

К. И. Быкова, М. И. Быкова, С. Е. Крупенко

**ОСТАТОЧНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЗА
ДИФРАГИРОВАННОЙ ВОЛНОЙ, ПОРОЖДЕННОЙ ПАДЕНИЕМ
ПРЕДЕЛЬНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ВЕРШИНУ
КЛИНОВИДНОГО ВЫРЕЗА**

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено напряженно-деформированное состояние упруговязко-пластического материала в окрестности вершины клиновидного выреза за дифрагированной волной, возникающей в результате прямого падения предельной упругой волны на вырез. Поведение перемещений и деформаций за дифрагированной поверхностью обладает особенностью, приводящей к сингулярности их значений в вершине клиновидного выреза и за дифрагированной поверхностью. Для устранения такой особенности вершина выреза аппроксимирована окружностью малого радиуса δ . Поведение напряжений и деформаций за фронтом дифрагированной волны, которые на фронте принимают значения, равные нулю, а производные по направлению нормали неограниченные, аппроксимировано линейным образом по значениям градиентов напряжений и деформаций на малом расстоянии ε от дифрагированного фронта. Градиенты напряжений и деформаций на расстоянии ε от дифрагированной волны приняты за интенсивность волны. В работе получено значение интенсивности дифрагированной волны в процессе ее распространения, а также распределение остаточных деформаций и значение динамических коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершины клиновидного выреза.

Ключевые слова: упругие волны, дифракция, клин, интенсивность напряжений, остаточные деформации.

УДК: 539.3,796.012.236

© Быкова К. И., Быкова М. И., Крупенко С. Е., 2016

Быкова Ксения Игоревна

e-mail: ksynichka_b@mail.ru, кандидат физико-математических наук, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина" г. Воронеж, Россия.

Быкова Мария Игоревна

e-mail: 477838@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Крупенко Светлана Евгеньевна

e-mail: anit_of@mail.ru, инженер, Воронежский опытный завод программного продукта, Воронеж, Россия.

Поступила 19.04.2016

Введение. Исследование статического предельного упругого состояния материала в окрестности вершины трещины опирается на определение J -интегралов и коэффициентов интенсивности напряжений K_1 и K_2 [8], [9], [10]. Динамическое напряженное состояние требует решения нестационарных волновых задач в окрестности вершины трещины, которые связаны с распространением, отражением и дифрагированием упругих волн.

В работах [2], [4], [5], [7], [8] проведен анализ напряженно – деформированного состояния за упругими дифрагированными волнами на клине в случае отражения гармонических волн [5], [7], [8] и волн слабого разрыва. В них показано, что по направлению оси симметрии клина интенсивность дифрагированных волн является максимальной и может достигать таких больших значений, что второй инвариант девиатора тензора напряжений за дифрагированной волной может превышать величину предела пластичности. Это заставляет для анализа такой ситуации использовать модель упруговязкопластического материала (EVP) в области за дифрагированной волной и исследовать остаточные пластические деформации в окрестности выреза, аппроксимируемого клином.

Приближенное представление деформирования материала за дифрагированной волной. Поведение перемещений и деформаций вблизи дифрагированной поверхности обладает особенностью на острие клина, а на фронте дифрагированной волнных градиент неограничен. Поэтому в качестве интенсивности дифрагированной волны выбирается ее значение w на некотором малом расстоянии ε за фронтом волны. На рис. 1 представлено схематическое изображение поведения скоростей перемещений вблизи дифрагированного фронта, из которого видно, что в качестве интенсивности можно выбирать скорости перемещения и градиенты скоростей перемещений в точке А ($w = u(\varepsilon)$, $w_1 = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{n=\varepsilon} = tg\alpha$).

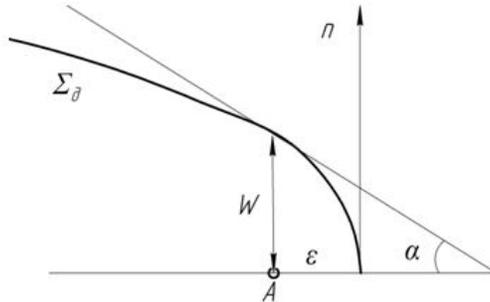


Рис. 1 Схематическое изображение поведения скоростей перемещений $u(n)$ за фронтом дифрагированной волны Σ_d

Построение решения уравнения “переноса” интенсивности упругих волн, дифрагированных от вершины клиновидного выреза. При использовании лучевого метода интенсивность волны на фронте в процессе его перемещения описывается дифференциальным уравнением “переноса”:

$$\delta W / \tilde{c} \delta t - \Omega W = F, \quad (1)$$

где W – интенсивность (скачок скорости) на переднем фронте волны,

$\Omega = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ – средняя кривизна переднего фронта, χ_1, χ_2 – главные кривизны переднего фронта, \tilde{c} – скорость переднего фронта волны, t – время, $\delta/\delta t$ – производная по времени, примененная к функции, заданной на переднем фронте бегущей волны. Для решения уравнения “переноса” (1) необходимо задание начальной интенсивности в момент зарождения фронта. Будем полагать, что дифрагированный фронт порождается отраженными волнами от цилиндра малого радиуса δ , заменяющего особую точку клина.

Для построения уравнения фронта отраженной волны в параметрическом виде возьмем точку M отраженной от цилиндра волны, радиус-вектор которой определяется суммой вектора \vec{OM}_0 точки зарождения этой волны и вектора \vec{MM}_0 как расстояния $\tilde{c}t$, пройденного фронтом волны по нормали к фронту волны в момент ее зарождения (рис. 2).

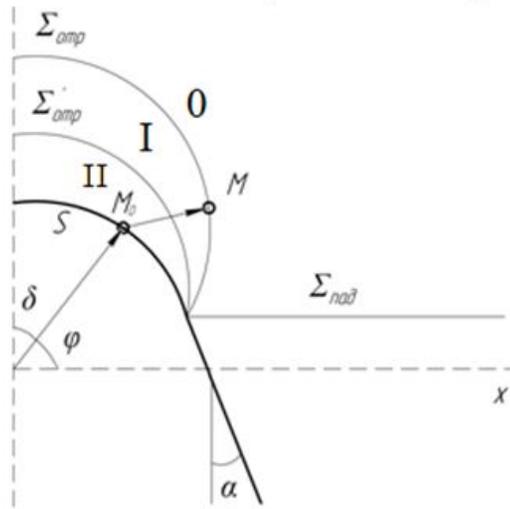


Рис. 2. Геометрия отражения продольной волны $\Sigma_{пад}$ от цилиндра

Имея это в виду, уравнение продольной отраженной волны запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos 2\varphi, \\ y = \delta \sin \varphi + \tilde{c}t \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (2)$$

Проведем вычисление главных кривизн дифрагированного фронта:

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{(\tilde{r}'' \times \tilde{r}'')^2}}{\sqrt{(\tilde{r}')^2}^3} \text{ и } \chi_2 = \frac{1}{\rho}. \text{ Так как } \rho \rightarrow \infty, \text{ то } \chi_2 = 0.$$

Дифференциальное уравнение “переноса” с учетом полученной кривизны примет вид

$$\frac{\delta W}{\tilde{c}\delta t} = \frac{W(\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi + 8\tilde{c}^2t^2)}{2(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \psi + 4\tilde{c}^2t^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Уравнение “переноса” является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, имеющим точное решение с учетом начальных условий:

$$\ln \frac{W}{W_0} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi + 8\tilde{c}^2t^2}{(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \psi + 4\tilde{c}^2t^2)^{3/2}} \tilde{c}\delta\tau. \quad (4)$$

Кривизна как величина, обратная расстоянию от поверхности до центра кривизны, есть скаляр, но поскольку мы рассматриваем развертывающиеся отраженные волны, то расстояние $\delta n = \tilde{c}\delta t$ откладывается в сторону, противоположную нормали, и поэтому в уравнении “переноса” $\tilde{c}\delta t$ берется со знаком “–”, или при положительном $\tilde{c}\delta t$ главная кривизна χ_1 будет отрицательной.

Для случая малых δ уравнение “переноса” легко интегрируется:

$$\ln \frac{W}{W_0} = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{8\tilde{c}^2t^2}{(4\tilde{c}^2t^2)^{3/2}} \tilde{c}\delta\tau = \frac{1}{2} \ln \frac{t_0}{t}, \quad (5)$$

отсюда

$$\frac{W}{W_0} = \sqrt{\frac{\tilde{c}t_0}{\tilde{c}t}} = \sqrt{\frac{n_0}{n}}, \quad (6)$$

где n – расстояние, пройденное волной за время t .

Расчет второго инварианта девиатора тензора напряжений в окрестности вершины клина в момент отражения падающей волны. Начальная интенсивность отраженных продольной и сдвиговой волн для регулярного случая определяется из условий совместности на фронтах падающей и двух отраженных волн в момент их зарождения и граничных условий отсутствия нормальных и касательных напряжений на внутренней поверхности окружности радиуса δ для случая свободной поверхности клиновидного выреза в упругом пространстве. Заметим, что коэффициенты отражения продольной и сдвиговой волн зависят только от упругих параметров материала и угла φ , являющегося угловым параметром, не зависящим от времени распространения отраженных волн, поэтому коэффициенты отражения не входят под знак интеграла в выражении для интенсивности волны в процессе ее распространения.

Далее рассмотрим закономерности отражения падающей на окружность продольной волны, воспользовавшись материалом работы [4].

Рассмотрим случай отражения плоской продольной волны Σ от границы свободного от напряжения полупространства в системе координат, движущейся вдоль границы вправо со скоростью $\frac{c_1}{\sin \varphi}$, где φ – угол между поверхностью падающей волны и границей полупространства. Как следует из закона Снелла, $\sin \varphi = \frac{c_2 \sin \varphi'}{c_1}$, где φ' – угол между сдвиговой волной и границей отраженной поверхности.

Предположим, что материал перед волной Σ находится в покое и не напряжен. Тогда упругое напряженное состояние за падающей волной Σ определяется условиями совместности для напряжений и скоростей на фронте сильной волны [3], [6]:

$$-c_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda\delta_{ij} + 2\mu N_i N_j)\omega_n, \quad [v_i] N_i = \omega_n, \quad [v_i] = \omega_n N_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $\mu = \rho c_2^2$, $\lambda + 2\mu = \rho c_1^2$, $\lambda = \rho c_1^2 - 2\rho c_2^2 \geq 0$, откуда $\frac{c_2^2}{c_1^2} \leq \frac{1}{2}$.

В случае покоя материала перед фронтом дифрагированной волны $[\sigma_{ij}] = -\sigma_{ij}^0$.

Скачки скоростей и напряжений на отраженных волнах Σ_1 и Σ_2 в окрестности точки M связаны соотношениями

$$-c_1 [\sigma_{ij}]_I = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \omega^I, [v_i]_I = \omega^I n_i^I, n_i^I n_i^I = 1, \quad (8)$$

$$-c_2 [\sigma_{ij}]_{II} = \mu (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \omega^{II}, [v_i]_{II} = \omega^{II} \tau_i^{II}, \tau_i^{II} \tau_i^{II} = 1, \tau_i^{II} n_i^{II} = 0. \quad (9)$$

При этом

$$[\sigma_{ij}^I] = \sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^I, [\sigma_{ij}^{II}] = \sigma_{ij}^I - \sigma_{ij}^{II}. \quad (10)$$

Дополним систему полученных уравнений (7)–(9) граничными условиями:

$$\sigma_{ij}^S n_j = 0, \text{ то есть } \sigma_{ij}^{II} n_j = 0. \quad (11)$$

Заметим, что $\vec{N} = (0, -1, 0)$, $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, $\vec{n}^I = (\sin 2\varphi, -\cos 2\varphi, 0)$, $\vec{n}^{II} = (\sin(\varphi + \varphi'), -\cos(\varphi + \varphi'), 0)$, $\vec{\tau}^{II} = (\cos(\varphi + \varphi'), \sin(\varphi + \varphi'), 0)$.

Система линейных уравнений для интенсивностей ω^I , ω^{II} сводится к двум линейным алгебраическим уравнениям:

$$\begin{cases} \lambda \cos \varphi + (\lambda \cos \varphi + 2\mu \sin 2\varphi \sin \varphi) k_1 + \frac{c_1}{c_2} \mu \sin(\varphi + 2\varphi') k_2 = 0, \\ \lambda \sin \varphi + 2\mu \sin \varphi + (\lambda \sin \varphi - 2\mu \cos 2\varphi \sin \varphi) k_1 + \frac{c_1}{c_2} \mu (-\cos(\varphi + 2\varphi')) k_2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь $k_1 = \frac{\omega^I}{\omega_n^0}$, $k_2 = \frac{\omega^{II}}{\omega_n^0}$.

Решение системы примет вид

$$k_1 = \frac{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 - 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 + 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}, \quad (13)$$

$$k_2 = \frac{-2 \frac{c_2}{c_1} \sin 2\varphi \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)}{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 + 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}. \quad (14)$$

На рис. 3 представлены графики относительной интенсивности $\frac{\omega^I}{\omega_n^0}$ продольной дифрагированной волны на острие клина в зависимости от направления φ , $\varphi \in (0, \pi)$. Значение $\frac{\omega^I}{\omega_n^0}$ рассчитано на поверхности цилиндра малого радиуса δ при $\delta \rightarrow 0$, и это значение $\frac{\omega^I}{\omega_n^0}$ является ее начальным значением. При распространении продольной дифрагированной волны с увеличением $\frac{c_2}{c_1}$ от значений $\frac{c_2}{c_1} = 0, 4$ до $\frac{c_2}{c_1} = 0, 5$ дифрагированное излучение $\frac{\omega^I}{\omega_n^0}$ становится более направленным по фронту в направлении $\varphi = \pi/2$.

Как и следовало ожидать, максимальное значение, равное 1, коэффициент k_1 принимает при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, минимальное $k_1 \neq 0$ – при $\varphi \neq 0$, что не противоречит результатам [1], [5], [7], полученным для случая падения и отражения гармонических волн.

На рис. 4 представлен график значений коэффициента относительной интенсивности $k_2 = \frac{\omega^{II}}{\omega_n^0}$ отраженной сдвиговой волны, который отражает симметрию интенсивности отраженной волны Σ_2 при $\varphi \in [\pi/2, \pi]$, из которого также следует, что максимальное значение интенсивности сдвиговой волны k_2 достигается при $\varphi \approx \frac{\pi}{6}$ и мало зависит от $\frac{c_2}{c_1}$, но само максимальное значение k_2 увеличивается от 0,3 до 0,8 с увеличением $\frac{c_2}{c_1}$ от 0,4 до 0,5.

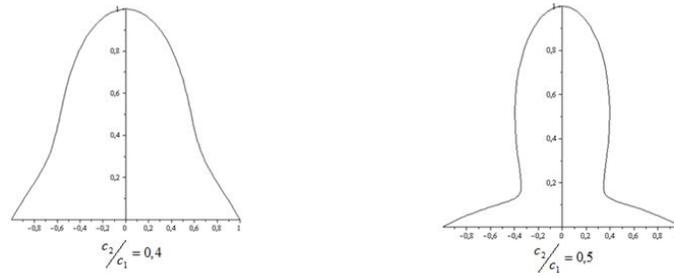


Рис. 3. График значений коэффициента $k_1 = \omega^I / \omega_n^0$ в полярных координатах

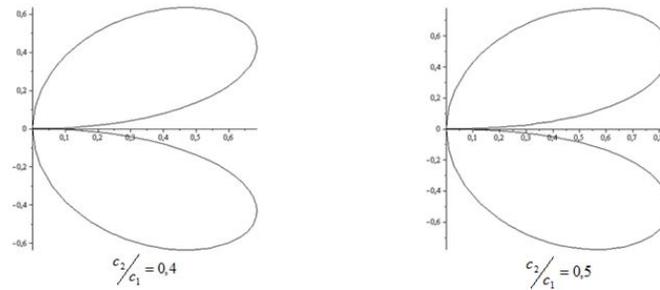


Рис. 4. График значений коэффициента относительной интенсивности $k_2 = \omega^{II} / \omega_n^0$ отраженной сдвиговой волны в полярных координатах

Второй инвариант девиатора тензора напряжений определяется выражением для зоны I:

$$I_2^I = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = (\sigma_{ij}^0 - [\sigma'_{ij}]) (\sigma_{ij}^0 - [\sigma'_{ij}]) = \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 - 2\sigma_{ij}^0 [\sigma'_{ij}] + [\sigma'_{ij}] [\sigma'_{ij}]. \quad (15)$$

Подставив значения скалярных произведений в (13), получим:

$$I_2^I = \frac{8\mu^2}{3c_1^2} \left((\omega_n^0)^2 + 3 \left(-\frac{1}{3} + \cos^2 2\varphi \right) \omega_n^0 \omega^I + (\omega^I)^2 \right), \quad (16)$$

$$K_1 = \frac{I_2^I}{I_2^0} = 1 + 3 \left(-\frac{1}{3} + \cos^2 2\varphi \right) k_1 + k_1^2. \quad (17)$$

На рис. 5, 6 представлены графики интенсивности напряженного состояния за отраженными продольной и сдвиговой волнами вблизи вершины. Наибольшее значение интенсивности напряженного состояния достигается в вершине клина при $\varphi = \pi/2$ за отраженной продольной и отраженной сдвиговой волнами, что в случае падения предельной пластической волны ведет к увеличению максимального касательного напряжения и к необходимости учета пластической деформации вблизи вершины клина. Заметим, что $K_1(\pi/2) = 4$ и $K_2(\pi/2) = 4$.

Интенсивность падающей предельной продольной волны определим из условия пластичности Мизеса: $I_2^{II} = \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 2k_0^2$, подставив в него значения σ_{ij}^I , получим: $\omega_n^0 = \frac{\sqrt{3}k_0}{2\mu}$.

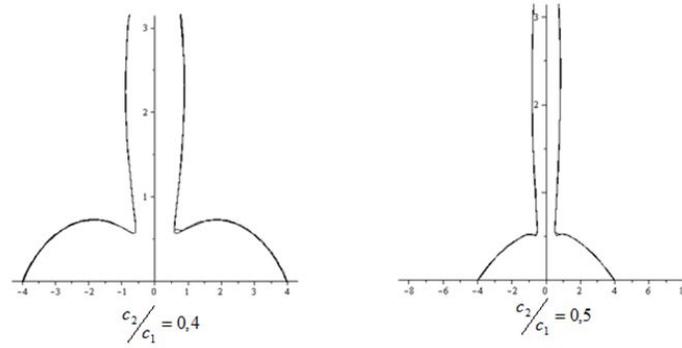


Рис. 5. График относительной интенсивности $K_1 = I_2^I/I_2^0$, напряженного состояния за отраженной продольной волной в полярной системе координат

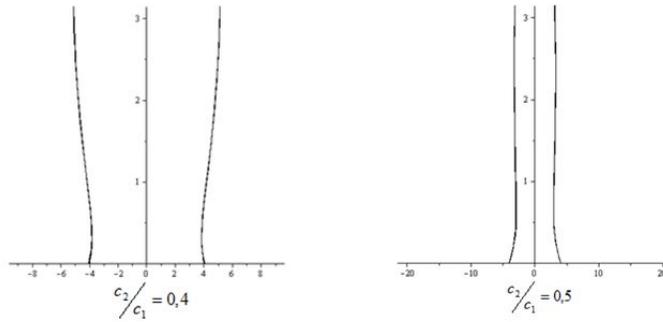


Рис. 6. График относительной интенсивности $K_2 = I_2^{II}/I_2^0$, напряженного состояния за отраженной сдвиговой волной в полярной системе координат

Распределение остаточных пластических деформаций за дифрагированной волной при падении на клиновидный вырез. Рассмотрим далее распределение остаточных пластических деформаций за дифрагированной волной на клине, используя полученные в работе [2] значения кривизны дифрагированной волны в зависимости от выбранного направления φ (рис.7) в предположении падения на клин продольной упругой волны заданной интенсивности.

В работе [2] значения $I_2^0(\varphi)$ вычислены за продольной сдвиговой волной так, что имеет место возможность рассчитать остаточные деформации в областях I, II (рис. 2).

Для определения остаточных продольных деформаций e_{nn} за продольной дифрагированной волной на клине для случая коротких волн воспользуемся приближенным выражением, приведенным в [4]:

$$e_{nn} = -I_2^0(\varphi) \frac{\alpha}{\mu} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot e^{-\frac{\alpha n}{c_1}}, \quad (18)$$

где λ , μ – упругие параметры Ламе, η – коэффициент вязкости, $\alpha = 4\mu^2/3\eta\rho c_1^2$, $\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$, $n = c_1 t$ – расстояние, пройденное волной от вершины

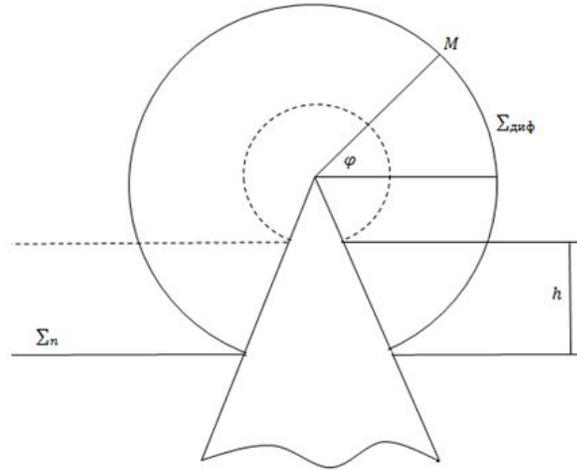


Рис. 7. Схематическое изображение падающей на клиновидный вырез волны и дифрагированной волны

клина, I_2^0 – предельное граничное значение второго инварианта девиатора тензора напряжений за дифрагированной волной вблизи ее отражения от свободной поверхности в виде окружности малого радиуса, заменяющей особую точку клина.

Представление остаточных деформаций за продольной волной $\Sigma^{I'}$ с учетом знания второго инварианта девиатора тензора напряжений в начальный момент отражения в зависимости от направления φ позволяет записать выражение для e_{nn} в виде

$$e_{nn} = -\frac{8}{3}\mu^2 \frac{(\omega_n^0)^2}{c_1^2} \left(1 + 3 \left(-\frac{1}{3} + \cos^2 2\varphi \right) k_1 + k_1^2 \right) \frac{\alpha}{\mu} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot e^{-\frac{\alpha n}{c_1}},$$

где ω_n^0 – начальная интенсивность падающей продольной предельной волны, а k_1 – коэффициент отражения продольной волны от вершины клина в форме цилиндра малого радиуса (11).

На рис. 8 представлены графики распределения остаточных деформаций e_{nn} за дифрагированной продольной волной в зависимости от направления φ и расстояния, отсчитываемого от вершины клина.

Визуально наблюдается одно направление $\varphi = 0$ наибольшей пластической деформации, а при $c_2/c_1 > 0,6$ возможно и второе направление локального минимума по φ пластической деформации.

Анализ значений второго динамического коэффициента интенсивности напряжений за дифрагированной волной показывает, что его значение значительно меньше первого коэффициента, то есть можно сделать вывод, что при падении плоской волны на клин за дифрагированной волной реализуется трещина пластического сдвига ($K_1 > K_2$).

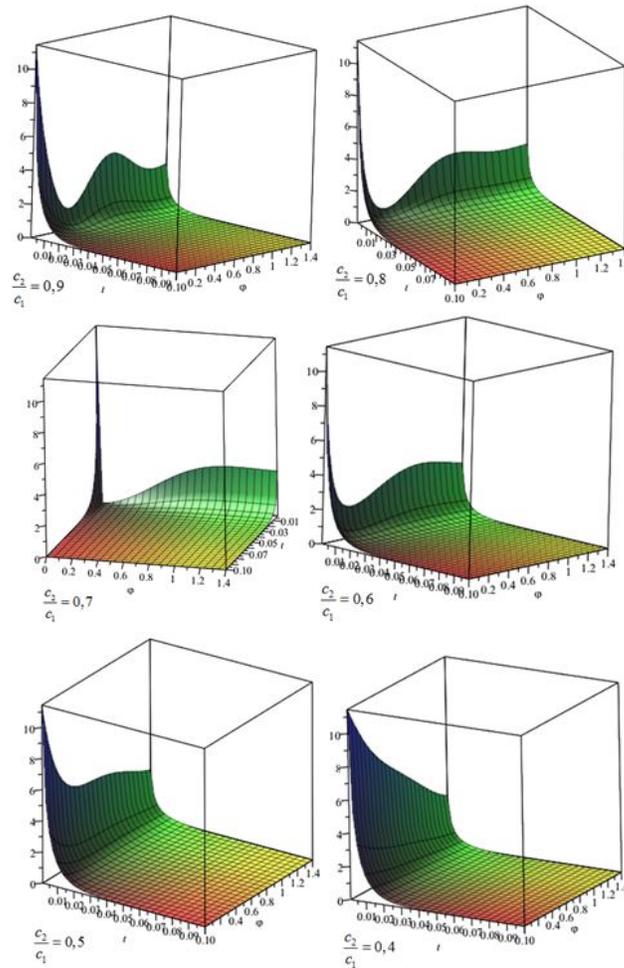


Рис. 8. Графики распределения остаточных деформаций за дифрагированной продольной волной в зависимости от направления φ и расстояния, отсчитываемого от вершины клина

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабич В. М., Лялинов М. А., Грикуров В. Э. Метод Зоммерфельда–Малюжинца в теории дифракции. СПб. ВВМ, 2004. 103 с.
- [2] Быкова К. И., Вервейко Н. Д., Просветов В. И. Дифракция плоской продольной упругой волны на клине и конусе // Всероссийская научная школа-конференция “Механика предельного состояния и смежные вопросы”, посвященная 85-летию профессора Д. Д. Ивлева. Чебоксары, 2015. Ч. 2. С. 239–244.
- [3] Быковцев Г. И., Калужин Л. Д., Кретова А. А. О распространении волн в трехмерных упругопластических телах при условии полной пластичности // Инж. журнал МТТ. 1967. № 3.
- [4] Вервейко Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидродара. Воронеж: Изд-во Воронежского госуниверситета, 1997. 204 с.
- [5] Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 308с.

- [6] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
- [7] Исраилов М. Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: Издательство МГУ, 1999. 208 с.
- [8] Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
- [9] Патрон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
- [10] Rice J. R. Some remarks on elastic crack tip stress fields // Int. J. Solids and structure. Vol. 8. 1972. P. 751–758.

K. I. BYKOVA, M. I. BYKOVA, S. E. KRUPENKO

**RESIDUAL PLASTIC DEFORMATION BEHIND A DIFFRACTED WAVE
GENERATED BY THE FALL OF THE LIMIT ELASTIC WAVE TO THE TOP
OF THE WEDGE-SHAPED CUT**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. The work is devoted to the investigation of the deformed state of an elastoviscoplastic material in a neighborhood of the top of the wedge-shaped cut behind diffracted wave arising as a result of directed fall of the limit elastic wave on the wedge-shaped cut. The behavior of displacements and strains has features for a diffracted surface. It leads to a singularity of their values at the top of the wedge-shaped cut and behind the diffracted surface. To resolve this features the top of the wedge-shaped cut is approximated by a circle of small radius. The behavior of the stresses and strains is approximated by a linear way on the values of the gradients of stresses and strains at a small distance from the diffracted front behind the front of the diffracted wave.

Stresses and strains take values equal to zero at the front, but derivatives are unlimited along the normal. The gradients of stresses and strains are taken as the intensity of the wave on a small distance from the diffracted wave.

In this paper we obtained a value of intensity of a diffracted wave in the process of its distribution and the distribution of residual strains and value of dynamic stress intensity factors in the neighborhood of the top of the wedge-shaped cut.

Keywords: elastic waves, diffraction, wedge, intensity of stress, residual deformation.

REFERENCES

- [1] Babich V. M., Ljalinov M. A., Grikurov V. Je. Metod Zommerfel'da-Maljuzhinca v teorii difrakcii. SPb. VVM, 2004. 103 s. (in Russian).
- [2] Bykova K. I., Vervejko N. D., Prosvetov V. I. Difrakcija ploskoj prodol'noj uprugoj volny na kline i konuse // Vserossijskaja nauchnaja shkola-konferencija "Mehanika

Bykova Ksenya Igorevna, Candidate of physico-mathematical Sciences, Military educational scientific center of air forces "Air force Academy named after Professor A. E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin", Voronezh, Russia.

Bykova Mariya Igorevna, Candidate of physico-mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Krupenko Svetlana Evgenevna, experienced engineer of plant software product, Voronezh, Russia.

predel'nogo sostojanija i smezhnye voprosy", posvjashhennaja 85-letiju professora D. D. Ivleva. Cheboksary. 2015. Ch. 2. S. 239–244. (in Russian).

[3] Bykovcev G. I., Kaluzhin L. D., Kretova A. A. O rasprostranении voln v trehmernyh uprugoplasticheskikh telah pri uslovii polnoj plastichnosti // Inzh. zhurnal MTT. 1967. № 3. (in Russian).

[4] Vervejko N. D. Luchevaja teorija uprugovjazkoplasticheskikh voln i voln gidroudara. Voronezh: Izd-vo Voronezhskogo gosuniversiteta, 1997. 204 s. (in Russian).

[5] Guz' A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. Difrakcija uprugih voln. Kiev: Naukova dumka, 1978. 308 s. (in Russian).

[6] Ivlev D. D. Mehanika plasticheskikh sred. T. 1. M.: Fizmatlit, 2001. 448 s. (in Russian).

[7] Israilov M. Sh. Dinamicheskaja teorija uprugosti i difrakcija voln. M.: Izdatel'stvo MGU, 1999g. 208 s. (in Russian).

[8] Parton V. Z., Boriskovskij V. G. Dinamika hrupkogo razrushenija. M.: Mashinostroenie, 1988. 240 s. (in Russian).

[9] Patron V.Z, Morozov E. M. Mehanika uprugo-plasticheskogo razrushenija. M.: Nauka; glavnaia redakcija fiz.-mat. lit-ry, 1974. 416 s. (in Russian).

[10] Rice J. R. Some remarks on elastic crack tip stress fields // Int. J. Solids and structure. Vol. 8. 1972. P. 751–758. (in Russian).