Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 169–175

Т. Г. Долгова, Б. Г. Миронов

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Работа посвящена исследованию кручения неоднородного призматического стержня с прямоугольным сечением в случае, когда предел текучести обратно пропорционален координате y.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, неоднородность, кручение.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим цилиндрический или призматический стержень, ориентированный в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z. Образующие стержня параллельны оси z. Предположим, что стержень состоит из неоднородного идеальнопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Предположим, что напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент:

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,\ y)\,,\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,\ y)\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Условия пластичности в общем случае запишем в виде

$$f(\tau_{xz},\, \tau_{yz}) = k^2(x, y), \tag{2}$$

где $k\,(x, y) \geq 0$,

а единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Дифференцируя уравнение (2) по x, получим

Долгова Татьяна Геральдовна
`e-mail:` info3006@yandex.ru, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.
Миронов Борис Гурьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.04.2016

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}=\frac{\partial k^2}{\partial x}, \tag{4}$$

где

$$\frac{\partial k^2}{\partial x}=2k\frac{\partial k}{\partial x}. \tag{5}$$

Согласно (4) из уравнения равновесия (3) следует

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=\frac{\partial k^2}{\partial x}, \tag{6}$$

Характеристики уравнения (6) определяются соотношениями

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}=-\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}=\frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial k^2}{\partial x}}. \tag{7}$$

Из соотношений (7) имеем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}. \tag{8}$$

Вдоль характеристик (8) справедливо соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}d\tau_{yz}-\frac{\partial k^2}{\partial x}dx=0. \tag{9}$$

Тогда из (2) и (9) следует, что справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}d\tau_{xz}-\frac{\partial k^2}{\partial y}dy=0. \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда условие пластичности не зависит от x, т. е.

$$f\left(\tau_{xz},\tau_{yz}\right)=k^2\left(y\right). \tag{11}$$

Согласно (11) из (9), (10) получим

$$\tau_{yz}=c_{22}-const, \tag{12}$$

$$\tau_{xz}=c_{21}\left(y\right), \tag{13}$$

где $c_{21}\left(y\right), c_{22}$ удовлетворяет условию

$$f\left(c_{21}\left(y\right),c_{22}\right)=k^2\left(y\right). \tag{14}$$

Пусть

$$f\left(\tau_{xz},\tau_{yz}\right)=\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2. \tag{15}$$

Тогда условие пластичности (14) запишем в виде

$$\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2=k^2, \tag{16}$$

а характеристики определяются из соотношения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\tau_{xz,}}{\tau_{yz,}}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что характеристики ортогональны вектору касательного напряжения $\vec{i} = \tau_{xz}\vec{i} + \tau_{yz}\vec{j}$.

Из наших предположений следует также, что вектор $\vec{i}$ на контуре поперечного сечения направлен по касательной к ней.

Пусть

$$k = \frac{1}{k_0 + ay}. \tag{18}$$

Согласно (18) из (16) получим:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \frac{1}{(k_0 + ay)^2}. \tag{19}$$

Учитывая (18) из (12),(13),(14) получим:

$$\begin{aligned} &\tau_{yz} = c_{22}, \\ &\tau_{xz} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{(k_0+ay)^2} - c_{22}^2} = c_{21}\left(y\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Характеристики уравнения (6) определяются из соотношения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = -\frac{c_{21}\left(y\right)}{c_{22}} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{(k_0+ay)^2} - c_{22}^2}}{c_{22}} \tag{21}$$

и имеют вид

$$x = \pm\int \frac{c_{22}}{\sqrt{\frac{1}{(k_0+ay)^2} - c_{22}^2}}dy \tag{22}$$

или

$$\begin{aligned} &x = -\int\limits_b^y \frac{2c_{22}}{\pm 2\sqrt{\frac{1}{(k_0+ay)^2} - c_{22}^2}}dy = x_0 - c_{22}\int\limits_b^y \frac{dy}{\pm\sqrt{\frac{1-c_{22}^2(k_0+ay)^2}{(k_0+ay)^2}}} = \\ &= x_0 - c_{22}\int\limits_b^y \frac{(k_0+ay)dy}{\pm\sqrt{1-c_{22}^2(k_0+ay)^2}} = x_0 \pm \frac{1}{ac_{22}}\left(\sqrt{1 - c_{22}^2\left(k_0 + ay\right)^2}\right) \\ &-\sqrt{1 - c_{22}^2\left(k_0 + ay\right)^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

2. Рассмотрим кручение призматического стержня, контур поперечного сечения которого представляет собой прямоугольник (рис. 1).

$$\begin{cases} -c \le x \le c \\ -d \le y \le d. \end{cases} \tag{24}$$

В силу наших предположений вектор касательного напряжения $\vec{i}$ направлен по касательной к контуру поперечного сечения стержня.

На границе АВ $y = -d$:

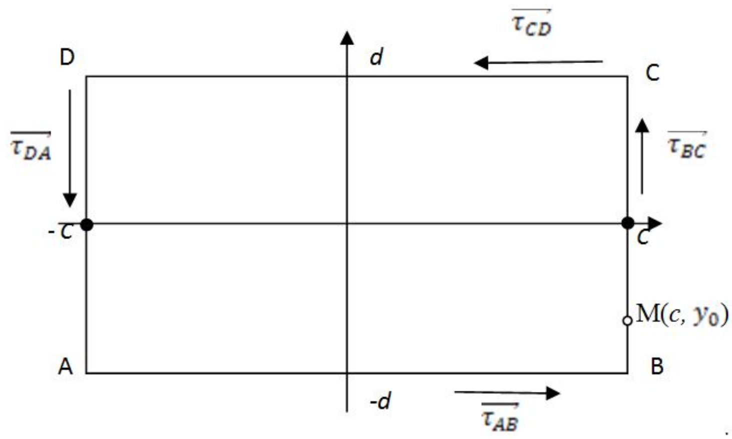

Рис. 1

$$\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = \frac{1}{k_0 - ad}. \tag{25}$$

Характеристики (22) примут вид (рис. 2)

$$x = const, \tag{26}$$

а вдоль характеристик справедливы соотношения

$$\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = \frac{1}{k_0 + ay}. \tag{27}$$

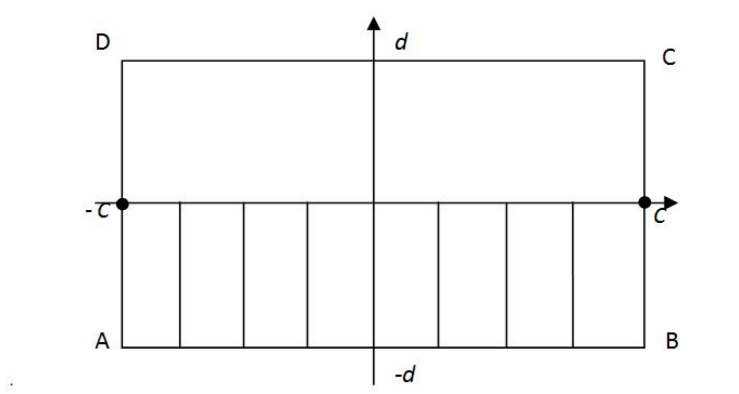

Рис. 2

На границе BC $x = c$:

$$\tau_{xz} = 0, \tag{28}$$

$$\tau_{yz} = k_0 + ay_0, \tag{29}$$

где $M\ (c, y_0) \in BC$.

Отсюда следует, что вдоль характеристик

$$\tau_{xz} = -\sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - \frac{1}{(k_0 + ay_0)^2}} = 0, \tag{30}$$

Характеристика определяется в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{(k_0+ay)^2} - \frac{1}{(k_0+ay_0)^2}}}{\frac{1}{k_0+ay_0}}. \tag{31}$$

Отсюда следует (рис. 3)

$$(x - c)^2 + \left(y + \frac{k_0}{a}\right)^2 = \left(y_0 + \frac{k_0}{a}\right)^2. \tag{32}$$

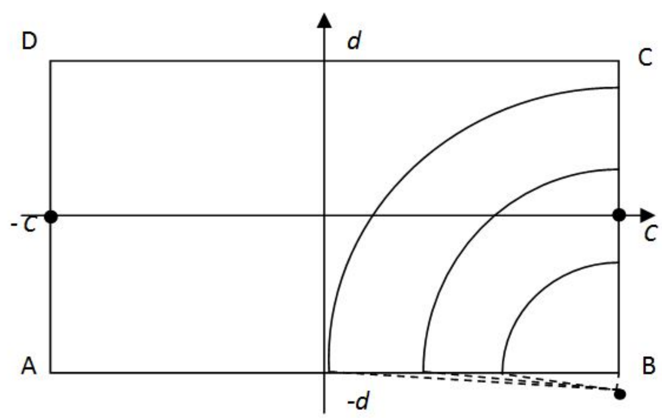

Рис. 3

На границе CD $y = d$:

$$\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = -\frac{1}{k_0 + ad}. \tag{33}$$

Характеристики (22) имеют вид (рис. 4)

$$x = const, \tag{34}$$

а вдоль характеристик справедливы соотношения

$$\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = -\frac{1}{k_0 + ay}. \tag{35}$$

На границе DA $x = -c$:

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{k_0 + ay_0}, \tau_{xz} = 0. \tag{36}$$

Следовательно, вдоль характеристик

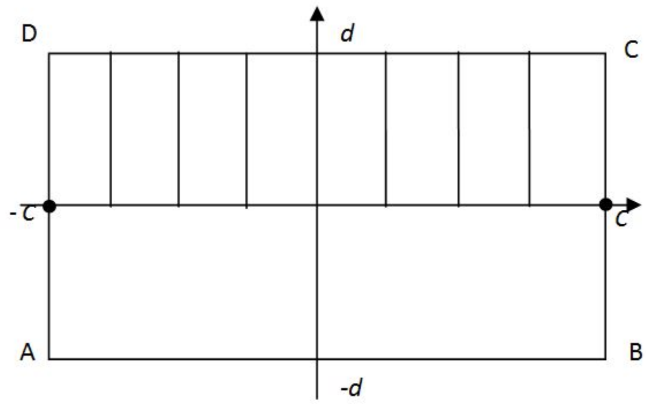

Рис. 4

$$\tau_{xz} = \sqrt{\frac{1}{(k_0 + ay)^2} - \frac{1}{(k_0 + ay_0)^2}}, \tau_{yz} = -\frac{1}{k_0 + ay_0}. \quad (37)$$

Уравнение характеристик имеет вид (рис. 5)

$$(x + c)^2 + \left(y + \frac{k_0}{a}\right)^2 = \left(y_0 + \frac{k_0}{a}\right)^2. \quad (38)$$

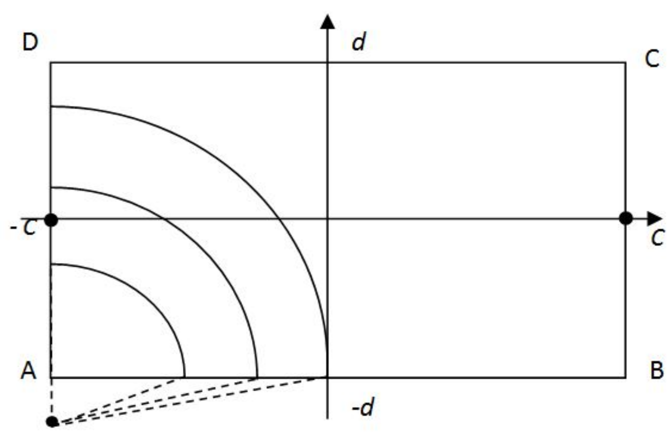

Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

[1] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2014. № 4 (22). С. 236–240.

[2] Быковцев Г. И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

[3] Миронов Б. Г., Деревянных Е. А. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.

[4] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

[5] Ивлев Д. Д., Миронов Б. Г. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. Т. 3. № 2 (8). С. 576–579.

T. G. Dolgova, B. G. Mironov

ON THE ISSUE OF NON-UNIFORM TORSION BARS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. Work is devoted to research of inhomogeneous torsion prismatic rod with a rectangular cross section in the case where the limit the yield is inversely proportional to the coordinate y.

Keywords: power, flexibility, heterogeneity, torsion.

REFERENCES

[1] Mironov B. G. On the theory of nonuniform torsion bars // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2014. № 4 (22). P. 236–240. (in Russian).

[2] Bykovtsev G. I. Selected problematic issues of the mechanics of deformable media: Sat. articles. Vladivostok: Dal'nauka, 2002. 566 p. (in Russian).

[3] Mironov B. G., Derevjannyh E. A. On the general relations of anisotropic torsion rod theory // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. № 4 (76). P. 108–112. (in Russian).

[4] Ivlev D. D. The theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian).

[5] Ivlev D. D., Mironov B. G. On relations translational perfectly plastic anisotropy torsional // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2010. Vol. 3. № 2 (8). P. 576–579. (in Russian).

Dolgova Tatyana Geraldovna, Graduate Student of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Mironov Boris Gurevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.