

Божанов П. В., Полтавец П. А., Трещев А. А.

**ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН,
ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ МАТЕРИАЛОВ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ
К НАВОДОРОЖИВАНИЮ**

(Тульский государственный университет)

Проникая в объем конструктивных элементов, агрессивные среды, как правило, приводят к значительным изменениям механических характеристик материалов и сокращению сроков службы сооружений и аппаратов. Прямоугольные пластины как элементы сооружений, приборов и аппаратов являются довольно распространенными элементами конструкций, работающими в этих средах. Разрушение деталей происходит под совместным воздействием нагрузки и среды, представляющей собой физико-химические процессы, возникающие на поверхности и распространяющиеся вглубь объема исследуемых элементов. В таких отраслях промышленности, как энергетическая, космическая, нефтеперерабатывающая, химическая, металлургическая, как правило, рабочей средой оказывается водородсодержащая.

Титановые сплавы, изначально не обладая чувствительностью к виду напряженного состояния, в процессе насыщения водородом (наводороживания) приобретают свойства разносопротивляемости, которые меняются в течение времени, что приводит к снижению пределов текучести и раннему разрушению.

Изучение свойств и поведения материалов с начальной и наведенной разносопротивляемостью показало, что ощутимые эффекты, возникающие в работе конструкций, обнаруживаются лишь при сложном напряженно-деформированном состоянии. Ярким примером такого состояния является изгиб пластин, который представляет большой интерес с позиции теории разносопротивляющихся сред.

В предлагаемой работе построена математическая модель описания работы тонких пластинок из материалов, изначально не чувствительных к виду напряженного состояния и проявляющих свойства наведенной разносопротивляемости в процессе насыщения активной водородсодержащей средой, за пределом упругости. В качестве примера произведен расчет шарнирно-опертой по контуру прямоугольной пластины, выполненной из титанового сплава ТС5 и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. При этом в качестве условия пластичности использовалось следующее предложенное авторами [1] условие:

$$F(\mathbf{s}_{ij}, C) = t \cdot f(\mathbf{x}, C) = k_t(C), \quad (1)$$

где C – объемная концентрация водорода в теле конструкционного материала, в общем случае это функция времени и координат $C = C(x, y, z, t)$; $f(\mathbf{x}, C)$ – функция, учитывающая вид напряженного состояния и зависящая от концентрации агрессивной среды в ма-

териале; $k_t(C) = \sqrt{2/3}t_s(C)$; $t_s(C)$ – предел текучести при простом сдвиге; $f(0,C)=1$; $f(x,0)=1$.

Аппроксимация для функции пластичности $f(x,C)$ использовалась на основе предложенной авторами ранее [1, 63], но несколько уточненной в виде:

$$f(x,C) = a_1(C) + a_2(C) \cdot e^{a_3(C)x}, \quad (2)$$

где

$$a_1(C) = \frac{A_{10} + A_{11}\text{sign}x}{\frac{C+(A_{14}+A_{15}\text{sign}x)}{A_{16}+A_{17}\text{sign}x}} + A_{18} + A_{19}\text{sign}x,$$

$$A_{10} = 0,188245; A_{11} = -0,035555; A_{12} = 1; A_{13} = 0; A_{14} = -0,0346205;$$

$$A_{15} = -0,0234495; A_{16} = 0,01372735; A_{17} = 0,00462765;$$

$$A_{18} = 0,840205; A_{19} = 0,013305;$$

$$a_2(C) = \frac{A_{20} + A_{21}\text{sign}x}{\frac{C+(A_{24}+A_{25}\text{sign}x)}{A_{26}+A_{27}\text{sign}x}} + A_{28} + A_{29}\text{sign}x,$$

$$A_{20} = -0,106284; A_{21} = 0,117504; A_{22} = 0,5; A_{23} = -0,5;$$

$$A_{24} = -0,0055855; A_{25} = 0,0055855; A_{26} = -0,0096306;$$

$$A_{27} = -0,0187303; A_{28} = 0,080935; A_{29} = -0,092155;$$

$$a_3(C) = A_{30} + A_{31}\text{sign}x - (A_{32} + A_{33}\text{sign}x) \cdot C,$$

$$A_{30} = 2,120775; A_{31} = 1,497475; A_{32} = 3,79925; A_{33} = 30,04925.$$

Решение задачи упругопластического изгиба пластин проводится на основе теории малых упруго-пластических деформаций. При решении поставленной задачи принимаются следующие предпосылки:

1) используются обычные положения технической теории изгиба пластин – гипотеза прямых нормалей и гипотеза плоского напряженного состояния;

2) диаграммы напряжений-деформаций материалов имеют замкнутую площадку текучести, такую, чтобы применение концепции идеально упругопластического тела к рассмотренному материалу не вызывало возражений;

3) активное нагружение считается простым.

Рассматривается три стадии работы пластин: стадия упругих деформаций (рис.1, а); упругопластическая стадия с односторонней пластичностью (рис.1, б) и упругопластическая стадия с двусторонней пластичностью (рис.1, в).

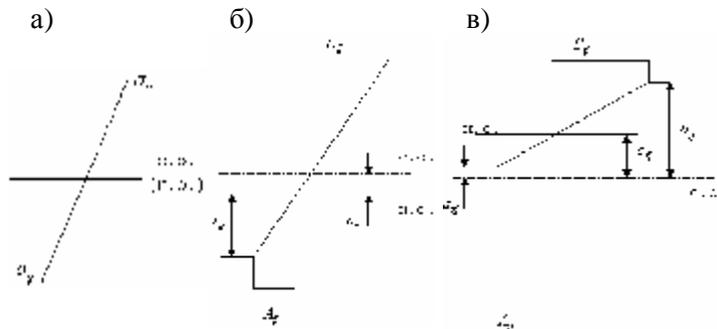


Рис. 1. Эпюры напряжений для трех стадий работы пластин

Для вывода разрешающего дифференциального уравнения воспользуемся уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0; \quad \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = 0; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - q = 0. \quad (3)$$

Геометрические соотношения для упругой стадии имеют вид:

$$m_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad m_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad m_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad e_{11} = z \cdot m_1; \quad e_{22} = z \cdot m_2; \quad g_{12} = 2 \cdot z \cdot m_{12}; \quad (4)$$

физические зависимости

$$M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right); \quad M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right); \quad M_{12} = -D(1-n) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (5)$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right); \quad Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \quad \text{где } D = \frac{E h^3}{12(1-n^2)}.$$

Рассматривая выражения (3) – (5) совместно, для упругой стадии получим известное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \frac{q}{D}. \quad (6)$$

С увеличением нагрузки и достижением напряженного состояния величины, соответствующей появлению пластичности в каких-либо волокнах, в рассматриваемой области начинает реализовываться упругопластическая стадия работы с односторонней пластичностью. Происходит смещение нейтральной оси сечения от серединной плоскости, и в серединной плоскости начинают развиваться деформации, и геометрические соотношения для произвольной точки приобретут следующую форму:

$$e_{11} = e_{11} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad e_{22} = e_{22} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad e_{12} = e_{12} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (7)$$

где e_{11}, e_{22}, e_{12} – деформации в серединной плоскости пластины.

Выражения для напряжений с учетом (7) запишутся в виде

$$s_{ij} = k_{ij} (r_{ij} - z \cdot \Delta_{ij}) \quad (i, j = 1, 2), \quad (\text{по индексам не суммировать}) \quad (8)$$

где

$$k_{11} = k_{22} = E/(1-n^2); \quad k_{12} = E/(1+n);$$

$$r_{11} = e_{11} + n \cdot e_{22}; \quad r_{22} = e_{22} + n \cdot e_{11}; \quad r_{12} = e_{12}$$

$$\Delta_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad \Delta_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad \Delta_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Положение нейтральной оси определяем из условия:

при

$$z = c_{ij}, \quad s_{ij} = 0 \Rightarrow c_{ij} = r_{ij} / \Delta_{ij}. \quad (9)$$

Координата начала зоны текучести a_{ij} (см. рис.1, б), вычисляется из условия:

при

$$z = a_{ij}, \quad s_{ij} = A_{ij} \Rightarrow a_{ij} = (k_{ij} \cdot r_{ij} - A_{ij}) / (k_{ij} \cdot \Delta_{ij}), \quad \text{где } A_{ij} = \Phi_{ij}(F). \quad (10)$$

Значения r_{ij} определяем из условия отсутствия в поперечных сечениях продольных сил $N_{ij} = 0$:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} s_{ij} dz = \int_{-h/2}^{a_{ij}} s_{ij} dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} dz = 0 \Rightarrow P_1 \cdot r_{11}^2 + V_1 \cdot r_{11} + U_1 = 0;$$

$$P_2 \cdot r_{22}^2 + V_2 \cdot r_{22} + U_2 = 0; \quad P_3 \cdot r_{12}^2 + V_3 \cdot r_{12} + U_3 = 0. \quad (11)$$

Коэффициенты P_k, V_k, U_k однозначно вычисляются через ранее определенные параметры.

Представим момент как сумму интегралов:

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} s_{ij} z dz = \int_{-h/2}^{a_{ij}} s_{ij} z dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} z dz \Rightarrow M_{ij} = C_{ij} + D_{ij} \cdot \Delta_{ij}, \quad (12)$$

где

$$C_{ij} = (h^2/4 - a_{ij}^2) \cdot (k_{ij} \cdot r_{ij} - A_{ij}^2)/2; \quad D_{ij} = -k_{ij} \cdot (a_{ij}^3 + h^3/8)/3.$$

Из рассмотрения полученного выражения (12) совместно с (3), (7), (8) получается разрешающее дифференциальное уравнение равновесия для упругопластической стадии работы пластины с односторонней пластичностью

$$D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta_{11} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Delta_{22} + 2D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta_{12} = q. \quad (13)$$

При дальнейшем увеличении нагрузки и распространении пластичности по глубине сечения в некоторой точке пластины возникает пластичность в противоположных волокнах, и работа материала пластины здесь переходит в упругопластическую стадию с двусторонней пластичностью. В рассматриваемой стадии соотношения (7) – (10) сохраняют свою силу.

Координату начала зоны пластичности b_{ij} (см. рис.1, в), определяется из условия:

при

$$z = b_{ij}, \quad s_{ij} = B_{ij} \Rightarrow b_{ij} = \frac{k_{ij} \cdot r_{ij} - B_{ij}}{k_{ij} \cdot \Delta_{ij}}. \quad (14)$$

Выполнив аналогичные выкладки, проведенным для состояния односторонней пластичности, получим выражения для r_{ij} :

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} s_{ij} dz = \int_{-h/2}^{a_{ij}} s_{ij} dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} dz + \int_{-h/2}^{b_{ij}} B_{ij} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{11} = \frac{A_{11} + B_{11}}{2k_{11}} - \frac{A_{11} + B_{11}}{A_{11} - B_{11}} \cdot \frac{h}{2} \Delta_{11},$$

$$r_{22} = \frac{A_{22} + B_{22}}{2k_{22}} - \frac{A_{22} + B_{22}}{A_{22} - B_{22}} \cdot \frac{h}{2} \Delta_{22}, \quad (15)$$

$$r_{12} = \frac{A_{12} + B_{12}}{2k_{12}} - \frac{A_{12} + B_{12}}{A_{12} - B_{12}} \cdot h \cdot \Delta_{12}.$$

Выражение для момента представляется как сумма интегралов:

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{b_{ij}} B_{ij} z dz + \int_{b_{ij}}^{a_{ij}} s_{ij} z dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} z dz \Rightarrow M_{ij} = R_{ij} + F_{ij} \cdot \Delta_{ij}. \quad (16)$$

Из совместного рассмотрения выражений (16), (3), (7), (8) вытекает разрешающее дифференциальное уравнение равновесия для упругопластической стадии работы мате-

риала пластины с двусторонней пластичностью

$$F_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta_{11} + F_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Delta_{22} + 2F_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta_{12} = q. \quad (17)$$

Для замкнутости системы уравнений необходимо задавать граничные условия.

Таким образом, полученные дифференциальные уравнения (6), (13) и (17) полностью описывают деформирование пластинок на всех стадиях работы материала.

Решение уравнений (13), (17) было произведено при использовании численного метода конечных разностей с использованием метода переменных параметров упругости при поэтапном увеличении нагрузки. Толщина прямоугольной пластины из титанового сплава ТС5 принималась равной 0,08 м, а геометрические размеры в плане пластины – 2x1 м. Поверхность пластины покрывалась сеткой 40x20 ячеек и в силу симметрии, рассчитывалась четвертая часть пластины.

Для придания безразмерности величинам моментов и прогибов использовались следующие коэффициенты:

$$M_s = k_t(C) \cdot W \quad \text{и} \quad w_s = \frac{D \cdot 100}{M_s \cdot a^2},$$

где D – цилиндрическая жесткость, $W = ah^2/6$ – момент сопротивления изгибу (упругий момент сопротивления); a – длина пластины; h – толщина пластины.

Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, полученная при нулевой концентрации водорода, больше нагрузки, полученной при $C = 0,12\%$, примерно на 30% (рис.2). В стадии упругих деформаций кривые прогибов совпадают; в стадии упруго-пластических деформаций кривые, полученные при расчете ненаводороженной и наводороженной пластин имеют заметное расхождение, причем с увеличением нагрузки разница увеличивается.

На рис. 3 представлены картины развития текучести по поверхности пластины, полученные при $C = 0,05\%$ (поверхности, вступившие в состояние текучести, заштрихованы). Для пластины с отсутствием наводороживания области пластичности в верхней и нижней зонах развиваются одинаково, здесь же пластичность сначала возникает в нижней зоне – зоне растяжения – и развивается сначала в центре, затем в угловых точках нижней зоны и, наконец, в диагональном сечении.

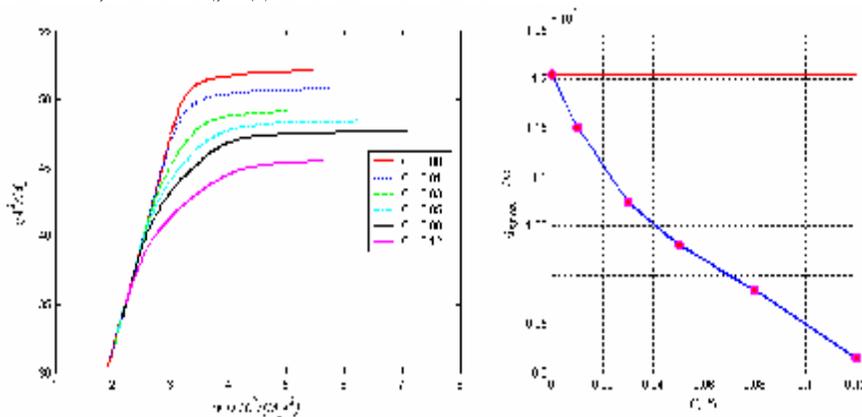


Рис. 2. Зависимость прогибов в центральной точке пластины от нагрузки и предельные нагрузки при разном уровне наводороживания

С увеличением концентрации водорода в теле пластины становится более очевид-

ной разницы вида кривых в эпюрах моментов по сечениям пластины, по сравнению с не-наводороженной пластиной, а различие в значениях достигает 25–30%.

На рис. 4 представлено развитие текущей вглубь наводороженной пластины по диагональному сечению (2-2) для указанного вида опирания. Здесь также явно заметна асимметричность развития зон пластичности.

Особый интерес представляет рис. 5, отражающий изменение прогибов пластины во времени. Наводороживание принимается нулевым (классический вариант), и затем на определенном шаге изменения нагрузки (в большинстве вариантов расчета, когда начинает образовываться пластичность) начинает действовать наводороживание, то есть устанавливается концентрация водорода $C = 0,05\%$, нагрузка фиксируется, и начинается время (точнее – число Фурье $F_0 = Dt/h^2$).

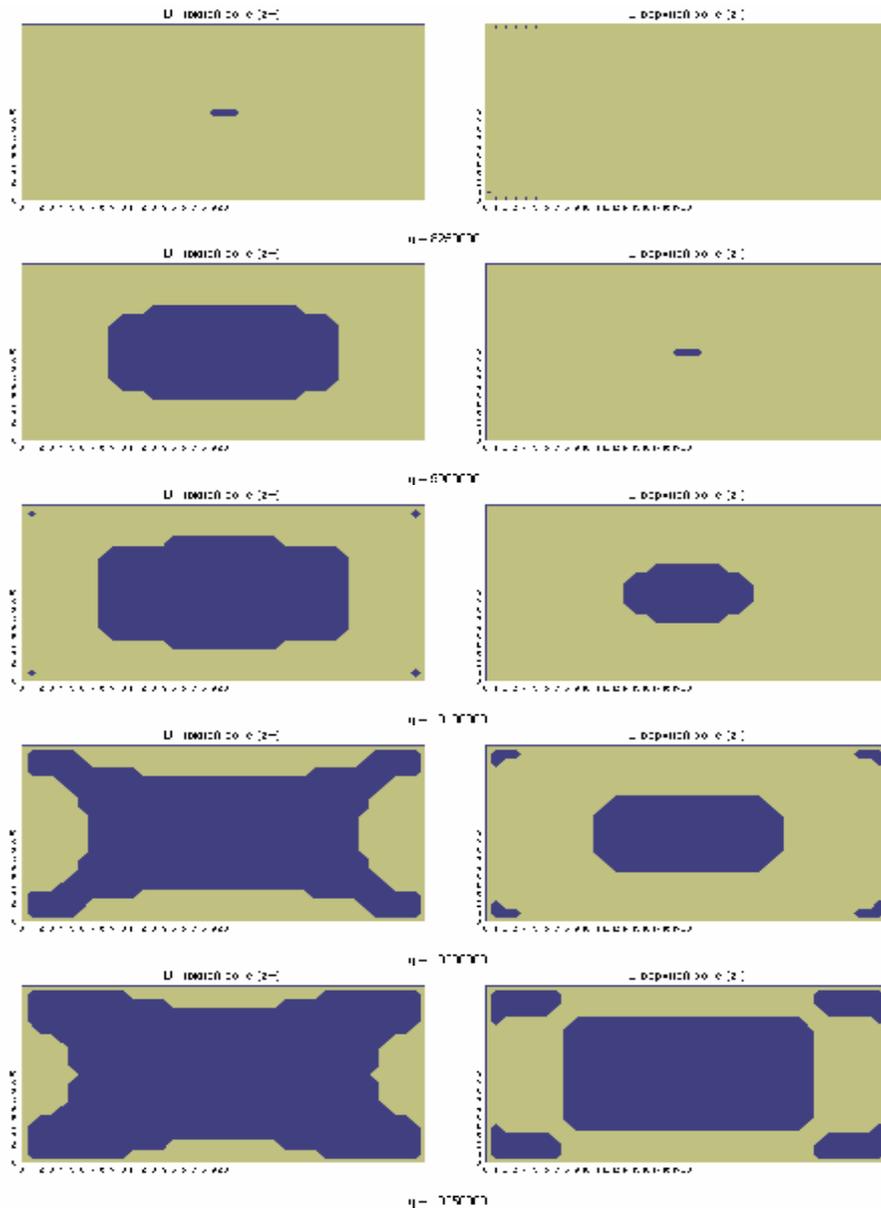


Рис. 3. Зоны текучести в плане пластины при наводороживании $C = 0,05 \%$

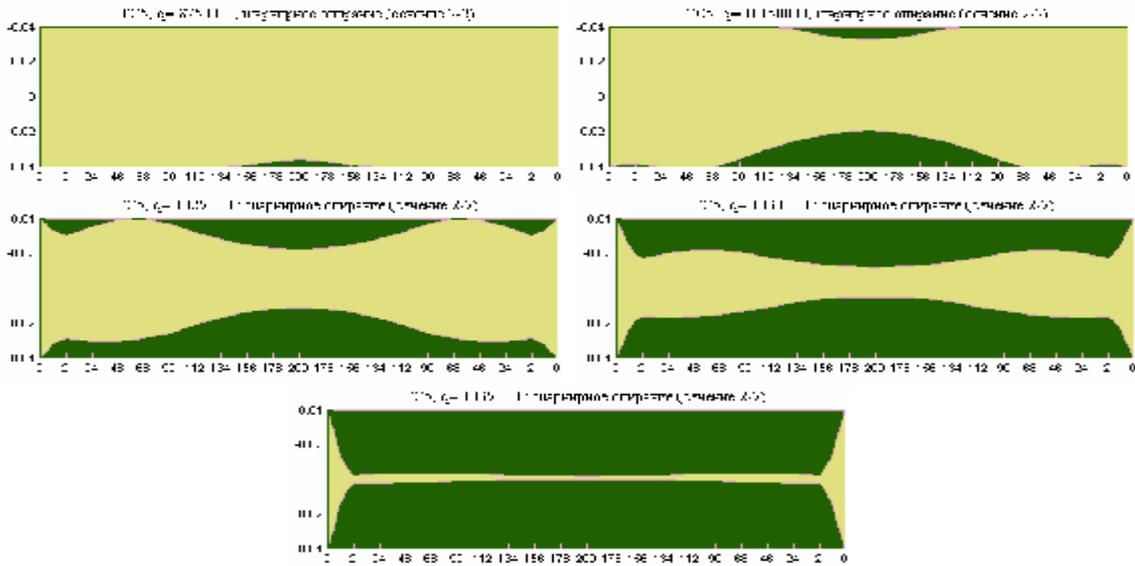


Рис. 4. Зоны текучести по толщине пластины при наводороживании $C = 0,05 \%$ (диагональное сечение)

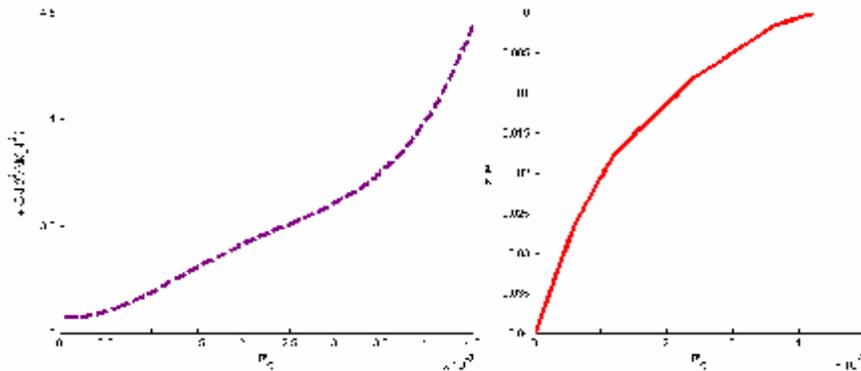


Рис. 5. Изменение прогибов в центре пластины и глубины проникновения водородосодержащей среды в процессе наводороживания тела пластины во времени

Как видно из рис. 5, график функции прогибов с увеличением глубины проникновения водорода в тело пластины меняет кривизну, и функция начинает расти быстрее, имея тенденцию в какой-то момент времени обратиться в бесконечность (во время образования пластического шарнира). По графикам рис. 5 делается вывод, что может произойти разрушение наводороживаемой пластины через определенное время даже при нагрузках, которые вызывают лишь появление пластических зон в отдельных ее точках при отсутствии водородосодержащей среды. Подобное явление наблюдается, например, для рассматриваемых прямоугольных шарнирно опертых пластин из сплава ТС5 при числе Фурье $F_o = 0,0045$.

Полученные результаты, очевидно, подтверждают тот факт, что к данным материалам, находящимся в активной водородной среде, недопустимо применение классических

подходов. К тому же исследование развития текучести по поверхности и по толщине пластины выявило качественно новую картину, не укладывающуюся в рамки классической теории изгиба пластин.

г. Тула

Поступила: 15 ноября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трещев, А. А.* К теории пластичности материалов, чувствительных к наводороживанию / А. А. Трещев, П. А. Полтавец // Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный журнал. – 2006. – № 2. – С. 60–67.