Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 87–102

В. Д. Кулиев[1], *Е. М. Морозов*[2]

ГРАДИЕНТНЫЙ ДЕФОРМАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ

[1] *Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия*

[2] *Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), г. Москва, Россия*

Аннотация. В работе [1] нами предложен новый критерий разрушения, исходящий из предположения, что хрупкое разрушение наступает, когда модуль градиента деформации достигает предельного значения. В данной работе более подробно показано, что модуль градиента температуры, а следовательно, и деформации становится значительным в тонком пограничном слое, где происходит резкое изменение температур. Дано решение новой термоупругой задачи о резком изменении температуры в круговой области. Причём оказалось, что в случае криволинейной границы охлажденной области E_2, где E_2 – евклидова плоскость, критерий разрушения осложняется и приобретает вид предельного значения модуля градиента суммы главных деформаций или просто суммы главных напряжений. Разрушение будет определяться тем критерием, время наступления которого меньше. Показано также: в случае нагретой круговой области в E_2 критерием хрупкого разрушения континуальной среды будет предельное значение модуля градиента суммы главных деформаций. Представлены результаты предварительного эксперимента с образцами при резком изменении температуры.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, градиентный деформационный критерий разрушения, задача Коши, функции Хевисайда, регуляризация начального распределения температуры, логарифмический потенциал круга.

УДК: 539.375

1. Новый критерий хрупкого разрушения. Один из видов нарушения прочности твёрдого деформируемого тела – это хрупкое разрушение. Оно происходит внезапно, на фоне макроупругой деформации, опасность его очевидна, и разработка новых и развитие существующих критериев хрупкого разрушения весьма актуальны.

Кулиев Валех Джафарович
`e-mail:` pmdekanat@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), г. Москва, Россия.
Морозов Евгений Михайлович
`e-mail:` evgeny.morozof@gmail.com, доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), г. Москва, Россия.

Поступила 28.01.2016

Среди существующих критериев можно назвать классические первую (наибольших растягивающих напряжений, Г. Галилей) и вторую (наибольших растягивающих деформаций, Е. Мариотт) гипотезы прочности. Несмотря на архаичность в некоторых случаях они находят применение. Существуют критерии, исходящие из предположения, что в местах концентрации напряжений, в самой опасной точке, напряжение превышает предельное на определенный процент [2]. Имеются родственные критерии, в которых введены ограничения на область с высоким градиентом напряжений. Для моделей материалов с разномасштабной иерархической структурой также используют градиенты напряжений в качестве критериев разрушения (ссылки на работы, где можно найти примеры подобных критериев, приведены в [1]). Современная модель хрупкого разрушения, созданная и развиваемая школой Н. Ф. Морозова и Ю. В. Петрова [3], представлена структурно-временным критерием. Для тел с трещинами используют методы линейной механики разрушения [4].

Нами предлагается критерий возникновения хрупкого разрушения в континуальной среде в виде равенства

$$|grad\,\varepsilon| = \theta, \tag{1.1}$$

в котором ε – компонента растягивающей деформации в направлении нормали к фронту разрушения (трещины), а θ – эмпирическая величина предельного градиента деформации как характеристики материала.

Поясним сделанное предложение следующим примером. Пусть в трёхмерном теле выделена конечная область, граница которой – замкнутая кусочно гладкая поверхность. Эта область в момент времени $t = 0$ оказывается внезапно нагретой (или охлажденной) на постоянную температуру T_0. Попытка сформулировать начальные условия задачи наталкивается на противоречие, состоящее в том, что с одной стороны от границы температура и деформация равны, допустим, нулю, а по другую сторону температура, а следовательно, и деформация не равны нулю. Налицо нарушение условия неразрывности деформаций. Выход мы видим в предположении существования тонкого приграничного слоя, в пределах которого имеет место перепад и температуры и деформации от нуля до заданного значения. Поэтому возникает необходимость регуляризации (усреднения) начального распределения температуры по С. Л. Соболеву [5] и ставить задачу Коши по регуляризированному начальному распределению температуры. В этом случае задача Коши становится корректной.

2. Градиент деформации. Дадим одно решение для иллюстрации предложенного критерия разрушения.

Рассмотрим следующую задачу Коши. Пусть теплопроводящая среда заполняет всю евклидову плоскость E_2. Далее, пусть

$$T\,(x,y,t)|_{t=0} = \begin{cases} T_o \equiv const, (x,y) \in S^- \,(S^- : x \leq 0, |y| < \infty)\,; \\ T_1 \equiv const, (x,y) \in S^+ \,(S^+ : x \geq 0, |y| < \infty)\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Будем считать: а) термомеханические свойства теплопроводящей среды S^- и S^+ не зависят от температуры и одинаковы; б) выполняются гипотезы Дюамеля и Неймана.

При этих условиях решение задачи Коши (2.1) для однородного уравнения теплопроводности Фурье определяется так:

$$T\,(x,t) = \frac{T_0}{2}\left[1 + erf\left(-\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right] + \frac{T_1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right], erf\,(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-\xi^2}d\xi. \tag{2.2}$$

Здесь а – коэффициент температуропроводности, $erf(-\tau) = -erf(\tau)$ – функция вероятности ошибок, причем $erf(\infty) = 1$.

Из (2.2) в пределе $t \to 0$ приходим к следующему представлению начального распределения температуры для любого $y \in (-\infty; \infty)$ (ср. с формулой (2.1)):

$$\lim_{t \to 0} T(x, y, t) = T_0 H^-(x) + T_1 H^+(x), \tag{2.3}$$

$$H^-(x) = \begin{cases} 1, x < 0; \\ \frac{1}{2}, x = 0; \\ 0, x > 0, \end{cases} \qquad H^+(x) = \begin{cases} 1, x > 0; \\ \frac{1}{2}, x = 0; \\ 0, x < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$H^-(0-0) = 1, \quad H^-(0+0) = 0, \quad H^+(0+0) = 1, \quad H^+(0-0) = 0.$$

Здесь $H^{\pm}(x)$ – симметричные единичные функции (функции Хевисайда). Эти функции аппроксимированы следующими непрерывными функциями:

$$H^{\pm}(x) = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{2} \left[1 + erf(\pm \alpha x)\right] \quad \left(\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}, t \to 0\right).$$

Функции $H^{\pm}(x)$ имеют разрывы 1-го рода в точке $x =$0. Поэтому они не имеют конечной производной при $x = 0$ в обычном смысле, но функции $H^{\pm}(x)$, будучи локально интегрируемыми (т. е. функции $H^{\pm}(x)$, заданные на всей числовой оси, абсолютно интегрируемы на любом конечном отрезке), могут рассматриваться как обобщенные функции и потому имеют производные любого порядка в обобщенном смысле.

Заметим, что, поскольку точка $x = 0$ является точкой множеством меры нуль, нет необходимости определять значения функции $H^{\pm}(x)$ при $x = 0$.

Из (2.3) и (2.4) видно, что возникает необходимость произвести регуляризацию (усреднение) начального распределения температуры по С. Л. Соболеву:

$$H_h(x) = \int_{r<h} \omega_h(r) \left[T_0 H^-(\xi) + T_1 H^+(\xi)\right] d\xi \quad (r = |x - \xi|). \tag{2.5}$$

Здесь h – радиус усреднения, $\omega_h(r)$ – какое-нибудь усредняющее ядро, например,

$$\omega_h(r) = \begin{cases} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}}, r < h; \\ 0, sr \geq h, \end{cases} \qquad C_h \int_{r<h} e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}} d\xi = 1, C_h = \frac{1}{2h} \left\{\int_0^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt\right\}^{-1}. \tag{2.6}$$

Учитывая (2.6) в (2.5), функцию $H_\varepsilon(x)$ можно представить в виде:

$$H_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \int_{-\varepsilon+0}^{\varepsilon-0} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - u^2}} \left[T_0 H^-(x+u) + T_1 H^+(x+u)\right] du. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что функция $H_\varepsilon(x)\,(-\infty < x < \infty)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка, причем:

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} T_0, x \leq -\varepsilon; \\ T_1, x \geq \varepsilon, \end{cases} \qquad \frac{dH_\varepsilon}{dx} = C_\varepsilon (T_1 - T_0) \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, |x| < \varepsilon; \\ 0, |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \tag{2.8}$$

Теперь можно корректно ставить задачу Коши $\tilde{T}(x, y, t)\Big|_{t=0} = H_\varepsilon(x), |y| < \infty$. Решение этой задачи определяется формулой Пуассона и не зависит от $y \in (-\infty; \infty)$:

$$\tilde{T}(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}}H_{\varepsilon}(\xi)\,d\xi. \tag{2.9}$$

Из (2.9) в силу (2.5)–(2.8) находим:

$$\frac{\partial\tilde{T}(x,t)}{\partial x}=-\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\int_{-\infty}^{\infty}H_{\varepsilon}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}}d\xi= \tag{2.10}$$

$$=\frac{(T_1-T_0)}{2\sqrt{\pi at}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4at}}\omega_h(r)\,d\xi\,(r=|x-\xi|\,,|x|<\infty)\,.$$

Для данной задачи система уравнений Дюамеля–Неймана при плоском напряженном состоянии и при отсутствии массовых сил принимает вид:

$$\frac{\partial\varepsilon_x(x,t)}{\partial x}=(1+\nu)\,\alpha\frac{\partial\tilde{T}(x,t)}{\partial x}. \tag{2.11}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного расширения.

Из формулы (2.11) с учетом (2.10) получаем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial\varepsilon_x(x,t)}{\partial x}=(1+\nu)\,\alpha C_{\varepsilon}(T_1-T_0)\begin{cases}0,|x|\geq\varepsilon;\\ e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}},|x|<\varepsilon-0.\end{cases}$$

Таким образом, критерий возникновения хрупкого разрушения (1.1) для данной задачи в силу (2.10) и (2.11) определяется следующим образом:

$$|grad\,(\varepsilon)|=\left|\frac{\partial\varepsilon_x(x,t)}{\partial x}\right|=\frac{(1+\nu)\,\alpha\,|T_1-T_0|}{2\sqrt{\pi at}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4at}}\omega_h(r)\,d\xi=$$

$$=\frac{(1+\nu)\,\alpha\,|T_1-T_0|}{2\sqrt{\pi at}}\int_{r<h}e^{-\frac{\xi^2}{4at}}\omega_h(r)\,d\xi=\theta\,(r=|x-\xi|\,,|x|<\infty)\,. \tag{2.12}$$

Трещина образуется вдоль оси x = 0 при малом значении времени $t>0$, что следует из применения в (2.12) теоремы о сходимости средних функций [5]. Температурные напряжения с учетом (1.7)–(1.9) равны [6]:

$$\sigma_x=\tau_{xy}=0;\quad \sigma_y=-\alpha E\tilde{T}(x,t)\,. \tag{2.13}$$

Замечание 1. Чтобы аналитически обосновать результаты эксперимента, приводимые ниже, рассмотрим задачу Коши:

$$T(x,y,t)|_{t=0}=\begin{cases}T_o,-b<x\leq 0,|y|<\infty;\\ 0,x<-b,|y|<\infty;\\ T_1,x\geq 0,|y|<\infty.\end{cases} \tag{2.14}$$

Решение данной задачи Коши дается формулой:

$$\begin{aligned}T(x,t)=\tfrac{T_0}{2}\left\{\left[1+erf\left(-\tfrac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]-\left[1-erf\left(\tfrac{x+b}{2\sqrt{at}}\right)\right]\right\}+\\ +\tfrac{T_1}{2}\left[1+erf\left(\tfrac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right],\end{aligned} \tag{2.15}$$

откуда

$$\lim_{t\to 0}T(x,t)=T_0\left[H^-(x)-H_0^-(x+b)\right]+T_1H^+(x),$$

$$H_0^-(x+b) = \begin{cases} 0, x > -b; \\ \frac{1}{2}, x = -b; \\ 1, x < -b. \end{cases} \tag{2.16}$$

Далее:

1. Следует провести регуляризацию начального распределения температуры по С. Л. Соболеву. 2. Сформулировать задачу Коши по регуляризованному начальному распределению температуры.

После этих операций нетрудно показать, что для любого t >0

$$|grad\,(\varepsilon)| = \frac{(1+\nu)\,\alpha}{2\sqrt{\pi a t}} \left| \left[(T_1 - T_0)\, e^{-\frac{x^2}{4at}} + T_0 e^{-\frac{(x+b)^2}{4at}} \right] \right|. \tag{2.17}$$

Поскольку трещина образуется вдоль оси x = 0 при малом значении времени t>0, то вторым слагаемым внутри квадратной скобки в (2.17) можно пренебречь. В этом случае приходим к формуле (2.12).

Имеют место:

Утверждение 1. Пусть

1) начальная температура распределена в E_2 по закону

$$\left.\tilde{T}(x,y,t)\right|_{t=0} = H_\varepsilon(x)\,(-\infty < x, y < \infty)\,, \tag{2.18}$$

где функция $H_\varepsilon(x)$ определяется по формуле (2.7);

2) термомеханические свойства теплопроводящей среды $S^-(x \le 0, |y| < \infty)$ и $S^+(x \ge 0, |y| < \infty)$ не зависят от температуры и одинаковы;

3) выполняются гипотезы Дюамеля и Неймана;

4) имеет место равенство (2.12).

Тогда трещина образуется вдоль оси x = 0 при малом значении времени t >0.

Из утверждения 1 приходим к важному следствию.

Следствие 1. Критерием хрупкого разрушения континуальной среды вдоль оси x = 0 является предельное значение модуля градиента деформации (2.12).

Пусть теперь в утверждении 1 условия 2) и 3) остаются в силе. Далее, не нарушая общности, предположим, что $T_1 \equiv 0$ в формулах (2.1)–(2.12).

Заменим только условие (1) в утверждении 1 на условие: нагретая область D^+ в E_2 имеет ненулевую кривизну границы, например, D^+ есть круг с радиусом R. Возникает вопрос: для такого класса термоупругих задач можно ли однозначно указать критерий хрупкого разрушения континуальной среды?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим следующую задачу термоупругости.

3. Температурные напряжения и деформации в круге.

3.1. Задача Коши.

Пусть

$$\left.T(x,y,t)\right|_{t=0} = \begin{cases} T_0, (x,y) \in \bar{D}^+, \\ 0, (x,y) \in E_2 \backslash \bar{D}^+. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $T_0 \equiv const$, $\bar{D}^+$ – замкнутый круг с радиусом R, E_2 – евклидова плоскость.

Решением задачи Коши (3.1) для однородного уравнения теплопроводности Фурье в силу формулы Пуассона будет:

$$T(x,y,t) = \frac{T_0}{4\pi a t} \iint_{\bar{D}^+} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4at}} d\xi d\eta. \tag{3.2}$$

Пусть

$$\left\{\begin{array}{l}\xi = r\cos\varphi,\\ \eta = r\sin\varphi\end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l}x = \rho\cos\theta,\\ y = \rho\sin\theta\end{array}\right. \tag{3.3}$$

$$(0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le 2\pi).$$

Тогда из (3.2) с учетом (3.3) имеем:

$$T(\rho,\theta,t) = \frac{T_0}{4\pi at}\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-\frac{(\rho\cos\theta - r\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\theta - r\sin\varphi)^2}{4at}} r\,d\varphi\,dr =$$
$$= \frac{T_0}{4\pi at}e^{-\frac{\rho^2}{4at}}\int_0^R e^{-\frac{r^2}{4at}} r\left[\int_0^{2\pi} e^{\frac{\rho r\cos(\varphi-\theta)}{2at}}d\varphi\right]dr. \tag{3.4}$$

Внутренний интеграл в (3.4) можно вычислить в замкнутой форме. Действительно,

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{\rho r\cos(\varphi-\theta)}{2at}}d\varphi = \left\{\begin{array}{l}\alpha = \varphi - \theta,\\ d\alpha = d\varphi\end{array}\right\} = \int_{-\theta}^{2\pi-\theta} e^{\frac{\rho r\cos\alpha}{2at}}d\alpha =$$
$$= \int_{-\theta}^{0} e^{\frac{\rho r\cos\alpha}{2at}}d\alpha + \int_0^{2\pi} e^{\frac{\rho r\cos\alpha}{2at}}d\alpha - \int_{2\pi-\theta}^{2\pi} e^{\frac{\rho r\cos\alpha}{2at}}d\alpha =$$
$$= 2\int_0^{\pi} e^{\frac{\rho r\cos\alpha}{2at}}d\alpha = 2\pi I_0\left(\frac{\rho r}{2at}\right). \tag{3.5}$$

Здесь $I_0(u)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка (см., например, [6], с. 116–118).

Следует заметить, что [6]

$$\frac{dI_0(u)}{du} = I_1(u), \frac{dI_1(u)}{du} = I_0(u) - \frac{1}{u}I_1(u). \tag{3.6}$$

Учитывая (3.5) в (3.4), имеем:

$$T(\rho,t) = \frac{T_0}{2at}e^{-\frac{\rho^2}{4at}}\int_0^R e^{-\frac{r^2}{4at}} r I_0\left(\frac{\rho r}{2at}\right)dr. \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что температура $T(\rho,t)$ не зависит от полярного угла θ.

Из (3.7) следует также, что если $R \to \infty$, то $T(\rho,t) = T_0$.

Теперь определим начальное распределение температуры $T(\rho,t)$.

Интеграл в (3.7) можно рассматривать как некоторое обобщение интеграла Лапласа (см. [6], с. 166–172). Для получения асимптотической формулы для функции, представленной интегралом Лапласа, обычно применяют один из подходящих методов Лапласа – метод типа Ватсона. Однако авторам этой работы не удалось найти в литературе такой метод для данного интеграла (3.7) по следующим причинам: во-первых, в интеграле (3.7) имеется еще один параметр ρ; во-вторых, при $\rho = R$ главный член асимптотики интеграла (3.7) может иметь разрыв первого рода. Поэтому мы здесь, опираясь на теорию обобщенных функций, предложили способ, позволяющий найти главный член асимптотики интеграла (3.7). Для этого воспользуемся асимптотическим представлением функции $I_0\left(\frac{\rho r}{2at}\right)$ (см. [6], с. 223):

$$I_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(m+1/2)}{\pi\cdot m!\,(2\lambda)^m} \tag{3.8}$$

$$\left(0! = 1, t \to +0, \lambda = \frac{\rho r}{2at} \to +\infty\right),$$

$$\Gamma\left(m + 1/2\right) = \frac{\sqrt{\pi}\left(2m\right)!}{m!4^m}.$$

Из (3.7) с учетом (3.8) имеем:

$$\begin{aligned} &\lim\nolimits_{t\to+0} T\left(\rho, t\right) = T_0 \lim\nolimits_{t\to+0} \left\{\tfrac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{\rho}} \sum\nolimits_{m=0}^{\infty} \left[\tfrac{\Gamma^2(m+1/2)}{\pi\cdot m!\rho^m}\left(at\right)^m \times \right.\right. \\ &\left.\left.\times \int\nolimits_{\delta>0}^{R} e^{-\frac{(r-\rho)^2}{4at}} r^{\frac{1}{2}-m} dr\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из (3.9), воспользовавшись аппроксимацией функции Дирака $\delta(x)$ непрерывно дифференцируемой функцией

$$\delta\left(x, \alpha\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}, t \to 0\right),$$

находим главный член асимптотики интеграла (3.7):

$$\lim_{t\to 0} T(\rho, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\rho}} \int_0^R \delta\left(r - \rho\right) \sqrt{r} dr = T_0 H\left(R - \rho\right),$$

$$H\left(R - \rho\right) = T_0 \left\{ \begin{array}{l} 1, R > \rho; \\ \frac{1}{2}, R = \rho; \\ 0, R < \rho. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Здесь $H\left(R - \rho\right)$ – симметричная единичная функция Хевисайда.

Из (3.10) видно, что функция $H\left(R - \rho\right)$ и тем самым функция $\lim_{t\to 0} T(\rho, t)$ имеет разрыв первого рода в точке $\rho = R$, что и следовало ожидать [7].

Поэтому следует произвести регуляризацию начального распределения температуры по С. Л. Соболеву

$$H_h(\rho) = \int_{\rho_2 < h} \omega_h(\rho_2) H(R - \rho_1) d\rho_1 \left(\rho_2 = |\rho - \rho_1|\right). \tag{3.11}$$

Функцию $H_h(\rho)$ при $h = \varepsilon$ можно представить в виде:

$$H_\varepsilon(\rho) = C_\varepsilon \int_{-\varepsilon+0}^{\varepsilon-0} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \rho_3^2}} H(R - \rho + \rho_3) d\rho_3. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что функция $H_h(\rho)$, в том числе и функция $H_\varepsilon(\rho)$, непрерывна и непрерывно дифференцируема любого порядка в E_2. Кроме того,

$$H_\varepsilon(\rho) = \left\{ \begin{array}{l} 1, 0 \le \rho \le R - \varepsilon; \\ 0, \rho \ge R + \varepsilon. \end{array} \right. \tag{3.13}$$

$$\frac{dH_\varepsilon(\rho)}{d\rho} = \left\{ \begin{array}{l} -C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - (R-\rho)^2}}, R - \varepsilon < \rho < R + \varepsilon; \\ 0, |R - \rho| \ge \varepsilon. \end{array} \right. \tag{3.14}$$

Теперь имеем возможность корректно сформулировать задачу Коши для регуляризованного начального распределения температуры

$$\tilde{T}\left(\rho, \theta, t\right)\Big|_{t=0} = T_0 H_\varepsilon\left(\rho\right), \theta \in \left[0, 2\pi\right]. \tag{3.15}$$

Решение данной задачи имеет вид:

$$\tilde{T}\left(\rho,t\right)=\frac{T_0}{2at}e^{-\frac{\rho^2}{4at}}\int_0^{R+\varepsilon}e^{-\frac{r^2}{4at}}rH_\varepsilon\left(r\right)I_0\left(\frac{\rho r}{2at}\right)dr. \tag{3.16}$$

Поскольку функция $H_\varepsilon(r)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема любого порядка в E_2, то из (3.16) при $t\to 0$ с помощью метода Лапласа (при этом поступая точно так же, как в [8]) приходим к формуле (3.15).

3.2. Вывод уравнения Дюамеля – Неймана. Поскольку в рассматриваемой задаче имеет место осевая симметрия, деформации, напряжения и перемещения не зависят от полярного угла θ. Поэтому для плоского напряженного состояния имеем:

$$\varepsilon_\rho=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}=\frac{1}{E}\left(\sigma_\rho-\nu\sigma_\theta\right),\ \varepsilon_\theta=\frac{u_\rho}{\rho}=\frac{1}{E}\left(\sigma_\theta-\nu\sigma_\rho\right),$$

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_\rho+\sigma_\theta\right),\ \gamma_{\rho\theta}=0, u_\theta=0,\quad \tau_{r\theta}=0,\sigma_z=0. \tag{3.17}$$

Здесь σ_ρ – радиальное напряжение, σ_θ – тангенциальное напряжение, $\tau_{r\theta}$ - касательное напряжение, а u_ρ и u_θ – перемещения в полярных координатах соответственно по направлению радиуса и перпендикулярно ему, ε_ρ, ε_θ и $\gamma_{\rho\theta}$ – деформации, E – модуль Юнга.

Из системы эллиптического типа уравнений равновесия теории упругости получаем:

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0. \tag{3.18}$$

На основании закона, установленного Дюамелем и Нейманом, между компонентами деформации и напряжения существует следующая связь:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho(\rho,t)&=\tfrac{E}{1-\nu^2}\left[\tfrac{\partial u_\rho(\rho,t)}{\partial\rho}+\nu\tfrac{u_\rho(\rho,t)}{\rho}-\left(1+\nu\right)\alpha\tilde{T}(\rho,t)\right],\\ \sigma_\theta(\rho,t)&=\tfrac{E}{1-\nu^2}\left[\tfrac{u_\rho(\rho,t)}{\rho}+\nu\tfrac{\partial u_\rho(\rho,t)}{\partial\rho}-\left(1+\nu\right)\alpha\tilde{T}(\rho,t)\right].\end{aligned} \tag{3.19}$$

Учитывая (3.19) в (3.18), приходим к уравнению Дюамеля – Неймана:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial u_\rho\left(\rho,t\right)}{\partial\rho}+\frac{u_\rho\left(\rho,t\right)}{\rho}\right)=\left(1+\nu\right)\alpha\frac{\partial\tilde{T}(\rho,t)}{\partial\rho}, \tag{3.20}$$

откуда после интегрирования по ρ,

$$\frac{\partial u_\rho\left(\rho,t\right)}{\partial\rho}+\frac{u_\rho\left(\rho,t\right)}{\rho}=\left(1+\nu\right)\alpha\tilde{T}(\rho,t). \tag{3.21}$$

3.3. Термоупругий потенциал $\Psi\left(\rho,\tau\right)$ Папковича – Гудьера. Пусть

$$u_\rho\left(\rho,t\right)=\frac{\partial\Psi\left(\rho,t\right)}{\partial\rho}. \tag{3.22}$$

Учитывая (3.22) в (3.21), получаем:

$$\Delta\Psi\left(\rho,t\right)=\left(1+\nu\right)\alpha\tilde{T}(\rho,t)\qquad\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right). \tag{3.23}$$

С другой стороны, температура $\tilde{T}(\rho,t)$, определяемая по формуле (3.16), является решением однородного уравнения теплопроводности Фурье

$$\frac{\partial\tilde{T}(\rho,t)}{\partial t}=a\Delta\tilde{T}(\rho,t). \tag{3.24}$$

Из (3.23) в силу (3.24) получаем:

$$\Delta\left[\frac{\partial\Psi(\rho,t)}{\partial t}-(1+\nu)\,\alpha a\tilde{T}(\rho,t)\right]=0. \tag{3.25}$$

Интегрирование этого уравнения приводит к зависимости

$$\Psi(\rho,t)=(1+\nu)\,\alpha a\int_0^t\tilde{T}(\rho,\tau)d\tau+\Psi_0(\rho)+t\Psi_1(\rho). \tag{3.26}$$

Здесь:

1) $\Psi_0(\rho)=\Psi(\rho,t)|_{t=0}$,

причем

$$\Delta\Psi_0\,(\rho)=\mathrm{T}_0\,(1+\nu)\,\alpha H_\varepsilon\,(\rho)\left(\Delta=\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right); \tag{3.27}$$

2) функция $\Psi_1\,(\rho)$ – произвольная гармоническая функция.

Очевидно, функция $\Psi_1\,(\rho)\equiv 0$. Действительно, в противном случае в силу (3.26) и (3.22) имело бы место:

$$\lim_{t\to\infty}u_\rho\,(\rho,t)=\infty,$$

что физически недопустимо.

Прежде чем перейти к решению уравнения (3.27), заметим следующее.

Если $\mu\,(\zeta)\in C\left(\bar{G}\right)$, где $\zeta=\xi+i\eta$, $\bar{G}$ – замкнутая двумерная область, то логарифмический потенциал

$$V\,(z)=\int_G\mu\,(\zeta)\ln\frac{1}{|z-\zeta|}d\xi d\eta,\quad z=x+iy,$$

регулярен и гармоничен в любой конечной области, принадлежащей $G_1=E_2\backslash\bar{G}$, и имеет место асимптотическое равенство [9]:

$$V\,(z)=\ln\frac{1}{|z|}\int_G\mu\,(\zeta)d\xi d\eta+O\left(\frac{1}{|z|}\right),|z|\to\infty. \tag{A}$$

Если, кроме того, $\mu\,(\zeta)\in C^1\,(G)$, то $V\in C^2\,(G)$, причем

$$\Delta V=-2\pi\mu.$$

Из (A) следует, что логарифмический потенциал площади $V(z)$ не регулярен при $|z|\to\infty$.

Теперь построим решение уравнения (3.27).

Из (3.27) в силу (3.13) имеем:

1^0. Если $\rho\geq R+\varepsilon$, то

$$\Delta\Psi_0\,(\rho)=0. \tag{3.28}$$

2^0. Если же $0<\rho\leq R+\varepsilon$, то

$$\Delta\Psi_0\,(\rho)=\mathrm{T}_0\,(1+\nu)\,\alpha H_\varepsilon\,(\rho)\,.$$

Следовательно, потенциал $\Psi_0\,(\rho)$ есть логарифмический потенциал круга в точке (ρ,θ):

$$\Psi_0\,(\rho)=\frac{\mathrm{T}_0\,(1+\nu)\,\alpha}{4\pi}\int_0^{R+\varepsilon}rH_\varepsilon\,(r)\int_0^{2\pi}\ln\left[\rho^2-2r\rho\cos\left(\varphi-\theta\right)+r^2\right]d\varphi dr=$$

$$= \frac{\mathrm{T}_0\,(1+\nu)\,\alpha}{2\pi} \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon\,(r) \int_0^{\pi} \ln\left[\rho^2 - 2r\rho\cos\alpha + r^2\right] d\alpha dr. \tag{3.29}$$

Интеграл

$$\int_0^{\pi} \ln\left[\rho^2 - 2r\rho\cos\alpha + r^2\right] d\alpha$$

можно вычислить разными способами. Покажем это.

Первый способ – способ Г. М. Фихтенгольца. В [10] доказано, что

$$\int_0^{n\pi} \ln\left[1 - 2b\cos\alpha + b^2\right] d\alpha = \begin{cases} 0, b^2 < 1; \\ n\pi\ln b^2, b^2 > 1. \end{cases} \tag{3.30}$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть $\rho \geq R+\varepsilon$. Тогда из (3.29) в силу (3.30) имеем:

$$\Psi_0\,(\rho) = \mathrm{T}_0\,(1+\nu)\,\alpha\ln\rho \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon\,(r)\,dr. \tag{3.31}$$

Отсюда видно, что логарифмический потенциал круга $\Psi_0\,(\rho)$ регулярен и гармоничен в любой конечной области вне круга, (т. е. при $\rho \geq R+\varepsilon$), а при $\rho \to \infty$ потенциал $\Psi_0\,(\rho)$ не регулярен.

Важно отметить: второе слагаемое формулы (A) не входит в (3.31).

Случай 2. Пусть $0 < \rho < R+\varepsilon$. Тогда из (3.29) в силу (3.30) имеем:

$$\Psi_0\,(\rho) = T_0\,(1+\nu)\,\alpha \lim_{\delta\to+0}\left[\ln\rho\int_0^{\rho-\delta} r H_\varepsilon\,(r)\,dr + \int_{\rho+\delta}^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon\,(r)\ln r dr\right] = \tag{3.32}$$

$$= T_0\,(1+\nu)\,\alpha\left[\ln\rho\int_0^{\rho} r H_\varepsilon\,(r)\,dr + \int_{\rho}^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon\,(r)\ln r dr\right].$$

Отсюда следует, что:

$$\Delta\Psi_0\,(\rho) = \mathrm{T}_0\,(1+\nu)\,\alpha H_\varepsilon\,(\rho)\,.$$

Из (3.31) и (3.32) следует также: логарифмический потенциал круга $\Psi_0\,(\rho)$ непрерывен и имеет непрерывные производные любого порядка при переходе границы $\gamma_{R+\varepsilon}$ области $\bar{D}_{R+\varepsilon}$, где $\gamma_{R+\varepsilon}$ – окружность замкнутого круга $\bar{D}_{R+\varepsilon}$ с радиусом $\rho = R+\varepsilon$. Очевидно, что все производные $\Psi_0\,(\rho)$ являются нормальными производными.

Следовательно, функция $\Psi_0\,(\rho)$, определяемая по формуле (3.29), является решением уравнения Пуассона внутри круга и решением уравнения Лапласа вне круга.

Второй способ. Суть этого способа состоит в разложении функции

$$\ln\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho\cos\varphi + r^2}}$$

в тригонометрические ряды при $\rho > r$ и при $r > \rho$, что легко достигается, если опираться на два тождества:

первое тождество:

$$\frac{2b\sin t}{1 - 2b\cos t + b^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin nt\,(|b| < 1)\,;$$

второе тождество:

$$\ln\,(1-b) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n}\,(|b| < 1)\,.$$

Второе тождество достаточно просто доказывается с помощью $K_\alpha\,(\alpha = \pi/2)$ – формулы суммирования [11].

Первое тождество также доказывается с помощью $K_\alpha\,(\alpha = \pi/2)$ – формулы суммирования, но, пожалуй, несколько проще следующее доказательство. Ряд в первой части первого тождества абсолютно сходится. Умножим обе его части на знаменатель левой части. В правой части получим:

$$2\left(1 - 2b\cos t + b^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) =$$

$$= 2\left(1 + b^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) - 4b\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt)\cos t =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) + 2\sum_{n=1}^{\infty} b^{n+2}\sin(nt) -$$

$$-2b\sum_{n=1}^{\infty} b^n\left[\sin(n+1)t + \sin(n-1)t\right] =$$

$$= 2\left[\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(nt) - \sum_{n=1}^{\infty} b^{n+1}\sin(n+1)t\right] +$$

$$+2\left[\sum_{n=1}^{\infty} b^{n+2}\sin(nt) - \sum_{n=1}^{\infty} b^{n+1}\sin(n-1)t\right] =$$

$$= 2\left[\textstyle\sum_{m=1}^{\infty} b^m \sin(mt) - \sum_{m=2}^{\infty} b^m \sin(mt)\right] + 2\left[\sum_{m=1}^{\infty} b^{m+2}\sin(mt) - \sum_{m=0}^{\infty} b^{m+2}\sin(mt)\right]$$
$$= 2b\sin t.$$

Доказательство закончено.

Теперь, интегрируя обе части первого тождества по t от нуля до некоторого угла φ с учетом второго тождества, имеем:

$$\ln\left(1 - 2b\cos\varphi + b^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}b^n\cos n\varphi\,(|b| < 1)\,.$$

С помощью этой формулы нетрудно получить следующие равенства:

$$\ln\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho\cos\varphi + r^2}} = \begin{cases} \ln\frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos n\varphi, \rho > R + \varepsilon; \\ \ln\frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos n\varphi, r < \rho < R + \varepsilon; \\ \ln\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos n\varphi, \rho < r < R + \varepsilon. \end{cases} \quad \text{(B)}$$

Учитывая (B) в (3.29), приходим к формулам (3.31) и (3.32).

Следует заметить, что уравнение (3.27) есть линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. В теории дифференциальных уравнений разработаны методы решения таких типов уравнений (см., например, [12], с. 108–122). Построим решение (3.27) с помощью одного из них [12]. С этой целью уравнение (3.27) представим в виде:

$$\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\Psi_0(\rho)}{d\rho}\right] = T_0(1+\nu)\,\alpha\rho H_\varepsilon(\rho)\,. \tag{3.33}$$

Решение (3.33) построим при следующих условиях:

$$\lim_{\rho\to 0}\Psi_0(\rho) = T_0(1+ +v)\alpha\int_0^{R+\varepsilon} rH_\varepsilon(r)\ln r dr = T_0(1+v)\alpha C \equiv const, \tag{3.34}$$

$$\lim_{\rho\to +0}\frac{d\Psi_0\left(\rho\right)}{d\rho} = T_0\left(1+\nu\right)\alpha. \tag{3.35}$$

Кроме того, при построении решения (3.33) следует учесть:

Функция $H_\varepsilon(\rho)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка в E_2, причем

$$H_\varepsilon\left(\rho\right) = \begin{cases} 1, 0 \le \rho \le R-\varepsilon; \\ 0, \rho \ge R+\varepsilon. \end{cases} \tag{3.36}$$

Имеют место соотношения:

$$\lim_{\rho\to +0}\left[\ln\rho\int_0^\rho rH_\varepsilon\left(r\right)dr\right] = 0, \tag{3.37}$$

$$\lim_{\rho\to +0}\frac{1}{\rho}\int_0^\rho rH_\varepsilon(r)dr = 1. \tag{3.38}$$

Эти предельные равенства легко доказываются методом Лопиталя.

Из (3.33) в силу (3.35) и (3.38) имеем:

$$\frac{d\Psi_0\left(\rho\right)}{d\rho} = T_0\left(1+\nu\right)\alpha\frac{1}{\rho}\int_0^\rho rH_\varepsilon\left(r\right)dr,$$

откуда, с учетом (3.34) и (3.37), находим

$$\Psi_0\left(\rho\right) = T_0\left(1+\nu\right)\alpha\left[\ln\rho\int_0^\rho rH_\varepsilon\left(r\right)dr - \int_0^\rho rH_\varepsilon\left(r\right)\ln r dr + C\right]. \tag{3.39}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $0\le\rho\le R+\varepsilon$. Тогда из (3.39) с учетом (3.34) приходим к формуле (3.32)

2. Пусть $\rho\ge R+\varepsilon$. Тогда из (3.39) с учетом (3.36) и (3.34) приходим к формуле (3.31).

Продолжим исследования. Пусть $0<\rho<R$. Тогда с помощью (3.17), (3.22), (3.26) и (3.32) получаем:

$$\varepsilon_\rho\left(\rho,t\right) = \frac{\partial u_\rho\left(\rho,t\right)}{\partial\rho} = \frac{\partial^2\Psi\left(\rho,t\right)}{\partial\rho^2} =$$

$$= \left(1+\nu\right)\alpha a\int_0^t\frac{\partial^2\tilde{T}(\rho,\tau)}{\partial\rho^2}d\tau + T_0\left(1+\nu\right)\alpha\left[H_\varepsilon\left(\rho\right) - \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho rH_\varepsilon\left(r\right)dr\right], \tag{3.40}$$

$$\varepsilon_\theta\left(\rho,t\right) = \frac{u_\rho\left(\rho,t\right)}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi\left(\rho,t\right)}{\partial\rho} =$$

$$= \left(1+\nu\right)\alpha a\int_0^t\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{T}(\rho,\tau)}{\partial\rho}d\tau + \frac{T_0\left(1+\nu\right)\alpha}{\rho^2}\int_0^\rho rH_\varepsilon\left(r\right)dr,$$

откуда находим:

$$\varepsilon_\rho\left(\rho,t\right) + \varepsilon_\theta\left(\rho,t\right) = \left(1+\nu\right)\alpha\tilde{T}\left(\rho,t\right). \tag{3.41}$$

Пусть теперь $\rho \geq R + \varepsilon$. В этом случае с помощью (3.17), (3.22), (3.26) и (3.31) имеем:

$$\varepsilon_\rho(\rho,t) = (1+\nu)\,\alpha a \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{T}(\rho,\tau)}{\partial \rho^2} d\tau - T_0\,(1+\nu)\,\alpha \frac{1}{\rho^2} \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r)\, dr, \qquad (3.42)$$

$$\varepsilon_\theta(\rho,t) = (1+\nu)\,\alpha a \int_0^t \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}(\rho,\tau)}{\partial \rho} d\tau + \frac{T_0\,(1+\nu)\,\alpha}{\rho^2} \int_0^{R+\varepsilon} r H_\varepsilon(r)\, dr.$$

Отсюда, с учетом (3.24), (3.15) и (3.13), получаем:

$$\varepsilon_\rho(\rho,t) + \varepsilon_\theta(\rho,t) = (1+\nu)\,\alpha \tilde{T}(\rho,t)\,. \qquad (3.43)$$

Из (3.40), (3.42) следует, что деформации $\varepsilon_\rho(\rho,t)$ и $\varepsilon_\theta(\rho,t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные любого порядка по ρ в E_2. Кроме того, функции $\varepsilon_\rho(\rho,t)$ и $\varepsilon_\theta(\rho,t)$ имеют нуль второго порядка в бесконечности (т. е. при $\rho \to \infty$) для любого $t \in (0,\infty)$.

С помощью (3.17), (3.19), (3.22), (3.31) и (3.32) можно показать, что:

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho(\rho,t) = -2G \tfrac{1}{\rho} \tfrac{\partial \Psi(\rho,t)}{\partial \rho}, \\ &\sigma_\theta(\rho,t) = -2G \tfrac{\partial^2 \Psi(\rho,t)}{\partial \rho^2}, \tau_{r\theta}(\rho,t) \equiv 0, \end{aligned} \qquad (3.44)$$

причем

$$\sigma_\rho(\rho,t) + \sigma_\theta(\rho,t) = -E\alpha \tilde{T}(\rho,t)\,. \qquad (3.45)$$

Из (3.17) и (3.44) следует, что напряжения $\sigma_\rho(\rho,t)$ и $\sigma_\theta(\rho,t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные любого порядка по ρ в E_2. Кроме того, функции $\sigma_\rho(\rho,t)$ и $\sigma_\theta(\rho,t)$ также, как деформации $\varepsilon_\rho(\rho,t)$ и $\varepsilon_\theta(\rho,t)$, имеют нуль второго порядка в бесконечности (т. е. при $\rho \to \infty$) для любого $t \in (0,\infty)$, что и следовало ожидать. Из (3.22), (3.31) и (3.32) следует также: смещение $u_\rho(\rho,t)$ непрерывно и имеет непрерывные производные любого порядка по ρ в E_2. Кроме того, функция $u_\rho(\rho,t)$ имеет нуль первого порядка в бесконечности (т. е. при $\rho \to \infty$).

4. Основные выводы. Анализируя результаты, полученные нами в данной работе приходим к следующим выводам:

1. В §2 нами показано (см. Утверждение 1), что критерием возникновения хрупкого разрушения в континуальной среде вдоль оси x = 0 является предельное значение модуля градиента деформации (2.12). Данный критерий нашел свое экспериментальное подтверждение (см. ниже, §5).

2. В §3 полученные нами формулы (3.34) и (3.38), справедливые в E_2, позволяют однозначно утверждать: критерием возникновения хрупкого разрушения при $T_0 > 0$ является предельное значение модуля градиента суммы главных деформаций

$$\left| grad\left[\varepsilon_\rho(\rho,t) + \varepsilon_\theta(\rho,t)\right]\right| \Big|_{\substack{\rho = R,\\ t = t_*}} = (1+\nu)\,\alpha \left|\frac{\partial \tilde{T}(\rho,t)}{\partial \rho}\right| \Bigg|_{\substack{\rho = R,\\ t = t_*}} = \theta \equiv const, \qquad (3.46)$$

так как в этом случае для любого $\rho \in (0,\infty)$ и для любого $t \in (0,\infty)$

$$\sigma_\rho(\rho,t) + \sigma_\theta(\rho,t) = -E\alpha \tilde{T}(\rho,t) < 0. \qquad (3.47)$$

3. Если $T_0 < 0$, то формулы (3.41) и (3.45) не позволяют однозначно указать критерий хрупкого разрушения. Здесь возможен один из двух случаев.

3.1. Либо при $\rho = R$ и при $t = t_1$ имеет место предельное значение модуля градиента суммы главных деформаций.

$$\left| grad \left[\varepsilon_\rho(\rho, t) + \varepsilon_\theta(\rho, t) \right] \right| \Big|_{\substack{\rho = R, \\ t = t_1}} = (1 + \nu)\, \alpha \left| \frac{\partial \tilde{T}(\rho, t)}{\partial \rho} \right| \Bigg|_{\substack{\rho = R, \\ t = t_1}} = \theta \equiv const. \quad (3.48)$$

3.2. Либо при $\rho = R$и при $t = t_2$ имеет место предельное значение суммы главных напряжений

$$\left[\sigma_\theta(\rho, t) + \sigma_\rho(\rho, t) \right] \Big|_{\substack{\rho = R, \\ t = t_2}} = -E\alpha \tilde{T}(R, t_2) = \sigma \equiv const > 0. \quad (3.49)$$

Очевидно, хрупкое разрушение будет определяться тем критерием, время наступления которого меньше.

Возникшая неопределенность в критерии разрушения при $T_0 < 0$ связана, по нашему мнению, с конечностью охлажденной области (предполагается, что остальная часть E_2 в начальный момент времени имеет нулевую температуру). Если известны эмпирические константы материала θ и σ и результаты аналитического решения, то взаимное соотношение четырех величин определяет причину разрушения.

5. Результаты эксперимента. Остроумные математические приемы успешно преодолевают разрывность функций, в отличие от среды, для которой эти функции материальны, и чрезмерно высокие градиенты нельзя выдержать чисто физически, что заканчивается разрывом материала. Нельзя выдержать именно при хрупком (упругом) разрушении, поскольку пластичность сглаживает градиенты. На основе наших наблюдений за трещинами на графите, силикатных и органических стеклах, можно предположить, что градиентный критерий не далек от реальной достоверности.

На приводимой фотографии показаны части разрушенных плоских образцов из силикатного стекла шириной 15–20 мм, толщиной 2 мм. Полоски стекла в свободном состоянии погружались в жидкий азот на глубину 3–4 мм. Полоски погружали в ванну с азотом вручную, и практически сразу раздавался лёгкий треск, и отколовшаяся нижняя часть полоски оказывалась на дне ванны. Никаких видимых внешних усилий на этой части полоски нет, как нет и запрещенных перемещений. Но в вертикальном направлении (т. е. вдоль оси Ox) создавался значительный градиент температуры, а следовательно, и градиент деформации на уровне поверхности азота (вдоль оси x = 0). В этом месте происходило хрупкое разрушение стекла, хотя, как показано в задаче 1 (§2), напряжение поперек трещины отсутствовало.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кулиев В. Д., Морозов Е. М. Градиентный деформационный критерий хрупкого разрушения // Доклады АН, 2016. Т. 470. № 5. С. 1–3.

[2] Левин В. А., Морозов Е. М. Нелокальный критерий разрушения. Конечные деформации // Доклады АН. 2002. Т. 386. № 1. С. 46–47.

[3] Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд. СПбГУ, 1997. 132 с.

[4] Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

[5] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.

[6] Кулиев В. Д. Сингулярные краевые задачи. М.: Физматлит, 2005. 720 с.

[7] Кулиев В. Д. В-метод К-класса задач термоупругости // Материалы Всероссийской научной школы-конференции "Механика предельного состояния и смежные вопросы" , посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.): в 2 ч. Ч. 2 / под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова, Ю. Н. Радаева. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2015. С. 208–215.

[8] Кулиев В.Д. К теории теплопроводности в конечном стержне // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3 (17). С. 21–45.

[9] Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

[10] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. II. М.: Физматлит, 2001. 864 с.

[11] Кулиев В. Д. Новая формула суммирования функциональных рядов и некоторые ее приложения (ч. I) // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 107–119.

[12] Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 1980, 232 с.

V. D. Kuliev, E. M. Morozov

GRADIENT DEFORMATION CRITERION OF BRITTLE FRACTURE. ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL RATIONALE FOR CONFIRMATION

Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Abstract. In [1], we propose a new criterion of destruction coming from the assumption that brittle fracture occurs when the deformation modulus of the gradient reaches the limit. In this study, shown in more detail that the module temperature gradient, and hence the deformation becomes significant in a thin boundary layer, where there is a sharp change in temperature. The solution of the new thermoelastic problem of a sharp change in temperature in a circular area. And it turned out that in the case of chilled curved border region E2, where E2 - Euclidean plane failure criterion is complicated and takes the form of a limit value of the sum of the gradient module main strains, or simply the sum of the principal stresses. The destruction will be determined by the criterion, which is less than the advance. It is also shown: in the case of a heated circular area in E2 criterion of brittle fracture continuum medium will limit the amount of principal strain gradient module. Presented preliminary results of an experiment with samples of the sudden change in temperature.

Keywords: Brittle fracture, fracture gradient deformation criterion, Cauchy problem, the Heaviside function, regularization of the initial temperature distribution, the logarithmic potential range.

Mirsalimov Vagif
`e-mail:` mir-vagif@mail.ru, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Azerbaijan Technical University, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.

REFERENCES

[1] Kuliev V. D., Morozov E. M. Gradient deformation criterion of brittle fracture. Reports of the Academy of Sciences, 2016. Vol. 470. № 5. P. 1–3. (in Russian).

[2] Levin V.A., Morozov E. M. Non-local failure criterion. Finite deformation. Reports of the Academy of Sciences. 2002. Vol. 386. № 1. S. 46–47. (in Russian).

[3] Morozov N. F., Petrov Y. Problems of dynamics fracture of solids. SPb.: Publishing. St. Petersburg State University, 1997, 132 p. (in Russian).

[4] Morozov N. F. Mathematical problems in the theory of cracks. M.: Nauka, 1984. 256 p. (in Russian).

[5] Sobolev S. L. Some applications of functional analysis in mathematical physics. M.: Nauka, 1988. 333 p. (in Russian).

[6] Kuliev V. D. Singular boundary value problems. M.: FIZMATLIT, 2005. 720 p. (in Russian).

[7] Kuliev V. D. The method of K-class thermoelasticity problems // Proceedings of the All-Russian Scientific School-Conference "Mechanics limit state and Related Topics"dedicated to 85th anniversary of Professor D. Ivlev (Cheboksary, 15-18 September 2015). 2 hours, Part 2 / ed. NF Morozov, BG Mironov, AV Manzhirov, N. Radaeva. Cheboksary: ??Chuvashia. state. ped. Univ, 2015. S. 208-215. (in Russian).

[8] Kuliev V. D. By the theory of heat conduction in the long rod // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: Mechanics limit state. 2013. № 3 (17). S. 21–45. (in Russian).

[9] VS Vladimirov, VV Zharinov equations of mathematical physics. M .: FIZMATLIT, 2004. 400 p. (in Russian).

[10] Fikhtengol'ts G. M. Course of differential and integral calculus: V 3 t T.II. M.: FIZMATLIT, 2001. 864 p. (in Russian).

[11] Kuliev V. D. new formula of summation of series of functions and some of its applications (ch. I) // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. AND I. Yakovlev. Series: mechanical limit state. Number 1, 2013. (15). P. 107–119. (in Russian).

[12] Tikhonov A. N., Vasil'eva A. B., Sveshnikov A. G. Differential equations. M.: Science, FIZMATLIT, 1980. 232 p. (in Russian).