

ДИНАМИКА ТРЕХСЛОЙНОЙ НЕПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

(Самарский государственный университет)

Исследованию нестационарных колебаний трехслойных сферических оболочек посвящены многочисленные работы [1, 7, 11, 14, 15]. Динамические задачи для трехслойных оболочек с несимметричной структурой пакета слоев исследованы в меньшей степени [5, 8, 13]. Вместе с тем такие оболочки являются наиболее жесткими конструкциями [8], и их исследование имеет как теоретическое, так и прикладное значение.

В работе рассматриваются непологие сферические оболочки, образуемые двумя тонкими наружными слоями с различными толщинами h_2, h_3 и внутренним слоем толщиной $h_1 \gg h_2, h_3$. Предполагается, что способы соединения слоев в единый пакет обеспечивают отсутствие их смещения относительно друг друга (проскальзывания), а перемещения всего пакета остаются малыми по сравнению с толщиной оболочки. Внешние слои испытывают мембранное напряженно деформированное состояние, а средний слой рассматривается в постановке теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью (Мидлина–Тимошенко)[7].

В соответствии с кинематическими гипотезами теории Миндлина – Тимошенко, вектор перемещений произвольной точки k -го слоя $\mathbf{u}^{(k)} = (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)})$, $k = 1, 2, 3$ может быть выражен через перемещения $\mathbf{u} = (u, v, w)$ на нейтральной поверхности Ω и вектор $\mathbf{y} = (\psi, \gamma, 0)$ углов поворота нормалей к ней, т. е.:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u} + z\mathbf{y}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u} - h_2\mathbf{y}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u} + h_3\mathbf{y}; \quad h_2 + h_3 = h_1, \quad (1.1)$$

где u, v, w – соответственно перемещения вдоль меридиана, параллели и нормали; ψ, γ – углы поворота нормали к Ω . Индекс 1 относится к среднему слою, индексы 2 и 3 – к внутреннему и наружному внешним слоям оболочки; h_2, h_3 – расстояния от Ω до внешней и внутренней лицевых поверхностей оболочки.

Физические компоненты тензора малых деформаций в сферических координатах с учетом кинематических соотношений (1.1) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} e_{zz}^{(1)} &= 0, & e_{qj}^{(1)} &= \frac{1}{2(R+z)}(e_{qj} + z c_{qj}), \\ e_{qq}^{(1)} &= \frac{1}{R+z}(e_{qq} + z c_{qq}), & e_{zq}^{(1)} &= \frac{1}{2(R+z)}e_{zq}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{jj}^{(1)} &= \frac{1}{R+z} (e_{jj} + z c_{jj}), & \mathbf{e}_{zj}^{(1)} &= \frac{1}{2(R+z)} e_{zj}, \\
\mathbf{e}_{qq}^{(2)} &= \frac{1}{R+z} (e_{qq} - h_- c_{qq}), & \mathbf{e}_{qq}^{(3)} &= \frac{1}{R+z} (e_{qq} + h_+ c_{qq}), \\
\mathbf{e}_{jj}^{(2)} &= \frac{1}{R+z} (e_{jj} - h_- c_{jj}), & \mathbf{e}_{jj}^{(3)} &= \frac{1}{R+z} (e_{jj} + h_+ c_{jj}), \\
\mathbf{e}_{qj}^{(2)} &= \frac{1}{2(R+z)} (e_{qj} - h_- c_{qj}), & \mathbf{e}_{qj}^{(3)} &= \frac{1}{2(R+z)} (e_{qj} + h_+ c_{qj}),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
e_{qq} &= \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}q} + w, & c_{qq} &= \frac{\mathcal{I}y}{\mathcal{I}q}, & e_{zq} &= \frac{\mathcal{I}w}{\mathcal{I}q} + R\gamma - u, \\
e_{jj} &= \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}v}{\mathcal{I}j} + ctgq u + w, & c_{jj} &= \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}g}{\mathcal{I}j} + ctgq \gamma, & e_{zj} &= \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}w}{\mathcal{I}j} + Rg - v, \\
e_{qj} &= \frac{\mathcal{I}v}{\mathcal{I}q} - ctgq v + \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}j}, & c_{qj} &= \frac{\mathcal{I}g}{\mathcal{I}q} - ctgq g + \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}y}{\mathcal{I}j},
\end{aligned}$$

Предполагая материалы слоев изотропными, определим в соответствии с законом Гука и статическими гипотезами теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью физические компоненты тензора напряжений $\mathbf{s}^{(k)}$ (k – номер слоя):

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{qq}^{(k)} &= \frac{E_k}{1-n_k^2} (e_{qq}^{(k)} + n_k e_{jj}^{(k)}), & \mathbf{s}_{jj}^{(k)} &= \frac{E_k}{1-n_k^2} (e_{jj}^{(k)} + n_k e_{qq}^{(k)}), & \mathbf{s}_{qj}^{(k)} &= \frac{E_k}{1+n_k} e_{qj}^{(k)}, \\
\mathbf{s}_{zz}^{(k)} &\approx 0, & \mathbf{s}_{qz}^{(1)} &= k \frac{E_1}{1+n_1} e_{qz}^{(1)}, & \mathbf{s}_{jz}^{(1)} &= k \frac{E_1}{1+n_1} e_{jz}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь E_k – модуль упругости, а n_k – коэффициент Пуассона материала k -го слоя, k – коэффициент поперечного сдвига.

Потенциальная энергия деформации k -го слоя W_k определяется объемным интегралом:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_k} s_{ij}^{(k)} e_{ij}^{(k)} dV. \tag{1.4}$$

Выражая компоненты тензора напряжений $\mathbf{s}_{ij}^{(k)}$ через деформации $e_{ij}^{(k)}$ согласно соотношениям (1.3), из (1.4) получим квадратичные формы, определяющие потенциальную энергию деформирования слоев:

$$W_1 = \frac{E_1}{2(1-n_1^2)} \iiint_{V_1} \left\{ e_{qq}^{(1)2} + e_{jj}^{(1)2} + 2n_1 e_{qq}^{(1)} e_{jj}^{(1)} + 2(1-n_1) \left[e_{qj}^{(1)2} + k \left(e_{zj}^{(1)2} + e_{zq}^{(1)2} \right) \right] \right\} dV,$$

$$W_{2,3} = \frac{E_{2,3}}{2(1-n_{2,3}^2)} \iiint_{V_{2,3}} \left\{ e_{qq}^{(2,3)2} + e_{jj}^{(2,3)2} + 2n_{2,3} e_{qq}^{(2,3)} e_{jj}^{(2,3)} + 2(1-n_{2,3}) e_{qj}^{(2,3)2} \right\} dV,$$

которые могут быть представлены в форме разложений по степеням z и h_- , h_+ :

$$W_1 = \frac{E_1}{2(1-n_1^2)} \iiint_{V_1} \{e_1 + n_1 e_2 + 2z[e_3 + n_1 e_4] + z^2[e_5 + n_1 e_6] + \frac{1}{2}(1-n_1)ke_7\} \sin qdzdqdj,$$

$$W_2 = \frac{E_2}{2(1-n_2^2)} \iiint_{V_2} \{e_1 + n_2 e_2 - 2h_1^- [e_3 + n_2 e_4] + (h_1^-)^2 [e_5 + n_2 e_6]\} \sin qdzdqdj,$$

$$W_3 = \frac{E_3}{2(1-n_3^2)} \iiint_{V_3} \{e_1 + n_3 e_2 + 2h_1^+ [e_3 + n_3 e_4] + (h_1^+)^2 [e_5 + n_3 e_6]\} \sin qdzdqdj.$$

Здесь введены обобщенные меры деформаций:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{qq}^2 + e_{jj}^2 + \frac{1}{2}e_{qj}^2, & e_2 &= 2e_{qq}e_{jj} - \frac{1}{2}e_{qj}^2, & e_3 &= e_{qq}c_{qq} + e_{jj}c_{jj} + \frac{1}{2}e_{qj}c_{qj}, \\ e_4 &= e_{qq}c_{jj} + e_{jj}c_{qq} - \frac{1}{2}e_{qj}c_{qj}, & e_5 &= c_{qq}^2 + c_{jj}^2 + \frac{1}{2}c_{qj}^2, & e_6 &= 2e_{qq}e_{jj} - \frac{1}{2}e_{qj}^2, \\ e_7 &= e_{ij}^2 + e_{iq}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что все величины e_1, \dots, e_7 не зависят от переменной z , что позволяет привести объемные интегралы к интегралам на срединной поверхности путем интегрирования по этой переменной. Интегрируем W_1, W_2, W_3 в пределах $\{-h_-, h_+\}$, $\{-h_- - h_2, -h_-\}$, $\{h_+, h_+ + h_3\}$ соответственно. Имеем:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{E_1}{2(1-n_1^2)} \iint_{\Omega} \left\{ h_1 [e_1 + n_1 e_2] + (h_+^2 - h_-^2) [e_3 + n_1 e_4] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}(h_+^3 + h_-^3) [e_5 + n_1 e_6] + h_1 \frac{1-n_1}{2} ke_7 \right\} \sin qdqdj, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$W_2 = \frac{E_2}{2(1-n_2^2)} \iint_{\Omega} \{h_2 ([e_1 + n_2 e_2] - 2h_- [e_3 + n_2 e_4] + h_-^2 [e_5 + n_2 e_6])\} \sin qdqdj,$$

$$W_3 = \frac{E_3}{2(1-n_3^2)} \iint_{\Omega} \{h_3 ([e_1 + n_3 e_2] + 2h_+ [e_3 + n_3 e_4] + h_+^2 [e_5 + n_3 e_6])\} \sin qdqdj.$$

Полная потенциальная энергия оболочки W определяется суммой:

$$W = W_1 + W_2 + W_3.$$

Подстановка выражений (1.5) в эту сумму и последующая перегруппировка слагаемых дает:

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^7 a_i e_i \sin qdqdj. \quad (1.6)$$

Здесь a_i – константы, определяемые физическими характеристиками материалов оболочки:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{E_1 h_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3}{1-n_3^2}, & a_5 &= \frac{1}{3} \frac{(h_+^3 + h_-^3) E_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2 h_-^2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3 h_+^2}{1-n_3^2}, \\ a_2 &= \frac{E_1 h_1 n_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2 n_2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3 n_3}{1-n_3^2}, & a_6 &= \frac{1}{3} \frac{(h_+^3 + h_-^3) E_1 n_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2 n_2 h_-^2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3 n_3 h_+^2}{1-n_3^2}, \\ a_3 &= \frac{E_1}{1-n_1^2} [h_+^2 - h_-^2] - \frac{2E_2 h_2}{1-n_2^2} h_- + \frac{2E_3 h_3}{1-n_3^2} h_+, & a_7 &= \frac{E_1 h_1}{1+n_1} k. \end{aligned}$$

$$a_4 = \frac{E_1 n_1}{1-n_1^2} [h_+^2 - h_-^2] - \frac{2E_2 h_2 n_2}{1-n_2^2} h_- + \frac{2E_3 h_3 n_3}{1-n_3^2} h_+,$$

При выборе определенных положений нейтральной поверхности Ω один из коэффициентов a_3, a_4 обращается в ноль, что ведет к сокращению числа слагаемых в выражении (1.6) и упрощению структуры получаемых впоследствии дифференциальных уравнений движения. В дальнейшем будем полагать, что $a_3 = 0$. Для этого значения h_+, h_- следует определять из условий

$$\begin{cases} a_3 = \frac{E_1}{1-n_1^2} [h_+^2 - h_-^2] - \frac{2E_2 h_2}{1-n_2^2} h_- + \frac{2E_3 h_3}{1-n_3^2} h_+ = 0, \\ h_+ + h_- = h_1, \end{cases}$$

то есть

$$h_+ = \frac{h_1}{2} \left[\frac{E_1 h_1}{1-n_1^2} + 2 \frac{E_2 h_2}{1-n_2^2} \right] \left[\frac{E_1 h_1}{1-n_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-n_2^2} + \frac{E_3 h_3}{1-n_3^2} \right]^{-1}, \quad h_- = h_1 - h_+. \quad (1.7)$$

Если срединная поверхность выбрана в соответствии с (1.7), то коэффициент a_4 может быть вычислен по формуле

$$a_4 = (n_1 - n_3) \frac{2E_3 h_3}{1-n_3^2} h_+ - (n_1 - n_2) \frac{2E_2 h_2}{1-n_2^2} h_+.$$

Для вывода уравнений движения и краевых условий воспользуемся классическим вариационным принципом Остроградского-Гамильтона [2]:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \{K - W - F + P\} dt, \quad dI = 0, \quad (1.8)$$

где K – кинетическая энергия движения оболочки; W – потенциальная энергия ее деформации; F – работа объемных сил; P – работа внешних сил, действующих на поверхности оболочки (поверхностных сил).

Обозначая через r_k объемную массу материала k -го слоя, запишем выражение для кинетической энергии K :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \iiint_{V_k} r_k \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{u}^{(k)} \right)^2 dV. \quad (1.9)$$

Подставив в (1.9) кинематические соотношения (1.1):

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{ & r_1 \int_{-h_1}^{h_1} \left[\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} (\mathbf{u} + z\mathbf{y}) \right]^2 (R+z)^2 dz + r_2 \int_{-h_-}^{-h_+} \left[\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} (\mathbf{u} - h_- \mathbf{y}) \right]^2 (R+z)^2 dz + \\ & + r_3 \int_{h_+}^{h_+ + h_3} \left[\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} (\mathbf{u} + h_+ \mathbf{y}) \right]^2 (R+z)^2 dz \} \sin q dq dj \end{aligned}$$

и интегрируя полученное выражение по z , преобразуем объемный интеграл в поверхностный:

$$K = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ b_1 \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{u} \right)^2 + 2b_2 \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{u} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{y} + b_3 \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}t} \mathbf{y} \right)^2 \right\} \sin q dq dj. \quad (1.10)$$

Здесь введены следующие постоянные:

$$\begin{aligned}
b_1 &= r_1 \left[R^2 h_1 + R(h_+^2 - h_-^2) + \frac{1}{3}(h_+^3 + h_-^3) \right] + b_- + b_+, \\
b_2 &= r_1 \left[\frac{1}{2} R^2 (h_+^2 - h_-^2) + \frac{2}{3} R(h_+^3 + h_-^3) + \frac{1}{4}(h_+^4 - h_-^4) \right] - h_- b_- + h_+ b_+, \\
b_3 &= r_1 \left[\frac{1}{3} R^2 (h_+^3 + h_-^3) + \frac{1}{2} R(h_+^4 - h_-^4) + \frac{1}{5}(h_+^5 + h_-^5) \right] + h_-^2 b_- + h_+^2 b_+; \\
b_- &= r_2 h_2 \left[R^2 - R(2h_- + h_2) + h_-^2 + h_- h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right], \\
b_+ &= r_3 h_3 \left[R^2 + R(2h_+ + h_3) + h_+^2 + h_+ h_3 + \frac{1}{3} h_3^2 \right].
\end{aligned}$$

Работа объемных сил F определяется выражением:

$$F = \sum_{k=1}^3 \iiint_{V_k} r_k \mathbf{g} \mathbf{u}^{(k)} dV. \quad (1.11)$$

Подстановка соотношений (1.1) в объемный интеграл (1.11) и последующее интегрирование по переменной z приводит к такому поверхностному интегралу:

$$F = \iint_{\Omega} \{b_1 \mathbf{g} \mathbf{u} + b_2 \mathbf{g} \mathbf{y}\} \sin q dq dj. \quad (1.12)$$

Работа внешних сил может быть вычислена как сумма работ, производимых распределенными силами \mathbf{f}_+ , \mathbf{f}_- на соответствующих лицевых (сферических, эквидистантных Ω) поверхностях W_+ , W_- и реактивными силами $\mathbf{f}^{(k)}$, приложенных к торцевым (линейчатым, ортогональным к Ω) поверхностям p_k (рис. 1):

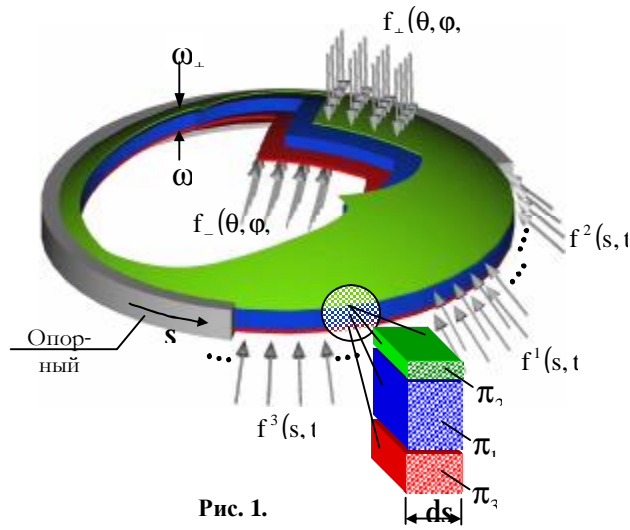


Рис. 1.

$$P = \iint_{w_+} \mathbf{f}_+ \mathbf{u}^{(3)} dw_+ + \iint_{w_-} \mathbf{f}_- \mathbf{u}^{(2)} dw_- + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \iint_{p_k} \mathbf{f}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} dp_k. \quad (1.13)$$

Подставляя в (1.13) кинематические соотношения (1.1) и приводя интегралы на поверхностях

w_+ , w_- к интегралам на Ω , получим:

$$P = \iint_{\Omega} \left\{ (\mathbf{u} + h_+ \mathbf{y}) \mathbf{f}_+ (R + h_+ + h_3)^2 + (\mathbf{u} - h_- \mathbf{y}) \mathbf{f}_- (R - h_- - h_2)^2 \right\} \sin q dq dj + \\ + \int_{\Gamma} \left[\int_{-h_-}^{h_+} (\mathbf{u} + z \mathbf{y}) \mathbf{f}^{(1)} \frac{R+z}{R} dz + \int_{-h_- - h_2}^{-h_-} (\mathbf{u} - h_- \mathbf{y}) \mathbf{f}^{(2)} \frac{R+z}{R} dz + \int_{h_+}^{h_+ + h_3} (\mathbf{u} + h_+ \mathbf{y})^T \mathbf{f}^{(3)} \frac{R+z}{R} dz \right] ds.$$

Здесь Γ – пространственная кривая, образуемая пересечением поверхностей Ω и \mathbf{p}_1 .

Интегрируем полученное выражение по z выражение и преобразуем его к виду:

$$P = \iint_{\Omega} \{ \mathbf{F}_{\Omega} \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\Omega} \mathbf{y} \} R^2 \sin q dq dj + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ \mathbf{F}_{\Gamma} \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\Gamma} \mathbf{y} \} ds, \quad (1.14)$$

где

$$\mathbf{F}_{\Omega} = \frac{(R + h_+ + h_3)^2}{R^2} \mathbf{f}_+ + \frac{(R - h_- - h_2)^2}{R^2} \mathbf{f}_-, \\ \mathbf{M}_{\Omega} = \frac{(R + h_+ + h_3)^2}{R^2} h_+ \mathbf{f}_+ - \frac{(R - h_- - h_2)^2}{R^2} h_- \mathbf{f}_-, \\ \mathbf{F}_{\Gamma} = \int_{-h_-}^{h_+} \mathbf{f}^{(1)} \frac{R+z}{R} dz + \int_{-h_- - h_2}^{-h_-} \mathbf{f}^{(2)} \frac{R+z}{R} dz + \int_{h_+}^{h_+ + h_3} \mathbf{f}^{(3)} \frac{R+z}{R} dz, \\ \mathbf{M}_{\Gamma} = \int_{-h_-}^{h_+} \mathbf{f}^{(1)} \frac{R+z}{R} z dz - \int_{-h_- - h_2}^{-h_-} \mathbf{f}^{(2)} \frac{R+z}{R} h_- dz + \int_{h_+}^{h_+ + h_3} \mathbf{f}^{(3)} \frac{R+z}{R} h_+ dz.$$

В настоящей работе рассматривается случай упругого закрепления слоев оболочки на контуре Γ . Возникающие при таком закреплении реактивные усилия $\mathbf{f}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ могут быть заданы в наиболее общей форме следующими линейными соотношениями

$$\mathbf{f}^{(1)}(z) = \frac{R}{R+z} \mathbf{Q}_1(z) [\mathbf{u} + z \mathbf{y}], \\ \mathbf{f}^{(2)} = \frac{R}{R-h_-} \mathbf{Q}_2(\mathbf{u} - h_- \mathbf{y}), \quad \mathbf{f}^{(3)} = \frac{R}{R+h_+} \mathbf{Q}_3(\mathbf{u} + h_+ \mathbf{y}), \quad (1.15)$$

где $\mathbf{Q}_{1,2,3}$ – диагональные матрицы жесткости упругой заделки слоев. Подставим в (1.15) кинематические соотношения (1.1) и вычислим соответствующие интегралы. Получим:

$$\mathbf{F}_{\Gamma} = \Theta \mathbf{u} + \Psi \mathbf{y}, \quad \mathbf{M}_{\Gamma} = \Psi \mathbf{y} + \Xi \mathbf{u}.$$

Здесь

$$\Theta = \int_{-h_-}^{h_+} \Theta_1(z) dz + \Theta_2 + \Theta_3, \quad \Psi = \int_{-h_-}^{h_+} z \Theta_1(z) dz - \Theta_2 h_- + \Theta_3 h_+, \\ \Xi = \int_{-h_-}^{h_+} z^2 \Theta_1(z) dz - \Theta_2 h_-^2 + \Theta_3 h_+^2.$$

Таким образом, работа внешних сил определяется следующим выражением:

$$P = \iint_{\Omega} \{ \mathbf{F}_{\Omega} \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\Omega} \mathbf{y} \} R^2 \sin q dq dj + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ \mathbf{u} \Theta \mathbf{u} + 2 \mathbf{u} \Psi \mathbf{y} + \mathbf{y} \Xi \mathbf{u} \} ds. \quad (1.16)$$

Располагая всеми компонентами функционала (1.8) и учитывая тождества типа

$$\left(d \frac{\mathcal{I}u}{\mathcal{I}q} \right)_v = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (duv) - du \frac{\mathcal{I}v}{\mathcal{I}q},$$

вычислим его вариацию dI :

$$dI = \int_{t_0}^{t_1} \left[\iint_{\Omega} \left\{ L_u du + L_v dv + L_w dw + L_y dy + L_g dg \right\} \sin q dq dj - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} \left\{ B_u du + B_v dv + B_w dw + B_y dy + B_g dg \right\} ds \right] dt, \quad (1.17)$$

где через $B_u, \dots, B_g, L_u, \dots, L_g$, обозначены дифференциальные выражения¹:

$$L_u = a_1 \left[\frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} q^2} + ctgq \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} q} - \frac{1}{\sin^2 q} u \right] + (a_1 - a_2) u + (a_1 + a_2) \frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} q} + \frac{a_7}{2} \left[\frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} q} + R y - u \right] + \\ + \frac{a_1 - a_2}{2} \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} j^2} - \frac{3a_1 - a_2}{2} \frac{ctgq}{\sin q} + \frac{a_1 + a_2}{2} \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} j \mathcal{I} q} - \\ - \frac{a_4}{2} \left[y - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}^2 g}{\mathcal{I} q \mathcal{I} j} + \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} j} - \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathcal{I}^2 y}{\mathcal{I} j^2} \right) \right] + b_1 \left[g_q - \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} t^2} \right] - b_2 \frac{\mathcal{I}^2 y}{\mathcal{I} t^2} + R^2 F_q, \\ L_v = \frac{a_1 - a_2}{2} \left[\frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} q^2} + ctgq \frac{\mathcal{I} v}{\mathcal{I} q} - \frac{1}{\sin^2 q} v \right] + a_1 \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} j^2} + \frac{3a_1 - a_2}{2} \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} j} + \\ + \frac{a_1 + a_2}{2} \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} q \mathcal{I} j} + (a_1 + a_2) \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} j} + \frac{a_7}{2} \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} j} + R g - v \right] - \\ - \frac{a_4}{4} \left[\frac{\mathcal{I}^2 g}{\mathcal{I} q^2} + ctgq \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} q} - \frac{1}{\sin^2 q} g - \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I}^2 y}{\mathcal{I} q \mathcal{I} j} - 2g \right] + b_1 \left[g_j - \frac{\mathcal{I}^2 v}{\mathcal{I} t^2} \right] - b_2 \frac{\mathcal{I}^2 g}{\mathcal{I} t^2} + R^2 F_j, \\ L_w = \frac{a_7}{2} \left[\frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} q^2} + R \frac{\mathcal{I} y}{\mathcal{I} q} - \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} q} + ctgq \left(\frac{\mathcal{I} w}{\mathcal{I} q} + R y - u \right) + \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathcal{I}^2 w}{\mathcal{I} j^2} - \frac{1}{\sin q} \left(\frac{\mathcal{I} v}{\mathcal{I} j} - R \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} j} \right) \right] - \\ - (a_1 + a_2) \left[\frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} q} + 2w + \frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I} v}{\mathcal{I} j} + ctgq u \right] - \frac{a_4}{2} \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{I} g}{\mathcal{I} j} + ctgq y + \frac{\mathcal{I} y}{\mathcal{I} q} \right] +$$

¹ При известных параметрических уравнениях, определяющих контур $\Gamma (\chi_1(s), \chi_2(s))$, тригонометрические функции угла $\alpha(s)$ могут быть сформулированы в виде:

$$\sin \alpha = \left[\left(\frac{d\chi_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\chi_2}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\chi_1}{ds}, \quad \cos \alpha = \left[\left(\frac{d\chi_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\chi_2}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\chi_2}{ds}.$$

$$\begin{aligned}
& + b_1 \left[g_z - \frac{\mathfrak{I}^2 w}{\mathfrak{I} t^2} \right] + R^2 F_z, \\
L_y = & a_5 \left[\frac{\mathfrak{I}^2 y}{\mathfrak{I} q^2} + ctgq \frac{\mathfrak{I} y}{\mathfrak{I} q} - \frac{1}{\sin^2 q} y \right] + (a_5 - a_6) y - \frac{a_7}{2} R \left[\frac{\mathfrak{I} w}{\mathfrak{I} q} + Ry - u \right] + \\
& + \frac{a_5 - a_6}{2} \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathfrak{I}^2 y}{\mathfrak{I} j^2} - \frac{3a_5 - a_6}{2} \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} g}{\mathfrak{I} j} - \\
& - \frac{a_4}{2} \left[u - \frac{\mathfrak{I} w}{\mathfrak{I} q} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I}^2 v}{\mathfrak{I} q \mathfrak{I} j} + \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} v}{\mathfrak{I} j} - \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathfrak{I}^2 u}{\mathfrak{I} j^2} \right) \right] + \\
& + \frac{a_5 + a_6}{2} \frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I}^2 g}{\mathfrak{I} j \mathfrak{I} q} + b_2 \left[g_q - \frac{\mathfrak{I}^2 u}{\mathfrak{I} t^2} \right] - b_3 \frac{\mathfrak{I}^2 y}{\mathfrak{I} t^2} + R^2 M_q, \\
L_g = & \frac{a_5 - a_6}{2} \left[\frac{\mathfrak{I}^2 g}{\mathfrak{I} q^2} + ctgq \frac{\mathfrak{I} g}{\mathfrak{I} q} - \frac{1}{\sin^2 q} g \right] + a_5 \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\mathfrak{I}^2 g}{\mathfrak{I} j^2} + \frac{3a_5 - a_6}{2} \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} y}{\mathfrak{I} j} + \\
& + \frac{a_5 + a_6}{2} \frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I}^2 y}{\mathfrak{I} q \mathfrak{I} j} - \frac{a_7}{2} R \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} w}{\mathfrak{I} j} + Rg - v \right] - \\
& - \frac{a_4}{4} \left[\frac{\mathfrak{I}^2 v}{\mathfrak{I} q^2} + ctgq \frac{\mathfrak{I} v}{\mathfrak{I} q} + \frac{ctgq}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} u}{\mathfrak{I} j} - \frac{1}{\sin^2 q} v - \frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I}^2 u}{\mathfrak{I} q \mathfrak{I} j} - 2v - \frac{2}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} w}{\mathfrak{I} q} \right] + \\
& + b_2 \left[g_j - \frac{\mathfrak{I}^2 v}{\mathfrak{I} t^2} \right] - b_3 \frac{\mathfrak{I}^2 g}{\mathfrak{I} t^2} + R^2 M_j; \\
B_u = & \left\{ \left[\frac{a_1 - a_2}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} u}{\mathfrak{I} j} + \frac{\mathfrak{I} v}{\mathfrak{I} q} - ctgq v \right) - \frac{a_4}{4} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} y}{\mathfrak{I} j} + \frac{\mathfrak{I} g}{\mathfrak{I} q} - ctgq g \right) \right] \sin a - \right. \\
& \left. - \left[a_2 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} v}{\mathfrak{I} j} + ctgq u \right) + a_1 \frac{\mathfrak{I} u}{\mathfrak{I} q} + \mathfrak{I} \phi w + \frac{a_4}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} g}{\mathfrak{I} j} + ctgq y \right) \right] \cos a + \Theta_{11} u + \hat{\Theta}_{11} y \right\}_{\Gamma}, \\
B_v = & \left\{ \left[a_1 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} v}{\mathfrak{I} j} + ctgq u \right) + a_2 \frac{\mathfrak{I} u}{\mathfrak{I} q} + (a_1 + a_2) w + \frac{a_4}{2} \frac{\mathfrak{I} y}{\mathfrak{I} q} \right] \sin a - \right. \\
& \left. - \left[\frac{a_1 - a_2}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} u}{\mathfrak{I} j} + \frac{\mathfrak{I} v}{\mathfrak{I} q} - ctgq v \right) - \frac{a_4}{4} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} y}{\mathfrak{I} j} + \frac{\mathfrak{I} g}{\mathfrak{I} q} - ctgq g \right) \right] \cos a + \Theta_{22} v + \hat{\Theta}_{22} g \right\}_{\Gamma}, \\
B_w = & \left\{ \frac{a_7}{2} \left[\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} w}{\mathfrak{I} j} + Rg - v \right] \sin a - \frac{a_7}{2} \left[\frac{\mathfrak{I} w}{\mathfrak{I} q} + Ry - u \right] \cos a + \Theta_{33} w \right\}_{\Gamma}, \\
B_y = & \left\{ \left[\frac{a_5 - a_6}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} y}{\mathfrak{I} j} + \frac{\mathfrak{I} g}{\mathfrak{I} q} - ctgq g \right) - \frac{a_4}{4} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathfrak{I} u}{\mathfrak{I} j} + \frac{\mathfrak{I} v}{\mathfrak{I} q} - ctgq v \right) \right] \sin a - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[a_6 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}g}{\mathcal{Y}j} + ctgq \mathcal{Y} \right) + a_5 \frac{\mathcal{Y}y}{\mathcal{Y}j} + \frac{a_4}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}v}{\mathcal{Y}j} + ctgq u + w \right) \right] \cos a + \Xi_{11} \mathcal{Y} + \hat{\Xi}_{11} u \Bigg|_{\Gamma}, \\
B_g & = \left\{ \left[a_5 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}g}{\mathcal{Y}j} + ctgq \mathcal{Y} \right) + a_6 \frac{\mathcal{Y}y}{\mathcal{Y}q} + \frac{a_4}{2} \left(\frac{\mathcal{Y}u}{\mathcal{Y}q} + w \right) \right] \sin a - \right. \\
& \left. - \left[a_3 \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}y}{\mathcal{Y}j} + \frac{\mathcal{Y}g}{\mathcal{Y}q} - ctgq g \right) - \frac{a_4}{2} \left(\frac{1}{\sin q} \frac{\mathcal{Y}u}{\mathcal{Y}j} + \frac{\mathcal{Y}v}{\mathcal{Y}q} - ctgq v \right) \right] \cos a + \Xi_{22} g + \hat{\Xi}_{22} v \right\} \Bigg|_{\Gamma}.
\end{aligned}$$

Таким образом, условие стационарности функционала (1.8) выполняется, если имеют место тождества:

$$L_u \equiv 0, \quad L_v \equiv 0, \quad L_w \equiv 0, \quad L_{\mathcal{Y}} \equiv 0, \quad L_g \equiv 0, \quad \forall \{q, j\} \in \Omega, \quad (1.18)$$

$$B_u \equiv 0, \quad B_v \equiv 0, \quad B_w \equiv 0, \quad B_{\mathcal{Y}} \equiv 0, \quad B_g \equiv 0, \quad \forall \{q, j\} \in \Gamma. \quad (1.19)$$

Тождества (1.18) являются дифференциальными уравнениями движения оболочки, а (1.19) – краевыми условиями, определяющими закрепление конструкции на опорном контуре; все эти соотношения, вместе с соответствующими начальными условиями, представляют математическую формулировку начально-краевой задачи о нестационарных колебаниях трехслойной сферической оболочки несимметричной структуры.

Для дальнейшего анализа удобно записать уравнения движения и краевые условия в безразмерной форме. С этой целью введем безразмерные параметры $E_*, E^*, h_*, h^*, r_*, r^*, R^*$:

$$E_* = \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1}, \quad E^* = \frac{E_3 h_3}{E_1 h_1}, \quad r_* = \frac{r_2 h_2}{r_1 h_1}, \quad r^* = \frac{r_3 h_3}{r_1 h_1}, \quad R^* = R/h_1,$$

безразмерные перемещения $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$:

$$\mathcal{U} = \frac{u}{R}, \quad \mathcal{V} = \frac{v}{R}, \quad \mathcal{W} = \frac{w}{R},$$

безразмерные усилия $\mathcal{F}_q, \mathcal{F}_j, \mathcal{F}_z, \mathcal{M}_q, \mathcal{M}_j$:

$$\mathcal{F}_q = \frac{F_q}{R} b, \quad \mathcal{F}_j = \frac{F_j}{R} b, \quad \mathcal{F}_z = \frac{F_z}{R} b, \quad \mathcal{M}_q = M_q b, \quad \mathcal{M}_j = M_j b, \quad b = \frac{1-n_1^2}{E_1 h_1}$$

и безразмерное время \mathcal{T} :

$$\mathcal{T} = t \left[R \sqrt{h_1 r_1 b} \right]^{-1}.$$

В новых переменных дифференциальные уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned}
& A \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + ctg\theta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathcal{U} \right] + B \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + C \mathcal{U} + K \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \psi - \mathcal{U} \right] + \frac{1}{2} C \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \\
& - (A + \frac{1}{2} C) \frac{ctg\theta}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi \partial \theta} - H \left[\psi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{ctg\theta}{\sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -I_1 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] - I_2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \\
& \frac{1}{2} C \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathcal{U} \right] + A \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} + (A + \frac{1}{2} C) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \varphi} \\
& + B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + K \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \gamma - \mathcal{U} \right] - \frac{1}{2} C \mathcal{U} - \\
& - \frac{1}{2} H \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \gamma - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varphi} - 2\gamma \right] - I_1 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] - I_2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varphi^2} + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \\
& K \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \psi - \mathcal{U} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right) \right] - \\
& - B \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + 2 \mathcal{U} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \mathcal{U} \right] - \\
& - H \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] - I_1 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \\
& D \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \psi \right] + F \psi - K \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \psi - \mathcal{U} \right] + \frac{1}{2} F \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \\
& - (D + \frac{1}{2} F) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} - H \left[\mathcal{U} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} G \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varphi \partial \theta} - I_2 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] - I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \\
& \frac{1}{2} F \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \gamma \right] + D \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varphi^2} + (D + \frac{1}{2} F) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{1}{2} G \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varphi} + K \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} + \gamma - \mathcal{U} \right] + \\
& + \frac{1}{2} H \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathcal{U} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \varphi} - 2 \mathcal{U} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \right] - \\
& - I_2 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} - \mathcal{U}_{\varphi\varphi} \right] - I_3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varphi^2} + \mathcal{U}_{\varphi} = 0, \tag{1.20}
\end{aligned}$$

а краевые условия могут быть сформулированы следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\frac{1}{2} C \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \gamma \right) \right] \sin \alpha - \right. \\
& \left. - \left[(A-C) \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) + A \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} + 2B \vartheta_0 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \varphi \right) \right] \cos \alpha + \vartheta_{11}^* \vartheta_0 + \hat{\vartheta}_{11}^* \varphi \right\} \Big|_{\Gamma} = 0 \\
& \left\{ \left[A \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) + (A-C) \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} + B \vartheta_0 + H \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} \theta} \right] \sin \alpha - \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{1}{2} C \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \gamma \right) \right] \cos \alpha + \vartheta_{22}^* \vartheta_0 + \hat{\vartheta}_{22}^* \gamma \right\} \Big|_{\Gamma} = 0 \\
& K \left\{ \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \gamma - \vartheta_0 \right] \sin \alpha - \left[\frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} + \varphi - \vartheta_0 \right] \cos \alpha + \vartheta_{33}^* \vartheta_0 \right\} \Big|_{\Gamma} = 0 \\
& \left\{ \left[\frac{1}{2} F \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \gamma \right) - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) \right] \sin \alpha - \right. \\
& \quad \left. - \left[(D-F) \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \varphi \right) + D \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \vartheta_0 + \vartheta_0 \right) \right] \cos \alpha + \varXi_{11}^* \varphi + \hat{\varXi}_{11}^* \vartheta_0 \right\} \Big|_{\Gamma} = 0 \\
& \left\{ \left[D \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} j} + \text{ctg} \theta \varphi \right) + (D-F) \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} \theta} + H \left(\frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} + \vartheta_0 \right) \right] \sin \alpha - \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{1}{2} F \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \varphi}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \gamma}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \gamma \right) - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} j} + \frac{\mathcal{I} \vartheta_0}{\mathcal{I} \theta} - \text{ctg} \theta \vartheta_0 \right) \right] \cos \alpha + \varXi_{22}^* \gamma + \hat{\varXi}_{22}^* \vartheta_0 \right\} \Big|_{\Gamma} = 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Здесь A, B, C, D, F, G, H – постоянные, зависящие от относительных параметров E_*, E^*, R^* и коэффициентов Пуассона материалов слоев n_1, n_2, n_3 :

$$A = 1 + E_* h_* \frac{1-n_1^2}{1-n_2^2} + E^* h^* \frac{1-n_1^2}{1-n_3^2}, \quad B = (1+n_1) \left[1 + E_* \frac{1-n_1}{1-n_2} + E^* \frac{1-n_1}{1-n_3} \right],$$

$$C = (1-n_1) \left[1 + E_* \frac{1+n_1}{1+n_2} + E^* \frac{1+n_1}{1+n_3} \right],$$

$$D = \frac{1}{4R^{*2}} \left[\frac{1}{3} + (1-\hat{h})^2 + E_* h_* \frac{1-n_1^2}{1-n_2^2} (2-\hat{h}) + E^* h^* \frac{1-n_1^2}{1-n_3^2} \hat{h} \right],$$

$$F = \frac{(1-n_1)}{4R^{*2}} \left[\frac{1}{3} + (1-\hat{h})^2 + E_* \frac{1+n_1}{1+n_2} (2-\hat{h}) + E^* \frac{1+n_1}{1+n_3} \hat{h} \right],$$

$$G = \frac{(1+n_1)}{4R^{*2}} \left[\frac{1}{3} + (1-\hat{h})^2 + E_* \frac{1-n_1}{1-n_2} (2-\hat{h}) + E_* \frac{1-n_1}{1-n_3} \hat{h} \right],$$

$$H = \frac{\hat{h}}{R^*} \left[(n_1-n_3) E_* \frac{1-n_1^2}{1-n_3^2} - (n_1-n_2) E_* \frac{1-n_1^2}{1-n_2^2} \right], \quad K = \frac{k^2}{2} (1-n_1), \quad \hat{h} = \frac{1}{A} \left[1 + 2E_* \frac{1-n_1^2}{1-n_2^2} \right],$$

а I_1, I_2, I_3 величины, зависящие также от относительных плотностей материалов слоев r_*, r^* и определяющие инерционные свойства конструкции:

$$I_1 = 1 + \frac{\hat{h}-1}{R^*} + \frac{(\hat{h}-1)^2 + 1/3}{4R^{*2}} + r_* \left[1 - \frac{2-\hat{h}}{2R^*} \right]^2 + r^* \left[1 + \frac{\hat{h}}{2R^*} \right]^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2R^*} \left[(\hat{h}-1) + \frac{(\hat{h}-1)^2 + 1/3}{R^*} + \frac{(\hat{h}-1)^3 + \hat{h}-1}{4R^{*2}} - r_* \left[1 - \frac{2-\hat{h}}{2R^*} \right]^2 (2-\hat{h}) + r^* \left[1 + \frac{\hat{h}}{2R^*} \right]^2 \hat{h} \right],$$

$$I_3 = \frac{1}{4R^{*2}} \left[(\hat{h}-1)^2 + 1/3 + \frac{(\hat{h}-1)^3 + \hat{h}-1}{R^*} + \frac{(\hat{h}-1)^4 + (\hat{h}-1)^2 + 1/10}{2R^{*2}} + r_* \left[1 - \frac{2-\hat{h}}{2R^*} \right]^2 (2-\hat{h})^2 + r^* \left[1 + \frac{\hat{h}}{2R^*} \right]^2 \hat{h}^2 \right].$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (1.20), совместно с краевыми условиями (1.21) и соответствующими начальными условиями, представляет математическую модель колебаний трехслойной непологой сферической оболочки несимметричного строения.

Интересно отметить, что, несмотря на громоздкий внешний вид, коэффициенты уравнений (1.20) полностью определяются восьмью безразмерными параметрами $E_*, E^*, R^*, \rho_*, \rho^*, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, а краевые условия – девятью безразмерными упругими характеристиками опорного контура.

Если внешнее динамическое воздействие $\dot{\mathbf{F}}_\Omega, \dot{\mathbf{M}}_\Omega$, массовые силы и функции, определяющие краевые и начальные условия, симметричны относительно оси z , то в системе (1.20) два уравнения (второе и пятое) удовлетворяются тождественно, а оставшиеся три могут быть представлены такими соотношениями:

$$\begin{cases} A \left[\frac{\eta^2 \vartheta_0}{\eta q^2} + ctg q \frac{\eta \vartheta_0}{\eta q} - \frac{1}{\sin^2 q} \vartheta_0 \right] + B \frac{\eta \vartheta_0}{\eta q} + C \vartheta_0 + K \left[\frac{\eta \vartheta_0}{\eta q} - \vartheta_0 \right] + (K-H) \gamma - I_1 \left[\frac{\eta^2 \vartheta_0}{\eta \vartheta_0} - \vartheta_0 \right] - I_2 \frac{\eta^2 \gamma}{\eta \vartheta_0} + \vartheta_0 = 0, \\ K \left[\frac{\eta^2 \vartheta_0}{\eta q^2} + \frac{\eta \gamma}{\eta q} - \frac{\eta \vartheta_0}{\eta q} + ctg q \left(\frac{\eta \vartheta_0}{\eta q} + \gamma - \vartheta_0 \right) \right] - B \left[\frac{\eta \vartheta_0}{\eta q} + 2 \vartheta_0 + ctg q \vartheta_0 \right] - H \left[ctg q \gamma + \frac{\eta \gamma}{\eta q} \right] - I_1 \left[\frac{\eta^2 \vartheta_0}{\eta \vartheta_0} - \vartheta_0 \right] + \vartheta_0 = 0, \\ D \left[\frac{\eta^2 \gamma}{\eta q^2} + ctg q \frac{\eta \gamma}{\eta q} - \frac{1}{\sin^2 q} \gamma \right] + F \gamma - K \gamma - (K-H) \left[u \frac{\eta \vartheta_0}{\eta q} - \vartheta_0 \right] - I_2 \left[\frac{\eta^2 \vartheta_0}{\eta \vartheta_0} - \vartheta_0 \right] - I_3 \frac{\eta^2 \gamma}{\eta \vartheta_0} + \vartheta_0 = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Рассмотрим следующие варианты формы границы оболочек:

- i) граница представляет собой две параллели Γ_1, Γ_2 ; соответствующая такой границе конструкция представляет собой кольцевую область;
- ii) граница совпадает с параллелью; в этом случае конструкция образует сферический сектор;
- iii) конструкция образует полную сферу.

В последнем случае оболочка, будучи незакрепленной, помимо деформирования, может совершать движение как твердое тело.

В случае кольцевой области контур Γ может быть образован параллелями Γ_1, Γ_2 , которым соответствуют угловые координаты $q = q_1, q = q_2$, и разрезом по меридиану Γ_3 ($j = 2pn, n = 0, 1, 2, \dots$), причем на Γ_3 должны выполняться условия периодичности, а на Γ_1, Γ_2 – условия упругого закрепления:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ (A - C)(ctgq \vartheta) + A \frac{\vartheta}{q} + 2B \vartheta + H(ctgq \gamma) \right\} \Big|_{q=q_1} = \Theta_{11}^* \vartheta + \hat{\Xi}_{11}^* \gamma, \\ & K \left\{ \frac{\vartheta}{q} + \gamma - \vartheta \right\} \Big|_{q=q_1} = \Theta_{33}^* \vartheta, \\ & \left\{ (D - F)(ctgq \gamma) + D \frac{\gamma}{j} + H(ctgq \vartheta + \vartheta) \right\} \Big|_{q=q_1} = \Xi_{11}^* \gamma + \hat{\Xi}_{11}^* \vartheta \\ & \left\{ (A - C)(ctgq \vartheta) + A \frac{\vartheta}{q} + 2B \vartheta + H(ctgq \gamma) \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Theta_{11}^{**} \vartheta - \hat{\Xi}_{11}^{**} \gamma, \\ & K \left\{ \frac{\vartheta}{q} + \gamma - \vartheta \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Theta_{33}^{**} \vartheta, \\ & \left\{ (D - F)(ctgq \gamma) + D \frac{\gamma}{j} + H(ctgq \vartheta + \vartheta) \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Xi_{11}^{**} \gamma - \hat{\Xi}_{11}^{**} \vartheta \end{aligned} \right. \quad (1.23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ (A - C)(ctgq \vartheta) + A \frac{\vartheta}{q} + 2B \vartheta + H(ctgq \gamma) \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Theta_{11}^{**} \vartheta - \hat{\Xi}_{11}^{**} \gamma, \\ & K \left\{ \frac{\vartheta}{q} + \gamma - \vartheta \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Theta_{33}^{**} \vartheta, \\ & \left\{ (D - F)(ctgq \gamma) + D \frac{\gamma}{j} + H(ctgq \vartheta + \vartheta) \right\} \Big|_{q=q_2} = -\Xi_{11}^{**} \gamma - \hat{\Xi}_{11}^{**} \vartheta \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

Краевые условия для сферического сектора могут быть сформулированы, как (1.23) и условия ограниченности при $q = 0$, т. е.:

$$\vartheta|_{q=0} < \infty, \gamma|_{q=0} < \infty, \vartheta|_{q=0} < \infty. \quad (1.25)$$

Для полной сферы краевые условия имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \vartheta|_{q=0} < \infty, \gamma|_{q=0} < \infty, \vartheta|_{q=0} < \infty, \\ \vartheta|_{q=p} < \infty, \gamma|_{q=p} < \infty, \vartheta|_{q=p} < \infty. \end{aligned} \right. \quad (1.26)$$

Начальные условия, соответствующие рассматриваемым задачам, могут быть заданы в форме:

$$\left\{ \begin{aligned} \vartheta|_{t=0} = Ru_0, \gamma|_{t=0} = \gamma_0, \vartheta|_{q=0} = R\omega_0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_{t=0} = R\dot{\omega}_0, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\gamma}_0, \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_{t=0} = R\dot{\omega}_0. \end{aligned} \right. \quad (1.27)$$

2. В области $D = \{(\theta_1, \theta_2) \times [0, T]\}$, $T < \infty$ рассмотрим гиперболическую начально-краевую задачу, считая, что $\mathbf{f}(\theta, t)$ является заданной, а $\mathbf{y}(\theta, t)$ – искомой вектор-функцией:

$$A[\mathbf{y}(\theta, t)] - H \frac{\partial^2 \mathbf{y}(\theta, t)}{\partial t^2} = \mathbf{f}(\theta, t), \quad \mathbf{y}(\theta, t), \mathbf{f}(\theta, t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)] \Big|_{\theta_1} = 0, \quad \mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)] \Big|_{\theta_2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}(\theta, t) \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0(\theta), \quad \partial/\partial t \mathbf{y}(\theta, t) \Big|_{t=0} = \dot{\mathbf{y}}_0(\theta). \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{H} – положительно определенная симметрическая матрица размерностью $n \times n$;
 $\mathbf{A}[\mathbf{y}(\theta, t)]$ – самосопряженное дифференциальное выражение с переменными матричными коэффициентами:

$$\mathbf{A}[\mathbf{y}(\theta, t)] \equiv \sum_{r=0}^2 a_r(\theta) \frac{\partial^{2-r}}{\partial \theta^{2-r}} \mathbf{y}(\theta, t), \quad \theta \in I = (\theta_1, \theta_2), \quad \forall \theta \det[a_0(\theta)] \neq 0, \quad (2.4)$$

а $\mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)]|_{\theta_1, \theta_2}$ – краевые условия разделенного типа.

В дальнейшем будем полагать, что элементы матрицы $\mathbf{a}_0(\theta)$ – непрерывны в интервале $]\theta_1, \theta_2[$, а элементы $\mathbf{a}_1(\theta)$ и $\mathbf{a}_2(\theta)$ соответственно дифференцируемы и дважды дифференцируемы в том же интервале; все эти функции либо равномерно ограничены на $]\theta_1, \theta_2[$, либо имеют особенности на концах интервала $\theta = \theta_1$ или $\theta = \theta_2$. В первом случае дифференциальная операция (2.4) порождает регулярную начально-краевую задачу (2.1) – (2.3), во втором – сингулярную [9].

В регулярном случае краевые условия (2.2) могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)]|_{\theta_1} \equiv \left[\mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{y}(\theta, t) + (\mathbf{c} + \mathbf{Z}_1) \mathbf{y}(\theta, t) \right]_{\theta=\theta_1}, \quad \mathbf{B}[\mathbf{y}(\theta, t)]|_{\theta_2} \equiv \left[\mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{y}(\theta, t) + (\mathbf{c} - \mathbf{Z}_2) \mathbf{y}(\theta, t) \right]_{\theta=\theta_2}, \quad (2.5)$$

причем матрицы \mathbf{b} , \mathbf{c} и $\mathbf{Z}_{1,2}$ имеют размерность $n \times n$ и выбираются таким образом, чтобы $2n$ соотношений (2.5) были линейно независимы.

Для сингулярной задачи краевые условия (2.2) формулируются либо в терминах предельных равенств, либо в форме условий ограниченности:

$$\mathbf{y}(\theta)|_{\theta=\theta_1} < \infty, \quad \mathbf{y}(\theta)|_{\theta=\theta_2} < \infty. \quad (2.6)$$

Количество линейно-независимых соотношений в этом случае может быть меньше $2n$; оно определяется индексом дефекта минимального сингулярного оператора, порождаемого операцией (2.4).

Введем гильбертово пространство $\dot{L}_2^\mu(\theta_1, \theta_2)$ (для оболочки $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$), то есть пространство всех квадратично суммируемых вектор-функций в интервале (θ_1, θ_2) ; обозначим его через H и определим в нем скалярное произведение следующим образом

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_\mu = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{v}^T \mu \mathbf{w} d\theta, \quad (2.7)$$

где $\mu = \mu(\theta)$ – матрица весовых функций.

Аксиомы скалярного произведения накладывают ограничения на матрицу μ , которая должна быть симметрической, а $\forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ соответствующая квадратичная форма $\{\mathbf{v}^T \mu \mathbf{v}\}$ – положительно определенной.

Введем пространство L как совокупность всех последовательностей векторов $\{\mathbf{f}_i\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{f}_i|^2 < \infty, \quad (2.8)$$

В дальнейшем будем называть L пространством изображений. Интегральное преобразование задается двойственными линейными операторами:

$$F[\mathbf{f}(q)] = \{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{G}^T(q, l_i) \mathbf{f}(q) dq \right\}_{i=1}^{\infty}, \quad l_i \in \Lambda; \quad (2.9)$$

$$F^{-1}[\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{\infty}] = \mathbf{f}(q) = \mathbf{H} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{K}(q, l_i) \mathbf{f}_i; \quad \mathbf{f}(q) \in H, \quad \{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{\infty} \in L, \quad (2.10)$$

где Λ – счетное (спектральное) множество действительных чисел, $\mathbf{K}(q, l)$, $\mathbf{G}(q, l)$ – матричные ядра интегрального преобразования, такие, что:

а) преобразования (2.9), (2.10) осуществляют изометрическое отображение H на L и L на H ; при этом представление (2.10) сходится;

б) прямое преобразование (2.9) обладает операционным свойством:

$$F[A[\mathbf{f}(q)]] \equiv F[-l \mathbf{H} \mathbf{f}(q)]. \quad (2.11)$$

Принципиальное отличие построенного здесь матричного конечного интегрального преобразования (2.9), (2.10) от известных аналогов [10, 11, 12] заключается в том, что его ядра $\mathbf{K}(q, l_i)$ и $\mathbf{G}(q, l_i)$ представляют собой прямоугольные матрицы-функции, а элементы пространства изображений (трансформанты интегральных преобразований) являются векторами, а не скалярами, как в [10]. Подобное обобщение оказалось необходимым для исследования динамических задач с кратным спектром (внутренними резонансами [3, 6]), поскольку в этих случаях традиционная форма преобразования не обеспечивает разложения по полной системе собственных вектор-функций.

В частном случае простого спектра, т. е. при отсутствии внутренних резонансов, размерность $\mathbf{f}(l)$ равна единице, и преобразования (2.9), (2.10) совпадают с многокомпонентными конечными интегральными преобразованиями, сформулированными в [10].

Использование конечного интегрального преобразования с матричным ядром позволяет привести начально-краевую задачу к последовательности задач Коши для гармонического осциллятора. Для этого воспользуемся операторным тождеством:

$$F(A - \mathbf{H} \mathcal{J}^2 / \mathcal{J} t^2) \equiv -(I + \mathcal{J}^2 / \mathcal{J} t^2) F \mathbf{H}, \quad (2.12)$$

которое непосредственно следует из операционного свойства, и справедливо

$\forall \mathbf{u}(q, t) \in H \times C_1^2$ в силу изоморфизма отображения $H \rightarrow L$.

Действуя прямым преобразованием F на левую и правую части дифференциального выражения (2.1), а также на начальные условия (2.3), умноженные слева на матрицу \mathbf{H}^2 , получим в пространстве изображений $L \times C_1^2$ последовательность задач Коши:

$$(I_i - \mathcal{J}^2 / \mathcal{J} t^2) \mathbf{f}(l_i, t) = -\mathbf{\Phi}(l_i, t), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{f}(l_i, t)|_{t=0} = F[\mathbf{H} \mathbf{u}_0(q)] = \mathbf{f}_0(l_i), \quad \mathcal{J} / \mathcal{J} t \mathbf{f}(l_i, t)|_{t=0} = F[\mathbf{H} \mathbf{g}_0(q)] = \mathbf{y}_0(l_i), \quad (2.14)$$

где

$$\mathbf{f}(l_i, t) = F[\mathbf{H} \mathbf{u}(q, t)], \quad \mathbf{\Phi}(l_i, t) = F[\mathbf{f}(q, t)].$$

Решения задач (2.13), (2.14) могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{f}(l_i, t) = \mathbf{f}_0(l_i) \cos(I_i^{1/2} t) + I_i^{-1/2} \mathbf{y}_0(l_i) \sin(I_i^{1/2} t) + I_i^{-1/2} \int_0^t \sin(I_i^{1/2} (t-t)) \mathbf{\Phi}(l_i, t) dt. \quad (2.15)$$

² Поскольку $\mathbf{\Phi}(\lambda_i, t)$ является образом $\mathbf{H} \mathbf{u}(\theta, t)$.

Выполняя операцию обращения

$$\mathbf{H} \mathbf{u}^{\mathbf{r}}(q, t) = F^{-1} [j^{\mathbf{r}}(l), q] = \mathbf{H} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{G}(q, l_i) j^{\mathbf{r}}(l_i),$$

получим спектральное представление решения задачи:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{r}}(q, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{G}(q, l_i) j^{\mathbf{r}}(l_i). \quad (2.16)$$

При выполнении условия (2.8) разложение сходится в метрике \mathbf{H} , причем в силу изоморфизма отображения $L \rightarrow \mathbf{H}$ оно сходится именно к решению задачи (2.1)–(2.3).

В представлениях (2.9), (2.10) определяющую роль играют ядра преобразования $\mathbf{K}(q, l_i)$ и $\mathbf{G}(q, l_i)$, причем их построение оказывается различным для регулярного и сингулярных вариантов задачи.

В регулярном случае матрицы $\mathbf{K}(q, l_i)$, $\mathbf{G}(q, l_i)$ порождаются фундаментальной матрицей частных решений $\mathbf{Y}(q, l) = (\mathbf{v}_1^{\mathbf{r}}(q, l) \dots \mathbf{v}_{2n}^{\mathbf{r}}(q, l))$ обобщенного уравнения Штурма–Лиувилля

$$A[\mathbf{v}^{\mathbf{r}}(q, l)] = -l \mathbf{H} \mathbf{v}^{\mathbf{r}}(q, l) \quad (2.17)$$

при условиях следующей теоремы:

Теорема 1. Если оператор A – самосопряженный в метрике \mathbf{H} , т. е.

$$\forall \mathbf{u}^{\mathbf{r}}, \mathbf{v}^{\mathbf{r}} \in D \quad (\mathbf{u}^{\mathbf{r}}, A[\mathbf{v}^{\mathbf{r}}])_m = (A[\mathbf{u}^{\mathbf{r}}], \mathbf{v}^{\mathbf{r}})_m, \text{Ker}[A] \equiv 0,$$

и матрица $m\mathbf{H}$ симметричная и положительно определенная, то спектральное множество Λ представляет счетную возрастающую последовательность действительных чисел с предельной точкой на ∞ , причем

$$\Lambda = \{l_i \mid l_i \in R, \det[B(l_i)] = 0\}, B(l) = \left(\frac{[\mathbf{b} \frac{f}{q} \mathbf{Y}(q, l) + (\mathbf{c} + \mathbf{Z}_1) \mathbf{Y}(q, l)]|_{q=q_1}}{[\mathbf{b} \frac{f}{q} \mathbf{Y}(q, l) + (\mathbf{c} - \mathbf{Z}_2) \mathbf{Y}(q, l)]|_{q=q_2}} \right),$$

а ядра преобразования определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{K}(q, l) = \mathbf{Y}(q, l) \mathbf{S}(l) \mathbf{N}(l), \mathbf{G}(q, l) = m(q) \mathbf{K}(q, l),$$

где $\mathbf{S}(l)$ – нулевые подпространства матрицы $B(l)$, $\mathbf{N}(l)$ – нормирующая матрица:

$$\mathbf{N}(l_i) = (\mathbf{S}(l_i)^T \mathbf{Q}(l_i) \mathbf{S}(l_i))^{-1/2}; \mathbf{Q}(l_i) = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{Y}(q, l_i)^T m(q) \mathbf{H} \mathbf{Y}(q, l_i) dq.$$

Доказательство теоремы осуществляется в рамках стандартных построений спектральной теории самосопряженных операторов [8].

В сингулярных случаях определяющую роль играет индекс дефекта оператора A , т. е. число решений уравнения (2.17) при $\text{Im}[l] \neq 0$, принадлежащих \mathbf{H} , причем эти решения могут быть как действительными, так и комплексными функциями.

В дальнейшем индекс дефекта A будем обозначать символом m . При этом суммарное количество линейно - независимых выражений, определяющих краевые условия на левом и правом концах интервала (q_1, q_2) , также равно m , причем в общем случае $m \leq 2n$.

Для удобства изложения введем сокращенные матрицы краевых условий $\hat{\mathbf{b}}_1(q), \hat{\mathbf{c}}_1(q), \hat{\mathbf{Z}}_1$ и $\hat{\mathbf{b}}_2(q), \hat{\mathbf{c}}_2(q), \hat{\mathbf{Z}}_2$ соответственно размерностью $n \times m_1$ и $n \times m_2$, причем $m_1 + m_2 = m$. Тогда краевые условия задачи принимают вид:

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(q, t)]|_{q_1} \equiv \lim_{q \rightarrow q_1+0} \left[\hat{\mathbf{b}}_1 \frac{q}{q} \mathbf{y}(q, t) + (\hat{\mathbf{c}}_1 + \hat{\mathbf{Z}}_1) g(q) \mathbf{y}(q, t) \right],$$

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(q, t)]|_{q_2} \equiv \lim_{q \rightarrow q_2-0} \left[\hat{\mathbf{b}}_2(q) \frac{q}{q} \mathbf{y}(q, t) + (\hat{\mathbf{c}}_2(q) - \hat{\mathbf{Z}}_2) \mathbf{y}(q, t) \right].$$

Здесь $g(q)$ – весовая функция. Условия ограниченности представляют собой частный случай соотношений $\hat{\mathbf{u}}(\theta, t)$:

$$\mathbf{B}[\mathbf{y}(q, t)]|_{q_i} \equiv \lim_{q \rightarrow q_i+0} [g(q) \mathbf{y}(q, t)].$$

В сингулярном случае матрицы $\mathbf{K}(q, I_i), \mathbf{G}(q, I_i)$ порождаются сокращенной фундаментальной матрицей частных решений уравнения (2.17), принадлежащих \mathbf{H} . При этом возможность представления формулы обращения в форме ряда (2.10) определяется условиями следующей теоремы:

Теорема 2. Если оператор A – самосопряженный в метрике \mathbf{H} , т. е.

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D \quad (\mathbf{u}, A[\mathbf{v}])_m = (A[\mathbf{u}], \mathbf{v})_m, \text{Ker}[A] \equiv 0,$$

матрица \mathbf{H} симметричная и положительно определенная, и в \mathbf{H} существует m действительных линейно – независимых решения уравнения (2.17) $\mathbf{v}_i(q, I), i = 0, 1, \dots, m$, то спектральное множество Λ представляет счетную возрастающую последовательность действительных чисел с предельной точкой на ∞ , причем

$$\Lambda = \{I_i \mid I_i \in R, \det[\hat{B}(I_i)] = 0\}, \quad \hat{B}(I) = \left(\frac{\lim_{q \rightarrow q_1} [\hat{\mathbf{b}}_1 \frac{q}{q} \hat{\mathbf{Y}}(q, I) + (\hat{\mathbf{c}}_1 + \hat{\mathbf{Z}}_1) g_1(q) \hat{\mathbf{Y}}(q, I)]}{\lim_{q \rightarrow q_2} [\hat{\mathbf{b}}_2 \frac{q}{q} \hat{\mathbf{Y}}(q, I) + (\hat{\mathbf{c}}_2 - \hat{\mathbf{Z}}_2) g_2(q) \hat{\mathbf{Y}}(q, I)]} \right),$$

где $\hat{\mathbf{Y}}(\theta, \lambda) = (\mathbf{v}_1(\theta, \lambda) \dots \mathbf{v}_m(\theta, \lambda))$ – сокращенная фундаментальная матрица, а ядра преобразования определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{K}(q, I) = \hat{\mathbf{Y}}(q, I) \hat{\mathbf{S}}(I) \hat{\mathbf{N}}(I), \mathbf{G}(q, I) = m(q) \mathbf{K}(q, I).$$

Здесь $\hat{\mathbf{S}}(I)$ – нулевые подпространства матрицы $\hat{B}(I)$, $\hat{\mathbf{N}}(I)$ – нормирующая матрица:

$$\hat{\mathbf{N}}(I_i) = (\hat{\mathbf{S}}(I_i)^T \hat{\mathbf{Q}}(I_i) \hat{\mathbf{S}}(I_i))^{-1/2}; \quad \hat{\mathbf{Q}}(I_i) = \int_{q_1}^{q_2} \hat{\mathbf{Y}}(q, I_i)^T m(q) \mathbf{H} \hat{\mathbf{Y}}(q, I_i) dq.$$

Доказательство теоремы также осуществляется по стандартной методике [8].

Заметим, в условиях теоремы требуется построить m действительных линейно-независимых фундаментальных решений, в то время как при определении индекса дефекта система m линейно-независимых решений может быть комплексной.

В случаях, когда нулевое подпространство $\text{Ker } A \neq 0$, построения теорем 1, 2 сохраняют смысл только тех правых частей $\hat{\mathbf{f}}(q, t)$, которые ортогональны подпространству $\text{Ker } A$, размерностью $g \leq 2n$. Для произвольной вектор-функции $\hat{\mathbf{f}}(q, t)$ это условие может не выполняться, однако ее всегда можно представить в виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_m, \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{f} - \sum_{i=1}^g (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \quad (2.18)$$

где \mathbf{e}_i – ортонормированный базис пространства $Ker A$.

По построению $\mathbf{f}_0 \perp Ker A$ и для нее справедливо представление в форме спектрального разложения (2.16). Второе слагаемое (2.18) \mathbf{f}_m определяет «вырожденный случай» ($\lambda=0$) уравнения (2.13):

$$\frac{\partial}{\partial t^2} \mathbf{J}^{\mathbf{r}}(0, t) = -\mathbf{\Phi}^{\mathbf{r}}(0, t).$$

Здесь $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{r}}(0, t) = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{x}(0)^m \cdot m \mathbf{f}_m^{\mathbf{r}}(q) dq$, а $\mathbf{x}(q) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ – матрица, столбцы которой

представляют собой орты базиса пространства $Ker A$. Решение может быть записано в виде:

$$\mathbf{J}^{\mathbf{r}}(0, t) = -\int_0^t \int_0^{t_2} \mathbf{\Phi}^{\mathbf{r}}(0, t_1) dt_1 dt_2 + c_1 t + c_2, \quad c_1 = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{x}(q)^{\circ} m H u_0(q) dq, \quad c_2 = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{x}(q)^{\circ} m H u_0 dq,$$

$$y_m = \mathbf{x}(q) \cdot \mathbf{J}^{\mathbf{r}}(0, t).$$

Общее решение задачи в этом случае может быть представлено в следующей форме:

$$y(q, t) = y_0(q, t) + y_m(q, t).$$

Здесь $y_0(q, t)$ – спектральное разложение (2.16) с правой частью $\mathbf{f}_0 \perp Ker A$.

Следует отметить, что применительно к динамическим задачам, теории оболочек $y_0(q, t)$ соответствует деформированию конструкции, тогда как $y_m(q, t)$ – ее движению как абсолютно твердого тела. Подобная ситуация возникает, в частности, при исследовании динамики полной (не закрепленной) сферы.

Формула обращения (2.10) содержит нормирующую матрицу $\mathbf{Q}(I_i)$, определяемую квадратурами от различных комбинаций специальных функций. Непосредственное вычисление подобных интегралов связано с известными трудностями и невыполнимо в общем виде. Однако в тех случаях, когда подынтегральные выражения порождены самосопряженными дифференциальными операциями, при известной матрице фундаментальных решений $\mathbf{Y}(q, I)$, точное вычисление $\mathbf{Q}(I_i)$ осуществляется достаточно просто:

$$\mathbf{Q}(I) = \left\{ \frac{\int \mathbf{Y}(q, I)^T \mathbf{P}(q) \int \mathbf{Y}(q, I)}{\int I} - \frac{\int^2 \mathbf{Y}(q, I)^T \mathbf{P}(q) \mathbf{Y}(q, I)}{\int I \int q} - \frac{\int \mathbf{Y}(q, I)^T \mathbf{Z}(q) \mathbf{Y}(q, I)}{\int I} \right\}_{q=q_1}^{q=q_2}, \quad (2.19)$$

где

$$\mathbf{P}(q) = m(q) \mathbf{a}_0(q), \quad \mathbf{Z}(q) = \frac{1}{q} [m(q) \mathbf{a}_0(q)] - m(q) \mathbf{a}_1(q).$$

Обоснование этой формулы приведено в работе [13].

Все приведенные построения предполагают, что оператор A является самосопряженным в H . Ниже приведены соотношения, позволяющие проверить самосопряженность по

виду матричных коэффициентов оператора A и подобрать соответствующую метрику μ в пространстве H (матрицу весовых функций).

Теорема 3. Если матрица весовых функций μ является частным решением системы уравнений:

$$\mathbf{a}_1^T \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{a}_1 = 2(\mathbf{m} \mathbf{a}_0)' ,$$

и при этом коэффициенты $\mathbf{a}_r(\theta)$ ($r = 0, 1; 2$) оператора A удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{m} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0^T \mathbf{m} , 2(\mathbf{a}_2^T \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1^T \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{a}_1)' ,$$

а матрицы $\mathbf{b}_{1,2}$ и $\mathbf{c}_{1,2}$, входящие в краевые условия, тождеству

$$\left[\mathbf{R}^T \mathbf{m} \mathbf{a}_0 - \mathbf{m} \mathbf{a}_0 \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \left((\mathbf{m} \mathbf{a}_0)' - \mathbf{m} \mathbf{a}_1 \right) \mathbf{R} \right] \equiv 0 , \mathbf{R}|_{q=q_1} = -\mathbf{c}_1^{-1} \mathbf{b}_1 , \mathbf{R}|_{q=q_2} = -\mathbf{c}_2^{-1} \mathbf{b}_2 ,$$

то A – самосопряженный оператор в H .

Доказательство приведено в [13].

Для построения конкретных спектральных разложений удобными оказываются представления, несколько отличается от (2.9), (2.10), а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{\mathbf{r}}(l, t) &= \int_{q_1}^{q_2} Y(q, l)^T \mathbf{m}(q) \left\{ \mathbf{H} \left[\mathbf{y}_0^{\mathbf{r}}(q) \cos(l^{1/2} t) + l^{-1/2} \mathbf{y}_0^{\mathbf{r}}(q) \sin(l^{1/2} t) \right] - \right. \\ &\quad \left. - l^{-1/2} \int_0^t \mathbf{f}^{\mathbf{r}}(q, t) \sin(l^{1/2}(t-t)) dt \right\} dq , \\ \mathbf{y}^{\mathbf{r}}(q, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}(q, l_i) \mathbf{V}(l_i) \mathbf{j}^{\mathbf{y}}(l_i, t) , \quad l_i \in \Lambda , \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{V}(l_i) = \mathbf{S}(l_i) \left[\mathbf{S}(l_i)^T \mathbf{Q}(l_i) \mathbf{S}(l_i) \right]^{-1} \mathbf{S}(l_i)^T .$$

Подобная формулировка позволяет получить векторную трансформату фиксированной размерности $\mathbf{F}^{\mathbf{r}}(\lambda, t)$ как аналитическую векторную функцию $\mathbf{j}^{\mathbf{r}}(l, t)$.

3. Представим уравнения движения оболочки (1.22) и краевые условия (1.23), (1.24) в матричной форме. Соответствующие матричные коэффициенты могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} , \quad \mathbf{a}_1(q) = \begin{pmatrix} A \operatorname{ctg} q & B+K & 0 \\ -(B+K) & K \operatorname{ctg} q & K-H \\ 0 & H-K & D \operatorname{ctg} q \end{pmatrix} , \\ \mathbf{a}_2(q) &= \begin{pmatrix} C - A/\sin^2 q - K & 0 & K-H \\ -(B+K) \operatorname{ctg} q & -2B & (K-J) \operatorname{ctg} q \\ K-H & 0 & F+K - D/\sin^2 q \end{pmatrix} , \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & I_2 \\ 0 & I_1 & 0 \\ I_2 & 0 & I_3 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(\theta) = \begin{pmatrix} (A-C)\operatorname{ctg}\theta & 2B & H\operatorname{ctg}\theta \\ -K & 0 & K \\ H\operatorname{ctg}\theta & H & (D-F)\operatorname{ctg}\theta \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Z}_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} & 0 & \chi_{1,2} \\ 0 & \beta_{1,2} & 0 \\ \chi_{1,2} & 0 & \gamma_{1,2} \end{pmatrix},$$

Согласно теореме 3 матрица весовых функций $\mu(\theta)$ определяется решением матричного дифференциального уравнения:

$$\begin{pmatrix} A \operatorname{ctg} q & -(B+K) & 0 \\ B+K & K \operatorname{ctg} q & H-K \\ 0 & K-H & D \operatorname{ctg} q \end{pmatrix} m(q) + m(q) \begin{pmatrix} A \operatorname{ctg} q & B+K & 0 \\ -(B+K) & K \operatorname{ctg} q & K-H \\ 0 & H-K & D \operatorname{ctg} q \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} m(q) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

которое с точностью до несущественных постоянных может быть записано в виде

$$m(q) = \mathbf{E} \sin q.$$

Из диагональности матриц μ и \mathbf{a}_0 следует, что

$$m \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0^T m.$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что матрицы коэффициентов \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 удовлетворяют остальным соотношениям теоремы 3, т. е.

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}q} (\mathbf{a}_1^T m - m \mathbf{a}_1) = 2 (\mathbf{a}_2^T m - m \mathbf{a}_2),$$

Матрицы краевых условий $\mathbf{R}|_{q=q_1} = -\mathbf{c}_1^{-1} \mathbf{b}_1$, $\mathbf{R}|_{q=q_2} = -\mathbf{c}_2^{-1} \mathbf{b}_2$ – равенствам:

$$\left\{ \mathbf{R}^T m \mathbf{a}_0 - m \mathbf{a}_0 \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \left((m \mathbf{a}_0)' - m \mathbf{a}_1 \right) \mathbf{R} \right\} \Big|_{q=q_1, q_2} = 0.$$

Для построения матрицы $\mathbf{Y}(q, I)$ осуществим интегрирование системы дифференциальных уравнений (2.17):

$$\begin{cases} A(v_1'' + \operatorname{ctg} q v_1' - v_1/\sin^2 q) + B v_2' + C v_1 + K(v_2' - v_1) + (K-H)v_3 + I(I_1 v_1 + I_2 v_3) = 0, \\ K[v_2'' + (v_2' - v_1 + v_3) \operatorname{ctg} q - v_1' + v_3'] - B(v_1' + v_1 \operatorname{ctg} q + 2v_2) + I I_1 v_2 = 0, \\ D(v_3'' + \operatorname{ctg} q v_3' - v_3/\sin^2 q) + F v_3 - K v_3 - (K-H)(v_2' - v_1) + I(I_2 v_1 + I_3 v_3) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для нахождения частных решений (3.3) введем потенциальные функции:

$$\Pi' = v_1, \quad \Phi' = v_3. \quad (3.4)$$

Обозначив символом ∇^2 дифференциальный оператор Лежандра

$$\nabla^2 \equiv \frac{d^2}{dq^2} + \operatorname{ctg} q \frac{d}{dq}.$$

и принимая во внимание (3.4), запишем уравнения (3.3) в виде:

$$\begin{cases} A(\nabla^2\Pi' - \Pi'/\sin^2 q) + Bv_2' + C\Pi' + K(v_2' - \Pi') + (K - H)\Phi' + I(I_1\Pi' + I_2\Phi') = 0, \\ K\nabla^2v_2 - (K + B)\nabla^2\Pi + (K - H)\nabla^2\Phi + (I I_1 - 2B)v_2 = 0, \\ D(\nabla^2\Phi' - \Phi'/\sin^2 q) + F\Phi' - K\Phi' - (K - H)(v_2' - \Pi') + I(I_2\Pi' + I_3\Phi') = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Интегрируем первое и последние уравнения (3.5):

$$\begin{cases} A\nabla^2\Pi + Bv_2 + C\Pi + K(v_2 - \Pi) + (K - H)\Phi + \lambda(I_1\Pi + I_2\Phi) = C_1, \\ K\nabla^2v_2 - (K + B)\nabla^2\Pi + (K - H)\nabla^2\Phi + (\lambda I_1 - 2B)v_2 = 0, \\ D\nabla^2\Phi + F\Phi - K\Phi - (K - H)(v_2 - \Pi) + \lambda(I_2\Pi + I_3\Phi) = C_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Так как в дальнейшем нас будут интересовать только производные от Π и Φ , то можно принять $C_1 = C_2 = 0$. Представим (3.6) в матричной форме. Имеем:

$$\mathbf{b}_0\nabla^2\mathbf{z} + (\mathbf{b}_1 + I\mathbf{H})\mathbf{z} = 0, \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \Pi \\ v_2 \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -K - B & K & K - H \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} C - K & B + K & K - H \\ 0 & -2B & 0 \\ K - H & H - K & F - K \end{pmatrix}.$$

Поскольку соотношения (3.7) представляют собой линейную однородную систему с постоянными коэффициентами относительно дифференциального оператора ∇^2 , то ее частные решения могут быть представлены как линейные комбинации решений уравнения Лежандра:

$$\nabla^2 L(q) + n(n+1)L(q) = 0.$$

которыми для произвольных степеней n являются функций Лежандра первого и второго рода $P_n(\cos q)$, $Q_n(\cos q)$. Таким образом:

$$\mathbf{z} = (a \ b \ c)^T L_n(q), \quad L_n(q) = P_n(\cos q) \text{ где } Q_n(\cos q). \quad (3.8)$$

Постоянные a, b, c определяются в результате решения однородной алгебраической системы уравнений, получаемой при подстановке (3.8) в (3.7):

$$\begin{pmatrix} C - K - Ax + II_1 & B + K & K - H + II_2 \\ (K + B)x & -Kx - 2B + II_1 & (H - K)x \\ K - H + II_2 & H - K & F - K - Dx + II_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \quad (3.9)$$

где $x = n(n+1)$.

Условие обращения в нуль определителя системы (3.9) позволяет вычислить значения параметра ξ как корни кубического уравнения:

$$x^3 g + x^2(j_1 I + j_0) + x(y_2 I^2 + y_1 I + y_0) + J_3 I^3 + J_2 I^2 + J_1 I + J_0 = 0, \quad (3.10)$$

где:

$$\begin{aligned}
g &= -ADK; \quad J_3 = I_1 W_6; \quad J_2 = I_1 (I_1 (F - K) + 2I_2 W_5 - I_3 W_3) - 2B W_6; \\
J_1 &= I_1 (W_2 (2B - C) - W_1) - 2B (2I_2 W_5 - I_3 W_3); \quad J_0 = 2B (W_1 + C W_2); \\
y_0 &= 2B (W_2 (B/2 - A) - W_1 - D W_3) - C W_1; \quad y_1 = I_1 (A W_2 - W_1 + D (W_3 + 2B)) + 2B I_2 W_5 - I_3 W_4; \\
y_2 &= I_2^2 K - I_1^2 D - I_1 I_3 (A + K); \quad j_0 = A W_1 - D W_4; \quad j_1 = I_1 D (A + K) + A K I_3; \quad W_1 = H^2 - K (2H + F); \\
W_2 &= K - F; \quad W_3 = K - C; \quad W_4 = K C + B (B + 2(K - A)); \quad W_5 = H - K; \quad W_6 = I_1 I_3 - I_2^2.
\end{aligned}$$

При известных значениях x_k , $k=1,2,3$ величины a, b, c с точностью до произвольного множителя определяются из (3.9):

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mathbf{r} L_n(q) = \begin{pmatrix} ((I I_1 - K x - 2B)(I I_3 - D x - W_2) - x W_5^2) L_n(q) \\ x (W_5 (I I_2 - W_5) - (B + K)(I I_3 - D x - W_2)) L_n(q) \\ ((B + K) x W_5 - (I I_2 - W_5)(I I_1 - K x - 2B)) L_n(q) \end{pmatrix}.$$

Учитывая рекуррентную зависимость между обычными и присоединенными функциями Лежандра:

$$\frac{d}{dq} P_n(\cos q) = P_n'(\sin q), \quad \frac{d}{dq} Q_n(\cos q) = Q_n'(\sin q),$$

возвращаемся от введенных потенциалов к частным решениям системы (3.3).

Для этого продифференцируем первый и последний компоненты вектора \mathbf{z} . Имеем:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2 \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((I I_1 - K x - 2B)(I I_3 - D x - W_2) - x W_5^2) L_n^1(q) \\ x (W_5 (I I_2 - W_5) - (B + K)(I I_3 - D x - W_2)) L_n(q) \\ ((B + K) x W_5 - (I I_2 - W_5)(I I_1 - K x - 2B)) L_n^1(q) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

В случае, когда все три корня уравнения (3.10) различны, три соответствующих пары решений (3.3) являются линейно независимыми и формируют фундаментальную систему:

$$\mathbf{Y}(q, I) = (\mathbf{v}_1(q, I), \dots, \mathbf{v}_6(q, I)). \quad (3.12)$$

Особым является случай кратных корней. Сначала предположим, что совпадают только два корня (например, $x_1 = x_2$). Тогда в качестве решения используется предельное отношение:

$$\mathbf{v}(x_2, q) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{1}{x - x_1} [\mathbf{v}(x, q) - \mathbf{v}(x_2, q)].$$

Поскольку $\mathbf{v}(x, q)$ – аналитические функции, неопределенность может быть раскрыта по правилу Лопиталья:

$$\mathbf{v}(x_2, q) = \frac{\mathcal{J} \mathbf{v}(x, q)}{\mathcal{J} x} \Big|_{x=x_2},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v}(x_2, q) = \begin{pmatrix} (A_1 A_2 - x W_5^2) V_n^1(q) + (B_1 A_2 + A_1 B_2 - W_5^2) L_n^1(q) \\ x (W_5 A_3 - A_4 A_2) V_n(q) + (W_5 A_3 - A_4 A_2 + x W_5 B_3 - x A_4 B_2) L_n(q) \\ (A_4 x W_5 - A_3 A_1) V_n^1(q) + (A_4 W_5 - B_3 A_1 + A_3 B_1) L_n^1(q) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= l I_1 - K x - 2B, & B_1 &= l' I_1 - K, \\
A_2 &= l I_3 - D x - W_2, & B_2 &= l' I_3 - D, \\
A_3 &= l I_2 - W_3, & A_4 &= B + K, & B_3 &= l' I_2 \\
l' &= -\frac{3gx^2 + 2j_0 x + 2j_1 l x + y_2 l^2 + y_1 l + y_0}{j_1 x^2 + y_1 x + 2y_2 l x + 3J_3 l^2 + 2J_2 l + J_1}.
\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения проводятся при совпадении трех корней. В этом случае для получения третьего линейно независимого решения вычисляется вторая производная по параметру ξ .

4. В соответствии в теореме 1 собственные значения, образующие спектральное множество в регулярном случае ($q \in (q_1, q_2) \subset (0, p)$), определяются из трансцендентного уравнения, которое преобразуется к виду:

$$\det[\mathbf{B}(l)] = 0,$$

$$\mathbf{B}(l) = \frac{\left[\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \frac{1}{l} \mathbf{Y}(q, l) + \begin{pmatrix} (A-C) \operatorname{ctg} q + a_1 & 2B & H \operatorname{ctg} q + c_1 \\ -K & b_1 & K \\ H \operatorname{ctg} q + c_1 & H & (D-F) \operatorname{ctg} q + g_1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}(q, l) \right]_{q=q_1} \right]}{\left[\left[\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \frac{1}{l} \mathbf{Y}(q, l) + \begin{pmatrix} (A-C) \operatorname{ctg} q - a_2 & 2B & H \operatorname{ctg} q - c_2 \\ -K & -b_2 & K \\ H \operatorname{ctg} q - c_2 & H & (D-F) \operatorname{ctg} q - g_2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}(q, l) \right]_{q=q_2} \right]}$$

В сингулярных случаях (сферический сектор, полная сфера) предельные соотношения для функций Лежандра позволяют построить в N четыре фундаментальных решения для задачи с одним сингулярным концом (сферический сектор) и два решения при двух сингулярных концах интервала (полная сфера). Следовательно, в первом случае индекс дефекта $m = \{4, 4\}$, а во втором – $m = \{2, 2\}$. Для задачи с одним сингулярным концом сокращенная фундаментальная матрица имеет вид:

$$\hat{Y}(q, l) = \begin{pmatrix} a_1 P_{n_1}^1(\cos q) & a_2 P_{n_1}^1(\cos q) & a_3 P_{n_3}^1(\cos q) & a_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + a_2 \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} Q_{n_2}^1(\cos q) + a_3 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} Q_{n_3}^1(\cos q) \\ b_1 P_{n_1}^1(\cos q) & b_2 P_{n_1}^1(\cos q) & b_3 P_{n_3}^1(\cos q) & b_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + b_2 \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} Q_{n_2}^1(\cos q) + b_3 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} Q_{n_3}^1(\cos q) \\ c_1 P_{n_1}^1(\cos q) & c_2 P_{n_1}^1(\cos q) & c_3 P_{n_3}^1(\cos q) & c_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + c_2 \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} Q_{n_2}^1(\cos q) + c_3 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} Q_{n_3}^1(\cos q) \end{pmatrix}$$

Она состоит из действительных решений, принадлежащих N , поскольку функции Лежандра первого рода $P_{n_1}^1(\cos q)$, $P_{n_3}^1(\cos q)$ ограничены на $(0, q_1)$. Комбинации присоединенных функций Лежандра второго рода с учетом

$$\begin{aligned}
& a_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} a_2 Q_{n_2}^1(\cos q) + \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} a_3 Q_{n_3}^1(\cos q) \\
& c_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} c_2 Q_{n_2}^1(\cos q) + \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} c_3 Q_{n_3}^1(\cos q)
\end{aligned}$$

обращаются в ноль в точке $\theta = 0$ и потому так же принадлежат H , а присоединенные функции Лежандра второго рода $Q_{n_i}^1(\cos q)$ имеют при $q = 0$ лишь логарифмическую особенность, и, следовательно, интегрируемы с квадратом в метрике H .

Для двух сингулярных концов интервала (полая сфера) два действительных линейно-независимых решения $\mathbf{v}_1(q, l), \mathbf{v}_2(q, l)$, формирующие сокращенную фундаментальную матрицу $\hat{\mathbf{Y}}(q, l) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(q, l) &= \begin{pmatrix} a_1 P_{n_1}^1(\cos q) \\ b_1 P_{n_1}(\cos q) \\ c_1 P_{n_1}^1(\cos q) \end{pmatrix} + \frac{\sin[n_1 p]}{\sin[n_2 p]} \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} \begin{pmatrix} a_2 P_{n_2}^1(\cos q) \\ b_2 P_{n_2}(\cos q) \\ c_2 P_{n_2}^1(\cos q) \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{\sin[n_1 p]}{\sin[n_3 p]} \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} \begin{pmatrix} a_3 P_{n_3}^1(\cos q) \\ b_3 P_{n_3}(\cos q) \\ c_3 P_{n_3}^1(\cos q) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}_2(q, l) &= \begin{pmatrix} a_1 P_{n_1}^1(\cos q) + C_1 a_2 P_{n_2}^1(\cos q) + C_2 a_3 P_{n_3}^1(\cos q) + C_3 a_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + C_4 a_2 Q_{n_2}^1(\cos q) + C_5 a_3 Q_{n_3}^1(\cos q) \\ b_1 P_{n_1}(\cos q) + C_1 b_2 P_{n_2}(\cos q) + C_2 b_3 P_{n_3}(\cos q) + C_3 b_1 Q_{n_1}(\cos q) + C_4 b_2 Q_{n_2}(\cos q) + C_5 b_3 Q_{n_3}(\cos q) \\ c_1 P_{n_1}^1(\cos q) + C_1 c_2 P_{n_2}^1(\cos q) + C_2 c_3 P_{n_3}^1(\cos q) + C_3 c_1 Q_{n_1}^1(\cos q) + C_4 c_2 Q_{n_2}^1(\cos q) + C_5 c_3 Q_{n_3}^1(\cos q) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где постоянные C_i определяются из условий:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1/p b_2 \sin n_2 p & 1/p b_3 \sin n_3 p & 1/2 b_1 \cos n_1 p & 1/2 b_2 \cos n_2 p & 1/2 b_3 \cos n_3 p \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 2/p a_2 \sin n_2 p & 2/p a_3 \sin n_3 p & a_1 \cos n_1 p & a_2 \cos n_2 p & a_3 \cos n_3 p \\ 2/p c_2 \sin n_2 p & 2/p c_3 \sin n_3 p & c_1 \cos n_1 p & c_2 \cos n_2 p & c_3 \cos n_3 p \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1/p b_1 \sin n_1 p \\ 0 \\ 2/p a_3 \sin n_3 p \\ 2/p c_3 \sin n_3 p \end{pmatrix}.$$

Построенные сокращенные фундаментальные матрицы действительные, и, следовательно, условие теоремы 2 оказывается выполненным. Спектральное множество Λ как для регулярного, так и для сингулярных вариантов задачи представляет собой счетную возрастающую последовательность.

В случае одного сингулярного конца интервала $q \in (0, q_1)$ (т. е. для сферического сектора) условия ограниченности определяют сокращенную фундаментальную систему $\mathbf{Y}(q, l) = (\mathbf{v}_1(q, l), \dots, \mathbf{v}_3(q, l))$, содержащую только ограниченные компоненты – функции Лежандра первого рода. В этом случае трансцендентное уравнение формулируется следующим образом:

$$\det[\mathbf{B}(l)] = 0,$$

$$\mathbf{B}(l) = \left(\left(\begin{array}{ccc} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{array} \right) \frac{1}{q} \mathbf{Y}(q, l) + \left(\begin{array}{ccc} (A-C)ctgq + a_1 & 2B & Hctgq + c_1 \\ -K & b_1 & K \\ Hctgq + c_1 & H & (D-F)ctgq + g_1 \end{array} \right) \mathbf{Y}(q, l) \right) \Big|_{q=q_1}$$

В случае двух сингулярных концов интервала $q \in (0, q_1)$ (полная сфера) условия ограниченности в полюсах удовлетворяются, если

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left[[\ln q]^{-1} \mathbf{r}(q, l) \right] = 0,$$

$$\lim_{q \rightarrow p} \left[[\ln(p-q)]^{-1} \mathbf{r}(q, l) \right] = 0.$$

Эти предельные равенства эквивалентны уравнению

$$b_1 \frac{\sin[n_1 p]}{p} + b_2 \frac{\sin[n_2 p]}{\sin[n_2 p]} \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_2 c_3 - a_3 c_2} \frac{\sin[n_2 p]}{p} + b_3 \frac{\sin[n_3 p]}{\sin[n_3 p]} \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_3 c_2 - a_2 c_3} \frac{\sin[n_3 p]}{p} = 0,$$

которое после упрощения может быть преобразовано к виду

$$\sin n_1 p = 0.$$

Его решения

$$n_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

определяют последовательность собственных значений

$$l_i = \frac{1}{3J_3} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(A_i + \sqrt{A_i^2 + 4B_i^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2} B_i \left(A_i + \sqrt{A_i^2 + 4B_i^3} \right)^{\frac{1}{3}} - J_2 - x y_2 \right],$$

$$A_i = 9J_3 (j_1 x^2 + y_1 x + J_1) (J_2 + x y_2) - 27J_3^2 (g x^3 + j_0 x^2 + y_0 x + J_0) - 2(J_2 + x y_2)^3,$$

$$B_i = 3J_3 (j_1 x^2 + y_1 x + J_1) - (J_2 + x y_2)^2, \quad x = i(i+1), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

5. При определенных соотношениях жесткостных и инерционных характеристик оболочки в спектральном множестве Λ могут присутствовать кратные собственные значения l_i . Этим значениям l_i соответствуют несколько линейно-независимых собственных функций, которые определяют собственное подпространство размерностью больше единицы.

Рассмотрим частный случай идеализированного закрепления сферического сектора, которому соответствует следующая матрица упругих характеристик опорного контура:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix},$$

т. е. конструкция на опорном контуре жестко закреплена относительно касательных перемещений и углов поворота, но может свободно перемещаться по нормали. При таком закреплении проявляются особенности, связанные с кратным спектром: в спектральном уравнении остается единственное слагаемое, которое представляет собой произведение трех мероморфных функций:

$$P_{n_1(l)}^l(\cos q_1) P_{n_2(l)}^l(\cos q_1) P_{n_3(l)}^l(\cos q_1) = 0.$$

Множество корней уравнения является объединением множеств нулей этих функций, т. е. корнями трех уравнений:

$$P_{n_1(I)}^1(\cos q_1) = 0; \quad P_{n_2(I)}^1(\cos q_1) = 0; \quad P_{n_3(I)}^1(\cos q_1) = 0.$$

При определенных соотношениях параметров их корни совпадают; в этих случаях соответствующие корни частотного уравнения будут иметь кратности выше единицы.

Ранг матрицы $B(I)$ при значениях $I = I_i$, соответствующих кратным точкам спектра, меньше ее размерности на величину, равную кратности I_i (см. Теорему 2). Применяя к $B(I)|_{I=I_i}$ процедуру приведения матрицы к треугольной форме, преобразуем ее к виду

$$B(I)|_{I=I_i} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{1,1} & \mathbf{L} & b_{1,m} & b_{1,m+1} & \mathbf{L} & b_{1,n} \\ & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ 0 & & b_{m,m} & b_{m,m+1} & \mathbf{L} & b_{m,n} \\ \hline & & & 0 & \mathbf{L} & b_{m+1,n} \\ & & & & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ & & & & & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline 0 & \mathbf{B}_0 \end{array} \right).$$

В этом случае матрица $\mathbf{S}(I_i)$, определяющая собственные подпространства матрицы $B(I)|_{I=I_i}$, вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{S}(I_i) = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}_1^{-1} & \mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

6. Построенные выше представления позволяют получить в замкнутой форме решения динамических задач для исследуемых типов сферических оболочек при действии произвольной осесимметричной нагрузки, задаваемой вектор-функцией:

$$\mathbf{f}(q, t) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{P}_q(q, t) \\ \overset{\circ}{P}_z(q, t) \\ \overset{\circ}{M}_q(q, t) \end{pmatrix}$$

при соответствующих начальных условиях:

$$\overset{\mathbf{r}}{\mathbf{y}}_0(q, t) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{y}_0(q, t) \\ \overset{\circ}{v}_0(q, t) \\ \overset{\circ}{y}_0(q, t) \end{pmatrix}, \quad \overset{\mathbf{R}}{\mathbf{y}}_0(q, t) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{y}_0(q, t) \\ \overset{\circ}{v}_0(q, t) \\ \overset{\circ}{y}_0(q, t) \end{pmatrix}.$$

Трансформанта $\overset{\mathbf{F}}{J}(I, t)$ интегрального преобразования в случае кольцевой сферической области имеет вид:

$$\mathbf{f}(I, t) = \begin{pmatrix} \int_{q_1}^{q_2} [a_1 T_u(q, t) P_{n_1}^1(\cos q) + a_2 T_w(q, t) P_{n_1}(\cos q) + a_3 T_y(q, t) P_{n_1}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [b_1 T_u(q, t) P_{n_2}^1(\cos q) + b_2 T_w(q, t) P_{n_2}(\cos q) + b_3 T_y(q, t) P_{n_2}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [c_1 T_u(q, t) P_{n_3}^1(\cos q) + c_2 T_w(q, t) P_{n_3}(\cos q) + c_3 T_y(q, t) P_{n_3}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [a_1 T_u(q, t) Q_{n_1}^1(\cos q) + a_2 T_w(q, t) Q_{n_1}(\cos q) + a_3 T_y(q, t) Q_{n_1}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [b_1 T_u(q, t) Q_{n_2}^1(\cos q) + b_2 T_w(q, t) Q_{n_2}(\cos q) + b_3 T_y(q, t) Q_{n_2}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [c_1 T_u(q, t) Q_{n_3}^1(\cos q) + c_2 T_w(q, t) Q_{n_3}(\cos q) + c_3 T_y(q, t) Q_{n_3}^1(\cos q)] \sin q dq \end{pmatrix},$$

где

$$T_u(q, t) = (I_1 u_0 + I_3 y_0) \cos[I^{1/2} t] + I^{-1/2} (I_1 \mathbf{u}_0 + I_3 \mathbf{y}_0) \sin[I^{1/2} t] + \\ + I^{-1/2} \int_0^t \mathbf{P}_u^0(q, t) \sin[I^{1/2} (t-t)] dt,$$

$$T_w(q, t) = I_1 (w_0 \cos[I^{1/2} t] + I^{-1/2} \mathbf{w}_0 \sin[I^{1/2} t]) + \\ + I^{-1/2} \int_0^t \mathbf{P}_w^0(q, t) \sin[I^{1/2} (t-t)] dt,$$

$$T_y(q, t) = (I_3 u_0 + I_2 y_0) \cos[I^{1/2} t] + I^{-1/2} (I_3 \mathbf{u}_0 + I_2 \mathbf{y}_0) \sin[I^{1/2} t] + \\ + I^{-1/2} \int_0^t \mathbf{P}_y^0(q, t) \sin[I^{1/2} (t-t)] dt.$$

Для сферического сегмента и полной сферы $\mathbf{f}(\lambda, t)$ имеет меньшую размерность и определяется следующими интегралами:

$$\mathbf{f}(I, t) = \begin{pmatrix} \int_{q_1}^{q_2} [a_1 T_u(q, t) P_{n_1}^1(\cos q) + a_2 T_w(q, t) P_{n_1}(\cos q) + a_3 T_y(q, t) P_{n_1}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [b_1 T_u(q, t) P_{n_2}^1(\cos q) + b_2 T_w(q, t) P_{n_2}(\cos q) + b_3 T_y(q, t) P_{n_2}^1(\cos q)] \sin q dq \\ \int_{q_1}^{q_2} [c_1 T_u(q, t) P_{n_3}^1(\cos q) + c_2 T_w(q, t) P_{n_3}(\cos q) + c_3 T_y(q, t) P_{n_3}^1(\cos q)] \sin q dq \end{pmatrix}.$$

Нормирующая матрица $\mathbf{V}(I_i)$ вычисляется по формулам (2.19) Входящие в них матрицы $\mathbf{P}(q)$, $\mathbf{Z}(q)$ определяются из равенств:

$$\mathbf{P}(q) = \begin{pmatrix} A \sin q & 0 & 0 \\ 0 & K \sin q & 0 \\ 0 & 0 & D \sin q \end{pmatrix}; \mathbf{Z}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -(B+K) \sin q & 0 \\ (B+K) \sin q & 0 & (H-K) \sin q \\ 0 & (K-H) \sin q & 0 \end{pmatrix}.$$

При известных $\mathbf{Y}(q, I)$, $\mathbf{V}(I_i)$, $\mathbf{f}(I, t)$ разрешающие функции, представляющие перемещения оболочки, могут быть представлены в форме разложения:

$$\mathbf{r} \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}(\mathbf{q}, I_i) \mathbf{V}(I_i) \dot{\mathbf{J}}(I_i, t).$$

Ниже приведены квадратуры, определяющие спектральные разложения для ряда внешних воздействий. Пусть внешние воздействия представляются в виде

$$\mathbf{r} \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{q}, t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{r} \dot{\mathbf{P}}_k(\mathbf{q}) T_k(t),$$

где $\mathbf{r} \dot{\mathbf{P}}_k(\mathbf{q})$ – вектор-функция, зависящая от пространственной координаты θ , $T_k(t)$ – скалярные функции времени t . Распределение нагрузки в пространстве задается тригонометрическими рядами

$$\mathbf{r} \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} P_u(\mathbf{q}) \\ P_w(\mathbf{q}) \\ P_y(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 \cos \mathbf{q} + a_2 \cos^2 \mathbf{q} + \mathbf{K}) \sin \mathbf{q} \\ b_0 + b_1 \cos \mathbf{q} + b_2 \cos^2 \mathbf{q} + \mathbf{K} \\ (c_0 + c_1 \cos \mathbf{q} + c_2 \cos^2 \mathbf{q} + \mathbf{K}) \sin \mathbf{q} \end{pmatrix}.$$

Изменение воздействия во времени задается степенными экспоненциальными и тригонометрическими рядами:

$$T(t) = \sum_{i=0}^N a_i t^i, \quad T(t) = \sum_{i=0}^N a_i e^{g_i t}, \quad T(t) = \sum_{i=0}^N [a_i \sin(w_i t) + b_i \cos(w_i t)].$$

Интегрирование этих выражений сводится к последовательному вычислению квадратур типа:

$$\begin{aligned} J_n^n(\cos \mathbf{q}) &= \int P_n(\cos \mathbf{q}) \cos^n \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q}, \\ I_n^n(\cos \mathbf{q}) &= \int P_n^1(\cos \mathbf{q}) \cos^n \mathbf{q} \sin^2 \mathbf{q} d\mathbf{q}, \\ &\int \sum_{i=0}^N a_i t^i \sin [I(t-t)] dt. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов, соответствующих младшим членам рядов, воспользуемся известными формулами:

$$J_n^0(\cos \mathbf{q}) = \int P_n(\cos \mathbf{q}) \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = \sin \mathbf{q} P_n^{-1}(\cos \mathbf{q}),$$

$$J_n^1(\cos \mathbf{q}) = \int P_n(\cos \mathbf{q}) \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} =$$

$$= -\frac{\sin \mathbf{q}}{(n-1)(n+2)} (\sin \mathbf{q} P_n(\cos \mathbf{q}) + \cos \mathbf{q} P_n^1(\cos \mathbf{q})).$$

Используя рекуррентные соотношения, преобразуем последнее выражение к виду

$$J_n^1(\cos \mathbf{q}) = \sin^2 \mathbf{q} P_n^{-2}(\cos \mathbf{q}) + \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} P_n^{-1}(\cos \mathbf{q}).$$

Квадратуры для старших членов могут быть получены путем рекурсивного применения известного соотношения

$$\int_0^j (\cos j - \cos \mathbf{q})^n P_n(\cos \mathbf{q}) \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = (-1)^n n! \sin^{n-1} j P_n^{-n-1}(\cos j).$$

Имеем

$$J_n^3(\cos q) = 2 \sin^3 q P_n^{-3}(\cos q) + 2 \sin^2 q \cos q P_n^{-2}(\cos q) + \sin q \cos^2 q P_n^{-1}(\cos q),$$

$$J_n^4(\cos q) = 6 \sin^4 q P_n^{-4}(\cos q) + 6 \sin^3 q \cos q P_n^{-3}(\cos q) +$$

$$+ 3 \sin^2 q \cos^2 q P_n^{-2}(\cos q) + \sin q \cos^3 q P_n^{-1}(\cos q),$$

К

Построим выражение для общего случая:

$$J_n^n(\cos q) = \int P_n(\cos q) \cos^n q \sin q dq = \sum_{i=0}^n (n+1-i)_i \sin^{i+1} q \cos^{n-i} q P_n^{-i-1}(\cos q).$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_n^n(\cos q) = \int P_n^1(\cos q) \cos^n q \sin^2 q dq = P_n(\cos q) \sin^2 q \cos^n q - (n+2) J_n^{n+1}(\cos q) + n J_n^{n-1}(\cos q)$$

Наконец, используя рекуррентные соотношения

$$P_n^{m-1}(\cos q) \sin q = \frac{1}{n-m+1} (P_{n-1}^m(\cos q) - \cos q P_n^m(\cos q)),$$

$$P_{n-1}^{m-1}(\cos q) \sin q = \frac{1}{n+m-1} (\cos q P_{n-1}^m(\cos q) - P_n^m(\cos q)),$$

может быть построен эффективный вычислительный алгоритм. Начало алгоритма определяется формулами:

$$S_0(\cos q) = \frac{\cos^n q}{n+1} (P_{n-1}(\cos q) - \cos q P_n(\cos q)) = -\frac{\cos^n q \sin q}{n(n+1)} P_n^1(\cos q),$$

$$T_0(\cos q) = \frac{\cos^n q}{n-1} (\cos q P_{n-1}(\cos q) - P_n(\cos q)) =$$

$$= -\frac{\cos^n q}{n(n-1)} \left(\frac{1}{2} \sin 2q P_n^1(\cos q) + n \sin^2 q P_n(\cos q) \right).$$

Затем последовательно вычисляются значения для $i=1 \dots n$

$$S_i(\cos q) = \frac{n-i+1}{n+i+1} \left(\frac{T_{i-1}(\cos q)}{\cos q} - S_{i-1}(\cos q) \right),$$

$$T_i(\cos q) = \frac{n-i+1}{n-i-1} \left(T_{i-1}(\cos q) - \frac{S_{i-1}(\cos q)}{\cos q} \right)$$

Окончательно искомая квадратура определяется суммами:

$$J_n^n(\cos q) = \sum_{i=0}^n S_i(\cos q), \quad J_{n-1}^n(\cos q) = \sum_{i=0}^n T_i(\cos q).$$

Интегрирование по времени осуществляется в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\int \sum_{i=0}^N a_i t^i \sin [I(t-t)] dt &= \left[\sum_{i=0,2,4,\dots}^N a_i \frac{(-1)^{\frac{i}{2}} i!}{I^{i+1}} \right] \cos [I(t-t)] + \\
&+ \left[\sum_{i=0,2,4,\dots}^N a_i \frac{(-1)^{\frac{i}{2}} i!}{I^{i+1}} \right] \sin [I(t-t)], \\
\int \sum_{i=0}^N a_i e^{g_i t} \sin [I(t-t)] dt &= \sum_{i=0}^N \frac{1}{g_i^2 + I^2} (a e^{g_i t} (I \cos [I(t-t)] + g_i \sin [I(t-t)])), \\
\int \sum_{i=0}^N [a_i \sin (w_i t) + b_i \cos (w_i t)] \sin [I(t-t)] dt &= \\
= \sum_{i=0}^N \frac{1}{2(I-w)(I+w)} \{ &a(I+w) \cos [tI - It + tw] + a(I+w) \cos [tI - t(I+w)] + \\
&+ b(I+w) \sin [tI + t(-I+w)] - b(I-w) \sin [tI - t(I+w)] \}, \\
\int \sum_{i=0}^N [a_i \sin (It) + b_i \cos (It)] \sin [I(t-t)] dt &= \\
= \frac{1}{4I} \sum_{i=0}^N [&4a \cos (It) \cos (I(t-t)) - b(2It \cos (tI) + \sin (I(t-2t)))].
\end{aligned}$$

Отметим, что для первой квадратуры может быть построен рекурсивный алгоритм:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{a_n}{I}, & R_{n-1} &= \frac{a_n n}{I^2}, \\
S_{n-1} &= \frac{a_{n-1}}{I}, & R_{n-2} &= \frac{a_n (n-1)}{I^2}, \\
S_{p-2} &= \frac{a_{p-2}}{I} - \frac{p(p-1)}{I^2} S_p, & R_{n-2} &= \frac{a_{p-2}(p-2)}{I^2} - \frac{(p-1)(p-2)}{I^2} R_{p-1}, \\
S_{p-3} &= \frac{a_{p-3}}{I} - \frac{(p-1)(p-2)}{I^2} S_{p-1}, & R_{n-3} &= \frac{a_{p-3}(p-3)}{I^2} - \frac{(p-2)(p-3)}{I^2} R_{p-2}.
\end{aligned}$$

7. Рассмотрим подробнее следующие типы воздействий.

а) Скачок давления, равномерно распределенный по всей поверхности оболочки соответствует внезапному изменению интенсивности внешнего давления на наружной или внутренней лицевой поверхности покоящейся оболочки. Динамическая нагрузка задается следующими выражениями для вектор-функции $\mathbf{f}(\theta)$ при нулевых начальных условиях:

$$\mathbf{f}(q, t) = \begin{pmatrix} f_q(q, t) \\ f_z(q, t) \\ M_q(q, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ qH(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(q, t) = \mathbf{v}(q, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где q – интенсивность скачка давления; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Тангенциальные $u(q, t)$, нормальные $w(q, t)$ перемещения и углы поворота $y(q, t)$ нормали могут быть определены в форме разложений, которые для конкретных значений $\mathbf{f}(q, t)$, $\mathbf{u}(q, t)$, $\mathbf{K}(q, t)$ приобретают вид:

$$u(q, t) = q \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [1 - \cos(w_i t)] (A_i P_{a_i}^1(q) + B_i P_{b_i}^1(q) + C_i P_{g_i}^1(q)) \right\},$$

$$w(q, t) = q \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [1 - \cos(w_i t)] (D_i P_{a_i}^1(q) + E_i P_{b_i}^1(q) + F_i P_{g_i}^1(q)) \right\},$$

$$y(q, t) = q \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [1 - \cos(w_i t)] (G_i P_{a_i}^1(q) + H_i P_{b_i}^1(q) + J_i P_{g_i}^1(q)) \right\}.$$

Здесь w_i - частота i -ого тона колебаний; $A_i, B_i, \mathbf{K} J_i, a_i, b_i, g_i$ - постоянные коэффициенты, определяемые физико-геометрическими характеристиками оболочек. Осциллограммы перемещений характерных сечений оболочки (окрестности опорного контура $q = 0.98 \text{ rad}$, середины меридиана $q = 0.5 \text{ rad}$ и окрестности полюса $q = 0.02 \text{ rad}$) во временных интервалах, соответствующих ~ 4 и ~ 16 периодам колебаний первого тона оболочки ($\{0 \dots 0.1c\}; \{0 \dots 0.8c\}$), показаны на рис. 2. Рядом изображены эпюры перемещений меридиана в моменты времени 0.005 с, 0.05 с и 0.1 с. Пространственно-временные рельефы функций $u(q, t)$, $w(q, t)$, $y(q, t)$ объединяют осциллограммы перемещений всех точек меридиана для периода "раскачки", т. е. начала движения оболочки ($\{0 \dots 0.08c\}$).

Отметим ряд особенностей, характерных для рассматриваемого типа нагрузки. В начальный период воздействия ($\{0 \dots 0.01c\}$) происходит распространение фронта угловых деформаций от опорного контура к полюсу³. В течение этого периода точки меридиана получают синхронное перемещение, а затем происходит дифференциация движения: появляются пучности и узловые линии. Прогибы оказываются преимущественно одного знака, определяемого направлением воздействия, максимальные касательные и угловые перемещения - в окрестности середины меридиана ($q = 0.5 \text{ rad}$), максимальные нормальные перемещения - в окрестности полюса ($q = 0$).

б) Треугольный импульс, равномерно распределенный по всей поверхности оболочки. Динамическая нагрузка задается выражениями:

$$\mathbf{f}(q, t) = \begin{pmatrix} f_q(q, t) \\ f_z(q, t) \\ M_q(q, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \left[\frac{H(t) - H(t - t_1)}{t_1} t + \frac{H(t - t_1) - H(t - t_2)}{t_2 - t_1} (t_2 - t) \right] \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}(q, t) = \mathbf{K}(q, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

³ Это вполне естественно, поскольку опорный контур является наиболее жесткой частью конструкции. В то же время этот эффект проявляет себя только в моделях, основанных на уточненных теориях (оболочек с конечной сдвиговой жесткостью).

где q – максимальная интенсивность импульса; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, t_1 – длительность фронта, а t_2 – длительность всего импульса.

Графическое изображение осциллограмм, эпюр и рельефов приведено на рис. 3 В численном примере длительность импульса принималась равной 0.07 с, что соответствует примерно двум периодам собственных колебаний конструкции на первом тоне. Отметим, что в начале воздействия преобладают касательные и сдвиговые деформации, и лишь после полупериода колебаний оболочки в полюсе интенсивно развиваются прогибы, достигая максимума в момент времени, примерно соответствующий периоду колебаний конструкции на основном тоне. Явно выражена картина распространения волн деформаций от опорного контура к полюсу. После окончания воздействия интенсивность прогибов резко уменьшается и составляет примерно 20 % от максимальных значений, в то время как угловые перемещения не уменьшаются. Таким образом, из сопоставления динамических реакций на прямоугольный и треугольный импульсы следует, что форма импульса оказывает существенное воздействие на картину вынужденных колебаний конструкции.

8. Частотные кривые, построенные в зависимости от соотношения толщин слоев при фиксированной удельной массе пакета, имеют экстремум. Таким образом, может быть поставлена практическая задача – найти такое соотношение толщин слоев оболочки постоянного веса, при котором первые частоты собственных колебаний конструкции оказываются максимальными. Такая постановка является правомерной, поскольку НДС оболочки для большинства встречаемых на практике воздействий определяется первыми формами их колебаний, и конструкция постоянного веса с максимальной первой собственной частотой оказывается оболочкой наибольшей жесткости.

В качестве примера рассмотрим металлополимерную оболочку с характеристиками $E_2/E_1 = E_3/E_1 = 60$, $\rho_2/\rho_1 = \rho_3/\rho_1 = 25$. Фиксированная удельная масса пакета составляет , что соответствует следующему начальному симметричному распределению слоев $h_1 = 1.5$ м, $h_2 = 0.01$ м, $h_3 = 0.01$ м, . Первая частота оболочки с симметричным пакетом составила 105 с^{-1} . В результате поиска оптимального решения (градиентным методом) определено такое оптимальное соотношение толщин слоев $h_1 = 1.05$ м, $h_2 = 0.03$ м, $h_3 = 0.06$ м. При этом первая собственная частота конструкции составила $145 \text{ с}^{-1} > 105 \text{ с}^{-1}$.

Конструкцией наибольшей жесткости оказалась оболочка с несимметричным пакетом слоев. Таким образом, возникает вопрос: как связана асимметрия оптимального пакета слоев с кривизной срединной поверхности оболочки? Была выполнена серия подобных расчетов для металлополимерных оболочек различной кривизны. Результаты расчетов приведены на рис. 5. Там же показана зависимость соотношения толщин крайних слоев в зависимости от кривизны при постоянном пролете конструкции. Для непологих оболочек оптимальные толщины внешних слоев отличаются примерно в два раза, тогда как для пологих оболочек они почти равны. В предельном случае пластины оптимальной является симметричная структура.

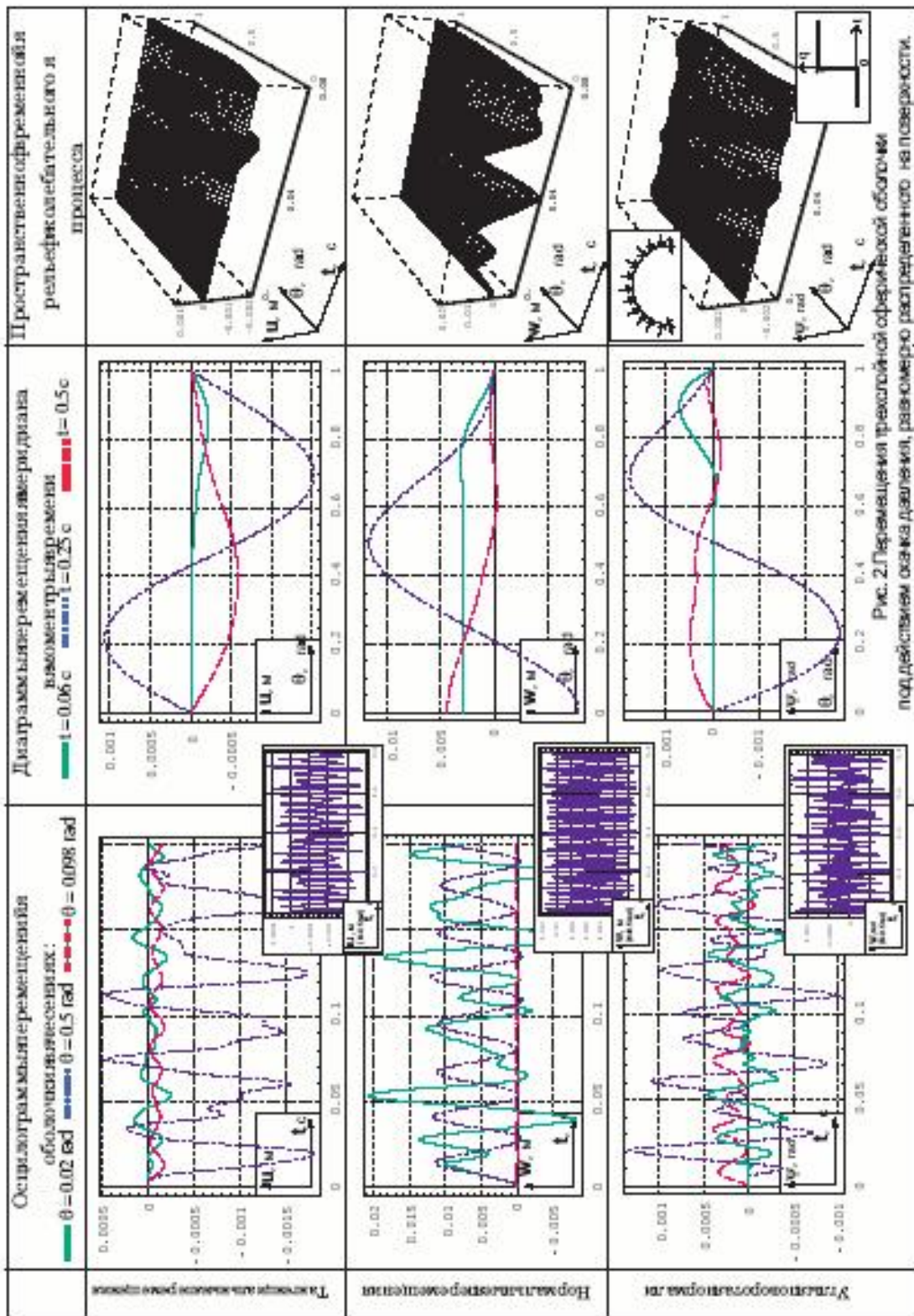


Рис. 2. Перемещение трехслойной сферической оболочки под действием осанки давления, равномерно распределенного на поверхности.

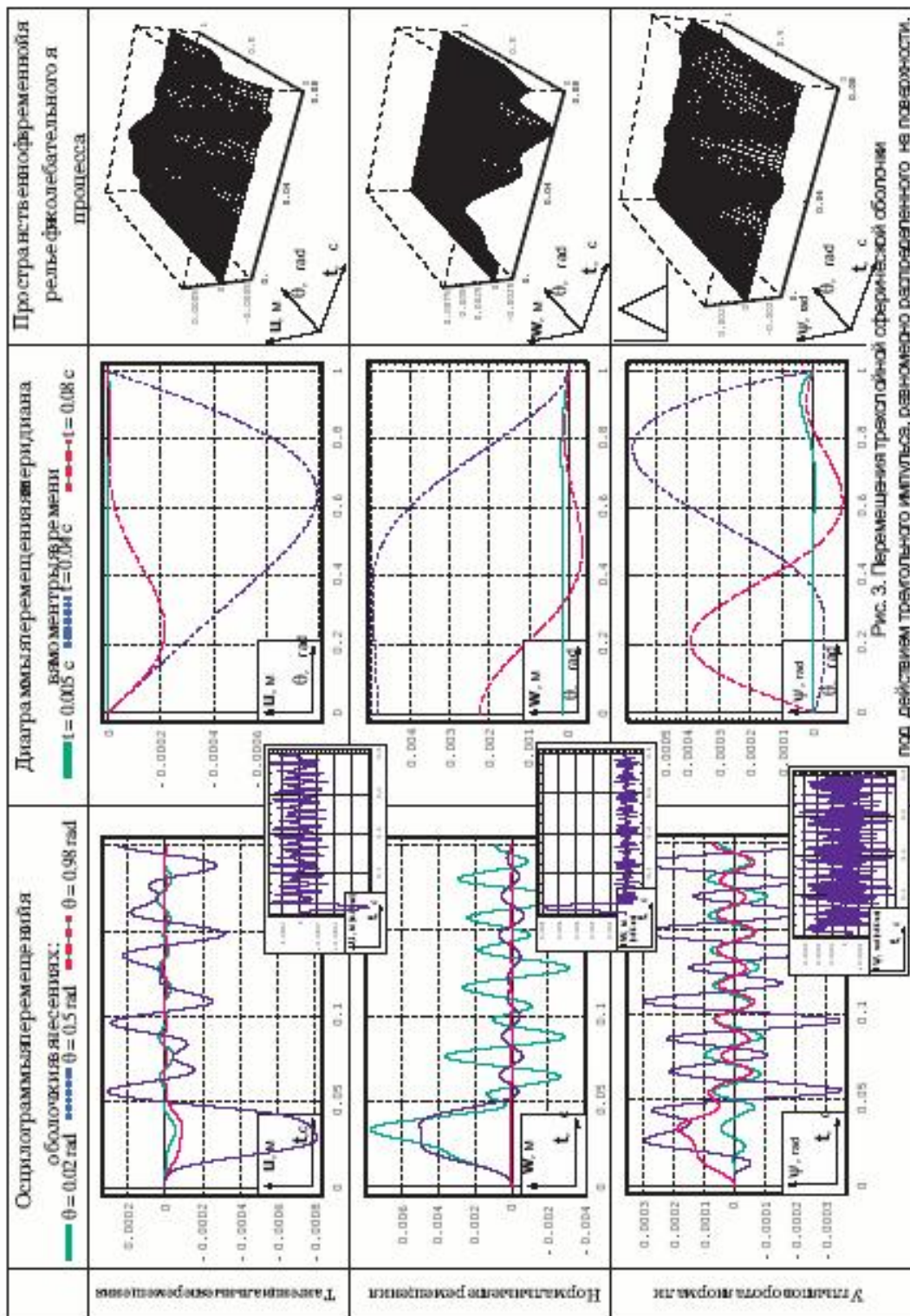


Рис. 3. Перемещения треугольной сферической оболочки под действием треугольного импульса, равномерно распределенного на поверхности.

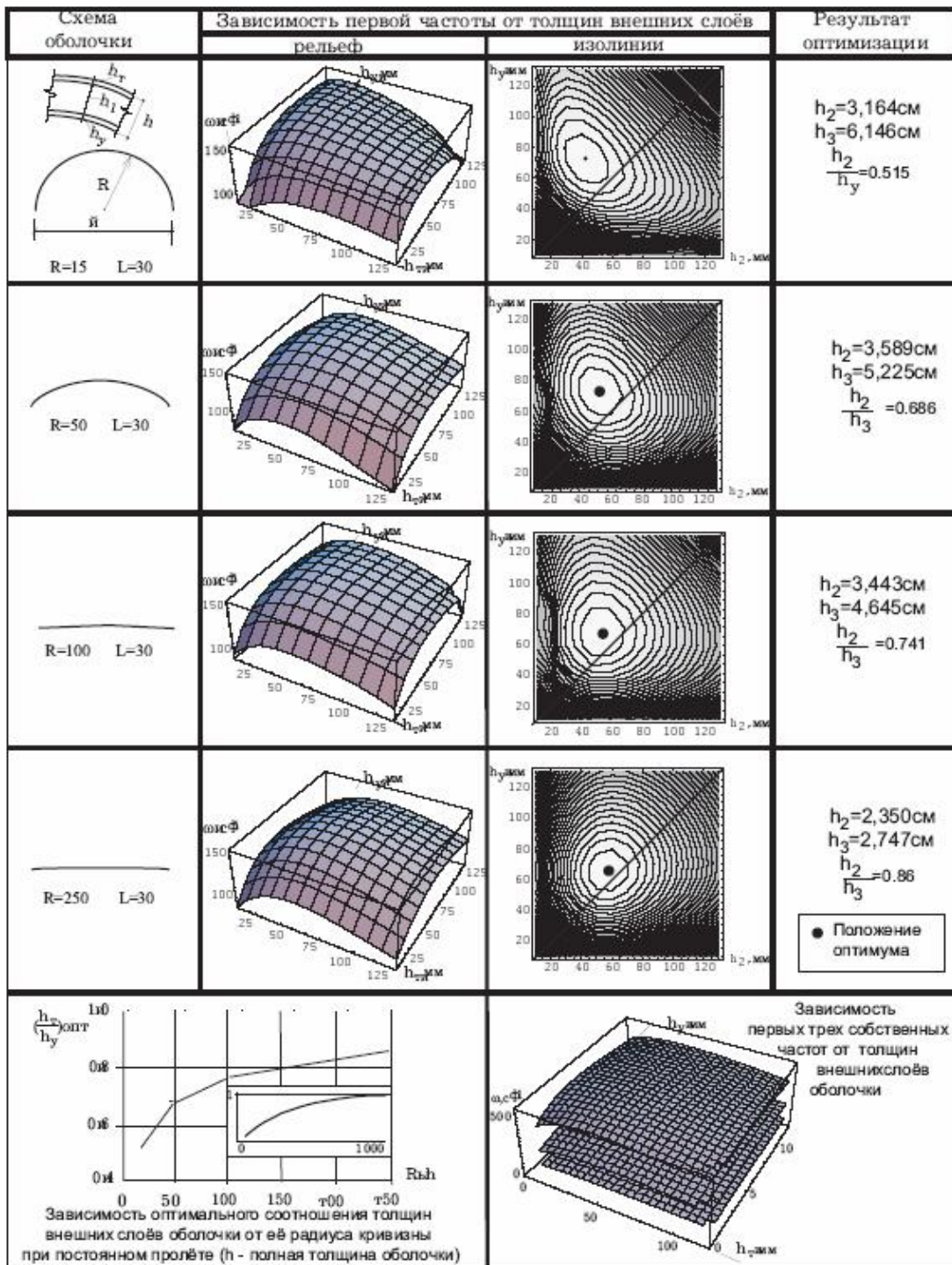


Рис. 4. Оптимальные соотношения толщин внешних слоёв трёхслойных сферических оболочек

В этой связи следует отметить актуальность применения трехслойных непологих оболочек с несимметричной структурой пакета слоев.

На рис. 5. приведены зависимости первых трех собственных частот от соотношения толщин внешних слоев. Отметим, что все три поверхности имеют экстремум приблизительно в одной области, выделенной на рисунке цветом. Таким образом, оптимизируя трехслойную конструкцию по первой частоте, получим оптимум и по следующим частотам.

Сравнительный анализ динамической реакции трехслойных оболочек с оптимизированной и симметричной структурой пакета слоев показал, что в оболочке наибольшей жесткости максимальные перемещения меньше на 10-20%.

г. Самара

Поступила: 25 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 *Алфутов, Н. А.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М. : Машиностроение. – 1984. – 263 с.
- 2 *Бердичевский, В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М. : Главная редакция физико-математической литературы. – 1983. – 447с.
- 3 *Болотин, В. В.* О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек / В. В. Болотин. // Прикладная матем. и механика. – 1963. – Т. 27. – Вып. 2. – С. 362–364.
- 4 *Грандиштейн, И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Грандиштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз. – 1963. – 1100 с.
- 5 *Григолюк, Э. И.* Обоснование уравнений трехслойных пластин несимметричной структуры с жестким наполнителем / Э. И. Григолюк, В. М. Корнев. // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1966. – № 6. – С. 89–97.
- 6 *Даин, Е. А.* К проблеме внутренних резонансов в теории колебаний тонких оболочек / Ин-т проблем механики АН СССР; Е. А. Даин, С. А. Луковенко, Н. В. Харькова. – М., 1977. – 25 с. – Препринт № 97
- 7 *Лизарев, А. Д.* Уравнения свободных колебаний непологих трехслойных сферических оболочек / А. Д. Лизарев., Н. Б. Ростанина. // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 142–148.
- 8 *Лычев, С. А.* Нестационарные колебания трехслойных сферических оболочек с кратным спектром / С. А. Лычев, Ю. А. Сидоров // Изв. вузов. Строительство. – 2001. – № 4. – С. 31–39.
- 9 *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука. – 1969. – 526 с.
- 10 *Сеницкий, Ю. Э.* Биортогональные многокомпонентные конечные интегральные преобразования и его приложения к краевым задачам механики / Ю. Э. Сеницкий // Известия вузов. Математика. – 1991. – №4. – С. 57–63.
- 11 *Сеницкий, Ю. Э.* Нестационарная динамическая для неоднородных анизотропных толстостенных цилиндрических и сферических оболочек / Ю. Э. Сеницкий // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – Н. Новгород : ГГУ. – 1991. – Вып. 49 – С. 63–72.
- 12 *Сеницкий, Ю. Э.* Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного интегрального преобразования / Ю. Э. Сеницкий // Известия вузов. Математика. – 1991. – № 9. – С. 53–56.
- 13 *Сеницкий Ю. Э.* Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложение / Ю. Э. Сеницкий, С. А. Лычев // Изв. вузов. Математика. – 1999. (В печати)
- 14 *Culkovski, P. M.* The spherical sandwich shell under axisymmetric static and dynamic loading / P. M. Culkovski, H. Reismann // J. of Sound and Vibration. – 1971. – V. 14. – № 2. – P. 229–240.
- 15 *Yi-Yuan, Yu* Torsional vibration of homogenous and sandwich spherical caps and circular plates / Yu Yi-Yuan, B. Koplik // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1967. – Vol. E34. – № 3. – P. 787–789.