

А. Г. Терентьев, А. О. Казакова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Предложен численный метод решения основной краевой задачи плоской теории упругости в напряжениях для произвольной многосвязной области. Особое внимание уделено переходу от граничных условий задачи теории упругости к граничным условиям для бигармонической функции напряжений, что позволяет применить разработанный авторами ранее алгоритм решения краевых задач для полигармонических функций к решению плоской задачи теории упругости. На тестовых примерах с применением компьютерного моделирования показана достаточно высокая точность предложенного метода.

Ключевые слова: теория упругости, краевые задачи, метод граничных элементов, многосвязная область, компьютерное моделирование.

УДК: 519.635.4:539.3

Введение. Определение упругого равновесия в плоской задаче сводится к решению краевых задач для бигармонического уравнения. Первые и основополагающие результаты в этом направлении с использованием аппарата функций комплексного переменного и конформного отображения были получены в фундаментальных исследованиях Г. В. Колосова [1] и Н. И. Мухелишвили [2]. В последующем различными авторами было рассмотрено значительное количество новых задач для некоторых областей частного вида. Следует отметить, что не всегда удается получить приемлемые аналитические результаты, удобные для вычислений. Поэтому незаменимым остается использование численных методов. В настоящее время предложено достаточно большое количество работ по численным методам. Наиболее простыми для применения являются методы конечных и граничных элементов [3]. Первый метод аналогичен методу конечных разностей, и численное решение строится в области, поэтому частные производные определяются численно по разностным алгоритмам. Этот метод неизбежно ведет к накоплению ошибок, особенно при вычислении производных высших

© Терентьев А. Г., Казакова А. О., 2016

Терентьев Алексей Григорьевич

e-mail: agterent@gambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Казакова Анастасия Олеговна

e-mail: kazakova_anastasia@bk.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 28.01.2016

порядков. Более точные результаты можно получить методами граничных элементов, поскольку дифференциальное уравнение сводится к интегральным уравнениям на границе области, получаемым с помощью взвешенных невязок и фундаментальных сингулярных решений. Для этого вводят вспомогательные весовые функции (в случае плоской задачи таких функций шесть), которые также подлежат определению. Достаточно полный исторический обзор по методам граничных элементов дан А. М. Линьковым в [4].

В настоящей работе разработанный авторами (см. [5]) численный алгоритм решения краевых задач для полигармонического уравнения применяется к решению плоской задачи теории упругости в напряжениях для произвольной области. Искомой здесь является одна бигармоническая функция напряжений Эри, через которую выражаются напряжения. Особое внимание уделено краевым условиям, которые в случае многосвязной области содержат дополнительные константы. Для их определения используются условия однозначности перемещений. Сравнение с известными аналитическими решениями подтверждает высокую точность предложенного численного метода.

1. Постановка плоской задачи теории упругости в напряжениях для многосвязной области. Пусть задана M -связная плоская область D , и пусть граница этой области $\partial D = \bigcup_{k=1}^M \partial D_k$ задана функциями дуговой координаты $s \in \partial D_k$, $k = \overline{1, M}$: $x^{(k)} = x^{(k)}(s)$, $y^{(k)} = y^{(k)}(s)$. На границе области заданы нормальное и касательное внешние напряжения $p_n^{(k)}(s)$ и $p_\tau^{(k)}(s)$. Требуется определить компоненты тензора напряжений в каждой точке области D . В дальнейшем верхний индекс (k) без ущерба общности можно опустить.

Если обозначить $\tau_x = x'_s$, $\tau_y = y'_s$ как компоненты касательного единичного вектора, то граничными условиями для определения тензора напряжений являются равенства

$$\sigma_{xx}\tau_y - \sigma_{xy}\tau_x = p_x, \quad \sigma_{xy}\tau_y - \sigma_{yy}\tau_x = p_y, \quad (1.1)$$

где $p_x(s) = p_n(s)\tau_y + p_\tau(s)\tau_x$, $p_y(s) = p_\tau(s)\tau_y - p_n(s)\tau_x$.

2. Переход к граничным условиям для бигармонической функции напряжений. Как известно из теории упругости, в плоской задаче все три напряжения, возникающие внутри области D , могут быть выражены через одну бигармоническую функцию Эри φ :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Граничные условия (1.1) с учетом (2.1) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \tau_y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tau_x &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = p_x(s), \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tau_x - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tau_y &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = p_y(s), \end{aligned} \quad s \in \partial D_k, \quad k = \overline{1, M}.$$

Отсюда

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{\partial D_k} = -\int_0^s p_y(s) ds + C_1, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{\partial D_k} = \int_0^s p_x(s) ds + C_2.$$

Нормальная и касательная производные функции напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D_k} &= -y'_s \int_0^s p_y(s) ds - x'_s \int_0^s p_x(s) ds + C_1 y'_s - C_2 x'_s, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{\partial D_k} &= -x'_s \int_0^s p_y(s) ds + y'_s \int_0^s p_x(s) ds + C_1 x'_s + C_2 y'_s. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из последнего равенства определяется функция напряжений

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_0^s (x(s)p_y(s) - y(s)p_x(s)) ds + x(s) \left(C_1 - \int_0^s p_y(s) ds \right) + \\ &+ y(s) \left(C_2 + \int_0^s p_x(s) ds \right) + C_3, \quad s \in \partial D_k, \quad k = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, рассматриваемая задача эквивалентна краевой задаче для бигармонической функции φ с граничными условиями (2.2) и (2.3), которые будут содержать $3M$ неизвестных постоянных.

3. Определение неизвестных постоянных, входящих в граничные условия. Если область D является односвязной, то константы C_1, C_2, C_3 , входящие в граничные условия (2.2), (2.3), можно задать произвольно (например, принять их равными нулю), т. к. они входят в несущественную для напряжений линейную часть функции φ . В случае же многосвязной области граничные условия на каждом контуре содержат по три константы. На одном контуре (например, на наружном контуре ∂D_M) их по-прежнему можно положить равными нулю, постоянные на других (внутренних) контурах не могут быть произвольными (см. [6]).

Для определения неизвестных констант, входящих в (2.2), (2.3), в случае двусвязной области в [7] были получены три уравнения из условий однозначности компонент перемещения при обходе внутренней границы области. В случае многосвязной области аналогично можно записать недостающие уравнения для определения всех дополнительных констант. Опуская вывод, приведем эти уравнения:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_k} \frac{\partial q}{\partial n} ds &= \frac{1}{K} \oint_{\partial D_k} p_y^{(k)}(s) ds, \quad \oint_{\partial D_k} \frac{\partial p}{\partial n} ds = -\frac{1}{K} \oint_{\partial D_k} p_x^{(k)}(s) ds, \\ \oint_{\partial D_k} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} ds &= 0, \quad k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $K = 1/(1 + \nu)$ (в случае плосконапряженного состояния), $K = 1 - \nu$ (в случае плоской деформации), ν – коэффициент Пуассона, p и q – сопряженные гармонические функции, такие, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \Delta \varphi, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Таким образом, получены три уравнения (3.1) для определения трех неизвестных констант $C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, C_3^{(k)}$ на каждом из внутренних контуров ∂D_k многосвязной области D .

4. Применение метода граничных элементов. В работе авторов [5] из интегральной формулы Грина были получены интегральные соотношения для полигармонических функций. В частности, для бигармонической функции эти соотношения

ИМЕЮТ ВИД

$$\begin{aligned}\varepsilon \hat{u}(P) &= \int (\hat{v}G_0 - \hat{u}H_0) ds, \\ \varepsilon u(P) &= \int_{\partial D} (vG_0 - uH_0 + \hat{v}G_1 - \hat{u}H_1) ds,\end{aligned}\quad (4.1)$$

где u — бигармоническая функция, $\hat{u} = \Delta u$ — гармоническая функция,

$$\begin{aligned}v &= \frac{\partial u}{\partial n}, \quad \hat{v} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}, \\ G_0 &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad G_1 = \frac{r^2}{8\pi} \left(1 + \ln \frac{1}{r}\right), \quad H_0 = \frac{\partial G_0}{\partial n}, \quad H_1 = \frac{\partial G_1}{\partial n},\end{aligned}\quad (4.2)$$

r — расстояние между точкой P и переменной точкой интегрирования, множитель $\varepsilon = 0.5$ для точки P на гладкой границе и $\varepsilon = 1$ для внутренней точки.

С помощью метода граничных элементов система интегральных уравнений для полигармонических функций сводится к системе линейных алгебраических уравнений (см. [5]). Каждый из контуров ∂D_k многосвязной области D аппроксимируется многоугольником, состоящим из N_k линейных граничных элементов ($k = \overline{1, M}$), внутри каждого из которых выбрана контрольная точка P_j , $j = \overline{1, N}$, $N = \sum_{k=1}^M N_k$. Тогда уравнения (4.1) могут быть представлены в виде системы двух матричных уравнений

$$\begin{aligned}(\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{B} \hat{\mathbf{V}} &= 0, \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{U} - \mathbf{B} \mathbf{V} + \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{V}} &= 0,\end{aligned}\quad (4.3)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица, $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{V}}$ — вектор-столбцы, компонентами которых являются значения вспомогательных функций в контрольных точках:

$$U_j = u(P_j), \quad V_j = v(P_j), \quad \hat{U}_j = \hat{u}(P_j), \quad \hat{V}_j = \hat{v}(P_j), \quad j = \overline{1, N},$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ — матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием соответствующих функций по прямолинейным граничным элементам Γ_j :

$$\begin{aligned}A_{i,j} &= \int_{\Gamma_j} H_0(r_{i,j}) ds, \quad B_{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_0(r_{i,j}) ds, \\ \hat{A}_{i,j} &= \int_{\Gamma_j} H_1(r_{i,j}) ds, \quad \hat{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_j} G_1(r_{i,j}) ds, \quad i, j = \overline{1, N},\end{aligned}$$

где $r_{i,j}$ — расстояние между фиксированной контрольной точкой P_i и переменной точкой интегрирования граничного элемента Γ_j .

Элементы матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ могут быть выражены аналитически (см. [8]). Для этого целесообразно перейти к локальной системе координат с началом в центре хорды и действительной осью, направленной по j -му элементу. Если ввести обозначения

$$\xi_{i,j} = \frac{2}{h_j^2} [x_i^* (x_j - x_{j-1}) + y_i^* (y_j - y_{j-1})], \quad \eta_{i,j} = \frac{2}{h_j^2} [y_i^* (x_j - x_{j-1}) - x_i^* (y_j - y_{j-1})],$$

$$p_{i,j} = \ln \frac{h_j^2}{4} [(1 - \xi_{i,j})^2 + \eta_{i,j}^2], \quad q_{i,j} = \ln \frac{h_j^2}{4} [(1 + \xi_{i,j})^2 + \eta_{i,j}^2],$$

где h_j — длина j -го элемента, (x_i^*, y_i^*) — средняя точка i -го элемента, то элементы матриц вычисляются по следующим формулам:

$$A_{i,j} = -\frac{1}{2\pi} \left(\arctan \frac{1 - \xi_{i,j}}{\eta_{i,j}} + \arctan \frac{1 + \xi_{i,j}}{\eta_{i,j}} \right), \quad \hat{A}_{i,j} = -\frac{h_j \eta_{i,j}}{4} \left(B_{i,j} + \frac{h_j}{4\pi} \right),$$

$$B_{i,j} = \frac{h_j}{2\pi} \left(\eta_{i,j} A_{i,j} - \frac{1}{4\pi} [(1 - \xi_{i,j}) p_{i,j} + (1 + \xi_{i,j}) q_{i,j} - 4] \right),$$

$$\widehat{B}_{i,j} = -\frac{h_j^3}{32\pi} \left(\frac{4(1+3\xi_{i,j}^2)}{9} + \frac{5\eta_{i,j}^2}{3} + \frac{2\pi}{3} \eta_{i,j}^3 A_{i,j} \right) +$$

$$+ \frac{h_j^3(1-\xi_{i,j})}{128\pi} \left(\frac{(1-\xi_{i,j})^2}{3} + \eta_{i,j}^2 \right) p_{i,j} + \frac{h_j^3(1+\xi_{i,j})}{128\pi} \left(\frac{(1+\xi_{i,j})^2}{3} + \eta_{i,j}^2 \right) q_{i,j}.$$

Система уравнений (4.3) представляет собой систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных компонент векторов $\widehat{\mathbf{U}}$ и $\widehat{\mathbf{V}}$. Элементы векторов \mathbf{U} и \mathbf{V} известны из постановки задачи и определяются условиями (2.2), (2.3). Для односвязной области все дополнительные постоянные полагаются равными нулю, и оба уравнения (4.3) объединяются в одно матричное уравнение, которое решается численно с помощью обратной матрицы.

В случае многосвязной области к уравнениям (4.3) нужно добавить условия (3.1). Для этого целесообразно привести их к линейным уравнениям, содержащим только неизвестные значения функций \hat{u} и \hat{v} . В [7] были получены такие уравнения для внутренней границы двусвязной области, аналогично можно записать соответствующие уравнения в случае многосвязной области в предположении, что результирующая внешних сил, действующих на каждый внутренний контур, равна нулю. Тогда условия (3.1) на внутренних контурах границы принимают вид

$$\oint_{\partial D_k} \frac{\partial p}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{\partial D_k} \frac{\partial q}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{\partial D_k} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} ds = 0, \quad k = \overline{1, M-1}. \quad (4.4)$$

После некоторых преобразований получим

$$\sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} \left(h_j (x_{N_{k-1}+1} - x_j) \widehat{V}_j + (y_{j+1} - y_j) \widehat{U}_j \right) = 0,$$

$$\sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} \left(h_j (y_{N_{k-1}+1} - y_j) \widehat{V}_j + (x_{j+1} - x_j) \widehat{U}_j \right) = 0, \quad \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} h_j \widehat{V}_j = 0. \quad (4.5)$$

Три линейных уравнения (4.5) совместно с (4.3) образуют полную систему $2N+3(M-1)$ уравнений для нахождения значений функций \hat{u} , \hat{v} и неизвестных констант интегрирования на внутренних контурах границы многосвязной области D .

5. Определение напряжений. Решение полученной системы линейных уравнений определяет значения вспомогательных функций \hat{u} и \hat{v} на границе области в контрольных точках. Значение функции напряжений во внутренней точке P ($\varepsilon = 1$) вычисляется из второго уравнения (4.1), на основании которого

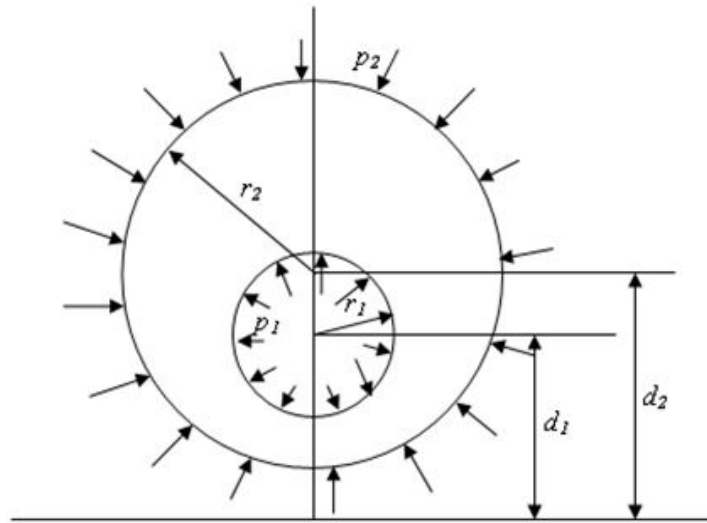
$$\varphi(P) = \sum_{j=1}^N \left[V_j \int_{\Gamma_j} G_0 ds - U_j \int_{\Gamma_j} H_0 ds + \widehat{V}_j \int_{\Gamma_j} G_1 ds - \widehat{U}_j \int_{\Gamma_j} H_1 ds \right]. \quad (5.1)$$

Однако для решения задачи необходимо определить напряжения σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} по формулам (2.1), т. е. следует найти вторые частные производные от функции напряжений. Как видно из (4.2), функции G_0 , G_1 , H_0 и H_1 в (5.1) зависят от координат (x, y) внутренней точки P и от координат точки интегрирования, поэтому интегралы, входящие в (5.1), можно вычислить и получить их аналитические выражения как функций от x и y . Эти выражения, очевидно, будут иметь вид такой же, как элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\widehat{\mathbf{A}}$, $\widehat{\mathbf{B}}$, если в них (x_i^*, y_i^*) заменить на (x, y) .

Таким образом, правая часть (5.1) сводится к выражению, зависящему только от x и y и не содержащему интегралы. Тогда несложно вычислить производные функции φ , а значит в любой точке области D могут быть определены как функция Эри φ , так и сами напряжения σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} .

6. Тестовые примеры и задача

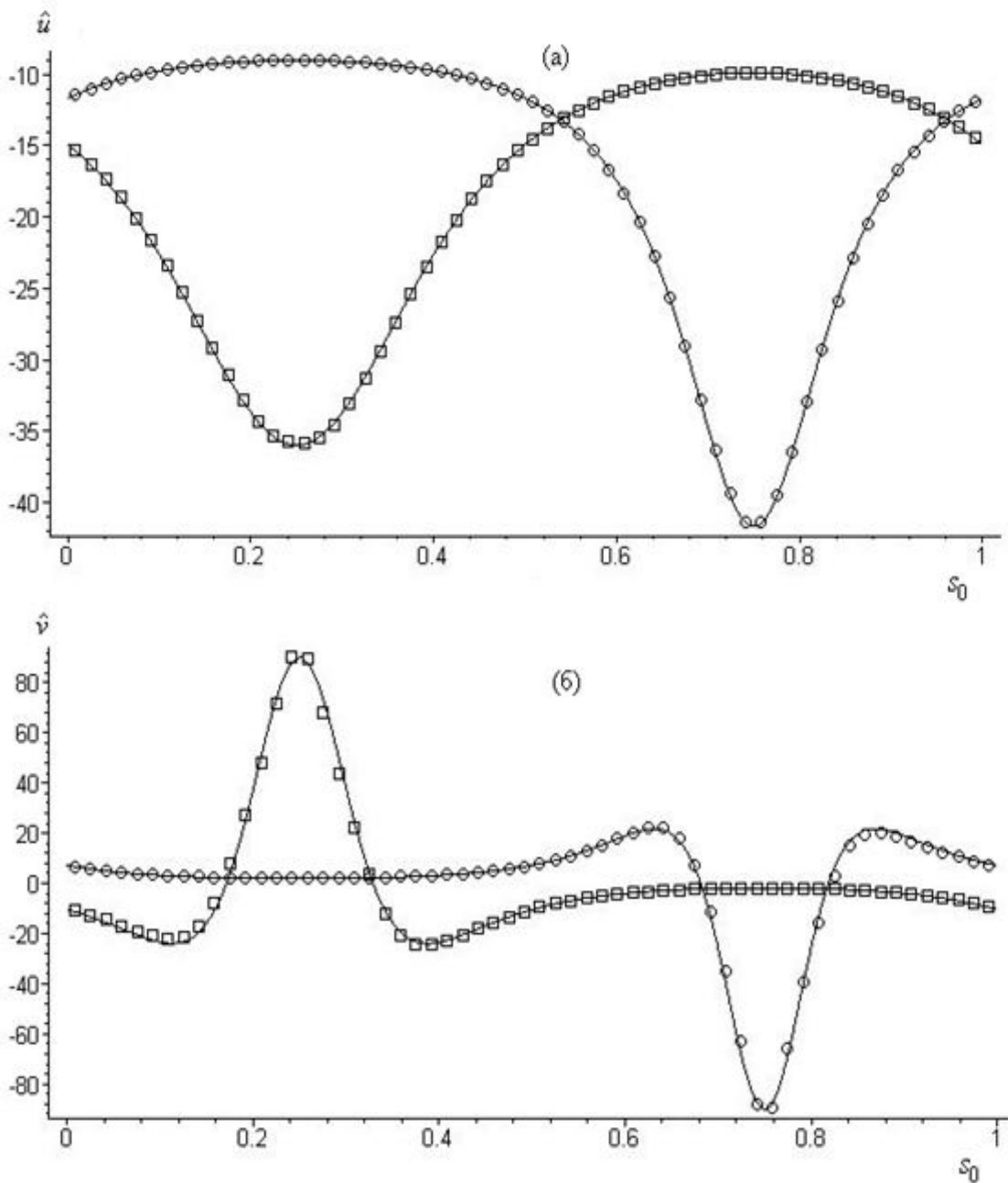
Пример 1. Эксцентрическая труба под равномерным давлением. В качестве тестового примера для двусвязной области для сравнения результатов численного расчета с точным решением можно рассмотреть задачу об эксцентрической трубе, находящейся под равномерным давлением. Точное решение этой задачи получено Я. С. Уфляндом в [9] с использованием биполярных координат. На фиг. 1 представлено эксцентрическое кольцо с радиусами r_1 и r_2 ; d_1 и d_2 — расстояния от начала координат до центров окружностей, p_1 и p_2 — давления, действующие на внутренний и внешний контуры. Пусть для определенности $r_1 = 1$, $r_2 = 1.25$. В биполярных координатах этим значениям будут соответствовать эксцентрические окружности, центры которых находятся на расстояниях $d_1 = \sqrt{2}$ и $d_2 = \sqrt{41}/4$ от начала координат. Далее следует задать граничные условия: пусть, например, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$. После перехода от этих граничных условий механической задачи к граничным условиям для бигармонической функции напряжений φ на границах области известны значения функции напряжений u и её нормальной производной v с точностью до слагаемых, содержащих три неизвестные постоянные. Методом граничных элементов ($N_1 = N_2 = 60$) находятся значения на границе области двух вспомогательных функций \hat{u} и \hat{v} , а также значения трех неизвестных постоянных. Так как сумма внешних сил, действующих на тело, равна нулю, то к системе уравнений (4.3) необходимо присоединить еще уравнения (4.5).



Фиг. 1

На фиг. 2 (а, б) представлены графики зависимости функций \hat{u} и \hat{v} на границе области от нормированной дуговой координаты s_0 . Здесь точки соответствуют значениям,

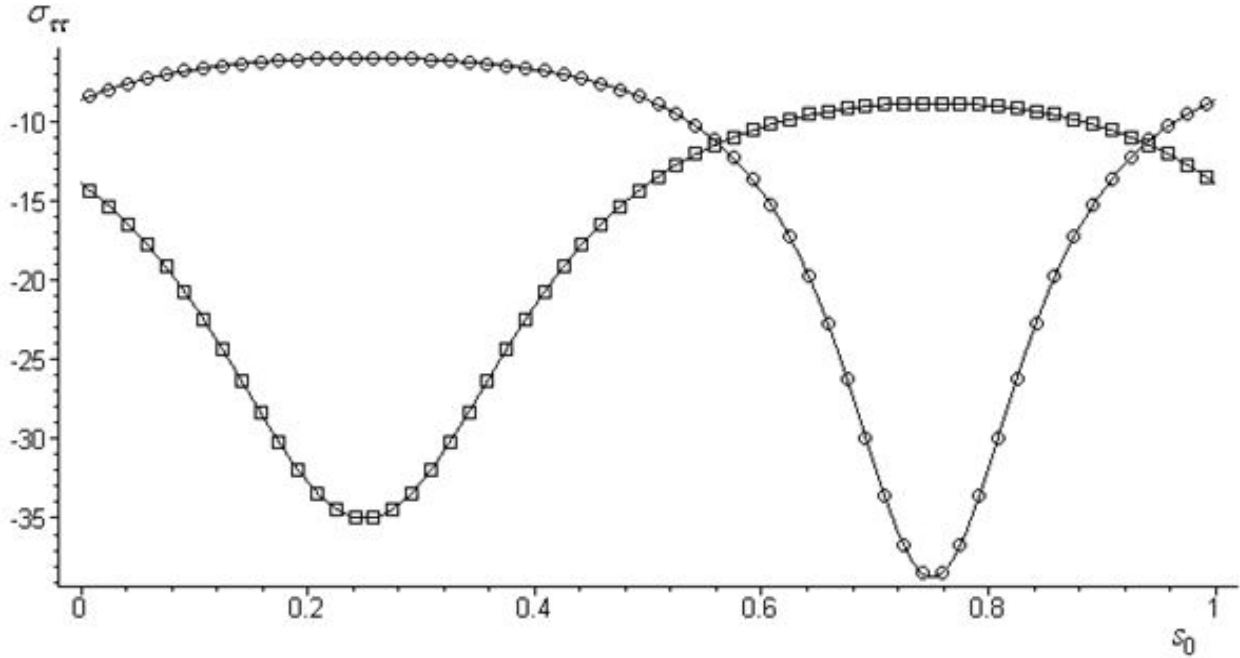
найденным методом граничных элементов, а линиями изображены графики функций, соответствующих точному аналитическому решению. Квадратными точками изображены значения на внутренней границе, круглыми – на внешней границе.



Фиг. 2

На фиг. 3 изображены графики зависимости окружного напряжения $\sigma_{\tau\tau}$ на границе области от нормированной дуговой координаты s_0 . Точечно изображены значения,

найденные методом граничных элементов, а сплошными линиями – графики точного аналитического решения. Квадратными точками изображены значения на внутренней границе, круглыми – на внешней границе. Единица измерения напряжения σ_{rr} совпадает с единицей измерения величин p_1 и p_2 .



Фиг. 3

Из графиков видно, что предложенный метод обладает высокой степенью точности, причем уже при небольшом числе граничных элементов. Расчеты, проведенные для различных значений N , показывают, что с увеличением числа граничных элементов точность метода возрастает. На фиг. 4 (а, б) приведены графики зависимости от числа N средней относительной погрешности для вспомогательных функций, графики которых изображены на фиг. 3:

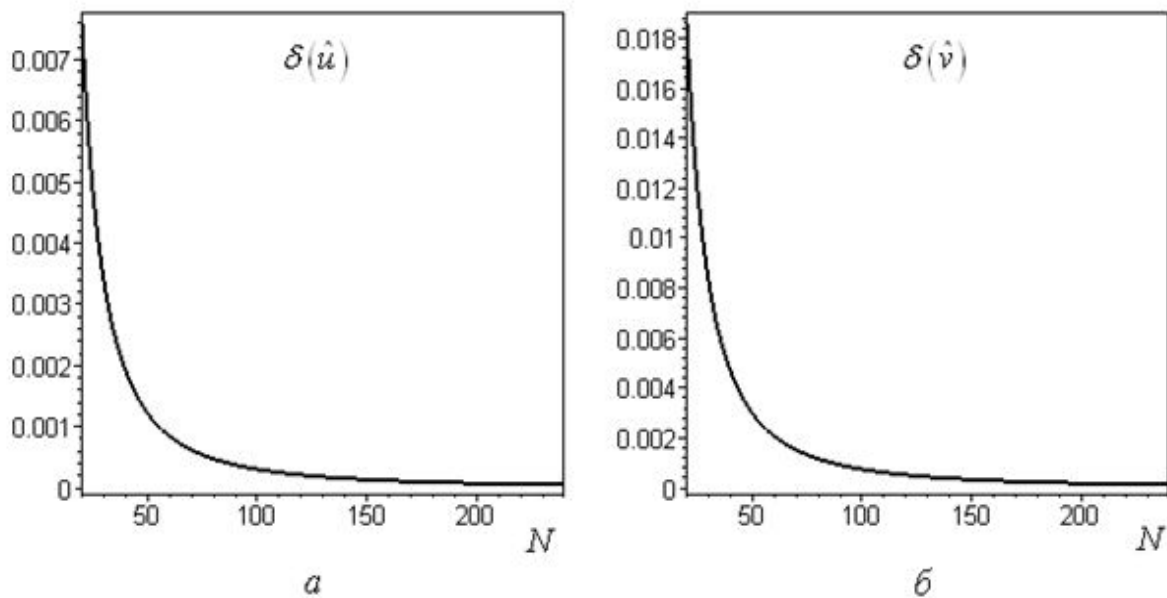
$$\delta(\hat{u}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\hat{U}_j - \hat{u}(P_j)}{\hat{u}(P_j)} \right|, \quad \delta(\hat{v}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\hat{V}_j - \hat{v}(P_j)}{\hat{v}(P_j)} \right|,$$

где $\hat{u}(P_j)$, $\hat{v}(P_j)$ – точные значения функций в j -той узловой точке, \hat{U}_j , \hat{V}_j – соответствующие значения, найденные численно с помощью данного метода.

Пример 2. Плоская задача в трехсвязной области. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости в напряжениях для трехсвязной области. Пусть ∂D_3 – внешняя граница области, представляющая собой эллипс с полуосями a и b . Внутренние границы ∂D_1 и ∂D_2 – окружности, центры которых лежат на оси x .

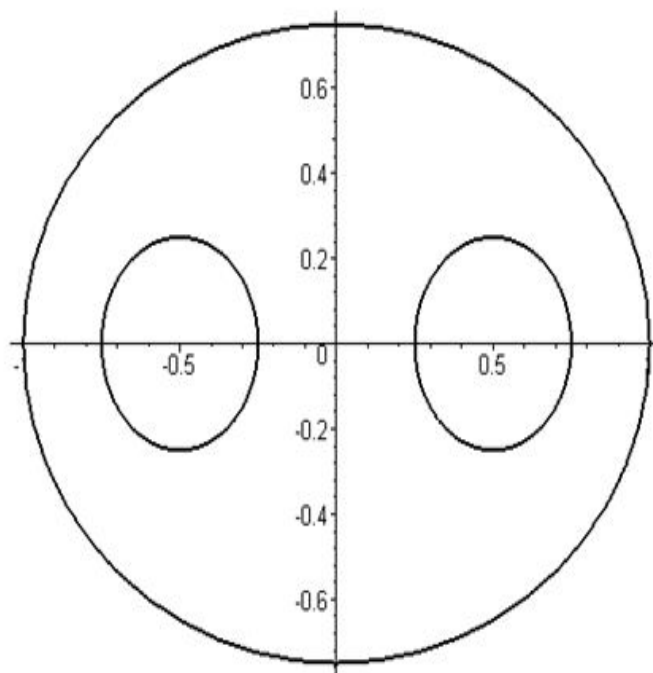
$$\partial D_1 : \begin{cases} x_1 = r_1 \cos \theta + d_1, \\ y_1 = -r_1 \sin \theta, \end{cases} \quad \partial D_2 : \begin{cases} x_2 = r_2 \cos \theta + d_2, \\ y_2 = -r_2 \sin \theta, \end{cases} \quad \partial D_3 : \begin{cases} x_3 = a \cos \theta, \\ y_3 = b \sin \theta, \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi).$$



Фиг. 4

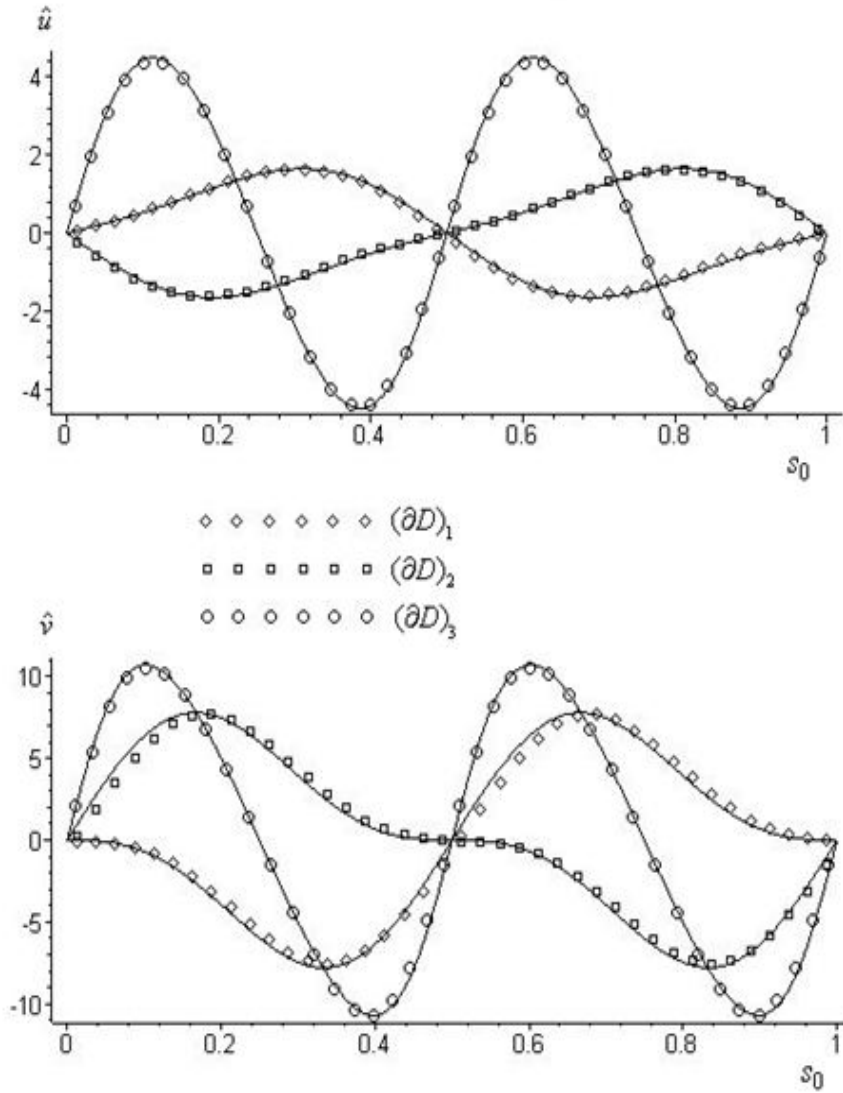
На фиг. 5 изображена такая область при $a = 1, b = 0.75, r_1 = r_2 = 0.25, d_1 = -d_2 = -0.5$.



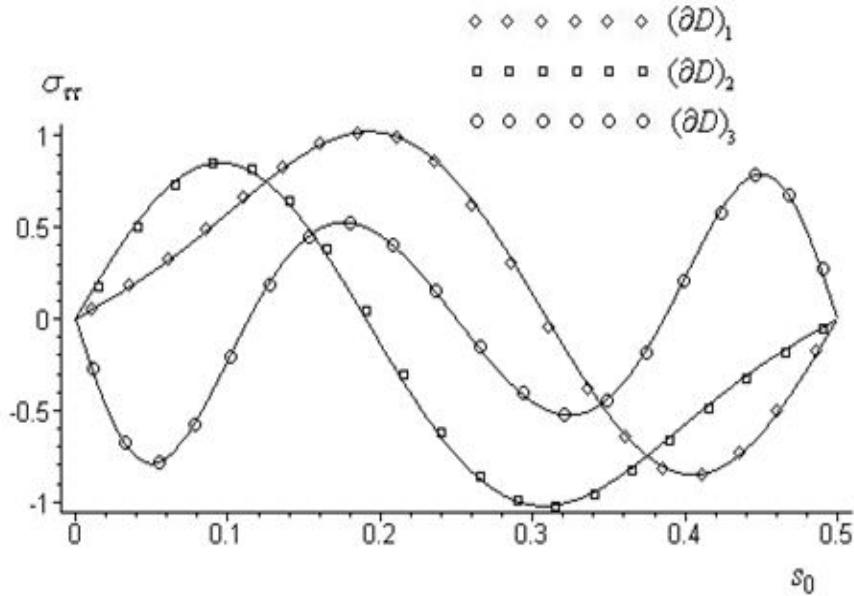
Фиг. 5

Для сравнения результатов численных расчетов с точными значениями функций задается бигармоническая функция напряжений (назовем ее эталонной). Пусть, например, $\varphi = (x^2 + y^2)xy$. По ней можно построить граничные условия плоской задачи теории упругости в напряжениях:

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}|_{\partial D_k} &= p_n^{(k)} = -6(r_k + d_k \cos \theta)(r_k \sin 2\theta + d_k \sin \theta), \quad k = 1, 2, \\ \sigma_{n\tau}|_{\partial D_k} &= p_\tau^{(k)} = -3(r_k^2 + 2r_k d_k \cos \theta + d_k^2) \cos 2\theta, \quad k = 1, 2, \\ \sigma_{nn}|_{\partial D_3} &= p_n^{(3)} = \frac{3ab(a^2 + b^2) \sin 2\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \\ \sigma_{n\tau}|_{\partial D_3} &= p_\tau^{(3)} = -3(b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta) \frac{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.\end{aligned}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Интегрируя их, как описано в разделе 2, получим граничные условия для бигармонического уравнения с точностью до слагаемых, содержащих шесть неизвестных постоянных (по три на каждом внутреннем контуре). Далее с помощью МГЭ (каждый контур разбивается на $N_k = 40$ граничных элементов) находятся эти константы и неизвестные значения функций \hat{u} и \hat{v} . Результаты представлены на фиг. 6: точками показаны значения, полученные численно, сплошными линиями – точные графики функций. На фиг. 7 представлены графики точных и найденных численно значений окружного напряжения $\sigma_{\tau\tau}$ на границах области. Графики симметричны относительно точки $s_0 = 0.5$.

Из всех представленных в тестовых примерах графиков видно, что наблюдается хорошее совпадение численных и аналитических результатов, что свидетельствует об эффективности численного алгоритма. Обоснование предложенного метода и оценка его сходимости изложены в [5].

Задача 3. Эллиптическая труба под равномерным давлением. Из рассмотренных выше примеров видно, что метод дает высокую точность. С его помощью можно рассчитывать задачи, решение которых не может быть получено аналитически. Пусть, например, область ограничена двумя конфокальными эллипсами с полуосями (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , причем $a_1 < a_2, b_1 < b_2$. Пусть заданы следующие граничные условия:

$$p_n|_{\partial D_1} = -p_1, \quad p_n|_{\partial D_2} = -p_2, \quad p_\tau|_{\partial D_1} = p_\tau|_{\partial D_2} = 0, \tag{6.1}$$

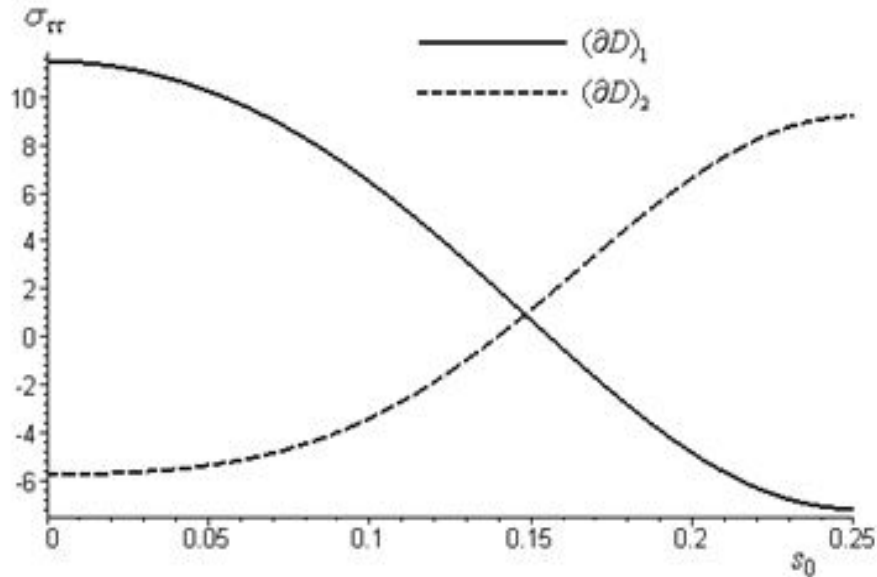
где $\partial D_1 : \begin{cases} x_1 = a_1 \cos \theta \\ y_1 = -b_1 \sin \theta \end{cases}, \quad \partial D_2 : \begin{cases} x_2 = a_2 \cos \theta \\ y_2 = b_2 \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$

Переход от граничных условий (6.1) к граничным условиям для бигармонической функции напряжений осуществляется по формулам (2.2) и (2.3) (константы интегрирования на внешней границе равны нулю):

$$\varphi|_{\partial D_1} = \frac{p_1}{4} (b_1^2 - a_1^2) \cos 2\theta + C_1 a_1 \cos \theta + C_2 b_1 \sin \theta + C_3, \quad \varphi|_{\partial D_2} = \frac{p_2}{4} (b_2^2 - a_2^2) \cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D_1} = \frac{p_1 a_1 b_1 - C_1 b_1 \cos \theta - C_2 a_1 \sin \theta}{\sqrt{b_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial D_2} = \frac{-p_2 a_2 b_2}{\sqrt{b_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta}}.$$

Решение системы уравнений (4.3) совместно с уравнениями (4.5) осуществлялось при $N_1 = N_2 = 60$. На фиг. 8 представлены графики окружного напряжения $\sigma_{\tau\tau}$ на границах области D для случая, когда $a_2 = 1$, $b_2 = 0.75$, $a_1 = 0.8$, $b_1 = 0.6$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0.5$. Так как в рассматриваемой задаче эллиптическая труба находится под равномерным нормальным давлением, то достаточно привести графики для $\theta \in [0, \pi/2]$. График $\sigma_{\tau\tau}$ на внешней границе изображен штриховой линией, на внутренней границе – сплошной линией. Единица измерения $\sigma_{\tau\tau}$ совпадает с единицей измерения p_1 и p_2 .



Фиг. 8

Заключение. Предложенный численный алгоритм позволяет найти решение краевой задачи плоской теории упругости в напряжениях для произвольной области. Особое внимание уделено переходу от плоской задачи теории упругости к основной краевой задаче для бигармонического уравнения, что позволяет применить численный алгоритм, разработанный авторами для решения краевых задач для полигармонического уравнения. Показано, что граничные условия для многосвязных областей содержат по три неизвестные постоянные на каждом внутреннем контуре. Получены условия для определения этих констант в удобном для реализации численного алгоритма виде. На тестовых примерах показано, что наблюдается хорошее совпадение численных и аналитических результатов, что свидетельствует об эффективности предложенного алгоритма. С его помощью решена задача об эллиптической трубе, находящейся под равномерным давлением.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ, 1935.
- [2] Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1935.
- [3] Бреббия К., Вроубелл Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
- [4] Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
- [5] Казакова А. О., Терентьев А. Г. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 2050–2059.
- [6] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975.
- [7] Казакова А. О., Терентьев А. Г. Численное моделирование плоской задачи о напряженном состоянии трубы, погруженной в жидкость // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. № 5. С. 721–727.
- [8] Terentiev A. G., Kirschner I. N., Uhlman J. S. The Hydrodynamics of Cavitating Flows. USA: Backbone Publishing Company, 2011.
- [9] Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.;Л.: Гостехиздат, 1950.

G. Terentiev, A. O. Kazakova

NUMERICAL SOLUTION OF A PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY
IN MULTIPLY-CONNECTED DOMAIN

Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. A numerical method for solving the fundamental boundary value problem of the plane theory of elasticity in a multiply-connected domain is suggested. Special attention is given to the transition from the boundary conditions for the elasticity problem to the boundary conditions for the biharmonic stress function. Such transition allows applying algorithm of solving boundary value problems for polyharmonic functions previously developed by the authors to the solution of the plane problem of elasticity theory. In the test examples a sufficiently high accuracy of the proposed method is shown using computer simulation.

Keywords: elasticity theory, boundary value problems, boundary element method, multiply-connected domain, computer simulation.

REFERENCES

- [1] Kolosov G. V. Primenenie kompleksnoy peremennoy k teorii uprugosti. – М.: ONTI, 1935. (in Russian).

Terentiev Alexey Grigorievich

e-mail: agterent@rambler.ru, Honored Scientist of Russian Federation, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Kazakova Anastasiya Olegovna

e-mail: kazakova_anastasia@bk.ru, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

- [2] Muskhelishvili N. I. *Nekotorye zadachi teorii uprugosti*. – M.: AS USSR, 1935. (in Russian).
- [3] Brebbia K., Vrobell L. *Metody granichnykh elementov*. – M.: Mir, 1987. (in Russian).
- [4] Krauch S., Starfield A. *Metody granichnykh elementov v mekhanike tverdogo tela*. – M.: Mir, 1987. (in Russian).
- [5] Kazakova A. O., Terentiev A. G. Chislennoe reshenie kraevykh zadach dlya poligarmonicheskogo uravneniya // *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. T. 52, № 11, 2012. P. 2050–2059. (in Russian).
- [6] Timoshenko S. P., Gudier G. *Teoriya uprugosti*. – M.: Nauka, 1975. (in Russian).
- [7] Kazakova A. O., Terentiev A. G. Numerical modelling of the plane problem of the stress state of a tube immersed in a liquid // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. T. 78. № 5. P. 518– 523.
- [8] Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. *The Hydrodynamics of Cavitating Flows*. Backbone Publishing Company, USA, 2011.
- [9] Uflyand Ya. S. *Bipolyarnye koordinaty v teorii uprugosti*. M.–L.: Gostekhizdat, 1950. (in Russian).