Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 59–86

И. В. Меньшова

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ–ПАПКОВИЧА В ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича, возникающим при решении первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq h\}$. Независимо от вида однородных граничных условий на длинных сторонах полуполосы всегда имеются 2 представления для функций Фадля–Папковича. Оба представления рассмотрены в работе. Показана их эквивалентность на определенных физически естественных классах раскладываемых функций. Построены функции, биортогональные к функциям Фадля–Папковича, а с их помощью – разложения Лагранжа. Разложениями Лагранжа, в отличие от разложений, возникающих при решении краевой задачи, называются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля–Папковича. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по тригонометрическим системам функций и играют такую же роль при решении краевых задач, какую тригонометрические ряды играют в разложениях Файлона–Рибьера [1]. Разложения Лагранжа рассматривались и раньше, например, в работах [2]–[15], но лишь в той степени, в какой это требовалось для решения конкретной краевой задачи. Предлагаемая статья имеет целью детальное изучение этих разложений.

Функции Фадля–Папковича точно удовлетворяют нулевым граничным условиям на продольных сторонах полуполосы, но устроены они сложнее: комплекснозначны, не ортогональны и не образуют классического базиса на отрезке (торце полуполосы), на котором задаются раскладываемые функции. Но к ним все же можно построить определенные на римановой поверхности логарифма биортогональные системы функций, а затем получить явные выражения (в виде простых интегралов Фурье от граничных функций) для искомых коэффициентов разложений по той же схеме, что и в классических решениях Файлона–Рибьера [16]. Сутью подхода является новое представление о базисе функций на отрезке, являющееся обобщением классического понимания базиса на отрезке. Опираясь на работы [17], [18], классический базис можно трактовать как базис в комплексной плоскости. Тогда как функции Фадля–Папковича образуют базис на римановой поверхности логарифма. Причем в частном случае, когда функции Фадля–Папковича вырождаются в обычные тригонометрические системы

Меньшова Ирина Владимировна
`e-mail:` menshovairina@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02-644).

Поступила 28.01.2016

функций, базис на римановой поверхности становится классическим базисом на отрезке. В основе соответствующей теории лежит преобразование Бореля в классе квазицелых функций экспоненциального типа (классический базис основан на теории целых функций экспоненциального типа и теореме Пэли–Винера [19]). Класс квазицелых функций экспоненциального типа и преобразование Бореля в этом классе были впервые введены в 1935 году в работе [20]. В статье [21] изучались свойства этого преобразования в той степени, насколько это необходимо при решении краевых задач теории упругости в полуполосе.
Ключевые слова: теория упругости, полуполоса, функции Фадля–Папковича, биортогональные функции, разложения Лагранжа, точные решения.

УДК: 539.3

Введение. Разложения по функциям Фадля–Папковича (однородным решениям) составляют суть бигармонической проблемы, ее ядро. Ей почти 200 лет, и все эти годы она была предметом пристального внимания как математиков, так и механиков.

В наше время ее решением интересовались М. В. Келдыш, О. А. Олейник, В. А. Кондратьев, П. Ф. Папкович, А. Ю. Ишлинский, И. И. Ворович, Н. Х. Арутюнян, А. И. Лурье, Г. А. Гринберг и многие другие. В. К. Прокоповым в 60–70 годы было опубликовано 2 обзора по однородным решениям [22],[23]. Особый интерес к проблеме проявился в 1940–1980 гг., после публикации П. Ф. Папковичем [24] его известного соотношения “обобщенной ортогональности”, которому удовлетворяют однородные решения. В эти годы в СССР вышло не менее 2000 работ по бигармонической проблеме. На Западе публикаций было заметно меньше, они были разрозненны и слабее отечественных. После восьмидесятых годов количество публикаций резко снизилось. Это связано с известными изменениями в российской науке и крушением Московской (М. И. Гусейн-Заде), Ленинградской (А. И. Лурье), Ростовской-на-Дону (И. И. Ворович) и Украинской (В. Т. Гринченко) школ, занимавшихся проблемой разложений по функциям Фадля–Папковича. Ведущие представители этих школ (указаны в скобках) хорошо осознавали фундаментальное значение точного решения бигармонической проблемы и для механики, и для математики. А также то, что точное решение краевой задачи для бигармонического уравнения может быть представлено только в виде разложений по собственным функциям краевой задачи, т. е. по функциям Фадля–Папковича. Поэтому их изучению уделялось самое пристальное внимание. Западные ученые, как правило, шли по пути приближенного решения проблемы. Лишь немногие западные работы достигали уровня тех, что публиковались в СССР [25]–[27]. Однако точного решения проблемы получено не было. Главная причина этого заключается, по-видимому, в том, что ее решение искалось в рамках классических представлений теории базиса функции, тогда как функции Фадля–Папковича не образуют классического базиса. Они представляют собой обобщение систем экспонент с комплексными показателями [17], [18] и с вырожденной в отрезок (торец полуполосы) областью аналитичности. Трудно указать работу (учитывая западные публикации), которая оказала бы существенное влияние на изменение положения дел по бигармонической проблеме. Фундаментальный обзор (более 700 ссылок на наиболее существенные исследования за почти 200 лет) одного из ярчайших специалистов по бигармонической проблеме В. В. Мелешко, написанный в 2003 г., еще раз свидетельствует об этом [28].

Опираясь на статью А. Пфлюгера [20] и дополнительные исследования по теории квазицелых функций [21], в 1997 г. удалось впервые построить точное решение бигармонической проблемы в классической постановке: полуполоса со свободными продольными сторонами, нагруженная на торце сосредоточенной силой. Решение задачи получено в виде рядов по функциям Фадля–Папковича, коэффициенты которых найдены в явном виде с помощью функций, биортогональных к функциям Фадля–Папковича [29].

1. Постановка краевой задачи (основные положения). При решении первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq h\}$, когда ее длинные стороны $y = \pm h$ свободны, т. е.

$$\sigma_y(x, \pm h) = \tau_{xy}(x, \pm h) = 0, \tag{1.1}$$

а на торце $x = 0$ заданы нормальное и касательное напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \;\; \tau_{xy}(0, y) = \tau(y), \tag{1.2}$$

решение краевой задачи может быть представлено в виде разложений по собственным функциям краевой задачи, которые в теории упругости принято называть функциями Фадля–Папковича. Эти разложения имеют вид:

$$\begin{gathered}
U\left(x, y\right) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi\left(\lambda_k, y\right) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \xi\left(\overline{\lambda_k}, y\right) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\
V\left(x, y\right) = -\nu y C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi\left(\lambda_k, y\right) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} \chi\left(\overline{\lambda_k}, y\right) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\
\sigma_x\left(x, y\right) = 2(1+\nu) C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x\left(\lambda_k, y\right) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_x\left(\overline{\lambda_k}, y\right) e^{\overline{\lambda_k} x}, \qquad (1.3) \\
\sigma_y\left(x, y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y\left(\lambda_k, y\right) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} s_y\left(\overline{\lambda_k}, y\right) e^{\overline{\lambda_k} x}, \\
\tau_{xy}\left(x, y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}\left(\lambda_k, y\right) e^{\lambda_k x} + \overline{a_k} t_{xy}\left(\overline{\lambda_k}, y\right) e^{\overline{\lambda_k} x}.
\end{gathered}$$

Стоящие под знаком суммирования функции $\xi\left(\lambda_k, y\right)$, $\xi\left(\overline{\lambda_k}, y\right)$ и т. д. и есть функции Фадля–Папковича. В формулах (1.3) введены такие обозначения: $U(x, y) = Gu(x, y)$; $V(x, y) = Gv(x, y)$, $u(x, y)$и $v(x, y)$ – соответственно перемещения по x (продольное) и по y (поперечное), G – модуль упругости при сдвиге, ν – коэффициент Пуассона. Числа λ_k – множество $\left\{\pm\lambda_k; \pm\bar{\lambda}_k\right\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$ всех комплексных нулей целой функции экспоненциального типа

$$L(\lambda) = \lambda^2 \left(1 + \frac{\sin 2\lambda h}{2\lambda h}\right). \tag{1.4}$$

C_0, C_1, a_k – неизвестные коэффициенты разложений, причем C_0 и C_1 отвечают нулевым корням характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ и соответствуют элементарному решению сопротивления материалов, а a_k, $\overline{a_k}$ – его комплексным корням λ_k и $\overline{\lambda_k}$ соответственно.

Следуя методу начальных функций [30], удовлетворим граничным условиям (1.1)

$$\begin{cases} L_{YU}(\alpha,h)\,U_0(x)+L_{YY}(\alpha,h)\,Y_0(x)=0; \\ L_{XU}(\alpha,h)\,U_0(x)+L_{XY}(\alpha,h)\,Y_0(x)=0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь $L_{YU}(\alpha,h)$ и т. д. – операторы метода начальных функций. $U_0(x)=Gu(x,0)$, $Y_0(x)=\sigma_y(x,0)$ – начальные функции, определенные при $y=0$, $\alpha=d/dx$ – оператор дифференцирования. Выражения для операторов приведены в книге [30]. Вводя разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$U_0(x)=L_{XY}(\alpha,h)\,F(x),\;\; Y_0(x)=-L_{XU}(\alpha,h)\,F(x), \tag{1.6}$$

тождественно удовлетворим первому уравнению системы (1.5), а второе примет вид

$$\left[L_{YU}(\alpha,h)\,L_{XY}(\alpha,h)-L_{YY}(\alpha,h)\,L_{XU}(\alpha,h)\right]F(x)=0. \tag{1.7}$$

Раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\alpha^2\left(1+\frac{\sin 2\alpha h}{2\alpha h}\right)F(x)=0. \tag{1.8}$$

Его решение, не возрастающее на бесконечности, имеет вид

$$F(x)=C_0+C_1x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_ke^{\lambda_kx}+\overline{a_k}e^{\overline{\lambda_k}x}\right)\;(\lambda_k\in\Lambda,\;\; \mathrm{Re}\lambda_k<0). \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в формулы (1.6), найдем начальные функции, а затем, в соответствии с зависимостями метода начальных функций, формулы (1.3) для перемещений и напряжений в полуполосе. Функции Фадля–Папковича принимают вид:

$$\begin{gathered}
\xi^s(\lambda_k,y)=-\left[\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda_kh\cos\lambda_kh-\frac{1-\nu}{2}\sin\lambda_kh\right)\cos\lambda_ky+\frac{1+\nu}{2}\lambda_ky\sin\lambda_kh\sin\lambda_ky\right],\\
\chi^s(\lambda_k,y)=\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda_kh\cos\lambda_kh+\sin\lambda_kh\right)\sin\lambda_ky-\frac{1+\nu}{2}\lambda_ky\sin\lambda_kh\cos\lambda_ky,\\
s_x^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\,\lambda_k\left[(\sin\lambda_kh-\lambda_kh\cos\lambda_kh)\cos\lambda_ky-\lambda_ky\sin\lambda_kh\sin\lambda_ky\right],\\
s_y^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\,\lambda_k\left[(\sin\lambda_kh+\lambda_kh\cos\lambda_kh)\cos\lambda_ky+\lambda_ky\sin\lambda_kh\sin\lambda_ky\right],\\
t_{xy}^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\,\lambda_k^2\left(h\cos\lambda_kh\sin\lambda_ky-y\sin\lambda_kh\cos\lambda_ky\right).
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Назовем их s-представлением функций Фадля–Папковича.

Если же функцию $F(x)$ вводить по формулам:

$$U_0(x)=L_{YY}(\alpha,h)\,F(x),\;\; Y_0(x)=-L_{YU}(\alpha,h)\,F(x), \tag{1.11}$$

то получим другие выражения для функций Фадля–Папковича:

$$\begin{gathered}
\xi^c(\lambda_k,y)=\left(\cos\lambda_kh+\frac{1+\nu}{2}\lambda_kh\sin\lambda_kh\right)\cos\lambda_ky-\frac{1+\nu}{2}\lambda_ky\cos\lambda_kh\sin\lambda_ky,\\
\chi^c(\lambda_k,y)=\left(\frac{1-\nu}{2}\cos\lambda_kh-\frac{1+\nu}{2}\lambda_kh\sin\lambda_kh\right)\sin\lambda_ky-\frac{1+\nu}{2}\lambda_ky\cos\lambda_kh\cos\lambda_ky,\\
s_x^c(\lambda_k,y)=(1+\nu)\,\lambda_k\left[(2\cos\lambda_kh+\lambda_kh\sin\lambda_kh)\cos\lambda_ky-\lambda_ky\cos\lambda_kh\sin\lambda_ky\right],\\
s_y^c(\lambda_k,y)=-(1+\nu)\,\lambda_k^2\left(h\sin\lambda_kh\cos\lambda_ky-y\cos\lambda_kh\sin\lambda_ky\right),
\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$t_{xy}^c\left(\lambda_k,y\right)=-\left(1+\nu\right)\lambda_k\left[\left(\cos\lambda_k h+\lambda_k h\sin\lambda_k h\right)\sin\lambda_k y+\lambda_k y\cos\lambda_k h\cos\lambda_k y\right],$$

которые назовем c-представлением. Между этими представлениями имеется связь, являющаяся следствием равенства $\lambda_k h+\sin\lambda_k h\cos\lambda_k h=0$, k=1,2,...

Таким образом, функции Фадля–Папковича, стоящие в формулах (1.3), могут быть представлены в двух видах: (1.10) или (1.12).

Поскольку $t_{xy}\left(\lambda_k,\pm h\right)=s_y\left(\lambda_k,\pm h\right)=0$, то граничные условия при $y=\pm h$ удовлетворяются точно. Удовлетворяя с помощью формул (1.3) граничным условиям (1.2), приходим к задаче определения коэффициентов a_k из разложений

$$\begin{cases}\sigma(y)=2(1+\nu)C_1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k s_x\left(\lambda_k,y\right)+\overline{a_k}s_x\left(\overline{\lambda_k},y\right);\\ \tau(y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k t_{xy}\left(\lambda_k,y\right)+\overline{a_k}t_{xy}\left(\overline{\lambda_k},y\right).\end{cases}\tag{1.13}$$

Они находятся отсюда с помощью функций, биортогональных к функциям Фадля–Папковича.

2. Биортогональные функции (s-представление). Построим функции $U_k^s(y)$, $V_k^s(y)$, $X_k^s(y)$, $Y_k^s(y)$ и $T_k^s(y)$, биортогональные к функциям Фадля–Папковича (1.10). Через $\xi^s(\lambda,y)$, $\chi^s(\lambda,y)$ и т. д. обозначим функции (1.10), заменив в них λ_k вещественным параметром λ. Следуя [31], назовем их порождающими функциями. Как и в статьях [6], [32], биортогональные функции будем искать как решения уравнений:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^s(\lambda,y)U_k^s(y)dy=\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2},\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi^s(\lambda,y)V_k^s(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2},$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}s_x^s(\lambda,y)X_k^s(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2},\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}s_y^s(\lambda,y)Y_k^s(y)dy=\frac{\lambda^2L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2},\tag{2.1}$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t_{xy}^s(\lambda,y)T_k^s(y)dy=\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}.$$

Для комплексных значений λ, в частности при $\lambda=\lambda_k\in\Lambda$, прямую интегрирования в формулах (2.1) надо заменить T-образным контуром T, лежащим в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y\in[-h,h]$ и луча $x\in(-\infty,0]$ [6], [21].

При $\lambda\to\lambda_k$, в соответствии с асимптотическим равенством [33]

$$f(\lambda)-f(\lambda_k)=f'(\lambda_k)\left(\lambda-\lambda_k\right),$$

из формул (2.1) получаются следующие соотношения биортогональности:

$$\int\limits_T\xi^s(\lambda_m,y)U_k^s(y)dy=\begin{cases}\lambda_k M_k^s & \text{при}\quad \lambda_m=\lambda_k;\\ 0 & \text{при}\quad \lambda_m\neq\lambda_k,\end{cases}$$

$$\int\limits_T\chi^s(\lambda_m,y)V_k^s(y)dy=\begin{cases}M_k^s & \text{при}\quad \lambda_m=\lambda_k;\\ 0 & \text{при}\quad \lambda_m\neq\lambda_k,\end{cases}$$

$$\int\limits_T s_x^s(\lambda_m, y) X_k^s(y) dy = \begin{cases} M_k^s & \text{при} \quad \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\int\limits_T s_y^s(\lambda_m, y) Y_k^s(y) dy = \begin{cases} \lambda_k^2 M_k^s & \text{при} \quad \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

$$\int\limits_T t_{xy}^s(\lambda_m, y) T_k^s(y) dy = \begin{cases} \lambda_k M_k^s & \text{при} \quad \lambda_m = \lambda_k; \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}$$

где $M_k^s = \frac{L'(\lambda_k)}{2\lambda_k} = \cos^2 \lambda_k h$, а $L'(\lambda_k)$ – производная функции $L(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$.

Понятие биортогональности включает в себя также равенства вида (k, m – любые)

$$\int\limits_T \xi^s(\overline{\lambda_m}, y) \overline{U_k^s(y)} dy = \begin{cases} \overline{\lambda_k M_k^s} \text{ при } \overline{\lambda_k} = \overline{\lambda_m}; \\ 0 \text{ при } \overline{\lambda_k} \neq \overline{\lambda_m} \end{cases} \tag{2.3}$$

и

$$\int\limits_T \xi^s(\overline{\lambda_m}, y) U_k^s(y) dy = \int\limits_T \xi^s(\lambda_m, y) \overline{U_k^s(y)} dy = 0, ... \tag{2.4}$$

Они сразу следуют из формул (2.1) и (2.2).

Ниже будут полезными разложения порождающих функций и функции $L(\lambda)$ в ряды по степеням параметра λ:

$$\xi^s(\lambda, y) = -\nu h \lambda + ...; \quad \chi^s(\lambda, y) = hy\lambda^2 - ...; s_x^s(\lambda, y) = (1+\nu) h \frac{h^2 - 3y^2}{3} \lambda^4 - ...;$$

$$s_y^s(\lambda, y) = 2(1+\nu) h \lambda^2 - ...; t_{xy}^s(\lambda, y) = -(1+\nu) hy \frac{h^2 - y^2}{3} \lambda^5 + ...; \tag{2.5}$$

$$L(\lambda) = 2\lambda^2 - ...$$

Биортогональные функции $U_k^s(y)$, $V_k^s(y)$, $X_k^s(y)$, $Y_k^s(y)$ и $T_k^s(y)$ можно представить в виде суммы финитных, равных нулю вне отрезка $|y| \leq h$, и не финитных частей [6], [32]. Финитные части имеют вид ($|y| \leq h, \quad k = 1, 2, ...$):

$$u_k^s(y) = \frac{1}{(1+\nu)\, h} \left[\frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - (\delta(y-h) + \delta(y+h)) \right],$$

$$v_k^s(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{(1+\nu)\, h \sin \lambda_k h}, \quad x_k^s(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2\,(1+\nu)\, \lambda_k h \sin \lambda_k h}, \tag{2.6}$$

$$y_k^s(y) = -\frac{1}{2\,(1+\nu)\, h} \left(\frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - (\delta(y-h) + \delta(y+h)) \right), \quad t_k^s(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2\,(1+\nu)\, h \sin \lambda_k h}$$

(через δ обозначены δ-функции). Простой способ их построения указан в статье [32].

Получим, например, функцию $u_k^s(y)$. Примем в первой формуле (2.1) $\lambda = m\pi/h = q_m$ $(m = 1, 2, ...)$. Воспользовавшись равенствами

$$\int\limits_{-h}^{h} \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = \frac{2\lambda_k (-1)^{m+1} \sin(\lambda_k h)}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad \frac{q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2} = 1 + \frac{\lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2},$$

получим $u_k^s(y)$ (2.6).

Если в формулах (2.1) перейти к пределу при $\lambda \to 0$ и учесть (2.5), то можно получить ($k \geq 1$):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\nu h U_k^s(y)dy = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2(1+\nu)hY_k^s(y)dy = 0. \tag{2.7}$$

В силу ортогональности (2.7) разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича $\xi^s(\lambda_k, y), s_y^s(\lambda_k, y)$ могут отличаться от раскладываемых функций на некоторые постоянные. Чтобы этого не произошло, необходимо дополнительно построить функции с нулевым индексом $U_0^s(y)$ и $Y_0^s(y)$, ортогональные к соответствующим функциям Фадля–Папковича $\xi^s(\lambda_k, y), s_y^s(\lambda_k, y)$ и не ортогональные к 1. Эти функции будем искать как решения уравнений:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^s(\lambda, y)U_0^s(y)dy = -\frac{\nu h L(\lambda)}{2\lambda}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_y^s(\lambda, y)Y_0^s(y)dy = (1+\nu)hL(\lambda). \tag{2.8}$$

Правые части равенств (2.8) выбираются так, чтобы искомые биортогональные функции были ортогональны к функциям Фадля–Папковича, т. е.

$$\int\limits_T \xi^s(\lambda_k, y)U_0^s(y)dy \ = 0, \quad \int\limits_T s_y^s(\lambda_k, y)Y_0^s(y)dy = 0, \tag{2.9}$$

и так, что если в (2.8) перейти к пределу при $\lambda \to 0$, то получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_0^s(y)dy = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_0^s(y)dy = 1. \tag{2.10}$$

Финитные части функций $U_0^s(y)$ и $Y_0^s(y)$имеют вид:

$$u_0^s(y) = \frac{\nu}{2\left(1+\nu\right)}\left[\delta\left(y-h\right)+\delta\left(y+h\right)\right], y_0^s(y) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(y-h\right)+\delta\left(y+h\right)\right]. \tag{2.11}$$

3. Разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича (s-представление). Построим разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича (1.10), представив их в виде:

$$U(y) = U_0^s + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^s \frac{\xi^s\left(\lambda_k, y\right)}{\lambda_k M_k^s} + \overline{U_k^s}\frac{\xi^s\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k M_k^s}}, \quad V(y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^s \frac{\chi^s\left(\lambda_k, y\right)}{M_k^s} + \overline{V_k^s}\frac{\chi^s\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{M_k^s}},$$

$$\sigma_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^s \frac{s_x^s\left(\lambda_k, y\right)}{M_k^s} + \overline{X_k^s}\frac{s_x^s\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{M_k^s}}, \quad \sigma_y(y) = Y_0^s + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^s \frac{s_y^s\left(\lambda_k, y\right)}{\lambda_k^2 M_k^s} + \overline{Y_k^s}\frac{s_y^s\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k^2 M_k^s}}, \tag{3.1}$$

$$\tau_{xy}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^s \frac{t_{xy}^s\left(\lambda_k, y\right)}{\lambda_k M_k^s} + \overline{T_k^s}\frac{t_{xy}^s\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k M_k^s}}.$$

Числа U_0^s, U_k^s, V_k^s и т. д. – коэффициенты Лагранжа раскладываемых функций. В знаменателях выражений (3.1) стоят нормирующие множители M_k^s, $\lambda_k M_k^s$, $\lambda_k^2 M_k^s$ – значения правых частей соответствующих выражений (2.1), определенных при $\lambda = \lambda_k$.

Найдем коэффициенты U_0^s, U_k^s первого разложения (3.1) некоторой четной функции $U(y)$. Умножим обе части этого равенства на функцию с нулевым индексом $U_0^s(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. На основании (2.9) и (2.10)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_0^s(y)dy = U_0^s. \tag{3.2}$$

Далее умножим первое равенство (3.1) на функцию $U_m^s(y)$ (m =1,2,...) и проинтегрируем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_m^s(y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^s}{\lambda_k M_k^s} \int\limits_T \xi^s(\lambda_k, y)U_m^s(y)dy + \frac{\overline{U_k^s}}{\overline{\lambda_k M_k^s}} \int\limits_T \xi^s(\overline{\lambda_k}, y)U_m^s(y)dy. \tag{3.3}$$

На основании (2.2)–(2.4)

$$U_k^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_k^s(y)\,dy. \tag{3.4}$$

Аналогично находятся числа:

$$\begin{gathered} V_k^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(y)V_k^s(y)dy, \;\; X_k^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(y)X_k^s(y)dy, \\ Y_0^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y)Y_0^s(y)dy, \;\; Y_k^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y)Y_k^s(y)dy, \;\; T_k^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(y)T_k^s(y)dy. \end{gathered} \tag{3.5}$$

3.1. *Разложения порождающих функций.* Пусть раскладываемой функцией $U(y)$ является порождающая функция $\xi^s(\lambda, y)$, где λ – вещественный параметр. Тогда, в соответствии с формулами (2.1), (2.8), (3.2) и (3.4),

$$U_k^s = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \;\; U_0^s = -\nu h \frac{L(\lambda)}{2\lambda}. \tag{3.6}$$

Подставляя числа (3.6) в соответствующую формулу (3.1), получим

$$\xi^s(\lambda, y) = -\nu h \frac{L(\lambda)}{2\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\xi^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \tag{3.7}$$

Ряд (3.7) равномерно сходится к своей функции на всем отрезке $|y| \le h$. Аналогично получаются разложения других порождающих функций:

$$\begin{gathered} \chi^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\chi^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}, \\ s_x^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{s_x^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} \right\}, \\ s_y^s(\lambda, y) = (1+\nu)hL(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{s_y^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} \right\}, \\ t_{xy}^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{t_{xy}^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Сходимость трех последних разложений (3.8) можно улучшить, воспользовавшись представлениями нуля рядами (проверяется с помощью теоремы о вычетах [34]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{1}{\lambda_k^2}\frac{s_x^s(\lambda_k,y)}{M_k^s}\right\},\quad \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\frac{s_y^s(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2 M_k^s}\right\},\quad \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda}{\lambda_k^2}\frac{t_{xy}^s(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^s}\right\}. \tag{3.9}$$

Тогда получим ($|y| \le h$):

$$\begin{gathered} s_x^s(\lambda,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda_k^2\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)}\frac{s_x^s(\lambda_k,y)}{M_k^s}\right\}, \\ s_y^s(\lambda,y) = (1+\nu)hL(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda_k^2\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)}\frac{s_y^s(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2 M_k^s}\right\}, \\ t_{xy}^s(\lambda,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda_k^2\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)}\frac{t_{xy}^s(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^s}\right\}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Простые разложения полиномиальных функций можно строить, раскладывая равенства (3.10) в ряды по степеням λ. Например,

$$(1+\nu)h\frac{h^2-3y^2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{-\frac{2}{\lambda_k^4}\frac{s_x^s(\lambda_k,y)}{M_k^s}\right\},$$

$$-(1+\nu)h\frac{h^4-5y^4}{30} = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{2\left(h^2\lambda_k^2-3\right)}{3\lambda_k^6}\frac{s_x^s(\lambda_k,y)}{M_k^s}\right\}.$$

3.2. *Разложения на основе финитных биортогональных функций.* Если в формулах (3.2), (3.4), (3.5) воспользоваться финитными частями биортогональных функций, то получим:

$$\begin{gathered} u_0^s = \int_{-h}^{h} U(y)u_0^s(y)dy,\quad u_k^s = \int_{-h}^{h} U(y)u_k^s(y)dy,\quad v_k^s = \int_{-h}^{h} V(y)v_k^s(y)dy, \\ x_k^s = \int_{-h}^{h} \sigma_x(y)x_k^s(y)dy, \\ y_0^s = \int_{-h}^{h} \sigma_y(y)y_0^s(y)dy,\quad y_k^s = \int_{-h}^{h} \sigma_y(y)y_k^s(y)dy,\quad t_k^s = \int_{-h}^{h} \tau_{xy}(y)t_k^s(y)dy. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Приведем примеры разложений (3.1) с коэффициентами Лагранжа (3.11). Назовем некоторую четную функцию самоуравновешенной на отрезке $[-h,h]$, если интеграл от нее на этом отрезке равен нулю.

Пример 1. Пусть $U(y) = y^2$. Вначале заметим, что четные финитные биортогональные функции, включая биортогональные функции с нулевым индексом, определяются с точностью до произвольных постоянных. Поэтому нужно раскладывать в ряд Лагранжа только самоуравновешенные функции, ортогональные к постоянной. Однако, т. к. функции $u_k^s(y)$, в свою очередь, ортогональны к постоянной, к функции y^2 можно добавить любую постоянную. В частности, удобно взять функцию, равную нулю на концах отрезка $[-h,h]$, т.е. y^2-h^2. В этом случае

$$\begin{gathered}u_k^s=\int\limits_{-h}^{h}(y^2-h^2)\tfrac{1}{(1+\nu)h}\left[\tfrac{\lambda_k\cos\lambda_k y}{\sin\lambda_k h}-(\delta(y-h)+\delta(y+h))\right]dy=\\ =\int\limits_{-h}^{h}(y^2-h^2)\tfrac{1}{(1+\nu)h}\tfrac{\lambda_k\cos\lambda_k y}{\sin\lambda_k h}dy=-\tfrac{4(\sin\lambda_k h-\lambda_k h\cos\lambda_k h)}{h(1+\nu)\lambda_k^2\sin\lambda_k h}.\end{gathered}\tag{3.12}$$

Чтобы определить коэффициент Лагранжа u_0^s (3.11), вместо функции y^2 нужно взять самоуравновешенную функцию $y^2-h^2/3$. Тогда найдем

$$u_0^s=\int\limits_{-h}^{h}\left(y^2-\frac{h^2}{3}\right)\frac{\nu}{2\,(1+\nu)}\left[\delta\,(y-h)+\delta\,(y+h)\right]dy=\frac{2\nu h^2}{3(1+\nu)}.\tag{3.13}$$

Окончательно получим такое разложение:

$$y^2=\frac{h^2}{3}+u_0^s+\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{u_k^s\frac{\xi^s\,(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^s}\right\}.\tag{3.14}$$

Пример 2. $U(y)=\cos\left(\pi y/h\right)$. Тогда

$$u_0^s=-\frac{\nu}{1+\nu},\ \ u_k^s=-\frac{2\pi^2}{(1+\nu)h(\lambda_k^2h^2-\pi^2)}.\tag{3.15}$$

Соответствующее разложение Лагранжа имеет вид:

$$\cos\left(\pi y/h\right)=u_0^s+\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{u_k^s\frac{\xi^s(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^s}\right\}.\tag{3.16}$$

Примеры 3–5.

$$y\left(y^2-h^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{v_k^s\frac{\chi^s\,(\lambda_k,y)}{M_k^s}\right\},\tag{3.17}$$

$$y^2=y_0^s+\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{y_k^s\frac{s_y^s\,(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2M_k^s}\right\},y=\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{t_k^s\frac{t_{xy}^s\,(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^s}\right\}.$$

Числа v_k^s, y_0^s, y_k^s, t_k^s находятся по формулам (3.11):

$$v_k^s=-4\frac{\left(h^2\lambda_k^2-3\right)\sin\lambda_k h+3\lambda_k h\cos\lambda_k h}{(1+\nu)\,\lambda_k^4h\sin\lambda_k h},$$

$$y_0=h^2,\ y_k^s=2\frac{\sin\lambda_k h-\lambda_k h\cos\lambda_k h}{(1+\nu)\,\lambda_k^2h\sin\lambda_k h},\quad t_k^s=-\frac{\sin\lambda_k h-\lambda_k h\cos\lambda_k h}{(1+\nu)\,\lambda_k^2h\sin\lambda_k h}.$$

4. Биортогональные функции (с-представление). Аналогичные (2.1) уравнения для определения биортогональных функций $U_k^c(y)$, $V_k^c(y)$, $X_k^c(y)$, $Y_k^c(y)$, $T_k^c(y)$ имеют вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^c(\lambda,y)U_k^c(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2};\quad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi^c(\lambda,y)V_k^c(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_x^c(\lambda,y)X_k^c(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)};\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_y^c(\lambda,y)Y_k^c(y)dy=\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}; \tag{4.1}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}^c(\lambda,y)T_k^c(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}.$$

Отсюда получаются соотношения биортогональности вида

$$\int\limits_T \xi^c(\lambda_m,y)U_k^c(y)dy=\begin{cases}\lambda_k M_k^c & \text{при} \quad \lambda_m=\lambda_k;\\ 0 & \text{при} \quad \lambda_m\neq\lambda_k,\end{cases} \qquad M_k^c=\frac{M_k^s}{\lambda_k}=\frac{\cos^2\lambda_k h}{\lambda_k}, \tag{4.2}$$

и

$$\int\limits_T \xi^c(\overline{\lambda_m},y)U_k^c(y)dy=\int\limits_T \xi^c(\lambda_m,y)\overline{U_k^c(y)}dy=0. \tag{4.3}$$

Финитные части биортогональных функций равны:

$$u_k^c(y)=\frac{\cos\lambda_k y}{(1+\nu)\,h\cos\lambda_k h},\quad u_0^c(y)=\frac{1}{2\,(1+\nu)\,h},$$

$$v_k^c(y)=-\frac{\sin\lambda_k y}{(1+\nu)\,\lambda_k h\cos\lambda_k h},x_k^c(y)=\frac{1}{2\,(1+\nu)\,\lambda_k^2 h}\left[\frac{\cos\lambda_k y}{\cos\lambda_k h}-1\right], \tag{4.4}$$

$$y_k^c(y)=-\frac{\cos\lambda_k y}{2\,(1+\nu)\,h\cos\lambda_k h},\quad t_k^c(y)=-\frac{\sin\lambda_k y}{2\,(1+\nu)\,\lambda_k h\cos\lambda_k h}.$$

Сравнивая первые члены разложений в ряды Тейлора по степеням λ-порождающих функций:

$$\xi^c(\lambda,y)=1-\frac{(2+\nu)\,y^2-h^2\nu}{2}\lambda^2+...;\quad \chi^c(\lambda,y)=-\nu y\lambda+...;s_x^c(\lambda,y)=2(1+\nu)\lambda-...; \tag{4.5}$$

$$s_y^c(\lambda,y)=-(1+\nu)(h^2-y^2)\lambda^3+...;t_{xy}^c(\lambda,y)=-2(1+\nu)y\lambda^2+...$$

и первые члены разложений правых частей равенств (4.1), заметим, что биортогональные функции $U_k^c(y)$ $(k=1,2,...)$ ортогональны константе, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_k^c\,(y)\,dy=0. \tag{4.6}$$

Биортогональную функцию с нулевым индексом, не ортогональную к постоянной и ортогональную ко всем функциям Фадля–Папковича $\xi^c(\lambda_k,y)$, определим из уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^c(\lambda,y)U_0^c(y)dy=\frac{L(\lambda)}{2\lambda^2}. \tag{4.7}$$

Тогда

$$\int\limits_T \xi^c(\lambda_k,y)U_0^c(y)dy=0. \tag{4.8}$$

Финитная часть биортогональной функции $U_0^c(y)$ равна

$$u_0^c(y) = \frac{1}{2h\,(1+\nu)}. \tag{4.9}$$

5. Разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича (с-представление). Дадим примеры разложений Лагранжа по функциям (1.12):

$$\begin{aligned}
U(y) &= U_0^c + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^c \frac{\xi^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} + \overline{U_k^c}\frac{\xi^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k M_k^c}},\\
V(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k^c \frac{\chi^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} + \overline{V_k^c}\frac{\chi^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{M_k^c}},\\
\sigma_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k^c \frac{s_x^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} + \overline{X_k^c}\frac{s_x^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{M_k^c}},\\
\sigma_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^c \frac{s_y^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} + \overline{Y_k^c}\frac{s_y^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k^2 M_k^c}},\\
\tau_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k^c \frac{t_{xy}^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} + \overline{T_k^c}\frac{t_{xy}^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k M_k^c}}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Коэффициенты Лагранжа U_0^c, U_k^c, V_k^c и т. д. находятся по формулам, аналогичным (3.5):

$$\begin{aligned}
&U_0^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_0^c(y)dy,\ \ U_k^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(y)U_k^c(y)dy,\ \ V_k^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(y)V_k^c(y)dy,\\
&X_k^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(y)X_k^c(y)dy,\ \ Y_k^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y(y)Y_k^c(y)dy,\ \ T_k^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy}(y)T_k^c(y)dy.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1. *Разложения порождающих функций.* Разложения в ряды Лагранжа порождающих функций получаются сразу на основании (4.1) и (4.7):

$$\begin{aligned}
\xi^c(\lambda, y) &= \frac{L(\lambda)}{2\lambda^2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}\frac{\xi^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c}\right\},\\
\chi^c(\lambda, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)}\frac{\chi^c(\lambda_k, y)}{M_k^c}\right\},\\
s_x^c(\lambda, y) &= (1+\nu)\,\frac{L(\lambda)}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda_k^2\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)}\frac{s_x^c(\lambda_k, y)}{M_k^c}\right\},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$s_y^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}\frac{s_y^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c}\right\},\quad t_{xy}^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}\frac{t_{xy}^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c}\right\}.$$

Рассмотрим подробнее разложение Лагранжа порождающей функции $s_x^c(\lambda, y)$. В силу того что

$$\int\limits_{-h}^{h} s_x^c(\lambda, y)dy = (1+\nu)\frac{2hL(\lambda)}{\lambda} \neq 0, \tag{5.4}$$

порождающая функция $s_x^c(\lambda, y)$ не является самоуравновешенной, а функции Фадля–Папковича $s_x^c(\lambda_k, y)$, как это следует опять же из (5.4) при $\lambda = \lambda_k$, самоуравновешенны, то раскладывать будем самоуравновешенную функцию

$$s_x^c\left(\lambda, y\right) - (1+\nu)\frac{L(\lambda)}{\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{X_k^c \frac{s_x^c\left(\lambda_k, y\right)}{M_k^c}\right\}. \tag{5.5}$$

Умножая обе части равенства (5.5) на $X_k^c(y)$, интегрируя от $-\infty$ до $+\infty$ и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_k^c(y)dy = -\frac{1}{(1+\nu)\lambda_k^2}, \tag{5.6}$$

(равенство (5.6) получается предельным переходом при $\lambda \to 0$ из соответствующего равенства (4.1), если учесть третье разложение (4.5)), имеем

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right)} + \frac{L(\lambda)}{\lambda\lambda_k^2} = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda_k^2\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right)} = X_k^c. \tag{5.7}$$

Подставляя (5.7) в (5.5), получим нужное разложение (5.3).

Замечание. Как правило, сходимость разложений Лагранжа можно улучшить, воспользовавшись разложениями полиномов, в частности, функций: 0, 1 и y. Эти разложения получаются так, как было описано выше. Например, последний ряд (5.3) сходится к функции, терпящей разрыв на концах отрезка $[-h, h]$, поскольку функции $t_{xy}^c\left(\lambda_k, \pm h\right) = 0$, а раскладываемая функция – нет. Сходимость ряда можно улучшить, выделив из него разложение функции Cy, где C – некоторая константа.

5.2. Разложения на основе финитных биортогональных функций. В формулах (5.2) воспользуемся финитными частями биортогональных функций. Тогда получим:

$$\begin{gathered} u_0^c = \int_{-h}^{h} U(y)u_0^c(y)dy, \;\; u_k^c = \int_{-h}^{h} U(y)u_k^c(y)dy, \;\; v_k^c = \int_{-h}^{h} V(y)v_k^c(y)dy, \\ x_k^c = \int_{-h}^{h} \sigma_x(y)x_k^c(y)dy, \;\; y_k^c = \int_{-h}^{h} \sigma_y(y)y_k^c(y)dy, \;\; t_k^c = \int_{-h}^{h} \tau_{xy}(y)t_k^c(y)dy. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Приведем примеры разложений с числами (5.8):

$$y^2 - h^2 = u_0^c + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{u_k^c}{\lambda_k M_k^c}\xi^c\left(\lambda_k, y\right)\right\}, \;\; u_0^c = -\frac{2}{3}\frac{h^2}{(1+\nu)},$$

$$u_k^c = -\frac{4(\sin\lambda_k h - \lambda_k h\cos\lambda_k h)}{h\left(1+\nu\right)\lambda_k^3\cos\lambda_k h};$$

$$y\left(y^2 - h^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{v_k^c\frac{\chi^c\left(\lambda_k, y\right)}{M_k^c}\right\}, \;\; v_k^c = -4\frac{\left(h^2\lambda_k^2 - 3\right)\sin\lambda_k h + 3\lambda_k h\cos\lambda_k h}{\left(1+\nu\right)\lambda_k^5 h\cos\lambda_k h};$$

$$\left(\frac{y}{h}\right)^2 - \frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{x_k^c\frac{s_x^c\left(\lambda_k, y\right)}{M_k^c}\right\}, \;\; x_k^c = \frac{2}{3}\frac{\left(\lambda_k^2 h^2 - 3\right)\sin\lambda_k h + 3\lambda_k h\cos\lambda_k h}{\left(1+\nu\right)\lambda_k^5 h^3\cos\lambda_k h}; \tag{5.9}$$

$$y^2 - h^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{y_k^c\frac{s_y^c\left(\lambda_k, y\right)}{\lambda_k^2 M_k^c}\right\}, \;\; y_k^c = 2\frac{\sin\lambda_k h - \lambda_k h\cos\lambda_k h}{\left(1+\nu\right)\lambda_k^3 h\cos\lambda_k h};$$

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{t_k^c\frac{t_{xy}^c\left(\lambda_k,y\right)}{\lambda_k M_k^c}\right\},\;\; t_k^c=-\frac{\sin\lambda_k h-\lambda_k h\cos\lambda_k h}{(1+\nu)\,\lambda_k^3 h\cos\lambda_k h}.$$

6. Разложения Лагранжа по функциям $\Phi^s(\lambda_k,y)$, $\Psi^s(\lambda_k,y)$ **и** $F^s(\lambda_k,y)$ **(s-представление).** При решении краевых задач с заданными разрывами перемещений или напряжений используются функции[1], являющиеся линейными комбинациями соответствующих функций Фадля–Папковича. Поэтому для них также можно дать два представления. Рассмотрим s-представление этих функций:

$$\begin{gathered}\Phi^s(\lambda_k,y)=\Phi R^s(\lambda_k,y)+i\Phi I^s(\lambda_k,y),\;\;\Psi^s(\lambda_k,y)=\Psi R^s(\lambda_k,y)+i\Psi I^s(\lambda_k,y),\\ F^s(\lambda_k,y)=2\Phi^s(\lambda_k,y)-\Psi^s(\lambda_k,y)=FR^s(\lambda_k,y)+iFI^s(\lambda_k,y).\end{gathered}\tag{6.1}$$

Здесь

$$\Phi R^s(\lambda_k,y)=-t_{xy}^s(\lambda_k,y),\quad \Phi I^s(\lambda_k,y)=\frac{1}{2}[s_y^s(\lambda_k,y)-s_x^s(\lambda_k,y)],$$

$$\Psi R^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\frac{d\xi^s(\lambda_k,y)}{dy}-\frac{3+\nu}{2}t_{xy}^s(\lambda_k,y),\Psi I^s(\lambda_k,y)=s_y^s(\lambda_k,y),\tag{6.2}$$

$$FR^s(\lambda_k,y)=-\left[(1+\nu)\frac{d\xi^s(\lambda_k,y)}{dy}+\frac{1-\nu}{2}t_{xy}^s(\lambda_k,y)\right],\quad FI^s(\lambda_k,y)=-s_x^s(\lambda_k,y)$$

или в развернутом виде

$$\Phi R^s(\lambda_k,y)=-\left(1+\nu\right)\lambda_k^2\left(h\cos\lambda_k h\sin\lambda_k y-y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y\right),$$

$$\Phi I^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k^2\left[h\cos\lambda_k h\cos\lambda_k y+y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y\right],$$

$$\Psi R^s(\lambda_k,y)=-(1+\nu)\lambda_k\left[(\sin\lambda_k h+\lambda_k h\cos\lambda_k h)\sin\lambda_k y-\lambda_k y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y\right],\tag{6.3}$$

$$\Psi I^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\,\lambda_k\left[(\sin\lambda_k h+\lambda_k h\cos\lambda_k h)\cos\lambda_k y+\lambda_k y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y\right],$$

$$FR^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k\left[(\sin\lambda_k h-\lambda_k h\cos\lambda_k h)\sin\lambda_k y+\lambda_k y\sin\lambda_k h\cos\lambda_k y\right],$$

$$FI^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\,\lambda_k\left[(\lambda_k h\cos\lambda_k h-\sin\lambda_k h)\cos\lambda_k y+\lambda_k y\sin\lambda_k h\sin\lambda_k y\right].$$

Еще одно представление выглядит так:

$$\begin{gathered}\Phi^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k^2\left(i\cos\lambda_k h+y\sin\lambda_k h\right)e^{i\lambda_k y},\\ \Psi^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k\left[i\left(\sin\lambda_k h+\lambda_k h\cos\lambda_k h\right)+\lambda_k y\sin\lambda_k h\right]e^{i\lambda_k y},\\ F^s(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k\left[i\left(\lambda_k h\cos\lambda_k h-\sin\lambda_k h\right)+\lambda_k y\sin\lambda_k h\right]e^{i\lambda_k y}.\end{gathered}$$

Справедливы такие равенства [6]:

$$\frac{d\Psi^s(\lambda_k,y)}{dy}=i\lambda_k\Phi^s(\lambda_k,y),\;\;\frac{d\Phi^s(\lambda_k,y)}{dy}=i\lambda_k F^s(\lambda_k,y).\tag{6.4}$$

[1]Функции (6.1) были введены в статье [29] при решении симметричной краевой задачи о стыке правой и левой полуполос с различными граничными условиями на продольных сторонах справа и слева.

Биортогональные функции будем искать как решения уравнений:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi^s(\lambda,y)\Phi_k^s(y)dy=\tfrac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi^s(\lambda,y)\Psi_k^s(y)dy=\tfrac{\lambda L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k},\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}F^s(\lambda,y)F_k^s(y)dy=\tfrac{L(\lambda)}{\lambda(\lambda-\lambda_k)},\ \ \lambda_k\in\Lambda.\end{gathered}\tag{6.5}$$

Примем

$$\begin{gathered}\Phi_k^s(y)=\Phi R_k^s(y)-i\Phi I_k^s(y),\ \Psi_k^s(y)=\Psi R_k^s(y)-i\Psi I_k^s(y),\\ F_k^s(y)=FR_k^s(y)-iFI_k^s(y).\end{gathered}\tag{6.6}$$

Тогда вместо уравнений (6.5) получим следующие:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi R^s(\lambda,y)\Phi R_k^s(y)dy=\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi I^s(\lambda,y)\Phi I_k^s(y)dy=\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi R^s(\lambda,y)\Psi R_k^s(y)dy=\frac{\lambda\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi I^s(\lambda,y)\Psi I_k^s(y)dy=\frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2},\tag{6.7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}FR^s(\lambda,y)FR_k^s(y)dy=\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}FI^s(\lambda,y)FI_k^s(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}.$$

Приведем формулы для финитных частей, входящих в (6.7) биортогональных функций:

$$\varphi R_k^s(y)=-t_k^s(y)=\frac{\sin\lambda_k y}{2\,(1+\nu)\,h\sin\lambda_k h},\quad \varphi I_k^s(y)=-\frac{\cos\lambda_k y}{2(1+\nu)h\sin\lambda_k h},$$

$$\psi R_k^s(y)=\frac{\lambda_k\sin\lambda_k y}{2(1+\nu)h\sin\lambda_k h},$$

$$\psi I_k^s(y)=y_k^s(y)=-\frac{1}{2\,(1+\nu)\,h}\left(\frac{\lambda_k\cos\lambda_k y}{\sin\lambda_k h}-(\delta(y-h)+\delta(y+h))\right),\tag{6.8}$$

$$fR_k^s(y)=\frac{1}{2\,(1+\nu)\,\lambda_k h}\frac{\sin\lambda_k y}{\sin\lambda_k h},\ fI_k^s(y)=-x_k^s(y)=-\frac{\cos\lambda_k y}{2\,(1+\nu)\,\lambda_k h\sin\lambda_k h}.$$

Функции $\Phi R^s(\lambda_k,y)=-t_{xy}^s(\lambda_k,y)$, $\Psi I^s(\lambda_k,y)=s_y^s(\lambda_k,y)$, $FI^s(\lambda_k,y)=-s_x^s(\lambda_k,y)$. Дадим примеры разложений Лагранжа трех других функций:

$$\Phi I(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi I_k^s\frac{\Phi I^s\left(\lambda_k,y\right)}{\lambda_k M_k^s}+\overline{\Phi I_k^s}\frac{\Phi I^s\left(\overline{\lambda_k},y\right)}{\overline{\lambda_k M_k^s}},$$

$$\Psi R(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi R_k^s\frac{\Psi R^s\left(\lambda_k,y\right)}{\lambda_k^2 M_k^s}+\overline{\Psi R_k^s}\frac{\Psi R^s\left(\overline{\lambda_k},y\right)}{\overline{\lambda_k^2 M_k^s}},\tag{6.9}$$

$$FR(y)=\sum_{k=1}^{\infty}FR_k^s\frac{FR^s\left(\lambda_k,y\right)}{M_k^s}+\overline{FR_k^s}\frac{FR^s\left(\overline{\lambda_k},y\right)}{\overline{M_k^s}},$$

где

$$\Phi I_k^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi I(y) \Phi I_k^s(y) dy, \quad \Psi R_k^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi R(y) \Psi R_k^s(y) dy, \quad FR_k^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} FR(y) FR_k^s(y) dy. \tag{6.10}$$

Разложения порождающих функций в ряды по степеням параметра λ имеют вид:

$$\begin{gathered} \Phi I^s(\lambda, y) = (1+\nu) h \lambda^2 - ..., \Psi R^s(\lambda, y) = -(1+\nu) h y \lambda^3 + ..., \\ FR^s(\lambda_k, y) = (1+\nu) h y \lambda^3 - ... \end{gathered} \tag{6.11}$$

6.1. *Разложения порождающих функций:*

а) рассмотрим разложение в ряд Лагранжа порождающей функции $\Phi I^s(\lambda, y)$. Учитывая (6.7), сразу получим

$$\Phi I^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}. \tag{6.12}$$

Ряд (6.12) равномерно сходится к своей функции на всем отрезке $[-h, h]$ (проверяется по теореме о вычетах). Из второй формулы (6.7) при $\lambda \to 0$ вытекает равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi I_k^s(y) dy = -\frac{2}{(1+\nu) h \lambda_k}. \tag{6.13}$$

Тогда

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ -\frac{2}{(1+\nu) h \lambda_k} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}.$$

Отсюда

$$-\frac{(1+\nu) h}{2} L(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda_k} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\}.$$

Добавляя этот ряд к ряду (6.12) и вычитая его свернутое выражение, получим

$$\Phi I^s(\lambda, y) = \frac{(1+\nu) h}{2} L(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right) \lambda_k} \frac{\Phi I^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s} \right\};$$

б) разложение порождающей функции

$$\Psi R^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi R_k^s \frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s} + \overline{\Psi R_k^s} \frac{\Psi R^s\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k^2 M_k^s}}. \tag{6.14}$$

Очевидно

$$\Psi R_k^s = \frac{\lambda \lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \tag{6.15}$$

Ряд (6.14) с коэффициентами (6.15) равномерно сходится на всем отрезке $[-h, h]$. Учитывая (6.7) и соответствующее разложение (6.11), найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \Psi R_k^s(y) dy = \frac{2}{(1+\nu) h \lambda_k^2}. \tag{6.16}$$

Следовательно,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{2}{(1+\nu)h\lambda_k}\frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s}\right\} \quad (|y| \le h);$$

в) рассмотрим разложение порождающей функции

$$FR^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} FR_k^s \frac{FR^s(\lambda_k, y)}{M_k^s} + \overline{FR_k^s}\frac{FR^s\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{M_k^s}}. \tag{6.17}$$

Если в соответствующем равенстве (6.7) обе части разделить на λ и перейти к пределу при $\lambda \to 0$, то слева получим нуль, а справа – конечную величину $-2/\lambda_k$. Поэтому ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{-\frac{2}{\lambda_k}\frac{FR^s(\lambda_k, y)}{M_k^s}\right\}$$

можно рассматривать как представление нуля. Пользуясь этим наблюдением, можно улучшить сходимость ряда (6.17), в котором

$$FR_k^s = \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right)}. \tag{6.18}$$

Добавим к коэффициенту (6.18) величину C/λ_k, где константа C такова, что в результате скорость убывания по λ_k при $\lambda_k \to \infty$ выражения

$$\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right)} + \frac{C}{\lambda_k}$$

возрастает. Очевидно, что

$$C = \frac{L(\lambda)}{\lambda}.$$

Тогда

$$\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right)} + \frac{L(\lambda)}{\lambda\lambda_k} = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda_k\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right)}. \tag{6.19}$$

Ряд (6.17) с коэффициентами Лагранжа (6.19) равномерно сходится к $FR^s(\lambda, y)$ на всем отрезке $[-h, h]$ при всех вещественных значениях параметра λ.

Ряды Лагранжа

$$\begin{gathered}\Psi R^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}\frac{\Psi R^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^s}\right\}, \\ FR^s(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda_k\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)}\frac{FR^s(\lambda_k, y)}{M_k^s}\right\}\end{gathered} \tag{6.20}$$

равномерно сходятся на всем отрезке $[-h, h]$ при всех вещественных значениях λ.

6.2. *Разложения на основе финитных биортогональных функций.* В этом случае

$$\varphi I_k^s = \int_{-h}^{h} \Phi I(y)\varphi I_k^s(y)dy, \quad \psi R_k^s = \int_{-h}^{h} \Psi R(y)\psi R_k^s(y)dy, \quad fR_k^s = \int_{-h}^{h} FR(y) fR_k^s(y)dy. \tag{6.21}$$

Приведем примеры разложений с коэффициентами Лагранжа (6.21):

$$y^2-\frac{h^2}{3}=\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{-\frac{2}{3}\frac{\left(\lambda_k^2h^2-3\right)\sin\lambda_kh+3\lambda_kh\cos\lambda_kh}{(1+\nu)\lambda_k^3h\sin\lambda_kh}\frac{\Phi I^s\left(\lambda_k,y\right)}{\lambda_kM_k^s}\right\},$$

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{\frac{\sin\lambda_kh-\lambda_kh\cos\lambda_kh}{(1+\nu)\lambda_kh\sin\lambda_kh}\frac{\Psi R^s\left(\lambda_k,y\right)}{\lambda_k^2M_k^s}\right\}, \tag{6.22}$$

$$\sin\pi y=\sum_{k=1}^{\infty}2Re\left\{\frac{\pi\cos\pi h}{(1+\nu)\lambda_kh\left(\lambda_k^2-\pi^2\right)}\frac{FR^s\left(\lambda_k,y\right)}{M_k^s}\right\}.$$

Ряды (6.22) равномерно сходятся к раскладываемым функциям на всем отрезке $[-h,h]$.

7. Разложения Лагранжа по функциям $\Phi^c(\lambda_k,y)$, $\Psi^c(\lambda_k,y)$ и $F^c(\lambda_k,y)$ (c-представление). Рассмотрим функции

$$\begin{gathered}\Phi^c(\lambda_k,y)=\Phi R^c(\lambda_k,y)+i\Phi I^c(\lambda_k,y),\ \ \Psi^c(\lambda_k,y)=\Psi R^c(\lambda_k,y)+i\Psi I^c(\lambda_k,y),\\ F^c(\lambda_k,y)=2\Phi^c(\lambda_k,y)-\Psi^c(\lambda_k,y)=FR^c(\lambda_k,y)+iFI^c(\lambda_k,y),\end{gathered} \tag{7.1}$$

где

$$\Phi R^c(\lambda_k,y)=-t_{xy}^c(\lambda_k,y),\quad \Phi I^c(\lambda_k,y)=\frac{1}{2}[s_y^c(\lambda_k,y)-s_x^c(\lambda_k,y)],$$

$$\Psi R^c(\lambda_k,y)=(1+\nu)\frac{d\xi^c(\lambda_k,y)}{dy}-\frac{3+\nu}{2}t_{xy}^c(\lambda_k,y),\Psi I^c(\lambda_k,y)=s_y^c(\lambda_k,y), \tag{7.2}$$

$$FR^c(\lambda_k,y)=-\left[(1+\nu)\frac{d\xi^c(\lambda_k,y)}{dy}+\frac{1-\nu}{2}t_{xy}^c(\lambda_k,y)\right],\quad FI^c(\lambda_k,y)=-s_x^c(\lambda_k,y)$$

или

$$\begin{gathered}\Phi I^c(\lambda_k,y)=-(1+\nu)\lambda_k\left[(\lambda_kh\sin\lambda_kh+\cos\lambda_kh)\cos\lambda_ky-\lambda_ky\cos\lambda_kh\sin\lambda_ky\right],\\ \Psi R^c(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k^2\left[h\sin\lambda_kh\sin\lambda_ky+y\cos\lambda_kh\cos\lambda_ky\right],\\ FR^c(\lambda_k,y)=(1+\nu)\lambda_k\left[(\lambda_kh\sin\lambda_kh+2\cos\lambda_kh)\sin\lambda_ky+\lambda_ky\cos\lambda_kh\cos\lambda_ky\right].\end{gathered} \tag{7.3}$$

Между функциями (7.1) имеется связь, аналогичная (6.4).

Уравнения для определения биортогональных систем функций:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi^c(\lambda,y)\Phi_k^c(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda\left(\lambda-\lambda_k\right)},\ \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^c(\lambda,y)\Psi_k^c(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F^c(\lambda,y)F_k^c(y)dy=\frac{L(\lambda)}{\lambda^2\left(\lambda-\lambda_k\right)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi I^c(\lambda,y)\Phi I_k^c(y)dy=\frac{\lambda_kL(\lambda)}{\lambda\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)},\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi R^c(\lambda,y)\Psi R_k^c(y)dy=\frac{\lambda_kL(\lambda)}{\lambda^2-\lambda_k^2}, \tag{7.4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}FR^c(\lambda,y)FR_k^c(y)dy=\frac{\lambda_kL(\lambda)}{\lambda^2\left(\lambda^2-\lambda_k^2\right)},\ \lambda_k\in\Lambda.$$

Финитные части биортогональных функций, входящих в равенства (7.4), равны:

$$\varphi I_k^c(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k h}\left(1 - \frac{\cos\lambda_k y}{\cos\lambda_k h}\right), \quad \psi R_k^c(y) = \frac{\sin\lambda_k y}{2(1+\nu)h\cos\lambda_k h}, \tag{7.5}$$

$$fR_k^c(y) = \frac{1}{2\,(1+\nu)\,\lambda_k^2 h}\frac{\sin\lambda_k y}{\cos\lambda_k h}.$$

Разложения порождающих функций в ряды по степеням параметра λ таковы:

$$\begin{gathered}\Phi I^c\,(\lambda, y) = -(1+\nu)\lambda + ...; \;\; \Psi R^c\,(\lambda, y) = (1+\nu)y\lambda^2 - ...; \\ FR^c\,(\lambda_k, y) = 3(1+\nu)y\lambda^2 - ...\end{gathered} \tag{7.6}$$

Приведем примеры разложений Лагранжа:

$$\begin{gathered}\Phi I(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi I_k^c \frac{\Phi I^c\,(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} + \overline{\Phi I_k^c}\frac{\Phi I^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k M_k^c}}, \\ \Psi R(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi R_k^c \frac{\Psi R^c\,(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} + \overline{\Psi R_k^c}\frac{\Psi R^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k^2 M_k^c}}, \\ FR(y) = \sum_{k=1}^{\infty} FR_k^c \frac{FR^c\,(\lambda_k, y)}{M_k^c} + \overline{FR_k^c}\frac{FR^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{M_k^c}},\end{gathered} \tag{7.7}$$

в которых коэффициенты находятся по формулам:

$$\Phi I_k^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi I(y)\Phi I_k^c(y)dy, \;\; \Psi R_k^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi R(y)\Psi R_k^c(y)dy, \;\; FR_k^c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} FR(y)FR_k^c(y)dy. \tag{7.8}$$

7.1. *Разложения порождающих функций:*

а) разложение порождающей функции

$$\Phi I^c\,(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi I_k^c \frac{\Phi I^c\,(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} + \overline{\Phi I_k^c}\frac{\Phi I^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k M_k^c}}. \tag{7.9}$$

При $\lambda \to 0$ из (7.4) следует равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi I_k^c(y)dy = \frac{2}{(1+\nu)\lambda_k}. \tag{7.10}$$

На основании равенств (7.4) и (7.10) получим такие два разложения:

$$\Phi I^c\,(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}\frac{\Phi I^c\,(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c}\right\}, 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{2}{(1+\nu)\lambda_k}\frac{\Phi I^c\,(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c}\right\}. \tag{7.11}$$

Умножая второй ряд (7.11) на $(1+\nu)L(\lambda)/2\lambda$ и комбинируя его с первым, получим ряд, равномерно сходящийся на всем отрезке $[-h, h]$:

$$\Phi I^c\,(\lambda, y) = -\frac{(1+\nu)L(\lambda)}{2\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}\frac{\Phi I^c\,(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c}\right\};$$

б) разложение порождающей функции

$$\Psi R^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi R_k^c \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c} + \overline{\Psi R_k^c} \frac{\Psi R^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{\lambda_k^2 M_k^c}}. \tag{7.12}$$

Из (7.4) и (7.6) можно получить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \Psi R_k^c(y) dy = -\frac{2}{(1+\nu)\lambda_k}. \tag{7.13}$$

Следовательно,

$$\Psi R^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c}\right\}, y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{-\frac{2}{(1+\nu)\lambda_k} \frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c}\right\}. \tag{7.14}$$

Сходимость первого ряда (7.14) можно улучшить, воспользовавшись вторым рядом так, как это было проделано выше;

в) разложение Лагранжа порождающей функции

$$FR^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} FR_k^c \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^c} + \overline{FR_k^c} \frac{FR^c\left(\overline{\lambda_k}, y\right)}{\overline{M_k^c}}. \tag{7.15}$$

С помощью теоремы о вычетах можно проверить, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{L(\lambda)}{\lambda^2 \lambda_k} \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^c}\right\}$$

сходится к нулю. Пользуясь им, улучшим сходимость ряда

$$FR^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right)} \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^s}\right\}.$$

В результате получим ряд, равномерно сходящийся внутри отрезка $[-h, h]$:

$$FR^c(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{L(\lambda)}{\lambda_k\left(\lambda^2 - \lambda_k^2\right)} \frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^s}\right\}.$$

7.2. Разложения на основе финитных биортогональных функций. Приведем примеры разложений в ряды Лагранжа по функциям $\Phi I^c(\lambda_k, y)$, $\Psi R^c(\lambda_k, y)$ и $FR^c(\lambda_k, y)$, когда раскладываемые функции продолжаются периодически вне отрезка $[-h, h]$, а коэффициенты разложений при этом определяются по формулам:

$$\varphi I_k^c = \int_{-h}^{h} \Phi I(y) \varphi I_k^c(y) dy, \quad \psi R_k^c = \int_{-h}^{h} \Psi R(y) \psi R_k^c(y) dy, \quad f R_k^c = \int_{-h}^{h} FR(y) f R_k^c(y) dy. \tag{7.16}$$

Имеем:

$$y^2 - \frac{h^2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{-\frac{2}{3} \frac{3\lambda_k h \cos\lambda_k h + \left(\lambda_k^2 h^2 - 3\right)\sin\lambda_k h}{(1+\nu)\lambda_k^4 h \cos\lambda_k h} \frac{\Phi I^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c}\right\},$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\sin\lambda_k h - \lambda_k h\cos\lambda_k h}{(1+\nu)\lambda_k^2 h\cos\lambda_k h}\frac{\Psi R^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k^c}\right\}, \tag{7.17}$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\frac{\sin\lambda_k h - \lambda_k h\cos\lambda_k h}{(1+\nu)\lambda_k^4 h\cos\lambda_k h}\frac{FR^c(\lambda_k, y)}{M_k^c}\right\}.$$

8. Связь s- и c-представлений. Рассмотрим элементы рядов Лагранжа по s- и c-представлениям, сравнивая

$u_k^c\frac{\xi^c(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^c}$ с $u_k^s\frac{\xi^s(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^s}$, $v_k^c\frac{\chi^c(\lambda_k,y)}{M_k^c}$ с $v_k^s\frac{\chi^s(\lambda_k,y)}{M_k^s}$ и т. д. Порождающие функции s- и c-представлений связаны следующим образом:

$$\xi^s(\lambda,y)ctg\lambda h - \xi^c(\lambda,y) = -\frac{(1+\nu)\,hL(\lambda)\cos\lambda y}{2\lambda\sin\lambda h},$$

$$\chi^s(\lambda,y)ctg\lambda h - \chi^c(\lambda,y) = \frac{(1+\nu)\,hL(\lambda)\sin\lambda y}{2\lambda\sin\lambda h} \tag{7.18}$$

и т. д. Полагая здесь $\lambda=\lambda_k$, получим:

$$\xi^s(\lambda_k,y)ctg\lambda_k h = \xi^c(\lambda_k,y),\quad \chi^s(\lambda_k,y)ctg\lambda_k h = \chi^c(\lambda_k,y),\quad \sigma_x^s(\lambda_k,y)ctg\lambda_k h = \sigma_x^s(\lambda_k,y) \tag{7.19}$$

и т. д.

Финитные биортогональные функции также связаны, в частности,

$$\begin{gathered} v_k^c(y) = v_k^s(y)\tfrac{1}{\lambda_k ctg\lambda_k h},\ \ t_k^c(y) = t_k^s(y)\tfrac{1}{\lambda_k ctg\lambda_k h},\\ \psi R_k^c(y) = \psi R_k^s(y)\tfrac{1}{\lambda_k ctg\lambda_k h},\ \ fR_k^c(y) = fR_k^s(y)\tfrac{1}{\lambda_k ctg\lambda_k h}. \end{gathered} \tag{7.20}$$

Следовательно,

$$v_k^c\frac{\chi^c(\lambda_k,y)}{M_k^c} = \int_{-h}^{h} V(y)v_k^c(y)dy\frac{\chi^c(\lambda_k,y)}{M_k^c} = \int_{-h}^{h} V(y)v_k^c(y)dy\frac{\chi^s(\lambda_k,y)ctg\lambda_k h}{M_k^s ctg\lambda_k h} = v_k^s\frac{\chi^s(\lambda_k,y)}{M_k^s}. \tag{7.21}$$

А также

$$\begin{gathered} t_k^c\tfrac{t_{xy}^c(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^c} = t_k^s\tfrac{t_{xy}^s(\lambda_k,y)}{\lambda_k M_k^s},\\ \psi R_k^c\tfrac{\Psi R^c(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2 M_k^c} = \psi R_k^s\tfrac{\Psi R^s(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2 M_k^s},\ \ fR_k^c\tfrac{FR^c(\lambda_k,y)}{M_k^c} = fR_k^s\tfrac{FR^s(\lambda_k,y)}{M_k^s}. \end{gathered} \tag{7.22}$$

Для функций

$$x_k^s(y) = \frac{\cos\lambda_k y}{2\,(1+\nu)\,\lambda_k h\sin\lambda_k h}\ \text{и}\ x_k^c(y) = \frac{1}{2\,(1+\nu)\,\lambda_k^2 h}\left[\frac{\cos\lambda_k y}{\cos\lambda_k h} - 1\right] \tag{7.23}$$

связь типа (7.20) неочевидна, поскольку этому “мешает” единица в формуле для $x_k^c(y)$. Но класс допустимых раскладываемых функций в ряды по функциям Фадля–Папковича $s_x^c(\lambda_k,y)$ ограничен самоуравновешенными функциями, ортогональными к единице. Поэтому для таких раскладываемых функций можно считать, что

$$x_k^c(y) = \frac{\cos\lambda_k y}{2\,(1+\nu)\,\lambda_k^2 h\cos\lambda_k h}. \tag{7.24}$$

Тогда и в этом случае

$$x_k^c(y) = x_k^s(y)\frac{1}{\lambda_k ctg\lambda_k h}\ \text{и}\ x_k^c\frac{s_x^c(\lambda_k,y)}{M_k^c} = x_k^s\frac{s_x^s(\lambda_k,y)}{M_k^s}. \tag{7.25}$$

Сравним финитные части биортогональных функций $s-$ и c-представлений:

$$u_k^s(y) = \frac{1}{(1+\nu)\,h}\left[\frac{\lambda_k \cos\lambda_k y}{\sin\lambda_k h} - (\delta(y-h)+\delta(y+h))\right]$$

$$u_k^c(y) = \frac{\cos\lambda_k y}{(1+\nu)\,h\cos\lambda_k h}. \qquad (7.26)$$

Для их связи типа (7.20) "мешают" дельта-функции в формуле (7.26) для $u_k^s(y)$. Поэтому будем рассматривать только такие раскладываемые функции $U(y)$, которые равны нулю при $y = \pm h$.

Пусть раскладываемая функция $U(y)$ в общем не является самоуравновешенной. Перейдем к самоуравновешенной функции

$$u(y) = U(y) - D, \qquad (7.27)$$

где

$$D = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} U(y)dy. \qquad (7.28)$$

Тогда, учитывая, что $U(\pm h) = 0$, получим

$$u_0^s = \int\limits_{-h}^{h}(U(y)-D)\frac{\nu}{2\,(1+\nu)}\left[\delta\,(y-h)+\delta\,(y+h)\right]dy = -\frac{\nu D}{1+\nu}. \qquad (7.29)$$

Так как финитные функции $u_k^s(y)$ ортогональны к любой постоянной, то

$$u_k^s = \int\limits_{-h}^{h} U(y)u_k^s(y)\,dy.$$

Обозначив

$$\omega_k^s = \int\limits_{-h}^{h} U(y)\frac{1}{(1+\nu)\,h}\frac{\lambda_k\cos\lambda_k y}{\sin\lambda_k h}dy, \qquad (7.30)$$

разложение Лагранжа функции $U(y)$, обращающейся в ноль на концах отрезка $[-h, h]$, можно представить так:

$$U(y) = \frac{D}{1+\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{\omega_k^s\frac{\xi^s(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^s}\right\}. \qquad (7.31)$$

Построим разложение $U(y)$ по функциям $\xi^c(\lambda_k, y)$. Имеем:

$$u_k^c = \int\limits_{-h}^{h} U(y)u_k^c(y)dy = \int\limits_{-h}^{h} U(y)\frac{1}{(1+\nu)\,h}\frac{\cos\lambda_k y}{\cos\lambda_k h}dy, \qquad (7.32)$$

$$u_0^c = \int\limits_{-h}^{h} U(y)u_0^c(y)dy = \int\limits_{-h}^{h} U(y)\frac{1}{2h(1+\nu)}dy = \frac{D}{1+\nu}. \qquad (7.33)$$

Следовательно,

$$U(y) = \frac{D}{1+\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{ u_k^c \frac{\xi^c(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k^c} \right\}. \tag{7.34}$$

Сравнивая разложение (7.31) с разложением (7.34), нетрудно понять, что одно разложение может быть получено из другого заменой индексов: c на s или наоборот. Напомним, что это касается только тех раскладываемых функций $U(y)$, которые удовлетворяют условию $U(\pm h) = 0$.

Сравнивая финитные биортогональные функции $y_k^s(y)$ и $y_k^c(y)$, можно сделать вывод: в классе раскладываемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[-h, h]$, разложения Лагранжа по функциям $s_y^s\,(\lambda_k, y)$ и $s_y^c\,(\lambda_k, y)$ получаются одно из другого простой заменой верхних индексов.

Такая же связь имеется между разложениями по функциям $\Phi I_k^s(\lambda_k, y)$ и $\Phi I_k^c(\lambda_k, y)$ в том случае, когда раскладываемые функции самоуравновешены.

Заключение. В работе подробно исследованы свойства разложений Лагранжа по системам функций Фадля–Папковича, возникающим при решении четносимметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе (прямоугольнике) со свободными горизонтальными сторонами. Показано, что имеются два вида функций Фадля–Папковича, названных в работе s- и c- представлениями. Между разложениями Лагранжа по этим представлениям имеется связь. Указаны классы раскладываемых функций, для которых эти представления полностью совпадают. Рассмотрены различные примеры, в частности, примеры разложений порождающих функций и разложений с использованием финитных биортогональных функций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тимошенко С. П. Теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1937. Главная редакция технико-теоретической литературы. 453 с.

[2] Коваленко М. Д. Биортогональные разложения в первой основной задаче теории упругости // Доклады РАН. Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 956–963.

[3] Коваленко М. Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады Академии наук. 1997. Т. 352, № 4. С. 480–482.

[4] Коваленко М. Д., Себряков Г. Г., Цыбин Н. Н. О некоторых свойствах системы однородных решений теории упругости // Доклады Академии наук. 2003. Т. 388, № 2. С. 193–196.

[5] Коваленко М. Д., Себряков Г. Г., Цыбин Н. Н., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в задаче для полосы с разрезом // Доклады Академии наук. 2008. Т. 419, № 6. С. 763–766.

[6] Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.

[7] Коваленко М.Д., Клейн Н. В. Однородные решения теории упругости. Биортогональные разложения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11, № 2. С. 209–225.

[8] Коваленко М.Д., Попов С.Н., Цыбин Н. Н., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в смешанных краевых задачах теории упругости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 4. С. 493–518.

[9] Коваленко М. Д., Себряков Г. Г., Шуляковская Т. Д. Особенности разложений по функциям Фадля–Папковича в полуполосе // Доклады Академии наук. 2012. Т. 445, № 5. С. 525-528.

[10] Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича в обратно-симметричной задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 81–89.

[11] Лапикова Е. С., Юринкина М. Н., Кержаев А П., Никитин А. В. Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. Разложения Лагранжа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 86–103.

[12] Лапикова Е. С., Юринкина М. Н., Кержаев А П., Никитин А. В. Разложения Лагранжа в периодической задаче для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 68–85.

[13] Лапикова Е. С., Юринкина М. Н. Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на изгиб. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Попковича // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 95–107 .

[14] Лапикова Е. С., Юринкина М. Н. Периодическая задача для полуполосы с продольными ребрами жесткости, работающими на изгиб. Разложения Лагранжа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 108–120.

[15] Меньшова И. В., Семенова И. А. Биортогональные системы функций и разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича в задаче изгиба полуполосы с продольными ребрами жесткости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21, № 24. С. 579–598.

[16] Меньшова И. В. О периодических решениях Файлона-Рибьера в двумерной задаче теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 105-131.

[17] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // УМН. 1981. Т. 36. Вып. 1. С. 73–126.

[18] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с.

[19] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

[20] Pflüger A. Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reichen // Commentarii Mathem. Helv. 1935/36. V. 8. p. 89–129.

[21] Коваленко М. Д. О преобразовании Бореля в классе W квазицелых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2001. № 3. С. 761–774.

[22] Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Труды ЛПИ. 1967. № 279. С. 31–46.

[23] Прокопов В. К. Однородные решения теории упругости и их приложения к теории тонких пластинок // Труды 2-го Всесоюзного съезда по теоретич. и прикл. механ. М.: Наука. 1966. С. 253–259.

[24] Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Доклады АН СССР. 1940. Т. 27, № 4. С. 335–339.

[25] Flugge W., Kelkar V.S. The problem of an elastic circular cylinder // J. Solids Structures. 1968. V. 4, № 4. P. 397–420.

[26] Little R. W., Childs. S. B. Elastostatie boundary region problem in solid cylinders // Quart. Appl. Math/ 1967. V. 25, № 3. P. 71–84.

[27] Little R. W. Semi-infinite strip problem with built in edges // Trans. ASME. ser. E. 1969. V. 91. № 2. P. 320–323

[28] Meleshko V. V. Selected Topics in the History of Two-Dimensional Biharmonic Problem // ASME report No AMR 341 / Appl. Mech. Rev. 2003. № 1. P. 33-85.

[29] Коваленко М. Д., Шибирин С. В. Полуполоса под действием сосредоточенной силы. Точное решение. Доклады Академии наук. 1997. Т. 356, № 6. С. 763–765.

[30] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.

[31] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971. 518 с.

[32] Коваленко М. Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158

[33] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. I. М.: ФМЛ, 1962. 608 с.

[34] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: ГИФМЛ, 1958, 678 с.

I. V. Menshova

BIORTHOGONAL FUNCTIONS AND EXPANSIONS OF THE LAGRANGE FUNCTION OF THE FADLE-PAPKOVICH IN THE FIRST MAIN TASK OF THE THEORY OF ELASTICITY

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. We consider the Lagrange expansions on the Fadle-Papkovich functions. The functions arise from solution of the first fundamental boundary value problem of elasticity theory in a half-strip $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq h\}$. Independently of a homogeneous boundary conditions type on the long sides of a half-strip, there are always two representations for Fadle- Papkovich functions. Both of representations are considered in this article. Their equivalence for given, physically natural classes of expended functions are shown. Functions that are The biorthogonal system functions are constructed, and then the Lagrange expansions on the Fadle-Papkovich functions are given. The Lagrange expansions are called the expansions of only one function for any one system of Fadle-Papkovich functions, unlike expansions that arise in solving of the boundary value problem. The Lagrange expansions are the analogues of expansions into series on trigonometric systems of functions, and their role in solving of boundary value problems is the same as the role of trigonometric series in Filon-Ribiere [1] expansions. The Lagrange expansions was considered earlier, e.g., in [2-15], as much as it is required to solve a boundary value problem. The aim of this article is detailed study of the Lagrange expansions.

The Fadle-Papkovich functions exactly satisfy to zero boundary conditions on the longitudinal sides of the half-strip, but they are more complicated: a complex-valued, not orthogonal and do not form classical basis in the segment (end face of the half-strip), where expanding functions are given. But it is possible to construct (defined on the Riemannian surface of logarithm) the biorthogonal systems of functions, and then get explicit expressions (in the form of a simple Fourier integrals of the boundary functions) for the required expansion coefficients in the same scheme as in the classical solutions of Filon-Ribiere [16]. The essence of the approach is a new concept of functions basis on an interval, which is a generalization of the classical understanding of the basis on the segment. In terms of work [17, 18], a classical basis can be interpreted as a basis in the complex plane. While the Fadle-Papkovich functions form the basis on the Riemannian surface of logarithm. Moreover, in the particular case when the Fadle-Papkovich functions degenerate into trigonometric systems of functions, the basis on the Riemannian surface becomes to classical basis on a segment. The basis of the corresponding theory is the Borel transform in the class of quasi-entire functions of exponential type (classical basis is based on the theory of entire functions of exponential type and Paley-Wiener theorem [19]). The class of quasi-entire functions of exponential type and the Borel transform in this class were first introduce in 1935 [20]. In article [21] the properties of this transform were studied, as much as this is necessary for solving boundary value problems of elasticity theory in a half-strip.

Keywords: theory of elasticity, half-strip, Fadle-Papkovich functions, biorthogonal systems of functions, Lagrange expansions, analytical solutions.

Menshova Irina Vladimirovna

`e-mail:` menshovairina@yandex.ru, Candidate of Phys. & Math., Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

REFERENCES

[1] Timoshenko S.P. Theory of elasticity. Moscow, Leningrad: ONTI. Main edition of technical and theoretical literature, 1937. 453 p. (in Russian).

[2] Kovalenko M.D. Biorthogonal expansions in the first fundamental problem of elasticity theory // J. Appl. Math. Mechs. 1991. Vol. 55, No. 6. P. 836-843 (in Russian).

[3] Kovalenko M.D. The Lagrange expansions end nontrivial representations in terms of homogeneous solutions // Physics – Doklady. 1997. Vol. 42, No. 2. P. 212-216.

[4] Kovalenko M.D., Sebryakov G.G, Tsybin N.N. Expansions in terms of the Fadle-Papkovich functions in the problem for a strip with a cat // Physics-Doklady. 2008. Vol. 53, No. 4. P. 237-240.

[5] Kovalenko M.D., Sebryakov G.G, Tsybin N.N, Shulyakovskaya T.D. Expansions in terms of the Fadle-Papkovich functions in the problem for a strip with a cat // Physics-Doklady. 2008. Vol. 53, No. 4. P. 237-240.

[6] Kovalenko M.D., Shulyakovskaya T.D. Expansion in Fadle-Papkovich functions in a strip. Theory Foundations // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, No. 5. P. 721-738.

[7] Kovalenko M.D., Klein N.V. Homogeneous solutions of the theory of elasticity. Biorthogonal decomposition // Mechanics of composite materials and structures. 2005. T. 11, No. 2. P. 209-225 (in Russian).

[8] Kovalenko M. D., Popov S.N., Tsybin N.N., Shulyakovskaya T.D. Expansion by function, Fadle-Papkovich in mixed boundary value problems of elasticity theory // Mechanics of composite materials and structures. 2007. Vol. 13, No. 4. P. 493-518 (in Russian).

[9] Kovalenko M.D., Sebryakov G.G., Shulyakovskaya T.D. Features of expansions in Fadle-Papkovich functions in a semistrip // Physics - Doklady. 2012. Vol. 57, No. 8. P. 327-330.

[10] Kovalenko M.D., Menshova I.V. Expansion of the Lagrange function of the Fadle-Papkovich an inverse-symmetric problem of the elasticity theory for a rectangular semi-strip // Bulletin of the Chelyabinsk state pedagogical University named. I. Y. Yakovlev. Mechanics limit state. 2013. №1 (15). P. 81-89 (in Russian).

[11] Lapikova E. S., Yurinkina M. N., Kergaev A. P., Nikitin A.V. The Strip with longitudinal ribs, working in tension-compression. Expansion of Lagrange function // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University. I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2013. № 4 (18). P. 86-103 (in Russian).

[12] Lapikova E.S., Yurinkina M.N., Kergaev A.P., Nikitin A.V. Expansion of the Lagrange function in the periodic task to semi-strip with longitudinal ribs, working in tension-compression // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2013. № 4 (18). P. 68-85 (in Russian).

[13] Lapikova E.S., Yurinkina M.N. The strip with longitudinal ribs, working on the curve. Expansion of the Lagrange function of the Fadle – Papkovich // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Y. Yakovlev. Ser.: Mechanics limit state. 2014. № 1 (19). P. 95 – 107 (in Russian).

[14] Lapikova E.S., Yurinkina M. N. The periodic problem for semi-strip with longitudinal ribs, working on the curve. Expansion of Lagrange // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Y. Yakovlev. Ser.: Mechanics limit state. 2014. № 1 (19). P. 108-120 (in Russian).

[15] Menshova I.V., Semenova I. A. Biorthogonal systems of functions and expansion of the Lagrange function of the Fadle-Papkovich in the problem of bending of semi-strip with

longitudinal ribs // Mechanics of composite materials and structures. 2015. Vol. 21, No. 24. P. 579-598 (in Russian).

[16] Menshova I.V. On periodic solutions Filon-Ribera in the two-dimensional problem of the elasticity theory // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University. I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limit state. 2015. № 1(23). P. 105-131 (in Russian).

[17] Korobeinik Yu. F. Representing systems // Russian Math. Surveys. 1981. T.36, №1. P. 75–137 (in Russian).

[18] Leont'ev A.F. Exponential Series. Moscow: Nauka, 1976. 536 p. (in Russian).

[19] Levin B. Ya. Expansion of roots of entire functions. — M.: GITTL, 1956. 632 p. (in Russian).

[20] Pflüger A. Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reichen // Commentarii Mathem. Helv. 1935/36. V. 8. P. 89 - 129.

[21] Kovalenko M.D. On the Borel transformation in the class W of functions quisitely // Fundamental and applied mathematics. 2001. No. 3. P. 761-774 (in Russian).

[22] Prokopov V.K. An overview of work on the uniform solutions of elasticity theory and their applications // Trudy LPI. 1967. No. 279. P. 31-46 (in Russian).

[23] Prokopov V.K. Uniform solutions of elasticity theory and their applications to the theory of thin plates // Proceedings of 2nd all-Union Congress on Theor. and applied. the mehana. Moscow: Nauka. 1966. P. 253-259 (in Russian).

[24] Papkovich P.F. About one form of solution of the plane problem of elasticity for a rectangular strip // Doklady as USSR. 1940. T. 27, No. 4. P. 335-339 (in Russian).

[25] Flugge W., Kelkar V.S. The problem of an elastic circular cylinder // J. Solids Structures. 1968. V. 4, № 4. P. 397-420.

[26] Little R.W., Childs. S.B. Elastostatie boundary region problem in solid cylinders // Quart. Appl. Math. 1967. V. 25, № 3. P. 71-84.

[27] Little R.W. Semi-infinite strip problem with built in edges // Trans. ASME. ser. E. 1969. V. 91. № 2. P. 320-323.

[28] Meleshko V.V. Selected Topics in the History of Two-Dimensional Biharmonic Problem // ASME report No AMR 341/ Appl. Mech. Rev. 2003. №1. P. 33-85.

[29] Kovalenko M.D., Shibirin S.V. A half-strip under the action of concentrated force: an exact solution to the problem // Physics-Doklady. 1997. Vol. 42, No.10. P. 289-294.

[30] Vlasov V. V. Method of initial functions in problems of theory of elasticity and structural mechanics. – M.: Stroiizdat, 1975. 224 p. (in Russian).

[31] Ibragimov I. I. Methods of interpolation of functions and some their applications. Moscow: Nauka, 1971. 518 p. (in Russian).

[32] Kovalenko M. D., Menshova I. V., Shulyakovskaya T. D. Expansions in Fadle-Papkovich functions: Examples of solutions in a half-strip // Mechanics of Solids. 2013. Vol. 48, No. 5. Pp. 584-602.

[33] Fichtenholz G. M. Differential and integral calculus. - M.: FML, 1962. Vol. I. 608 p. (in Russian).

[34] Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. Methods of theory of functions of a complex variable. - M.: FML, 1958, 678 p. (in Russian).