Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 49–58

А. Д. Чернышов

НАХОЖДЕНИЕ МАЛЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ПРОСТЫХ КОРНЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Предложен способ нахождения малых областей для простых корней нелинейной системы алгебраических уравнений, в котором не используются градиенты. Вводятся новые понятия: стартовых точек, точек изменения знака и корневых точек, корневых областей, специальных операторов, упрощающих составление программы при применении ЭВМ. После реализации данного способа нахождения малых корневых областей и их количества в дальнейшем при помощи какого-либо стандартного метода корни находятся быстро и с высокой точностью.

Ключевые слова: нелинейная система алгебраических уравнений, корневая область, простые корни.

УДК: 512.36; 512.37

Проблема решения нелинейной алгебраической системы возникает при рассмотрении различных задач теории пластичности [1], упругости с конечными деформациями [2], вязкой жидкости [3] и многих других нелинейных моделей как промежуточный этап решения нелинейных краевых задач математической физики. Известны различные методы решения замкнутой системы нелинейных алгебраических уравнений [4]–[9]. При применении каждого из них точность вычислений зависит от размеров области, где ищется решение. Если область мала, то поиск корней системы существенно облегчается и многие стандартные методы – Ньютона–Рафсона, метод секущих, метод итераций, метод Вольфа, Maple, Mathematica, Mathcad и др. – позволяют быстро найти решение с заданной точностью. Поэтому имеет смысл вначале определить области малых размеров, где находятся решения, их количество и затем применять стандартный метод для нахождения корней.

Подобные малые области будем называть корневыми (КО – корневая область). Число КО определяет множество решений данной нелинейной системы. В случае одного уравнения с одним неизвестным задача решается просто по нахождению отрезка малой длины, на концах которого знаки левой части рассматриваемого уравнения

Чернышов Александр Данилович
`e-mail:` chernyshovad@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

Поступила 28.01.2016

противоположны. Для множества нелинейных уравнений найти КО и их количество гораздо сложнее.

Рассмотрим замкнутую нелинейную систему алгебраических уравнений, имеющую в некоторой прямоугольной области Ω только простые корни:

$$f_i\left(x_1, ..., x_m\right) = 0,\;\; i = 1 \div m,\;\; \Omega = \left\{a_j < x_j < b_j\right\},\;\; j = 1 \div m,\;\; f_i \in C^{(1)}\left(\Omega\right). \qquad (1)$$

В прямоугольной системе координат $\{x_j\}$ область Ω имеет форму $m-$мерного параллелепипеда, уравнения $2m$ его граней определяются крайними значениями переменных x_j, т.е. $x_j = a_j,\; x_j = b_j$.

Решения системы (1) будем называть корневыми точками $C_q \in \Omega$, $q = 1 \div q_0$, где q_0 – количество решений. В области Ω построим равномерную сетку с шагами h_j вдоль координатной оси x_j и равномерно нанесем N_j узлов с координатами

$$x_{j,\,k_j} = a_j + k_j h_j,\;\; h_j = (b_j - a_j)/N_j,\;\; k_j = 0 \div N_j. \qquad (2)$$

Можно использовать также и неравномерную сетку.

Поставим задачу: найти малые корневые области КО Ω_q^*, $q = 1 \div q_0$ в форме $m-$мерных параллелепипедов с размером ребер вдоль координатных осей $h_1 \times h_2 \times ... \times h_m$, в которых находятся корневые точки.

Для получения алгоритма решения сделаем следующие предположения.

1. Пусть все корни системы (1) простые и поверхности $f_i = 0$ в корневой точке пересекаются между собой под некоторым углом, не равным нулю.

2. Без ограничения общности рассмотрений можно считать, что все корни системы (1) расположены внутри Ω на расстоянии от её границы большем, чем на один шаг h_j вдоль соответствующей оси.

3. Положим, что простые корни системы (1) расположены друг от друга дальше, чем на расстоянии h_j по соответствующей переменной x_j.

4. Шаги h_j малы и в пределах одной ячейки каждая функция f_i при изменении любой переменной x_j имеет или постоянный знак, или изменяет свой знак на противоположный не более одного раза.

5. В пределах одной или нескольких соседних ячеек каждую поверхность $f_i = 0$ можно аппроксимировать плоскостью.

6. Проведем через корневую точку C_q плоскость S_j^* параллельно $j-$й грани S_j данной ячейки, где находится C_q. Положим, что в пересечениях каждой поверхности $f_i = 0, \forall i = 1 \div m$ с плоскостями S_j^* и S_j будем иметь кривые, которые заменим отрезками прямых в пределах данной ячейки.

Сделанные предположения могут выполняться, если шаги h_j достаточно малы, а поверхности $f_i = 0$ являются гладкими в окрестности ячейки с корневой точкой C_q.

После нанесения равномерной сетки на нижней грани Ω при $x_1 = a_1$ будем иметь множество узлов – стартовые точки, откуда и начинается вычислительный процесс. Из некоторого стартового узла с координатами

$$\{x_1 = a_1,\, x_{2,\,k_2},\;\, x_{3,\,k_3}, ..., x_{m,\,k_m}\} \qquad (3)$$

будем двигаться параллельно координатной оси x_1 и в каждом узле вычислять знак $f_i\left(x_1, ..., x_m\right)$. При этом выбранные в (3) величины $x_{2,\,k_2}$, $x_{3,\,k_3}$, ..., $x_{m,\,k_m}$ будут оставаться постоянными, изменяться будет только одна координата $x_1 = x_{1,\,k_1} \in [a_1,\, b_1]$ при изменении номера $k_1 = 0 \div N_1$. В результате на прямой, проведенной из точки (3) параллельно оси x_1, можно найти такие две соседние точки

$$A^{1,p,i,+}_{0,k_2,k_3,...,k_m},\ A^{1,p,i,-}_{0,k_2,k_3,...,k_m}, \tag{4}$$

в которых данная функция f_i изменяет свой знак на противоположный, т. е.

$$f_i\left(A^{1,p,i,+}_{0,k_2,k_3,..,k_m}\right)\cdot f_i\left(A^{1,p,i,-}_{0,k_2,k_3,..,k_m}\right) < 0. \tag{5}$$

Две точки (4) находятся друг от друга на расстоянии одного шага h_1. В дальнейшем их будем называть точками изменения знака (точками ИЗН). В обозначении этих точек верхние индексы имеют следующий смысл:

- первый верхний индекс (в данном случае 1) означает движение из стартовой точки (3) параллельно оси x_1;

- второй индекс (здесь p) для данной стартовой точки равен номеру найденной пары точек ИЗН, которых может быть несколько;

- третий индекс (здесь i) соответствует номеру рассматриваемой функции f_i;

- на четвертом месте плюс вверху после индекса i означает, что точка $A^{1,p,i,+}_{0,k_2,k_3,...,k_m}$, расположена выше на один шаг h_1 вдоль оси x_1 по отношению к точке с минусом вверху $A^{1,p,i,-}_{0,k_2,k_3,...,k_m}$.

Нижние индексы в обозначении точек (4) взяты идентичными обозначениям координат стартовой точки (3). Количество нижних индексов равно количеству неизвестных, т. е. m. Место расположения индекса 0 внизу (здесь – первое место) совпадает с номером координатной оси, вдоль которой происходит движение для получения точек ИЗН. Этот индекс равен нулю, так как для стартовой точки $k_1 = 0$. Если, например, точки ИЗН получены движением вдоль координатной оси x_2 из плоскости $x_2 = a_2$, то по аналогии с (4) они будут иметь вид $A^{2,p,i,+}_{k_1,0,k_3,...,k_m}$, $A^{2,p,i,-}_{k_1,0,k_3,...,k_m}$, т. е. ноль в нижних индексах здесь будет находиться на второй позиции, и т. д.

Для точек (4) введем обозначения координат x_1 такими же верхними и нижними индексами, как и у соответствующих точек ИЗН:

$$A^{1,p,i,+}_{0,k_2,k_3,..,k_m} \sim x_1 = x^{1,p,i,+}_{0,k_2,k_3,..,k_m},\quad A^{1,p,i,-}_{0,k_2,k_3,...,k_m} \sim x_1 = x^{1,p,i,-}_{0,k_2,k_3,...,k_m}. \tag{6}$$

Для нахождения КО Ω^*_q необходимо рассматривать сразу две стартовые точки. Вторую стартовую точку получим смещением из точки (3) в направлении оси $x_j,\ j \neq 1$ на расстояние одного шага h_j. Эти две стартовые точки обозначим через O_1, O_j, а их координаты запишем в виде

$$O_1 \sim \left\{x_1 = a_1\,,\, x_{2,k_2},\, ...,x_{j,k_j}, ...,\, x_{m,k_m}\right\}, \tag{7}$$

$$O_j \sim \left\{x_1 = a_1\,,\, x_{2,k_2},\, ...,\left(x_{j,k_j}+h_j\right), ...,\, x_{m,k_m}\right\}$$

Через две точки (7) проведем параллельно оси x_1 в Ω прямые $O_1B_1,\ O_jB_j$. Множество функций $\{f_i\}$ системы (1) сгруппируем парами:

$$\begin{array}{l}(f_1, f_2)\,,\ (f_3, f_4)\,, ..., (f_{2k-1}, f_{2k})\,,\ \text{если}\quad m = 2k,\\ (f_1, f_2)\,,\ (f_3, f_4)\,, ..., (f_{2k-1}, f_1)\,,\ \text{если}\quad m = 2k-1.\end{array} \tag{8}$$

В узлах каждой прямой $O_1B_1,\ O_jB_j$ будем исследовать знаки вначале только одной пары функций (f_i, f_k).

Пусть f_i , f_k изменяют свои знаки на прямой O_1B_1 в некоторых точках

$$A^{1,p,i,+}_{0,k_2,k_3,..,k_m},\ A^{1,p,i,-}_{0,k_2,k_3,..,k_m},\ A^{1,p,k,+}_{0,k_2,k_3,..,k_m},\ A^{1,p,k,-}_{0,k_2,k_3,..,k_m}, \tag{9}$$

а на прямой O_jB_j в точках

$$A^{1,p,i,+}_{0,\,k_2,..,k_j+1,..,k_m}\,,\ A^{1,p,i,-}_{0,\,k_2,..,k_j+1,..,k_m}\,,\ A^{1,p,k,+}_{0,\,k_2,..,k_j+1,..,k_m}\,,\ A^{1,p,k,-}_{0,k_2,..,k_j+1,..,k_m}. \tag{10}$$

Точки ИЗН в (9) по построению получены при движении параллельно оси x_1 из стартовой точки O_1 в (7), а точки (10) получены движением параллельно оси x_1 из стартовой точки O_j. Используя обозначения (6), запишем x_1-координаты точек ИЗН (9), (10):

$$\begin{gathered} x^{1,p,i,+}_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}\,,\ x^{1,p,i,-}_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}\,,\ x^{1,p,k,+}_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}\,,\ x^{1,p,k,-}_{0,k_2,k_3,\ldots,k_m}, \\ x^{1,p,i,+}_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m}\,,\ x^{1,p,i,-}_{0,\,k_2,..,k_j+1,\ldots,k_m}\,,\ x^{1,p,k,+}_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m}\,,\ x^{1,p,k,-}_{0,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m} \end{gathered} \tag{11}$$

По построению между координатами (11) имеет место связь

$$\begin{gathered} x^{1,p,i,+}_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m} - x^{1,p,i,-}_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m} = x^{1,p,k,+}_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m} - x^{1,p,k,-}_{0,k_2,k_3,\ldots,k_m} = \pm h_1\,, \\ x^{1,p,i,+}_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,..,k_m} - x^{1,p,i,-}_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m} = x^{1,p,k,+}_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m} - x^{1,p,k,-}_{0,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m} = \pm h_1. \end{gathered} \tag{12}$$

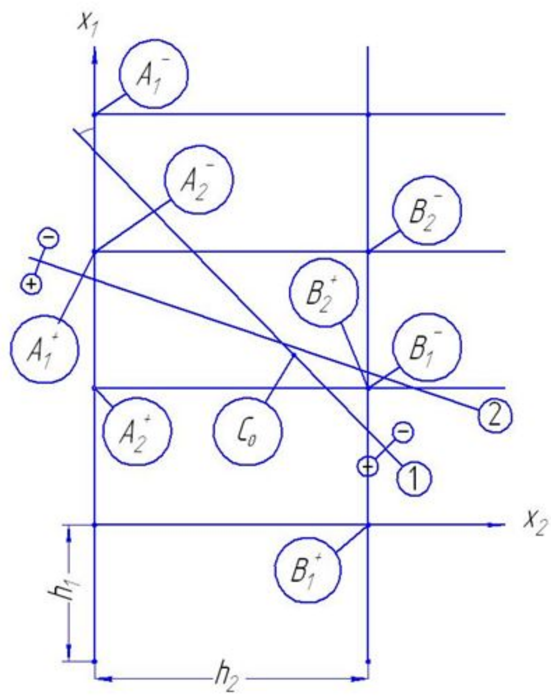

Рис. 1

Рассмотрим простейший случай, когда система (1) состоит из двух уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ с двумя неизвестными x_1, x_2. Пусть кривые $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ пересекаются в некоторой точке C_0 (рис. 1). В точках A_1^+, A_1^- на прямой $x_2 = 0$ вдоль оси x_1 функция f_1 меняет знак в точках A_2^+, A_2^-. На этой же прямой $x_2 = 0$ вдоль оси x_1 функция f_2 меняет знак. На параллельной прямой $x_2 = h_2$, сдвинутой вдоль x_2 на один шаг h_2, функция f_1 меняет знак в точках B_1^+, B_1^-, на этой же прямой функция f_2 меняет знак в точках B_2^+, B_2^-. Из рисунка видно, что при любом расположении двух прямых, пересекающихся в C_0 и аппроксимирующих кривые $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, наблюдается закономерность: если точка A_2^+ расположена выше точки A_1^+, то точка B_2^+ всегда будет расположена ниже точки B_1^+; если же точка A_2^+ расположена ниже точки A_1^+, то точка B_2^+ будет расположена выше точки B_1^+. Это означает, что в обоих случаях x_1-координаты точек ИЗН (11) при $m = 2$ удовлетворяют неравенству

$$\left(x_{0,\,k_2}^{1,p,1,+} - x_{0,\,k_2}^{1,p,2,+}\right)\left(x_{0,\,k_2+1}^{1,p,1,+} - x_{0,\,k_2+1}^{1,p,2,+}\right) \leq 0. \tag{13}$$

Равенство нулю в (13) означает, что точки A_1^+ и A_2^+ совпадают либо совпадают точки B_1^+ и B_2^+. Свойство (13) можно обосновать геометрическими рассмотрениями. Если у двух пересекающихся отрезков $A_1\,B_1 \sim 1$ и $A_2\,B_2 \sim 2$ слева от точки их пересечения конец A_1 отрезка 1 расположен выше конца A_2 отрезка 2 по отношению к положительному направлению оси x_1, то правый конец B_1 отрезка 1 будет расположен ниже конца B_2 отрезка 2. Этот результат можно обобщить на случай нелинейной системы m-уравнений.

Пусть для данной стартовой точки (3) и данной пары функций f_i, f_k найдены некоторые точки ИЗН (9), (10). Если соответствующая для f_i точка $A_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,i,+}$ расположена выше (ниже) точки $A_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,k,+}$, соответствующей f_k, и при этом точка $A_{0,\,k_2+1,k_3,..,k_m}^{1,p,i,+}$ расположена ниже (выше) точки $A_{0,\,k_2+1,k_3,..,k_m}^{1,p,k,+}$, то для x_1-координат данных четырех точек ИЗН по аналогии с (13) выполняется неравенство

$$\left(x_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}^{1,p,i,+} - x_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}^{1,p,k,+}\right)\left(x_{0,\,k_2,..,k_j+1,..,k_m}^{1,p,i,+} - x_{0,\,k_2,..,k_j+1,..,k_m}^{1,p,k,+}\right) \leq 0. \tag{14}$$

Отметим, что условие (14) можно аналогично записать и через координаты точек с индексами минус вверху, но в силу свойства

$$x_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,i,+} - x_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,i,-} = h_1$$

это приведет к эквивалентному выражению.

Предположим, что для двух функций f_i, f_k найдены две пары точек ИЗН

$$A_{+0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,i,+},\; A_{+0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,k,+},\; A_{+0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m}^{1,p,i,+},\; A_{+0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m}^{1,p,k,+}, \tag{15}$$

координаты которых удовлетворяют неравенству (14). Из восьми точек ИЗН (9), (10) выберем наибольшую и наименьшую x_1-координату:

$$\max\left\{\left[x_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,i,+},\, x_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m}^{1,p,i,+}\right],\; \left[x_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,k,+},\, x_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m}^{1,p,k,+}\right]\right\} = x_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,j,p,(i,k),+}$$

$$\min\left\{\left[x_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,i,-},\, x_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m}^{1,p,i,-}\right],\; \left[x_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,p,k,-},\, x_{0,\,k_2,\ldots,k_j+1,\ldots,k_m}^{1,p,k,-}\right]\right\} = x_{0,\,k_2,k_3,\ldots,k_m}^{1,j,p,(i,k),-}. \tag{16}$$

Для дальнейшего понадобится определение отрезка псевдокорневой области (ОТПКО) $L_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}^{1,j,p,(i,k)}$ на оси x_1 с помощью координат, полученных в (16):

$$L_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}^{1,j,p,(i,k)} \sim x_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}^{1,j,p,(i,k),-} \leq x_1 \leq x_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}^{1,j,p,(i,k),+}. \tag{17}$$

Смысл индексов в обозначении ОТПКО следующий: первый верхний индекс 1 соответствуют движению параллельно оси x_1, второй индекс j соответствует смещению вдоль оси x_j на один шаг h_j для получения точки O_j с последующим движением параллельно оси x_1, третий индекс $p-$порядковый номер отрезка. Подобных отрезков ОТПКО может быть несколько или вообще ни одного. Индексы i, k в скобках соответствуют номерам пары функций f_i , f_k. Нижние индексы имеют такой же смысл, как и у точек ИЗН, они обозначают координаты стартовой точки O_1.

Алгоритм нахождения малых областей

Начинать составление программы для ЭВМ нужно со следующих подготовительных действий:

1. Записать систему (1) в явном виде.

2. Определить нижние a_j и верхние b_j возможные значения переменных x_j, исходя из постановки задачи.

3. Выбрать шаги h_j и построить равномерную координатную сетку так, чтобы выполнялись предположения 2–6.

4. Множество функций $\{f_i\}$ из (1) представить парами в виде (8).

Совокупность рассмотрений, приводящих к построению ОТПКО $L^{1,j,p,(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$, обозначим через оператор $P^{1,j,p,(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$ $(i \neq k)$. Этот оператор определим следующими действиями (5–13):

5. Выбрать пару функций f_i , f_k , $i \neq k$ из множества (8).

6. Выбрать стартовую точку O_1 (3) на плоскости $x_1 = a_1$.

7. Из стартовой точки O_1 сдвинуться вдоль оси x_j на один шаг h_j для получения второй точки O_j (7).

8. Из двух точек O_1 и O_j (7) двигаться вдоль прямых O_1B_1 , O_jB_j параллельно оси x_1 и при этом определять знаки функций f_i , f_k в каждом узле на данных прямых. Следует учесть, что для точек O_1 и O_j координата $x_1 = a_1$, для точек B_1 и B_j координата $x_1 = b_1$. Все остальные координаты для точек прямой O_1B_1, как и для O_jB_j соответственно, остаются постоянными.

9. Присвоить порядковые номера p точкам множества ИЗН.

10. Вычислить координаты $x^{1,p,i,+}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$, $x^{1,p,i,-}_{0,k_2,k_3,..,k_m}$ множества точек ИЗН (6), отмеченных индексом p вверху, для которых выполняется неравенство (14).

11. Из множества точек ИЗН (9), (10) найти такие точки, x_1 – координаты которых удовлетворяют неравенству (14).

12. По формулам (16) вычислить x_1 – координаты для точек ИЗН пары функций f_i , f_k, т. е. $x_1 = x^{1,j,p,(i,k),-}_{0,\,k_2,k_3,...,k_m}$, $x_1 = x^{1,j,p,(i,k),+}_{0,\,k_2,k_3,...,k_m}$.

13. Неравенствами (17) определить отрезок ОТПКО $L^{1,j,p,(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$.

14. Возможен случай, когда внутри некоторого интервала $\delta = h_1$ вдоль оси x_1 знакопеременность функций f_i , f_k происходит одновременно. Для таких точек на прямых O_1B_1 , O_jB_j вместо неравенства (14) будет выполняться равенство

$$\left(x^{1,p,i,+}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m} - x^{1,p,j,+}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}\right)\left(x^{1,p,i,+}_{0,\,k_2+1,k_3,..,k_m} - x^{1,p,j,+}_{0,\,k_2+1,k_3,..,k_m}\right) = 0. \qquad (18)$$

В этом случае подобный интервал δ следует разделить на более мелкие шаги $h_{1,1} = h_1/N_{1,1}$, где $N_{1,1}-$количество дополнительных мелких интервалов внутри рассматриваемого интервала δ. После этого внутри интервала δ следует заново применить оператор $P^{1,j,p(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$ $(i \neq k)$ для построения соответственного ОТПКО $L^{1,j,p(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$. Конец описания оператора $P^{1,j,p(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$ $(i \neq k)$.

15. После этого следует применить оператор $P^{1,j,p(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$ при $i = 1,\ k = 2,\ j = 2,\ k_2 = k_3 = ... = k_m = 0$ и определить координаты для соответствующего ОТПКО из (17)

$$x^{1,2,p(1,2),-}_{0,\,0,..,0} \le x_1 \le x^{1,2,p(1,2),+}_{0,\,0,..,0} \tag{19}$$

16. Затем этот оператор применить при $i = 1,\ k = 2,\ j = 3,\ k_2 = k_3 = ... = k_m = 0$ и определить координаты для соответствующего ОТПКО

$$x^{1,3,p(1,2),-}_{0,\,0,..,0} \le x_1 \le x^{1,3,p(1,2),+}_{0,\,0,..,0} \tag{20}$$

17. Полученные координаты отрезков (19) и (20) надо сравнить между собой – имеют ли они общую часть. Возможны два случая:

$$\text{а) либо}\, x^{1,3,p,(1,2),-}_{0,0,..,0} < x^{1,2,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0} < x^{1,3,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0}, \tag{21}$$

тогда общая часть имеет вид

$$x^{1,3,p,(1,2),-}_{0,\,0,..,0} < x_1 < x^{1,2,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0} \tag{22}$$

$$\text{б) либо}\, x^{1,2,p,(1,2),-}_{0,\,0,..,0} \le x^{1,3,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0} \le x^{1,2,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0}, \tag{23}$$

$$\text{тогда общая часть имеет вид}\quad x^{1,2,p,(1,2),-}_{0,\,0,..,0} < x_1 < x^{1,3,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0} \tag{24}$$

18. Если оба неравенства (21) и (23) не выполняются, то отрезки (19) и (20) не рассматривать, так как они не имеют общей части и относятся к КО областям Ω^*_q при данном значении номера p.

19. Если же выполняется одно из неравенств (21) или (23), то отрезок (22) или (24) на оси x_1 может относиться к КО Ω^*_q. В этом случае надо последовательно для различных $j = 4, 5, \ldots, m$ применить оператор $P^{1,j,p,(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$ при фиксированных $i = 1$, $k = 2$, $k_2 = k_3 = ... = k_m = 0$ и при каждом j в отдельности определить координаты соответствующих ОТПКО подобно (22), (24), сделать вывод, указанный в предыдущих пунктах 8, 9 и определить предельный отрезок ОТПКО на оси x_1 по формулам

$$\begin{gathered}
x^{1,p,(1,2),-}_{0,\,0,..,0} < x_1 < x^{1,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0}, \\
x^{1,p,(1,2),-}_{0,\,0,..,0} = \max x^{1,j,p,(1,2),-}_{0,\,0,..,0} \ \text{ при } \ \forall j = 2 \div m, \\
x^{1,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0} = \min x^{1,j,p,(1,2),+}_{0,\,0,..,0} \ \text{ при } \ \forall j = 2 \div m.
\end{gathered} \tag{25}$$

Отметим важное свойство предельного отрезка ОТПКО (25). Он получен для стартовой точки O_1 с координатами $x_j = a_j$ при $k_j = 0,\ j = 1 \div m$, поэтому нижние индексы в обозначениях (25) равны нулям. При этом семейство вторых точек O_j получаем смещением из O_1 на один шаг h_j вдоль координаты $x_j,\ j = 2 \div m$. Пара функций f_1 , f_2, на что указывают верхние индексы в скобках $(1, 2)$, на концах отрезка (25) изменяют свои знаки на противоположные по построению так, что при $\forall\, j = 2 \div m$ координаты отрезка (25) удовлетворяют неравенству (14).

Для произвольной стартовой точки O_1 с координатами, указанными в (3), предельный отрезок ОТПКО на прямой O_1B_1 для пары функций f_i , f_k будет определяться координатами

$$x^{1,p,(i,k),-}_{0,\,k_2,..,k_m} < x_1 < x^{1,p,(i,k),+}_{0,\,k_2,..,k_m},$$

$$x^{1,p,(i,k),-}_{0,\,k_2,..,k_m} = \max x^{1,j,p,(i,k2),-}_{0,\,k_2,..,k_m} \ \text{ при } \ \forall j = 2 \div m, \tag{26}$$

$$x^{1,p,(i,k2),+}_{0,\,k_2,..,k_m} = \min x^{1,j,p,(i,k2),+}_{0,\,k_2,..,k_m} \ \text{ при } \ \forall j = 2 \div m$$

С помощью предельного отрезка ОТПКО (26) определим псевдокорневую область $\Omega^{1,p,(i,k)}_{0,\,k_2,..,k_m}$ (в дальнейшем ПКО) следующими неравенствами

$$x^{1,p,(i,k),-}_{0,\,k_2,..,k_m} < x_1 < x^{1,p,(i,k),+}_{0,\,k_2,..,k_m}, \ \ x_{j,k_j} < x_j < x_{j,k_j} + h_j, \ j = 2 \div m \tag{27}$$

Эта область по построению имеет размер вдоль оси x_1, равный нескольким шагам h_1, вдоль других осей x_j размер равен одному шагу $h_j, \ j = 2 \div m$. Подобные области имеют важное значение в алгоритме нахождения неизвестных малых корневых областей $\Omega^*_q, \ q = 1 \div q_0$. В этой связи сформулируем следующие две леммы.

Лемма 1. Некоторые области ПКО $\Omega^{1,p(i,k)}_{0,\,k_2,...,k_m}$ могут не содержать корневые точки C_q системы (1).

Доказательство. Действительно, если две поверхности $f_i = 0$, $f_k = 0$ пересекаются в некоторой точке и для них построена ПКО $\Omega^{1,p(i,k)}_{0,\,k_2,...,k_m}$, то третья поверхность $f_n = 0$ может не проходить через эту точку.

Лемма 2. Каждая корневая точка C_q системы (1) принадлежит одной из областей ПКО $\Omega^{1,p(i,k)}_{0,\,k_2,...,k_m}$.

Доказательство. Пусть корневая точка C_0 находится внутри рассматриваемой ячейки. Тогда по предположению 1 поверхности $f_k = 0$, $f_l = 0$ в этой точке пересекаются под некоторым углом и координаты корневых точек (11) будут удовлетворять неравенству (14), т. е. данная ячейка принадлежит корневой области.

Остается рассмотреть случай, когда корневая точка находится на грани, ребре или узле некоторой ячейки. Для этого достаточно координатную сетку с теми же равномерными шагами h_j сместить вдоль каждой оси в положительном направлении на некоторую малую величину (например, на $h_j/3$) и повторить с самого начала поиск областей Ω^*_q. При этом следует роль оси x_1 заменить на ось x_2, т. е. из стартовых точек на плоскости $x_2 = a_2$ двигаться параллельно оси x_2 до плоскости $x_2 = b_2$. Пересечение областей $\Omega^{1,p(i,k)}_{0,\,k_2,..,k_m} \cap \Omega^{2,p(i,k)}_{k_1,0,k_3,\,..,k_m}$ позволит получить искомые области Ω^*_q размером $h_1 \times h_2 \times ... \times h_m$.

После применения оператора $P^{1,j,p(i,k)}_{0,\,k_2,k_3,..,k_m}$ ко всем стартовым точкам O_1 с координатами

$$x_1 = a_1, \ x_j = a_j + h_j k_j, \ j = 2 \div m, \ k_j = 0 \div N_j \ , \ h_j = (b_j - a_j)/N_j$$

и оператора $P^{2,j,p(i,k)}_{k_1,0,\,k_3,...,k_m}$ ко всем стартовым точкам O_1 с координатами

$$x_1 = a_1 + h_1 k_1, \ x_2 = a_2, \ x_j = a_j + h_j k_j, \ j = 3 \div m$$

найдем все корневые области Ω^*_q в рассматриваемой Ω.

Следствие 1. После нахождения Ω^*_q в качестве приближенного решения системы (1) можно взять центральные точки областей Ω^*_q.

Следствие 2. По построению известно, что каждая КО Ω_q^* содержит только по одной корневой точке C_q. Если теперь в качестве исследуемой области Ω взять найденную Ω_q^* с размерами $h_1 \times h_2 \times ... \times h_m$ и повторно применить все рассмотрения с оператором $P_{0,k_2,k_3,..,k_m}^{1,j,p,(i,k)}$, используя разбиение каждого шага h_j на более мелкие части, то найдем корневую область Ω_q^{**} с ещё меньшими размерами. Применяя какой-либо стандартный метод, можно быстро вычислить все решения системы (1) в Ω с достаточно высокой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А. и др. Предельное состояние деформированных тел и горных пород. М.: Физматлит, 2008. С. 832.

[2] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

[3] Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964. 216 с.

[4] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

[5] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.

[6] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. Минск: Наука и техника, 1985.

[7] Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1997. 234 с.

[8] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.

[9] Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М.: Высш. Школа, 2000. 266 с.

A. D. Chernyshov

FINDING SMALL AREAS FOR SIMPLE ROOTSNON-LINEAR SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS

Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Abstract. A method for finding small areas for simple rootsnon-linear system of algebraic equations, which does not use gradients. Introduce new concepts: starting points, points of reversal and root points of the root areas of special operators, simplifying the preparation of the programing the application of computers. After the implementation of the given-tion method of finding the root of small areas and their number in the distance, follows, using any standard method roots are would-tup and with high accuracy.

Keywords: nonlinear system of algebraic equations, Korean-nevaya region, the simple roots.

REFERENCES

[1] Ivlev D. D., Maximova L. A. Limit state of deformable bodies and rocks. M.: Физматлит, 2008. 832 p. (in Russian).

[2] Lur'e A. I. Theory of elasticity. M.: Nauka, 1970. 940 p. (in Russian).

Chernyshov Александр Данилович

`e-mail:` chernyshovad@mail.ru, Professor, Department of Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technology, Doctor of Physical and Mathematical Sciences.

[3] Uilkinson U. L. Non-Newtonian fluid. M.: Mir, 1964. 216 p. (in Russian).

[4] Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Numerical methods. M.: Nauka, 1987. 600 p. (in Russian).

[5] Vasil'ev F. P. Methods for solving extreme problems. M.: Nauka, 1988. 552 p. (in Russian).

[6] Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrnyj P. I. Start computing theory methods. Linear algebra and nonlinear equations. Minsk: Science and Technology, 1985. (in Russian).

[7] Samarskij A. A. Introduction to Numerical Methods. M.: Nauka, 1997. 234 p. (in Russian).

[8] Marchuk G. I. Methods of Computational Mathematics. M.: Nauka, 1989. 608 p. (in Russian).

[9] Verzhbickij V. M. Numerical methods. Linear algebra and nonlinear equation. M.: High school, 2000. 266 p. (in Russian).