

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ОРТОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ

*Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика  
М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия*

**Аннотация.** Изучается упругопластическое кручение однородного прямолинейного стержня с ортотропной анизотропией. Предполагается, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии. Построена бесконечная система законов сохранения, зависящая линейно от компонент тензора напряжений. Законы сохранения позволили свести задачу об определении напряженного состояния во внутренних точках стержня к вычислению интегралов по границе контура сечения. Это дало возможность определить упругопластическую границу внутри поперечного сечения, которое ограничено произвольным кусочно-гладким контуром.

**Ключевые слова:** упругопластическое кручение, ортотропный стержень, упругопластическая граница, законы сохранения.

УДК: 539.374

1. Введение. Ортотропной анизотропией обладают многие конструкционные материалы. Такая анизотропия возникает из-за технологической обработки: прокатки, сварки и т. п. [1]. Поэтому изучение поведения ортотропных материалов под действием различных нагрузок является актуальной задачей. В предлагаемой работе изучается упругопластическое кручение ортотропных стержней. Постановка задач и подробный анализ состояния задач об упругопластическом кручении изотропных стержней подробно изложены в книге [2]. Там, в частности, отмечено, что решение такой задачи еще далеко от завершения и имеются только некоторые частные решения для определенных видов поперечных сечений. В работах одного из авторов статьи [3] предложен метод построения упругопластической границы для изотропных стержней. Этот

---

© Сенашов С. И., Филюшина Е. В., 2016

*Сенашов Сергей Иванович*

e-mail: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

*Филюшина Елена Владимировна*

e-mail: filyushina@sibsau.ru, кандидат физико-математических наук, Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (проект № Б-180-14).

Поступила 11.01.2016

метод основан на построении системы законов сохранения. Методы законов сохранения хорошо зарекомендовали себя при решении краевых задач идеальной пластичности [4],[5]. Теперь подобная методика начинает успешно применяться для решения упругопластических задач. Предложенная методика позволяет построить упругопластическую границу для ортотропных стержней, например, прокатных профилей, что позволяет точно определять прочностные характеристики стержней. Построенные в процессе решения задачи, аналитические выражения можно использовать для создания программ, позволяющих визуализировать упругопластические границы для ортотропных стержней. Это уже сделано для изотропных стержней [6],[7] и планируется сделать для ортотропных.

2. Постановка задачи. Пусть однородный стержень обладает ортотропной анизотропией, такой, что плоскость симметрии нормальна к образующей, т. е. совпадает с плоскостью поперечного сечения. Предположим, что усилия распределены по торцам и на каждом из них возникает скручивающий момент  $M_t$ .

$$M_t = \iint (x\tau_{23} - y\tau_{13}) dx dy$$

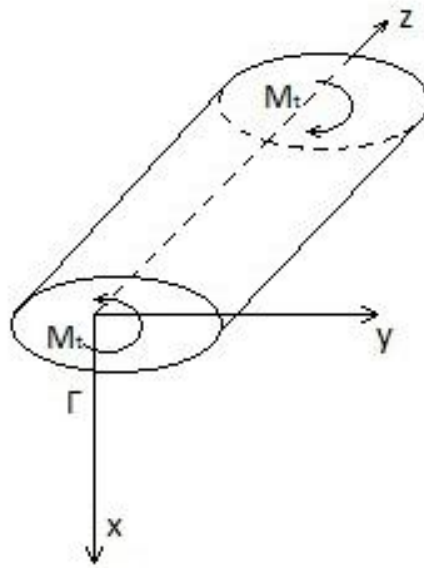


Рис. 1. Скручиваемый ортотропный стержень

В стержне, при достаточно большом значении скручивающего момента, возникают две зоны: упругая и пластическая. Рассмотрим упругую область. В этом случае задача сводится к определению двух компонент тензора напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , которые связаны с компонентами тензора деформаций с помощью обобщенного закона Гука [1]:

$$\frac{1}{G_2}\tau_{xz} = \varepsilon_{xz}, \frac{1}{G_1}\tau_{yz} = \varepsilon_{yz}, \quad (1)$$

где  $G_1, G_2$  – модули сдвига для плоскостей  $yz$  и  $xz$ .

Пусть, как это принято в задачах кручения, компоненты вектора перемещения имеют вид

$$u = -\theta yz, v = \theta xz, w = -\theta\varphi(x, y), \quad (2)$$

где  $\theta$  – относительный угол закручивания (крутка).

При этих предположениях из (1) получаем условия совместности

$$F_1 = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{G_1} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + 2\theta = 0. \quad (3)$$

Это уравнение и уравнение равновесия

$$F_2 = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

дают возможность определить компоненты тензора напряжений в упругой области.

Граничное условие получаем из предположения, что боковая поверхность свободна от напряжений. Это условие имеет вид:

$$\tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) = \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим пластическую область. Предполагается, что торцевые моменты  $M_t$  таковы, что в стержне возникают пластические зоны. Пусть в пластической зоне выполняется условие пластичности

$$2a_{13}\tau_{xz}^2 + 2a_{23}\tau_{yz}^2 = 1, \quad (6)$$

где параметры  $a_{13}, a_{23}$  характеризуют текущее состояние пластической анизотропии.

Предполагаем, что пластическая область охватывает всю боковую поверхность (рис. 2).

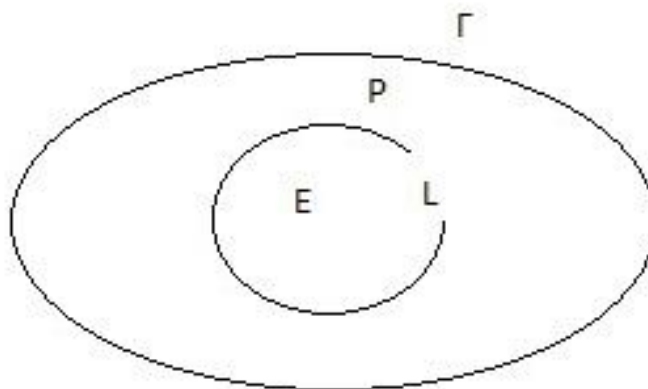


Рис. 2.  $\Gamma$  – внешняя граница,  $L$  – упруго-пластическая граница,

$P$  – пластическая область,  $E$  – упругая область

Необходимо решить следующую задачу: при сделанных выше предположениях определить неизвестную границу  $L$ .

3. Методика построения решения.

Определение. Пусть  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$  – система двух дифференциальных уравнений от двух независимых переменных. Законом сохранения называется соотношение

$$\partial_x A + \partial_y B = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0,$$

которое выполняется на всех решениях системы  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$ .

Здесь  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  – некоторые линейные дифференциальные операторы. Вектор  $(A, B)$  называется сохраняющимся током. Построим законы сохранения для системы уравнений (3), (4). Сохраняющийся ток ищем в виде

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (7)$$

где  $\tau_{xz} = u$ ,  $\tau_{yz} = v$ ,  $\alpha^i$ ,  $\beta^i$ ,  $\gamma^i$  – функции только  $x$ ,  $y$ . Тогда закон сохранения запишется так:

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2. \quad (8)$$

В этом случае операторы  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  сводятся к умножению на некоторые функции  $\omega_i$  от независимых переменных. Подставляя (7) в (8), получаем

$$\alpha_x^1 u + \alpha_x^2 u + \alpha_y^1 u + \alpha_y^2 u + \beta_x^1 v + \beta_x^2 v + \beta_y^1 v + \beta_y^2 v + \gamma_x^1 + \gamma_x^2 = \omega_1 \left( \frac{1}{G_2} u_y - \frac{1}{G_1} v_x + 2\theta \right) + \omega_2 (u_x + v_y). \quad (9)$$

Поскольку соотношение (9) выполняется тождественно, все коэффициенты при искомыми функциями и их производных  $u$ ,  $v$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  должны быть равны нулю. В результате получаем

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \alpha^1 = \omega_2, \beta^1 = -\frac{\omega_1}{G_1}, \alpha^2 = \frac{\omega_2}{G_2}, \beta^2 = \omega_2, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 2\theta\omega_1.$$

Отсюда следует

$$\alpha^1 = \beta^2 = \omega_2, \beta^1 G_1 = -\alpha^2 G_2 = -\omega_1, \alpha_x^1 - \beta_y^1 \frac{G_1}{G_2} = 0$$

$$\beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, G_2 \alpha_x^1 - \beta_y^1 G_1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0$$

Для нахождения  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$  необходимо решить уравнения

$$G_2 \alpha_x^1 - G_1 \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0 \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует, что исследуемая система уравнений допускает бесконечное число нетривиальных законов сохранения. Будем искать два особых решения уравнений (10), т.е. такие решения, которые имеют особенность в точке  $(0,0)$ .

Первое решение уравнений (10), его обозначим  $\alpha_1^1$ ,  $\beta_1^1$  ищем в виде:

$$\alpha_1^1 = y(x^2 + k^2 y^2)^p, \beta_1^1 = x(x^2 + k^2 y^2)^p, \quad (11)$$

где  $k$ ,  $p$  – некоторые постоянные.

Подставляем (3.11) в (3.10), имеем:

$$p = -1, k^2 = \frac{G_2}{G_1}.$$

Второе решение уравнений (10), обозначим его  $\alpha_2^1$ ,  $\beta_2^1$ , ищем в виде:

$$\alpha_2^1 = x(x^2 + k^2 y^2)^p, \beta_2^1 = -y(x^2 + k^2 y^2)^p. \quad (12)$$

Здесь также  $p = -1$ ,  $k^2 = \frac{G_2}{G_1}$ .

Поскольку система уравнений (10) допускает преобразования трансляции

$$y' = y + y_0, x' = x + x_0,$$

где  $x_0, y_0$  – произвольные постоянные, то решения (11), (12) можно записать в виде:

$$\alpha_1^1 = \frac{(y - y_0)}{r}, \beta_1^1 = \frac{(x - x_0)}{r}, \alpha_2^1 = \frac{(x - x_0)}{r}, \beta_2^1 = -\frac{(y - y_0)}{r}, \quad (13)$$

где  $r = (x - x_0)^2 + \frac{G_2}{G_1}(y - y_0)^2$ .

Преобразуем полученные законы сохранения. Закон сохранения (8) можно записать по формуле Грина:

$$\int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dy = 0,$$

где  $\Gamma$  – произвольный кусочно-гладкий контур.

Пусть  $x_0, y_0$  – некоторые точки в области, охватываемой контуром  $\Gamma$ . Рассмотрим эллипс, внутри которого находится точка  $x_0, y_0$ . Тогда получаем (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dy + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \\ & + \int_{(x-x_0)^2+k^2(y-y_0)^2=\varepsilon^2} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx + \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Обход по контурам совершается так, что особая точка остается вне области, охватываемой контурами. Поскольку  $\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = 0$ , то получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dy = \\ & = - \int_{(x-x_0)^2+k^2(y-y_0)^2=\varepsilon^2} (\alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1) dx + \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta^1 u + \alpha^1 v + \gamma_2 \right) dx. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь интеграл в правой части вычисляется по эллипсу  $\mathcal{E}$ :  $(x-x_0)^2+k^2(y-y_0)^2 = \varepsilon^2$ , в центре которого находится особая точка.

Пусть  $\alpha^1 = \alpha_1^1, \beta^1 = \beta_1^1$  из (13), вычислим интеграл в правой части (14). Имеем:

$$- \int_{\mathcal{E}} (\alpha_1^1 u + \beta_1^1 v + \gamma_1^1) dx + \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta_1^1 u + \alpha_1^1 v + \gamma_2^1 \right) dy. \quad (15)$$

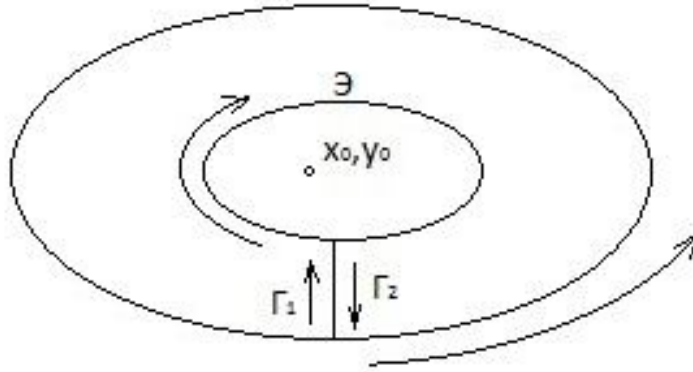


Рис. 3. Стрелочками показано направление обхода границ

Пусть  $x - x_0 = \varepsilon \sin \phi$ ,  $k(y - y_0) = \varepsilon \cos \phi$ , тогда  $\alpha_1^1 = \frac{1}{k} \frac{\cos \phi}{\varepsilon}$ ,  $\beta_1^1 = \frac{\sin \phi}{\varepsilon}$  и выражение (15) запишется так:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{k} \frac{\cos \phi}{\varepsilon} u + \frac{\sin \phi}{\varepsilon} + \gamma^1 \right) \varepsilon \cos \phi d\phi + \\
 & + \int_0^{2\pi} \left( -\frac{G_1}{G_2} \frac{\sin \phi}{\varepsilon} u + \frac{1}{k} \frac{\cos \phi}{\varepsilon} + \gamma^2 \right) \varepsilon \sin \phi d\phi = \\
 & = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\cos^2 \phi}{\varepsilon} - \frac{G_1}{G_2} \frac{1}{k} \sin^2 \phi \right) u + \left( \cos \phi \sin \phi + \frac{1}{k^2} \cos \phi \sin \phi \right) d\phi = \\
 & = \frac{u(x_0, y_0)}{2k} \int_0^{2\pi} \left( -1 - \frac{G_1}{G_2} \right) d\phi = \frac{u(x_0, y_0)}{2k} \left( -1 - \frac{G_1}{G_2} \right) \pi.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x_0, y_0) \frac{G_1 + G_2}{G_2 k} = - \int_{\Gamma} (\alpha_1^1 u + \beta_1^1 v + \gamma_1^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta_1^1 u + \alpha_1^1 v + \gamma_1^2 \right) dy. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим второе решение  $\alpha^1 = \alpha_2^1$ ,  $\beta^1 = \beta_2^1$ .

Поступая так же, как в первом случае, имеем:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Theta} (\alpha_2^1 u + \beta_2^1 v + \gamma_2^1) dx - \left( -\frac{G_1}{G_2} \beta_2^1 u + \alpha_1^1 v + \gamma_2^2 \right) dy = \\
& = \int_{\Theta} \left( \frac{(x-x_0)}{r} u - \frac{(y-y_0)}{r} v + \gamma_2^1 \right) dx - \left( \frac{G_1}{G_2} \frac{(y-y_0)}{r} u + \frac{(x-x_0)}{r} v + \gamma_2^2 \right) dy = \\
& = \int_0^{2\pi} \pi_0 \left( \frac{\sin \phi}{\varepsilon} u - \frac{\cos \phi}{\varepsilon k} v + \gamma_2^1 \right) \varepsilon \cos \phi d\phi - \left( \frac{G_1}{G_2} \frac{\cos \phi}{\varepsilon k} u + \frac{\sin \phi}{\varepsilon} v + \gamma_2^2 \right) (-\sin \phi) \varepsilon d\phi = \\
& = \int_0^{2\pi} \pi_0 \left( \frac{\cos^2 \phi}{k} + \sin^2 \phi \right) d\phi = v(x_0, y_0) \left( \frac{1}{k} + 1 \right) \pi.
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$v(x_0, y_0) \frac{k}{\pi(k+1)} = \int_{\Gamma} (\alpha_2^1 u + \beta_2^1 v + \gamma_2^1) dx - (-\beta_2^1 u + \alpha_2^1 v + \gamma_2^2) dy. \quad (17)$$

Теперь осталось вычислить интеграл в правых частях формул (16), (17). Для этого воспользуемся формулами (5) и (6). Они позволяют вычислить  $u = \tau_{xz}$ ,  $v = \tau_{yz}$  на  $\Gamma$ . Имеем:

$$ul_1 + vl_2 = 0, 2a_{13}u^2 + 2a_{23}v^2 = 1.$$

Отсюда получаем выражения для  $u = \tau_{xz}$ ,  $v = \tau_{yz}$  на  $\Gamma$ .

$$u = -\frac{l_2}{l_1} v, 2a_{13} \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^2 v^2 + 2a_{23}v^2 = 1,$$

$$v^2 = \frac{l_1^2}{2(a_{13}l_2^2 + a_{23}l_1^2)}, v = \pm \frac{l_1}{\sqrt{2(a_{13}l_2^2 + a_{23}l_1^2)}}, \quad (18)$$

$$u = \mp \frac{l_2}{\sqrt{2(a_{13}l_2^2 + a_{23}l_1^2)}}. \quad (19)$$

В соответствии с торцевыми моментами (см. рис. 1) в формулах (18) и (19) выбираем верхний знак.

Полученные формулы подставляем в (16) и (17) и находим выражения для  $u = \tau_{xz}$ ,  $v = \tau_{yz}$  во всех точках в области, ограниченной контуром  $\Gamma$ . Это позволяет определить пластическую и упругую зоны. Те точки, где  $2a_{13}\tau_{xz}^2 + 2a_{23}\tau_{yz}^2 < 1$ , принадлежат упругой зоне, остальные попадают в пластическую зону.

4. Заключение. Результаты, полученные в этой работе, еще раз показывают, что использование законов сохранения эффективно для решения краевых задач. Глобальные по своей сути, они позволяют свести решение краевой задачи к нескольким квадратурам.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.  
 [2] Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.

[3] Сенашов С.И., Черепанова О.Н., Кондрин А.В. Об упругопластическом кручении стержня // Вестник СибГАУ. 2013. В. 3(49). С. 100-103.

[4] Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Издательство СО-РАН, 2001. 190с.

[5] Сенашов С.И., Гомонова О.В., Яхно А.Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Красноярск: СибГАУ, 2012. 137 с.

[6] Сенашов С.И., Черепанова О.Н., Кондрин А.В., Филюшина Е.В. Расчет напряженного состояния во внутренних точках упругопластического стержня постоянного сечения. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013618484.

[7] Сенашов С.И., Черепанова О.Н., Кондрин А.В., Яхно А.Н., Филюшина Е.В. Построение упругопластической границы, возникающей при кручении прямолинейного стержня с сечением прямоугольной формы. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 20146616472.



S. I. Senashov, E. V. Filyushina

### ELASTIC-PLASTIC TORSION BAR ORTHOTROPIC

*Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk, Russia*

**Abstract.** We study the elastic - plastic torsion uniform rectilinear rod orthotropic anisotropy. It is assumed that a side surface the rod is free from stresses and stored in a plastic state. Built infinite system of conservation laws, which depends linearly on the components of the stress tensor. The conservation laws allow to reduce the problem of determining the state of stress in the interior points of the rod to the calculation of integrals over the boundary of the contour section. This made it possible to determine elastic - plastic boundary within the cross section, which is limited arbitrary piecewise smooth contour.

**Keywords:** elastic - plastic torsion, orthotropic rod elastic - plastic boundary conservation laws

### REFERENCES

- [1] Lehnitsky S.G. The theory of elasticity of an anisotropic body. M: Nauka, 1977. 416 p. (in Russian)
- [2] Annin B.D., Cherepanov G.P. Elasto - plastic problem. Novosibirsk: Nauka, 1983. 238 p. (in Russian)
- [3] Senashov S.I., Cherepanova O.N., Kondrin A.V. On the elastic-plastic torsion bar // Herald SibSAU 2013, B. 3 (49). P. 100-103.
- [4] Kiriakov P.P., Senashov S.I., Yahno A.N. Application of symmetries and conservation laws to solving differential equations. Novosibirsk: Publishing SORAN 2001. 190 p. (in Russian)
- [5] Senashov S.I., Gomonova O.V., Yahno A.N. Mathematical problems of two-dimensional equations of the perfect plasticity. Krasnoyarsk: Siberian State Aerospace University, 2012. 137 p. (in Russian)
- [6] Senashov S.I., Cherepanova O.N., Kondrin A.V., Filyushina E.V. The calculation of the stress state in the interior of elastic-plastic rod of constant cross section. Certificate of state registration of the computer number 2013618484
- [7] Senashov S.I., Cherepanova O.N., Kondrin A.V., Yahno A.N., Filyushina E.V. Building elastoplastic border arising torsional straight rod with rectangular cross-section. Certificate of state registration of the computer number 20146616472

---

*Senashov Sergei Ivanovich*

**e-mail:** sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk, Russia.

*Filyushina Elena Vladimirovna*

**e-mail:** filyushina@sibsau.ru, Ph. D. Sci. Phys. & Math., Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk, Russia.