Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1 (27). С. 70–77

А. В. Ковалев, И. Г. Хвостов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГОМ ШАРЕ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Метод малого параметра применен к решению связанной задачи термоупругости для шара, поверхность которого в начальный момент времени охлаждается и далее поддерживается при постоянной температуре. Получены выражения для полей температуры, перемещения и напряжений в двух приближениях.

Ключевые слова: метод малого параметра, термоупругость, шар, связанная задача термоупругости.

УДК: 539.32

Введение. В настоящее время актуальным вопросам термомеханики, таким как определение напряженно-деформированного состояния тел с различной геометрией с учетом температуры, исследование необратимых деформаций в условиях температурного воздействия и др., посвящены работы многих авторов, например монография [1] и статьи [2]–[5].

Метод малого параметра является довольно широко используемым в механике деформируемого твердого тела в качестве метода нахождения приближенных аналитических решений. Данный метод может быть применен также и в задачах термоупругости. Так, в работе [6] была исследована система уравнений линейной связанной термоупругости с целью получения аналитических решений в виде рядов по параметру связанности системы, а также был исследован вопрос об их сходимости. Было показано на примере связанной задачи термоупругости для полупространства, что при малых значениях параметра связанности решения, полученные методом малого параметра, согласуются с точными решениями. В работе [7] метод малого параметра был использован для построения общего решения центрально-симметричной квазистатической задачи упругости при условии, что все термомеханические характеристики являются функциями температуры. В статье [8] было рассмотрено распространение

Ковалев Алексей Викторович
e-mail: kovalev@amm.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Хвостов Иван Геннадьевич
e-mail: ig_hvostov@mail.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 28.12.2015

плоских гармонических термоупругих волн в анизотропной среде с использованием метода малого параметра.

В данной работе в рамках метода малого параметра получено приближенное аналитическое решение связанной задачи термоупругости для шара.

Постановка задачи. Рассмотрим упругий шар радиуса R с температурой $T = T_0 = const$. В момент времени $t = 0$ поверхность этого шара мгновенно охлаждается до температуры $T = 0$, и эта температура поддерживается. Начальные и граничные условия, таким образом, для температуры будут выглядеть так:

$$T(r,0) = T_0, \quad T(R,t) = 0. \tag{1}$$

Примем также, что на поверхности упругого тела выполняется следующее условие:

$$\sigma_r(R,t) = 0. \tag{2}$$

В соответствии с [9] и [10] запишем систему для связанной осесимметричной задачи термоупругости в сферических координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{\partial T}{\partial r}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r}) - (\frac{1}{a} + \frac{3\alpha_t^2 E T_0}{\lambda_t(1-2\nu)})\dot{T} - \frac{\alpha_t T_0}{\lambda_t}(\dot{\sigma}_r + 2\dot{\sigma}_\theta) = 0, \tag{4}$$

где u — радиальная компонента вектора перемещений, σ_r, σ_θ — компоненты тензора напряжений, λ_t — коэффициент теплопроводности, a — коэффициент температуропроводности, α_t — коэффициент теплового расширения, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, точкой обозначено дифференцирование по времени t.

Построение решения. Для определения приближенного аналитического решения системы будем применять метод возмущений [11]. Для этого введем следующие обозначения [12]:

$$\frac{1}{a} + \frac{3\alpha_t^2 E T_0}{\lambda_t(1-2\nu)} = \frac{1}{\kappa}, \quad \frac{\alpha_t T_0}{\lambda_t} = \delta \cdot d, \tag{5}$$

где δ — малый параметр, κ, d — постоянные величины.

Выполнив разложения, аналогичные [11], для всех функций, входящих в уравнения, начальные и граничные условия связанной задачи термоупругости (1)–(4) с учетом принятых обозначений (5), получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}) - \frac{1}{\kappa}\dot{T}^{(0)} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} - \frac{2u^{(0)}}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \tag{7}$$

– для нулевого приближения.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T^{(n)}}{\partial r}) - \frac{1}{\kappa}\dot{T}^{(n)} = d(\frac{\partial \sigma_r^{(n-1)}}{\partial t} + 2\frac{\partial \sigma_\theta^{(n-1)}}{\partial t}), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial r} - \frac{2u^{(n)}}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} \tag{9}$$

– для всех остальных приближений. Индексы $(n-1)$ и (n) обозначают принадлежность к соответствующему приближению.

Отметим, что граничные и начальные условия для поиска нулевого приближения будут совпадать с условиями для исходной системы, в то время как для последующих приближений начальные и граничные условия будут нулевыми.

Для решения однородного уравнения теплопроводности (6) при заданных условиях воспользуемся методом разделения переменных.

Температура в нулевом приближении запишется в виде [13]

$$T^{(0)}(r,t) = \frac{2RT_0}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(\frac{n\pi r}{R})\exp(-\frac{\kappa n^2\pi^2}{R^2}t). \tag{10}$$

Перейдем к определению полей перемещений и напряжений в нулевом приближении. В рассматриваемой задаче только радиальная компонента перемещения $u(r,t)$ не равна нулю. Через нее компоненты напряжения можно выразить по следующим формулам, верным для всех приближений [14]:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu\frac{u_r}{r} - \alpha_t(1+\nu)T\right], \tag{11}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{u_r}{r} + \nu\frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha_t(1+\nu)T\right]. \tag{12}$$

Здесь G – модуль сдвига, а ν – коэффициент Пуассона. Таким образом, вследствие этого поиск перемещения в нулевом приближении сводится к решению одного дифференциального уравнения (7). Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u^{(0)} = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{\alpha_t}{r^2}\int\limits_0^r x^2T^{(0)}(x,t)\,dx, \tag{13}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, которые подлежат определению из граничных условий. При $R=0$ мы должны иметь $u=0$, откуда следует, что

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_0^r x^2T^{(0)}(x,t)\,dx = 0.$$

Это означает, что в уравнении (13) нужно отбросить слагаемое, содержащее C_2. Постоянная C_1 определяется из условия (2). Тогда, используя уравнение (11), находим

$$\frac{EC_1}{1-2\nu} = \frac{2\alpha_T E}{(1-\nu)R^3}\int\limits_0^R x^2T^{(0)}(x,t)\,dx. \tag{14}$$

Далее, подставив выражение (13) в уравнения (11) и (12), получим компоненты напряжений в следующем виде:

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{2\alpha_t E}{1-\nu}\left[\frac{1}{R^3}\int\limits_0^R x^2T^{(0)}(x,t)\,dx - \frac{1}{r^3}\int\limits_0^r x^2T^{(0)}(x,t)\,dx\right], \tag{15}$$

$$\sigma_\theta^{(0)} = \frac{\alpha_t E}{1-\nu}\left[\frac{2}{R^3}\int\limits_0^R x^2 T^{(0)}(x,t)\,dx + \frac{1}{r^3}\int\limits_0^r x^2 T^{(0)}(x,t)\,dx - T^{(0)}(r,t)\right]. \tag{16}$$

Подставим теперь найденное значение нулевого приближения температуры (10) в подынтегральное выражение в формуле (13) с использованием (14). Вычислив интеграл, получим нулевое приближение радиального перемещения:

$$\begin{aligned} u^{(0)} =& \frac{4\alpha_T(1-2\nu)T_0}{(1-\nu)\pi^2} r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t) + \\ &+ \frac{2(1+\nu)\alpha_T R^2}{(1-\nu)\pi^2 r^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left[\frac{R}{\pi n}\sin(\frac{\pi n r}{R}) - r\cos(\frac{\pi n r}{R})\right]\exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t). \end{aligned} \tag{17}$$

Далее с помощью уравнений (10), (15) и (16) получим компоненты тензора напряжений в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} =& \frac{4\alpha_T E T_0}{(1-\nu)\pi^2}\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \\ &- \frac{R^2}{r^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left[\frac{R}{\pi n}\sin(\frac{\pi n r}{R}) - r\cos(\frac{\pi n r}{R})\right]\exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\}. \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(0)} =& \frac{2\alpha_T E T_0}{(1-\nu)\pi^2}\{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \\ &- \frac{R^2}{r^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left[\frac{R}{\pi n}\sin(\frac{\pi n r}{R}) - r\cos(\frac{\pi n r}{R})\right]\exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \\ &- \frac{\pi R}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(\frac{\pi n r}{R})\exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Перейдем к отысканию неизвестных функций температуры, перемещения и напряжений в первых приближениях. Для этого подставим выражения (18) и (19) в уравнение (8) для $n = 1$. Выполнив необходимые преобразования, получим уравнение теплопроводности с известной правой частью, которое имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}) - \frac{1}{\kappa}\dot{T}^{(1)} = \frac{4d\alpha_T E T_0\kappa}{1-\nu}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^{n+1}\pi n}{Rr}\sin(\frac{\pi n r}{R}) - \frac{3}{R^2})\exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t),$$

решение которого получим с помощью метода разделения переменных. Имеем:

$$T^{(1)}(r,t) = G\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m(n^2-m^2)r}\sin(\frac{\pi m r}{R})\left[\exp(-\frac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \exp(-\frac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\right],$$

где

$$m \neq n, \quad G = \frac{24dR\alpha_T ET_0\kappa}{\pi^3(1-\nu)}.$$

Подставим полученное первое приближение температуры в уравнение (9) для $n = 1$. Решение этого уравнения с учетом нулевых граничных условий будет определяться выражением, аналогичным (13):

$$u^{(1)} = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha_t}{r^2} \int\limits_0^r x^2 T^{(1)}(x,t)\,dx.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем с помощью уравнений, аналогичных (15) и (16), учитывая нулевые граничные условия:

$$C_1 = \frac{2\alpha_T(1-2\nu)}{1-\nu} \int\limits_0^R x^2 T^{(1)}(x,t)\,dx, \quad C_2 = 0.$$

После вычисления интеграла, выполнив необходимые преобразования, получим:

$$u^{(1)} = B_1 r \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{m^2(n^2-m^2)} \left[\exp(-\tfrac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \exp(-\tfrac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\right] +$$
$$+\tfrac{B_2}{r^2} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{m+1}}{m^2(n^2-m^2)} \left(\tfrac{R}{\pi m}\sin(\tfrac{\pi m r}{R}) - r\cos(\tfrac{\pi m r}{R})\right) \left[\exp(-\tfrac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \exp(-\tfrac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\right],$$

где $m \neq n, \quad B_1 = \frac{2\alpha_T G(1-2\nu)}{\pi R(1-\nu)}, \quad B_2 = \frac{\alpha_T RG(1+\nu)}{\pi(1-\nu)}$.

По формулам, аналогичным (15) и (16), найдем первые приближения напряжений:

$$\sigma_r^{(1)} = B_3 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{m^2(n^2-m^2)} \left[\exp(-\tfrac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \exp(-\tfrac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\right] -$$
$$-\tfrac{B_4}{r^3} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{m+1}}{m^2(n^2-m^2)} \left(\tfrac{R}{\pi m}\sin(\tfrac{\pi m r}{R}) - r\cos(\tfrac{\pi m r}{R})\right) \left[\exp(-\tfrac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \exp(-\tfrac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\right],$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = B_3 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{m^2(n^2-m^2)} \left[\exp(-\tfrac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \exp(-\tfrac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\right] +$$
$$+\tfrac{B_4}{2r^3} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{m+1}}{m^2(n^2-m^2)} \left(\tfrac{R}{\pi m}\sin(\tfrac{\pi m r}{R}) - r\cos(\tfrac{\pi m r}{R})\right) \left[\exp(-\tfrac{m^2\pi^2\kappa}{R^2}t) - \exp(-\tfrac{n^2\pi^2\kappa}{R^2}t)\right],$$

где $m \neq n, \quad B_3 = \frac{2\alpha_T EG}{\pi R(1-\nu)}, \quad B_4 = \frac{2\alpha_T ERG}{\pi(1-\nu)}$.

Таким образом, в результате решения связанной задачи о термоупругом шаре в двух приближениях были получены поля температур, перемещений и напряжений:

$$T(r,t) = T^{(0)}(r,t) + \delta T^{(1)}(r,t),$$
$$u(r,t) = u^{(0)}(r,t) + \delta u^{(1)}(r,t),$$
$$\sigma_r(r,t) = \sigma_r^{(0)}(r,t) + \delta\sigma_r^{(1)}(r,t),$$
$$\sigma_\theta(r,t) = \sigma_\theta^{(0)}(r,t) + \delta\sigma_\theta^{(1)}(r,t).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

[2] Горностаев К. К., Ковалев А. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 135–140.

[3] Горностаев К. К., Ковалев А. В. О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 176—184.

[4] Дац Е. П., Мокрин С. Н., Мурашкин Е. В. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе "нагрева – охлаждения" упругопластического шара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 (14). С. 123—132.

[5] Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Велмуруган Р. Вычисление необратимых деформаций в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3(25). С. 168—175.

[6] Soller A. I., Brull M. A. On the solution to transient coupled thermoelastic problems by perturbation techniques // ASME J. Appl. Mech. 1965. Vol. 32. № 2. P. 389–399.

[7] Popovych V. S., Sulym H. T. Centrally symmetric quasistatic problem of thermoelasticity for a temperature sensitive body // Materials Science. 2004. Vol. 40. № 3. P. 365–375.

[8] Chang H. H., Tarn J. Q. A state space formalism and perturbation method for generalized thermoelasticity of anisotropic bodies // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 40. P. 956–975.

[9] Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1965. 204 с.

[10] Подстригач Я. С. и др. Термоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1977. 248 с.

[11] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 206 с.

[12] Ковалев А. В., Хвостов И. Г. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 2 (20). С. 29—35.

[13] Карлслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

[14] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

A. V. Kovalev, I. G. Khvostov

STRESS AND DISPLACEMENT ANALYSIS OF AN ELASTIC BALL IN A THERMAL FIELD

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The method of the small parameter is applied to the coupled thermoelastic problem in a ball. The surface of thermoelastic body is cooled and supported at the constant temperature. The approximations with two components of the temperature, displacement and stresses are given.

Keywords: small parameter method, thermoelasticity, ball, coupled thermoelastic problem.

REFERENCES

[1] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. – Saratov: Publishing house of Saratov University, 2010. 328 p. (in Russian)

[2] Gornostaev K. K., Kovalev A. V. About elastoplastic state of thick-walled tube with given temperature for model of complex environment // Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2015. № 1. P. 135–140. (in Russian)

[3] Gornostaev K. K., Kovalev A. V. About symmetric deformation hardening elastoviscoplastic pipe taking into account temperature // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3 (25). P. 176—184. (in Russian)

[4] Dats E. P., Mokrin S. N., Murashkin E. V. Calculation of accumulated residual deformation during "heating-cooling"the ball elastoplastic // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2012. № 4 (14). P. 123—132. (in Russian)

[5] Dats E. P., Murashkin E. V, Velmurugan R. On computing irreversible strains of the hollow ball under unsteady thermal action // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 3(25). P. 168—175. (in Russian)

[6] Soller A. I., Brull M. A. On the solution to transient coupled thermoelastic problems by perturbation techniques // ASME J. Appl. Mech. 1965. Vol. 32. № 2. P. 389–399.

[7] Popovych V. S., Sulym H. T. Centrally symmetric quasistatic problem of thermoelasticity for a temperature sensitive body // Materials Science. 2004. Vol. 40. № 3. P. 365–375.

[8] Chang H. H., Tarn J. Q. A state space formalism and perturbation method for generalized thermoelasticity of anisotropic bodies // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 40. P. 956–975.

[9] Kovalenko A. D. Introduction to thermoelasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1965. 204 p. (in Russian)

Kovalev Alexey Viktorovich
`e-mail:` kovalev@amm.vsu.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Department of Mechanics and Computer Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.
Khvostov Ivan Gennadyevich
`e-mail:` ig_hvostov@mail.ru, Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

[10] Podstrigach Ya. S. Thermoelasticity of electrically conductive bodies. Kiev: Naukova Dumka, 1977. 248 p. (in Russian)

[11] Ivlev D. D., Yershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian)

[12] Kovalev A. V., Khvostov I. G. Stress and displacement analysis of an elastic space weakened by a spherical cavity in a thermal field // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2014. № 2 (20). P. 29—35. (in Russian)

[13] Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids. M.: Nauka, 1964. 488 p. (in Russian)

[14] Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1975. 576 p. (in Russian)