

О. В. Дудко^{1,2}, А. А. Лаптева¹, В. Е. Рагозина¹

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОЛН В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ ЕЕ ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

¹Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
г. Владивосток, Россия

²Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Рассматриваются особенности возникновения и распространения одномерных сферических центрированных волн в разномодульной упругой среде. Построены решения нестационарных краевых задач со сходящимися и расходящимися волнами, возникающими в разномодульной среде вследствие воздействия в режиме „сжатие с последующим растяжением“ на границу сферы, границу сферической полости. Для частного случая квадратичной функции перемещения точек нагружаемой границы вычислены моменты возникновения центрированных волн, отличные от времени смены направления граничного воздействия.

Ключевые слова: разномодульная упругая среда, динамическое деформирование, сферическая симметрия, слабый разрыв, центрированная волна.

УДК: 539.374

Введение. Классическая линейная теория упругости, основанная на постулате о нормально-изотропном поведении упругих сред с линейной зависимостью между напряжениями и деформациями, рассматривает идеализацию механических свойств реальных материалов. Это существенно упрощает определяющие модельные соотношения и методы решения краевых задач теории. Однако хорошо известно, что большинство природных и конструкционных материалов нельзя считать линейно-упругими, особенно при изучении их динамического деформирования. Примером здесь могут

© Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е., 2016

Дудко Ольга Владимировна

e-mail: dudko@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Лаптева Анастасия Александровна

e-mail: lanastal@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Рагозина Виктория Евгеньевна

e-mail: ragoza@vlc.ru, кандидат физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия.

Поступила 27.12.2015

служить горные породы, грунты, различные связанные сыпучие или пористые среды, которые могут выдерживать значительные сжимающие нагрузки и практически не сопротивляться растягивающим усилиям. Учет подобных специфических механических свойств (нелинейной связи между напряжениями и деформациями, разномодульности) приводит к неклассическим моделям упругих сред (например, [1], [2]). Нелинейность, наличие сингулярности в деформационном поведении вносят новые качественные особенности в решения краевых задач динамики деформирования.

Определяющие соотношения. Модельные соотношения динамического деформирования изотропной упругой среды запишем в прямоугольной декартовой системе координат, пренебрегая тепловыми эффектами и вводя предположение об отсутствии массовых сил:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}), \\ v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}), \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left\{ 1 - 2J_1 + 2J_1^2 - 2J_2 - \frac{4}{3}J_1^3 + 4J_1 J_2 - \frac{8}{3}J_3 \right\}^{1/2}, \\ J_1 &= \alpha_{kk}, \quad J_2 = \alpha_{ik} \alpha_{ki}, \quad J_3 = \alpha_{ik} \alpha_{kj} \alpha_{ji}. \end{aligned} \tag{1}$$

В системе (1) компоненты вектора перемещений и скорости перемещений точек среды u_i, v_i являются функциями пространственных эйлеровых переменных (x_1, x_2, x_3) и времени t ; σ_{ij}, α_{ij} — компоненты тензоров напряжений Коши и тензора деформаций Альманси; ρ_0, ρ — плотность среды в начальном и текущем состоянии; δ_{ij} — символ Кронеккера; J_1, J_2, J_3 — инварианты тензора деформаций Альманси; индексом после запятой обозначена частная производная по пространственной переменной, точкой — по времени. Упругий потенциал W является эмпирической функцией состояния, которая задает механические свойства материала и замыкает систему модельных соотношений (1). В случае изотропии среды упругий потенциал зависит только от инвариантов тензора деформаций. Ранее в [3] были рассмотрены особенности возникновения и распространения плоских волн в рамках модели [2], использующей упругий потенциал $W(J_1, J_2, J_3)$ в виде разложения в ряд по сферическим функциям и описывающей разномодульные дилатирующие материалы. Учет эффекта дилатации, не затрудняющий изучения плоских волновых фронтов, существенно усложняет определяющие соотношения при переходе к криволинейным координатам. Так, решение простейших одномерных задач, аналогичных полученным в [3], в случае сферической симметрии в рамках модели [2] невозможно получить в аналитическом виде. Поэтому при изучении сферических волн воспользуемся подходом, заложенным в [1] и [2], но упругий потенциал зададим в виде [4]:

$$\begin{aligned} W(I_1, I_2) &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 |I_1| = \frac{\tilde{\lambda}}{2} I_1^2 + \mu I_2, \\ \tilde{\lambda} &= \lambda - 2\nu \text{Sign}(I_1), \quad \text{Sign}(I_1) = \begin{cases} 1, & I_1 > 0, \\ -1, & I_1 < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

где λ, μ — параметры Ламэ, ν — упругий модуль, отвечающий за объемную разномодульность среды, I_1, I_2 — главные инварианты тензора малых деформаций. Потенциал (2) определяет разномодульные свойства среды путем включения дополнительного слагаемого особого вида, благодаря которому сингулярность учитывается фактически

за счет зависимости первого параметра Ламе $\tilde{\lambda}$ от типа деформированного состояния ($I_1 > 0$ — сжатие, $I_1 < 0$ — растяжение). При сферически симметричных одномерных движениях, когда компоненты тензора малых деформаций выражаются только через одно ненулевое радиальное перемещение $u_r(r, t)$, упругий потенциал (2) с инвариантами $I_1 = u_{r,r} + 2\frac{u_r}{r}$, $I_2 = u_{r,r}^2 + 2\left(\frac{u_r}{r}\right)^2$ позволяет получить из системы (1) уравнение движения точек среды в следующей форме:

$$c_{\pm}^2 \left\{ u_{r,rr} + 2\frac{u_{r,r}}{r} - 2\frac{u_r}{r^2} \right\} = \ddot{u}_r, \quad (3)$$

$$c_{\pm} = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda} + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda \pm 2\nu + 2\mu}{\rho}} = \begin{cases} c_+, & I_1 < 0, \\ c_-, & I_1 > 0. \end{cases}$$

Здесь характеристическая скорость c_{\pm} принимает различные значения c_+ , c_- при разных знаках первого инварианта тензора малых деформаций I_1 (для определенности примем $c_+ > c_-$ при $\nu > 0$). Так как инвариант I_1 в случае сферической симметрии равен сумме двух слагаемых, каждое из которых может быть как положительным, так и отрицательным, то переход от состояния сжатия ($I_1 < 0$) к состоянию растяжения ($I_1 > 0$) или наоборот может достигаться при всевозможных соотношениях между значениями $u_{r,r}$, u_r и r . Этот факт вносит в решения краевых задач деформирования разномодульных сред дополнительные особенности. Здесь рассмотрим две краевые задачи о нестационарном граничном воздействии на сферические границы с возникновением в разномодульной среде (2) сходящихся или расходящихся слабых сферических волн.

Краевые задачи со сходящимися и расходящимися волнами. Положим, что область первоначально недеформированного разномодульного материала, ограниченная сферической поверхностью радиусом R , с момента времени $t = 0$ подвергается одномерному воздействию в режиме „ударное сжатие с последующим растяжением“. Для этого к границе $r = R$ прикладывается нагрузка, приводящая граничные точки к движению по закону $u_r(R, t) = \phi(t)$ (рис. 1, а). Функция $\phi(t)$ — гладкая, отрицатель-

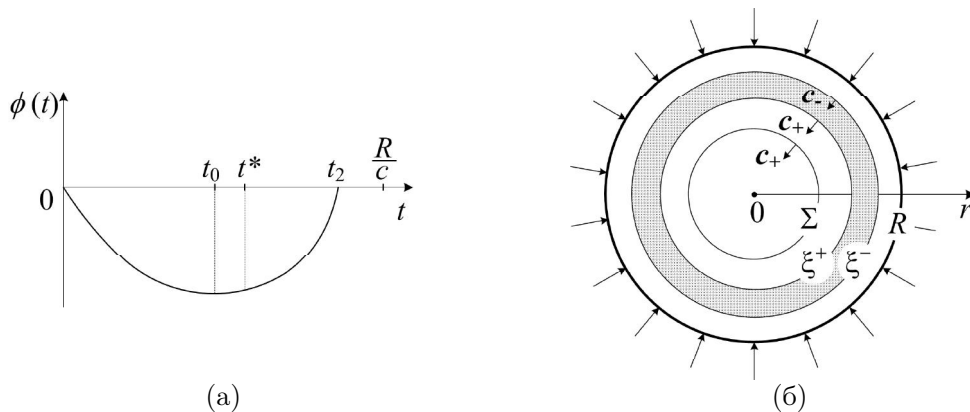


Рис. 1. Нагружение сферы в режиме „сжатие–растяжение“: (а) функция перемещения точек сферической границы $r = R$; (б) волновая картина при $t > t^*$

ная и дважды дифференцируемая на интервале $t \in [0; t_2]$ ($\phi'(0) \neq 0$) — задана таким

образом, что до момента времени $t = t_0 > 0$ ($\phi'(t_0) = 0$) на границу действуют сжимающие усилия, а при $t_0 < t \leq t_2$ — растягивающие. Следует также отметить, что для исключения из рассмотрения эффектов отражения переднего фронта возмущений от центра сферы ($r = 0$) значение t_2 необходимо принять меньшим, чем R/c_{\pm} .

При таком воздействии в момент времени $t = 0$ от сферической границы отделяется передний фронт возмущений — одномерная сходящаяся волна сжатия $\Sigma(t)$, движущаяся к центру сферы со скоростью c_+ (рис. 1, б). При решении аналогичной задачи об одноосном сжатии–растяжении разномодульного полупространства [3] смена направления прикладываемых граничных усилий сразу же (в момент $t = t_0$) инициировала возникновение движущегося слоя недеформированной среды с плоскими слабыми волнами в качестве переднего и заднего фронтов. Здесь же, в случае сходящихся сферических волн, изменение направленности граничного воздействия в момент $t = t_0$ не приводит к одновременному возникновению на границе дополнительных фронтов возмущений. Анализ решения сферически симметричной задачи с уравнением движения (3) показал, что волновой фронт $\xi \in [\xi^+; \xi^-]$, несущий деформации растяжения в область среды, предварительно сжатую волной $\Sigma(t)$, отделяется от границы сферы в момент $t^* > t_0$ ($t^* < t_2 < R/c_+$), т. е. позже момента смены направленности граничных усилий со сжимающих на растягивающие (рис. 1, б). Такое запаздывание в случае сходящихся сферических волн возникает из-за сложной структуры первого инварианта I_1 , для которого t^* — момент выхода его значения в ноль. Таким образом, выбранный режим нагружения внешней границы сферы, занятой разномодульным материалом, приводит при $t = t^*$ к возникновению между областями сжатия и растяжения переходного слоя $[\xi^+; \xi^-]$ — центрированной волны [5], внутри которой $I_1 = 0$. В отличие от плоского случая, внутри такого сферического слоя инвариант I_1 , благодаря своей структуре, может иметь нулевое значение при ненулевых деформациях $u_{r,r}$. Фронты центрированной волны ξ^+ и ξ^- являются слабыми разрывами — волнами ускорений, движущимися с разными скоростями c_+ и c_- (характеристическими скоростями уравнения движения (3)). Ширина центрированной волны $\Delta\xi = \xi^- - \xi^+$ в момент возникновения нулевая, с течением времени увеличивается за счет разницы значений c_+ и c_- .

Полагаем теперь, что сжимающе-растягивающая нагрузка действует изнутри на поверхность сферической полости, вырезанной в бесконечном разномодульном пространстве. По аналогии с предыдущей постановкой перемещения точек границы $r = r_0$ задаем гладкой, положительной на интервале $t \in [0; t_2]$, дважды дифференцируемой функцией $u_r(r_0, t) = \psi(t)$ с максимумом в точке t_0 ($\psi'(t_0) = 0$) (рис. 2, а). Подобное воздействие также вызывает сначала возникновение переднего фронта сжатия $\Sigma(t)$ со скоростью c_+ , вслед за которым в момент t^* от границы полости отделяется расходящийся сферический слой центрированной волны $\xi \in [\xi^+; \xi^-]$ (рис. 2, б) — области нулевого значения инварианта I_1 . Передний и задний слабые фронты центрированной волны движутся с характеристическими скоростями c_+ и c_- соответственно. Отличие от сходящихся волн заключается в моменте возникновения такого эффекта. В данном случае оказывается, что выход первого инварианта деформаций в ноль и, как следствие, возникновение центрированной волны происходят раньше ($t^* < t_0$), чем смена характера воздействия на границе $r = r_0$.

Момент времени t^* , в обоих случаях вычисляемый из условия равенства нулю инварианта I_1 , зависит от вида функции перемещений на нагружаемой границе. Если на границе сферы $r = R$ задана квадратичная функция $\phi(t) = vt + At^2/2$ ($v < 0$,

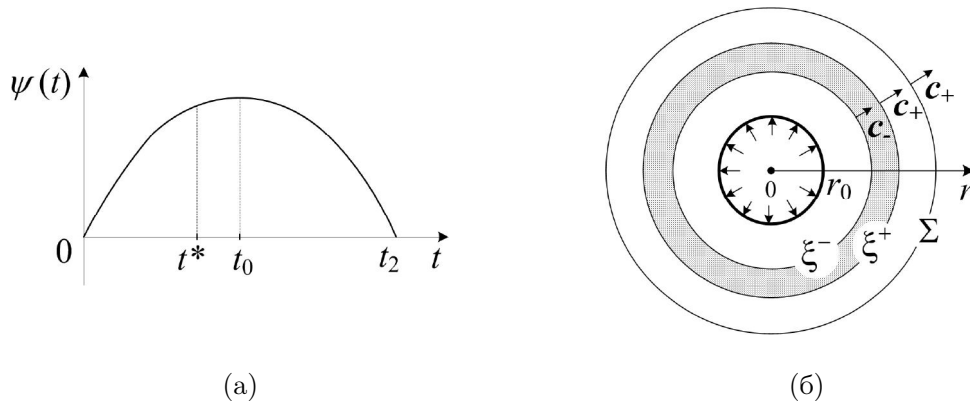


Рис. 2. Нагружение сферической полости в режиме „сжатие–растяжение“:
(а) функция перемещения точек сферической границы $r = r_0$; (б) волновая картина при $t > t^*$

$A > 0$, $\phi(t) \leq 0$ при $t \in [0; t_2]$), то момент возникновения сходящейся центрированной волны равен $t^* = Rc_+^{-1} \ln(RA/(RA + vc_+)) > t_0$. Аналогичным образом получаем время возникновения расходящейся волны $t^* = -r_0c_+^{-1} \ln(r_0A/(r_0A - vc_+)) < t_0$, если на границе сферической полости $r = r_0$ при $t \in [0; t_2]$ задана квадратичная функция $\psi(t) \geq 0$ с параметрами $v > 0$, $A < 0$.

Заключение. В работе получены решения одномерных краевых задач о нестационарном ударном воздействии на сферические границы в разномодульной упругой среде, приводящем к возникновению сходящихся и расходящихся сферических центрированных волн. Показаны принципиальные отличия таких решений не только от известных результатов линейной теории упругости, но и от полученных ранее аналогичных задач деформирования разномодульной среды с плоскими одномерными поверхностями разрывов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
- [2] Мясников В. П., Ляховский В. А. О поведении упругой среды с микронарушениями // Известия АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.
- [3] Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. Т. 6, № 1–2. С. 94–105.
- [4] Дудко О. В., Лаптева А. А., Чигарев А. В. К построению математической модели разномодульной изотропно-упругой среды // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2(16). С. 61–67.
- [5] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: „Московский лицей“, 1998. — 412 с.

O. V. Dudko^{1,2}, A. A. Lapteva¹, V. E. Ragozina¹

ON THE OCCURRENCE OF ONE-DIMENSIONAL SPHERICAL CENTERED WAVES IN THE MULTIMODULUS ELASTIC MEDIUM UNDER DYNAMIC STRAINING

¹*Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia*

²*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

Abstract. The occurrence and distribution features of one-dimensional spherical centered waves in multimodulus elastic medium are considered. The solutions of the nonstationary boundary value problems with convergent and divergent waves that arise in the multimodulus medium due to exposure „compression and then stretching“ in the sphere boundary and the spherical cavity have been built. The moments of occurrence of centered waves have been calculated for the special case of a quadratic move function of boundary points. These moments differ from the time of the change of boundary influence direction.

Keywords: multimodulus elastic medium, dynamic deformation, spherical symmetry, weak break, centered wave

REFERENCES

- [1] Lomakin E. V., Rabotnov Yu. N. Elasticity Theory Relations for Isotropic Bimodular Body // *Izv. AN SSSR. MTT.* 1978. Vol. 6. P. 29–34. (in Russian)
- [2] Myasnikov V. P., Lyakhovsky V. A. The elastic behavior of microfractured media // *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Solid.* 1984. No. 10. (in Russian)
- [3] Dudko O. V., Lapteva A. A., Semyonov K. T. About distribution of flat one-dimensional waves and their interaction with barrier in the media differently reacting to a stretching and compression // *Far Eastern Mathematical Journal.* 2005. Vol. 6. No. 1–2. P. 94–105. (in Russian)
- [4] Dudko O. V., Lapteva A. A., Chigarev A. V. On the construction of mathematical models of multimodulus isotropic elastic medium // *Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state.* 2013. No 2(16). P. 61–67. (in Russian)
- [5] A. G. Kulikovskii and E. I. Sveshnikova, *Nonlinear waves in elastic media*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

Dudko Olga Vladimirovna

e-mail: dudko@iacp.dvo.ru, Ph.D. in Physics and Mathematical Sciences, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

Lapteva Anastasia Alexandrovna

e-mail: lanastal@mail.ru, Ph.D. in Physics and Mathematical Sciences, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.

Ragozina Victoria Evgenevna

e-mail: ragozina@vlc.ru, Ph.D. in Physics and Mathematical Sciences, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.