Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 144–148

А. В. Балашникова, Б. Г. Миронов

О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено кручение неоднородных идеальнопластических стержней при произвольном условии пластичности. Определены характеристики исследуемых уравнений и соотношения вдоль характеристик, а также при некоторых частных случаях условия предельного состояния получены интегралы основных соотношений.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, неоднородность, кручение.

УДК: 539.375

Рассмотрим цилиндрический или призматический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xyz. Образующие стержня параллельны оси z. Предположим, что стержень состоит из неоднородного идеальнопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Положим, что напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y),\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \tag{1}$$

Условие пластичности запишем в виде

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \kappa(x, y), \tag{2}$$

а единственное уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Балашникова Анжелика Вениаминовна
`e-mail:` info3006@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.
Миронов Борис Гурьевич, доктор физико-математических наук, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 16-31-00511 мол_а).

Поступила 21.03.2016

Из наших предположений следует, что на контуре поперечного сечения стержня выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}. \tag{4}$$

Дифференцируя уравнение (2) по x, получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}. \tag{5}$$

Согласно (5) из уравнения равновесия (3) следует

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}. \tag{6}$$

Характеристики уравнения (6) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial \kappa}{\partial x}}. \tag{7}$$

Из (7) и (2) следует, что вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} - \frac{\partial \kappa}{\partial x} dx = 0, \ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} - \frac{\partial \kappa}{\partial y} dy = 0. \tag{9}$$

В общем случае соотношения (8), (9) могут быть проинтегрированы только численно. Рассмотрим некоторые частные случаи условия пластичности (2), для которых можно получить интегралы системы уравнений (8), (9).

Анизотропные стержни, т. е. условие пластичности (2) не зависит от x и y:

$$f\left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right) = \kappa_{01}, \tag{10}$$

где $\kappa_{01} = const$.

Известно [2], что уравнения (8), (9) в этом случае легко интегрируются. Характеристики есть прямые линии, уравнения которых имеют вид

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \tag{11}$$

а вдоль характеристик

$$\tau_{xz} = c_{11} = const, \ \tau_{yz} = c_{12} = const, \tag{12}$$

где $a_1 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\left(c_{11}, c_{12}\right), \ b_1 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\left(c_{11}, c_{12}\right), \ f\left(c_{11}, c_{12}\right) = 0, \ c_1 = const.$

Рассмотрим вектор градиента к кривой текучести (2)

$$\operatorname{grad} f\left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \bar{j},$$

где $\bar{i}, \bar{j}$ – единичные орты осей x и y.

Из (11) следует, что характеристики соотношения (6) ортогональны вектору градиента к кривой текучести.

Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) не зависит от x:

$$f\left(\tau_{xz}, \tau_{yz}\right) = \kappa\left(y\right). \tag{13}$$

В этом случае вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = c_{21}(y), \ \tau_{yz} = c_{22} = const, \tag{14}$$

где $f(c_{21}(y), c_{22}) = \kappa(y)$.

Уравнения характеристик имеют вид

$$x = -\int \frac{b_2(y)}{a_2(y)} dy + c_2, \tag{15}$$

где $a_2(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}(c_{21}(y), c_{22}, y)$, $b_2(y) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}(c_{21}(y), c_{22}, y)$, $c_2 = const.$

Рассмотрим случай, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$f(\varphi(y)\tau_{xz}, \psi(x)\tau_{yz}) = \kappa_{02}, \tag{16}$$

где $\kappa_{02} = const.$

В этом случае, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = \frac{c_{31}}{\varphi(y)}, \ \tau_{yz} = \frac{c_{32}}{\psi(x)}, \tag{17}$$

где $c_{31} = const$, $c_{32} = const$, $f(c_{31}, c_{32}) = \kappa_{02}$.

Уравнения характеристик определяются из соотношений

$$\int \frac{a_3}{\psi(x)} dx + \int \frac{b_3}{\varphi(y)} dy = c_3, \tag{18}$$

где $a_3 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(c_{31}, c_{32})$, $b_3 = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(c_{31}, c_{32})$, $c_3 = const$, $\xi_1 = \varphi(y)\tau_{xz}$, $\xi_2 = \psi(x)\tau_{yz}$.

В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \kappa_0 + \kappa_1(x) + \kappa_2(y), \tag{19}$$

где $f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = f_1(\tau_{xz}) + f_2(\tau_{yz}), \kappa_0 = const$, κ_1, κ_2—некоторые функции соответственно от x и y, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{xz} = c_{41}(y), \tau_{yz} = c_{42}(\alpha), \tag{20}$$

где $f_1(c_{41}(y)) + f(c_{42}(x)) = \kappa_0 + \kappa_1(x) + \kappa_2(y)$.

Характеристики определяются из уравнения

$$\int \frac{dx}{m(x)} + \int \frac{dy}{n(y)} = c_4, \tag{21}$$

где $c_4 = const$, $\quad m(x) = \frac{df_2}{d\tau_{yz}}(c_{42}(x))$, $\quad n(y) = \frac{df_1}{d\tau_{xz}}(c_{41}(y))$,

В случае, когда условие пластичности (2) имеет вид

$$g_2(y) f_1(\tau_{xz}) + g_1(x) f_2(\tau_{yz}) = \kappa_{03}, \tag{22}$$

где $\kappa_{03} = const$, f_1, f_2, g_1, g_2—некоторые функции, вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\tau_{yz} = c_{52}(x), \tau_{xz} = c_{51}(y), \tag{23}$$

где $g_2(y)c_{51}(y) + g_1(x)c_{52}(x) = \kappa_{03}$.

Характеристики определяются из уравнения

$$\int \frac{dx}{c_{53}(x) \cdot g_1(x)} + \int \frac{dy}{c_{54}(y) \cdot g_2(y)} = c_5, \tag{24}$$

где $c_5 = const$, $\quad c_{53} = \frac{df_2}{d\tau_{yz}}(c_{52}(x))$, $\quad c_{54} = \frac{df_1}{d\tau_{xz}}(c_{51}(y))$.

В случаях, когда через данную точку сечения стержня проходят две и более характеристики, возникает неопределенность в определении напряжений и невозможно построить непрерывные решения. Эта неопределенность устраняется введением линии разрыва напряжений. На линии разрыва напряжений нормальная к ней составляющая вектора касательного напряжения $\bar{\tau} = \tau_{xz}\bar{i} + \tau_{yz}\bar{j}$ непрерывна. Из этого условия получим соотношение для определения линии разрыва напряжений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}^{+} - \tau_{yz}^{-}}{\tau_{xz}^{+} - \tau_{xz}^{-}}, \tag{25}$$

где индексы "плюс" и "минус" наверху определяют соответственно компоненты напряжения слева и справа от линии разрыва напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

[2] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.

[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

[4] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 576–579.

A. V. Balashnikova, B. G. Mironov

TORSION OF NON-UNIFORM CYLINDRICAL AND PRISMATIC BARS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper considers the torsion inhomogeneous idealnoplasticheskih rods at an arbitrary condition plasticity. The characteristics of the studied equations and relations along characteristics, as well as some special cases the limiting conditions state obtained integrals of basic relations.

Keywords: power, flexibility, heterogeneity, torsion.

REFERENCES

[1] Bykovtsev G. I. Selected problematic issues of the mechanics of deformable media: Sat. articles. Vladivosok: Dal'nauka, 2002. 566 p. (in Russian).

Balashnikova Angelika Veniaminovna, Candidate of physico-mathematical Sciences, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Mironov Boris Gurevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[2] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. On the general relations of anisotropic torsion rod theory // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. № 4 (76). P. 108–112. (in Russian).

[3] Ivlev D. D. The theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).

[4] Ivlev D. D., Mironov B. G. On relations translational perfectly plastic anisotropy torsional // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 576–579. (in Russian).