

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА БЫСТРОВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

(Институт Механики НАН Армении)

Исследуется упругопластическая задача быстровращающейся конической трубы. Определена предельная поверхность, разделяющая область пластичности от упругой области. Получено соответствующее значение Ωr .

Пластическое течение быстровращающейся конической трубы при условии пластичности Губера-Мизеса было исследовано М. А. Задояном [1]. В настоящей работе исследуется упругопластическое состояние той же задачи.

1. Постановка задачи. Для исследования пластического состояния конической трубы введем сферическую систему координат, начало координатной системы совпадает с точкой О (рис.

1.1), $(\alpha \leq \vartheta \leq \beta)$, $\beta < \frac{\pi}{2}$. Предполагается,

что коническая труба вокруг своей оси вращается с угловой скоростью Ω , а на внутренней и внешней поверхностях действуют нормальные силы p и q соответственно. Исходя из осесимметричности задачи, предположим, что имеем $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0$. Далее

предположим, что рассматриваемая

труба имеет малую конусность, тогда по всему объему трубы имеет место $\sigma_{r\vartheta} = 0$. Для скоростей перемещений принимаем: $u = u(r, \vartheta)$, $v = v(r, \vartheta)$, $w = 0$, следовательно, имеем:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \vartheta, \quad (1.3)$$

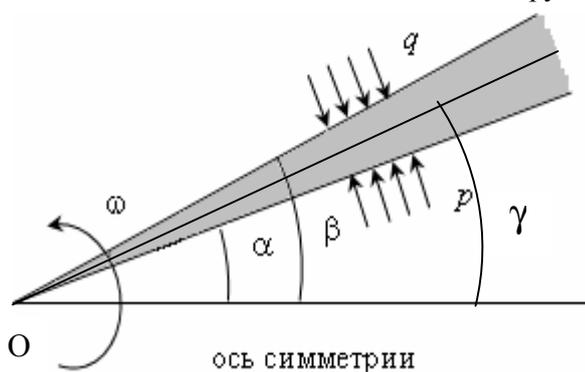


Рис. 1

$$2\gamma_{r\vartheta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\vartheta\varphi} = 0. \quad (1.4)$$

Дифференцируя соотношение (1.3) по ϑ , получаем:

$$\sin^2 \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} - v = \sin^2 \vartheta \frac{\partial(r\varepsilon_\varphi)}{\partial \vartheta}. \quad (1.5)$$

Из (1.3) находим значение v , а из (1.2) – значение $\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ и, подставляя в (1.5), имеем:

$$\sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + r\varepsilon_\vartheta \cos^2 \vartheta + u \sin^2 \vartheta - r\varepsilon_\varphi = \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial(r\varepsilon_\varphi)}{\partial \vartheta}. \quad (1.6)$$

Дифференцируя (1.6) по r и учитывая (1.1), из (1.6) получим следующее уравнение неразрывности деформаций:

$$\sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \vartheta} + \cos^2 \vartheta \frac{\partial(r\varepsilon_\vartheta)}{\partial r} + \varepsilon_r \sin^2 \vartheta - \frac{\partial(r\varepsilon_\varphi)}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial^2(r\varepsilon_\varphi)}{\partial \vartheta \partial r}. \quad (1.7)$$

Во вращающейся трубе центробежная сила, направленная перпендикулярно к оси вращения, будет:

$$R = v\omega^2 \rho, \quad (1.8)$$

где v – масса единицы объема материала трубы, ρ – расстояние от оси вращения. Массовые силы можно представить в форме:

$$R_r = R \sin \vartheta, R_\vartheta = R \cos \vartheta. \quad (1.9)$$

Как в упругой, так и в пластической областях принимаем $2k=1$, $k = const$ (k – предел текучести на сдвиг), следовательно, при $\sigma_i \sim \frac{\sigma_i}{2k}$, $i = r, \vartheta, \varphi$ уравнения равновесия будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) + v\omega^2 r \sin^2 \vartheta &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} (\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \vartheta + v\omega^2 r \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

причем $v \sim \frac{v}{2k}$. В упругой области закон Гука при условии несжимаемости материала будет:

$$\varepsilon_r = \frac{2k}{E} \left[\sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_\vartheta + \sigma_\varphi) \right], \varepsilon_\vartheta = \frac{2k}{E} \left[\sigma_\vartheta - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) \right], \varepsilon_\varphi = \frac{2k}{E} \left[\sigma_\varphi - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\vartheta) \right]. \quad (1.11)$$

В пластической области условия пластичности в главных напряжениях принимают вид:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = \sigma_1 + 1, \sigma_i \sim \frac{\sigma_i}{2k}, i = 1, 2, 3. \quad (1.12)$$

Будем рассматривать три различные ребра призмы Треска:

$$\sigma_r = \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi - 1 \quad (1.13.a)$$

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_\vartheta - 1 \quad (1.13.б)$$

$$\sigma_\vartheta = \sigma_\varphi = \sigma_r - 1. \quad (1.13.в)$$

Предполагается, что область ($\alpha \leq \vartheta < \gamma$) соответствует пластическому состоянию, а область ($\gamma < \vartheta \leq \beta$) – упругому.

Граничные условия можем написать в виде:

$$s_J^p = p, \text{ при } J = a, \text{ и } s_J^e = q, \text{ при } J = b, \quad (1.14)$$

$$p, q \sim \frac{p}{2k}, \frac{q}{2k}.$$

где верхние индексы p, e соответствуют пластическому и упругому состоянию соответственно.

На границе раздела упругопластического состояния следует удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$[\sigma_r] = \sigma_r^p - \sigma_r^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (1.15)$$

$$[\sigma_\vartheta] = \sigma_\vartheta^p - \sigma_\vartheta^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (1.16)$$

$$[\sigma_\varphi] = \sigma_\varphi^p - \sigma_\varphi^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (1.17)$$

$$[u] = u^p - u^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0, \quad (1.18)$$

$$[v] = v^p - v^e \Big|_{\vartheta=\gamma} = 0. \quad (1.19)$$

Таким образом, требуется найти поле напряжений и поле скоростей деформаций упругопластического состояния. Требуется также анализировать характер влияния угловой скорости и действующих нормальных давлений на упругопластических области.

2. Решение задачи в пластической зоне. Учитывая условия пластичности (1.13.а), (1.13.б) и (1.13.в), из уравнения равновесия соответственно получим:

$$\sigma_r^p = \sigma_\vartheta^p = \ln(r \sin \vartheta) - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C, \quad (2.1.а)$$

$$\sigma_\varphi^p = (1 + \ln(r \sin \vartheta)) - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C,$$

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \ln\left(\frac{r}{\sin \vartheta}\right) - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C, \quad (2.1.б)$$

$$\sigma_\vartheta = 1 + \ln\left(\frac{r}{\sin \vartheta}\right) - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta + C,$$

$$s_J = s_j = -1 - 2 \ln r - \frac{1}{2} n \omega^2 r^2 \sin^2 J + C, \quad (2.1.в)$$

$$s_r = -2 \ln r - \frac{1}{2} n \omega^2 r^2 \sin^2 J + C,$$

где C – интегральная постоянная. Из граничного условия (1.14), определяя постоянную C , имеем:

$$\sigma_r^p = \sigma_\vartheta^p = \sigma_\varphi^p - 1 = \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha) + p, \quad (2.2.а)$$

$$\sigma_r^p = \sigma_\varphi^p = \sigma_\vartheta^p - 1 = -\ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha) + p, \quad (2.2.б)$$

$$\sigma_\vartheta^p = \sigma_\varphi^p = \sigma_r^p - 1 = -\frac{1}{2} \nu \omega^2 r^2 (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \alpha) + p. \quad (2.2.в)$$

Решение задачи в упругой зоне. Введем функцию напряжений следующим образом:

$$\sigma_r^e = \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\Phi}{r^2 \sin \vartheta}, \sigma_{\vartheta}^e = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \sigma_{\varphi}^e = \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \vartheta} + \nu \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (2.1)$$

Удовлетворив дифференциальным уравнениям равновесия и учитывая закон Гука, из условий неразрывности деформаций получим:

$$\begin{aligned} & -8r^2 \cos J \sin^2 J \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial J^2} - (\sin 3J - 7 \sin J) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial J} - 2r^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2 \partial J} \right) + r^2 (\cos 3J + 7 \cos J) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \\ & + 4 \cos J \sin^2 J \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2} - 2(\cos 3J + \cos J) \Phi - 4nr^4 w^2 (19 \cos J + 4 \cos 3J) \sin^3 J = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вводя новую функцию $\phi(\vartheta)$ следующим образом:

$$\Phi = r^2 \phi(\vartheta), \quad (2.3)$$

для (2.2) можем записать:

$$\begin{aligned} & 3j \cos J - 3j' (1 + \sin^2 J) \sin J - 3j'' \cos J \sin^2 J - \\ & - n w^2 r^2 \sin J (7 + 16 \cos^2 J) \cos J \sin^3 J = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Общее решение (2.4) можно представить в форме:

$$\begin{aligned} j(J) = & -\frac{\sin J}{4} \left(4C_1 + C_2 \ln \left| \frac{\cos J - 1}{\cos J + 1} \right| \right) - \frac{\operatorname{ctg} J}{2} C_2 + \\ & + \frac{1}{18} n w^2 r^2 \sin J \left(19 + 8 \cos 2J + \frac{10}{\sin^2 J} + 10 \ln \sin J \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где C_1, C_2 – интегральные постоянные. Определив C_1 из граничного условия (1.14) для тензора напряжений, получим:

$$\begin{aligned} s_r^e = & q + C_2 \left(\frac{\cos b}{\sin^2 b} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\frac{J}{2}} \right) - \\ & - \frac{1}{9} n w^2 r^2 \left(38 + 18 \cos 2b - 8 \cos 2J + 20 \left(\frac{1}{\sin^2 b} + \ln \sin b \right) - 5 \ln \sin J \right), \\ s_J^e = & q + C_2 \left(\frac{\cos b}{\sin^2 b} - \frac{\cos J}{\sin^2 J} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\frac{J}{2}} \right) + \\ & + \frac{1}{9} n w^2 r^2 \left(18(\cos 2J - \cos 2b) + 20 \left(\frac{1}{\sin^2 J} - \frac{1}{\sin^2 b} + \ln \frac{\sin J}{\sin b} \right) \right), \\ s_j^e = & q + C_2 \left(\frac{\cos b}{\sin^2 b} - \frac{\cos J}{\sin^2 J} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\frac{J}{2}} \right) - \\ & - \frac{1}{18} n w^2 r^2 \left(18 + 36 \cos 2b - 87 \cos 2J + 40 \left(\frac{1}{\sin^2 J} + \frac{1}{\sin^2 b} - \ln \frac{\sin J}{\sin b} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Определение соотношения предельного состояния. Из соотношений (1.15), (1.16) имеем:

$$\begin{aligned}
& v \omega^2 r^2 \left(55 \cos 2\gamma + 9 \cos 2\alpha - 8 \left(8 \cos 2\beta + \frac{10}{\sin^2 \beta} - 5 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin^2 \beta} \right) \right) - \\
& - 2 \left(2 \left(9(p-q) + 22v \omega^2 r^2 + 9 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) - 18C_2 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \right) = 0, \\
& v \omega^2 r^2 \left(55 \cos 2\gamma + 9 \cos 2\alpha - 16 \left(4 \cos 2\beta + \frac{5}{\sin^2 \beta} - \frac{5}{\sin^2 \gamma} - 5 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) \right) - \\
& - 18 \left(2 \left(p - q + \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) + 2C_2 \left(\frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \right) = 0, \\
& -1 - (p-q) - \frac{5}{6} v \omega^2 r^2 - \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + C_2 \left(\frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) + \\
& + \frac{1}{18} v \omega^2 r^2 \left(87 \cos 2\gamma - 32 \cos 2\beta - \frac{40}{\sin^2 \gamma} - \frac{40}{\sin^2 \beta} + 40 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + 9 \sin^2 \gamma - 9 \sin^2 \alpha \right) = 0, \\
& 4 \left(-9(p-q) - 22v \omega^2 r^2 + 9 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) + 36C_2 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) + \\
& + v \omega^2 r^2 \left(55 \cos 2\gamma + 9 \cos 2\alpha - 8 \left(8 \cos 2\beta + \frac{10}{\sin^2 \beta} - 5 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin^2 \beta} \right) \right) = 0, \\
& -p + q + \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + C_2 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) + \\
& + \frac{1}{18} v \omega^2 r^2 \left(32 \cos 2\gamma - 32 \cos 2\beta + 9 \cos^2 \alpha + 40 \left(\frac{10}{\sin^2 \gamma} - \frac{10}{\sin^2 \beta} + \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) + 9 \sin^2 \gamma \right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.1.a}$$

$$-p + q - \frac{5}{6} n w^2 r^2 + \ln \frac{\sin g}{\sin a} + C_2 \left(\frac{\cos g}{\sin^2 g} + \frac{\cos b}{\sin^2 b} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{g}{2}}{\operatorname{tg} \frac{b}{2}} \right) + \quad (3.1.6)$$

$$+ \frac{1}{18} n w^2 r^2 \left(87 \cos 2g - 32 \cos 2b - \frac{40}{\sin^2 g} - \frac{40}{\sin^2 b} + 40 \ln \frac{\sin g}{\sin b} + 9 \sin^2 g - 9 \sin^2 a \right) = 0.$$

Решая (3.1.а), (3.1.б) относительно $(v\omega^2 r^2, p - q, C_2)$ получим

$$v\omega^2 r^2 = \frac{18}{73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma},$$

$$p - q = -\ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{1}{4} \left(11 + \frac{10}{\sin^2 \gamma} + 5 \ln \sin \gamma \right) (73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma)x$$

$$\left(\frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \left(55 \cos 2\gamma + 9 \cos 2\alpha - 8 \left(11 + 8 \cos 2\beta + \frac{10}{\sin^2 \beta} - 5 \ln \frac{\sin \gamma}{\sin^2 \beta} \right) \right) + \quad (3.2.a)$$

$$+ \frac{8}{\cos \gamma} (31 - 11 \cos 2\gamma + 10 \sin^2 \gamma \ln \sin \gamma) \left(11 + \frac{10}{\sin^2 \gamma} + 5 \ln \sin \gamma \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \right),$$

$$C_2 = -4 \frac{\cos^2 \gamma (11 + 5 \ln \sin \gamma) - 21 - 5 \ln \sin \gamma}{\cos \gamma (73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma)}.$$

$$v\omega^2 r^2 = \frac{18}{73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma},$$

$$p - q = \frac{1}{16 \sin^4 \gamma} \ln \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} (157 - 52 \cos 2\gamma + 55 \cos 4\gamma - 80 \sin^2 \gamma \ln \sin \gamma)^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} (73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma) \left(55 \frac{\cos 3\gamma}{\sin^2 \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \left(-121 + 18 \cos 2\alpha - 128 \cos 2\beta - \frac{160}{\sin^2 \beta} + \right.$$

$$\left. + 80 \ln \sin \gamma - 160 \ln \sin \beta \right) - 4 \left(29 + 55 \cos 2\gamma - \frac{40}{\sin^2 \gamma} + 20 \ln \sin \gamma \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \right) x$$

$$x \frac{1}{\cos \gamma} \left(\frac{160}{\sin \gamma} - 4 \sin \gamma (29 + 55 \cos 2\gamma + 20 \ln \sin \gamma) \right)^2, \quad (3.2.б)$$

$$C_2 = \frac{157 + 55 \cos 4\gamma - \cos 2\gamma (52 - 40 \ln \sin \gamma) - 40 \ln \sin \gamma}{4 \cos \gamma (73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma)}$$

Решение соответствующему (1.13.в) здесь не приводим, т. к. из них получаем:

$$v\omega^2 r^2 = -\frac{36}{73 + 55 \cos 2\gamma + 40 \ln \sin \gamma}, \quad (3.2)$$

но отмеченное выражение не имеет физического смысла.

Из (3.1.а) получаем графики, показанные на рис. 2, 3, а из (3.1.б) – на рис. 2, 4:

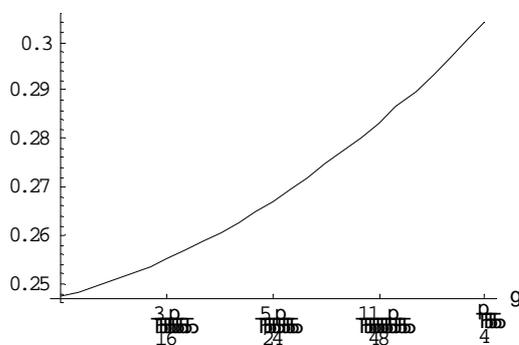


Рис. 2

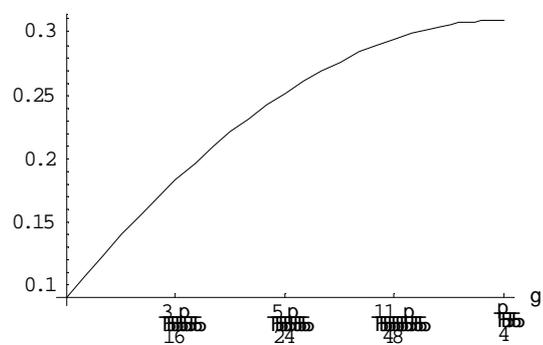


Рис. 3

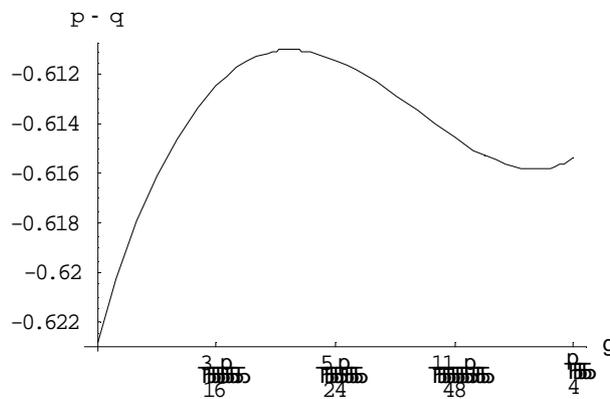


Рис. 4

Рис. 2 и 3 показывают, что пластические деформации в конической трубе возникают, начиная из значений $v\omega^2 r^2 = 0.243$, $q - p = 0.08$, а далее при увеличении значений $v\omega^2 r^2$ или $q - p$ пластическая область распространяется к наружной поверхности трубы. Приведем таблицу численных расчетов определения значения γ при заданных значениях $v\omega^2 r^2$ и $q - p$:

Определенная из условий (3.1.а)				Таблица	
$q - p$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
$v\omega^2 r^2$	0.247976	0.251731	0.257488	0.26678	0.287198
γ	30.397°	32.3294°	34.5846°	37.405°	42.0031°

Исходя из постановки задачи, при увеличении значения $p - q$ пластическая область в трубе не может увеличиваться до определенного значения, а потом уменьшаться, поэтому в данной задаче пластическое течение не может возникать, начиная с $\sigma_r = \sigma_\phi = \sigma_\psi - 1$ ребра призмы Треска.

г. Ереван

Поступила: 02 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Задоян, М. А.* Пластическое течение быстровращающейся конической трубы / М. А. Задоян // ДАН НАН РА. – 2001. – Т. 101. – № 2. – С. 122–127.

2. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 702 с.