

С. В. Матвеев, А. Н. Матвеева, С. В. Тихонов

ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ, ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается деформированное состояние анизотропной плоскости с круговым отверстием, подкрепленной включением, ограниченным эксцентричной окружностью. Предполагается, что каждый слой материала обладает свойствами трансляционной анизотропии. В работе определены перемещения в упругой и пластической областях.

Ключевые слова: упругость, пластичность, перемещение, включение, трансляционная анизотропия.

УДК: 539.374

Рассмотрим плоскость с эксцентричным включением, ограниченным окружностью. Плоскость находится в состоянии двуосного растяжения под действием взаимноперпендикулярных усилий p_1 и p_2 на бесконечности, на контуре отверстия действует нормальное давление q (рис. 1).

Условие предельного состояния для включения I примем в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_{11} - k_{21}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_{31})^2 = K_1^2, \quad k_{11}, k_{21}, k_{31}, K_1 - const. \quad (1)$$

Условие предельного состояния для слоя II примем в виде

© Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В., 2016

Матвеев Сергей Владимирович

e-mail: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Матвеева Алена Николаевна

e-mail: roshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-41-02453, 16-31-00511).

Поступила 10.02.2016

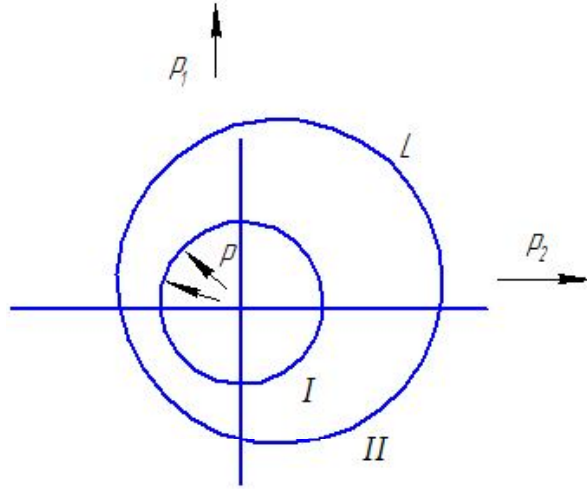


Рис. 1.

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_{12} - k_{22}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_{32})^2 = K_2^2, \quad k_{12}, k_{22}, k_{32}, K_2 - const, \quad (2)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненты напряжения в декартовой системе координат; $k_{11}, k_{21}, k_{31}, K_1, k_{12}, k_{22}, k_{32}, K_2$ – константы анизотропии.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ , будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)} \delta + \sigma_{ij}^{(II)} \delta^2 + \dots, \\ u_n &= u_n^{(0)} + \delta u_n^{(I)} + \delta^2 u_n^{(II)} \dots, \\ v_n &= v_n^{(0)} + \delta v_n^{(I)} + \delta^2 v_n^{(II)} \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение упругопластической границы запишем в виде

$$r_s = r_s^{(0)} + \delta r_s^{(I)} + \delta^2 r_s^{(II)} + \dots \quad (4)$$

Уравнение контура L

$$(x + \delta a)^2 + (y + \delta b)^2 = \alpha_2^2 \quad (5)$$

представим в виде

$$r_L = r_L^{(0)} + \delta r_L^{(I)} + \delta^2 r_L^{(II)} + \dots = \alpha_2 + \delta(-a \cos \theta - b \sin \theta + \alpha_2) + \dots \quad (6)$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В дальнейшем все величины, имеющие размерность длины, отнесем к величине $r_s^{(0)}$. Примем: $\rho_s = r_s/r_s^{(0)}$, $\rho_L = r_L/r_s^{(0)}$. Величины $a\delta/r_s^{(0)}$, $b\delta/r_s^{(0)}$, $(p_1 - p_2)/2k_1$, k_{1n} , k_{2n} , k_{3n} будем считать достаточно малыми, порядка δ и обозначим

$$\begin{aligned} \frac{(p_1 - p_2)}{2k_1} &= d_3 \delta, \quad d_3 = \text{const}, \quad 0 \leq d_3 \leq 1, \\ k_{1n} &= \delta k'_{1n}, \quad k_{2n} = \delta k'_{2n}, \quad k_{3n} = \delta k'_{3n}. \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем компонентам напряжений и перемещений в пластической области будем приписывать индекс p , а в упругой области индекс e .

Граничные условия на бесконечности в упругой области запишем в виде

$$\sigma_{\rho 2}^e = q_0 - \delta \cos(2\theta), \quad \sigma_{\theta 2}^e = q_0 + \delta \cos(2\theta), \quad \tau_{\rho\theta 2}^e = \delta \sin(2\theta). \quad (9)$$

Используя связь между компонентами напряжения в декартовой системе координат x, y и компонентами в полярной системе координат ρ, θ в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) + \tau_{\rho\theta} \sin(2\theta), \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) - \tau_{\rho\theta} \sin(2\theta), \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin(2\theta) + \tau_{\rho\theta} \cos(2\theta), \end{aligned} \quad (10)$$

согласно (10) соотношения (1) и (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{\rho n}^p - \sigma_{\theta n}^p}{2} \right)^2 + \left(\tau_{\rho\theta n}^p \right)^2 - 2R_n \left(\frac{\sigma_{\rho n}^p - \sigma_{\theta n}^p}{2} \right) \cos(2\theta + \mu_n) - \\ - 2\tau_{\rho\theta n}^p R_n \sin(2\theta + \mu_n) + R_n^2 - K_n^2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + k_{3n}^2}, \quad \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2R_n} = \cos(\mu_n), \quad \frac{k_{3n}}{R_n} = \sin(\mu_n).$$

Будем считать, что материал пластины и включения несжимаемы $\mu = \frac{1}{2}$.

Напряженное состояние рассматриваемой плоскости было описано в работе [1]. Используя соответствующие выражения для компонент напряжения, найденные в указанной работе, получим компоненты перемещений в нулевом приближении в упругой области

$$\begin{aligned} u_2^{(0)e} &= \frac{3}{2E} \left(q - 2K_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 2K_2 \ln \frac{1}{\alpha_2} \right) \frac{1}{\rho}, \\ v_2^{(0)e} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно [1], [2] определим компоненты перемещения в упругой области для первого приближения

$$\begin{aligned} u_2^{(I)e} &= -\frac{3\alpha_2(k_1 - k_2)}{\alpha_1 E \rho} - \frac{3(k_2 - k_1)}{2E\rho^2} (a \cos \theta + b \sin \theta) - \frac{3}{E} \left(\rho - \frac{1}{\rho^3} + \frac{4}{\rho} \right) \sin 2\theta + \\ &+ \frac{1}{E} \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right) (a_2'' \cos 2\theta + b_2'' \sin 2\theta) + \frac{1}{E} \left(\frac{2}{\rho^3} + \frac{2}{\rho} \right) (-a_2''' \sin 2\theta + b_2''' \cos 2\theta), \\ v_2^{(I)e} &= -\frac{3(k_2 - k_1)}{2E\rho^2} (a \sin \theta + b \cos \theta) + \frac{1}{E} \left(3\rho + \frac{3}{\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right) \sin 2\theta + \\ &+ \frac{1}{E} \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right) (a_2' \sin 2\theta - b_2' \cos 2\theta) + \frac{1}{E} \left(\frac{2}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \right) (a_2''' \cos 2\theta + b_2''' \sin 2\theta), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
a_2'' &= \alpha_2 I_{11}' \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} I_{22}' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \\
&\quad - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} I_{11}' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + R'_2 \cos \mu_2, \\
b_2'' &= -\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{21}' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{12}' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \alpha_2 T_{21}' \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \sin \mu_2, \\
a_2''' &= \alpha_2 I_{21}' \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 \sqrt{3} I_{12}' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} I_{21}' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \sin \mu_2, \\
b_2''' &= -\frac{2}{3} \sqrt{3} \alpha_2 T_{11}' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \frac{1}{3} \alpha_2 \sqrt{3} T_{22}' \sin(\sqrt{3} \ln \alpha_2) + \\
&\quad + \alpha_2 T_{22}' \cos(\sqrt{3} \ln \alpha_2) - R'_2 \cos \mu_2, \\
T_{11} &= -R'_2 \cos \mu_2 - R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \right\} \cos \mu_1, \\
T_{12} &= R'_2 \sin \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \right\} \sin \mu_1 \\
T_{21} &= R'_2 \cos \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \right\} \cos \mu_1, \\
T_{22} &= R'_2 \sin \mu_2 + R'_1 \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right) \right\} \sin \mu_1.
\end{aligned}$$

Из ассоциированного закона пластического течения и (11) в пластической области получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\rho n}^p &= \lambda_n \left[\frac{\sigma_{\rho n}^p - \sigma_{\theta n}^p}{2} - R'_n \cos(2\theta + \mu_n) \right], \\
\varepsilon_{\theta n}^p &= -\varepsilon_{\rho n}^p, \\
\varepsilon_{\rho \theta n}^p &= \lambda_n \left[\tau_{\rho \theta n}^p - R'_n \sin(2\theta + \mu_n) \right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) получим

$$\frac{\varepsilon_{\rho \theta n}^p}{\varepsilon_{\rho n}^p - \varepsilon_{\theta n}^p} = \frac{\tau_{\rho \theta n}^p - R'_n \sin(2\theta + \mu_n)}{\sigma_{\rho n}^p - \sigma_{\theta n}^p - 2R'_n \cos(2\theta + \mu_n)}. \tag{15}$$

Уравнение несжимаемости в нулевом приближении будет иметь вид

$$\varepsilon_{\rho n}^{(0)p} + \varepsilon_{\theta n}^{(0)p} = 0. \tag{16}$$

Из (16) получим

$$\begin{aligned}
\frac{du_n^{(0)p}}{d\rho} + \frac{u_n^{(0)p}}{\rho} &= 0, \\
v_n^{(0)p} &= 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) получим

$$u_n^{(0)p} = \frac{C_n}{\rho}, \quad C_n = \text{const}. \tag{18}$$

На границе сопряжения слоев будет иметь место следующее условие

$$u_n^{(0)p} = u_{n+1}^{(0)p} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha_n. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует

$$C_n = C_{n+1}. \tag{20}$$

Учитывая (20), решение уравнения (17) будет иметь вид

$$u_n^{(0)p} = \frac{C}{\rho}, \quad C - const. \quad (21)$$

Выражение (21) будет справедливо для всех слоев пластины. Определим компоненты деформаций:

$$\varepsilon_\rho^{(0)p} = \frac{du^{(0)p}}{d\rho} = -\frac{C}{\rho^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(0)p} = \frac{u^{(0)p}}{\rho} = \frac{C}{\rho^2}. \quad (22)$$

Предположим, что $\tau_{\rho\theta n}^{(0)p} = \varepsilon_{\rho\theta n}^{(0)p} = 0$, тогда из условий (12) и (21) получим компоненты перемещения во второй пластической области в нулевом приближении

$$u_2^{(0)p} = \frac{C}{\rho}, \quad v_2^{(0)p} = 0, \quad (23)$$

где

$$C = \frac{3}{E} \left(q - 2K_1 \ln \frac{1}{\alpha_1} - 2K_2 \ln \frac{1}{\alpha_2} \right).$$

В первой пластической области компоненты перемещения будут иметь вид

$$u_1^{(0)p} = \frac{C}{\rho}, \quad v_1^{(0)p} = 0.$$

Из уравнения несжимаемости получим выражения для компонент деформаций в первом приближении:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho n}^{(I)p} + \varepsilon_{\theta n}^{(I)p} &= 0, \quad \varepsilon_{\rho n}^{(I)p} = \frac{\partial u_n^{(I)p}}{\partial \rho}, \\ \varepsilon_{\theta n}^{(I)p} &= \frac{u_n^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_n^{(I)p}}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{\rho\theta n}^{(I)p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_n^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{v_n^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_n^{(I)p}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) получим выражение для компонент перемещения в n -ом слое

$$\frac{\partial u_n^{(I)p}}{\partial \rho} + \frac{u_n^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_n^{(I)p}}{\partial \theta} = 0. \quad (25)$$

Из (15) получим линеаризованное соотношение

$$\left(\sigma_{\rho n}^{(0)p} - \sigma_{\theta n}^{(0)p} \right) \varepsilon_{\rho\theta n}^{(I)p} = \left(\varepsilon_\rho^{(0)p} - \varepsilon_\theta^{(0)p} \right) \left[\tau_{\rho\theta n}^{(I)p} - R'_n \sin(2\theta + \mu_n) \right]. \quad (26)$$

Согласно (22), (24) уравнение (26) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_n^{(I)p}}{\partial \rho} - \frac{v_n^{(I)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_n^{(I)p}}{\partial \theta} = \\ & = \frac{2C}{K_n \rho^2} R'_n \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 2 \right\} \sin(2\theta + \mu_n). \end{aligned} \quad (27)$$

Для выполнения условия несжимаемости (26) предположим

$$u_n^{(I)p} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi'_n}{\partial \theta}, \quad v_n^{(I)p} = \frac{\partial \psi'_n}{\partial \rho}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в уравнение (27), получим

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{\partial^2 \psi'_n}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \psi'_n}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi'_n}{\partial \theta^2} = \\ & = \frac{2C}{K_n} R'_n \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right) - 2 \right\} \sin (2\theta + \mu_n). \end{aligned} \quad (29)$$

Решение уравнения (29) представим как сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Частное решение уравнения (29) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \psi'_n \text{ частн} &= \left(\frac{1}{\rho} [S_n \sin w + T_n \cos w] + Q_n \right) \sin (2\theta + \mu_n), \\ w &= \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), найдем

$$D_{1n} = \frac{2C}{K_n} R'_n, \quad S_n = -\frac{\sqrt{3}\alpha_1 D_{1n}}{8}, \quad T_n = -\frac{\alpha_1 D_{1n}}{8}, \quad Q_n = -\frac{D_{1n}}{2}. \quad (31)$$

Из (28), (29) получим

$$\begin{aligned} u_n^{(I)p} \text{ частн} &= -\frac{2}{\rho^2} \left(\left[S_n \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + T_n \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right] + Q_n \rho \right) \cos (2\theta + \mu_n), \\ v_n^{(I)p} \text{ частн} &= -\frac{1}{\rho^2} \left[(S_n + \sqrt{3}T_n) \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) + \right. \\ & \left. + (T_n - \sqrt{3}S_n) \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_1} \right) \right] \sin (2\theta + \mu_n). \end{aligned} \quad (32)$$

Общее решение однородного уравнения (29) в соответствии с выражениями (28) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_n^{(I)p} \text{ одн} &= -2 \left\{ \left[C_{11}^{(n)} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) + C_{12}^{(n)} \sin (\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin 2\theta - \right. \\ & \left. - \left[C_{21}^{(n)} \cos (\sqrt{3} \ln \rho) + C_{22}^{(n)} \sin (\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos 2\theta \right\}, \\ v_n^{(I)p} \text{ одн} &= \left[C_{11}^{(n)} (\cos (\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\ & + C_{12}^{(n)} (\sin (\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \rho)) \left. \right] \sin 2\theta + \\ & + \left[C_{21}^{(n)} (\cos (\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin (\sqrt{3} \ln \rho)) + \right. \\ & \left. + C_{22}^{(n)} (\sin (\sqrt{3} \ln \rho) + \sqrt{3} \cos (\sqrt{3} \ln \rho)) \right] \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (33)$$

На границе сопряжения упругой и пластической области будут выполняться следующие условия

$$u_2^{(I)p} = u_2^{(I)e}, \quad v_2^{(I)p} = v_2^{(I)e}, \quad \rho = 1. \quad (34)$$

Из (13), (32)–(34) получим

$$\begin{aligned}
C_{11}^{(2)} &= \frac{6}{E} - \frac{b_2''}{2} + \frac{2}{E} a_2''' - [S_2 \sin w_2 - T_2 \cos w_2] \sin \mu_2, \\
C_{12}^{(2)} &= \frac{3b_2''' - 2a_2''' - 2}{\sqrt{3}E} + \frac{b_2''}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} (S_2 \sin w_2 - T_2 \cos w_2) \sin \mu_2 - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} ((S_2 + \sqrt{3}T_2)) \sin w_2 + (\sqrt{3}S_2 - T_2) \cos w_2) \cos \mu_2, \\
C_{21}^{(2)} &= -\frac{a_2''}{2E} + \frac{2b_2''}{E} - [S_2 \sin w_2 - T_2 \cos w_2 - Q_2] \cos \mu_2, \\
C_{22}^{(2)} &= \frac{3a_2''' + a_2''' - 2b_2''}{\sqrt{3}E} + \frac{1}{\sqrt{3}} (S_2 \sin w_2 - T_2 \cos w_2 + Q_2) \cos \mu_2 - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} ((S_2 + \sqrt{3}T_2) \sin w_2 + (\sqrt{3}S_2 - T_2) \cos w_2) \sin \mu_2,
\end{aligned} \tag{35}$$

$$w_2 = \sqrt{3} \ln \alpha_1.$$

где выражениями (13), (32)–(34) определены перемещения во втором слое пластины в первом приближении.

На границе слоев пластины будут выполняться следующие условия сопряжения

$$\begin{aligned}
u_2^{(I)p} + \frac{u_2^{(0)p}}{d\rho} \rho_s^{(I)} &= u_1^{(I)e} + \frac{u_1^{(0)e}}{d\rho} \rho_s^{(I)}, \\
v_2^{(I)p} + \frac{v_2^{(0)p}}{d\rho} \rho_s^{(I)} &= v_1^{(I)e} + \frac{v_1^{(0)e}}{d\rho} \rho_s^{(I)}, \\
\rho &= \alpha_2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Из (32)–(36) определим коэффициенты $C_{11}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)}$, $C_{21}^{(1)}$, $C_{22}^{(1)}$.

$$\begin{aligned}
C_{11}^{(1)} &= \frac{\sin w_1}{\sqrt{3}\alpha_2^2} A_1 + \frac{2 \cos(\frac{\pi}{6} - w)}{\sqrt{3}\alpha_2^2} B_1, \\
C_{12}^{(1)} &= -\frac{\cos w_1}{\sqrt{3}\alpha_2^2} A_1 + \frac{\sin(w_1 - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}\alpha_2^2} B_1, \\
C_{21}^{(1)} &= \frac{\sin w_1}{\sqrt{3}\alpha_2^2} A_2 - \frac{2 \cos(\frac{\pi}{6} + w_1)}{\sqrt{3}\alpha_2^2} B_2, \\
C_{22}^{(1)} &= \frac{\cos w_1}{\sqrt{3}\alpha_2^2} A_2 - \frac{2 \sin(\frac{\pi}{6} - w_1)}{\sqrt{3}\alpha_2^2} B_2,
\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= ((S_2 + \sqrt{3}T_2) \sin w_3 + (T_2 - \sqrt{3}S_2) \cos w_3) \cos \mu_2 + 2C_{11}^{(2)} \sin(\frac{\pi}{6} - w_1) - \\
&\quad - 2C_{12}^{(2)} \cos(\frac{\pi}{6} + w_1) - ((S_1 + \sqrt{3}T_1) \sin w_3 + (T_1 - \sqrt{3}S_1) \cos w_3) \cos \mu_1, \\
B_1 &= (S_1 \sin w_3 + T_1 \cos w_3 + Q_1 \alpha_2) \sin \mu_1 - (S_2 \sin w_3 + T_2 \cos w_3 + Q_2 \alpha_2) \sin \mu_2 + \\
&\quad + \alpha_2^2 C_{11}^{(2)} \cos w_1 + \alpha_2^2 C_{12}^{(2)} \sin w_1, \\
A_2 &= ((S_2 + \sqrt{3}T_2) \sin w_3 + (T_2 - \sqrt{3}S_2) \cos w_3) \sin \mu_2 + 2C_{21}^{(2)} \sin(\frac{\pi}{6} - w_1) - \\
&\quad - 2C_{22}^{(2)} \cos(\frac{\pi}{6} + w_1) - ((S_1 + \sqrt{3}T_1) \sin w_3 + (T_1 - \sqrt{3}S_1) \cos w_3) \sin \mu_1, \\
B_2 &= (S_1 \sin w_3 + T_1 \cos w_3 + Q_1 \alpha_2) \cos \mu_1 - (S_2 \sin w_3 + T_2 \cos w_3 + Q_2 \alpha_2) \cos \mu_2 + \\
&\quad + \alpha_2^2 C_{21}^{(2)} \cos w_1 + \alpha_2^2 C_{22}^{(2)} \sin w_1, \\
w_1 &= \sqrt{3} \ln \alpha_2, \quad w_3 = \sqrt{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Формулами (32), (33), (36), (37) определены компоненты перемещений для первого слоя пластины в первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов С. В., Рыбакова Т. И. Упругопластическое состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3 (25). С. 138–146.
- [2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 41–43.
- [4] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 583–584.
- [5] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 576–579.
- [6] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. О соотношениях теории трансляционной идеальнопластической анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 580–583.
- [7] Фоминых С. О. Двусосное растяжение упругопластической пластины с круговым отверстием в случае трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 610–622.
- [8] Кержаев А. П. Упругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.
- [9] Кузнецов П. Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1 (6). С. 134–141.

S. V. Matveev, A. N. Matveeva, S. V. Tikhonov

DEFORMED CONDITION OF ANISOTROPIC PLANE WEAKENED BY A HOLE REINFORCED BY THE INCLUSION OF LIMITED ECCENTRIC CIRCLE WITH BIAXIAL STRETCHING

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. We consider the deformed condition of anisotropic plane with a circular hole, supported by the inclusion, limited eccentric circle. It implies that each layer of material has the properties of translational anisotropy. The paper defines the displacement in the elastic and plastic regions.

Keywords: elasticity, plasticity, movement, including, translational anisotropy

REFERENCES

- [1] Tikhonov S. V., Rybakova T. I. Biaxial stretching of elastoplastic plain with eccentric, circular and anisotropic inclusion // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2015. № 3 (25). P. 138–146.
- [2] Ivlev D. D., Yershov L. V. Method of indignations in the theory of an elasto-plastic solids. M.: Science, 1978. 208 p.
- [3] Ivlev D. D., Maximova L.A., Mironov B. G. About ratios of the theory of transmitting ideal and plastic anisotropy in case of flat deformation // Izv. Russian Academy of Sciences. Mech. Sol. 2011. № 2. P. 41–43.
- [4] Ivlev D. D., Maximova L.A. About ratios of the theory of transmitting ideálnoplastichesky anisotropy at generalization of a condition of plasticity of Mises // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 583–584.
- [5] Ivlev D. D., Mironov B. G. About ratios of transmitting ideálnoplastichesky anisotropy at torsion // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 576–579.
- [6] Ivlev D. D., Maximova L.A., Mironov B. G. About ratios of the theory of transmitting ideálnoplastichesky anisotropy // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 580–583.
- [7] Fominykh S. O. Biaxial stretching of an uprugoplastichsky plate with a circular opening in case of transmitting anisotropy // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 610–622.

Matveev Sergey Vladimirovich

e-mail: sergio2100@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department Information Technologies, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Matveeva Alena Nikolaevna

e-mail: roshtova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich

e-mail: roshtova@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[8] Kerzhayev A. P. An elasto-plastic condition of the two-layer thick-walled pipe which is under the influence of internal pressure, at transmitting anisotropy // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2013. № 2 (16). P. 71–81.

[9] Kuznetsov P. N. Elasto-plastic condition of the non-uniform the plane weakened by a circular opening, supported inclusions, limited eccentric circles, at biaxial stretching // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2009. № 1 (6). P. 134–141.