времени  $\theta(r_0, t) = \theta_2(1 - \alpha t)$ , найдем  $x_1^*$  и  $x_2^*$ . На рис.5. показано развитие области  $r_1 \leq r \leq x_1^*$

вязкопластического течения при движении цилиндра в обратном направлении, на рис.6. — функция  $\theta(r)$  в выделенные моменты времени.

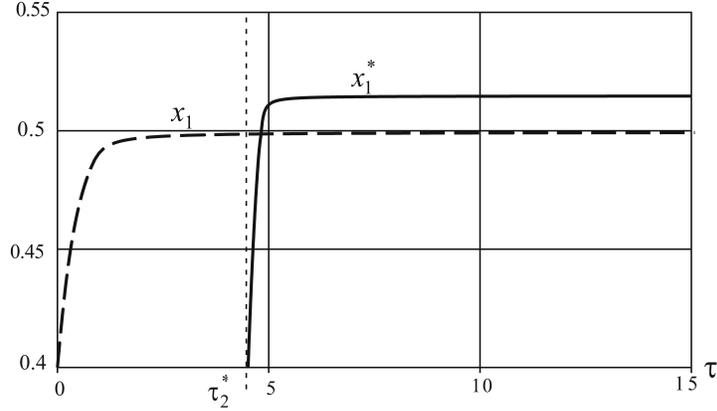


Рис.5. Развитие области вязкопластического течения при повороте цилиндра в обратную сторону

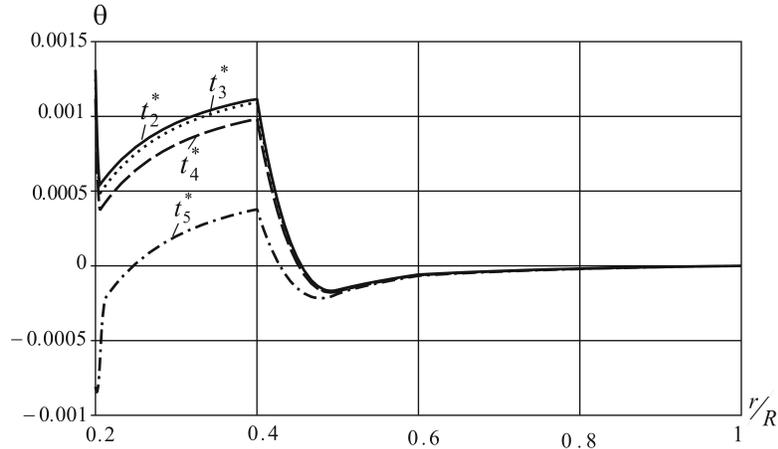


Рис.6. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса при движении цилиндра в обратную сторону

В том случае, когда внутренний цилиндр вращается ускоренно, конечный момент нагружения выберем в интервале  $t'_4 \leq t^* \leq t'_5$ . Тогда при остановке цилиндра в материале будет упругая область  $x_3 \leq r \leq R$  и три области с накопленными необратимыми деформациями  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$  и  $r_2 \leq r \leq x_3$ . При движении цилиндра в обратном направлении до начала пластического течения функция  $\theta(r, t)$  находится по формулам:

в области  $r_2 \leq r \leq x_3$ :

$$\theta = (t^* - t'_4)F_1(b_4, r, x_3) + A(b), \quad b_4 = c(t^*);$$

в слое  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$\theta = (t^* - t'_4)F_1(b_4, r_2, x_3) + t^*F(b_4, r, r_2) + A_1(b);$$

в области  $r_0 \leq r \leq r_1$ :

$$\theta = (t^* - t'_4)F_1(b_4, r_2, x_3) + t^*F(b_4, r_1, r_2) + (t^* - t'_1)F_1(b_4, r, r_1) + A_2(b)$$

В области обратимого деформирования  $x_3 \leq r \leq R$  по-прежнему справедливы зависимости (2).

Значения  $\theta_*$  и  $\theta_2$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\theta_* &= (t^* - t'_4)F_1(b_4, r_2, x_3) + t^*F(b_4, r_1, r_2) + (t^* - t'_1)F_1(b_4, r_0, r_1), \\ \theta_2 &= \theta_* + A_2(b_5), \quad b_5 = k_2 r_1^2.\end{aligned}$$

При дальнейшем уменьшении угла  $\theta$  для определения компонент напряжений уравнения равновесия необходимо проинтегрировать в пяти областях: в области обратимого деформирования  $x_3 \leq r \leq R$ , в областях с неизменяющимся тензором необратимых деформаций  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $x_1^*(t) \leq r \leq r_2$ ,  $r_2 \leq r \leq x_3$  и в области пластического течения  $r_1 \leq r \leq x_1^*(t)$ . В областях  $x_1^*(t) \leq r \leq r_2$ ,  $r_2 \leq r \leq x_3$ ,  $x_3 \leq r \leq R$  справедливы те же формулы, что и ранее, в области пластического течения  $r_1 \leq r \leq x_1^*(t)$ , используя условие непрерывности  $\theta$  и ее производных при  $r = x_1^*$ , получим

$$\begin{aligned}\theta &= tF_2(b_6, x_1^*, r) + (t^* - t'_4)F_1(b_4, r_2, x_3) + t^*F(b_4, r, r_2) + A_1(b_6), \\ v_\varphi &= rF_2(b_6, x_1^*, r), \quad b_6 = k_2 x_1^{*2}.\end{aligned}\tag{7}$$

В области  $r_0 \leq r \leq r_1$  имеем

$$\begin{aligned}\theta &= tF_2(b_6, x_1^*, r_1) + (t^* - t'_4)F_1(b_4, r_2, x_3) + t^*F(b_4, r_1, r_2) + \\ &+ (t^* - t'_1)F_1(b_4, r, r_1) + A_2(b_6), \quad v_\varphi = rF_2(b_6, x_1^*, r_1).\end{aligned}\tag{8}$$

Данное напряженно-деформированное состояние справедливо до момента времени  $t = t_3^*$ , в который в окрестности внутренней жесткой стенки  $r = r_0$  начинается новое пластическое течение. При этом в областях  $x_2^*(t) \leq r \leq r_1$ ,  $r_1 \leq r \leq x_1^*(t)$ ,  $x_1^*(t) \leq r \leq r_2$ ,  $r_2 \leq r \leq x_3$ , и  $x_3 \leq r \leq R$  имеют место те же соотношения, что и ранее, в области вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq x_2^*(t)$  найдем

$$\begin{aligned}\theta &= A_2(b_6) + (t - t_3^*)F_3(b_6, x_2^*, r) + tF_2(b_6, x_1^*, r_1) + \\ &+ (t^* - t'_4)F_1(b_4, r_2, x_3) + t^*F(b_4, r_1, r_2) + (t^* - t'_1)F_1(b_4, r, r_1), \\ v_\varphi &= rF_2(b_6, x_1^*, r_1) + rF_3(b_6, x_2^*, r).\end{aligned}\tag{9}$$

С течением времени, сначала граница  $x_1^*(t)$  достигнет внешней поверхности слоя  $r = r_2$ , затем граница  $x_2^*(t)$  достигнет поверхности  $r = r_1$ . При этом в материале останется четыре области. В области обратимого деформирования  $x_3 \leq r \leq R$  и в области с неизменяющимися пластическими деформациями  $r_2 \leq r \leq x_3$  имеют место те же соотношения, что и ранее. В слое  $r_1 \leq r \leq r_2$  и в области  $r_0 \leq r \leq r_1$  функция  $\theta(r, t)$  определяется по формулам (7) и (9), где  $x_1^* = r_2$  и  $x_2^* = r_1$ .

Рассмотрим напряженно-деформируемое состояние, начиная с момента времени  $t = t_4^*$ , когда на поверхности  $r = r_2$  выполнится условие пластичности  $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_2} = k_1$ , и начнет свое развитие еще одна область вязкопластического течения  $r_2 \leq r \leq x_3^*$ . В области упругого равновесия  $x_3 \leq r \leq R$  и в области с неизменяющимися пластическими деформациями  $x_3^*(t) \leq r \leq x_3$  справедливы те же соотношения, что и ранее. В областях вязкопластического течения, используя условие непрерывности перемещений, получим

в области  $r_2 \leq r \leq x_3^*(t)$ :

$$\begin{aligned}\theta &= (t - t_4^*)F_3(b_7, x_3^*, r) + (t^* - t'_4)F_1(b_4, r, x_3) + A(b_7), \\ b_7 &= k_1 x_3^{*2}, \quad v_\varphi = rF_3(b_7, x_3^*, r);\end{aligned}$$

в слое  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$\begin{aligned}\theta &= (t - t_4^*)F_3(b_7, x_3^*, r_2) + (t^* - t'_4)F_1(b_4, r_2, x_3) + t^*F(b_4, r, r_2) + \\ &+ tF_2(b_7, r_2, r) + A_2(b_7), \quad v_\varphi = rF_2(b_7, r_2, r) + rF_3(b_7, x_3^*, r_2);\end{aligned}$$

в области  $r_0 \leq r \leq r_1$ :

$$\begin{aligned}\theta &= (t - t_4^*)F_3(b_7, x_3^*, r_2) + (t^* - t_4')F_1(b_4, r_2, x_3) + t^*F(b_4, r_1, r_2) + \\ &+ tF_2(b_7, r_2, r_1) + (t - t_3^*)F_3(b_7, r_1, r) + (t^* - t_1')F_1(b_4, r, r_1) + A_2(b_7), \\ v_\varphi &= rF_2(b_6, r_2, r_1) + rF_3(b_6, x_3^*, r_2) + rF_3(b_6, r_1, r).\end{aligned}$$

Начиная с момента времени  $t = t_5^*$ , в который граница  $x_3^*(t)$  достигнет поверхности  $r = x_3$ , в материале будут пять областей:  $x_3^*(t) \leq r \leq R$  — область обратимого деформирования,  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $r_2 \leq r \leq x_3$ ,  $x_3 \leq r \leq x_3^*(t)$  — области вязкопластического течения. В области упругого деформирования по-прежнему выполняются зависимости, что и ранее. В областях вязкопластического течения имеем

в области  $x_3 \leq r \leq x_3^*(t)$ :

$$\theta = (t - t_5^*)F_3(b_7, x_3^*, r) + A(b_7), \quad v_\varphi = rF_3(b_6, x_3^*, r);$$

в области  $r_2 \leq r \leq x_3$ :

$$\begin{aligned}\theta &= (t - t_5^*)F_3(b_7, x_3^*, r) + (t_5^* - t_4^* - t^* + t_1')F_1(b_4, x_3, r) + A(b_7), \\ v_\varphi &= rF_3(b_6, x_3^*, r);\end{aligned}$$

в слое  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$\begin{aligned}\theta &= (t - t_5^*)F_3(b_7, x_3^*, r_2) + (t_5^* - t_4^* - t^* + t_1')F_1(b_4, x_3, r_2) + t^*F(b_4, r, r_2) + \\ &+ tF_2(b_7, r_2, r) + A_2(b_7), \quad v_\varphi = rF_2(b_6, r_2, r) + rF_3(b_6, x_3^*, r_2);\end{aligned}$$

в области  $r_0 \leq r \leq r_1$ :

$$\begin{aligned}\theta &= (t - t_5^*)F_3(b_7, x_3^*, r_2) + (t_5^* - t_4^* - t^* + t_1')F_1(b_4, x_3, r_2) + t^*F(b_4, r_1, r_2) + \\ &+ tF_2(b_7, r_2, r_1) + (t - t_3^*)F_3(b_7, r_1, r) + (t^* - t_1')F_1(b_4, r, r_1) + A_2(b_7) \\ v_\varphi &= rF_2(b_6, r_2, r_1) + rF_3(b_6, x_3^*, r_2) + rF_3(b_6, r_1, r).\end{aligned}$$

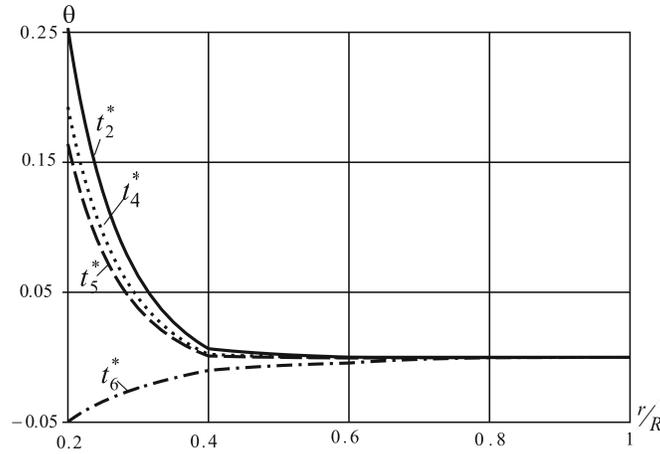


Рис.7. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса при движении цилиндра в обратную сторону

Как и ранее, задавая закон нагружения при  $r = r_0$  ( $\omega = -\alpha t$ ), найдем функцию  $x_3^*(t)$ . С течением времени граница  $x_3^*(t)$  достигает внешней поверхности  $r = R$ . На рис.7. показаны графики функции  $\theta$  при движении жесткого цилиндра в обратном направлении.

**5. Деформирование при повороте внешней жесткой поверхности.** Рассмотрим теперь деформирование материала в случае ускоренного вращения внешнего жесткого цилиндра, когда внутренний цилиндр жестко закреплен:

$$u_r = u_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0. \quad (1)$$

В отличие от случая движения внутреннего цилиндра выберем постоянные так, чтобы выполнялось неравенство  $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} < \frac{r_1}{r_0}$ , тогда пластическое течение начинается на поверхности  $r = r_0$  при выполнении условия пластичности в форме

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_0} = k_1.$$

Перемещения в условиях упругого равновесия определяются соотношениями в области  $r_0 \leq r \leq r_1$ :

$$\theta = B(c), \quad B(c) = \frac{c}{2\mu_1} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right);$$

в слое  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$\theta = B_1(c), \quad B_1(c) = \frac{c}{2\mu_1} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{c}{2\mu_2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right); \quad (2)$$

в области  $r_2 \leq r \leq R$ :

$$\theta = B_2(c), \quad B_2(c) = \frac{c}{2\mu_1} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{c}{2\mu_2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Пластическое течение в этом случае начнется, когда угол поворота внешнего цилиндра достигнет значения

$$\theta_0 = \frac{k_1}{2\mu_1} \left( \frac{r_0^2}{r_2^2} - \frac{r_0^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{r_1^2} + 1 \right) + \frac{k_1}{2\mu_2} \left( \frac{r_0^2}{r_1^2} - \frac{r_0^2}{r_2^2} \right). \quad (3)$$

Далее у внутренней поверхности  $r = r_0$  будет развиваться область вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq x_1(t)$ , в областях  $x_1(t) \leq r \leq r_1$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $r_2 \leq r \leq R$  материал находится в упругом состоянии.

В области вязкопластического течения найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{c_1}{r^2} - k_1 \right), \quad \theta = tH(c_1, r, r_0) + B(c_1), \quad v_\varphi = rH(c_1, r, r_0), \\ c_1 &= k_1 x_1^2, \quad H(c_1, r, r_0) = \frac{2}{\eta_1} \left( k_1 \ln \frac{r_0}{r} + \frac{c_1}{2} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В областях упругого деформирования скорость равна  $v_\varphi = rF(c_1, x_1, r_0)$ , а функция  $\theta$  определяется по формулам

$$\begin{aligned} \theta &= tH(c_1, x_1, r_0) + B(c_1), & \text{в области} & \quad x_1(t) \leq r \leq r_1, \\ \theta &= tH(c_1, x_1, r_0) + B_1(c_1), & \text{в области} & \quad r_1 \leq r \leq r_2, \\ \theta &= tH(c_1, x_1, r_0) + B_2(c_1), & \text{в области} & \quad r_2 \leq r \leq R. \end{aligned} \quad (5)$$

Данное напряженно-деформированное состояние справедливо до момента времени  $t = t'_1$ , в который на внутренней поверхности слоя  $r = r_1$  выполнится условие пластичности в форме  $\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_1} = k_2$  и начнет свое развитие еще одна область вязкопластического течения  $r_1 \leq r \leq x_2(t)$ . В областях  $r_0 \leq r \leq x_1(t)$  и  $x_1(t) \leq r \leq r_1$  имеют место те же соотношения, что и ранее. В остальных областях получим

в области вязкопластического течения  $r_1 \leq r \leq x_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{c_1}{r^2} - k_2 \right), \quad \theta = tH(c_1, x_1, r_0) + (t - t'_1)H_1(c_1, r, r_1) + B_1(c_1), \\ v_\varphi &= rH(c_1, x_1, r_0) + rH_1(c_1, r, r_1), \quad c_1 = k_1 x_1^2 = k_2 x_2^2, \\ H_1(c_1, r, r_1) &= \frac{2}{\eta_1} \left( k_2 \ln \frac{r_1}{r} + \frac{c_1}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

в упругих областях:

$$\begin{aligned} v_\varphi &= rH(c_1, x_1, r_0) + rH_1(c_1, x_2, r_1), \\ x_2(t) \leq r \leq r_2 : \quad \theta &= tH(c_1, x_1, r_0) + (t - t'_1)H_1(c_1, x_2, r_1) + B_1(c_1); \\ r_2 \leq r \leq R : \quad \theta &= tH(c_1, x_1, r_0) + (t - t'_1)H_1(c_1, x_2, r_1) + B_2(c_1). \end{aligned} \quad (7)$$

В момент времени  $t = t'_2$  граница  $x_2(t)$  достигает внешней поверхности слоя  $r = r_2$ . При этом в областях  $r_0 \leq r \leq x_1(t)$ ,  $x_1(t) \leq r \leq r_1$  и  $r_1 \leq r \leq r_2$  справедливы зависимости (4), (5) и (6) соответственно, в области  $r_2 \leq r \leq R$  упругого деформирования — (7), в которых  $x_2 = r_2$ . Начиная с момента времени  $t = t'_3$ , когда граница  $x_1(t)$  достигает поверхности  $r = r_1$ , пластические деформации продолжают накапливаться в областях  $r_0 \leq r \leq r_1$  и  $r_1 \leq r \leq r_2$ , и вязкопластическое течение за пределы слоя  $r_1 \leq r \leq r_2$  не развивается. В области  $r_0 \leq r \leq r_1$  выполняются соотношения (4), в слое  $r_1 \leq r \leq r_2$  и в упругой области  $r_2 \leq r \leq R$  функция  $\theta$  находится по формулам (6) и (7), где  $x_1 = r_2$  и  $x_2 = r_1$ .

В момент времени  $t = t'_4$  на поверхности  $r = r_2$  выполнится условие пластичности  $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_2} = k_1$ . С этого момента времени начнет свое развитие новая область пластического течения  $r_2 \leq r \leq x_3(t)$ . Поля перемещений и скоростей в этом случае определяются соотношениями в области  $r_0 \leq r \leq r_1$ :

$$\theta = tH(c_3, r, r_0) + B(c_3), \quad v_\varphi = rH(c_3, r, r_0), \quad c_3 = k_1 x_3^2;$$

в области  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$\begin{aligned} \theta &= tH(c_3, r_1, r_0) + (t - t'_1)H_1(c_3, r, r_1) + B_1(c_3), \\ v_\varphi &= rH(c_3, r_1, r_0) + rH_1(c_3, r, r_1); \end{aligned}$$

в области  $r_2 \leq r \leq x_3$ :

$$\begin{aligned} \theta &= tH(c_3, r_1, r_0) + (t - t'_1)H_1(c_3, r_2, r_1) + (t - t'_4)H(c_3, r, r_2) + B_2(c_3), \\ v_\varphi &= rH(c_3, r_1, r_0) + rH_1(c_3, r_2, r_1) + rH(c_3, r, r_2). \end{aligned}$$

Для определения границ вязкопластических областей в случае движения внешнего цилиндра получим уравнения:

$$\begin{aligned} H(c_1, x_1, r_0) &= \alpha t_1, \quad t_0 \leq t_1 \leq t'_1; \\ H_1(c_1, x_2, r_1) + H(c_1, x_1, r_0) &= \alpha t_2, \quad k_1 x_1^2 = k_2 x_2^2, \quad t'_1 \leq t_2 \leq t'_2; \\ H_1(c_2, r_2, r_1) + H(c_2, x_1, r_0) &= \alpha t_3, \quad t'_2 \leq t_3 \leq t'_3; \\ H(c_3, r_1, r_0) + H(c_3, x_3, r_2) + H_1(c_3, r_2, r_1) &= \alpha t_4, \quad t'_4 \leq t_4; \end{aligned}$$

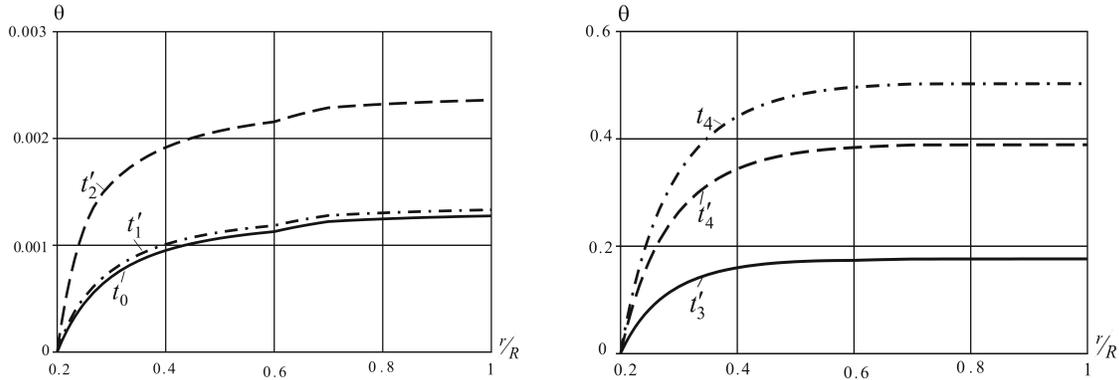


Рис.8. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса при движении внешнего цилиндра

Компоненты пластических деформаций определяются по формулам

$$p_{r\varphi} = \frac{k_1(t - t'_4)}{\eta_1} \left( \frac{x_3^2}{r^2} - 1 \right), \quad \text{в области } r_2 \leq r \leq x_3(t),$$

$$p_{r\varphi} = \frac{(t - t'_1)}{\eta_2} \left( \frac{k_1 x_3^2}{r^2} - k_2 \right), \quad \text{в области } r_1 \leq r \leq r_2,$$

$$p_{r\varphi} = \frac{k_1 t}{\eta_1} \left( \frac{x_3^2}{r^2} - 1 \right), \quad \text{в области } r_0 \leq r \leq r_1,$$

$$p_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, \quad p_{rr} = 2d_{r\varphi} (e_{r\varphi} - d_{r\varphi}).$$

Распределение функции  $\theta$  при повороте внешнего жесткого цилиндра показано на рис. 8 ( $\frac{r_1}{R} = 0.6, \quad \frac{r_2}{R} = 0.7$ ).

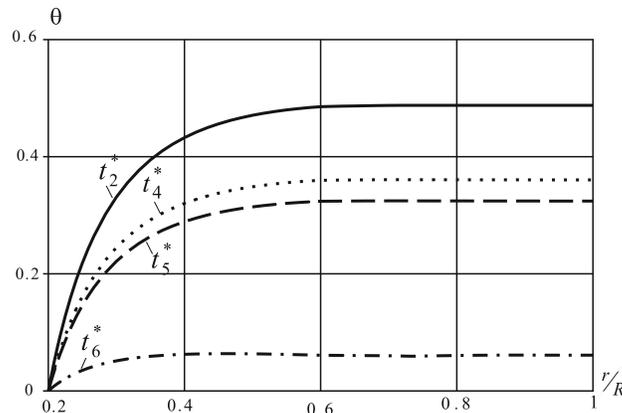


Рис.9. Распределение угла поворота в зависимости от радиуса при движении внешнего цилиндра в обратную сторону

При остановке внешнего цилиндра и повороте его в противоположном направлении наблюдаются те же эффекты, что и при движении внутреннего цилиндра. Повторное пластическое течение впервые начинается в окрестности внутренней поверхности  $r = r_0$ ; после того, как при  $r = r_1$  выполнится условие пластичности  $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_1} = -k_2$ , будет развиваться еще одна

область пластического течения. Когда напряженное состояние выйдет на поверхность нагружения  $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_2} = -k_1$ , вязкопластическое течение будет происходить и в области  $r_2 \leq r \leq x_3^*$ . Затем граница  $x_3^*$  переходит через поверхность  $r = x_3$  и с течением времени достигает внешней жесткой поверхности. На рис.9. приведено распределение угла поворота в этом случае.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бахшиян, Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязко-пластичной среде / Ф. А. Бахшиян // ПММ. – 1948. – Т. 12, вып. 6. – С. 650–661.
- [2] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады АН СССР. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 199–201.
- [3] Буренин, А. А. Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 18–25.
- [4] Буренин, А. А. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 143–151.
- [5] Буренин, А. А. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки / А. А. Буренин, А. С. Устинова // Успехи механики сплошных сред : к 70-летию академика В. А. Левина : сб. научн. тр. – Владивосток : Дальнаука. – 2009. – С. 91–102.
- [6] Быковцев, Г. И. О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления / Г. И. Быковцев, А. Д. Чернышов // ПМТФ. – 1964. – № 4. – С. 94–96.
- [7] Знаменский, В. А. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.
- [8] Ковтанюк, Л. В. О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 87–93.
- [9] Мосолов, П. П. Механика жесткопластических сред / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
- [10] Мясников, В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды / В. П. Мясников // ПМТФ. – 1961. – № 2. – С. 79–86.
- [11] Огибалов, П. М. Нестационарные движения вязкопластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1970. – 415 с.
- [12] Резунов, А. В. Задача о чистом сдвиге вязко-пластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями / А. В. Резунов, А. Д. Чернышов // Механика деформируемого твердого тела : межвуз. сб. – Куйбышев, 1975. – С. 32–36.
- [13] Сафрончик, А. И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде / А. И. Сафрончик // ПММ. – 1959. – Т. 23. – Вып. 6. – С. 998–1014.

A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, A. S. Ustinova

**A VISCOSIMETRIC CURRENT OF THE ELASTOVISCOPLASTIC MEDIUM  
WEAKENED BY A LAYER OF MORE PLIABLE MATERIAL**

*Institute of Automation and Control Processes Far East branch of the Russian Academy of  
Sciences*

**Abstract.** The deformation of the elastoviscoplastic environment between two rigid coaxial cylinders at turn of one of them is considered. The medium is weakened by a layer of more pliable material. The decision is constructed within the limits of a big elastoviscoplastic deformations' model. A reversible deformation, a visco-plastic current, a case of a stop of the cylinder and its deformation at turn in the opposite direction are considered. The movement laws of the borders of developing areas of the visco-plastic currents at various speeds of turn of surfaces are received.

**Keywords:** elasticity, viscoplasticity, big deformations, residual pressures.

*Буренин Анатолий Александрович*

*член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией механики деформируемого твердого тела, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** burenin@iacp.dvo.ru

*Ковтанюк Лариса Валентиновна*

*доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики деформируемого твердого тела, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** lk@iacp.dvo.ru

*Устинова Александра Сергеевна*

*аспирант лаборатории механики деформируемого твердого тела, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток*

**e-mail:** asustinova@mail.ru

*Burenin, Anatoly Alexandrovich*

*Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Automatics and Managerial Processes of Far East Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

*Kovtanyuk, Larissa Valentinovna*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Institute of Automatics and Managerial Processes of Far East Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

*Ustinova, Alexandra Sergeevna*

*Postgraduate Student, Laboratory of Mechanics of a Deformable firm body, Institute of Automatics and Managerial Processes of Far East Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok*

Н. Д. Вerveйко, Е. Н. Ерохина, А. В. Ковалев

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ПЛОСКАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ СВЯЗНЫХ СЫПУЧИХ СРЕД

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В рамках плосконапряженного состояния решается осесимметричная задача нагружения внутренним и внешним давлением тонкой пластины с круговым отверстием или кольца из связного упругопластического сыпучего материала. Предполагается, что материал вне зоны пластического деформирования ведет себя упруго. Построена замкнутая система уравнений для определения границы пластической зоны в зависимости от параметров материала и внешних нагрузок.

**Ключевые слова:** пластичность, упругопластическая граница, пластический сжимаемый сыпучий материал.

УДК: 539.374

**Введение.** Фундаментальные математические модели условий пластичности сыпучих материалов представляют собой цилиндр или конус в пространстве главных напряжений. При этом ось цилиндра или конуса совпадает с осью первого инварианта тензора напряжений (см. [1], [2], [3]). Многочисленные эксперименты с глинами и песками показали наличие объемного деформирования реальных материалов при сдвиге, которое известно как эффект дилатансии грунтов. При этом объемное деформирование грунтов возможно и при отсутствии деформации сдвига, что говорит о замкнутости условия пластичности для связных сыпучих материалов (см. [4]). Введение гипотезы о вращении микрочастиц сыпучего материала и коэффициента трения качения таких частиц позволило представить условие пластичности (см. [5]):

$$\Phi = I_{2\sigma'}^2 - (Y + \alpha I_{1\sigma})^2 + f^2 I_{1\sigma}^2 = 0, \quad (1)$$

где  $I_{2\sigma'}^2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$  - второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $Y$  - предел текучести,  $\alpha$  - коэффициент внутреннего трения,  $f$  - коэффициент трения качения,  $I_{1\sigma}$  - первый инвариант тензора напряжений в форме эллипсоида вращения в пространстве главных напряжений, что является обобщением моделей статики сыпучих сред (см. [2], [4]).

С теоретической и практической точек зрения большой интерес представляет расчет зоны пластического деформирования сыпучей среды при ее осесимметричном нагружении давлением по круговому вырезу.

Осесимметричное деформирование связной сыпучей среды с наличием жесткопластической зоны и области упругого деформирования.

Рассмотрим плоское кольцо внешнего радиуса  $a$  и внутреннего радиуса  $b$  (рис.1) из связной сыпучей среды, нагруженное равномерно распределенным давлением  $P_a$  по внутренней и  $P_b$  по внешней окружностям кольца. Предположим (см. [6]), что при определенных значениях

внешних нагрузок в среде возникают области пластического и упругого деформирования, граница между которыми заранее неизвестна.

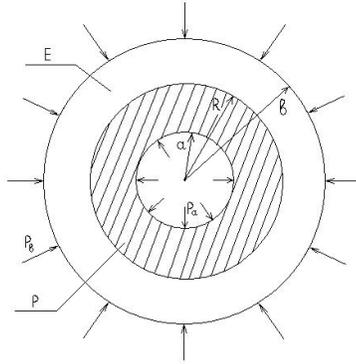


Рис. 1. Схематичное изображение области пластического и упругого деформирования материала под действием внутреннего и внешнего нагружений.

При описании механического поведения связной сыпучей среды в осесимметричном случае в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  будем использовать в пластической зоне уравнение равновесия в напряжениях:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\theta$  - компоненты тензора напряжений.

Условие пластичности для связного сжимаемого сыпучего материала представим в форме:

$$(1 - 3\alpha^2 + 3f^2)(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2) - (1 + 6\alpha^2 - 6f^2)\sigma_r\sigma_\theta - 6\alpha Y(\sigma_r + \sigma_\theta) - 3Y^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) получено в предположении плосконапряженного состояния ( $\sigma_z = 0$ ). При соединяя к соотношениям (2), (3) граничное условие:

$$\sigma_r|_{r=a} = -P_a, \quad (4)$$

получаем замкнутую статически определимую систему уравнений для определения напряжений в пластической зоне.

Определение напряжений в упругой зоне, согласно [7], сводится в осесимметричном случае к решению уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0, \quad (5)$$

где  $\varphi(r)$  - функция напряжений Эри и

$$\sigma_r^e = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \sigma_\theta^e = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}. \quad (6)$$

Граничное условие для напряжений в упругой зоне имеет вид:

$$\sigma_r^e|_{r=b} = -P_b. \quad (7)$$

К уравнениям (2)-(3) с граничным условием (4) и к уравнению (5) с условиями (6), (7) следует присоединить условия сопряжения решений. На границе раздела зон упругого и пластического деформирования они таковы:

$$\sigma_r|_{r=R} = \sigma_r^e|_{r=R}, \quad (8)$$

$$\sigma_\theta|_{r=R} = \sigma_\theta^e|_{r=R}, \quad (9)$$

где  $R$  - радиус границы зон пластического и упругого деформирования. Соотношение (8) при этом является граничным условием для напряжений в упругой зоне, а (9) - уравнением для определения  $R$ .

Система уравнений (2)-(3) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для  $\sigma_r$ :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E\sigma_r + F \pm \sqrt{K\sigma_r^2 + L\sigma_r + M}}{N \cdot r}, \quad (10)$$

где  $E = -1 - 12f^2 + 12\alpha^2$ ,  $F = 6\alpha Y$ ,  $K = 3(-1 - 12f^2 + 12\alpha^2)$ ,  $L = 36\alpha Y$ ,  $M = 12(1 + 3f^2)Y^2$ ,  $N = 2(1 + 3f^2 - 3\alpha^2)$ .

Окружные напряжения  $\sigma_\theta$  определяются из условия пластичности следующим образом:

$$\sigma_\theta = \frac{P\sigma_r + F \pm \sqrt{K\sigma_r^2 + L\sigma_r + M}}{N}, \quad (11)$$

где  $P = 1 - 6f^2 + 6\alpha^2$ .

Разрешая (10) с условием (4) относительно  $\sigma_r$  и определяя  $\sigma_\theta$  из (11), получим напряженное состояние связанного сжимаемого сыпучего материала в пластической зоне.

Решение уравнения (5) имеет вид:

$$\varphi = A \cdot \ln r + B \cdot r^2 \cdot \ln r + C \cdot r^2 + D. \quad (12)$$

Откуда, согласно (6), принимая  $B = 0$ , получим

$$\sigma_r^e = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad (13)$$

$$\sigma_\theta^e = -\frac{A}{r^2} + 2C, \quad (14)$$

где  $A, C$  - константы, определяемые из условий (7), (8). Тогда

$$A = \frac{R^2 b^2 (P_b - P_i)}{b^2 - R^2}, \quad 2C = \frac{P_i R^2 - P_b b^2}{b^2 - R^2}, \quad (15)$$

где  $P_i = -\sigma_r|_{r=R}$ .

Подставляя (15) в (13)-(14), получим распределение напряжений в упругой зоне связанного сыпучего материала в форме:

$$\sigma_r^e = \frac{R^2 b^2 (P_b - P_i)}{b^2 - R^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i R^2 - P_b b^2}{b^2 - R^2}, \quad (16)$$

$$\sigma_\theta^e = -\frac{R^2 b^2 (P_b - P_i)}{b^2 - R^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i R^2 - P_b b^2}{b^2 - R^2}. \quad (17)$$

В случае бесконечной пластинки следует в (16), (17) положить  $b \rightarrow \infty$ .

Нахождение границы пластического деформирования связанной сыпучей среды.

Граница раздела зон упругого и пластического деформирования  $r = R$  в сжимаемом связанном сыпучем материале определяется из (9). При этом напряжение в упругой зоне  $\sigma_\theta^e$  вычисляется из (17), а напряжение в пластической зоне  $\sigma_\theta$  вычисляется из (11) после решения

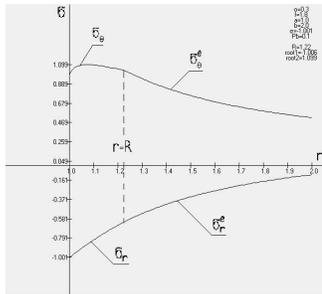
задачи Коши пошаговым алгоритмом Рунге-Кутты или Эйлера для обыкновенного дифференциального уравнения (10). Алгоритм определения граничной зоны пластического деформирования был реализован следующим образом. Начиная с внутренней границы  $r = a$  с шагом  $h$  производился расчет радиального напряжения  $\sigma_r$  и окружного напряжения  $\sigma_\theta$  в пластической зоне, и на каждом  $i$ -ом шаге  $r_i = a + h \cdot i$  вычислялось упругое напряжение  $\sigma_\theta^e$  по формуле (17), где в качестве давления на внутренней границе  $r_i$  использовалось пластическое радиальное напряжение. В случае совпадения вычисленного окружного упругого напряжения  $\sigma_\theta^e$  с окружным пластическим напряжением  $\sigma_\theta$  с погрешностью  $\varepsilon$  значение  $r_i$  принималось за границу пластической зоны:

$$|\sigma_\theta^e - \sigma_\theta| |_{r=R} \leq \varepsilon. \quad (16)$$

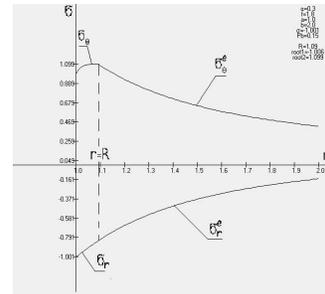
### Численный эксперимент.

На рисунке 2 (а, б) представлены графики окружного и радиального напряжений в случае изменения внешнего давления, из которых следует, что увеличение внешнего давления при неизменном внутреннем давлении ведет к уменьшению зоны пластического деформирования. Этот факт объясняется тем, что увеличение внешнего давления  $P_b$  ведет к сжимающим  $\sigma_\theta^e$ , что компенсирует растягивающие  $\sigma_\theta$ , возникающие за счет давления  $P_a$  на внутреннем контуре.

На рисунке 3 (а, б) представлены графики окружного и радиального напряжений в случае изменения внутреннего давления, из которых следует, что увеличение внутреннего давления при неизменном внешнем давлении ведет к увеличению зоны пластического деформирования.



а)  $P_b = 0.1, R = 1.22$



б)  $P_b = 0.15, R = 1.09$

Рис. 2. Графики поведения окружного и радиального напряжений в пластической и упругой зонах при различных значениях внешнего давления.

На рисунке 4 (а, б) рассмотрены графики определения границы пластического деформирования в случае изменения коэффициента  $f$ , из которых следует, что увеличение коэффициента  $f$  ведет к увеличению зоны пластического деформирования.

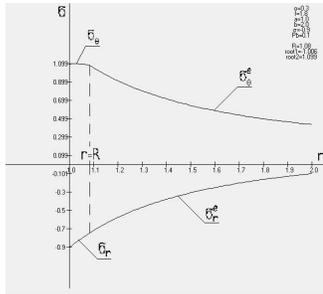
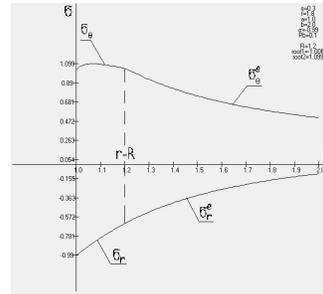
а)  $P_a = 0.9, R = 1.08$ б)  $P_a = 0.99, R = 1.2$ 

Рис. 3. Графики поведения окружного и радиального напряжений в пластической и упругой зонах при различных значениях внутреннего давления.

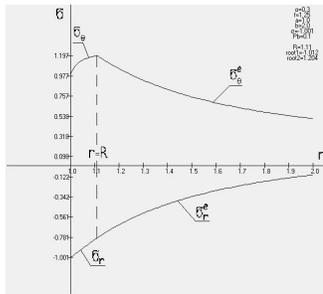
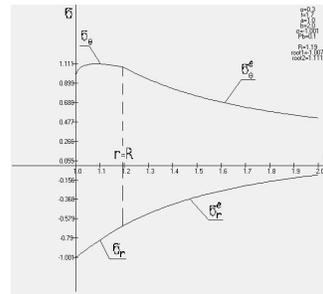
а)  $f = 1.25, R = 1.11$ б)  $f = 1.7, R = 1.19$ 

Рис. 4. Графики поведения окружного и радиального напряжений в пластической и упругой зонах при различных значениях коэффициента трения качения.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред : в 2 т. Т. 1 : Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
- [2] Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред : в 2 т. Т. 2 : Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
- [3] Соколовский, В. В. Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М. : Наука, 1990. – 272 с.
- [4] Echlert, W. A general approach to porous media elasto-plasticity / W. Echlert // MECH-Ber. / Univ. Essen. – 1989. – № 6. – P. 1–61.
- [5] Валюхов, С. Г. Микрополярная модель связанных сыпучих материалов / С. Г. Валюхов, Н. Д. Вервейко, О. А. Смотров. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1999. – 87 с.
- [6] Спорыхин, А. Н. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2004. – 129 с.

[7] Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.

*N. D. Verveyko, E. N. Erokhina, A. V. Kovalev*

**AXIALLY SYMMETRIC PLANE ELASTOPLASTIC PROBLEM OF  
MECHANICS OF CONNECTED GRANULAR SOLIDS**

*Voronezh State University*

**Abstract.** Axially symmetric problem of loading soil plate with circular aperture or a ring consisting of connected elastoplastic granular material with internal and external pressure in planar stressed state is solved. It is assumed the material is elastic outside the range of plastic deformation. Closed system of equations is constructed to detect plastic strain range boundary subject to the parameters of different material and external loads.

**Keywords:** plasticity, elastic-plastic boundary, plastic compressible granular material.

*Вервейко Николай Дмитриевич*

*доктор технических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** ver38@mail.ru

*Ерохина Евгения Николаевна*

*аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** erokhina1985@mail.ru

*Ковалев Алексей Викторович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** kav-mail@mail.ru

*Verveyko, Nikolay Dmitrievich*

*Dr. Eng. Sci., Professor, Voronezh State University, Voronezh*

*Erokhina, Evgeniya Nikolaevna*

*Postgraduate Student, Voronezh State University, Voronezh*

*Kovalev, Aleksey Viktorovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh*

В. В. Глаголев, А. А. Маркин

## О ВЛИЯНИИ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА НА ФОРМИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТУПИКОВОЙ ОБЛАСТИ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается возможность описания упругой и упругопластической стадий процесса деформирования вплоть до начала разделения тела, ослабленного трещиной в виде физического разреза. В модель трещины включен и слой материала, лежащий на мысленном продолжении физического разреза в сплошной среде. В процессе нагружения тела предполагается возможным существование пластической области в рамках данного слоя. Для описания поведения материала при переходе в пластическую область используется вариант деформационной теории, при этом изменение объема остается линейно упругим. Процесс упругопластического деформирования полагается лучевым, направляющий тензор девиатора напряжений в каждой точке слоя фиксируется его значением, достигнутым в момент перехода из упругой стадии в упругопластическую. Данное допущение позволило свести задачу к статически определимой. Получены зависимости компонент напряжений слоя и внешней расклинивающей силы от длины пластической области слоя.

**Ключевые слова:** трещина, разрушение, упругопластическая модель, упрочнение.

УДК: 539.375

Механика разрушения к настоящему времени имеет множество подходов к описанию НДС тел, ослабленных трещиной. Каждый из подходов включает в себя как модель трещины, так и соответствующий критерий ее продвижения. Наиболее распространенной моделью трещины в сплошной среде является представление в виде математического разреза [1-3]. Используя критерий Гриффитса в энергетическом или силовом варианте, удается прогнозировать трещиностойкость материалов, поведение которых, описывается моделью линейно упругого тела. Если же материал проявляет пластические свойства, то модель математического разреза исследует поведение поврежденных тел в рамках различных критериев образования новых материальных поверхностей [4,5] в зависимости от вида нагружения и степени пластической деформации. Отметим, что в этом случае ни одно из представлений в частности не дает ответа на вопрос о начале пластического деформирования в концевой области трещины Гриффитса. А наиболее известная и используемая модель Леонова - Панасюка - Дагдейла [6,7] предполагает наличие пластической зоны при сколь угодно малой внешней нагрузке.

Отсутствие общего подхода к описанию поведения упругопластических тел, ослабленных трещиной, моделируемой математическим разрезом приводит к рассмотрению альтернативных модельных представлений и вариантам постановок задач механики разрушения на их

---

Поступила 27.04.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-97500) и Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (контракт П1125).

основе. Одним из подходов, позволяющих строить решения в рамках гипотез сплошной среды, является представление Макклиттока [8]. Следуя [8] в окрестности прохождения трещины выделяется слой некоторой толщины  $\delta_0$  механические свойства которого не отличаются от окружающего материала вплоть до начала разрушения, локализирующегося в слое. Разрушение в данном случае трактуется как эволюция слоя в сплошной среде. Согласно данному представлению трещину будем рассматривать как физический разрез. Толщину разреза выбираем как минимально допустимую с точки зрения выполнения гипотез механики сплошной среды. В совокупности с данным представлением в модель трещины включаем и материал среды, лежащий на мысленном продолжении физического разреза. Деформация слоя формирует граничные условия для сопряженной с ним среды. В работах [9-11] соответствующий материал определен как слой взаимодействия. Основными задачами при данном подходе являются определение численного значения толщины слоя, включая постановку возможных натуральных экспериментов по его нахождению, а также исследование конкретных краевых задач механики разрушения.

В рамках данного подхода исследован стандартный эксперимент на трещиностойкость для образца в виде двухконсольной балки [10]. В этой модели не учитывается влияние касательной нагрузки со стороны слоя на консоль по сравнению с нормальной. Это допущение приводит к тому, что в слое напряжение отрыва не превышает предел текучести, что характерно только для плоского напряженного состояния. В статье [11] предлагается возможная постановка задачи разрушения типа нормального отрыва для плоскости с полубесконечной трещиной при учете касательной составляющей нагрузки по границе слоя и смежной с ним среды. При постановке задач полагалось, что материал слоя подчиняется законам идеально упругопластического тела [12], а вне слоя среда описывается уравнениями линейной упругости. В представленной работе, в развитии [13], изучается: а) влияние упрочнения материала слоя на характер НДС окрестности трещины, б) развитие длины пластической зоны от внешней нагрузки для плоского напряженного и деформированного состояний, в) сравнение результатов решения задачи в рамках предложенной модели и модели полученной на основе гипотез Леонова - Панасюка - Дагдейла (ЛПД). Из полученного решения дается обоснование одному из возможных критериев начала образования новых материальных поверхностей для неделимого элементарного объема упругопластического материала.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим нагружение берегов трещины, моделируемой физическим разрезом в линейно упругой плоскости согласно схеме, показанной на Рис.1(а), соответствующей разрушению типа нормального отрыва. Предполагается возможным существование пластической области ( $OSS'O'$ ) в пределах слоя, лежащем на мысленном продолжении физического разреза в сплошной среде.

Наряду с напряжением  $\sigma_{11}(x_2)$  в слое учитываем напряжение  $\sigma_{22}(x_2)$ , обусловленное наличием касательных напряжений  $\sigma_{21}(x_2)$  вдоль границы с полуплоскостью.

Считаем, что связь между напряжениями и деформациями вне слоя взаимодействия описывается в рамках линейной теории упругости для случая плоского деформирования. Поведение материала слоя при активном нагружении определим следующими физическими соотношениями, являющимися следствием варианта теории пластичности Ильюшина - Ленского:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\sigma} = 2G(\varepsilon)\Delta \tilde{\varepsilon}; \\ \Delta p = K\Delta \theta, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\tilde{\sigma}$  – девиатор тензора истинных напряжений;  $\tilde{\varepsilon}$  – девиаторная составляющая тензора деформаций;  $\theta = \varepsilon \cdot E$ ,  $K$  – модуль объемного сжатия;  $p = \frac{1}{3}\sigma \cdot E$  – гидростатическая составляющая тензора напряжений;  $\varepsilon$  – параметр упрочнения;  $G(\varepsilon)$  – сдвиговой модуль;  $G(\varepsilon) = G_y$  при  $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} \leq \tau_m^2$ ;  $G(\varepsilon) = G_p$  при  $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} > \tau_m^2$ ;  $\tau_m$  – предел текучести.

В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость ( $x_1 \geq \delta_0/2$ ) (Рис.1(б)), а действие слоя заменим нагрузкой  $\vec{q}(x) = -(\hat{\sigma}_{11}\vec{e}_1 + \hat{\sigma}_{21}\vec{e}_2)$ . Здесь и далее

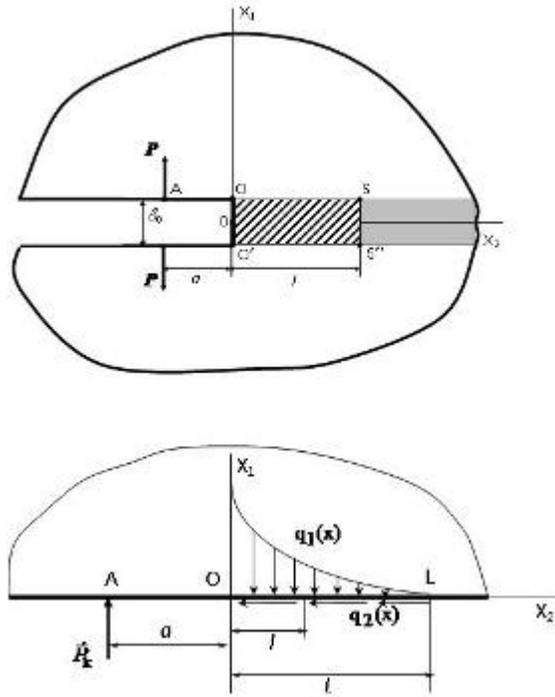


Рис. 1.

$x \equiv x_2/\delta_0$ ,  $\delta_0$  – безразмерная координата;  $\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\beta$   $i, j = 1, 2$  – безразмерные напряжения;  $\beta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$  – параметр материала для случая плоского деформирования,  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Следуя [11], основными неизвестными компонентами слоя считаем средние напряжения, определяемые следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{ij}(x) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \hat{\sigma}_{ij}(x_1, x) dx_1. \quad (2)$$

В силу антисимметрии касательных компонент тензора напряжений относительно оси  $Ox_2$  имеем  $\bar{\sigma}_{12}(x) = \bar{\sigma}_{21}(x) = 0$ . Среднее напряжение  $\bar{\sigma}_{22}(x)$  слоя будет связано с касательными напряжениями, действующими вдоль границы слоя соотношением

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(x)}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}\left(\frac{\delta_0}{2}, x\right). \quad (3)$$

Соотношения Фламана [14] связывают внешние нагрузки  $\bar{\sigma}_{11}$  и  $\hat{\sigma}_{12}$  с перемещениями границы безразмерными выражениями

$$\hat{u}_1(x) = -\hat{P} \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln\left|\frac{x-\xi}{L-\xi}\right| d\xi, \quad (4)$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x - \xi|}{L - \xi} d\xi, \quad (5)$$

здесь  $\hat{u}_i = u_i/\delta_0$ ,  $i = 1, 2$  – безразмерные перемещения;  $\hat{P} = P\beta/\delta_0$  – безразмерная сила на единицу толщины;  $L$  – удаленная точка с нулевым перемещением;  $L$  – расстояние от начала координат до  $L$ .

Перемещения границ слоя определяются в следующем виде:

$$\hat{u}_1(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{11}(x), \quad (6)$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_L^x \varepsilon_{22}(x) dx. \quad (7)$$

Напряжения, до достижения предела текучести  $\tau_m$ , связаны с деформациями законом Гука:

$$\varepsilon_{11} = \hat{A} \bar{\sigma}_{11} - \hat{B} \bar{\sigma}_{22}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{22} = \hat{A} \bar{\sigma}_{22} - \hat{B} \bar{\sigma}_{11}, \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \nu (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}), \quad (10)$$

где  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\hat{B} = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$  – безразмерные постоянные.

При решении упругопластической задачи полагаем, что процесс деформирования лучевой. В этом случае поведение материала слоя на стадии пластического деформирования, согласно (1), определяется следующими выражениями:

$$\varepsilon_{11} = \hat{C} + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{11} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{22}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{22} = \hat{C}_1 + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{22} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{11}, \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{33}^k + \nu_p (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{11}^k + \bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{22}^k), \quad (13)$$

где  $\hat{A}_p = \frac{(1-\nu_p^2)/E_p}{\beta}$ ;  $\hat{B}_p = \frac{\nu_p(1+\nu_p)/E_p}{\beta}$ ;  $\nu_p = \frac{3K-2G_p}{6K+2G_p}$ ;  $E_p = \frac{9KG_p}{3K+G_p}$ ;

$\hat{C} = \left(\hat{A} - \hat{A}_p\right) \bar{\sigma}_{11}^k - \left(\hat{B} - \hat{B}_p\right) \bar{\sigma}_{22}^k$ ;  $\hat{C}_1 = \left(\hat{A} - \hat{A}_p\right) \bar{\sigma}_{22}^k - \left(\hat{B} - \hat{B}_p\right) \bar{\sigma}_{11}^k$ ;

$\bar{\sigma}_{11}^k, \bar{\sigma}_{22}^k, \bar{\sigma}_{33}^k$  – напряжения, удовлетворяющие условию  $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} = \tau_m^2$ .

Используется кусочно-постоянная аппроксимация зависимости  $G(\varepsilon)$ . Символ  $p$  приписывается касательному модулю в пластическом состоянии.

Подставим в формулу (4) выражения (6), (8) и (11). В результате получим уравнение относительно  $\bar{\sigma}_{11}$  и  $\bar{\sigma}_{22}$  для области пластического деформирования:

$$\frac{1}{2} (\hat{C} + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{11} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad x \in [0, l]; \quad (14)$$

и для области обратимого деформирования:

$$\frac{1}{2}(\hat{A}\bar{\sigma}_{11} - \hat{B}\bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad x \in (l, L]. \quad (15)$$

Продифференцируем по  $x$  выражение (5)

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi. \quad (16)$$

Подставим в левую часть (16) выражения (9), (12) и получим следующие уравнения относительно  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$  и  $\hat{\sigma}_{21}$  для области пластического деформирования материала слоя:

$$\hat{C}_1 + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{22} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad x \in [0, l]; \quad (17)$$

и зоны упругого поведения:

$$\hat{A}\bar{\sigma}_{22} - \hat{B}\bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad x \in (l, L]. \quad (18)$$

Таким образом, имеем систему интегральных уравнений относительно компонент напряжений для описания пластического деформирования слоя (14), (17) и систему (15), (18) для моделирования упругого поведения слоя, дополненные связью (3).

Условие перехода из упругого состояния в пластическое, запишем в безразмерном виде:

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\tau}_m^2, \quad (19)$$

где  $\hat{\sigma} = \beta \tilde{\sigma}$  – безразмерный девиатор тензора напряжений,  $\hat{\tau}_m$  – безразмерный предел текучести.

Пусть  $\hat{\sigma}_T = \beta \sigma_T$  – безразмерный предел текучести при одноосном растяжении. Перепишем выражение (19) исключая  $\bar{\sigma}_{33}$  с помощью связи (10)

$$\sqrt{\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2 - \bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22} + C(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22})^2} = \hat{\sigma}_T, \quad (20)$$

где  $C = \nu(\nu - 1)$ .

Используя условие (20), соотношения (14), (18), (15), (17), (3), запишем соответствующие системы уравнений для пластической области, области переходящей из упругого состояния в пластическое и упругой области.

Система уравнений, описывающая поведение пластической области слоя взаимодействия, где  $\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} > \hat{\tau}_m^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{11} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \\ \hat{C}_1 + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{22} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}. \end{array} \right. \quad (21)$$

Уравнения для области перехода из упругого состояния в пластическое, где  $\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\tau}_m^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{A}\bar{\sigma}_{11} - \hat{B}\bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \\ \hat{A}\bar{\sigma}_{22} - \hat{B}\bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}, \\ \sqrt{\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2 - \bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22} + C(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22})^2} = \hat{\sigma}_T. \end{array} \right. \quad (22)$$

Система уравнений для упругой области слоя, где  $\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} \leq \tau_m^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{A}\bar{\sigma}_{11} - \hat{B}\bar{\sigma}_{22}) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{L+a} + \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \\ \hat{A}\bar{\sigma}_{22} - \hat{B}\bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}. \end{array} \right. \quad (23)$$

Система уравнений (21) – (23) с граничным условием  $\hat{\sigma}_{22}|_{x=0} = 0$  позволяет установить связь между распределением напряжений вдоль слоя взаимодействия на упругой и упруго-пластической стадиях процесса и внешнего усилия  $\hat{P}$ . Задавая длину пластической зоны слоя взаимодействия  $\ell_p$  можно определить соответствующее распределение напряжений и значения внешней нагрузки  $\hat{P}(\ell_p)$ .

**2. Решение задачи.** Исследовать полученные системы интегральных и дифференциальных уравнений будем в рамках дискретной модели, представляя слой взаимодействия набором квадратных в плане  $\delta_0$ -элементов. Основным постулатом данной модели является положение об однородности НДС в каждом из элементов.

Для решения задачи разобьем границу полуплоскости OL на N граничных элементов [15]. Считаем, что каждый граничный элемент характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжения  $\hat{\sigma}_{ij}^{(k)}$ , где  $k = \overline{1 \dots N}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Построим дискретные выражения интегральных операторов:

$$\int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \left( \frac{|x-\xi|}{L-\xi} \right) d\xi = \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_{11}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \left( \frac{|x_j-\xi|}{L-\xi} \right) d\xi, \quad (24)$$

$$\int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{21}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j-\xi} d\xi. \quad (25)$$

Проинтегрируем соотношение (3) по j элементу:

$$\hat{\sigma}_{21}^{(j)} = -\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \bar{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}. \quad (26)$$

Подставив (24)-(26) в (21)-(23), получим дискретную модель упругопластического поведения материала слоя взаимодействия.

Для элементов слоя, находящихся в пластическом состоянии:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{11}^{(j)} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{22}^{(j)}) = -\hat{P} \ln \frac{x_j + a}{L + a} + \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_{11}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \left( \frac{|x_j - \xi|}{L - \xi} \right) d\xi, \\ \hat{C}_1 + \hat{A}_p \bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \hat{B}_p \bar{\sigma}_{11}^{(j)} = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{21}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j - \xi} d\xi, \\ \hat{\sigma}_{21}^{(j)} = -\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \bar{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}. \end{array} \right. \quad (27)$$

Для элемента, переходящего из упругого состояния в пластическое:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{A} \bar{\sigma}_{11}^{(j)} - \hat{B} \bar{\sigma}_{22}^{(j)}) = -\hat{P} \ln \frac{x_j + a}{L + a} + \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_{11}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \left( \frac{|x_j - \xi|}{L - \xi} \right) d\xi, \\ \hat{A} \bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \hat{B} \bar{\sigma}_{11}^{(j)} = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{21}^{(k)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j - \xi} d\xi, \\ \hat{\sigma}_{21}^{(j)} = -\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \bar{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}, \\ \sqrt{\bar{\sigma}_{11}^{(j)2} + \bar{\sigma}_{22}^{(j)2} - \bar{\sigma}_{11}^{(j)} \bar{\sigma}_{22}^{(j)}} + C \left( \bar{\sigma}_{11}^{(j)} + \bar{\sigma}_{22}^{(j)} \right)^2 = \hat{\sigma}_T. \end{array} \right. \quad (28)$$

Система уравнений для элементов слоя, деформируемых упруго:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{A} \bar{\sigma}_{11}^{(j)} - \hat{B} \bar{\sigma}_{22}^{(j)}) = -\hat{P} \ln \frac{x_j + a}{L + a} + \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_{11}^{(j)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln \frac{x_j - \xi}{L - \xi} d\xi, \\ \hat{A} \bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \hat{B} \bar{\sigma}_{11}^{(j)} = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{21}^{(j)} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{x_j - \xi} d\xi, \\ \hat{\sigma}_{21}^{(j)} = -\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(j)} - \bar{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}. \end{array} \right. \quad (29)$$

Система уравнений содержит  $3n + 1$  уравнения от  $3n + 1$  неизвестного. Неизвестными являются  $3n$  обобщенных напряжений и сила  $\hat{P}$ , обеспечивающая соответствующее напряженное состояние при заданном количестве элементов, находящихся в состоянии пластичности. Процесс решения рассмотренной задачи сводится к пошаговому отысканию компонент напряжений и усилия  $\hat{P}$  при добавлении на каждом шаге в зону пластического деформирования одного элемента.

Из решения упругой задачи (системы (29), являющейся линейной) имеем:  $\bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{33} \geq \bar{\sigma}_{22}$ , следовательно, критерий Треска - Сен-Венана имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22} = \hat{\sigma}_T. \quad (30)$$

Образование пластической зоны рассматривается как последовательный переход элементов слоя в пластическое состояние. На каждом этапе решения упругопластической задачи учитывалось перераспределение напряжений, вызываемое переходом нового элемента в состояние пластического деформирования. Если в переходном элементе напряжения удовлетворяли неравенству:  $\bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{22} \geq \bar{\sigma}_{33}$ , то в этом случае в качестве приближения к критерию (20) использовалось условие:

$$\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{33} = \hat{\sigma}_T. \quad (31)$$

Отметим, что если изначально вместо критерия Губера - Мизеса, использовать критерий Треска - Сен-Венана, то дискретное решение будет сведено к анализу линейных систем уравнений. Соответствующее представление в рамках идеально упругопластической модели [11] рассмотрено в [10].

Полученная система уравнений трансформируется для описания плоского напряженного состояния, если в законе Гука (8), (9) принять  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\hat{B} = \frac{\pi\nu}{2}$ , в условии (20) положить  $C = 0$ , а компоненты напряжения отнести к параметру  $\beta = \frac{2}{\pi E}$ .

**3. Анализ полученного решения.** Было проведено исследование влияния числа граничных элементов на результаты расчетов. Установлено, что при  $N > 1000$  расчетные значения полей напряжений практически не меняются, также  $N$  не влияет на скорость сходимости итерационного процесса.

На Рис.2(а) построены эпюры распределения напряжений в слое взаимодействия на первых 6 элементах при следующих расчетных характеристиках:  $N = 1000$ ;  $a = 10$ ;  $G_p = 0,1G_y$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_T = 600$  МПа;  $\nu = 0,25$  для случая пластического деформирования первого элемента и перехода второго в состояние текучести. Непрерывные линии соответствуют решению нелинейной системы (27)-(29), а штриховые – начальному приближению. Кривые 1 и 4 определяют напряжение  $\bar{\sigma}_{11}$ , 2 и 5 -  $\bar{\sigma}_{22}$ , 3 и 6 -  $\bar{\sigma}_{33}$ .

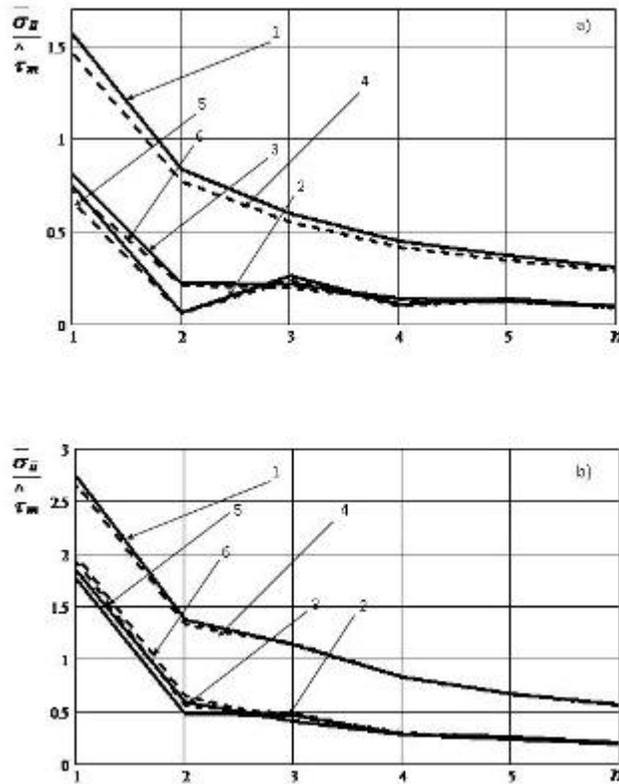


Рис. 2.

Проведено исследование влияния параметра упрочнения на распределение напряжений в зоне предразрушения. На Рис.2(b) построены эпюры распределения напряжений в слое взаимодействия на первых 6 элементах для случая перехода третьего элемента в состояние пластичности при пластическом течении на первых двух. Непрерывные линии соответствуют  $G_p = 0,1G_y$ , а штриховые –  $G_p = 0,001G_y$ . Кривые 1 и 4 определяют напряжение  $\bar{\sigma}_{11}$ , 2 и 5 –  $\bar{\sigma}_{22}$ , 3 и 6 –  $\bar{\sigma}_{33}$ .

В случае плоского напряженного состояния можно сравнить получаемый результат данной модельной задачи с результатом, решения той же самой задачи, но в рамках модели Леонова - Панасюка - Дагдейла.

На Рис. 3 отображены зависимости безразмерного расклинивающего усилия и соответствующая ему длина тонкой пластической зоны от выбранной расчетной модели для первых 5 элементов при следующих расчетных характеристиках:  $N = 1000$ ;  $a = 10$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_T = 600$  МПа;  $\nu = 0,25$ . Для модели трещины в виде физического разреза рассмотрено как плоское напряженное, так и плоское деформированное состояние. Непрерывная линия 1 соответствует решению Леонова-Панасюка-Дагдейла штриховые –  $G_p = 0,01G_y$ , штрихпунктирные –  $G_p = 0,1G_y$ . Графики 2, 4 построены для случая плоского напряженного состояния, 3, 5 – для плоского деформированного состояния.  $P_l$ - нагрузка, обеспечивающая пластическое течение на  $l$  элементах.  $P_H$  - нагрузка, необходимая для выхода первого элемента в пластическое состояние для случая плоского напряженного состояния.

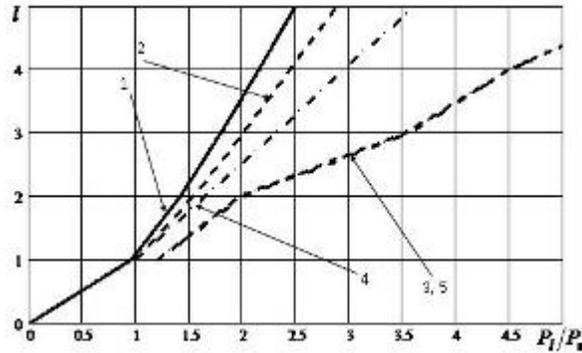


Рис. 3.

Из результатов расчета видно, что предложенная модель хорошо согласуется с ЛПД подходом для плоского напряженного состояния при малом упрочнении материала. Кроме того, удастся смоделировать известный экспериментальный факт о различии (примерно в три раза) тонкой пластической зоны в плоском напряженном состоянии от плоского деформированного состояния [16].

В рамках представленного подхода возникает вопрос о выборе критерия начала образования новых материальных поверхностей. Считая поверхностную энергию постоянной величиной конкретного материала из результатов работы [8] следует, что источник ее возникновения заключен в свободной энергии материала слоя взаимодействия. В этом случае, по аналогии с энергетическим критерием Гриффитса, разрушение элемента слоя начинается при достижении удельной свободной энергией элемента слоя критического значения.

В безразмерном виде представление свободной энергии в случае плоской деформации принимает вид:

$$\psi = 0,25\pi(\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2) - 0,5\nu\pi\bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22}/(1 - \nu),$$

а при плоском напряженном состоянии:

$$\psi = 0,25\pi(\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2) - 0,5\nu\pi\bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22}.$$

На Рис.4 построены зависимости удельной свободной энергии первого элемента слоя  $\psi$  от длины пластической области (количества пластических элементов). Штриховая линия соответствует  $G_p = 0,1G_y$ , штрихпунктирная –  $G_p = 0,01G_y$ .

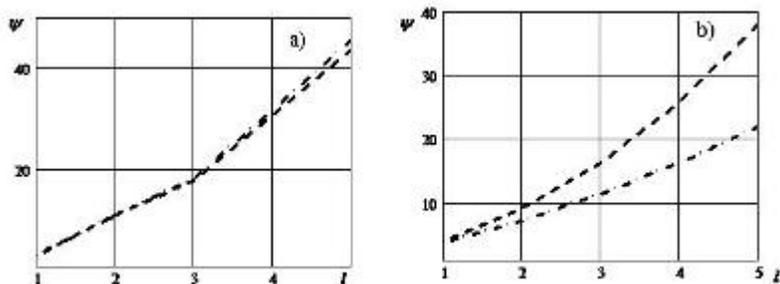


Рис. 4.

На Рис. 4а рассмотрена плоская деформация, а на Рис. 4б – плоское напряженное состояние. Результаты расчета показывают (Рис.3 и Рис.4), что в случае плоской деформации в окрестности вершины трещины реализуется существенная гидростатика и упрочнение материала не существенно при расчете на прочность, а для плоского напряженного состояния упрочнение необходимо учитывать.

Сформулируем основные выводы по работе:

1. Дана постановка задачи о развитии тонкой пластической зоны с условием текучести Губера-Мизеса. Решение задачи сведено к системе нелинейных алгебраических уравнений. Предложен итерационный метод решения данной системы, где в качестве начального приближения используется решение линейной системы уравнений с условием текучести Треска - Сен-Венана.

2. Предположение о лучевом характере процесса упругопластического деформирования позволило свести задачу к статически определимой.

3. Учет упрочнения материала в рассмотренной задаче существенен только для плоского напряженного состояния.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения / Д. Д. Ивлев // Прикладная механика и техническая физика. – 1967. – № 6. – С. 88–128.
- [3] *Черных, К. Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин / К. Ф. Черных. – М. : Наука, 1996. – 288 с.
- [4] *Партон, В. З.* Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1985. – 504 с.
- [5] *Астафьев, В. И.* Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2001. – 632 с.
- [6] *Dugdale, D. S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // Journ. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8. – № 2. – P. 100–108.
- [7] *Леонов, М. Я.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5. – № 4. – С. 391–401.
- [8] *Макклиток, Ф.* Пластические аспекты разрушения / Ф. Макклиток // Разрушение. – М., 1975. – Т. 3. – С. 67–262.
- [9] *Глаголев, В. В.* Определение термомеханических характеристик процесса разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – № 6. – 2007. – С. 101–112.
- [10] *Гаврилкина, М. В.* К решению одной задачи механики разрушения / М. В. Гаврилкина, В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика. – Т. 48 – № 4. – 2007. – С. 121–127.
- [11] *Глаголев, В. В.* Об одной постановке задачи упругопластического разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50 – № 4. – С. 187–195.
- [12] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 701 с.
- [13] *Новожилов, В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212–222.
- [14] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.
- [15] *Крауч, С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела : пер. с. англ. / С. Крауч, А. Старфилд. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
- [16] *Irvin, G. R.* Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control / G. R. Irvin // Engn. Fracture Mechanics. – 1968. – Vol.1. – P. 241–257.

V. V. Glagolev, A. A. Markin

**THE INFLUENCE OF HARDENING OF A MATERIAL ON THE FORMATION  
OF A TENSION OF DEADLOCK AREA OF A CRACK OF A NORMAL  
FRACTURE**

*Tula State University*

**Abstract.** The possibility of the description of elastic and elasto-plastic stages of the deformation process up to the beginning of the division of a body weakened by a crack in the form of a physical cut is considered. The layer of the material lying on mental continuation of a physical cut in the continuous environment is also included in a crack model. In process of loading the bodies the existence of a plastic area within the limits of the given layer is assumed to be possible. For the description of behaviour at transition into the plastic area the variant of the deformation theory is used, thus volume change remains linearly elastic. The process of the elasto-plastic deformations is necessary beam, the directing tensor of the stress deviator in each point of a layer is fixed by its value, reached at the moment of transition from an elastic stage into an elasto-plastic one. The given assumption has allowed to reduce a problem to a statically definable one. Dependences of a component of the pressure of a layer and external disjoining forces from the length of a plastic area of a layer are received.

**Keywords:** a crack, a destruction, an elasto-plastic model, hardening.

*Глаголев Вадим Вадимович*

*доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула*

**e-mail:** vadim@tsu.tula.ru

*Маркин Алексей Александрович*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, Тульский государственный университет, г. Тула*

**e-mail:** markin@tsu.tula.ru

*Glagolev, Vadim Vadimovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor of Mathematical Modelling, Tula State University, Tula*

*Markin, Alexey Aleksandrovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head, Department of Mathematical Modelling, Tula State University, Tula*

Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин

## УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК В ПОРИСТЫХ МАССИВАХ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ СЖАТОГО СКЕЛЕТА

*Военный авиационный инженерный университет*

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В рамках общей трехмерной линеаризированной теории устойчивости малых деформаций разработан общий подход решения задач устойчивости цилиндрических и сферических горных выработок на основе предложенной модели сплошной среды, учитывающей пористую структуру материала и сложные реологические свойства сжатого скелета.

**Ключевые слова:** пористые среды со сложной реологией сжатого скелета, напряженно-деформированное состояние, точные трехмерные уравнения, устойчивость горных выработок.

УДК: 539.374

**Введение.** Одним из важнейших приложений трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел являются задачи механики горных пород, а именно горные выработки и подземные полости. Анализ возможности разрушения массива возле них с учетом его последствий, а также разработка конструктивно-технологических мероприятий, обеспечивающих безаварийное функционирование выработок, являются одной из основных и актуальных проблем этой отрасли науки.

Решение вопроса устойчивости состояния равновесия массива горных пород возле выработок остается актуальной задачей в течение последних 40 лет. Основоположником этого направления является Л. В. Ершов, первая статья [1] которого в этом направлении была опубликована в 1962 г. В ней рассмотрена осесимметричная задача об устойчивости вертикальной горной выработки кругового поперечного сечения при моделировании горной породы упругим изотропным сжимаемым телом.

Однако, теоретический анализ и практика эксплуатации горных выработок, как отмечено в работах [2, 3] показывают, что применение упругого (как изотропного, так и анизотропного) тела в качестве модели массива горных пород не отражает реальную картину процессов проходящих вблизи глубоких выработок. Это обусловлено тем, что напряжения, соответствующие критическому состоянию породы вокруг выработки во много раз превышают предел прочности горной породы. В связи с этим материал массива в приконтурной области перейдет в неупругое состояние раньше, чем произойдет его локальная потеря устойчивости. В работах [2, 3] отмечается, что наиболее достоверные результаты исследования устойчивости горных выработок получаются при привлечении более сложных моделей, как наиболее полно отражающих реальное поведение горных пород. С этой точки зрения использование моделей сложных сред, в которых учитываются такие свойства, как пористость, пластичность, вязкость, упрочнение, обнаруживаемые у реальных материалов, не могут не представлять существенный научный и практический интерес.

### 1. Модель пористого упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела.

В качестве модели среды, учитывающей пористую структуру материала и упруго-вязко-пластические свойства сжатого скелета бралась модель, механическая схема которой показана на рисунке 1.

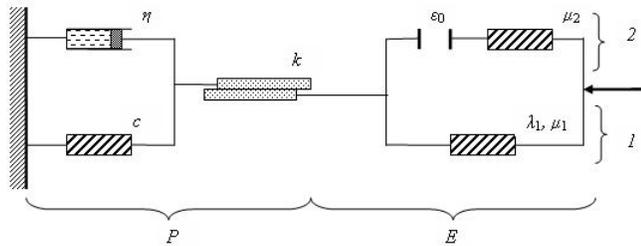


Рис. 1. Реологическая схема пористой упруго-вязко-пластической среды.

Модель состоит из двух последовательно соединенных составных частей: пластической –  $P$  и упругой –  $E$ . Пластическая часть состоит из пластического элемента (предел текучести  $k$ ), последовательно соединенного с параллельной связкой вязкого элемента (коэффициент вязкости  $\eta$ ) и упругого элемента (коэффициент упрочнения  $c$ ). Упругая часть состоит из упругого сжимаемого элемента 1 (коэффициенты Лямэ  $\lambda_1, \mu_1$ ) и параллельно подсоединенной к нему последовательной связки 2 жесткого контакта (начальный раствор пор  $\varepsilon_0$ ) и упругого несжимаемого элемента (коэффициент упругости  $\mu_2$ ).

Горную породу, в рамках предложенной реологической модели, будем считать сплошной средой, напряженное состояние которой характеризуется симметричным тензором напряжений  $\sigma_j^\beta$ . Поля напряжений и деформаций такой среды будут определяться соотношениями геометрически линейной теории, что вполне оправдано для достаточно жестких сред.

Основные соотношения теории пористой упруго-вязко-пластической среды для рассматриваемой реологической модели в произвольной криволинейной системе координат будут следующие:

- уравнения равновесия в напряжениях

$$\nabla_\beta \sigma_j^\beta + X_j = 0, \quad (1)$$

где символ  $\nabla_\beta$  обозначает ковариантную производную по  $\beta$ -ой компоненте;  $X_j$  – массовые силы;

- граничные условия

а) в усилиях на части поверхности  $S_1$  тела

$$N_\beta \sigma_j^\beta = P_j, \quad (2)$$

где  $N_\beta$  – орты нормали к поверхности  $S_1$  тела,  $P_j$  – составляющие вектора поверхностных сил;

б) в перемещениях на части поверхности  $S_2$  тела

$$u_\beta = U_\beta, \quad (3)$$

где  $u_\beta$  – компоненты вектора перемещений;

- соотношения Коши, связывающие компоненты малых деформаций  $\varepsilon_j^\beta$  с компонентами вектора перемещений  $u_\beta$

$$2\varepsilon_\beta^j = \nabla_\beta u^j + \nabla^j u_\beta; \quad (4)$$

- условия непрерывности перемещений и поверхностных сил на границе  $S$  раздела областей упругого и пластического деформирования

$$[u_j]|_S = 0, \quad [N_j \sigma_\beta^j]|_S = 0. \quad (5)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на границе  $S$ . По повторяющимся индексам, если особо не оговорено, производится суммирование от 1 до 3.

Напряжения параллельной связки “1 – 2” находятся как сумма напряжений элемента “1” и последовательной связки “2”.

$$\sigma_j^\beta = (\sigma_j^\beta)_1 + (\sigma_j^\beta)_2. \quad (6)$$

Связь между напряжениями и деформациями в упругом элементе “1” определим законом Гука для сжимаемого тела

$$(\sigma_j^\beta)_1 = \lambda_1 \varepsilon_\alpha^\varepsilon g_j^\beta + 2\mu_1 \varepsilon_j^\beta, \quad (7)$$

где  $\lambda_1$  и  $\mu_1$  – параметры Ламе,  $g_j^\beta$  – смешанные компоненты метрического тензора.

Уравнение жесткого контакта, входящего в последовательное соединение “2” согласно [4] имеет вид

$$\sigma_j^\beta (\varepsilon_\alpha^\varepsilon + \varepsilon_0) = 0, \quad (8)$$

причем  $\sigma_j^\beta = 0$  до схлопывания пор, и  $\varepsilon_\alpha^\varepsilon = -\varepsilon_0$  после.

Связь между напряжениями и деформациями в упругом элементе, входящем в “2”, определим законом Гука для несжимаемого тела

$$(s_j^\beta)_2 = 2\mu_2 (\varepsilon_j^\beta)_2, \quad (9)$$

где  $(s_j^\beta)_2 = (\sigma_j^\beta)_2 - \frac{1}{3} (\sigma_\alpha^\alpha)_2 g_j^\beta$  – компоненты девиатора тензора напряжений.

Зависимость напряжений в последовательном соединении “2” от деформаций определяется соотношением

$$(\sigma_j^\beta)_2 = \begin{cases} 0, & -\varepsilon_\alpha^\varepsilon < \varepsilon_0 \\ 2\mu_2 \left( (\varepsilon_j^\beta)_2 - (\varepsilon_j^\beta)_2^0 \right) + \frac{1}{3} (\sigma_\alpha^\alpha)_2 g_j^\beta, & -\varepsilon_\alpha^\varepsilon \geq \varepsilon_0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $(\varepsilon_j^\beta)_2^0$  – деформации компонента “2” до момента схлопывания пор, причем  $\varepsilon_\alpha^\varepsilon = -\varepsilon_0$ .

Полагалось, что полное схлопывание пор происходит в фазе упругого деформирования среды, а сжатый скелет ведет себя как упрочняющееся упруго-вязко-пластическое тело.

В зоне пластического деформирования сжатого скелета будем использовать модель несжимаемого упруго-вязко-пластического тела [5] с поверхностью нагружения

$$F \equiv \left( s_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta - \eta e_j^\beta \right) \left( s_\beta^j - c \varepsilon_\beta^j - \eta e_\beta^j \right) - k^2 = 0, \quad (11)$$

где  $e_j^\beta$  – компоненты тензора скоростей пластических деформаций.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой  $\varepsilon_{\beta j}^e$  и пластической  $\varepsilon_{\beta j}^p$  составляющих

$$\varepsilon_{\beta j} = \varepsilon_{\beta j}^e + \varepsilon_{\beta j}^p, \quad (12)$$

причем, упругие деформации  $\varepsilon_{\beta j}^e = \left(\varepsilon_{\beta j}^e\right)_1 = \left(\varepsilon_{\beta j}^e\right)_2$  связаны с напряжениями соотношениями (7) и (10). Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^p = 0. \quad (13)$$

Тензор скоростей пластических деформаций связан тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$e_j^p = \psi \left( s_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta - \eta e_j^\beta \right), \quad (14)$$

если выполняется условие пластичности (11). Здесь  $\psi$  — положительный скалярный множитель.

Тело остается упругим пока

$$s_j^\beta s_\beta^j < k^2. \quad (15)$$

В теле остаются несхлопнутые поры пока

$$-\varepsilon_\alpha^\alpha < \varepsilon_0. \quad (16)$$

Тело остается упругим с наличием несхлопнутых пор пока

$$\left( \sigma_j^\beta + \frac{1}{3} \delta_j^\beta (3\lambda_1 + 2\mu_1) \varepsilon_0 \right) \left( \sigma_\beta^j + \frac{1}{3} \delta_\beta^j (3\lambda_1 + 2\mu_1) \varepsilon_0 \right) < k^2. \quad (17)$$

Для возможности перехода путем интегрирования от соотношений между напряжениями и скоростями деформаций для пластической среды к соотношениям между напряжениями и деформациями будем предполагать, что имеет место процесс простого нагружения или мало отличающееся от него процессы. Это предположение базируется на соображениях как теоретического, так и экспериментального характера.

Для нахождения деформаций на момент схлопывания пор в упругой фазе положим, что процесс нагружения состоит из двух этапов. На первом - часть нагрузки идет на полное схлопывание пор, на втором - нагружение происходит за счет оставшейся части нагрузки.

Система уравнений (1) - (14), относящаяся к зонам упругого ( $\overset{e}{V}$ ) деформирования пористого тела и сжатого скелета, а также к зоне пластического ( $\overset{p}{V}$ ) деформирования сжатого скелета, при определенной форме поверхности нагружения представляет собой замкнутую математическую задачу, которая положена в основу определения основных напряженно-деформированных состояний горного массива возле свободных или подкрепленных вертикальных, горизонтальных, сферических выработок и их многослойных крепей.

Очевидно, что если в рассматриваемой схеме (рис.1) убрать жесткий элемент (положить  $\varepsilon_0 = 0$ ), приходим к известной модели упруго-вязко-пластического тела, предложенной А. Н. Спорыхиным [5], если же, положить,  $\varepsilon_0 \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ , то приходим к модели упрочняющегося упруго-пластического тела, предложенной Д. Д. Ивлевым [6].

**2. Устойчивость подкрепленных горных выработок.** При изучении бифуркации состояния равновесия или бифуркации процесса деформирования трехмерных тел со сложными реологическими свойствами будем исходить из следующего основного предположения: об устойчивости основного состояния деформируемых тел с реологическими свойствами будем судить по поведению малых возмущений во времени в рамках соответствующей линеаризованной задачи. В качестве критерия устойчивости принимается следующий: состояние равновесия или процесс деформирования считается устойчивым, если возмущения во времени затухают и неустойчивым, если возрастают.

Известно, что первым этапом при решении вопроса о локальной неустойчивости в задачах геомеханики является определение основного (докритического) напряженно деформированного состояния. В случае некруговых поперечных профилей горных выработок не удается построить точных аналитических решений. Основываясь на схеме расчета Ивлева-Ершова [7], в работах [8 - 10], были найдены в первом приближении поля напряжений и перемещений для области массива, содержащего выработку с некруговой (близкой по форме к эллиптической или правильной многоугольной) формой поперечного сечения, а также определены напряженно-деформированные состояния многослойных разномодульных крепей горных выработок.

Исследование устойчивости основных состояний горизонтальных, вертикальных и сферических выработок свободных от крепей или подкрепленных многослойными крепями различной конфигурации при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения и в предположении, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия для областей пластического  $V_i^p$  и упругого  $V_i^e$  деформирования массива и крепи имеют вид

$$\nabla_\beta \left( \sigma_{ji}^\beta + \sigma_{\alpha i}^{0\beta} \nabla^\alpha u_{ji} \right) - \rho s^2 u_{ji} = 0, \quad s = i\omega. \quad (18)$$

Здесь и далее по индексу  $i$  суммирование нет (если особо не оговорено)  $i=0, 1, 2, \dots, N$  – число слоев крепи, кружок вверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния.

Граничные условия на внутренней поверхности крепи и условия затухания возмущений в массиве горных пород на достаточном удалении от выработки запишем соответственно в виде

$$N_\beta \left( \sigma_{jN}^\beta + \sigma_{\alpha N}^{0\beta} \nabla^\alpha u_{jN} \right) = 0, \quad u_{j0}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (19)$$

Условия непрерывности на упругопластических границах  $\gamma_i$  имеют вид

$$\left[ N_\beta \left( \sigma_{ji}^\beta + \sigma_{\alpha i}^{0\beta} \nabla^\alpha u_{ji} \right) \right] = 0, \quad [u_{ji}] = 0. \quad (20)$$

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для сжатого скелета, обладающего упруго-вязко-пластическими свойствами и свойством дальнейшей несжимаемости в пластических и упругих областях представима в форме

$$\left( \sigma_j^\beta \right)_i = p_i \delta_j^\beta + 2\mu_i \left( \varepsilon_j^\beta \right)_i - a_i b_i \left( f_j^\beta \right)_i, \quad (21)$$

где  $p_i$  - множитель Лагранжа,  $a_i = \frac{4\mu_i^2}{k_i^2(2\mu_i + c_i + \eta_i s)}$ ,  $\left( f_j^\beta \right)_i = \left( s_j^\beta \right)_i - c_i \left( \varepsilon_j^\beta \right)_i$ ,  $b_i = \left( f_i^k \right)_i \left( \varepsilon_i^k \right)_i$ . В упругих областях надо положить  $a_i = 0$ .

Если компоненты докритического состояния зависят только от одной переменной, то уравнения состояния для несжимаемых тел, согласно работе [5], можно записать в виде

$$\left( \sigma_j^\beta \right)_i = \left( a_{\beta\alpha} \right)_i g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha \left( u_\alpha \right)_i + \left( p \right)_i g_j^\beta + \left( 1 - g_j^\beta \right) g^{\beta\beta} \left( G_j^\beta \right)_i \left( \nabla_j \left( u^\beta \right)_i + \nabla^\beta \left( u_j \right)_i \right). \quad (22)$$

В (22) отсутствует суммирование по индексам  $i, \beta, j$  и производится по индексу  $\alpha$ , величины  $\left( a_{\beta\alpha} \right)_i$  и  $\left( G_j^\beta \right)_i$  представлены следующим образом:

в упругих областях -  $\left( V^e \right)_i$

$$\left( a_{\beta\alpha} \right)_i = 2\mu_i g_{\beta\alpha}, \quad \left( G_j^\beta \right)_i = \mu_i, \quad \mu_i = \left( \mu_1 \right)_i + \left( \mu_2 \right)_i; \quad (23)$$

в пластических областях -  $\left( V^p \right)_i$  для упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела

$$\left( a_{\beta\alpha} \right)_i = 2\mu_i g_{\beta\alpha} - a_i \left( f_{\alpha\alpha} \right)_i \left( f_{\beta\beta} \right)_i, \quad \left( G_j^\beta \right)_i = \mu_i. \quad (24)$$

Уравнения (18) – (21) с учетом условий несжимаемости в пластических областях  $V_i^P$  ( $i=0, 1, 2, \dots, N$ ) горного массива и крепи представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости горизонтальных, вертикальных и сферических выработок с многослойными крепями, когда имеются границы раздела областей упругого и пластического поведения сжатого скелета при нагружении в горном массиве и крепи.

Поскольку полученная краевая задача является задачей на собственные значения относительно параметра  $\omega$ , тогда в силу принятого критерия основное состояние будет устойчивым, если

$$Im\omega_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (25)$$

где  $\omega_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots$ ) – собственные значения приведенной краевой задачи.

Условие (25) определяет область устойчивости в пространстве параметров нагружения. Тогда граница области устойчивости и соответствующие критические значения комбинаций параметров нагружения определяются из соотношения

$$\min(Im\omega_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Таким образом, задача сводится к определению отличных от нуля возмущений перемещений и соответствующих собственных значений, а по последним определяются критические комбинации внешних сил для основного состояния равновесия.

Для нахождения собственных значений цилиндрических задач перемещения и гидростатические давления в зонах упругого и пластического деформирования для горного массива и крепи аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_n \sum_m A_i^{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), & v_i &= \sum_n \sum_m B_i^{nm}(r) \sin(m\theta) \cos(nz), \\ w_i &= \sum_n \sum_m C_i^{nm}(r) \cos(m\theta) \sin(nz), & p_i &= \sum_n \sum_m D_i^{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz). \end{aligned} \quad (27)$$

Для сферических задач решения ищем в виде двойных рядов по сферическим функциям

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} A_i^{nm}(r) Y_i^{nm}(\theta, \varphi), & v_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} B_i^{nm}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_i^{nm}(\theta, \varphi), \\ w_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} C_i^{nm}(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_i^{nm}(\theta, \varphi), & p_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} D_i^{nm}(r) Y_i^{nm}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $n, m$  – параметры волнообразования,  $Y_i^{nm}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi)$  – сферические функции,  $P_n^m(\cos \theta)$  – присоединенные функции Лежандра первого рода степени  $n$  и порядка  $m$  ( $P_n^m = 0$  для  $m > n$ ). Функции  $Y_i^{nm}$  являются решениями уравнения  $\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + n(n+1) \right\} Y_i^{nm}(\theta, \varphi) = 0$ .

Выбор решений в форме (27) или (28) допускает локальную потерю устойчивости массива и крепи по одинаковой форме.

Подставляя функции  $u_i, v_i, w_i, p_i$  в условие несжимаемости и линеаризованные уравнения устойчивости (18), граничные условия (19), условия сопряжения (20) и учитывая (21) или (22) – (24) после ряда преобразований получим краевую задачу, найти точное аналитическое решение которой не представляется возможным. Будем искать приближенное решение методом конечных разностей. В результате получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров  $A_i^{nm}, B_i^{nm}, C_i^{nm}, D_i^{nm}$ . Отсюда следует, что определение величины критической нагрузки  $q_N$ , равномерно распределенной по внутреннему контуру крепи и соответствующей локальной потере устойчивости массива горных пород в окрестности вертикальной, горизонтальной или сферической выработок с многослойными крепями, сводится к разрешимости матричного уравнения. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру

$m$  и образующей  $n$ , параметрам материала и конструкции  $\lambda_j$ . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины  $q_N$  в зависимости от  $m, n$  при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы:  $\det(q_N, m, n, \lambda_j) = 0$ .

Необходимо отметить, что анализ такого уравнения затрудняется тем, что элементы определителя для пористой упруго-вязко-пластической среды, будут зависеть не только от приложенных нагрузок  $q_i$ , геометрических параметров рассматриваемых задач, физико-механических характеристик материалов, но и от произвольного комплексного числа  $\omega$  (временного множителя). Поэтому, для упрощения вычислений при численном анализе считалось, что  $\omega = \beta$  - действительное число. При этом если  $-\infty < \beta < 0$ , то будет происходить затухание амплитуд возмущений с течением времени, а случай  $0 \leq \beta < \infty$  будет соответствовать неограниченному возрастанию возмущений перемещений и напряжений.

**Пример.** В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости основного состояния горного массива вблизи свободной вертикальной цилиндрической выработки радиуса  $R_0$ , реологические свойства которого определяются согласно описанной выше модели. К внутреннему контуру выработки приложена равномерно распределенная нагрузка  $q_0$ , а на бесконечности напряжения в массиве стремятся к величине  $gh$  ( $g$  - средний объемный вес вышележащих пород,  $h$  - глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим.

В отличие от [5, 8 - 10] в рассматриваемой задаче на основе точных трехмерных уравнений [3] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны цилиндрической выработки с учетом пористой структуры материала горного массива.

Процесс деформирования пористого материала горного массива вблизи выработки можно разделить на два взаимосвязанных этапа. Первый - упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй - неупругое деформирование сжатого скелета с упруго-вязко-пластическими свойствами.

Напряженно-деформированное состояние горного массива на первом этапе, то есть, когда выполняется условие (17) в осесимметричном случае в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  определяется соотношениями

$$\begin{aligned} u &= C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \varepsilon_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \\ \sigma_r &= 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $u$  - радиальная составляющая вектора перемещений.

Константы интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находятся из следующих граничных условий

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -q_\infty, \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -q_0 \quad (30)$$

и имеют вид

$$C_1 = \frac{-q_\infty}{2(\lambda_1 + \mu_1)}, \quad C_2 = \frac{q_0 - q_\infty}{2\mu_1} R_0^2. \quad (31)$$

Объемная деформация с учетом (29) и (31), определяется в форме

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 2C_1.$$

Откуда следует, что объемная деформация не зависит от радиуса, то есть, она одинакова во всем теле и поэтому схлопывание пор произойдет одновременно во всей среде при достижении объемной деформацией значения равного начальному удельному объему пор -  $\varepsilon_0$ .

Следовательно, полное схлопывание пор при упругом деформировании массива происходит под действием нагрузки определяемой равенством

$$q_\infty = (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0. \quad (32)$$

При этом поля перемещений, деформаций и напряжений находятся по формулам

$$u = -\frac{\varepsilon_0}{2}r - \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r}, \quad \varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{2\mu_1 r^2},$$

$$\sigma_r = -(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 + (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 \frac{R_0^2}{r^2}. \quad (33)$$

Таким образом, если  $gh < (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$ , то полного схлопывания пор в горном массиве не происходит и материал ведет себя как сжимаемая упругая среда с параметрами  $\lambda_1, \mu_1, \varepsilon_0$ . При этом напряженно-деформированное состояние определяется соотношениями (29), (31).

Если  $gh = (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$  произойдет схлопывание пор (сжатый скелет) и при дальнейшем сжатии возникнет и будет расти около отверстия зона пластического течения, препятствовать развитию которой будут вязкость ( $\eta$ ) и упрочнение ( $c$ ) материала, то есть сжатый скелет будет деформироваться как несжимаемая упруго-вязко-пластическая среда с параметрами  $\mu = \mu_1 + \mu_2, k, c, \eta$ .

В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны – упругую и пластическую, в каждой из которых значения перемещений, деформаций и напряжений в точках среды раскладываются на компоненты:

а) пористого сжатия, определяемыми соотношением (33);

б) упруго-пластического сжатия (которые для деформаций в пластической зоне в свою очередь складываются из упругих и пластических компонент), определяемыми из решения упруго-пластической задачи с вычетом из внешней нагрузки той ее части, которая идет на полное схлопывание пор, т. е. величины  $(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$ . Поэтому граничные условия для этих компонент запишутся в виде

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -(gh - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0), \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -q_0. \quad (34)$$

Напряженно-деформированное состояние сжатого скелета, обладающего упруго-вязко-пластическими свойствами, определяется в виде

- в упругой области ( $\gamma < r < \infty$ )

$$u = \frac{D}{r} - \frac{\varepsilon_0}{2}r, \quad \varepsilon_r = -\frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{D}{r^2} - \frac{\varepsilon_0}{2},$$

$$\sigma_r = -2(\mu_1 + \mu_2) \frac{D}{r^2} - \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1 r^2} - gh, \quad \sigma_\theta = 2(\mu_1 + \mu_2) \frac{D}{r^2} + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1 r^2} - gh; \quad (35)$$

- в пластической области ( $R_0 < r < \gamma$ )

$$\varepsilon_r^p = \frac{\chi}{c + 2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left( \frac{\gamma^2}{r^2} - 1 \right) \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right),$$

$$\sigma_r = -q_0 + 4\mu \cdot \int_{R_0}^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho + \left( 2\mu D + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\sigma_\theta = -q_0 + 4\mu \left( \varepsilon_r^p + \int_{R_0}^r \frac{\varepsilon_r^p}{\rho} d\rho \right) + \left( 2\mu D + \frac{\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 R_0^2}{\mu_1} \right) \left( \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (36)$$

где  $D(t) = -\frac{(\lambda_1 + \mu_1)\mu_2\varepsilon_0}{2\mu\mu_1} R_0^2 + \frac{\eta\chi}{2\mu(c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left( 2\gamma\gamma \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta}\gamma^2 \right)$ ,  $\chi = \text{sign}(q_0 - gh)$ .

Условия совместности напряжений на границе  $\gamma$  раздела зон упругого и пластического деформирования имеют вид

$$[\sigma_r]|_{r=\gamma} = 0. \quad (37)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на границе  $\gamma$ .

Радиус раздела зон упругого и пластического деформирования с учетом (35)–(37) определим в виде

$$gh - q_0 - \frac{4\mu\chi}{c+2\mu} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left( e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{R_0^2} \right) + \ln \frac{\gamma}{R_0} \right) + \frac{\eta\chi}{R_0^2(c+2\mu)} \sqrt{k^2 - \frac{1}{3}\mu_1^2\varepsilon_0^2} \left( 2\gamma\dot{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta}t} \right) + \frac{c+2\mu}{\eta} \gamma^2 \right) = 0. \quad (38)$$

Для определения основного напряженно деформированного состояния этой задачи использовались уравнения равновесия (1), условие пластичности (11), соотношения ассоциированного закона пластического течения (14), соотношения, связывающие полные упругие и пластические деформации (12), связь между напряжениями и деформациями в виде (6), (7), (10), граничные условия (30), (34), а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях (37).

Исследование устойчивости основного состояния (35), (36) горного массива со сжатым скелетом вблизи круговой цилиндрической выработки при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения, как отмечалось выше, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях.

Уравнения (18), (22) – (24), где надо опустить у всех величин индекс “ $i$ ”, (19), где надо опустить индекс “ $N$ ”, с учетом условия несжимаемости

$$\nabla^\alpha u_\alpha = 0. \quad (39)$$

в областях  $V^p$  и  $V^e$  массива представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости основного состояния вертикальной цилиндрической выработки, когда имеется граница областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в массиве горных пород со сжатыми порами. Система уравнений (18), (22) – (24), (39) – система дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитудных значений векторов перемещений  $u, v, w$  и гидростатического давления  $p$  для пластической и упругой зон массива. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений перемещения и гидростатические давления в каждой из зон упругого и пластического деформирования горного массива аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами (27), где у величин  $A^{nm}, B^{nm}, C^{nm}, D^{nm}$  надо опустить индекс “ $i$ ”.

Тогда с учетом (22), (27) и (39), исключая функции  $C^{nm}(r)$  и  $D^{nm}(r)$ , получим следующую систему уравнений в терминах  $A^{nm}(r)$  и  $B^{nm}(r)$ :

*уравнения равновесия*

$$\begin{aligned} \xi_1 A(r) + \xi_2 A'(r) + \xi_3 A''(r) + \xi_4 B(r) + \xi_5 B'(r) + \xi_6 B''(r) + \xi_7 B'''(r) &= 0, \\ \xi_8 A(r) + \xi_9 A'(r) + \xi_{10} A''(r) + \xi_{11} A'''(r) + \xi_{12} B(r) + \xi_{13} B'(r) + \xi_{14} B''(r) &= 0, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= - \left( -\sigma_\theta^0 + m^2 \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) + 2r \sigma_{\theta,r}^0 + \mu \left( n^2 r^2 - 1 \right) \right), \\ \xi_2 &= r \left( a_{11} - a_{22} + a_{12} - a_{21} + 2 \left( a_{23} - a_{13} \right) - \mu + \sigma_r^0 + r \sigma_{r,r}^0 - 2 \sigma_\theta^0 \right), \\ \xi_3 &= r^2 \left( a_{11} - a_{13} + a_{23} - a_{21} - \mu + \sigma_r^0 \right), \\ \xi_4 &= - \left( m \left( \sigma_\theta^0 + \mu \right) - \frac{1}{m} \left( \sigma_\theta^0 + \mu \right) + \frac{r}{m} \sigma_{\theta,r}^0 \left( 1 + \frac{1}{m^2} \right) + \frac{n^2 r^2 \mu}{m^3} \right), \\ \xi_5 &= r \left( m \left( a_{12} - a_{13} - a_{22} + a_{23} + \mu - \sigma_\theta^0 \right) - \frac{1}{m} \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) \right) - \frac{r^3}{m} \left( n^2 \mu - \sigma_{r,rr}^0 \right) + \frac{2r^2}{m} \sigma_{r,r}^0, \\ \xi_6 &= \frac{2r^2}{m} \left( \sigma_r^0 + \sigma_{r,r}^0 + \mu \right), \quad \xi_7 = \frac{r^3}{m} \left( \mu + \sigma_r^0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_8 &= nr^2 \left( \mu + a_{32} - a_{33} - a_{22} - 2\sigma_\theta^0 + a_{23} \right) + \frac{m^2 r}{n} \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) - \frac{r}{n} \left( \mu + \sigma_r^0 - \sigma_{r,r}^0 \right), \\
\xi_9 &= nr^3 \left( \mu + a_{31} - a_{33} + a_{23} - a_{21} \right) - \frac{m^2 r}{n} \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) - \frac{r}{n} \left( \mu + \sigma_r^0 - \sigma_{r,r}^0 \right), \\
\xi_{10} &= \frac{r^2}{n} \left( 2\mu + 2\sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 \right), \quad \xi_{11} = \frac{r^3}{n} \left( \mu + \sigma_r^0 \right), \\
\xi_{12} &= r^2 \left( nm \left( a_{32} - a_{33} - a_{22} + a_{23} + 2\mu \right) - \frac{n^3 r^2 \mu}{m} - \frac{1}{m} \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) \right) - \frac{m^3}{n} \left( \mu + \sigma_\theta^0 \right) + \\
&\quad + \frac{m}{n} \left( \mu + \sigma_r^0 - r\sigma_{r,r}^0 \right), \\
\xi_{13} &= \frac{rm}{n} \left( r\sigma_{r,r}^0 - \mu - \sigma_r^0 \right) - \frac{r^3 n}{m} \left( \mu + \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 \right), \quad \xi_{14} = \left( \mu + \sigma_r^0 \right) \left( \frac{mr^2}{n} + \frac{r^4 n}{m} \right);
\end{aligned}$$

граничные условия при  $r = R_0$

$$\begin{aligned}
&A(r) \frac{1}{r} \left( a_{12} - a_{13} - a_{22} + a_{23} - 2\sigma_\theta^0 \right) + A'(r) \left( a_{11} + \sigma_r^0 - a_{13} - a_{21} + a_{23} \right) + \\
&+ B(r) \left( \frac{1}{r} \left( m \left( a_{12} - a_{13} \right) - \frac{1}{m} \left( \mu + \sigma_\theta^0 + m^2 \left( a_{22} + \sigma_\theta^0 - a_{23} - \mu \right) \right) \right) - \frac{n^2 r \mu}{m} \right) + \\
&+ B'(r) \frac{1}{m} \left( \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 + \mu \right) + B''(r) \frac{r}{m} \left( \mu + \sigma_r^0 \right) = 0, \\
&-m\mu A(r) - \mu B(r) + rB'(r) \left( \mu + \sigma_r^0 \right) = 0, \tag{41}
\end{aligned}$$

$$A(r) \left( n\mu - \frac{\mu + \sigma_r^0}{nr^2} \right) + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{r} A'(r) - \frac{m}{r^2} B(r) + \frac{m}{r} B'(r) + A''(r) \right) \left( \mu + \sigma_r^0 \right) = 0.$$

В (40), (41) и далее, для упрощения записи индексы “ $nm$ ” у величин  $A$  и  $B$  не пишутся, коэффициенты  $a_{ij}$  и  $G_{ij}$  для пластической и упругой областей определяются соответственно по формулам (24) и (23).

В горном массиве в пластической области  $-V^p$  докритическое состояние определяется по формулам (36), а в упругой области  $V^e$  - по формулам (35). Отметим, что если устойчивость основного состояния исследовать по предельной [5] системе уравнений, то в соотношениях (35), (36) следует  $t \rightarrow \infty$ .

Аналогичным образом могут быть выписаны в терминах функций  $A(r)$ ,  $B(r)$  условия непрерывности (20) на поверхности, разделяющей зоны упругого и пластического деформирования,

Из условия локальности возмущений  $u_j \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  ( $j=1, 2, 3$ ) с учетом (27) получим

$$(A')^e = 0, \quad (B')^e = 0 \quad (C')^e = 0. \tag{42}$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (40) - (42) с учетом (20) не представляется возможным. Как отмечалось выше, приближенное решение ищется методом конечных разностей и как следствие этого определение величины критической нагрузки  $q_0$ , соответствующей локальной потере устойчивости массива горных пород со схлопнутыми порами около круговой цилиндрической выработки, сводится к разрешимости матричного уравнения. При вычислении определителя наряду с нахождением основного напряженно-деформированного состояния для каждой области  $V^p$ ,  $V^e$  массива (36), (35) необходимо учитывать уравнение (38), определяющие положение упругопластической границы  $\gamma$  - в горном массиве.

Результаты численного счета представлены рисунками 2, 3, на которых показаны зависимости величины критического давления, равномерно распределенного по контуру выработки, от величины гидростатического давления  $gh$  при различных значениях физико-механических параметров конструкции. При этом  $R_0 = 0.4$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 0.6$ ,  $c = 0.3$ ,  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\eta = 0.01$  им соответствуют значения параметров волнообразования  $n = m = 2$ . На рис.2 кривые 1, 2, 3 соответствуют  $\varepsilon_0 \cdot 10^{-3} = 0.2, 0.5, 0.7$ . При этом  $\lambda_1 = 0.1$ . На рис.3 кривые 1, 2, 3 соответствуют  $\lambda_1 = 0.1, 0.2, 0.3$ . При этом  $\varepsilon_0 \cdot 10^{-3} = 0.1$ .

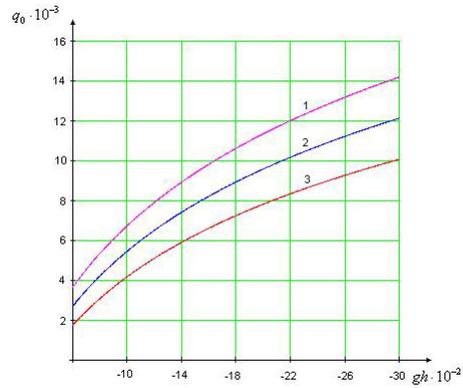


Рис. 2.

Анализ численного эксперимента показал, что при увеличении глубины заложения выработки величина критического давления на контуре выработки увеличивается (рис.2, рис.3); с ростом коэффициента Ламе  $\lambda_1$ , область устойчивости расширяется (рис.3). Критическая нагрузка на контуре выработки при увеличении величины начального удельного объема пор уменьшается (рис.2).

Если в соотношениях (35), (36) положить  $\varepsilon_0 = 0$ , то придем к результатам работы [5] для случая упруго-вязко-пластической среды без учета начальной пористости материала.

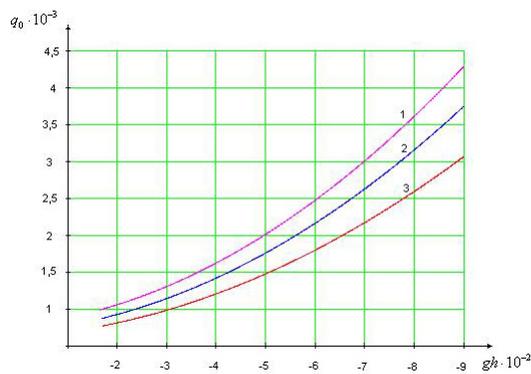


Рис. 3.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ершов, Л. В.* О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л. В. Ершов // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 298–300.
- [2] *Алимжанов, М. Т.* Проблемы устойчивости равновесия в задачах геомеханики / М. Т. Алимжанов // Успехи механики. – 1990. – 13, № 3. – С. 21–57.
- [3] *Гузь, А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь. – Киев : Наук. думка, 1977. – 204 с.
- [4] *Садовская, О. В.* Модели реологически сложных сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Садовская, В. М. Садовский // Математические модели и методы механики сплошных сред : сб. науч. тр. : к 60-летию А. А. Буренина. – Владивосток, 2007. – С. 224–238.
- [5] *Спорыхин, А. Н.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 232 с.
- [6] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред. Т. 1 / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 445 с.
- [7] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [8] *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // СО РАН. ПМТФ. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 141–150.
- [9] *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок эллиптической формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Известия РАН. МТТ. – 2007. – № 2. – С. 183–192.
- [10] *Гоцев, Д. В.* Моделирование процесса деформирования горных выработок с некруговыми многослойными креплениями в массивах со сложными реологическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин, А. Н. Стасюк // Вестник Чувашского педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2007. – № 2. – С. 78–89.

*D. V. Gotsev, A. N. Sporykhin*

**STABILITY OF MOUNTAIN DEVELOPMENTS IN POROUS FILES WITH  
DIFFICULT PROPERTIES OF THE COMPRESSED SKELETON**

*Military Aviation Engineering University*

*Voronezh State University*

**Abstract.** In the context of the general three-dimensional linearized theory of stability of small deformations the general approach to stability of cylindrical and spherical mountain developments on the basis of the offered model of the continuous continuum considering porous structure of the material and difficult properties of the compressed skeleton is developed.

**Keywords:** porous medium with difficult properties of the compressed skeleton, intense-deformed condition, the exact three-dimensional equations, stability of mountain developments.

*Гоцев Дмитрий Викторович*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Военный авиационный инженерный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** [rbgotsev@mail.ru](mailto:rbgotsev@mail.ru)

*Спorykhin Анатолий Николаевич*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** [shashkin@amm.vsu.ru](mailto:shashkin@amm.vsu.ru)

*Gotsev, Dmitry Viktorovich*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Mathematics, Military Aviation Engineering University, Voronezh*

*Sporykhin, Anatoliy Nikolaevich*

*Dc. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

А. Н. Гузь

## О ПОСТРОЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

*Институт механики имени С. П. Тимошенко НАНУ  
(Национальной Академии наук Украины)*

**Аннотация.** Рассматривается анализ построения основных соотношений нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемого твердого тела в лагранжевых координатах. Основное внимание уделено выводу указанных соотношений из теории конечных деформаций посредством введения соответствующих упрощений. Обычно указанные упрощения вводятся до выполнения дифференциальных операций, в настоящей же статье анализируется также случай введения упрощений после дифференцирования.

**Ключевые слова:** нелинейная теория, конечные деформации, малые деформации, введение упрощений.

УДК: 539.3

**Введение.** При подготовке обобщающей обзорной статьи [8] по трехмерной линейаризованной теории устойчивости деформируемых тел выяснилось, что отсутствует четкий и последовательный анализ построения нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемых тел. Указанный анализ был представлен в статье [9], которая опубликована в традиционном для автора статьи журнале. Представляя отмеченный анализ построения нелинейной теории малых деформаций в книгу “Проблемы нелинейной механики и неупругого деформирования твердых тел”, посвященную 80-летию профессора, д.ф.-м.н. Д. Д. Ивлева, автор надеется познакомить специалистов по нелинейной механике с изложенными результатами.

Общеизвестно, что в механике деформируемых тел применительно к описанию процесса деформирования рассматриваются две качественно различные теории: первая, так называемая теория конечных деформаций, в которой *учитывается* изменение геометрических объектов в процессе деформирования; вторая, так называемая теория малых деформаций, в которой *не учитывается* изменение геометрических объектов (удлинения, сдвиги, элементы площадей и объемов) в процессе деформирования. По замыслу, теория конечных деформаций предназначена для описания деформирования материалов при значительных деформациях без ограничения на их величину, и теория малых деформаций предназначена для описания сравнительно жестких материалов. В связи с этим, в теории конечных деформаций при описании напряжений возникает необходимость введения различных тензоров напряжений, связанных с отнесением напряжений к площадям элементарных площадок в различные моменты процесса деформирования. Безусловно, теория конечных деформаций является более общей и строгой по сравнению с теорией малых деформаций; следовательно, теория малых деформаций должна следовать из теории конечных деформаций в результате логически непротиворечивых упрощений.

Учитывая вышеизложенное, можно считать, что при построении теории малых деформаций существует два подхода, которым и следуют авторы всех публикаций по нелинейной механике деформируемых тел. *Первый подход* заключается в получении всех соотношений теории малых деформаций путем введения соответствующих логически непротиворечивых упрощений в соответствующие соотношения теории конечных деформаций. *Второй подход* заключается в непосредственном получении всех соотношений теории малых деформаций, исходя из соображений физического или геометрического характера о том, что в теории малых деформаций не учитывается изменение геометрических объектов. Безусловно, первый подход является более строгим и точным по сравнению со вторым подходом и может служить основой для проверки достоверности результатов второго подхода; все же в историческом аспекте, по-видимому, учитывая простоту реализации, подавляющее большинство авторов использовали второй подход при построении нелинейной теории малых деформаций.

Таким образом, с учетом вышеизложенной информации представляется весьма актуальным анализ системы логически непротиворечивых упрощений, которые следует ввести в теорию конечных деформаций для получения всех соотношений общепринятой теории малых деформаций или различных возможных ее обобщений.

**1. Нелинейная теория малых деформаций. Общепринятый вариант теории.** Прежде всего необходимо отметить, что в настоящей статье будем использовать лагранжеские координаты и лагранжеский способ описания движения сплошной среды; при этом будем применять операции тензорного анализа, построенного на метрическом тензоре и базисными векторами в недеформированном состоянии, ориентируясь, в основном, на обозначения [4, 7]. Предварительно приведем некоторые соотношения, относящиеся к теории конечных деформаций, поскольку они будут использованы в дальнейшем при рассмотрении упрощений, соответствующих переходу к теории малых деформаций.

Процесс деформирования в окрестности рассматриваемой точки тела можно характеризовать следующими величинами: удлинениями  $\lambda_n$  или относительными удлинениями  $\delta_n$ , где  $\delta_n = \lambda_n - 1$ , материальных волокон, проходящих через рассматриваемую точку и направленных вдоль координатных линий;  $\tilde{\psi}_{nm}$  – сдвигами или изменениями углов между вышеуказанными материальными волокнами;  $\psi_n$  – углами поворота вышеуказанных материальных волокон вокруг ортов, направленных вдоль координатных линий. Таким образом, параметры

$$\delta_n = \lambda_n - 1; \tilde{\psi}_{nm}; \psi_n \quad (1.1)$$

имеют непосредственный геометрический (в общем случае, физический) смысл, поскольку они определяют изменение геометрических объектов, и *полностью* характеризуют деформирование малой окрестности рассматриваемой точки деформируемого тела. Заметим, что процесс деформирования малой окрестности рассматриваемой точки тела можно также *дополнительно* характеризовать и другими "интегральными" (условное название) величинами, к которым можно отнести, например, изменение площадей ориентированных площадок и изменение объема.

$$\frac{dS_n^*}{dS_n}; \frac{dV^*}{dV}. \quad (1.2)$$

Величины (1.2) имеют, как условно выше названо, "интегральный" характер, поскольку они полностью определяются общеизвестными соотношениями через первые две величины (1.1); все же величины (1.2) имеют непосредственный геометрический (или в общем случае, физический) смысл, поскольку они определяют непосредственно изменение геометрических объектов.

В рассматриваемом случае теории конечных деформаций уравнения движения представляются в виде [1, 4, 7]

$$\nabla_i [(g_n^j + \nabla_n u^j) S^{in}] - \rho \ddot{u}^j + \rho F^j = 0. \quad (1.3)$$

В (1.3) использован тензор напряжений  $S$  [1], составляющие которого отнесены к размерам площадок в недеформированном состоянии, причем составляющие тензора  $S$  направлены вдоль базисных векторов в деформированном состоянии. Необходимо отметить, что в обозначениях монографий [5, 6] тензору напряжений  $S$  соответствует тензор напряжений  $\sigma^*$ , названный в [5, 6] тензором обобщенных напряжений.

В соответствии с общепринятым подходом, теорией малых деформаций называется теория, в которой принято *Основное положение или упрощение* – *относительные удлинения  $\delta_n$  и сдвиги  $\tilde{\psi}_{nm}$  являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими же по сравнению с единицей можно пренебречь*. С учетом обозначений (1.1) *Основное положение или упрощение* можно записать в виде

$$\delta_n = \lambda_n - 1 \ll 1; \quad \tilde{\psi}_{nm} \ll 1. \quad (1.4)$$

Из (1.4), как следствие, также получаем, что составляющие тензора деформаций Грина являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими по сравнению с единицей также можно пренебречь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nn} g_{nn}^{-1} &\ll 1 \text{ (по } n \text{ не суммировать),} \\ \varepsilon_{nm} (g_{nn} g_{mm} - g_{nm}^2)^{-\frac{1}{2}} &\ll 1 \text{ (по } n, m \text{ не суммировать).} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Также как следствие из (1.4) получаем, что в принятом приближении изменение удлинений, площадей и объемов не учитывается

$$\lambda_n \approx 1; \quad \frac{dS_n^*}{dS_n} \approx 1; \quad \frac{dV^*}{dV} \approx 1. \quad (1.6)$$

Из (1.4)–(1.6) следует, что в рассматриваемом приближении также не учитывается изменение метрического тензора в деформированном состоянии

$$g_{nm}^* \approx g_{nm}; \quad g_*^{nm} \approx g^{nm}; \quad g^* \approx g. \quad (1.7)$$

В принятом приближении с учетом первых двух соотношений (1.6) также для тензоров напряжений получаем следующее соотношение

$$S \approx \sigma, \quad (1.8)$$

где справа помещен обычно принятый симметричный тензор напряжений  $\sigma$ , который применяется практически во всех публикациях в рамках теории малых деформаций. С учетом соотношения (1.8) из (1.3) получаем уравнения движения

$$\nabla_i [(g_n^j + \nabla_n u^j) \sigma^{in}] - \rho \ddot{u}^j + \rho F^j = 0, \quad (1.9)$$

которые являются общепринятыми в нелинейной теории малых деформаций. Аналогичным образом проводятся упрощения для граничных условий в напряжениях.

По-видимому, можно считать, что *впервые* система упрощений (1.4), которую надо ввести в теорию конечных деформаций для перехода к теории малых деформаций, была предложена в 1939 г. в публикациях [10, 11]; так в [11, стр.360] изложены упрощения типа (1.4) и последовательно проведены эти упрощения для перехода к теории малых деформаций применительно к конкретной проблеме. В последующие годы система упрощений типа (1.4) была последовательно изложена в монографиях [5, 6] применительно к общему случаю перехода от теории конечных деформаций к теории малых деформаций; следует отметить, что в списке литературы в монографиях [5, 6] указаны публикации [10, 11], что и было первоначальной информацией для автора настоящей статьи еще в 1969 г. при написании монографии [2] и ознакомлении с историческими аспектами рассматриваемой проблемы. Также в последующие годы система допущений типа (1.4) неоднократно использовалась в публикациях автора, например монографиях [2, 4, 7] и ряд других публикаций.

Следует отметить, что система упрощений (1.4) основана на предположении о малости величин, которые имеют непосредственный геометрический смысл и определяют изменение геометрических объектов; к тому же, величины  $\delta_n$  и  $\tilde{\psi}_{nm}$  полностью определяют характер деформирования малой окрестности рассматриваемой точки деформируемого тела. Вышеизложенным можно ограничиться при краткой характеристике системы упрощений [10, 11] при переходе от теории конечных деформаций к теории малых деформаций; отметим, что в настоящее время вышеуказанная система упрощений, по-видимому, является общепринятой.

**2. Нелинейная теория малых деформаций при малых углах поворота.** Рассматриваемая теория малых деформаций при малых углах поворота была предложена в монографии [5]; эта теория основана на том, что дополнительно к упрощениям (1.4) теории малых деформаций вводятся упрощения, относящиеся к величинам, которые связаны с углами поворота. В соответствии с (1.1), наряду с величинами  $\delta_n$  и  $\tilde{\psi}_{nm}$ , процесс деформирования в малой окрестности рассматриваемой точки тела можно также дополнительно характеризовать и величинами  $\psi_n$  – углами поворота материальных волокон вокруг ортов, направленных вдоль координатных линий. В дальнейшем для простоты основные соотношения будем рассматривать в лагранжевых координатах, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми координатами.

При попытке введения упрощений, связанных с предположением о малости углов поворота, необходимо учитывать, что величины  $\psi_n$  (углы поворота материальных волокон вокруг ортов, направленных вдоль координатных линий, которые вычислены в рамках теории конечных деформаций) *не определяются* простыми соотношениями через составляющие  $\omega_k$  вектора углов поворота, вычисленных в рамках линейной теории. Заметим, что выражения для вычисления величин  $\psi_n$  в рамках теории конечных деформаций представлены в многочисленных публикациях, например, в [5, 6, 2, 4, 7]. В монографии [5] для характеристики поворота всей окрестности рассматриваемой точки тела были введены величины  $\bar{\psi}_n$  – усредненные углы поворота. Усреднение проводилось для всех материальных волокон, проходящих через рассматриваемую точку тела. В дальнейшем в [5] *вводилось основное положение (упрощение), что усредненные углы поворота  $\bar{\psi}_n$  являются малыми величинами по сравнению с единицей, и этими величинами по сравнению с единицей можно пренебречь*, что сводилось к следующему:

$$\bar{\psi}_n \ll 1. \quad (2.1)$$

Если дополнительно к упрощениям типа (1.4) теории малых деформаций, которые первоначально были введены в [10, 11], ввести упрощения типа (2.1), которые первоначально были введены в [5] и соответствуют теории малых деформаций при малых усредненных углах поворота, то после ряда преобразований можно [5] получить

$$\bar{\psi}_n \approx \omega_n, \quad (2.2)$$

где справа представлены составляющие вектора углов поворота линейной теории. Из (2.2) с учетом (2.1) получаем

$$\omega_n \ll 1. \quad (2.3)$$

Таким образом, при принятом основном положении или упрощении также меньшими единицы получаем и составляющие вектора углов поворота линейной теории. Полученное неравенство (2.3) является основой для упрощений [5] в рамках рассматриваемой нелинейной теории. По-видимому, неравенства (2.3) послужили основой для названия [5] рассматриваемой теории как теории малых деформаций *при малых углах поворота*; в действительности, исходными допущениями или упрощениями рассматриваемой теории являются неравенства (2.1), таким образом, рассматриваемую теорию правильно было бы назвать теорией малых деформаций *при малых усредненных углах поворота*  $\bar{\psi}_n$ .

**Примечание.** Необходимо отметить, что введенные [5] усредненные углы поворота  $\bar{\psi}_n$  не могут характеризовать произвольные процессы деформирования. Рассмотрим пример, когда в плоскости  $x_1Ox_2$  реализуется чистый сдвиг при произвольных (конечных или малых) деформациях. В этом случае очевидно, что усредненный угол поворота  $\bar{\psi}_3$  (вокруг оси, перпендикулярной плоскости  $x_1Ox_2$ ) равен нулю, т.е.

$$\bar{\psi}_3 = 0, \quad (2.4)$$

а процесс деформирования происходит.

Ограничиваясь вышеизложенными сведениями, выполним в весьма краткой форме анализ рассматриваемой теории малых деформаций при малых углах поворота [5]. Отметим, что введенные усредненные углы поворота  $\bar{\psi}_n$  являются “интегральными” характеристиками процесса деформирования в рассматриваемой точке тела по аналогии с величинами (1.2); однако величины  $\bar{\psi}_n$  не имеют непосредственного геометрического (или физического) смысла, поскольку они не характеризуют изменение геометрических объектов, в отличие от величин (1.2). По крайней мере, величины  $\bar{\psi}_n$  не имеют такого же четкого геометрического (или физического) смысла как общеизвестные величины (1.1) или даже (1.2); в связи с этим, величины  $\bar{\psi}_n$  можно рассматривать как некоторые математические выражения, связанные с процессом деформирования. Таким образом, упрощения типа (2.1) не представляются вполне логичными, поскольку они связаны с ограничениями на величины, не имеющие непосредственного геометрического или физического смысла. По крайней мере упрощения типа (2.1) не имеют столь понятного геометрического или физического смысла как и общеизвестные упрощения типа (1.4). Таким образом, теория [5] малых деформаций при малых углах поворота не имеет столь четкого геометрического или физического смысла как и общеизвестная теория малых деформаций, основанная на упрощениях типа (1.4).

Необходимо отметить, что вышеизложенный анализ относится к трехмерной теории описания деформирования деформируемых тел. В случае же двумерных прикладных теорий, построенных с привлечением гипотезы Кирхгофа–Лява, анализ существенным образом изменяется. В последнем случае вследствие привлечения кинематической гипотезы Кирхгофа–Лява величины  $\bar{\psi}_1$  и  $\bar{\psi}_2$  (усредненные углы поворота вокруг осей, лежащих в касательной плоскости) имеют непосредственный геометрический или физический смысл и совпадают с соответствующими углами поворота сечений.

Вышеизложенным обсуждением ограничимся при кратком анализе теории [5, 6] малых деформаций при малых углах поворота.

**3. Об одном возможном обобщении теории малых деформаций.** Как уже отмечалось, в теории малых деформаций применяются уравнения движения в виде (1.9), которые получаются из уравнений движения теории конечных деформаций в виде (1.3) путем введения в последние упрощений (1.4), соответствующих переходу к теории малых деформаций; по существу используются соотношения (1.8), заменяющие составляющие тензора напряжений  $S$  на составляющие тензора напряжений  $\sigma$ , которые получены с учетом выражений (1.6). Таким образом, в вышеуказанных преобразованиях упрощения (1.4) и следующие из них упрощения (1.6) и (1.8) вводятся в уравнения движения в рамках теории конечных деформаций до дифференцирования; необходимо отметить, что вышеуказанная специфика введения упрощений относится только к процедуре получения уравнений движения. В связи с вышеизложенным возникает возможность построить обобщение общепринятой нелинейной теории малых деформаций, вводя упрощения типа (1.4) и следующие из них упрощения типа (1.6)–(1.8) в уравнения движения в рамках теории конечных деформаций после выполнения операции дифференцирования; по-видимому вышеуказанное обобщение можно считать достаточно логически непротиворечивым.

Следует подчеркнуть, что обсуждаемое обобщение общепринятой нелинейной теории малых деформаций можно получить только в рамках *первого* подхода при построении теории малых деформаций (см. терминологию во Введении в настоящую статью).

Идея построения обсуждаемого обобщения нелинейной теории малых деформаций была предложена еще в монографии [2]; основные результаты, относящиеся к реализации такого обобщения, изложены в публикации [3] а также в сравнительно подробном виде – в монографиях [4, 7]. Также в весьма краткой форме информация о рассматриваемом обобщении представлена в обзорной статье [8] наряду с другими результатами, относящимися к построению трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. Ниже, опуская все промежуточные преобразования, приведем лишь в качестве конечного результата нелинейные уравнения движения, полученные [4, 7] в рамках рассматриваемого обобщения общепринятой теории малых деформаций; более подробную информацию, относящуюся к построению вышеотмеченных уравнений движения, можно получить из монографий [4, 7]. В соответствии с результатами монографии [4], представленными на стр.61, нелинейные уравнения движения, полученные в рамках рассматриваемого обобщения теории малых деформаций, могут быть представлены в следующем виде

$$\nabla_i[\sigma^{in}(g_n^j + \nabla_n u^j)] + \sigma^{in}(g_n^j + \nabla_n u^j)\nabla_i \varepsilon_m^m - \rho \ddot{u}^j + \rho F^j = 0. \quad (3.1)$$

В (3.1) введены составляющие симметричного тензора напряжений  $\sigma$ , который является общепринятым в теории малых деформаций, и составляющие тензора деформаций Грина  $\varepsilon$ . Следует отметить, что в монографиях [4, 7] рассмотрены и другие варианты обсуждаемого возможного обобщения общепринятой теории малых деформаций.

**Закключение.** В настоящей статье в весьма краткой форме выполнен анализ основных исходных положений и упрощений, которые применяются при построении нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемого тела; следует подчеркнуть, что рассмотренный анализ относится лишь к геометрической (кинематической) стороне вопроса. Необходимо отметить, что по-видимому, теории, рассмотренные в пп. 2, 3, являются в определенном смысле обобщениями общепринятой теории малых деформаций, рассмотренной в п. 1.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Грин, А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Д. Адкинс. – М. : Мир, 1965. – 143 с.
- [2] Гузь, А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел / А. Н. Гузь. – Киев : Наук. думка, 1971. – 276 с.
- [3] Гузь, А. Н. О возможном обобщении нелинейной теории малых деформаций / А. Н. Гузь // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, т. 1. – С. 50–54.
- [4] Гузь, А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь. – Киев : Вища шк., 1986. – 512 с.
- [5] Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – М. : Гостехиздат, 1948. – 212 с.
- [6] Новожилов, В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов. – М. ; Ленинград [СПб.] : Судостроение, 1958. – 368 с.
- [7] Guz, A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies / A. N. Guz. – Berlin : Springer, 1999. – 555 p.
- [8] Guz, A. N. Constructing the three-dimensional theory of stability of deformable bodies / A. N. Guz // Inter. Appl. Mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 1. – P. 1–37.
- [9] Guz, A. N. Constructing the nonlinear small-deformation theory in the mechanics of deformable bodies / A. N. Guz // Inter. Appl. Mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 8. – P. 1023–1027.
- [10] Kappus, R. Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. 1 / R. Kappus // ZAMM. – 1939. – Vol. 19, № 5. – S. 271–285.

[11] *Kappus, R.* Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. 2 / R. Kappus // ZAMM. – 1939. – Vol. 19, № 6. – S. 344–361.

A. N. Guz

**CONSTRUCTION OF THE NONLINEAR THEORY OF THE SMALL DEFORMATIONS IN THE MECHANICS OF THE DEFORMABLE BODIES**

*S. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine*

**Abstract.** The analysis of construction of the basic correlations of the nonlinear theory of the small deformations in the mechanics of a deformable firm body in the lagrangian's coordinates is considered. Primary attention is given to the specified correlations from the theory of final deformations thereby introducing the corresponding simplifications. Usually the specified simplifications are introduced before the performance of the differential operations, in the present article the case of introduction of the simplifications after differentiation is also analyzed.

**Keywords:** the nonlinear theory, the final deformations, small deformations, introduction of the simplifications.

*Гузь Александр Николаевич*

*академик НАНУ, профессор, доктор технических наук, директор Института механики имени С. П. Тимошенко НАНУ, Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ, г. Киев*

*e-mail: guz@carrier.kiev.ua*

*Guz, Alexander Nicholaevich*

*Academician NANU, Professor, Dr. Eng. Sci., S. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev*

Д. В. Давыдов, Ю. М. Мяснянкин, Е. Д. Чуфринова

## О СЖАТИИ ТОНКОГО АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ СЛОЯ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Воронежский государственный университет

**Аннотация.** Рассматривается плоская задача о сжатии тонкого анизотропно упрочняющегося слоя, выполненного из жесткопластического материала, шероховатыми плитами произвольной криволинейной формы. Для описания деформированного состояния используется тензор Альманси, связанный с тензором скоростей деформаций объективной производной по времени в смысле Коттера-Ривлина. С помощью асимптотического метода найдены рекуррентные формулы для компонент вектора скорости, деформаций и напряжений.

**Ключевые слова:** сжатие слоя, упрочнение, конечные деформации, асимптотический метод.

УДК: 539.374

Задача Прандтля о сжатии слоя из идеального жесткопластического материала шероховатыми плитами стала основой теоретического анализа прикладных задач обработки металлов давлением. Надаи [1] рассмотрел задачу Прандтля в случае сжатия слоя наклонными шероховатыми плитами, а также плитами, изогнутыми в виде концентрических окружностей. Для слоя конечной толщины эта задача изучалась Хиллом [2] и В. В. Соколовским [3]. Ряд обобщений задачи принадлежит Гартману, А. А. Ильюшину [4, 5], Д. Д. Ивлеву [6], М. А. Задояну [7]. Г. И. Быковцев [8] рассмотрел задачу о сдавливании пластического слоя шероховатыми плитами с учетом упрочнения в декартовой системе координат.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим сжатие тонкого анизотропно упрочняющегося жесткопластического слоя, расположенного между двумя криволинейными шероховатыми плитами, сближающимися с постоянной единичной скоростью. Радиус кривизны плит  $r$  в каждой точке значительно превосходит толщину слоя и является непрерывно дифференцируемой функцией. Длина слоя  $l$  много больше его толщины ( $l \gg h$ ), но плиты полностью перекрывают сдавливаемый материал (рис. 1).

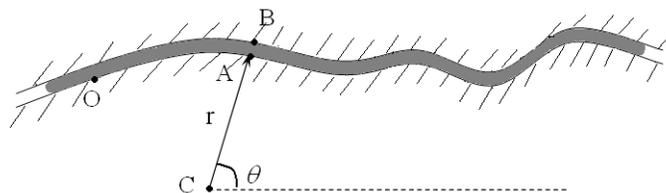


Рис. 1. Сжатие тонкого слоя криволинейными плитами

Рассмотрение следует вести в криволинейных координатах, которые позволяли бы описать форму плит. В качестве таковых примем координаты, предложенные В. В. Соколовским [3]. В общем виде квадрат бесконечно малого элемента длины  $ds$  выражается как

$$ds^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2, \quad (1)$$

За координаты  $x_1$  и  $x_2$  выберем соответственно длину  $x$  дуги кривой ОА и длину  $y$  по направлению нормали АВ. С учетом того, что радиус кривизны плиты в точке А  $r = r(x) = -dx/d\theta$ , квадрат бесконечно малого элемента длины  $ds$  запишется в виде

$$ds^2 = \left(1 + \frac{y}{r(x)}\right)^2 dx^2 + dy^2, \quad (2)$$

а коэффициенты  $H_1$  и  $H_2$  будут равны

$$H_1 = H = 1 + \frac{y}{r(x)}, \quad H_2 = 1. \quad (3)$$

Ось  $x$  направим таким образом, чтобы пластический слой располагался симметрично относительно нее, а толщину слоя в момент времени  $t$  обозначим через  $2h(t)$ .

Для поставленной задачи в выбранной системе координат система уравнений принимает вид: условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y - c\varepsilon_x + c\varepsilon_y)^2 + 4(\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})^2 = 4k^2, \quad (4)$$

которое удовлетворим заменой

$$\sigma_x = \sigma - k \sin 2\varphi + c\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma + k \sin 2\varphi + c\varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = k \cos 2\varphi + c\varepsilon_{xy}, \quad (5)$$

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + H \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{2\tau_{xy}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + H \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{r} = 0, \quad (6)$$

ассоциированный закон пластического течения с учетом замены (5)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{H} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) = 2\lambda (\sigma_x - \sigma_y - c\varepsilon_x + c\varepsilon_y) = -4\lambda k \sin 2\varphi, \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -2\lambda (\sigma_x - \sigma_y - c\varepsilon_x + c\varepsilon_y) = 4\lambda k \sin 2\varphi, \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{1}{H} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} = 4\lambda (\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy}) = 4\lambda k \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

условие несжимаемости материала

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = \frac{1}{H} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

При рассмотрении деформированного состояния будем использовать тензор конечных деформаций Альманси, который связан с тензором скоростей деформаций следующим соотношением [9, 10]

$$\frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + v^k \nabla_k \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ik} \nabla_j v^k + \varepsilon_{jk} \nabla_i v^k = \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (9)$$

где оператор  $D/Dt$  обозначает объективную производную по времени в смысле Коттера-Ривлина,  $\nabla_i$  – ковариантная производная по  $i$ -ой координате,  $v_k$  – проекции вектора скорости на координатные оси,  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций. В рассматриваемом случае уравнения (9) в физических компонентах принимают вид

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + H^2 u \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + H v \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} &= -2H^2 \frac{u}{r} \varepsilon_{xy} + \frac{2v}{r} \varepsilon_x - 2H^2 \varepsilon_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) - \\
&\quad - 2\varepsilon_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + H u \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} &= -2H^2 \varepsilon_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + 4H \frac{u}{r} \varepsilon_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} (1 - 2\varepsilon_y), \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} + H^2 u \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + H v \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} &= -H^3 \varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial y} - H^2 \frac{u}{r} (\varepsilon_y - 2\varepsilon_x) - \\
-H^2 \varepsilon_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) - H \varepsilon_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} \right) &+ \frac{v}{r} \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} + H \frac{\partial u}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Используя (7) и (8), выведем для компонент вектора скорости дополнительное уравнение

$$\frac{1}{H} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{ctg} 2\varphi = 0, \quad \operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{2\dot{\varepsilon}_{xy}}{\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_x}. \tag{11}$$

**2. Определение неизвестных.** Дальнейшее рассмотрение будем вести в безразмерных переменных

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}, \tilde{y} = \frac{y}{h(t)}, \tilde{r}(x) = \frac{r(x)}{R}, \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{k}, \tilde{t} = \frac{h(t)}{h(0)}, \tilde{u} = \frac{u}{v_0}, \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, A = \frac{l}{R}, B = \frac{c}{k}, \tag{12}$$

где  $R$  – максимальный радиус кривизны для плит ( $R \neq \infty$ ),  $v_0$  – скорость сближения плит. Величина  $\delta = h/l$  согласно постановке задачи является малой, а значит, неизвестные величины можно искать в виде рядов (13) по степеням этого малого параметра. В дальнейшем знак тильды в соотношениях (12) будем отбрасывать, сохраняя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных.

$$f(x, y, t) = \sum_{m=-1}^{\infty} \delta^m f^{(m)}(x, y, t). \tag{13}$$

Уравнения (8) и (11) относительно компонент вектора скорости после преобразований (12) записываются в виде

$$\begin{aligned}
\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \delta A \frac{v}{r} + \left( 1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\
\delta \frac{\partial v}{\partial x} - \delta A \frac{u}{r} + \left( 1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{ctg} 2\varphi \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Произведя разложение функций  $u$  и  $v$  в ряды вида (13) по степеням  $\delta$  и учитывая граничные условия  $v(x, \pm 1, t) = \mp 1$ , мы получили следующие рекуррентные зависимости

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} - \frac{A}{r} v^{(k)} - \frac{Ay}{r} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y}, \\
\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial y} \operatorname{ctg} 2\varphi - \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} + \frac{A}{r} u^{(k)} - \frac{Ay}{r} \left( \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} - 2 \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \operatorname{ctg} 2\varphi \right),
\end{aligned} \tag{15}$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . При этом первые два приближения имеют вид

$$\begin{aligned}
u^{(-1)} &= x, \quad v^{(-1)} = 0, \\
u^{(0)} &= -2 \int \operatorname{ctg} 2\varphi dy + \frac{A}{r} xy + g^{(0)}(t), \quad v^{(0)} = -y,
\end{aligned} \tag{16}$$

а граничные условия для поиска произвольных функций от интегрирования дополняются условием несжимаемости в интегральной форме

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( 1 + \delta \frac{A}{r(u^{(k)}|_{x=l}t)} y \right) u^{(k)}|_{x=l} dt dy = 0, \quad (17)$$

$$v^{(k+1)}(x, \pm 1, t) = 0.$$

Нахождение членов разложения деформаций из системы ( ) затруднено, поскольку проблематично обнаружить эти члены в явном виде даже для начальных приближений, а количество членов в разложении значительно увеличивается. Приведем вид системы ( ) после разложения при произвольном  $\delta^k$

$$\begin{aligned} & -t \frac{\partial \varepsilon_x^{(k)}}{\partial t} - \frac{Ay}{r} t \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-1)}}{\partial t} + \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-1-m)}}{\partial x} + 2 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-2-m)}}{\partial x} + \\ & + \left( \frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-2} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-3-m)}}{\partial x} + \sum_{m=-1}^{k+1} v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-m)}}{\partial y} + \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-1-m)}}{\partial y} = \\ & = -\frac{2A}{r} \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \varepsilon_{xy}^{(k-1-m)} - 4 \frac{A^2 y}{r^2} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \varepsilon_{xy}^{(k-2-m)} - \\ & - 2 \frac{A^3 y^2}{r^3} \sum_{m=-1}^{k-2} u^{(m)} \varepsilon_{xy}^{(k-3-m)} - 2 \sum_{m=-1}^k \varepsilon_x^{(m)} \left( \frac{\partial u^{(k-1-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-1-m)} \right) - \\ & - 4 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_x^{(m)} \left( \frac{\partial u^{(k-2-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-2-m)} \right) - \\ & - 2 \left( \frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-2} \varepsilon_x^{(m)} \left( \frac{\partial u^{(k-3-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-3-m)} \right) + \frac{2A}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_x^{(m)} v^{(k-1-m)} - \\ & - 2 \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} \left( \frac{\partial v^{(k-1-m)}}{\partial x} - \frac{A}{r} u^{(k-1-m)} \right) + \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-1)}, \\ & -t \frac{\partial \varepsilon_y^{(k)}}{\partial t} + \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_y^{(k-1-m)}}{\partial x} + \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_y^{(k-2-m)}}{\partial x} + \sum_{m=-1}^{k+1} v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_y^{(k-m)}}{\partial y} = \\ & = -2 \sum_{m=-1}^{k+1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial u^{(k-m)}}{\partial y} - 4 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial u^{(k-1-m)}}{\partial y} - \\ & - 2 \left( \frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial u^{(k-2-m)}}{\partial y} + \frac{4A}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} u^{(k-1-m)} + \\ & + 4 \frac{A^2 y}{r^2} \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_{xy}^{(m)} u^{(k-2-m)} - 2 \sum_{m=-1}^{k+1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& -t \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k)}}{\partial t} - \frac{Ay}{r} t \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-1)}}{\partial t} + \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-1-m)}}{\partial x} + 2 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-2-m)}}{\partial x} + \\
& + \left( \frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-2} u^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-3-m)}}{\partial x} + \sum_{m=-1}^{k+1} v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-m)}}{\partial y} + \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k v^{(m)} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-m)}}{\partial y} = \\
& = - \sum_{m=-1}^{k+1} \varepsilon_x^{(m)} \frac{\partial u^{(k-m)}}{\partial y} - 3 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_x^{(m)} \frac{\partial u^{(k-1-m)}}{\partial y} - \\
& - 3 \left( \frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_x^{(m)} \frac{\partial u^{(k-2-m)}}{\partial y} - \left( \frac{Ay}{r} \right)^3 \sum_{m=-1}^{k-2} \varepsilon_x^{(m)} \frac{\partial u^{(k-3-m)}}{\partial y} - \\
& - \frac{A}{r} \sum_{m=-1}^k u^{(m)} \left( \varepsilon_y^{(k-1-m)} - 2 \varepsilon_x^{(k-1-m)} \right) - 2 \frac{A^2 y}{r^2} \sum_{m=-1}^{k-1} u^{(m)} \left( \varepsilon_y^{(k-2-m)} - 2 \varepsilon_x^{(k-2-m)} \right) - \\
& - \frac{A^3 y^2}{r^3} \sum_{m=-1}^{k-2} u^{(m)} \left( \varepsilon_y^{(k-3-m)} - 2 \varepsilon_x^{(k-3-m)} \right) - \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} \left( \frac{\partial u^{(k-1-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-1-m)} \right) - \\
& - 2 \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^{k-1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \left( \frac{\partial u^{(k-2-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-2-m)} \right) - \\
& - \left( \frac{Ay}{r} \right)^2 \sum_{m=-1}^{k-2} \varepsilon_{xy}^{(m)} \left( \frac{\partial u^{(k-3-m)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-3-m)} \right) - \sum_{m=-1}^{k+1} \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial v^{(k-m)}}{\partial y} - \\
& - \frac{Ay}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} \frac{\partial v^{(k-1-m)}}{\partial y} - \sum_{m=-1}^k \varepsilon_y^{(m)} \left( \frac{\partial v^{(k-1-m)}}{\partial x} - \frac{A}{r} u^{(k-1-m)} \right) - \\
& - \frac{A}{r} \sum_{m=-1}^k \varepsilon_{xy}^{(m)} v^{(k-1-m)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{Ay}{r} \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k-1)}}{\partial x} - \frac{A}{r} u^{(k-1)} \right).
\end{aligned}$$

Систему (18) следует дополнить начальными условиями для деформаций

$$\varepsilon_x^{(k)}|_{t=1} = \varepsilon_y^{(k)}|_{t=1} = \varepsilon_{xy}^{(k)}|_{t=1} = 0. \quad (19)$$

Нахождение деформаций значительно упростится, если мы отбросим члены второго порядка малости. При этом система ( ) запишется в виде

$$\begin{aligned}
& - \left( 1 + \delta A \frac{y}{r} \right) t \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{v}{r} \right), \\
& -t \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\
& - \left( 1 + \delta A \frac{y}{r} \right) t \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial t} = \frac{\delta}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - A \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned} \quad (20)$$

решение которой можно представить в виде рекуррентных формул

$$\begin{aligned}
& -t \frac{\partial \varepsilon_x^{(k)}}{\partial t} = \frac{Ay}{r} t \frac{\partial \varepsilon_x^{(k-1)}}{\partial t} + \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial x} + \frac{A}{r} v^{(k-1)}, \\
& -t \frac{\partial \varepsilon_y^{(k)}}{\partial t} = \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y}, \\
& -t \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k)}}{\partial t} = \frac{Ay}{r} t \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(k-1)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^{(k-1)}}{\partial x} + \frac{Ay}{r} \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial y} - \frac{A}{r} u^{(k-1)} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} \right),
\end{aligned} \quad (21)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , для которых первые два приближения находятся из соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(-1)} &\equiv \varepsilon_y^{(-1)} \equiv \varepsilon_{xy}^{(-1)} \equiv 0, \\ \varepsilon_x^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-t^2), \quad t \frac{\partial \varepsilon_y^{(0)}}{\partial t} = -2\varepsilon_{xy}^{(0)} \left( 2 \operatorname{ctg} 2\varphi + A \frac{x}{r} \right) - 2\varepsilon_y^{(0)} + 1, \\ \frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(0)}}{\partial t} &= \frac{1}{2}t \left( 2 \operatorname{ctg} 2\varphi + A \frac{x}{r} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Начальные условия для поиска неизвестных функций интегрирования удовлетворяют соотношению (19).

Система уравнений для определения напряженного состояния после преобразований (12) принимает вид

$$(\sigma_x - \sigma_y - B\varepsilon_x + B\varepsilon_y)^2 + 4(\tau_{xy} - B\varepsilon_{xy})^2 = 4, \quad (23)$$

$$\sigma_x = \sigma - \sin 2\varphi + B\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma + \sin 2\varphi + B\varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = \cos 2\varphi + B\varepsilon_{xy}, \quad (24)$$

$$\delta \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \left( 1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 2\delta A \frac{\tau_{xy}}{r} = 0, \quad \delta \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \left( 1 + \delta A \frac{y}{r} \right) \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \delta A \frac{\sigma_y - \sigma_x}{r} = 0. \quad (25)$$

Учтем граничные условия: на плитах величина касательного напряжения принимается постоянной и равной  $m = T/k$ , причем  $T \leq k$ . Таким образом,  $\tau_{xy}|_{y=\pm 1} = \pm m$ . На основании соотношений (23)–(25) для напряжений могут быть записаны следующие рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k+1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} - \frac{Ay}{r} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} - A \frac{2\tau_{xy}^{(k)}}{r}, \\ \frac{\partial \sigma_y^{(k+1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} - \frac{Ay}{r} \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial y} - A \frac{\sigma_y^{(k)} - \sigma_x^{(k)}}{r}, \\ \sigma^{(k)} &= \sigma_y^{(k)} + \sin 2\varphi - B\varepsilon_y^{(k)}, \\ \sigma_x^{(k)} &= \sigma^{(k)} + B\varepsilon_x^{(k)}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , первые два приближения для которых имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(-1)} &= \sigma_y^{(-1)} = -mx, \quad \tau_{xy}^{(-1)} \equiv 0, \\ \sigma_x^{(0)} &= 2 \sin 2\varphi + \frac{2}{B} \frac{(my - \cos 2\varphi)^2}{t^2} + \frac{B}{2} (1-t^2), \quad \sigma_y^{(0)} = B \frac{t^2 - 1}{2t^2}, \quad \tau_{xy}^{(0)} = my. \end{aligned} \quad (27)$$

К соотношениям (26) необходимо добавить граничные условия шероховатости плит, а также условие уравновешенности напряжения  $\sigma_x$  в вертикальном сечении касательными напряжениями на основаниях слоя, а именно

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 \sigma_x^{(k)} dy + \int_0^x \tau_{xy}^{(k)}|_{y=1} dx &= 0, \\ \tau_{xy}^{(k)}(x, \pm 1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Наконец, из соотношений (18) при  $k = 0$  следует равенство

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}^{(0)}}{\partial t} = \frac{t}{2} \left( 2 \operatorname{ctg} 2\varphi + A \frac{x}{r} \right), \quad (29)$$

а из уравнений равновесия с учетом замены (24) получили, что

$$my = \cos 2\varphi + B\varepsilon_{xy}^{(0)}. \quad (30)$$

Исключая из уравнений (29)–(30) величину  $\varepsilon_{xy}^{(0)}$ , получим соотношение для определения функции  $\varphi(x, y, t)$

$$\int \frac{\sin 2\varphi}{\operatorname{ctg} 2\varphi + A \frac{x}{2r}} d\varphi = \frac{Bt^2}{4}. \quad (31)$$

**Заключение.** Таким образом, с помощью асимптотического метода нам удалось найти рекуррентные формулы для компонент вектора скорости (15)–(16) с граничными условиями (17), для деформаций выражения (18) или упрощенные (21)–(22) с начальными условиями (19) и формулы для напряжений (26)–(27) с граничными условиями (28). Все эти соотношения необходимо дополнить выражением (31) для определения функции  $\varphi(x, y, t)$ .

При стремлении радиуса кривизны плит к бесконечности полученное нами решение совпадает с решением, найденным Г. И. Быковцевым, для плоской задачи в декартовой системе координат [8].

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : ИЛ, 1954. – Т. 1. – 648 с. ; М. : Мир, 1969. – Т. 2. – 864 с.
- [2] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [3] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [4] *Ильюшин, А. А.* Вопросы теории течения пластического вещества по поверхности / А. А. Ильюшин // ПММ. – 1954. – Т. 18, вып. 3. – С. 67–78.
- [5] *Ильюшин, А. А.* Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения / А. А. Ильюшин // ПММ. – 1955. – Т. 19, вып. 6. – С. 693–713.
- [6] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 1. – 445 с. ; 2002. – Т. 2. – 448 с.
- [7] *Задоян, М. А.* Пространственные задачи теории пластичности / М. А. Задоян. – М. : Наука, 1992. – 382 с.
- [8] *Быковцев, Г. И.* О сжатии анизотропно упрочняющегося пластического слоя шероховатыми плитами / Г. И. Быковцев // Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред : сб. статей. – Владивосток, 2002. – С. 13–16.
- [9] *Аннин, Б. Д.* Обобщенные сопряженные тензоры напряжений и деформаций / Б. Д. Аннин, С. Н. Коробейников // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7, № 3(19). – С. 21–43.
- [10] *Прагер, В.* Введение в механику сплошных сред / В. Прагер. – М. : ИЛ, 1963. – 311 с.

*D. V. Davydov, Y. M. Myasnyankin, E. D. Chufrinova*

**PRESSING OF AN ANISOTROPIC STRENGTHENED THIN LAYER BY  
CURVILINEAR ROUGH SLABS**

*Voronezh State University*

**Abstract.** The plane problem of pressing an anisotropic strengthened thin layer made of a rigid material by rough slabs of arbitrary curvilinear form is considered in the paper. For the description of the deformed state tensor of finite deformations, which is linked to the tensor of strain speed by objective time derivative in the sense of Cotter-Rivlin is used. With the help of the asymptotic method the recurrent formulas for the components of the velocity vector, strain and stress are found.

**Keywords:** pressing of layer, strengthening, finite strain, asymptotic method.

*Давыдов Дмитрий Владиславович*

*аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** d-d-a-v@yandex.ru

*Мяснянкин Юрий Михайлович*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** pmmtamc@amm.vsu.ru

*Чуфринова Елена Дмитриевна*

*аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

**e-mail:** gelya1818@mail.ru

*Davydov, Dmitry Vladislavovich*

*Postgraduate Student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

*Myasnyankin, Yury Mikhaylovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

*Chufrinova, Elena Dmitrievna*

*Postgraduate Student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

И. Н. Зиновьев, А. С. Чеботарёв

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИМАНА В ЗАДАЧАХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ С КРУГОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

Воронежский государственный университет

**Аннотация.** В статье рассматривается вывод уравнений линий скольжения методом Римана для задачи плоской деформации теории идеальной пластичности с границей в виде части окружности. В параметрическом виде приведены решения как в случае с трением на границе, так и в его отсутствии.

**Ключевые слова:** линии скольжения, метод Римана, пластичность, точные решения, напряжения, предел текучести.

УДК: 539.374

Исследуем поле напряжений вокруг кругового отверстия радиуса  $R$  в плоской задаче среды, находящейся в состоянии идеальной пластичности. Контур нагружен равномерным давлением  $p$  при отсутствии касательных напряжений.

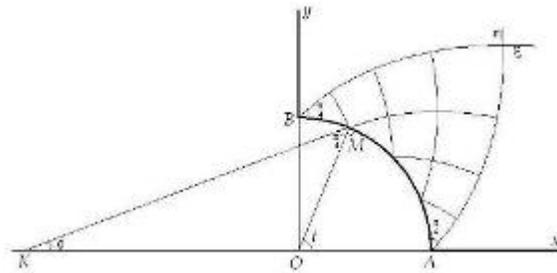


Рис. 1. Сетка линий скольжения

Рассматриваем кривую  $AB$ , являющуюся четвертью окружности радиуса  $R$ , расположенную в первой четверти (рис.1). Угол  $\theta$  является углом наклона касательной к линии скольжения  $\xi$  к оси  $x$ . Известно [1], [2], [3], [5], [7], [8], что сетка линий скольжения, построенная в пластической зоне с границей в виде части окружности, представляет собой два семейства логарифмических спиралей в случае отсутствия касательных напряжений на границе. При этом линии скольжения подходят к границе  $AB$  под углом равным  $\frac{\pi}{4}$ . Представим уравнение окружности в параметрическом виде

Поступила 26.05.2010

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Из треугольника *ОМК* следует, что  $t = \theta + \frac{\pi}{4}$ , следовательно:

$$\begin{cases} x = R \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ y = R \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (1)$$

Перейдем к переменным Михлина:

$$\begin{cases} X = x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \\ Y = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta). \end{cases} \quad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим

$$\begin{cases} X = R \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\theta) + R \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \sin(\theta) = R \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = R \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = -R \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \sin(\theta) + R \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\theta) = R \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = R \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

Переменные Михлина *X* и *Y* являются константами вдоль *AB*.

При плоской деформации уравнения равновесия принимаю канонический вид [3]

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \operatorname{ctg} \theta = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \operatorname{tg} \theta = 0, \end{cases} \quad (4)$$

В переменных  $\xi, \eta$  определяемых формулами

$$\begin{cases} \sigma = k(\xi + \eta) + \sigma_A \\ \theta = \frac{1}{2}(\eta - \xi), \end{cases} \quad (5)$$

где  $\sigma$  - полусумма главных напряжений  $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ ,  $k$  - согласно условию текучести полуразность главных напряжений  $k = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

В переменных Михлина система уравнений (4) преобразуется в систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{X}{2} = 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} - \frac{Y}{2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

При этом каждая новая переменная *X* и *Y* удовлетворяет телеграфному уравнению [3]

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4}X = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4}Y = 0. \quad (7)$$

Решение каждого из уравнений (7) ищем в виде [4],[7]

$$G(a, b, \xi, \eta) = I_0 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right),$$

где  $I_0$  - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка  
Систему (5) представим в виде

$$\begin{cases} \eta - \xi = 2\theta \\ \xi + \eta = \frac{\sigma - \sigma_A}{k} = 0. \end{cases}$$

Вдоль  $AB$   $\eta = -\xi = \theta$ , то есть в плоскости  $(\xi, \eta)$  линия  $AB$  представляет собой прямую  $\eta = -\xi$  (рис.2), причем т.к.  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ , то

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \xi \leq \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \leq \eta \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

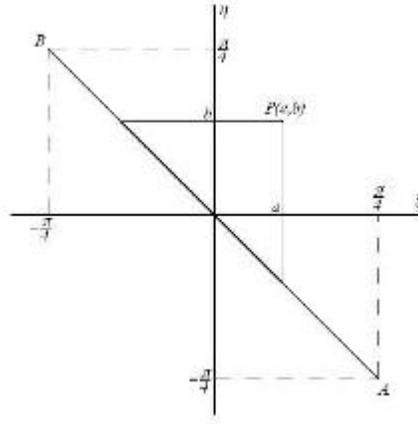


Рис. 2. Отображение физической плоскости в плоскость характеристик  $(\xi\eta)$

Решение в произвольной точке  $P$  с координатами  $(a, b)$  окрестности кривой определяем по формуле Римана [8]

$$X_P = \frac{1}{2}(X_a + X_b) - \frac{1}{2} \int_{ab} \left( G \frac{\partial X}{\partial \xi} - X \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\xi + \left( X \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (8)$$

$$Y_P = \frac{1}{2}(Y_a + Y_b) - \frac{1}{2} \int_{ab} \left( G \frac{\partial Y}{\partial \xi} - Y \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\xi + \left( Y \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (9)$$

Используя формулы (3) и (6), получим

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{X}{2} = R \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{Y}{2} = R \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \quad (10)$$

Так как  $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 1$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -1$ , то из формул  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{array} \right.$  найдем  $\frac{\partial X}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial \xi}$  вдоль

$AB$ , используя (10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial \eta} = R \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} = R \frac{\sqrt{2}}{4} \end{array} \right.$$

Вдоль  $AB$  получили:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = R \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = R \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial \eta} = R \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} = R \frac{\sqrt{2}}{4} \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial \eta} = R \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} = R \frac{\sqrt{2}}{4} \end{array} \right.;$$

$$G(a, b, \xi, \eta) = I_0 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{I_1 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}} (b - \eta);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{I_1 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}} (a - \xi);$$

Используя полученные выражения, формула (8) примет вид

$$\begin{aligned} X_P &= R \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \int_{ab} \left[ R \frac{\sqrt{2}}{4} I_0 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right) - R \frac{\sqrt{2}}{2} (b - \eta) \frac{I_1 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}} \right] d\xi + \\ &+ \left[ R \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{I_1 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}} (a - \xi) - R \frac{\sqrt{2}}{4} I_0 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right) \right] d\eta \\ X_P &= R \frac{\sqrt{2}}{2} - R \frac{\sqrt{2}}{8} \int_{ab} \left( I_0 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right) \right) (d\xi - d\eta) - \\ &- R \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{ab} \frac{I_1 \left( \sqrt{(a - \xi)(b - \eta)} \right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}} \left( -(b - \eta)d\xi + (a - \xi)d\eta \right) \end{aligned}$$

Перейдем от криволинейного интеграла второго рода к определённом интегралу Римана вдоль прямой

$$X_P = R \frac{\sqrt{2}}{2} + R \frac{\sqrt{2}}{8} \int_{-b}^a \left( 2I_0 \left( \sqrt{(a - \xi)(b + \xi)} \right) \right) d\xi + R \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-b}^a \frac{I_1 \left( \sqrt{(a - \xi)(b + \xi)} \right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b + \xi)}} \left( -(a + b) \right) d\xi$$

$$X(a, b) = R \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \text{Int1} - \frac{\sqrt{2}}{8} (a + b) \text{Int2} \right), \quad (11)$$

где

$$Int1 = \int_{-b}^a \left( I_0 \left( \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right) \right) d\xi$$

$$Int2 = \int_{-b}^a \frac{I_1 \left( \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}} d\xi$$

вычислим  $Int1$  и  $Int2$ . Для этого воспользуемся заменой:

$$\xi = \frac{a-b}{2} + \frac{b+a}{2} \sin(y)$$

$$d\xi = \frac{a+b}{2} \cos(y) dy$$

$$a-\xi = a - \frac{a-b}{2} - \frac{b+a}{2} \sin(y) = \frac{a+b}{2} - \frac{b+a}{2} \sin(y) = \frac{a+b}{2} (1 - \sin(y))$$

$$b+\xi = b + \frac{a-b}{2} + \frac{b+a}{2} \sin(y) = \frac{a+b}{2} + \frac{b+a}{2} \sin(y) = \frac{a+b}{2} (1 + \sin(y))$$

$$(a-\xi)(b+\xi) = \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 (1 - \sin^2(y))$$

$$\xi = a \rightarrow a - \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2} \sin(y) \rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$\xi = -b \rightarrow -b - \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2} \sin(y) \rightarrow y = -\frac{\pi}{2}$$

$$Int1 = \int_{-b}^a \left( I_0 \left( \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right) \right) d\xi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I_0 \left( \frac{a+b}{2} \cos(y) \right) \frac{a+b}{2} \cos(y) dy =$$

$$= \frac{a+b}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I_0 \left( \frac{a+b}{2} \cos(y) \right) \cos(y) dy$$

Так как подынтегральное выражение четное, то

$$Int = (a+b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0 \left( \frac{a+b}{2} \cos(y) \right) \cos(y) dy$$

Введём ещё одну замену

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} - t \\ \cos(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) \\ dy = dt, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0. \end{cases}$$

$$Int1 = (a+b) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 I_0 \left( \frac{a+b}{2} \sin(t) \right) \sin(t) (-dt) = (a+b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0 \left( \frac{a+b}{2} \sin(t) \right) \sin(t) dt = 2 \operatorname{sh} \left( \frac{a+b}{2} \right)$$

Посчитаем  $Int2$ :

$$Int2 = \int_{-b}^a \frac{I_1 \left( \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}} d\xi$$

Воспользуемся аналогичной заменой:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a-b}{2} + \frac{b+a}{2} \sin(y) d\xi = \frac{a+b}{2} \cos(y) dy a - \xi = a - \frac{a-b}{2} - \frac{b+a}{2} \sin(y) = \\ &= \frac{a+b}{2} - \frac{b+a}{2} \sin(y) = \frac{a+b}{2} (1 - \sin(y)) b + \xi = b + \frac{a-b}{2} + \frac{b+a}{2} \sin(y) = \frac{a+b}{2} + \frac{b+a}{2} \sin(y) = \\ &= \frac{a+b}{2} (1 + \sin(y)) (a - \xi) (b + \xi) = \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 (1 - \sin^2(y)) \xi = a \rightarrow a - \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2} \sin(y) \rightarrow y = \\ &= \frac{\pi}{2} \xi = -b \rightarrow -b - \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2} \sin(y) \rightarrow y = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Int2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I_1\left(\frac{a+b}{2} \cos(y)\right)}{\frac{a+b}{2} \cos(y)} \frac{a+b}{2} \cos(y) dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I_1\left(\frac{a+b}{2} \cos(y)\right) dy \\ &\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} - t \\ \cos(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) \\ dy = dt, \end{cases} \begin{cases} y = 0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$Int2 = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 I_1\left(\frac{a+b}{2} \sin(t)\right) (-dt) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1\left(\frac{a+b}{2} \sin(t)\right) dt = \frac{2 - 2 \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{a+b}{2}}$$

Подставим полученные значения  $Int1$  и  $Int2$  в формулу (11)

$$X(a, b) = R \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} 2 \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{8} (a+b) \frac{4 - 4 \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{a+b} \right)$$

$$X(a, b) = R \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) = R \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{a+b}{2}}$$

$$X(\xi, \eta) = R \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\xi+\eta}{2}}$$

Для переменной  $Y = Y(\xi, \eta)$  проведя аналогичные вычисления, получим идентичную формулу:

$$Y(\xi, \eta) = R \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\xi+\eta}{2}}$$

Из системы (2) выразим  $x$  и  $y$  и получим параметрические уравнения  $x = x(\xi, \eta)$  и  $y = y(\xi, \eta)$  в плоскости  $xOy$

$$\begin{cases} x = X \cos(\theta) - Y \sin(\theta) = R \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\xi+\eta}{2}} \cos(\theta) - R \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\xi+\eta}{2}} \sin(\theta) = R e^{\frac{\xi+\eta}{2}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \\ y = X \sin(\theta) + Y \cos(\theta) = R \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\xi+\eta}{2}} \sin(\theta) + R \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\xi+\eta}{2}} \cos(\theta) = R e^{\frac{\xi+\eta}{2}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Подставим значение  $\theta$  из второго уравнения системы (5)

$$\begin{cases} x = R e^{\frac{\xi+\eta}{2}} \cos\left(\frac{\eta - \xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \\ y = R e^{\frac{\xi+\eta}{2}} \sin\left(\frac{\eta - \xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases} \quad (12)$$

Используем известные формулы теории напряжений

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma - k \sin(2\theta), \\ \sigma_y = \sigma + k \sin(2\theta), \\ \tau_{xy} = k \cos(2\theta). \end{cases} \quad (13)$$

Найдём  $\sigma$  и  $\theta$ . Для этого воспользуемся системами (5) и (12). В (12) сначала разделим первое уравнение на второе, получим

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left( \frac{\eta - \xi}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\eta - \xi = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

Теперь возведём оба уравнения (12) в квадрат и сложим

$$x^2 + y^2 = R^2 e^{\xi + \eta} \cos^2 \left( \frac{\eta - \xi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + R^2 e^{\xi + \eta} \sin^2 \left( \frac{\eta - \xi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), x^2 + y^2 = R^2 e^{\xi + \eta},$$

$$\xi + \eta = \ln \left( \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) \quad (15)$$

$\sigma_A$  определим из граничных условий [3]

$$\sigma_A = \sigma_n + k \sin 2(\theta - t),$$

$$\sigma_A = -p - k \quad (16)$$

Подставим (14), (15) и (16) в (5)

$$\begin{cases} \sigma = k \ln \left( \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) - p - k \\ \theta = \operatorname{arctan} \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

Подставим полученные  $\sigma$  и  $\theta$  в систему (13)

$$\begin{cases} \sigma_x = k \ln \left( \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) - p - k - k \sin \left( 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{\pi}{2} \right), \\ \sigma_y = k \ln \left( \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) - p - k + k \sin \left( 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{\pi}{2} \right), \\ \tau_{xy} = k \cos \left( 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{\pi}{2} \right). \end{cases} \quad (17)$$

Перейдем в системе (17) к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi), & x^2 + y^2 = r^2, \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{R^2}\right) = 2 \ln\left(\frac{r}{R}\right), \frac{y}{x} = \operatorname{tg}(\varphi), 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\pi}{2} = 2\varphi - \frac{\pi}{2} \\ y = r \sin(\varphi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = 2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k - k \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right), \\ \sigma_y = 2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k + k \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right), \\ \tau_{xy} = k \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_x = 2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k + k \cos(2\varphi), \\ \sigma_y = 2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k - k \cos(2\varphi), \\ \tau_{xy} = k \sin(2\varphi). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_x \cos^2(\varphi) + \sigma_y \sin^2(\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi), \\ \sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2(\varphi) + \sigma_y \cos^2(\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi), \\ \tau_{r\varphi} = \tau_{xy} \cos(2\varphi) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\varphi); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left(2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k + k \cos(2\varphi)\right) \cos^2(\varphi) + \left(2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k - k \cos(2\varphi)\right) \sin^2(\varphi) + \\ &+ k \sin(2\varphi) \sin(2\varphi) = 2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k + k (\cos^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi)), \end{aligned}$$

$$\sigma_r = 2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \left(2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k + k \cos(2\varphi)\right) \sin^2(\varphi) + \left(2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k - k \cos(2\varphi)\right) \cos^2(\varphi) - \\ &- k \sin(2\varphi) \sin(2\varphi) = 2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - k - k (\cos^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi)), \end{aligned}$$

$$\sigma_\varphi = 2k \ln\left(\frac{r}{R}\right) - p - 2k$$

Найденные решения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  методом Римана совпадают с представленными в [3], [7].

Решим теперь эту задачу считая, что вдоль кривой  $AB$  действуют касательные напряжения [9]

$$\tau_n = k \sin(2\delta), |\delta| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Уравнения окружности в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

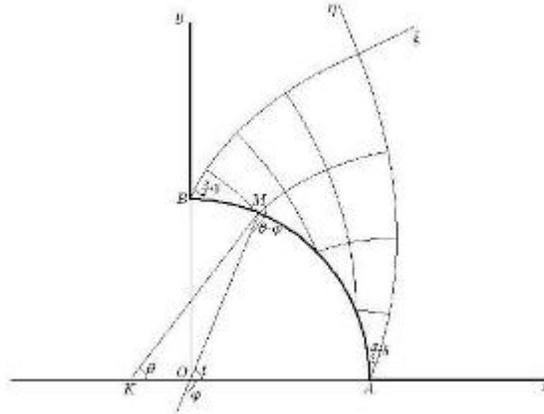


Рис. 3. Сетка линий скольжения, построенная на части окружности, при наличии постоянного трения

Согласно работе [3] параметр  $t$  зависит от угла  $\theta$  в виде  $t = \theta + \frac{\pi}{4} - \delta$  и параметрические уравнения кривой  $AB$  примут вид

$$\begin{cases} x = R \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta\right) \\ y = R \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta\right) \\ -\frac{\pi}{4} + \delta \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} + \delta. \end{cases} \quad (18)$$

Перейдем к переменным Михлина (2):

$$\begin{cases} X = R \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta\right) \cos(\theta) + R \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta\right) \sin(\theta) = R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right), \\ Y = -R \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta\right) \sin(\theta) + R \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} - \delta\right) \cos(\theta) = R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right). \end{cases} \quad (19)$$

Из (6) и (19) получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{X}{2} = \frac{R}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{Y}{2} = \frac{R}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right). \end{cases} \quad (20)$$

Систему (5) представим в виде

$$\begin{cases} \eta - \xi = 2\theta \\ \xi + \eta = \frac{\sigma - \sigma A}{k} = 0. \end{cases}$$

Вдоль  $AB$   $\eta = -\xi = \theta$ , то есть в плоскости  $(\xi, \eta)$  линия  $AB$  представляет собой прямую  $\eta = -\xi$  (рис.4), причем т.к.  $-\frac{\pi}{4} + \delta \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} + \delta$ , то

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} - \delta \leq \xi \leq \frac{\pi}{4} - \delta \\ -\frac{\pi}{4} + \delta \leq \eta \leq \frac{\pi}{4} + \delta. \end{cases}$$

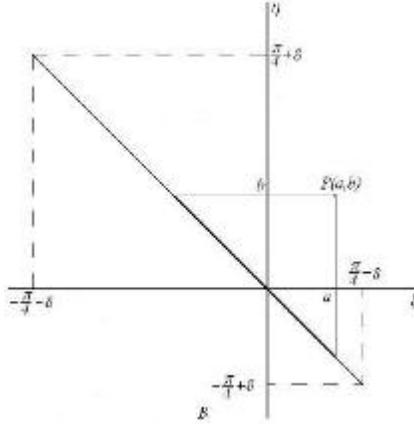


Рис. 4. Отображение физической плоскости в плоскость характеристик  $(\xi, \eta)$ , при наличии постоянного трения

Так как  $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 1$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -1$ , то из формул  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{array} \right.$  найдем  $\frac{\partial X}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial \xi}$  вдоль  $AB$ , используя (20)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{R}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{R}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \end{array} \right.$$

Вдоль  $AB$  получили:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \\ Y = R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{R}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{R}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{R}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{R}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \end{array} \right.;$$

$$G(a, b, \xi, \eta) = I_0\left(\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}\right);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{I_1\left(\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}\right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}}(b - \eta);$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{I_1\left(\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}\right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}}(a - \xi);$$

Используя полученные выражения, формула (8) примет вид

$$X_P = R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) - \frac{1}{2} \int_{ab} \left[ \frac{R}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) I_0\left(\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}\right) - \right. \\ \left. - R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) (b - \eta) \frac{I_1\left(\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}\right)}{2\sqrt{(a - \xi)(b - \eta)}} \right] d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ R \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \frac{I_1 \left( \sqrt{(a-\xi)(b-\eta)} \right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}} (a-\xi) - \frac{R}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) I_0 \left( \sqrt{(a-\xi)(b-\eta)} \right) \right] d\eta \\
X_P & = R \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) - \frac{R}{4} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \int_{ab} \left( I_0 \left( \sqrt{(a-\xi)(b-\eta)} \right) \right) (d\xi - d\eta) - \\
& - \frac{R}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \int_{ab} \frac{I_1 \left( \sqrt{(a-\xi)(b-\eta)} \right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b-\eta)}} (-(b-\eta)d\xi + (a-\xi)d\eta)
\end{aligned}$$

Перейдем от криволинейного интеграла второго рода к определённом интегралу Римана вдоль прямой

$$\begin{aligned}
X(a, b) & = R \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) + \frac{R}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \int_{-b}^a \left( I_0 \left( \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right) \right) d\xi + \\
& + \frac{R}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \int_{-b}^a \frac{I_1 \left( \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}} (-(a+b)) d\xi
\end{aligned}$$

$$X(a, b) = R \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \text{Int1} - \frac{1}{4} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) (a+b) \text{Int2} \right), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
\text{Int1} & = \int_{-b}^a \left( I_0 \left( \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right) \right) d\xi \\
\text{Int2} & = \int_{-b}^a \frac{I_1 \left( \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} \right)}{2\sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}} d\xi
\end{aligned}$$

$\text{Int1}$  и  $\text{Int2}$  были подсчитаны выше:

$$\begin{aligned}
\text{Int1} & = 2 \operatorname{sh} \left( \frac{a+b}{2} \right), \\
\text{Int2} & = \frac{2 - 2 \operatorname{ch} \left( \frac{a+b}{2} \right)}{\frac{a+b}{2}}.
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
X(a, b) & = R \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \operatorname{sh} \left( \frac{a+b}{2} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \left( 2 - 2 \operatorname{ch} \left( \frac{a+b}{2} \right) \right) \right], \\
X(a, b) & = R \left[ \sin \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \operatorname{sh} \left( \frac{a+b}{2} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \operatorname{ch} \left( \frac{a+b}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Для переменной  $Y = Y(a, b)$  проведя аналогичные вычисления, получим:

$$Y(a, b) = R \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \operatorname{sh} \left( \frac{a+b}{2} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} - \delta \right) \operatorname{ch} \left( \frac{a+b}{2} \right) \right]$$

Из системы (2) выразим  $x$  и  $y$  и получим параметрические уравнения  $x = x(a, b)$  и  $y = y(a, b)$  в плоскости  $xOy$

$$\begin{cases} x = X \cos(\theta) - Y \sin(\theta), \\ y = X \sin(\theta) + Y \cos(\theta); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \cos(\theta) - \\ - R \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \sin(\theta), \\ y = R \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \sin(\theta) + \\ + R \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \cos(\theta); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R \left[ \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta - \theta\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \theta\right) \right], \\ y = R \left[ \operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta - \theta\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \theta\right) \right]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R \left[ \operatorname{sh}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta - \frac{\eta-\xi}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \frac{\eta-\xi}{2}\right) \right], \\ y = R \left[ \operatorname{sh}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta - \frac{\eta-\xi}{2}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \frac{\eta-\xi}{2}\right) \right]; \end{cases} \quad (22)$$

Найдём  $\sigma$  и  $\theta$ . Для этого воспользуемся системами (5) и (22). В (22) возведём оба уравнения в квадрат и сложим, получим

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \left[ \operatorname{sh}^2\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + \operatorname{ch}^2\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right], \\ x^2 + y^2 &= R^2 [\operatorname{sh}(\xi + \eta) + \cos \delta \operatorname{ch}(\xi + \eta)]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись системой Марле получаем решение

$$\xi + \eta = \ln \left( \frac{x^2 + y^2 + \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + R^4 - R^4 \cos^2 \delta}}{R^2(1 + \cos \delta)} \right) \quad (23)$$

Преобразуем систему (22), сделав замену  $\frac{\xi+\eta}{2} = \alpha$ ,  $\frac{\eta-\xi}{2} = \beta$  и учитывая что

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta - \frac{\eta-\xi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \delta + \frac{\eta-\xi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta + \frac{\eta-\xi}{2}\right),$$

$$x = R \left[ \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta + \beta\right) + \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \beta\right) \right],$$

$$x = \frac{Re^\alpha}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta + \beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \beta\right) \right] + \frac{Re^{-\alpha}}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta + \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta + \beta\right) \right],$$

$$x = Re^\alpha \cos \delta \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) - Re^{-\alpha} \sin \delta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$$

$$y = \frac{Re^\alpha}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta - \beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta - \beta\right) \right] + \frac{Re^{-\alpha}}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta - \beta\right) \right],$$

$$y = Re^\alpha \cos \delta \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - Re^{-\alpha} \sin \delta \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$$

Получили новую систему, где  $2\alpha = \xi + \eta$

$$\begin{cases} x = Re^\alpha \cos \delta \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) - Re^{-\alpha} \sin \delta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right), \\ y = Re^\alpha \cos \delta \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - Re^{-\alpha} \sin \delta \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \end{cases}$$

Подставив (23), получаем

$$\begin{cases} x = RA \cos \delta \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) - \frac{R \sin \delta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)}{A}, \\ y = RA \cos \delta \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \frac{R \sin \delta \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)}{A}, \end{cases}$$

$$\text{где } A = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + R^4 - R^4 \cos^2 \delta}}{R^2(1 + \cos \delta)}}$$

$$\begin{cases} RA \cos \delta = \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)} + \frac{R \sin \delta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)}{A}, \\ RA \cos \delta = \frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} + \frac{R \sin \delta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)}{A}, \end{cases}$$

$$\frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)} + \frac{R \sin \delta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)}{A} = \frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} + \frac{R \sin \delta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)}{A},$$

$$\frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)} - \frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} = -\frac{R \sin \delta \sin 2\beta}{A \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)},$$

$$x \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - y \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = -\frac{R \sin \delta \sin 2\beta}{A},$$

$$x \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right)}{2}} - y \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right)}{2}} = -\frac{R \sin \delta \sin 2\beta}{A},$$

$$(B^2 - xy) \sin^2 2\beta + \frac{x^2 - y^2}{2} \sin 2\beta - \frac{(x + y)^2}{2} = 0,$$

$$\text{где } B = \frac{R \sin \delta}{A}.$$

Из последнего уравнения находим  $\beta$

$$2\beta = \arcsin\left(\frac{(x - y)(x + y + \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + 4B^2 - 4xy})}{2(B^2 - xy)}\right)$$

Получаем формулу (5) в виде

$$\begin{cases} \sigma = k \ln \left( \frac{x^2 + y^2 + \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + R^4 - R^4 \cos^2 \delta}}{R^2(1 + \cos \delta)} \right) - p - k, \\ \theta = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{(x - y)(x + y + \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + 4B^2 - 4xy})}{2(B^2 - xy)} \right), \end{cases}$$

где  $B^2 = \frac{R^4 \sin^2 \delta(1 + \cos \delta)}{x^2 + y^2 + \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + R^4 - R^4 \cos^2 \delta}}$

Подставим полученные значения в (13)

$$\begin{cases} \sigma_x = k \ln \left( \frac{x^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 + R^4 \sin^2 \delta}}{R^2(1 + \cos \delta)} \right) - p - k - \\ - k \frac{(x - y)(x + y + \sqrt{(x - y)^2 + 4B^2})}{2(B^2 - xy)}, \\ \sigma_y = k \ln \left( \frac{x^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 + R^4 \sin^2 \delta}}{R^2(1 + \cos \delta)} \right) - p - k + \\ + k \frac{(x - y)(x + y + \sqrt{(x - y)^2 + 4B^2})}{2(B^2 - xy)}, \\ \tau_{xy} = k \frac{\sqrt{4(B^2 - xy)^2 - (x - y)^2(x + y + \sqrt{(x - y)^2 + 4B^2})^2}}{2(B^2 - xy)} \end{cases}$$

Перейдём к полярным координатам. Введём замену  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  и воспользуемся формулами

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_x \cos^2(\varphi) + \sigma_y \sin^2(\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi), \\ \sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2(\varphi) + \sigma_y \cos^2(\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi), \\ \tau_{r\varphi} = \tau_{xy} \cos(2\varphi) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\varphi). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} \sigma_r = k \ln \left( \frac{r^2 + \sqrt{(r^4 + R^4 \sin^2 \delta)}}{R^2(1 + \cos \delta)} \right) - p - k + \\ + \frac{k \sin(2\varphi) \sqrt{(2B^2 - r^2 \sin 2\varphi)^2 - r^2(1 - \sin 2\varphi)(2r^2 + 4B^2 + 2r(\cos \varphi + \sin \varphi) \sqrt{r^2(1 - \sin 2\varphi) + 4B^2}}}{2B^2 - r^2 \sin 2\varphi}, \\ \sigma_\varphi = k \ln \left( \frac{r^2 + \sqrt{(r^4 + R^4 \sin^2 \delta)}}{R^2(1 + \cos \delta)} \right) - p - k - \\ - \frac{k \sin(2\varphi) \sqrt{(2B^2 - r^2 \sin 2\varphi)^2 - r^2(1 - \sin 2\varphi)(2r^2 + 4B^2 + 2r(\cos \varphi + \sin \varphi) \sqrt{r^2(1 - \sin 2\varphi) + 4B^2}}}{2B^2 - r^2 \sin 2\varphi}, \\ \tau_{r\varphi} = \frac{k \cos(2\varphi) \sqrt{(2B^2 - r^2 \sin 2\varphi)^2 - r^2(1 - \sin 2\varphi)(2r^2 + 4B^2 + 2r(\cos \varphi + \sin \varphi) \sqrt{r^2(1 - \sin 2\varphi) + 4B^2}}}{2B^2 - r^2 \sin 2\varphi} + \\ + \frac{k \sin(2\varphi) r^2 \cos 2\varphi + r(\cos \varphi - \sin \varphi) \sqrt{r^2(1 - \sin 2\varphi) + 4B^2}}{2B^2 - r^2 \sin 2\varphi}. \end{cases}$$

### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.  
 [2] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 136 с.  
 [3] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.

- [4] Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 710 с.
- [5] Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [6] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 724 с.
- [7] Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М. : Физматгиз, 1962. – 432 с.
- [8] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Наука, 1956. – 408 с.
- [9] Чеботарёв, А. С. Интегрирование уравнений плоской деформации одной задачи теории идеальной пластичности / А. С. Чеботарёв // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2007. – № 2.

## APPLICATION OF RIEMANN METHOD IN FLAT STRAIN THEORY OF IDEAL PLASTICITY WITH A CIRCULAR BOUNDARY

*I. N. Zinovyev, A. S. Chebotarev*

*Voronezh State University*

**Abstract.** The paper considers the derivation of sliding line equation by Riemann method for the flat deformation problem in the ideal plasticity theory with the boundary in the form of a quarter of a circle. Solutions for cases both with the boundary friction and without the latter are given in the parametric form.

**Keywords:** sliding line, Riemann method, plasticity, exact solutions, tensions, yield strength.

*Зиновьев Илья Николаевич*

*студент 3 курса факультета ПММ, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: bekiz@email.ru*

*Чеботарёв Андрей Сергеевич*

*кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: xebe@amm.vsu.ru*

*Zinovyev, Ilya Nikolaevich*

*Student, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

*Chebotarev, Andrey Sergeevich*

*Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University, Voronezh*

В. Г. Зубчанинов

## ОБОВЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ И НЕПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ СПЛОШНЫХ СРЕД

*Тверской государственный технический университет*

**Аннотация.** Представлена новая форма критерия пластичности и пластического течения, описывающая как состояния полной, так и неполной пластичности в пространственных и плоских задачах.

**Ключевые слова:** инварианты тензоров, напряжения, деформации, критерии пластичности, полная и неполная пластичность.

УДК: 539.3

**Введение.** Теория пластических сред является одним из фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела. Образование пластических деформаций при нагружении металлов связано в основном со сдвиговым характером их деформирования и течения. В других средах, например в грунтах, необратимые деформации могут возникать за счет деформаций всестороннего сжатия. Еще Г. Стокс (1845 г.) отметил [1], что теория упругости и пластичности должны быть основаны на результатах физических опытов, а не только на теоретических гипотезах. Он заметил, что существуют два типа *упругости*: одна имеет место тогда, когда тело подвергается всестороннему равномерному сжатию, после которого тело стремится восстановить свой объем, другая *упругость* стремится восстановить свою форму. Все тела в разной степени обладают свойствами упругости, пластичности и вязкости. Металлы обладают заметно этими свойствами. Механики-пластичники первыми заметили сдвиговый характер пластического деформирования и упругий характер объемного деформирования. На это обратил внимание Треска в своих опытах по штамповке и выдавливанию свинца (1864 г.). При этом он обратил внимание на то, что твердые тела могут течь в условиях нормальных температур подобно вязким жидкостям при достижении максимальным касательным напряжением некоторого предельного физического значения  $k$ . По существу, в исследованиях Треска наблюдалось явление сверхпластичности, связанное с ползучестью и измельчением структуры металлов. Эти исследования открыли широкую дорогу для применения теории пластичности идеально пластических материалов в технологических задачах и задачах о *предельных состояниях* в механике деформируемых твердых и сплошных сред, теории сооружений и др. Современная механика твердого тела не в состоянии учесть в равной степени все механические свойства тел и поэтому понятие идеального упругопластического материала является довольно грубой, но все же методологически оправданной идеализацией реальной сплошной среды и имеет большое практическое значение, является хорошим приближением для целого ряда важных технологических инженерных задач и задач предельного состояния сред и сооружений.

Основы теории идеально пластичности были заложены Треска, Сен-Венаном, Мизесом, Генки, Хааром, Карманом и получили развитие в трудах Леви, Прандтля, Рейсса, Роша,

Эйхингера, Надаи, Лоде, Прагера, Хоэнмезера, Хилла, Ильюшина А. А., Соколовского В. В., Качанова Л. М., Христиановича С. А., Шемякина Е. И., Ишлинского А. Ю., Ивлева Д. Д. и других выдающихся ученых [1–12].

Хааром и Карманом в теории идеальной пластичности были введены понятия *полной и неполной пластичности* материалов [2]. Особенности этих состояний весьма существенны и имеют фундаментальное значение в теории пластичности. В состоянии полной пластичности в материале создаются наиболее благоприятные условия для пластического течения. Прагер [2] для этого состояния ввел понятие *свободного пластического течения*. Это состояние реализуется только при простом пропорциональном нагружении. В состоянии неполной пластичности в одном из направлений имеет место упругое деформирование, а в других — пластическое течение. Для пространственных задач в таком состоянии пластическое течение не может быть свободным. Переход среды из упругого состояния в пластическое описывается критерием Треска–Сен-Венана, а материал из начально изотропного становится квази простым со слабой деформационной анизотропией.

Для таких задач в условиях неполной пластичности в силу их статической определенности свободное пластическое течение возможно. Соотношения теории пластического течения Сен-Венана–Мизеса правильно воспроизводят свободные деформации в мягких металлах.

Так что же это за состояния полной и неполной пластичности, которым так много внимания уделяется в работах Д. Д. Ивлева?! И это правильно.

Научные исследования Дюиса Даниловича Ивлева посвящены в основном математической теории идеально пластических сред в механике деформируемого твердого тела [7–10]. Одним из главных достижений этих исследований в условиях полной пластичности является доказательство того, что основные уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности образуют статически определенную систему, принадлежащую к гиперболическому типу. В результате им была построена общая теория идеальной пластичности сплошных сред и материалов с использованием единого математического аппарата статически определенных уравнений гиперболического типа, которая соответствует сдвиговому деформированию сплошных сред. Работы Д. Д. Ивлева внесли фундаментальный вклад в развитие математической теории идеально пластических сред. Его работы лаконичны, затрагивают существо возникающих проблем и пути их решения, оригинальны и значимы. Профессор Д. Д. Ивлев создал крупные региональные научные школы в области теории предельных состояний и идеальной пластичности сплошных сред и конструкций в Воронеже, Чебоксарах. Это не каждому дано. Его ученики работают во многих научных центрах. Механики-пластичники благодарны Д. Д. Ивлеву за создание замечательного научного журнала «Механика предельных состояний» в Чувашском государственном педагогическом университете, столь необходимого сегодня для развития теории пластичности в России. Он вполне достоин быть российским межвузовским научным журналом.

В настоящее время Дюис Данилович Ивлев является крупнейшим ученым в области современной теории идеально пластических тел и сред, талант которого далеко продвинул вперед идеи основоположников этого фундаментального научного направления в механике деформируемого твердого тела и теории пластичности.

**1. Инварианты напряженно-деформированного состояния сплошных сред.** Напряженно-деформированное состояние (НДС) частицы тела сплошной среды, характеризуемое тензорами напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  можно разложить на состояния, характеризующиеся шаровыми тензорами и тензорами-девиаторами с напряжениями и деформациями

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где

$$\sigma_0 = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3, \quad \varepsilon_0 = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}/3 \quad (2)$$

– модули шаровых тензоров соответственно (первые инварианты),  $\delta_{ij}$  – символ Кронеккера.

Главные напряжения  $\sigma_k$ ,  $S_k$  и главные удлинения  $\varepsilon_k$ ,  $\Theta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) тензоров определяются формулами [1, 13]

$$\begin{cases} S_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos \varphi = \frac{2}{3}(T_{12} + T_{13}), \\ S_2 = \sigma_2 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = \frac{2}{3}(T_{21} + T_{23}), \\ S_3 = \sigma_3 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{2}{3}(T_{31} + T_{32}), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Theta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Theta \cos \psi = \frac{1}{3}(\Gamma_{12} + \Gamma_{13}), \\ \Theta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Theta \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \psi\right) = \frac{1}{3}(\Gamma_{21} + \Gamma_{23}), \\ \Theta_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Theta \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \psi\right) = \frac{1}{3}(\Gamma_{31} + \Gamma_{32}), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{cases} T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right), \\ T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin \varphi, \\ T_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right), \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \sqrt{2}\Theta \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \psi\right), \\ \Gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \sqrt{2}\Theta \sin \psi, \\ \Gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \sqrt{2}\Theta \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \psi\right), \end{cases} \quad (6)$$

– главные касательные напряжения и главные сдвиги,

$$\begin{cases} \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2}, \\ \Theta = \sqrt{\Theta_{ij}\Theta_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{13}^2}, \end{cases} \quad (7)$$

– модули девиаторов напряжений и деформаций (вторые инварианты),

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{6}|S_{ij}|}{\sigma^3}\right), \\ \psi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{6}|\Theta_{ij}|}{\Theta^3}\right), \end{cases} \quad (8)$$

– углы вида напряженного и деформированного состояний на девиаторной плоскости соответственно.

Если объемная деформация упруга, то

$$\theta = \delta_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (9)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

– модуль упругой деформации Бриджмена,  $E$  – продольный модуль Эйлера-Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

В этом случае пластическая деформация носит *сдвиговый характер*.

Рассмотрим сдвиговое пространственное напряженное состояние, при котором все нормальные напряжения равны нулю, но касательные напряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – различны. Инварианты при таком напряженном состоянии

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma = \sqrt{2}\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2}, \quad J_3 = |S_{ij}| = 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}. \quad (10)$$

Угол вида формоизменения  $\varphi$  определяется из соотношения (8)

$$\cos 3\varphi = 3\sqrt{6} \frac{|S_{ij}|}{\sigma^3} = \frac{6\sqrt{6}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}}{\sigma^3}. \quad (11)$$

Главные нормальные напряжения определяются по формулам (3), а главные касательные напряжения – по формулам (4).

Если одно из касательных напряжений  $\sigma_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ), то  $\cos 3\varphi = 0$ ,

$$\varphi = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ.$$

В этом случае одно из главных нормальных напряжений обращается в нуль, а два других равны  $\pm\sigma/\sqrt{2}$  и противоположны по знаку, т.е. приводят к состоянию плоского чистого сдвига с изменяющимся положением главных осей. Одно из главных касательных напряжений в этих точках  $T_{\max} = \sigma/\sqrt{2}$ , а два других по модулю  $|T_{ij}| = \sigma/2\sqrt{2}$ . Такое напряженное состояние встречается в задачах кручения призматических стержней, которое к плоским задачам отнести нельзя.

Если, например,  $\sigma_{23} = 0$ , то главные нормальные напряжения

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_2 = 0,$$

а главные касательные напряжения

$$T_{12} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}, \quad T_{23} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}, \quad T_{13} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = T_{\max}.$$

Положение второй главной оси определяется направляющими косинусами

$$l_1 = 0, \quad l_2 = -\frac{\sqrt{2}\sigma_{13}}{\sigma} = -\sin \alpha, \quad l_3 = \frac{\sqrt{2}\sigma_{12}}{\sigma} = \cos \alpha,$$

т.е. главная ось 2 ортогональна к координатной оси  $x_1$  и повернута относительно этой оси на угол  $\alpha$ , а две другие расположены в плоскости, повернутой около оси  $x_1$  также на угол  $\alpha$ . При этом направляющие косинусы первой главной оси

$$l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l_2 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma}, \quad l_3 = \frac{\sigma_{13}}{\sigma},$$

а сама она повернута в данной плоскости около второй главной оси на угол  $45^\circ$ .

Таким образом, рассматриваемое сложное напряженное состояние двойного сдвига хотя и приводится формально к чистому плоскому сдвигу с касательными напряжениями  $T_{\max} = \sigma/\sqrt{2} = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}$ , но процесс нагружения может быть сложным (непропорциональным). Такого типа нагружение называют *квазипростым процессом нагружения*. Вид напряженного состояния не изменяется в силу  $\sigma_0 = 0$  и  $J_3 = |S_{ij}| = 0$ . Однако, траектория деформирования в линейном пространстве является криволинейной, т.е. сложной. Для такого состояния имеет место *постулат изотропии*, согласно которому ортогональные преобразования вращения и отражения позволяют рассматриваемый процесс считать приближенно эквивалентным растяжению в состоянии полной пластичности. Это обстоятельство будет использовано нами при определении сдвиговых констант в пространственных и плоских задачах.

В теории НДС важное значение имеют два вида НДС – *пространственный и плоский чистые сдвиги*. При пространственном чистом сдвиге все нормальные напряжения равны нулю, а касательные  $\sigma_{ij} = \tau$  ( $i \neq j$ ). При этом главные нормальные напряжения  $\sigma_1 = 2\tau$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$ ,  $\sigma_0 = 0$ , а главные касательные напряжения

$$T_{\max} = T_{12} = T_{13} = 3\tau/2, \quad T_{23} = 0. \quad (12)$$

При плоском чистом сдвиге в одной из координатных плоскостей, например  $x_1, x_3$ , действуют главные нормальные напряжения  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_0 = 0$ , а главные касательные напряжения

$$T_{\max} = T_{13} = \tau, \quad T_{12} = T_{13} = \tau/2. \quad (13)$$

Если на напряженное состояние пространственного чистого сдвига наложить всестороннее среднее напряжение  $\sigma_0 = \tau$ , то получим напряженное состояние чистого растяжения  $\sigma_1 = 3\tau$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Если на напряженное состояние плоского чистого сдвига наложить в той же плоскости напряжения  $\sigma_0 = \tau$ , то также получим напряженное состояние простого растяжения  $\sigma_1 = 2\tau$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Однако, при наложении всестороннего объемного напряжения  $\sigma_0 = \tau$ , мы естественно не получим чистого растяжения, что весьма существенно при пластическом деформировании.

**2. Критерии пластичности Треска–Сен-Венана и Мизеса и состояния полной и неполной пластичности.** Исторически первым и широко используемым критерием текучести материалов является критерий Треска–Сен-Венана

$$T_{\max} = T_{mn} = \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} = k \quad (m < n; m, n = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Согласно этому критерию переход материала из упругого состояния в пластическое происходит тогда, когда при любом пространственном НДС одно из главных касательных напряжений достигает некоторого предельного напряжения  $k$ . При этом нигде не оговаривается, сохранится ли это предельное напряжение в плоских задачах. В некоторых практически важных задачах удастся установить, какое из главных касательных напряжений является наибольшим, а какое наименьшим. Однако, в общем случае заранее неизвестно, какое из трех главных касательных напряжений будет наибольшим. В этом случае условие (14) Хаар и Карман записали в виде [2]

$$(T_{12}^2 - k^2)(T_{23}^2 - k^2)(T_{13}^2 - k^2) = 0. \quad (15)$$

В этой же работе они ввели в теорию пластичности важные понятия *полной и неполной пластичности*. Если в (15) все множители отрицательны, то материал среды находится в упругом состоянии и имеет место закон Гука. Если в (15) два множителя обращаются в нуль, то на двух площадках скольжения главные касательные напряжения достигают максимального значения  $T_{\max} = k$ , а третье напряжение  $T_{mn} = 0$ . Такое состояние среды было названо *полным или вполне пластическим* состоянием. Если в (15) только один множитель обращается в нуль, а два других отрицательны, то одно из главных касательных напряжений максимально и достигает предельного значения  $T_{\max} = k$ , а два других  $T_{mn} < k$ . Такое состояние было названо в [2] *полупластическим или неполным пластическим*. Ниже мы дадим несколько иное толкование состояниям полной и неполной пластичности, приводящим к тем же и новым результатам.

Другим широко известным в расчетной практике критерием пластичности является критерий Мизеса [2]. На основании критерия Треска (14) им было предложено считать, что в упругом состоянии все главные касательные напряжения

$$|T_{ij}| \leq k \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (16)$$

Мизес рассмотрел вместо ортогонального пространства главных нормальных напряжений  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) Хейя ортогональное пространство главных касательных напряжений  $\tau_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), обозначив

$$\tau_1 = T_{23}, \quad \tau_2 = T_{31}, \quad \tau_3 = T_{12} \quad (17)$$

и в нем – девиаторную плоскость

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad (T_{23} + T_{31} + T_{12} = 0). \quad (18)$$

В этом пространстве равенства (16) представляют собой куб. При пересечении этого куба с плоскостью (18) образуется правильный шестиугольник, который представляет собой геометрическое изображение на девиаторной плоскости (18) критерия Треска–Сен-Венана (16). Опираясь на идею Хаара и Кармана о том, что в состоянии полной пластичности два главных касательных напряжения равны предельному значению  $T_{\max} = k$ , а одно из них  $T_{ij} = 0$ , Мизес этот правильный шестиугольник заменяет приближенно описывающей его окружностью радиуса  $R = \sqrt{2}k$ , т.е.

$$T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2 = 2k^2. \quad (19)$$

Этот же результат можно получить, рассматривая пространство главных нормальных напряжений  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) Хейя либо пространство главных нормальных напряжений тензора-девиатора напряжений  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). В этом случае получим вместо (19) для модуля девиатора выражение

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma^T \quad (20)$$

или

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2} = \sigma^T, \quad (21)$$

где предельное значение модуля-девиатора напряжений

$$\sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T, \quad \sigma_T = 2k, \quad (22)$$

$\sigma_T$  – предел текучести при растяжении.

В пространстве главных нормальных напряжений Хейя условие пластичности Мизеса (20) либо (21) изображается цилиндром радиуса  $R = \sigma^T$  с гидростатической осью, равнонаклоненной к главным осям, а условие Треска–Сен-Венана – шестигранной правильной призмой Кулона, вписанной в этот цилиндр. На девиаторной плоскости, ортогональной гидростатической оси, условие Мизеса изображается окружностью радиуса  $R = \sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$ , а условие Треска–Сен-Венана – вписанным в эту окружность правильным шестиугольником. Точки их соприкосновения, характеризуемые углами вида напряженного состояния

$$\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ,$$

названы нами *особыми точками полной пластичности*. Аналогичные построения имеют место в пространстве главных напряжений  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) тензора-девиатора напряжений.

Возвратимся теперь к понятиям *полной и неполной пластичности* и их связи с критериями пластичности. Назовем состоянием *полной пластичности* среды или материала такое, при котором во всех частицах реализуется напряженное состояние пространственного чистого сдвига, при котором все касательные напряжения  $\sigma_{ij} = \tau$  ( $i \neq j$ ) достигают некоторого предельного значения  $k_*$ , т.е.

$$\sigma_{ij} = \tau = k_* \quad (i \neq j), \quad (23)$$

а модуль девиатора напряжений в силу того, что в этом случае

$$T_{\max} = T_{12} = T_{13} = \frac{3k_*}{2} = k, \quad T_{23} = 0, \quad (24)$$

равен

$$\sigma = \sigma^T = \sqrt{6}k_* = \sqrt{\frac{2}{3}}(2k). \quad (25)$$

Если на НДС пространственного чистого сдвига наложить всестороннее напряжение  $\sigma_0 = \tau$ , то получим напряженное состояние простого растяжения

$$\sigma_1 = 3\tau, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

При этом в материале сохранится состояние полной пластичности, а модуль девиатора напряжений будет равен

$$\sigma = \sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T. \quad (26)$$

Сравнивая (25), (26), получаем важное соотношение

$$\sigma_T = 3k_* = 2k, \quad (27)$$

откуда постоянные  $k_*$  и  $k$  могут быть выражены через предел текучести  $\sigma_T$

$$k = \frac{\sigma_T}{2}, \quad k_* = \frac{\sigma_T}{3}. \quad (28)$$

Однако, Мизес оказался в своем предположении не совсем точен. При плоском чистом сдвиге возникает только одно напряжение  $\tau$ . Следовательно, в предельном состоянии это  $\tau = k_0$ , где мы иначе обозначили предельное напряжение при плоском чистом сдвиге в отличие от  $T_{\max} = k$  при пространственном чистом сдвиге. Это предельное значение  $k_0$  легко определяется из опыта на кручение тонкостенного трубчатого образца. В то же время предельное значение  $k$  также легко, но косвенно определяется из опыта на растяжение посредством полученных формул (28).

При плоском сдвиге главные нормальные напряжения  $\sigma_1 = -\sigma_3 = k_0$ ,  $\sigma_2 = 0$ , а главные касательные напряжения  $T_{12} = T_{23} = k_0/2$ ,  $T_{13} = k_0$ , т.е.

$$T_{\max} = T_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k_0. \quad (29)$$

Модуль девиатора в этом же предельном состоянии

$$\sigma = \sqrt{2}k_0. \quad (30)$$

С другой стороны, в предельном состоянии при чистом растяжении  $\sigma_1 = \sigma_T$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  и модуль девиатора определяется формулой (26). Сравнивая (26) и (30) для модуля девиатора, получаем

$$k_0 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_T = \sqrt{3}k_0. \quad (31)$$

Таким образом, между критериями Мизеса и Треска–Сен-Венана обнаруживается принципиальное различие, хотя это различие и невелико, но является фундаментальным для теории пластичности. Оно указывает на то, что вид напряженного состояния материалов влияет на их механическое состояние. В работе [11] Хилл отметил, что в опытах Треска по выдавливанию металлов через матрицы распределение напряжений было неравномерным, а их анализ достаточно грубым. Это справедливое замечание дает нам повод выдвинуть гипотезу о том, что предельное напряжение в условии пластичности Треска–Сен-Венана зависит от вида напряженного состояния, связанного с состояниями полной и неполной пластичности материалов.

**3. Математическая модель неполного пластического состояния.** Основные уравнения этой модели были предложены Хааром и Карманом [2]. Дальнейшее развитие этого вопроса реализовано в работах Е. И. Шемякина и автора [2, 13]. В общем случае пространственного напряженного состояния и неполного пластического деформирования одно из главных касательных напряжений максимально  $T_{\max} = k$ , а два других  $T_{mn} < k$ . Главные нормальные

напряжения  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) можно представить в трех вариантах. Приведем лишь один из них [13]

$$\begin{cases} \sigma_1 = \lambda\theta + G(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + k, & \sigma_3 = \lambda\theta + G(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - k, \\ \sigma_2 = \lambda\theta + 2G\varepsilon_2, & \sigma_0 = K\theta, \end{cases} \quad (32)$$

где  $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  – относительное изменение объема,

$$\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (33)$$

– упругие модули Ламе, сдвига Кулона, Бриджмена,  $E$  – продольный модуль Эйлера–Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона соответственно.

Для главных касательных напряжений имеем

$$T_{12} = \frac{k}{2} - \frac{3G}{2}\Theta_2, \quad T_{23} = \frac{k}{2} + \frac{3G}{2}\Theta_2, \quad T_{13} = T_{\max} = k, \quad (34)$$

где

$$\Theta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_0 = \frac{2}{3} \left[ \varepsilon_2 - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \right], \quad S_2 = 2G\Theta_2. \quad (35)$$

Модуль девиатора

$$\sigma = \sqrt{2}\sqrt{k^2 + 3(G\Theta_2)}. \quad (36)$$

При  $\Theta_2 = 0$  получаем случай плоского чистого сдвига

$$T_{12} = \frac{k}{2}, \quad T_{23} = \frac{k}{2}, \quad T_{13} = k, \quad \sigma = \sqrt{2}k. \quad (37)$$

Аналогичные соотношения можно получить для случаев упругого деформирования в первом и третьем главных направлениях.

Из (36) с учетом (35) следуют соотношения

$$\begin{cases} \sigma = \pm \frac{\sqrt{2}k}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\varphi)} & (0^\circ < \varphi < 60^\circ, 180^\circ < \varphi < 240^\circ), \\ \sigma = \pm \frac{\sqrt{2}k}{\sin\varphi} & (60^\circ < \varphi < 120^\circ, 240^\circ < \varphi < 300^\circ), \\ \sigma = \pm \frac{\sqrt{2}k}{\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)} & (120^\circ < \varphi < 180^\circ, 300^\circ < \varphi < 360^\circ). \end{cases} \quad (38)$$

Два последних соотношения модели выписаны для случая, когда материал деформируется упруго в первом и третьем направлениях.

Эти же формулы можно получить непосредственно из соотношений (4), положив в них  $\sigma = \sqrt{2}k$ , что подтверждает правильность математической модели неполного пластического состояния среды.

Назовем особыми точками неполной пластичности на окружности Мизеса те, которые отвечают углам вида

$$\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ.$$

В этих точках для плоских задач внешний шестиугольник касается окружности Мизеса, причем  $\sigma_T = \sqrt{3}k_0$ ,  $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T = \sqrt{2}k_0$ .

**4. Общий критерий пластичности.** Хаар и Карман по существу предложили общий критерий сдвиговой пластичности, зависящий от двух инвариантов напряженного состояния – второго и третьего инвариантов тензора-девиатора напряжений в виде [2]

$$(T_{12}^2 - k^2)(T_{23}^2 - k^2)(T_{13}^2 - k^2) = 0. \quad (39)$$

Исторически критерий Треска-Сен-Венана (14) был первым, а критерий Мизеса (19) был вторым. Однако, критерий (39) имеет интересное продолжение на современном этапе развития теории пластичности. Перемножая скобки в (39) и используя соотношения (4), содержащее инварианты  $\sigma$  и  $\varphi$ , получаем соотношение общего критерия пластичности

$$\sin^2 3\varphi\sigma^6 - k^2[18\sigma^4 - 96k^2\sigma^2 + 128k^4] = 0 \quad (40)$$

или в свернутом виде

$$\sin^2 3\varphi\sigma^6 - 18k^2 \left[ \sigma^2 - \left( \sqrt{\frac{8}{3}}k \right)^2 \right]^2 = 0. \quad (41)$$

Радиус окружности Мизеса на девиаторной плоскости

$$R = \sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T. \quad (42)$$

Критерии (40) либо (41) объединяют в едином соотношении критерии неполной пластичности Треска-Сен-Венана (14) и критерий полной пластичности (21) Мизеса в едином соотношении. Для пространственных задач

$$\sigma_T = 2k. \quad (43)$$

Используя (42), (43), соотношение (41) для этого типа задач преобразуем к виду

$$\sin^2 3\varphi\sigma^6 - 18k^2[\sigma^2 - (\sigma^T)^2]^2 = 0. \quad (44)$$

Если материал находится в состоянии полной пластичности, то согласно критерию Мизеса  $\sigma = \sigma^T$  и из (44) следует  $\sin^2 3\varphi = 0$ , откуда находим углы вида напряженного состояния формоизменения

$$\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ, \quad (45)$$

которым на окружности Мизеса соответствуют особые точки полной пластичности и в которых правильный шестиугольник Треска-Сен-Венана-Мизеса соприкасается с окружностью изнутри.

Если материал находится в условиях неполной пластичности в пространственных задачах, то  $\sigma < \sigma^T$  и лучи, проведенные в девиаторной плоскости под углами  $\varphi$ , не проходят через особые точки полной пластичности и лежат на сторонах правильного шестиугольника Треска-Сен-Венана. В этом случае из (40), (44) можно найти модуль  $\sigma < \sigma^T$ . Для облегчения этой задачи можно вместо (40) использовать соотношения для каждой из сторон правильного шестиугольника Треска, соответствующих условиям  $T_{ij} = \pm k$ , т.е. условиям (38). В особых точках полной пластичности, согласно (42), (43) все значения  $\sigma = R = \sqrt{8/3}k$ .

Для плоских задач мы ввели иное значение предельного напряжения  $k = k_0$ . В этом случае вместо (41) получаем

$$\sin^2 3\varphi - 18k_0^2 \left[ \sigma^2 - \left( \frac{2\sigma^T}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]^2 = 0, \quad (46)$$

что соответствует расширению на девиаторной плоскости правильного шестиугольника Треска-Сен-Венана на 15,5% (рис. 1).

При этом новый шестиугольник в точках, соответствующих *особым точкам неполной пластичности* для плоских задач, касается окружности Мизеса при значениях угла вида  $\varphi$

$$\varphi = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ. \quad (47)$$

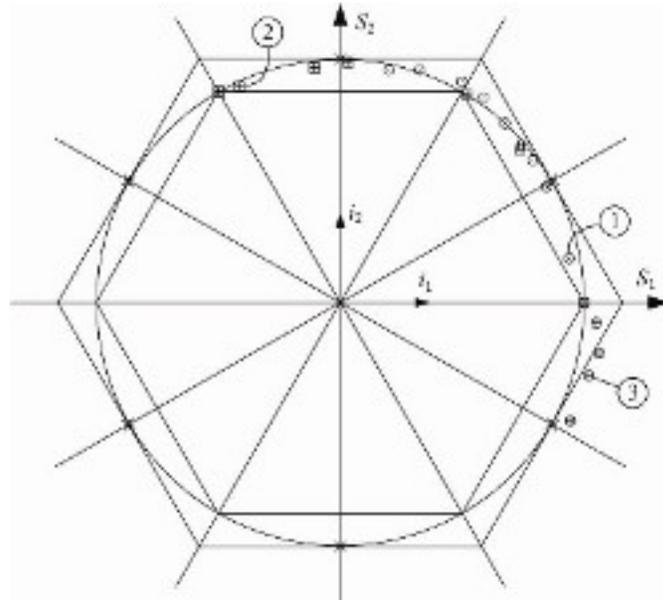


Рис. 1.

На рис. 1 на девиаторной плоскости в базе  $\{\hat{i}_k\}$  ( $k = 1, 2$ ) А. А. Ильюшина изображены окружность Мизеса и два правильных шестиугольника Треска–Сен-Венана, а также экспериментальные данные А. М. Жукова для стали ЭИ415, отмеченные кружками и цифрами 1, хромоникелиевой стали, отмеченные квадратами и цифрами 2, а также Тейлора и Куньи для мягкой стали, отмеченные крестами соответственно. Экспериментальные данные были получены при испытаниях трубчатых образцов, т.е. в условиях плоского напряженного состояния, описываемого внешним шестиугольником Треска–Сен-Венана. Как видно, экспериментальные данные лучше соответствуют внешнему шестиугольнику и соотношению  $k_0 = \sigma_T/\sqrt{3}$ , а также условию пластичности Мизеса.

Новый подход к описанию критериев пластичности, по-видимому, снимает давнюю проблему столетней давности о связи пределов текучести при чистом сдвиге и растяжении в теории пластичности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2003. – 300 с.
- [2] Теория пластичности : сборник статей. – М. : ИЛ, 1948. – 452 с.
- [3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [4] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : ИЛ, 1954. – 647 с.
- [5] *Прагер, В.* Теория идеально пластических тел / В. Прагер, Ф. Ходж. – М. : ИЛ, 1956. – 308 с.
- [6] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [7] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
- [8] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

- [9] *Ивлев, Д. Д.* Механика сплошных сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 446 с.
- [10] *Ивлев, Д. Д.* Механика сплошных сред. Т. 2 : Общие вопросы / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2002. – 448 с.
- [11] *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [12] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 120 с.
- [13] *Зубчанинов, В. Г.* Математические модели полного и неполного пластического деформирования сплошных сред / В. Г. Зубчанинов // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости : сб. статей к 75-летию. – Тверь : ТГТУ, 2007. – С. 24–41.

*V. G. Zubchaninov*

**THE GENERALISED CRITERION OF COMPLETE AND INCOMPLETE  
PLASTICITY OF CONTINUUM**

*Tver State Technical University*

**Abstract.** The new form of criterion of plasticity and the plastic flowing which describes states of complete and incomplete plasticity in spatial and flat problems is presented.

**Keywords:** invariants of tensors, stresses, strains, criteria of plasticity, complete and incomplete plasticity.

*Зубчанинов Владимир Георгиевич*

*доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, г. Тверь*

*e-mail: vgz@rambler.ru*

*Zubchaninov, Vladimir Georgievich*

*Dr. Eng. Sci., Professor, Head of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver*

В. Г. Зубчанинов, Е. Г. Алексева

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

*Тверской государственной технической университет*

**Аннотация.** На основе общей и линеаризованной модели процессов сложного пластического деформирования упрочняющихся материалов [1, 2] приведены численные расчеты по программам базовых испытаний типа смещенного веера ломаных траекторий. Результаты расчетов сравниваются с опытными данными, полученными на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний Тверского государственного технического университета.

**Ключевые слова:** пластичность, сложное нагружение, траектория, моделирование процессов.

УДК: 539.3

**1. Математическая модель.** В теории процессов пластического деформирования [1, 2] тензорам напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , а также их девиаторам с компонентами

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \Theta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad (1)$$

где

$$\sigma_0 = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3, \quad \varepsilon_0 = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}/3 \quad (2)$$

– средние напряжение и деформация,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, в линейных координатных евклидовых пространствах напряжений  $\Sigma_6$  и деформаций  $E_6$  с общим ортонормированным базисом  $\{\hat{i}_k\}$  ( $k = 0, 1, \dots, 5$ ) поставлены в соответствие векторы напряжений и деформаций

$$\bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^0 + \bar{\Theta}, \quad (3)$$

где

$$\bar{S}^0 = S_0\hat{i}_0, \quad \bar{\varepsilon}^0 = \varepsilon_0\hat{i}_0 \quad (4)$$

– векторы в одномерном подпространстве всестороннего растяжения и сжатия,

$$\bar{\sigma} = S_k\hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k\hat{i}_k, \quad (k = 0, 1, \dots, 5) \quad (5)$$

– векторы напряжений и деформаций в пятимерных линейных евклидовых подпространствах девиаторов с компонентами

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, & S_1 = \sqrt{3/2}S_{11}, & S_2 = \sqrt{2}(S_{22} + \frac{1}{2}S_{11}), \\ S_3 = \sqrt{2}S_{12}, & S_4 = \sqrt{2}S_{23}, & S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \Theta_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, & \Theta_1 = \sqrt{3/2}\Theta_{11}, & \Theta_2 = \sqrt{2}(\Theta_{22} + \frac{1}{2}\Theta_{11}), \\ \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, & \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, & \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{13}. \end{cases} \quad (6)$$

Концы векторов  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\Theta}$  описывают во времени в  $\Sigma_5$  и  $E_5$  траектории нагружения и деформирования, которые отображают в этих пространствах процессы нагружения и деформирования при формоизменении.

Процессы считаются заданными, если в каждой частице тела с координатами  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) в физическом пространстве, напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  заданы как непрерывные функции времени  $t$ , температуры  $T$  и других нетермомеханических параметров  $\beta$ . Это значит, что переменные векторы напряжений и деформаций, описывающие траектории и процессы, должны зависеть от инвариантов тензоров, параметров кривизны и кручения траекторий  $\varkappa_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), температуры  $T$  и параметров  $\beta$ .

Образом процесса деформирования в  $E_5$  называется совокупность траектории с длиной дуги  $s$ , и построенных в каждой ее точке векторами  $\bar{\sigma}$ ,  $d\bar{\sigma}$  и приписанных к ним параметров  $\varepsilon_0$ ,  $T$ ,  $\beta$ . Аналогично вводится понятие образа процесса в  $\Sigma_5$  с длиной дуги траектории нагружения  $\Sigma$ .

В соответствии с частным постулатом изотропии А.А. Ильюшина [1], общей теорией определяющих соотношений и постулата физической определенности [2] векторы напряжений и деформаций связаны уравнением

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1\hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3\hat{p}_3, \quad (7)$$

где

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \cos \vartheta_1\hat{p}_1 + \sin \vartheta_1(\cos \vartheta_2\hat{p}_2 + \sin \vartheta_2\hat{p}_3) \quad (8)$$

– единичный вектор напряжений,  $\vartheta_m$  ( $m = 1, 2$ ) – его полярные сферические координаты в репере Френе  $\{\hat{p}_k\}$  ( $k = 1, 2, 3$ ), для которых

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\varkappa_2} \left[ \varkappa_1 \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{d^2\bar{\Theta}}{ds^2} \right) \right], \quad (9)$$

$$\begin{cases} M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, & P = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}, \\ M_k = M_k \{ \varepsilon_0, \Theta, \varphi, \varkappa_1, \varkappa_2, T, \beta \}_{s(t)}, & (k = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (10)$$

– функционалы процесса ( $M_2 = 0$ ),  $\varphi$  – угол вида деформированного состояния формоизменения, определяемый соотношением

$$\cos 3\varphi = 3\sqrt{6} |\Theta_{ij}| / \Theta^3, \quad (11)$$

$$\varkappa_1 = \frac{d^2\Theta_k}{ds^2} \frac{d^2\Theta_k}{ds^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{\varkappa^2} \begin{vmatrix} \Theta'_1 & \Theta'_2 & \Theta'_3 \\ \Theta''_1 & \Theta''_2 & \Theta''_3 \\ \Theta'''_1 & \Theta'''_2 & \Theta'''_3 \end{vmatrix} \quad (12)$$

– параметры кривизны и кручения.

Для определения углов сближения  $\vartheta_1$  и депланации  $\vartheta_2$  имеют место дифференциально нелинейные уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} [-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2], \\ \sin \vartheta_1 \left( \frac{d\vartheta_2}{ds} + \varkappa_2 \right) = \varkappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2. \end{cases} \quad (13)$$

При отображении процессов в пространстве напряжений должны быть заданы компоненты  $\mathcal{E}_k$  деформации как функции длины дуги  $s$  либо некоторого обобщенного параметра прослеживания процесса  $t$ . В этом случае для

$$\hat{p}_n = \alpha_{nk} \hat{l}_k, \quad (n, k = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Используя правило дифференцирования сложных функций, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1k} = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{\dot{s}}, \quad \alpha_{2k} = \frac{1}{\mathfrak{a}_1(\dot{s})^4} \left( \dot{s}^2 \ddot{\mathcal{E}}_k - (\dot{s}\ddot{s}) \dot{\mathcal{E}}_k \right), \\ \alpha_{31} = \frac{1}{\mathfrak{a}_1(\dot{s})^3} \left( \dot{\mathcal{E}}_2 \ddot{\mathcal{E}}_3 - \ddot{\mathcal{E}}_2 \dot{\mathcal{E}}_3 \right), \quad \alpha_{32} = \frac{1}{\mathfrak{a}_1(\dot{s})^3} \left( \dot{\mathcal{E}}_3 \ddot{\mathcal{E}}_1 - \ddot{\mathcal{E}}_3 \dot{\mathcal{E}}_1 \right), \\ \alpha_{33} = \frac{1}{\mathfrak{a}_1(\dot{s})^3} \left( \dot{\mathcal{E}}_1 \ddot{\mathcal{E}}_2 - \ddot{\mathcal{E}}_1 \dot{\mathcal{E}}_2 \right), \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt}, \quad \dot{s}^2 = \dot{\mathcal{E}}_k \dot{\mathcal{E}}_k, \quad \dot{s}\ddot{s} = \dot{\mathcal{E}}_k \ddot{\mathcal{E}}_k. \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{a}_1^2 = \frac{1}{(\dot{s})^2} \left( \dot{s}^2 \ddot{\mathcal{E}}_k - (\dot{s}\ddot{s}) \dot{\mathcal{E}}_k \right)^2, \\ \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{\mathfrak{a}_1^2(\dot{s})^6} \left| \begin{array}{ccc} \dot{\mathcal{E}}_1 & \dot{\mathcal{E}}_2 & \dot{\mathcal{E}}_3 \\ \ddot{\mathcal{E}}_1 & \ddot{\mathcal{E}}_2 & \ddot{\mathcal{E}}_3 \\ \ddot{\mathcal{E}}_1 & \ddot{\mathcal{E}}_2 & \ddot{\mathcal{E}}_3 \end{array} \right| \end{array} \right. \quad (16)$$

Для углов  $\vartheta_m$  и угла соприкосания  $\psi$  имеем формулы

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 = \frac{S_k \alpha_{1k}}{\sigma}, \quad \cos \vartheta_2 = \frac{S_k \alpha_{2k}}{\sigma \sin \vartheta_1}, \\ \sin \psi = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2. \end{array} \right. \quad (17)$$

Определяющее соотношение (7) представляем в виде системы скалярных уравнений

$$\frac{dS_k}{dt} = N \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} + \dot{s} M \frac{S_k}{\sigma} + \frac{M_3}{\mathfrak{a}_2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{a}_1(\dot{s})^4} \left( \dot{s}^2 \ddot{\mathcal{E}}_k - (\dot{s}\ddot{s}) \dot{\mathcal{E}}_k \right) \right\}, \quad (18)$$

где

$$N = M_1 + \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2} M_3. \quad (19)$$

Для аппроксимации функционалов упругопластического деформирования математической модели теории процессов в (19) предлагается использовать следующие выражения

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \Phi(s) + A f^p \Omega(s), \\ M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q e^{-\gamma \Delta s} - \frac{\sigma \mathfrak{a}_1}{\sin \vartheta_1}, \\ M_3 = \sigma \mathfrak{a}_2 \sin \vartheta_1 / \cos \vartheta_2, \end{array} \right. \quad (20)$$

где

$$f = (1 - \cos \vartheta_1) / 2 \quad (21)$$

– функция сложности процесса,  $\Omega$  – функция, описывающая “нырок” напряжений,

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2G}{\sigma^T} (1 - e^{-\alpha s}) & \text{при } 0 \leq s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_* \Delta s + \sigma_* (1 - e^{-\beta \Delta s}) & \text{при } s > s^T, \end{array} \right. \quad (22)$$

– универсальная функция упрочнения,  $A, p, q, \gamma, \beta, \alpha, G, G_*, \sigma_*$  – параметры, определяемые из базовых опытов.

Определяющие соотношения (18) при известных аппроксимациях (19)-(22) могут быть проинтегрированы численно, например методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности при известных начальных условиях задачи Коши.

Для плоских задач  $\vartheta_2 = 0$ ,  $\mathfrak{a}_2 = 0$ ,  $M_3 = 0$ . Определяющие соотношения (18), (13) без учета  $\mathcal{E}_2$  - эффекта примут вид

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = M_1 \frac{d\vartheta_k}{dt} + \dot{s} M \frac{S_k}{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \varkappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1, \quad M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q e^{-\gamma \Delta s}. \quad (24)$$

**2. Линеаризованная модель процессов сложного пластического деформирования.** Дифференциальные уравнения (13) для полярных углов  $\vartheta_1, \vartheta_2$  подстановкой

$$x = t \cos \vartheta_2, \quad y = t \sin \vartheta_2, \quad t = \text{tg}(\vartheta_1/2), \quad (25)$$

приведены к виду [2]

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -nx + \varkappa_2 y - mxy - \frac{\varkappa_1}{2} (1 - x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{ds} = -\varkappa_2 x - ny - \varkappa_1 xy + \frac{m}{2} (1 + x^2 - y^2), \end{cases} \quad (26)$$

где для безразмерных функционалов введены обозначения

$$n(s) = \frac{M_1}{\sigma}, \quad m(s) = \frac{M_3}{\sigma}. \quad (27)$$

Линеаризируя (26), получаем

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -nx + \varkappa_2 y - \frac{\varkappa_1}{2}, \\ \frac{dy}{ds} = -\varkappa_2 x - ny + \frac{m}{2}, \end{cases} \quad (28)$$

где учтено  $\sin \vartheta_m \approx \vartheta_m$ ,  $\cos \vartheta_m \approx 1$ ,  $x = t = \vartheta_1/2$ .

При малом кручении  $\vartheta_2 = 0$ , и из (25), (27) следует  $y = 0$ ,  $m = \varkappa_2 \vartheta_1 = 2\varkappa_2 t$ . Из системы уравнений (28) остается одно

$$\frac{dt}{ds} + n(s)t = -\frac{\varkappa_1(s)}{2}. \quad (29)$$

Используя метод вариации постоянных Коши для однородного уравнения, получаем полное решение неоднородного уравнения (29) в виде

$$t = \left[ C_0 - \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \varkappa_1 \exp \left( \int_{s_0}^s n(s) ds \right) \right] \exp \left( - \int_{s_0}^s n(s) ds \right), \quad (30)$$

где  $C_0$  – произвольная постоянная интегрирования,  $s_0$  – длина дуги в точке излома траектории. Если для функционала  $n(s)$  использовать выражение

$$n(s) = \frac{1}{s} + k, \quad (31)$$

где  $k$  – экспериментально определяемый параметр, то с учетом начального условия  $t(s_0) = t_0$ , находим

$$t = \frac{s_0}{s} e^{-k\Delta s} \left( t_0 - \frac{1}{2s_0} \int_{s_0}^s s \varkappa_1(s) e^{-k\Delta s} ds \right). \quad (32)$$

Если  $\varkappa_1 = \text{const}$ , то из (32) получаем

$$t = \frac{s_0}{s} e^{-k\Delta s} \left[ t_0 - t_* \left( 1 - \frac{1}{ks_0} \right) \right] + t_* \left( 1 - \frac{1}{ks} \right), \quad (33)$$

где обозначено  $t_* = -\varkappa_1/2k = \text{const}$ .

Если считать  $n = k = \text{const}$ , то вместо решения (33) получим для  $\varkappa_1 = 0$  решение

$$t = t_* + (t_0 - t_*) e^{-k\Delta s}. \quad (34)$$

Из (34) следует при  $\Delta s = 0$  начальное значение  $t = t_0$ , а при  $\Delta s \rightarrow \infty$  получаем  $t \rightarrow t_* = \operatorname{tg}(\vartheta_1/2)$ . Этот результат следует также из (33). Следовательно, при деформировании по плоской траектории постоянной кривизны устанавливается стационарный режим, при котором  $\vartheta_1 = \vartheta_1^* = \operatorname{const}$ . В частности, если  $\varkappa_1 = 0$ , то  $t_* = 0$  и вместо (34) получаем

$$t = t_0 e^{-k\Delta s}. \quad (35)$$

При плавном переходе от траектории постоянной кривизны  $\varkappa_1 = \operatorname{const}$  без излома к прямолинейной траектории при  $s = s_0^0$

$$t = t_0^0 e^{-k\Delta s}, \quad (36)$$

где

$$t_0^0 = t_* - (t_0 - t_*) e^{-k(s_0^0 - s_0)}, \quad \Delta s = s - s_0^0. \quad (37)$$

Если траектория обладает средним кручением  $\varkappa_2$  и  $\vartheta_2 \neq 0$ , то  $m \approx 2\varkappa_2 t$ . Система уравнений (28) принимает вид

$$\frac{dt}{ds} + nt = \varkappa_2 y - \frac{\varkappa_1}{2}, \quad \frac{dy}{ds} = -ny, \quad (38)$$

откуда, интегрируя второе уравнение, получаем

$$y = C \exp\left(-\int_{s_0}^s n(s) ds\right). \quad (39)$$

Из условия  $y = y_0 \approx t_0 \vartheta_2^0$  при  $s = s_0$  следует  $C = y_0$ , тогда

$$y = t_0 \vartheta_2^0 \exp\left(-\int_{s_0}^s n(s) ds\right). \quad (40)$$

Из первого уравнения (38) после использования (40) и решения методом вариации постоянных Коши получаем

$$t = \left\{ t_0 \left[ 1 + \vartheta_2^0 \int_{s_0}^s \varkappa_2(s) ds \right] - \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \varkappa_1(s) \exp\left(\int_{s_0}^s n(s) ds\right) ds \right\} \exp\left(-\int_{s_0}^s n(s) ds\right). \quad (41)$$

В частности для (32) находим более общее решение

$$\begin{cases} t = \frac{s_0}{s} e^{-k\Delta s} \left\{ t_0 \left[ 1 + \vartheta_2^0 \int_{s_0}^s \varkappa_2(s) ds \right] - \frac{1}{2s_0} \int_{s_0}^s \varkappa_1(s) s e^{k\Delta s} ds \right\}, \\ \vartheta_2 = \frac{s_0}{s} t_0 \vartheta_2^0 e^{-k\Delta s}, \quad \Delta s = s - s_0. \end{cases} \quad (42)$$

Для траекторий постоянной кривизны и кручения из (42)

$$\begin{cases} t = \frac{s_0}{s} e^{-k\Delta s} \left\{ t_0 \left( 1 + \varkappa_2 \vartheta_2^0 \Delta s \right) - t_* \left( 1 - \frac{1}{ks_0} \right) \right\} + t_* \left( 1 - \frac{1}{ks_0} \right), \\ \vartheta_2 = \frac{s_0}{s} t_0 \vartheta_2^0 e^{-k\Delta s}, \quad \Delta s = s - s_0. \end{cases} \quad (43)$$

При  $s \rightarrow \infty$  из (43) следует  $\vartheta_2 \rightarrow 0$ , т.е. вектор напряжений стремится вернуться в соприкасающуюся плоскость.

Таким образом, для линеаризованной математической модели при активном процессе деформирования функционалы процесса определяются приближенными формулами

$$\begin{cases} M_1 = n(s)\sigma = \sigma \left(k + \frac{1}{s}\right), & M_3 = m(s)\sigma = \sigma \varepsilon_2 \vartheta_1, \\ M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \approx \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1. \end{cases} \quad (44)$$

Полученные результаты позволяют оценить достоверность линеаризации в теории процессов [3].

**3. Моделирование процессов деформирования по плоским ломаным траекториям типа смещенного веера.** Согласно изложенных выше математических моделей, были проведены численные расчеты и экспериментальные исследования трубчатых образцов из стали 45 на автоматизированном комплексе СМ-ЭВМ в лаборатории механических испытаний Тверского государственного технического университета по ломаным траекториям типа смещенного веера. Согласно программе, приведенной на рис. 1, образцы закручивались до значения  $\varepsilon_3^0 = 2\%$ , а затем производился излом на углы  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  и  $180^\circ$ . На втором звене при углах излома  $45^\circ, 90^\circ$  и  $135^\circ$  образцы подвергались одновременному растяжению и кручению.

На рис. 2 представлена опытная диаграмма растяжения материала стали 45 с площадкой текучести, используемого в опытах, а также ее аппроксимация, положенная в основу численных расчетов. Опытные данные отмечены кружочками. В расчетах было принято  $\sigma^T = 320$  МПа,  $s_*^T = 8,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $2G = 1,57 \cdot 10^5$  МПа,  $\beta = 70$ ,  $\alpha = 900$ ,  $\sigma_* = 152$  МПа,  $2G_* = 234$  МПа. Материал с достаточной степенью точности обладал начальной изотропией.

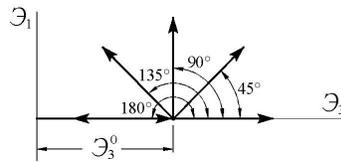


Рис. 1.

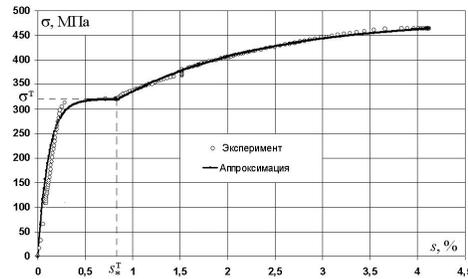


Рис. 2.

На рис 3-5 представлены результаты расчетов и экспериментов при испытании по ломаной траектории деформирования с углом излома  $45^\circ$ .

На рис. 3 приведен отклик в пространстве напряжений, на рис. 5 зависимость  $\vartheta_1 - \Delta s$ , характеризующая векторные свойства материала, а на рис. 4 диаграмма прослеживания процесса деформирования  $\sigma - s$ , практически совпадающая с диаграммой деформирования  $\sigma - \varepsilon$ . Цифрой 1 на рисунках обозначен расчет по общей модели, цифрой 2 – расчет по линеаризованной модели. Как видно, численные расчеты с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности по общей модели достаточно хорошо соответствуют экспериментальным

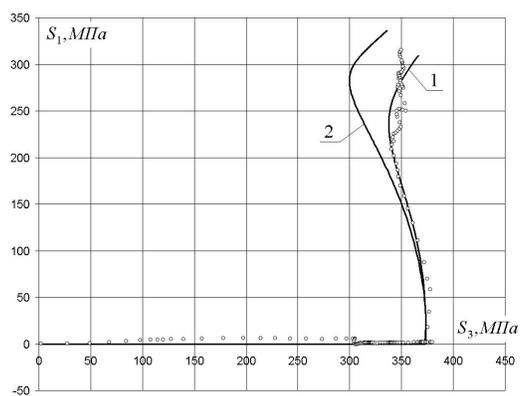


Рис. 3.

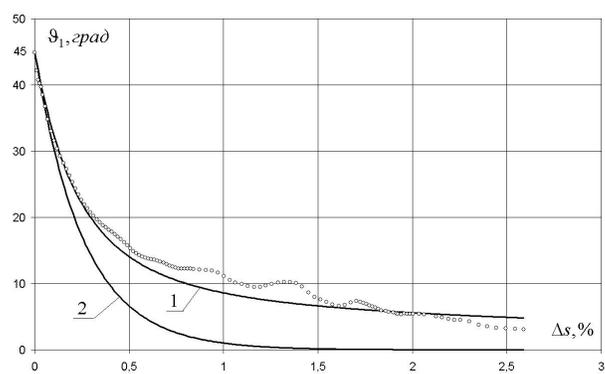


Рис. 4.

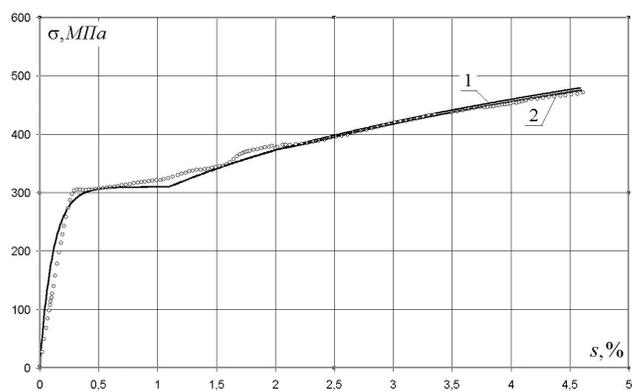


Рис. 5.

данным. В этих расчетах параметры, входящие в аппроксимации функционалов, были подобраны для различных углов излома траектории из условия соответствия экспериментальным данным. Линеаризованная модель дает большие отклонения по векторным свойствам чем общая модель.

На рис. 6-9 представлены результаты расчетов и испытаний трубчатых образцов из той же партии с углом излома  $135^\circ$ . Принципиальное отличие поведения материала в этом испытании состоит в том, что наряду с прямым нырком на диаграмме  $\sigma - s$  (рис. 8) образуется обратный нырок на диаграмме  $\sigma - \Theta$  (рис. 9). Соответствие расчетных и экспериментальных данных, как и в первом случае, лучше для общей математической модели.

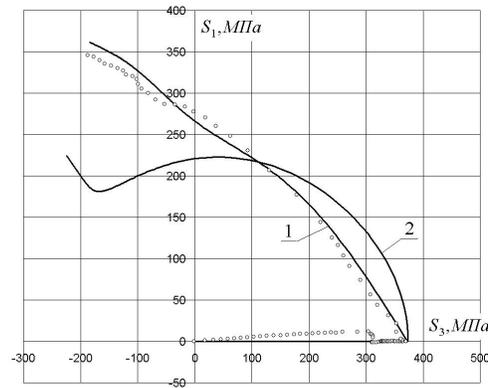


Рис. 6.

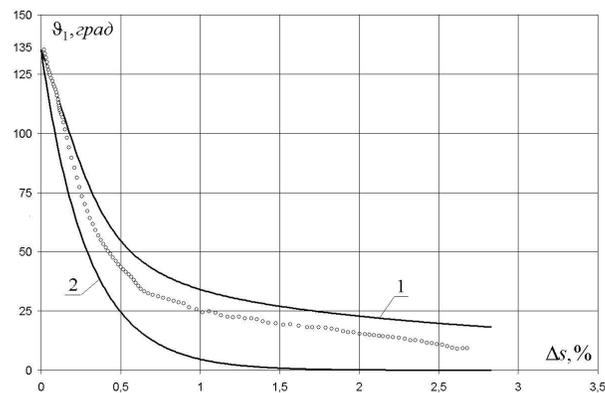


Рис. 7.

На рис. 10 представлена расчетная зависимость по общей модели следа запаздывания материала  $\lambda$  от угла излома траектории. Как видно, след запаздывания существенно зависит от параметра  $\vartheta_1^0$  сложности процесса и не является стабильной характеристикой материала.

Приведенное сопоставление расчетных и экспериментальных данных для двухзвенных ломаных траекторий дает основание считать, что общая математическая модель теории процессов достоверно описывает закономерности поведения материала для данного класса базовых траекторий. Расчеты по линеаризованной модели при показателе сложности процесса  $\vartheta_1^0 \geq 90$  не дают достоверных результатов.

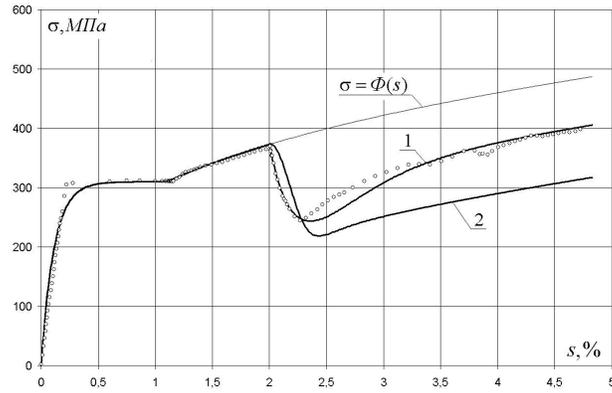


Рис. 8.

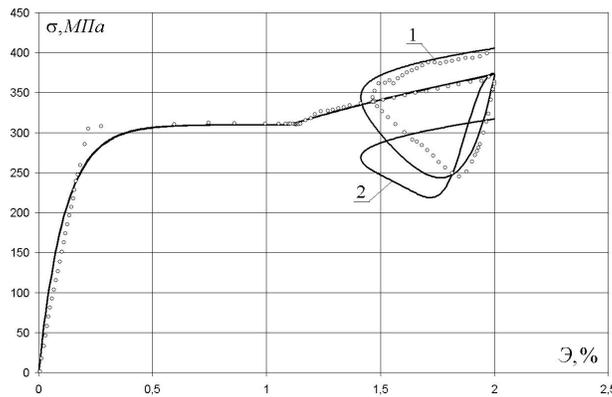


Рис. 9.

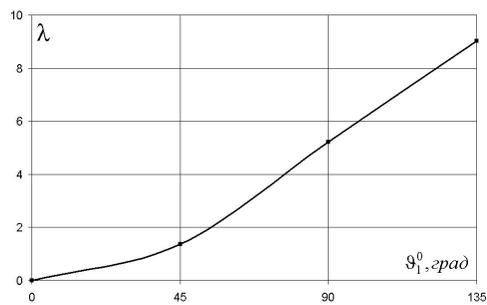


Рис. 10.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин, А. А. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

[2] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2002. – 300 с.

[3] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая модель пластического деформирования материалов при сложном деформировании / В. Г. Зубчанинов // Проблемы прочности и пластичности : межвуз. сб. – Н. Новгород, 2005. – Вып. 67. – С. 5–13.

*V. G. Zubchaninov, E. G. Alekseeva*

## MODELING COMPLEX PROCESSES OF ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF MATERIALS

*Tver State Technical University*

**Abstract.** On the basis of the general and linearized models of processes of complex plastic deformation of hardening materials [1, 2] numerical calculations on the programs of base tests of displaced fan of broken trajectories type are given. The results of calculations are compared with the experimental data received on the automated test complex in the laboratory of mechanical tests of Tver State Technical University.

**Keywords:** plasticity, complex loading, trajectory, modeling complex processes.

*Зубчанинов Владимир Георгиевич*

*доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь*

**e-mail:** [vgz@rambler.ru](mailto:vgz@rambler.ru)

*Алексеева Елена Геннадиевна*

*старший преподаватель кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь*

**e-mail:** [kafsm@yandex.ru](mailto:kafsm@yandex.ru)

*Zubchaninov, Vladimir Georgievich*

*Dr. Eng. Sci., Professor, Head, Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver*

*Alekseeva, Elena Gennadievna*

*Senior Lecturer, Department of Strength of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University, Tver*

Д. Д. Ивлев, Р. И. Непершин

## ДАВЛЕНИЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА НА ОРТОТРОПНОЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

*Московский государственный технологический университет “Станкин”*

**Аннотация.** Рассматривается задача о давлении плоского штампа на ортотропное идеально пластическое полупространство. Зависимость напряжения текучести от направления главного напряжения задается эллипсоидом анизотропии. Угловая точка штампа и прямолинейная граница полупространства порождают центрированный веер прямолинейных характеристик, как и в случае изотропного тела, с аналогичной кинематикой пластического течения. Но давление на штамп существенно зависит от пластической анизотропии.

**Ключевые слова:** идеальная пластичность, плоская задача, ортотропное полупространство, эллипсоид анизотропии, давление плоского штампа.

УДК: 539.374

Анизотропия пластических свойств материала, проявляющаяся в зависимости напряжения текучести от направления, существенно влияет на несущую способность деталей машин и элементов конструкций при контактных нагрузках. Анизотропия может быть как результатом технологии обработки металлов, создающей направленную текстуру, например, после многопереходной прокатки заготовок или направленной кристаллизации слитков, так и результатом естественного волокнистого строения материала.

Анизотропия тонкого листа, полученного прокаткой, существенно влияет на предельную пластичность до разрушения в технологических операциях вытяжки тонкостенных оболочек. Методы экспериментального исследования пластической потери устойчивости при сложной вытяжке с использованием модифицированного квадратичного условия пластичности Мизеса для ортотропного материала [1] приведены в [2]. Нормальная анизотропия по толщине листа с модифицированным условием пластичности Мизеса и ассоциированным законом течения использовалась в [3] при моделировании пластического обжима тонкостенной трубы с учетом изменения толщины стенки.

Теоретические исследования моделей идеальной пластичности ортотропных материалов с использованием модифицированного квадратичного условия пластичности Мизеса [1] приведены в [4–6]. Общие соотношения двумерных задач для неоднородного сжимаемого анизотропного идеально пластического тела при условии полной пластичности приведены в [7]. Задача о вдавливании жесткой четырехгранной пирамиды в анизотропное идеально пластическое полупространство при квадратичном условии пластичности [1] решается методом малого параметра в [8].

1. В настоящей работе рассматривается идеальная пластическая анизотропия при условии полной пластичности [9]. В случае пространственной анизотропии напряжение текучести

представим радиусом-вектором  $\sigma_s$ , в декартовых координатах  $x, y, z$  модуль которого  $\sigma_s$  определяется направляющими косинусами  $n_1, n_2, n_3$  с осями координат  $x, y$  и  $z$ . Если главные оси анизотропии ортотропного тела совпадают с направлениями осей  $x, y$  и  $z$ , то пространственную идеально пластическую анизотропию можно представить эллипсоидом анизотропии в виде

$$\frac{\sigma_{sx}^2}{\sigma_{s1}^2} + \frac{\sigma_{sy}^2}{\sigma_{s2}^2} + \frac{\sigma_{sz}^2}{\sigma_{s3}^2} = 1, \quad (1)$$

где  $\sigma_{s1}, \sigma_{s2}, \sigma_{s3}$  – значения напряжения текучести при одноосном растяжении-сжатии вдоль главных осей анизотропии;  $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \sigma_{sz}$  – проекции вектора  $\sigma_s$  на направления осей координат, определяемые направляющими косинусами  $n_1, n_2, n_3$ . Модуль напряжения текучести определяется формулой

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{sx}^2 + \sigma_{sy}^2 + \sigma_{sz}^2} \quad (2)$$

В случае изотропного тела эллипсоид анизотропии (1) представляет сферу с постоянным радиусом  $\sigma_s$ , не зависящим от направления.

Рассмотрим плоскую деформацию ортотропного тела в плоскости  $x, y$ . При плоской деформации эллипсоид анизотропии (1) изображается эллипсом на плоскости  $x, y$  с полуосями  $\sigma_{s1}$  и  $\sigma_{s2}$  по направлениям осей  $x$  и  $y$ . Напряжение текучести  $\sigma_s$  при параметрическом представлении эллипса с помощью угла наклона  $\theta$  первого главного напряжения с осью  $x$  имеет вид

$$\sigma_s(\theta) = \sqrt{\sigma_{s1}^2 \cos^2 \theta + \sigma_{s2}^2 \sin^2 \theta}. \quad (3)$$

Направляющие косинусы определяются формулами

$$n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta, \quad n_3 = 0 \quad (4)$$

Отличные от нуля компоненты тензора напряжений при условии полной пластичности [9] принимают вид

$$\sigma_x = \sigma - k + 2k \cos^2 \theta, \quad \sigma_y = \sigma - k + 2k \sin^2 \theta, \quad \tau_{xy} = k \sin 2\theta, \quad (5)$$

$$\sigma_z = \sigma - k, \quad \sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2, \quad k = \sigma_s/2. \quad (6)$$

Уравнения (5) удовлетворяют квадратичному условию пластичности при плоской деформации

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2(\theta) \quad (7)$$

с напряжением текучести  $\sigma_s$ , зависящим от направления первого главного напряжения для эллипса анизотропии по формуле (3).

Введем угол  $\varphi$  между осью  $x$  и максимальным касательным напряжением  $\varphi = \theta - \pi/4$ . Замена угла  $\theta$  на угол  $\varphi$  приводит уравнения (3) и (5) к виду

$$\sigma_s(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{s2}^2 + (\sigma_{s1}^2 - \sigma_{s2}^2) \sin 2\varphi}, \quad (8)$$

$$\sigma_x = \sigma - k \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + k \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = k \cos 2\varphi. \quad (9)$$

Подстановка напряжений (9) в дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи приводит к гиперболической системе уравнений относительно переменных  $\sigma$  и  $\varphi$  с ортогональными характеристиками  $\xi$  и  $\eta$  с углами наклона  $\alpha$  и  $\beta$  к оси  $x$

$$\operatorname{tg} \alpha = f_1(\varphi) + f_2(\varphi), \quad \operatorname{tg} \beta = f_1(\varphi) - f_2(\varphi), \quad (10)$$

$$f_1 = \frac{k' \sin 2\varphi + \sigma_s \cos 2\varphi}{g(\varphi)}, \quad f_2 = \frac{\sqrt{k'^2 + \sigma_s^2}}{|g(\varphi)|}, \quad (11)$$

$$g = k' \cos 2\varphi - \sigma_s \sin 2\varphi, \quad k' = \frac{(\sigma_{s1}^2 - \sigma_{s2}^2) \cos 2\varphi}{\sigma_s}. \quad (12)$$

При  $\varphi = \pm \pi/4$  производная  $k'$  равна нулю и характеристики  $\xi$  и  $\eta$  совпадают с линиями скольжения – направлениями максимального касательного напряжения при  $\sigma_s = \sigma_{s1}$  и  $\sigma_s = \sigma_{s2}$ . Вдоль характеристик выполняются дифференциальные соотношения [9]

$$d\sigma - \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \xi, \quad d\sigma + \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \eta, \quad (13)$$

обобщающие интегралы Генки в виде

$$\sigma \mp F(\varphi) = \text{const}, \quad F = \int \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} d\varphi. \quad (14)$$

Так как при  $k' \neq 0$  характеристики  $\xi$  и  $\eta$  не совпадают с направлениями максимального касательного напряжения, то нормальные  $\sigma_\xi, \sigma_\eta$  и касательные  $\tau_{\xi\eta}$  напряжения на характеристиках связаны с переменными  $\sigma$  и  $\varphi$  уравнениями равновесия

$$\sigma_\xi = \sigma - k(\varphi) \sin 2\gamma, \quad \sigma_\eta = \sigma + k(\varphi) \sin 2\gamma, \quad \tau_{\xi\eta} = k(\varphi) \cos 2\gamma, \quad \gamma = \alpha - \varphi \quad (15)$$

Дифференциальные уравнения для скоростей перемещений  $V_x, V_y$ , получаемые из ассоциированного закона пластического течения, относятся к гиперболическому типу с характеристиками  $\xi, \eta$ , совпадающими с характеристиками для напряжений [9]. Вследствие пластической несжимаемости материала и ортогональности характеристик вдоль них выполняются соотношения Гейрингер для проекций вектора скорости  $V_\xi, V_\eta$  на направления характеристик  $\xi$  и  $\eta$

$$dV_\xi - V_\eta d\alpha = 0 \quad \text{вдоль } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\alpha = 0 \quad \text{вдоль } \eta, \quad (16)$$

$$V_x = V_\xi \cos \alpha - V_\eta \sin \alpha, \quad V_y = V_\xi \sin \alpha + V_\eta \cos \alpha, \quad (17)$$

$$V_\xi = V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha, \quad V_\eta = V_y \cos \alpha - V_x \sin \alpha. \quad (18)$$

Уравнения (17) и (18) используются для связи переменных  $V_x, V_y$  с  $V_\xi, V_\eta$  и обратно;  $\alpha$  – угол наклона касательной к характеристике  $\xi$ , определяемый первым уравнением (10).

**2.** Рассмотрим задачу Прандтля о давлении плоского штампа на ортотропное идеально пластическое полупространство, в котором главные оси эллипса анизотропии совпадают с направлениями осей координат  $x, y$ . Начало координат совместим с центром  $O$  границы контакта штампа с полупространством и рассмотрим правую часть пластической области от линии симметрии  $x = 0$ , показанную на рис. 1.

На границе  $AD$  напряжения  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  равны нулю и напряжение  $\sigma_x$  отрицательно. Эти условия и уравнения (9) определяют  $\varphi = \pi/4$ ,  $\sigma = -k$ ,  $\sigma_x = -2k$ . Из уравнений (8) и (12) находим  $2k = \sigma_{s1}$ ,  $k' = 0$ , где  $\sigma_{s1}$  – напряжение текучести вдоль оси  $x$ . Постоянные значения  $\sigma, \varphi, k$  и  $k' = 0$  на прямолинейной границе  $AD$  и дифференциальные соотношения (13) определяют однородное напряженное состояние при  $\sigma = -\sigma_{s1}/2$ ,  $\varphi = \pi/4$  в треугольной области  $ACD$ . Из уравнений (10) – (12) следует совпадение характеристик  $\xi$  и  $\eta$  с направлениями максимальных касательных напряжения – линиями скольжения в этой области.

При давлении плоского гладкого штампа на полупространство угол  $\varphi$  изменяется в угловой точке  $A$  от  $+\pi/4$  на границе  $AD$  до  $-\pi/4$  на границе  $OA$ . Так как  $\eta$  характеристика  $AC$  прямолинейна с постоянными значениями  $\sigma$  и  $\varphi$ , и соотношения (8) – (14) зависят только от

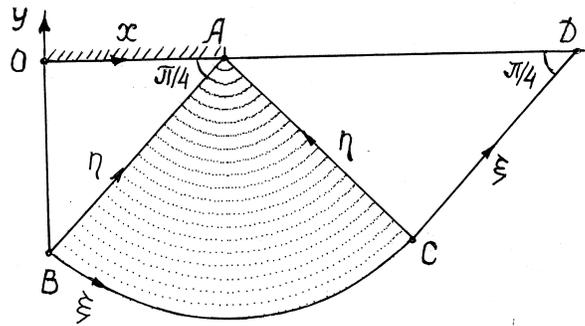


Рис. 1.

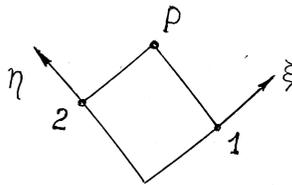


Рис. 2.

$\varphi$ , то интегрирование уравнений (10) – (12) с дифференциальными соотношениями (13) приводит к центрированному вееру прямолинейных  $\eta$  характеристик и ортогональных к ним  $\xi$  характеристик в области  $ACB$ , как и в случае изотропного тела. Однако в этой области характеристики  $\xi$  и  $\eta$  не совпадают с линиями скольжения изотропного тела вследствие изменения напряжения текучести от  $\sigma_{s1}$  в области  $ACD$  до  $\sigma_{s2}$  в области однородного напряженного состояния  $OAB$  с прямолинейными характеристиками  $\xi$  и  $\eta$ . Давление  $q$  на штамп определяется интегралом (14) с граничным условием  $\varphi = \pi/4$ ,  $\sigma = -\sigma_{s1}/2$  на  $AC$  с изменением угла до  $\phi = -\pi/4$  на  $AB$  и вторым соотношением (9) при  $k = \sigma_{s2}/2$

$$q = \frac{1}{2}(\sigma_{s1} + \sigma_{s2}) + \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} d\varphi. \tag{19}$$

При численном решении уравнений (10) – (13) используем циклические процедуры расчета сетки характеристик для последовательности элементарных задач Гурса [9]. На рис. 2 показан регулярный узел  $P$  на пересечении характеристик  $\xi$  и  $\eta$ , проходящих через точки 1 и 2. Обозначим известные значения переменных в этих точках нижними индексами 1 и 2, и представим дифференциальные соотношения (13) между точками  $P$  и 2 вдоль  $\xi$  и между точками  $P$  и 1 вдоль  $\eta$  конечными разностями

$$\sigma - \sigma_2 = F - F_2, \quad \sigma - \sigma_1 = F_1 - F, \tag{20}$$

где  $F$ ,  $F_1$  и  $F_2$  – значения интеграла (14) в точках  $P$ , 1 и 2. Из уравнений (12) находим  $\sigma$  и  $F$  в точке  $P$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + F_1 - F_2), \quad F = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2 + F_1 + F_2). \quad (21)$$

Представляя дифференциал  $dF$  вдоль  $\xi$  конечной разностью между точками  $P$  и  $2$

$$F - F_2 = \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2}(\varphi - \varphi_2)$$

и исключая  $F$  по второй формуле (21) находим

$$\varphi = \varphi_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2 + F_1 - F_2}{2\sqrt{k'(\tilde{\varphi}_1) + \sigma_s^2(\tilde{\varphi}_1)}}, \quad \tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_2). \quad (22)$$

Угол  $\varphi$  вычисляется по уравнению (22) простыми итерациями с использованием формул (8) и (12) для  $\sigma_s$  и  $k'$ . Координаты точки  $P$  определяются из линейной системы уравнений, получаемых конечно-разностной аппроксимацией уравнений характеристик (10) с использованием средних значений угла  $\varphi$  между точками 1 и 2 и точкой  $P$ .

После расчета сетки характеристик определяется поле скоростей перемещений графическим построением годографа скоростей с использованием ортогональности характеристик на физической плоскости  $x, y$  и на плоскости годографа  $V_x, V_y$ , или численным решением дифференциальных соотношений (16) аналогично задачам для изотропного идеально пластического тела [9].

**3.** На рис. 1 показана сетка характеристик  $\xi, \eta$  при давлении штампа на ортотропное полупространство с отношением напряжений текучести эллипса анизотропии  $\sigma_{s2}/\sigma_{s1} = 2$  с максимальным напряжением текучести по нормали к границе полупространства. В области  $ABC$  сетка получена численным решением вырожденной задачи Гурса от угловой точки  $A$  с равномерным шагом 0.025 по углу  $\varphi$  и от прямолинейной характеристики  $AC$  с граничными условиями  $\varphi = \pi/4, \sigma = -\sigma_{s1}/2, F = 0$ . Численные результаты показывают выполнение условия ортогональности характеристик с точностью  $10^{-5}$ . В зонах однородного напряженного состояния  $OAB$  и  $ACD$  характеристики совпадают с направлениями максимального касательного напряжения вследствие равенства нулю производной  $k'$  в экстремальных точках эллипса анизотропии.

В области  $ABC$  характеристики  $\xi, \eta$  не совпадают с линиями скольжения для изотропного тела, что видно из неравномерности шага по углу  $\alpha$  между прямолинейными характеристиками  $\eta$ , которые сгущаются около границы  $AC$ . Для приведенного примера анизотропии предельное давление  $q$  на штамп равно  $3.989 \cdot \sigma_{s1}$ , что существенно выше предельного давления  $2.571 \cdot \sigma_s$  для изотропного тела. При обратном отношении  $\sigma_{s2}/\sigma_{s1} = 0.5$  предельное давление на штамп равно  $1.994 \cdot \sigma_{s1}$  и характеристики  $\eta$  сгущаются около границы  $AB$ , что показывает на существенное изменение напряженного состояния в пластической области.

В таблицах 1 и 2 приведены зависимости угла  $\alpha$ , безразмерных значений  $\sigma, \sigma_s$  и интеграла  $F$  от угла  $\varphi$  на круговой характеристике  $\xi$ , определяющие распределение напряжений по уравнениям (15) в области  $ABC$  для эллипсов анизотропии с отношениями  $\sigma_{s2}/\sigma_{s1} = 2$  и  $\sigma_{s2}/\sigma_{s1} = 0.5$ . Эти результаты показывают существенное влияние анизотропии на напряженное состояние в пластической области и на предельное давление на штамп, определяемое вторым соотношением (9) при  $\varphi = -\pi/4$ .

На рис. 3 показаны зависимости безразмерного предельного давления на штамп  $q/\sigma_{s1}$  от отношения  $\sigma_{s2}/\sigma_{s1}$ , полученные интегрированием уравнения (19), которые показывают существенное влияние анизотропии на предельное состояние материала полупространства.

**4.** На рис. 4 показан годограф скоростей перемещений на плоскости  $V_x, V_y$ , полученный ортогональным отображением характеристик  $\xi, \eta$  физической плоскости (рис. 1а). В случае образования жесткой области  $OAB$ , движущейся со скоростью штампа  $V_y = -1$ , в точке  $B$  возникает разрыв скорости  $[V] = 1/\sqrt{2}$ , сохраняющий постоянное значение вдоль жесткопластической границы  $BCD$  при  $V_\eta = 0$  по условиям несжимаемости и непрерывности нормальной

Таблица 1.  $\sigma_{s2}/\sigma_{s1} = 2$ 

$\varphi$	$\alpha$	$-\sigma$	$\sigma_s$	$F$
0.7854	0.7854	0.5000	1.000	0.0000
0.6807	0.7556	0.6058	1.016	0.1058
0.5760	0.7078	0.7170	1.063	0.2170
0.4712	0.6363	0.8374	1.177	0.4015
0.3665	0.5448	0.9685	1.223	0.4685
0.2618	0.4395	1.111	1.323	0.6107
0.1571	0.3255	1.264	1.427	0.7638
0.0524	0.2064	1.427	1.531	0.9272
0.0000	0.1457	1.512	1.581	1.012
-0.0524	0.0845	1.600	1.630	1.100
-0.1571	-0.0390	1.781	1.721	1.281
-0.2618	-0.1632	1.970	1.803	1.470
-0.3665	-0.2876	2.166	1.872	1.666
-0.4712	-0.4122	2.367	1.927	1.867
-0.5760	-0.5366	2.572	1.967	2.072
-0.6807	-0.6610	2.780	1.992	2.280
-0.7854	-0.7854	2.989	2.000	2.489

Таблица 2.  $\sigma_{s2}/\sigma_{s1} = 0.5$ 

$\phi$	$\alpha$	$-\sigma$	$\sigma_s$	$F$
0.7854	0.7854	0.5000	1.000	0.0000
0.6807	0.6610	0.6046	0.9959	0.1046
0.5760	0.5366	0.7085	0.9837	0.2085
0.4712	0.4122	0.8110	0.9365	0.3110
0.3665	0.2876	0.9115	0.9359	0.4115
0.2618	0.1632	1.009	0.9014	0.5092
0.1571	0.0390	1.104	0.8607	0.6038
0.0524	-0.0845	1.194	0.8150	0.6945
0.0000	-0.1457	1.238	0.7906	0.7382
-0.0524	-0.2064	1.281	0.7654	0.7809
-0.1571	-0.3255	1.363	0.7135	0.8625
-0.2618	-0.4395	1.439	0.6614	0.9391
-0.3665	-0.5448	1.510	0.6116	1.010
-0.4712	-0.6363	1.576	0.5671	1.076
-0.5760	-0.7078	1.636	0.5314	1.136
-0.6807	-0.7556	1.692	0.5081	1.192
-0.7854	-0.7854	1.744	0.5000	1.244

компоненты скорости на этой границе. В этом случае область  $ACD$  скользит как жесткое тело по наклонной границе  $CD$  со скоростью  $[V]$  под углом  $\pi/4$  к границе полупространства.

Однородному напряженному состоянию в области  $OAB$  с гладкой границей штампа может соответствовать однородное поле скоростей перемещений с линейным изменением скорости  $V_y$  от  $-1$  до нуля на линии симметрии  $x = 0$  и линейным изменением скорости  $V_x$  от нуля

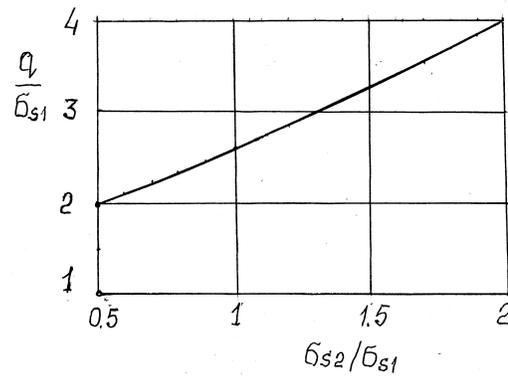


Рис. 3.

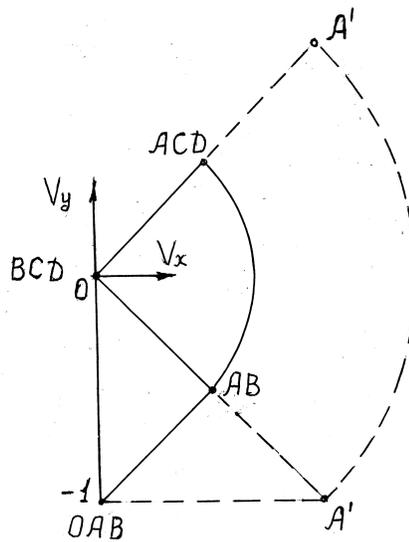


Рис. 4.

до единицы при скольжении по гладкой границе штампа  $OA$ . Этим условиям соответствует линейное изменение скоростей на характеристике  $AB$ , которое вместе с условием непрерывности скоростей  $V_\xi = V_\eta = 0$  на жесткопластической границе  $B CD$  определяет непрерывное линейное изменение скоростей вдоль прямолинейных характеристик  $\eta$  в области и непрерывное линейное изменение скоростей в области  $ACD$ . Годограф с непрерывным полем скоростей показан штриховыми линиями на рис. 4. В этом случае точки границы  $AD$  смещаются под углом  $\pi/4$  к границе полупространства с линейным увеличением модуля вектора скорости от нуля в точке  $D$  до единицы в точке  $A$ .

Таким образом, при давлении гладкого плоского штампа на ортотропное полупространство кинематика пластического течения остается такой же, как и для изотропного тела, включая возможность реализации различных полей скоростей в зависимости от кинематики движения области однородного напряженного состояния под штампом [10].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
- [2] Томленов, А. Д. Теория пластического деформирования металлов / А. Д. Томленов. – М. : Metallurgia, 1972. – 408 с.
- [3] Непершин, Р. И. Обжим тонкостенной трубы криволинейной матрицей / Р. И. Непершин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 3. – С. 54–62.
- [4] Матченко, Н. М. Некоторые вопросы теории пластичности анизотропных материалов : автореф. дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / Н. М. Матченко. – Тула, 1975.
- [5] Кузнецов, Е. Е. К построению теории идеальной пластичности ортотропных сред / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Проблемы механики неупругих деформаций : сб. ст. к 70-летию Д. Д. Ивлева. – М., 2001. – С. 178–183.
- [6] Кузнецов, Е. Е. Осесимметричная задача теории идеальной пластичности трансверсально-изотропной среды / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко, В. В. Усачев // Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести : сб. ст. к 75-летию М. А. Задояна. – Ереван, 2006. – С. 171–176.
- [7] Горский, А. В. К теории общих двумерных задач теории идеальной пластичности для анизотропного неоднородного сжимаемого материала / А. В. Горский, П. В. Горский // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 166–172.
- [8] Радаев, С. Ю. О внедрении жесткой пирамиды в анизотропное идеально пластическое полупространство / С. Ю. Радаев // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 569–575.
- [9] Ивлев, Д. Д. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенатов, Е. И. Шемякин. – М. : Физматлит, 2008. – 832 с.
- [10] Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

*D. D., Ivlev, R. I. Nepershin*

**PRESSURE OF THE FLAT STAMP ON ORTHOTROPIC IDEALLY PLASTIC SEMISPAC**

*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University*

*Moscow State Technological University "Stankin"*

**Abstract.** The problem about pressure of a flat stamp on orthotropic ideally plastic semispace is considered. Dependence of pressure of fluidity on a direction of the main pressure is set by ellipsoid anisotropies. The angular point of a stamp and rectilinear boundary of semispace generate the aligned fan of rectilinear characteristics, as well as in case of an isotropic body, with similar kinematics of a plastic current. But pressure upon a stamp essentially depends on plastic anisotropy.

**Keywords:** ideal plasticity, flat problem, orthotropic semispace, ellipsoid anisotropies, pressure of a flat stamp.

*Ивлев Дюис Данилович*

*доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары*

**e-mail:** ivlev21@mail.ru

*Непершин Ростислав Иванович*

*доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет "СТАНКИН", г. Москва*

**e-mail:** rostislav n@mtu-net.ru

*Ivlev, Dyuis Danilovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

*Nepershin, Rostislav Ivanovich*

*Dr. Eng. Sci., Professor, Moscow State Technological University "Stankin", Moscow*

М. Н. Кирсанов

## ТОЧКИ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

*Московский энергетический институт (технический университет)*

**Аннотация.** Задача Коши для дифференциального уравнения обобщается на произвольный порядок производных функции, входящих в начальные условия. Дается определение точки неустойчивости как условие вырождения такой постановки. Показывается существование последовательности особых точек, являющихся нулями некоторой системы функций, для которых даются рекуррентные соотношения и формула Родрига. Доказывается теорема разделения нулей. Частным случаем полученных функций являются полиномы Эрмита. На основе предложенной теории анализируется явление выпучивания идеальных реологических систем.

**Ключевые слова:** реология, дифференциальное уравнение, выпучивание, формула Родрига.

УДК: 517.911

**1. Обобщение задачи Коши.** Рассмотрим следующее обобщение начальной задачи для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения порядка  $M$ . Имеем уравнение

$$f(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(M)}) = 0, \quad (1)$$

где  $u$  — функция,  $t$  — аргумент,  $\dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(M)}$  — производные по  $t$  порядков  $1, 2, \dots, M$ . При  $t = t_0$  поставим  $M$  начальных условий, каждое из которых имеет вид  $u^{(k)}(t_0) = U_k$ ,  $k \in N$ , где  $U_k \in \mathbf{R}$  — заданные числа. Классическая задача Коши следует из (1) при  $k = 0, 1, \dots, M - 1$ .

**2. Точки неустойчивости.** Для частного случая уравнения (1) при  $M = 1$

$$\dot{u} + g(t)u = 0 \quad (2)$$

введем понятие точки неустойчивости начальной задачи. Значение  $t = \tau_N$  назовем точкой неустойчивости порядка  $N$ , если при  $t_0 \rightarrow \tau_N$ ,  $u^{(N)}(\tau_0) = U_N$ ,  $u^{(i)}(\tau_0) \rightarrow \infty$ ,  $i \neq N$ , где  $U_N$  — заданное число.

Выясним геометрический смысл обобщенной задачи Коши. Если геометрический смысл классической задачи Коши состоит в выборе интегральной кривой, проходящей на плоскости  $u, t$  через точку  $u = u_0$ ,  $t = t_0$ , то в обобщенной задаче из всех интегральных кривых, пересекающих прямую  $t = t_0$ , требуется выбрать ту, у которой в точке пересечения удовлетворяется условие  $u^{(N)}(\tau_0) = U_N$ . Например, при  $N = 1$ , требуется найти интегральную кривую, пересекающую прямую  $t = t_0$  под заданным углом. Одновременно становится понятным смысл точки неустойчивости: если при  $t_0 \rightarrow \tau$  ордината пересечения стремится к бесконечности, то точка  $\tau$  — неустойчивая.

2.1. Первый способ определения точек неустойчивости состоит в использовании вида интегральной кривой уравнения (2)

$$u = U_0 \exp(-A), \quad A = \int_{t_0}^t g dt. \quad (3)$$

Дифференцируя (3), получим последовательно

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -U_0 g \exp(-A), \\ \ddot{u} &= U_0 (g^2 - \dot{g}) \exp(-A), \\ \dots, \\ u^{(k)} &= (-1)^k U_0 B_k \exp(-A), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = g$ ,  $B_2 = g^2 - \dot{g}$ . Как легко видеть, функции  $B_k(t)$  образуются по правилу

$$B_{k+1} = B_k g - \dot{B}_k. \quad (5)$$

Пусть задана начальная производная порядка  $N$

$$u^{(N)}(t_0) = U_N = (-1)^N U_0 B_N. \quad (6)$$

Исключая  $U_0$  из (6) и (4) при  $t = t_0$ , получим

$$u^{(k)}(t_0) = (-1)^{k-N} (B_k/B_N) U_N.$$

Значение  $u^{(k)}(t_0)$  стремится к бесконечности при  $t_0 \rightarrow \tau_N$ , где  $\tau_N$  — нули функции  $B_N$ . Следовательно, точки неустойчивости определяются корнями уравнений  $B_N = 0$ .

Из (4) следует, что точка неустойчивости  $\tau_N$  обобщенной начальной задачи имеет еще и другой смысл. Для любого значения  $t_0 = \tau_N$  начальное значение производной  $u^{(N)}(t_0)$  можно задавать произвольным, при этом решение поставленной задачи не будет отличаться от классической задачи Коши, при соответствующем выборе самой функции  $u(t_0)$ . При  $t_0 = \tau_N$  свобода выбора значения  $u^{(N)}(t_0)$  исключена, так как согласно (4) в особой точке это значение равно нулю. Следовательно, обобщенная задача Коши не может быть поставлена иначе как с нулевым начальным условием. Такое свойство можно принять за альтернативное определение точки неустойчивости.

2.2. Второй способ позволяет найти точки неустойчивости непосредственно по дифференциальному уравнению, не используя его интеграла. Последовательно дифференцируя (2), получим систему  $N$  уравнений для переменных  $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(N)}$

$$\begin{aligned} u g + \dot{u} &= 0, \\ u \dot{g} + \dot{u} g + \ddot{u} &= 0, \\ u \ddot{g} + 2 \dot{u} \dot{g} + \ddot{u} g + u^{(3)} &= 0, \\ \dots & \\ u g^{(N-1)} + (N-1) \dot{u} g^{(N-2)} + \dots + C_i^{n-1} u^{(i)} g^{(N-1-i)} + \dots + u^{(N)} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Принимая  $u^{(N)}$  за известную величину и относя ее в правую часть, получим систему  $N$  уравнений для  $N$  переменных  $u^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , определитель которой равен  $B_N$ . Таким образом, в нулях функций  $B_N$  связь между производными вырождается, что и определяет точки неустойчивости.

Запишем матрицу системы (7), ограничиваясь для иллюстрации  $N = 4$

$$\begin{bmatrix} g & 1 & 0 & 0 \\ \dot{g} & g & 1 & 0 \\ \ddot{g} & 2\dot{g} & g & 1 \\ g^{(3)} & 3\ddot{g} & 3\dot{g} & g \end{bmatrix}$$

Раскрывая определитель матрицы по элементам последнего столбца, получим

$$B_4 = g^4 - 6g^2\dot{g} + 3\dot{g}^2 + 4\ddot{g}g - g^{(3)} = gB_3 - 3\dot{g}B_2 + 3\ddot{g}B_1 - g^{(3)}B_0, \quad (8)$$

где  $B_3 = g^3 - 3g\dot{g} + \ddot{g}$ . Соотношение (8) легко обобщить на произвольный порядок системы

$$B_{N+1} = \sum_{k=0}^N (-1)^k C_k^N g^{(k)} B_{N-k}. \quad (9)$$

Введем весовую функцию  $Q(t)$

$$B_i = (-1)^i h(t) Q^{(i)}, \quad (10)$$

где  $h(t)$  — некоторая вспомогательная функция. Подставим (10) в (9) и воспользуемся формулой Лейбница для  $N$ -й производной произведения двух функций. Получим

$$Q^{(N+1)} = -(gQ)^{(N)}. \quad (11)$$

Интегралом (11) является соотношение

$$Q = Q_0 \exp(-A). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и выбирая  $h = \exp(A)/Q_0$ , получим формулу Родрига, задающую функции  $B_N$

$$B_N = \exp(A) (-1)^N \frac{d^N}{dt^N} (\exp(-A)). \quad (13)$$

При  $g = 2t$  имеем, согласно (3),  $A = t^2$ . Из (13) следует определение ортогональных полиномов Эрмита [1].

Формула (9) допускает дальнейшее обобщение. Рекурсивное использование (5) дает последовательно

$$\begin{aligned} B_{N+1} &= B_N g - \dot{B}_N = B_{N-1} B_2 - 2B_1 \dot{B}_{N-1} + B_0 \ddot{B}_{N-1} = \\ &= \dots = \sum_{k=0}^M (-1)^k C_k^M B_{N-M+1}^{(k)} B_{M-k}. \end{aligned}$$

При  $N = M$  имеем формулу (9), при  $M = 1$  — формулу (5).

2.3. Докажем теорему разделения нулей функций  $B$ , упорядочивающую точки неустойчивости.

**ТЕОРЕМА.** *Между точками неустойчивости порядка  $N$  (если они существуют) лежит по крайней мере одна точка порядка  $N + 1$ :  $\tau_{N,1} < \tau_{N+1} < \tau_{N,2}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Равенство (5) представляет собой линейное дифференциальное уравнение для  $B_N$ . Предположим, что функция  $B_N$  имеет два нуля  $\tau_{N,1}$  и  $\tau_{N,2}$ . Выпишем решение (6) с начальным условием  $B_N = 0$ , поставленным при  $t = \tau_{N,1}$

$$B_N(t) = \exp(A) \int_{\tau_{N,1}}^t B_{N+1}(t) \exp(-A) dt,$$

где  $A = \int_{\tau_{N,1}}^t g dt$ . Если взять здесь в качестве аргумента второй корень уравнения  $B_N = 0$ ,  $t = \tau_{N,2}$ , то интеграл от функции  $B_{N+1}$  (с положительным множителем  $\exp(-A)$ ) на интервале от  $\tau_{N,1}$  до  $\tau_{N,2}$  оказывается равным нулю. Следовательно, эта функция, являясь непрерывной, меняет знак, пересекая ось  $t$  между  $\tau_{N,1}$  и  $\tau_{N,2}$ . Таким образом, корень уравнения  $B_{N+1} = 0$  лежит в этом интервале, что и требовалось доказать.

3. **Линейное дифференциальное уравнение порядка  $M$ .** Для дифференциального уравнения порядка выше первого точка неустойчивости имеет мультииндексный порядок, представляющий собой множество  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_M\}$  мощности  $M$ . Элементы множества —

порядки тех производных, которые задаются в начальных условиях. Воспользуемся вторым способом получения точек неустойчивости. Имеем дифференциальное уравнение

$$u^{(M)}h_M(t) + \dots + u^{(i)}h_i(t) + \dots + \ddot{u}h_2(t) + \dot{u}h_1(t) + uh_0(t) = 0, \quad (14)$$

Последовательно дифференцируя исходное уравнение (14), составим систему  $N$  уравнений. Запишем ее в виде

$$\{H\}\bar{U} = 0, \quad (15)$$

где  $\bar{U} = \{u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{N+M-1}\}$ . Матрицу  $\{H\}$ , размером  $N \times (N+M)$ , которую будем называть *основной* матрицей уравнения (14), представим в виде суммы

$$\{H\} = \sum_{i=0}^M \{H_i\}. \quad (16)$$

Матрица  $\{H_i\}$  отвечает функции  $h_i(t)$  и имеет структуру (на примере  $N = 4$ )

$$\{H_i\} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dot{h}_i & h_i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddot{h}_i & 2\dot{h}_i & h_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u^{(3)} & 3\dot{h}_i & 3\ddot{h}_i & h_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Ненулевые столбцы матрицы имеют номера от  $i+1$  до  $i+N-1$ . В этой матрице  $k$ -я строка представляет собой коэффициенты при производных  $u^m$ ,  $m = i, \dots, i+k-1$  в формуле Лейбница для  $k-1$ -й производной произведения  $h_i(t)u^i$ .

Предположим, что в начальных условиях заданы  $M$  производных функции  $u$ , номера которых составляют множество  $K$ , где

$$\max k_i \leq N + M. \quad (18)$$

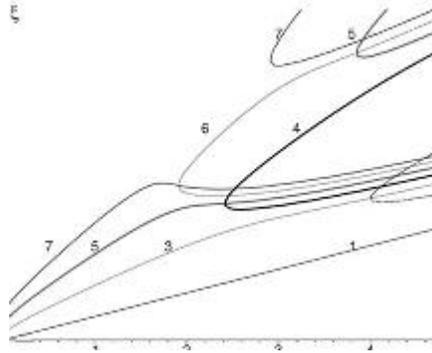
(Если последнее неравенство не выполняется, то для получения точек неустойчивости с требуемым порядком  $K$ , следует увеличить число  $N$  уравнений системы.) Остальные производные выражаются через заданные с помощью системы (15). Перенесем заданные величины в правую часть системы. Матрица полученной системы образуется из основной матрицы вычеркиванием столбцов с номерами  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Особая точка находится из равенства нулю определителя этой матрицы. Методом индукции легко показать, что точка неустойчивости не зависит от  $N$ , если только  $N$  удовлетворяет неравенству (18). При доказательстве используется тот факт, что увеличение  $N$  на 1 соответствует приписыванию матрице дополнительной строки и столбца, причем все элементы столбца, кроме последнего ( $h_M(t)$ ) равны нулю. Разложение определителя увеличенной матрицы по элементам этого столбца доказывает совпадение определителя размером  $N$  и  $N+1$ , если  $h_M \neq 0$ .

Рассмотрим случай  $\max k_i = M$ . Пусть  $K = \{0, 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, M-1, M\}$ . Докажем, что точка неустойчивости порядка  $K$  определяется из равенства  $h_j = 0$ , если  $h_M \neq 0$ . Из (17) следует, что последние  $N$  столбцов основной матрицы  $N \times (N+M)$  образуют нижнюю треугольную матрицу. Для получения матрицы, равенство нулю определителя которой задает точку неустойчивости искомого порядка, необходимо в этой треугольной матрице заменить первый столбец на столбец с номером  $j$ . Первый элемент столбца  $j$  равен  $h_j$ . Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:  $h_j h_M^{N-1}$ . Отсюда и следует доказываемое утверждение.

**4. Приложение в механике. Выпучивание сжатого стержня в условиях нелинейной ползучести.** Рассмотрим прямолинейный шарнирно опертый стержень длиной  $l$ , сжатый постоянной по времени осевой силой  $T$ . Материал стержня подчиняется определяющему соотношению

$$\dot{p}p^\alpha = f(\sigma), \quad (19)$$

$p = \varepsilon - \sigma/E$  — деформация ползучести,  $\dot{p} = dp/dt$ ;  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  — напряжение и деформация;  $\alpha$ ,  $E$  — параметр упрочнения и модуль упругости;  $f(\sigma)$  — функция, показывающая зависимость

Рис. 1. Корни полиномов  $b_N$ 

деформации ползучести от уровня напряжений. Под действием некоторого возмущения стержень примет форму, отличную от прямолинейной, а напряжения и деформации ползучести получат малые приращения  $\Delta\sigma$  и  $\Delta p$ , удовлетворяющие линеаризованному соотношению (19)

$$p^\alpha \Delta \dot{p} + \alpha p p^{\alpha-1} \Delta p = f' \Delta \sigma,$$

( $f' = df/d\sigma$ ). Пользуясь гипотезой плоских сечений и уравнением равновесия, получим отсюда дифференциальное уравнение для амплитуды  $U$  прогиба, представленного в виде  $\Delta v = U \sin \mu y$ , ( $\mu = m\pi/l$ ;  $\mu$  — число полуволн по длине стержня) [3]

$$(\alpha - \xi)(\dot{p}/p)U + \dot{U} = 0. \quad (20)$$

Здесь введена величина  $\xi$ , монотонно связанная со временем  $t$

$$\xi = p(f'/f)E\sigma/(\sigma_E - \sigma),$$

( $\sigma_E = EJ\mu^2/\Omega$  — критическое напряжение упругого стержня [2]. Кривая ползучести  $p(t) = [(1 + \alpha)tf]^{1+\alpha}$  получается интегрированием (19) при  $\sigma = \text{const}$ ).

Найдем точки неустойчивости обобщенной задачи Коши, для уравнения (20). Начальные условия, поставленные для высших производных  $U$ , соответствуют специальным возмущениям прогиба. Опуская выкладки, по рекуррентному соотношению (5), где  $g = (\alpha - \xi)\dot{p}/p$ , получим функции  $B_N$ , которые удобно записать в виде полиномов по  $\xi$ . Полиномы отличаются множителем:  $B_N = (-\dot{p}/p)^N b_N$ . Выпишем первые четыре полинома:

$$\begin{aligned} b_1 &= \xi - \alpha, \\ b_2 &= \xi^2 - 3\xi\alpha + \alpha(2\alpha + 1), \\ b_3 &= \xi^3 - 6\alpha\xi^2 + \alpha(4 + 11\alpha)\xi - \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2), \\ b_4 &= \xi^4 - 10\alpha\xi^3 + 5\alpha(2 + 7\alpha)\xi^2 - 5\alpha(2\alpha + 1)(5\alpha + 2)\xi + \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2)(4\alpha + 3). \end{aligned}$$

На рисунке 1 показаны корни этих полиномов в зависимости от параметра упрочнения материала. Цифра у кривой соответствует степени полинома. Для малых  $\alpha$  четные полиномы корней не имеют. Здесь же наглядно проявляется и теорема о разделении корней.

Точки неустойчивости процесса осевого нагружения стержня связаны со значениями величины  $\xi$ . Каждая такая точка определяет некоторую кривую  $\sigma(t)$ , проходящую через точку  $\sigma = \sigma_E$ ,  $t = 0$ , которая соответствует мгновенной потере устойчивости при достижении эйлеровой критической нагрузки упругого стержня. Зная уровень приложенного напряжения, можно вычислить опасные моменты  $t = \tau_N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ), в которых, в соответствии с определением точек неустойчивости, возмущение  $N$ -х производных прогиба вызывает выпучивание — бесконечные прогибы в момент возмущения. При  $\alpha = 0$  точек неустойчивости нет,

т.к. функция  $g(t)$  в этом случае является константой:  $g = f'E\sigma/(\sigma - \sigma_E)$ . Численный счет [4] показывает близость теории и эксперимента.

Точки неустойчивости процесса деформирования в стержнях определялись в [3] (второй способ) и [5] (первый способ). Асимптотика решений при  $\alpha \rightarrow \infty$  исследована в [3]. В [4] исследовалась стабильность движения механической системы — кулисного механизма. Математическая модель неустойчивости при обработке полимерных материалов точением на основе работы [6] разработана в [7,8].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бейтман, Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Г. Бейтман, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1974. — 296 с.
- [2] *Клюшников, В. Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем / В. Д. Клюшников. — М. : Изд-во МГУ, 1986. — 240 с.
- [3] *Kirsanov, M. N.* Singular points of the creep deformation and buckling of a column / M. N. Kirsanov // Int. J. Eng. Sci. — 1997. — Vol. 5, №. 3. — P. 221–227.
- [4] *Кирсанов, М. Н.* О реакции сжатого стержня на возмущение высших производных прогиба в условиях ползучести / М. Н. Кирсанов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1994. — № 1. — С. 43–47.
- [5] *Кирсанов, М. Н.* Начальное закритическое поведение сжатого стержня в условиях ползучести / М. Н. Кирсанов // ПМТФ. — 1993. — № 2. — С. 152–156.
- [6] *Кирсанов, М. Н.* Определение и анализ стабильности движения с использованием системы Maple / М. Н. Кирсанов // Exponenta Pro. Математика в приложениях. — № 3–4. — 2004. — С. 134–137.
- [7] *Еренков, О. Ю.* Стабильность технологической системы при точении полимерных материалов / О. Ю. Еренков, А. Г. Ивахненко, Е. О. Ивахненко // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2008. — № 3–7. — С. 14–23.
- [8] *Еренков, О. Ю.* Математическая модель нелинейных колебаний и определение условий неустойчивости технологической системы при точении / О. Ю. Еренков, А. Г. Ивахненко // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. — 2010. — № 1. — С. 67–71.

## POINTS OF INSTABILITY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

*Moscow Power Engineering Institute (Technical University)*

**Abstract.** Cauchy problem for differential equations can be generalized to arbitrary order derivatives of functions included in the initial conditions. The point of instability is defined as a condition of degeneracy of such statement. The existence of sequence of singular points that are zeros of some system functions is proved. The recurrence relation and the equation of Rodrigues are given for them. The theorem of separation of zeros is proved. Hermite polynomials are special cases of the obtained functions. Based on the proposed theory the phenomenon of buckling of ideal rheological system is analysed.

**Keywords:** rheology, differential equation, buckling, Rodrigues formula.

*Кирсанов Михаил Николаевич*

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники, Московский энергетический институт (технический университет), г. Москва*

**e-mail:** mpei2004@yandex.ru

*Kirsanov, Mikhail Nikolaevich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics, Moscow Power Engineering Institute (Technical University), Moscow*

## УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА

**Амензаде Рафаель Юсиф-оглы (mexanika.bsu.az@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Бакинский государственный университет, г. Баку.

**Баженов Валентин Георгиевич (bazhenov@dk.mech.unn.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород.

**Буренин Анатолий Александрович (burenin@iacp.dvo.ru)** – член-корреспондент РАН, ИАПУ ДВО РАН, г. Владивосток.

**Варданян Седрак Ваникович (vardanyan\_s@yahoo.com)** – кандидат физико-математических наук, Институт механики НАН Армении, г. Ереван.

**Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Демьянов Юрий Андреевич (caf-mm@mgul.ac.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский лесотехнический институт, г. Королев Московской области.

**Зубчанинов Владимир Георгиевич (vgz@rambler.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь.

**Ивлев Дюис Данилович (ivlev21@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Каюмов Рашит Абдулхакович (kayumov@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный инженерно-строительный университет, г. Казань.

**Климов Дмитрий Михайлович (klimov@ipmnet.ru)** – Академик РАН, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Ковалев Владимир Александрович (koval@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва.

**Ломакин Евгений Викторович (lomakin@nw.math.msu.su)** – член-корреспондент РАН, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Максимова Людмила Анатольевна (maximova\_ng@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, ГОУ ВПО “Филиал Санкт-Петербургского

государственного инженерно-экономического университета” в г. Чебоксары, г. Чебоксары.

**Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики РАН, г. Москва.

**Маркин Алексей Александрович (markin@tsu.tula.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Матченко Николай Михайлович (екс\_05@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Миронов Борис Гурьевич (prorektor@chdpu.edu.ru)** – доктор физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (irakon63@hotmail.com)** – доктор физико-математических наук, профессор, Азербайджанский технический университет, г. Баку.

**Михайлов Глеб Константинович (gkmikh@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт научно-технической информации РАН, г. Москва.

**Немировский Юрий Владимирович (nemirov@itam.nsc.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

**Непершин Ростислав Иванович (rostislav\_n@mtu-net.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный технический университет “СТАНКИН”, г. Москва.

**Победря Борис Ефимович (rob@mail.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

**Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, г. Самара.

**Ревуженко Александр Филиппович (revuzhenko@yandex.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск.

**Редкозубов Сергей Алексеевич (marucbka434@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, г. Москва.

**Сенашов Сергей Иванович (sen@sibsau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск.

**Спрыхин Анатолий Николаевич (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

**Тамуж Витаутас Петрович (tamuzs@pmi.lv)** – доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Латвии, Институт механики полимеров АНЛ, г. Рига.

**Тихонов Сергей Владимирович (strangcheb@mail.ru)** – кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары.

**Трещев Александр Анатольевич (taa58@yandex.ru)** – доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула.

**Хромов Александр Игоревич (khromovai@list.ru, khromov@ssau.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара.

**Чигарев Анатолий Власович (chigarev@rambler.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технический университет им. Скорины, г. Минск.

**Шашкин Александр Иванович (shashkin@amm.vsu.ru)** – доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния» издается с 2007 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Чувашским государственным педагогическим университетом им. И. Я. Яковлева с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде.

Электронная версия журнала размещается на сайте Чувашского государственного педагогического университета по адресу <http://predel.chgpu.edu.ru>.

В журнале печатаются оригинальные научные результаты по механике предельного состояния и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала и по мере необходимости – специальные выпуски. Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Все присланные работы проходят обязательное рецензирование. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Чувашскому государственному педагогическому университету им. И. Я. Яковлева.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию.

Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. Редакция просит авторов при оформлении работ придерживаться следующих правил и рекомендаций:

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронный вариант (на дискете или на адрес [predel21@mail.ru](mailto:predel21@mail.ru)). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке; краткую аннотацию (объем до 500 знаков), которая дается перед основным текстом; список ключевых слов; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; **название работы на английском языке** с указанием всех авторов; **список ключевых слов на английском языке**; **аннотацию на английском языке**; **сведения о всех авторах на русском**

**и английском языках:** должность, степень, звание, вуз, его полный почтовый адрес, email. Название работы должно адекватно отражать ее содержание и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК).

4. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы Latex 2 $\epsilon$  с использованием стиля predel.sty. Стиль predel.sty и пример оформления статьи размещен на сайте издания. Рисунки представляются отдельно в формате wmf, jpg с разрешением не менее 600 dpi. Изменение стандартных стилевых файлов недопустимо.

5. Библиографические ссылки оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. В случае существенной переработки статьи указывается также дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки она вновь рассматривается редколлегией журнала.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Климов Д. М., Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.</i> К 80-летию Д.Д. Ивлева . . . . .	5
Дорогой учитель! . . . . .	39
<i>Амензаде Р. Ю., Мехтиева Г. Ю., Фатуллаева Л. Ф.</i> Вариационный метод нелинейной наследственной механики твердых тел . . . . .	42
<i>Аннин Б. Д., Алёхин В. В.</i> Численное решение задачи Коши для уравнений идеальной пластичности с условием текучести, зависящим от среднего напряжения . . . . .	55
<i>Баженов В. Г., Ломунов В. К., Осетров С. Л.</i> Анализ применимости жесткопластической модели в задачах статического и динамического изгиба пластин . . . . .	61
<i>Бажин А. А., Мурашкин Е. В.</i> Математическое моделирование усложненных реологических свойств материалов в условиях больших деформаций . . . . .	71
<i>Богданов М. В., Ковалев А. В., Яковлев А. Ю.</i> О механическом взаимодействии элементов упругопластической конструкции с учетом трансляционного упрочнения . . . . .	77
<i>Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.</i> Вязкозметрическое течение упруговязкопластической среды, ослабленной слоем более податливого материала . . . . .	83
<i>Вервейко Н. Д., Ерохина Е. Н., Ковалев А. В.</i> Осесимметричная плоская упругопластическая задача механики вязких сыпучих сред . . . . .	100
<i>Глаголев В. В., Маркин А. А.</i> О влиянии упрочнения материала на формирование напряженного состояния тупиковой области трещины нормального отрыва . . . . .	106
<i>Гоцев Д. В., Спорыхин А. Н.</i> Устойчивость горных выработок в пористых массивах со сложной реологией сжатого скелета . . . . .	118
<i>Гузъ А. Н.</i> О построении нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемых тел . . . . .	131
<i>Давыдов Д. В., Мяснянкин Ю. М., Чуфринова Е. Д.</i> О сжатии тонкого анизотропно упрочняющегося слоя криволинейными шероховатыми плитами . . . . .	138
<i>Зиновьев И. Н., Чеботарёв А. С.</i> Применение метода Римана в задачах плоской деформации теории идеальной пластичности с круговой границей . . . . .	146
<i>Зубчанинов В. Г.</i> Обобщенный критерий полной и неполной пластичности сплошных сред . . . . .	161

<i>Зубчанинов В. Г., Алексеева Е. Г.</i> Моделирование процессов сложного упруго-пластического деформирования материалов .....	172
<i>Ивлев Д. Д., Непершин Р. И.</i> Давление плоского штампа на ортотропное идеально пластическое полупространство .....	182
<i>Кирсанов М. Н.</i> Точки неустойчивости дифференциального уравнения .....	191
УЧАСТНИКИ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА .....	198
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ .....	201
СОДЕРЖАНИЕ .....	203

**ВЕСТНИК  
ЧУВАШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**

**СЕРИЯ: МЕХАНИКА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ  
2010. № 2(8). Ч. 1**

**Отв. за выпуск:** С. В. Тихонов

**Технические редакторы:** Л. Н. Улюкова, И. А. Федянина

**Компьютерная верстка:** Т. В. Митрофанова, С. О. Фоминых

**Макет:** Т. В. Митрофанова, С. О. Фоминых

---

Подписано в печать 26.11.2010. Формат 70x100/8. Бумага писчая.  
Печать оперативная. Typeset by LaTeX2e.  
Усл. печ. л. 25,6. Тираж 400 экз. Цена свободная. Заказ №2107

---

Отпечатано в отделе полиграфии ГОУ ВПО «Чувашский государственный  
педагогический университет им. И. Я. Яковлева»  
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38