ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007

Матвеев С.В.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТЯЖЕЛОГО СЖИМАЕМОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

В работе рассматривается упругопластическое состояние плоскости, ослабленной круговым отверстием. Предполагается, что свойства среды в пластической области зависит от величины среднего давления, учтено влияние силы тяжести. Определено напряженное состояние и граница пластической зоны.

Рассмотрим идеальнопластическое тело, ослабленное круговым отверстием (случай плоской деформации) с учетом массовых сил.

Запишем уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_x}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial s_y}{\partial y}=g, \tag{1}$$

где g − массовая сила (сила тяжести).

Уравнение (1) имеет решение [2]

$$s_y=gy,\quad s_x=0,\quad t_{xy}=0. \tag{2}$$

Для перехода из декартовой системы координат воспользуемся формулами

$$s_r=\frac{s_x+s_y}{2}+\frac{s_x-s_y}{2}\cos 2q,\qquad s_r=\frac{s_x+s_y}{2}-\frac{s_x-s_y}{2}\cos 2q,\qquad t_{rq}=\frac{s_x-s_y}{2}\sin 2q. \tag{3}$$

В полярной системе координат уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial s_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{rq}}{\partial q}+\frac{s_r-s_q}{r}=g\sin q,\qquad \frac{\partial t_{rq}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial s_q}{\partial q}+\frac{2t_{rq}}{r}=g\cos q. \tag{4}$$

Согласно (3) решение (2) примет вид

$$s_r = r\sin q\left(\frac{q+g}{2}+\frac{q-g}{2}\cos 2q\right)=\frac{q+3g}{4}r\sin q+\frac{q-g}{4}r\sin 3q,$$

$$s_q = r\sin q\left(\frac{q+g}{2}-\frac{q-g}{2}\cos 2q\right)=\frac{3q+g}{4}r\sin q-\frac{q-g}{4}r\sin 3q, \qquad (5)$$

$$t_{rq}=\frac{g-q}{2}r\sin q\sin 2q=\frac{g-q}{4}r\left(\cos q-\cos 3q\right).$$

Аналогичный результат был получен в работе [2].

Условие пластичности имеет вид [3]

$$(s_r - s_q)^2+4t^2_{rq}=\left(2k+s\ tgm\right)^2, \quad s=\frac{1}{2}\left(s_r+s_q\right), \quad k, m-const, \qquad (6)$$

где s_r, s_q, t_{rq} – компоненты напряжения в полярной системе координат.

Рассмотрим круговую трубу радиусов $a, b, (a<b)$. Текущий радиус обозначим r, границу упругопластической зоны в исходном напряженном состоянии обозначим r_s^0.

В дальнейшем все величины имеющие размерность длины отнесем к величине r_s^0.

$$r=\frac{r}{r_s^0}, \; a=\frac{a}{r_s^0}, \; b=\frac{b}{r_s^0}. \qquad (7)$$

Пластическая зона находится в пределах

$$a \le r \le 1.$$

Упругая зона – в пределах

$$1 \le r \le b.$$

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными, отнесенными к величине предела текучести k.

Положим [1]

$$s_r = s_r^{(0)}+ds'_r, \; s_q=s_q^{(0)}+ds'_q, \; t_{rq}=t_{rq}^{(0)}+dt'_{rq}, \; g=dc; \; c-const, \qquad (8)$$

где d – малый параметр.

В дальнейшем будем считать, что

$$s_q^{(0)}<s_r^{(0)}, \; t_{rq}^{(0)}=0. \qquad (9)$$

Припишем компонентам напряжений в пластической зоне индекс *«p»* наверху, компонентам в упругой зоне – индекс *«e»* наверху.

Из (6 – 9) найдем в исходном нулевом приближении

$$s_r^{(0)p}-s_q^{(0)p}=2k+\frac{tgm}{2}\left(s_r^{(0)p}+s_q^{(0)p}\right). \qquad (10)$$

Из (10) получим

$$s_q^{(0)p}-\overline{A}s_r^{(0)p}=K, \qquad (11)$$

где

$$\overline{A}=\frac{2-tgm}{2+tgm}, \quad K=-\frac{4}{2+tgm}.$$

Решение уравнения (11) будем искать в виде

$$s_r^{(0)} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r},$$
$$s_q^{(0)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2}. \qquad (12)$$

Согласно (11), (12) получим

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{\overline{A}}{r}\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} = K. \qquad (13)$$

Из (12), (13) следует

$$s_r^{(0)\text{p}} = \frac{K}{1-\overline{A}} + \overline{C} r^{(\overline{A}-1)},$$
$$s_q^{(0)\text{p}} = \frac{K}{1-\overline{A}} + \overline{A}\,\overline{C} r^{(\overline{A}-1)}, \qquad (14)$$
$$\overline{C} - const.$$

Константу $\overline{C}$ определим согласно (14) при условии отсутствия давления на внутреннем контуре трубы $s_r^{(0)\text{p}}\Big|_{r=a} = 0$:

$$\overline{C} = -\frac{K}{1-\overline{A}} a^{(1-\overline{A})}. \qquad (15)$$

Из (14), (15) следует

$$s_r^{(0)\text{p}} = \frac{K}{1-\overline{A}}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{(\overline{A}-1)}\right],$$
$$s_q^{(0)\text{p}} = \frac{K}{1-\overline{A}}\left[1 - \overline{A}\left(\frac{r}{a}\right)^{(\overline{A}-1)}\right]. \qquad (16)$$

Условия сопряжения напряжений на упруго-пластической границе имеет вид

$$s_r^{(0)\text{p}}\Big|_{r=1} = s_r^{(0)\text{e}}\Big|_{r=1}, \quad s_q^{(0)\text{p}}\Big|_{r=1} = s_q^{(0)\text{e}}\Big|_{r=1}. \qquad (17)$$

Выражения для упругих напряжений запишем в виде

$$s_r^{(0)\text{e}} = \left[A - \frac{B}{r^2}\right], \quad s_q^{(0)\text{e}} = \left[A + \frac{B}{r^2}\right], \quad A, B - const. \qquad (18)$$

На бесконечности влияние отверстия стремится к нулю, из (18) получим

$$s_r^{(0)e}\Big|_{r\to\infty} = A = -q. \qquad (19)$$

Используя условие (17), а также (18), (19) получим

$$-q - B = \frac{K}{1-\overline{A}}\left[1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{(\overline{A}-1)}\right],$$
$$-q + B = \frac{K}{1-\overline{A}}\left[1 - \overline{A}\left(\frac{1}{a}\right)^{(\overline{A}-1)}\right]. \qquad (20)$$

Из (20) найдем

$$B=\frac{K}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{(\bar{A}-1)}. \tag{21}$$

Из (20), (21) найдем уравнение для определения радиуса пластической зоны

$$a=\left[\frac{2}{K}\left(-q-\frac{K}{1-\overline{A}}\right)\frac{1-\overline{A}}{\overline{A}+1}\right]^{1/(1-\overline{A})}.$$

В первом приближении имеет место

$$(s_r'^{\text{p}}-s_q'^{\text{p}})=s'\,tgm. \tag{22}$$

Уравнение (22) приведем к следующему виду:

$$s_q'^{\text{p}}-\overline{A}s_r'^{\text{p}}=0. \tag{23}$$

Для определения первого приближения имеет место система уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial s_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{rq}}{\partial q}+\frac{s_r-s_q}{r}=d\,c_2\sin q,\\
&\frac{\partial t_{rq}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial s_q}{\partial q}+\frac{2t_{rq}}{r}=d\,c_2\cos q,\\
&s_q'^{\text{p}}-\overline{A}s_r'^{\text{p}}=0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая, что:

$$\begin{aligned}
&s_r'=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi'}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial q^2}+r\sin q\left(\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{c_1-c_2}{2}\cos 2q\right),\\
&s_q'=\frac{\partial^2\Phi'}{\partial r^2}+r\sin q\,\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{c_1-c_2}{2}(1+\cos 2q),\\
&t_{rq}'=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi'}{\partial q}\right)+\frac{c_2-c_1}{2}r\sin q\sin 2q.
\end{aligned} \tag{25}$$

Из, (23), (25) найдем уравнение для определения функции напряжения Φ':

$$\frac{\partial^2\Phi'}{\partial r^2}-\frac{\overline{A}}{r}\frac{\partial\Phi'}{\partial r}-\frac{\overline{A}}{r^2}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial q^2}=\frac{(\overline{A}-3)c_1+(3\overline{A}-1)c_2}{4}r\sin q-\frac{(\overline{A}+1)(c_1-c_2)}{4}r(1+\overline{A})\sin 3q. \tag{26}$$

Решение неоднородного уравнения (26) представим в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Частным решением неоднородного уравнения является

$$\begin{aligned}
&s_{r_1}'=\frac{(\overline{A}-3)c_1+(3\overline{A}-1)c_2}{8}r\sin q+\frac{(\overline{A}+1)(c_1-c_2)}{8}r\sin 3q,\\
&s_{q_1}'=3\frac{(\overline{A}-3)c_1+(3\overline{A}-1)c_2}{8}r\sin q-\frac{(\overline{A}+1)(c_1-c_2)}{8}r\sin 3q,\\
&t_{rq_1}'=-\frac{(\overline{A}-3)c_1+(3\overline{A}-1)c_2}{8}r\cos q+\frac{(\overline{A}+1)(c_1-c_2)}{8}r\cos 3q.
\end{aligned} \tag{27}$$

Отметим, что вес тела уравновешивается усилиями, определяемыми напряжениями

$$s_r=\frac{(\overline{A}-3)c_1+(3\overline{A}-1)c_2}{8}r\sin q,\quad t_{rq}=-\frac{(\overline{A}+1)(c_1-c_2)}{8}r\cos q. \tag{28}$$

Решение однородного уравнения будем искать в виде

$$\Phi = r^{m}\cos(3q + q_0). \tag{29}$$

Будет иметь место следующее выражение:

$$m^2 - (1+\bar{A})m + 9\bar{A} = 0. \tag{30}$$

Откуда

$$m_{1,2} = \frac{1+\bar{A} \pm \sqrt{D}}{2}, \tag{31}$$

где $D = (1+\bar{A})^2 - 36\bar{A}$.

Согласно (31) возможны два решения уравеннеия (27), при $D > 0$ и при $D < 0$.

Расссмотрим случай, когда $D < 0$.

Решение уравнения (26) согласно (27) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
s_r'^{\text{р}} &= \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} r\sin q + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} r\sin 3q + \frac{C_{12}}{r}\sin q + \\
&+ r^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)}\left\{\left(\left[\frac{1+\bar{A}}{2} - 9\right]C_{31} + i\Delta C_{32}\right)\cos(\Delta \ln r) + \right. \\
&\left. + \left(-\Delta C_{31} + i\left[\frac{1+\bar{A}}{2} - 9\right]C_{32}\right)\sin(\Delta \ln r)\right\}\cdot \sin 3q, \\
s_q'^{\text{р}} &= \frac{3(\bar{A}-1)c_1 + (9\bar{A}+5)c_2}{8} r\sin q - \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (1-\bar{A})c_2}{8} r\sin 3q + \frac{C_{12}}{r}\sin q + \\
&+ (1+\bar{A})\, r^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)}\left\{\left(\left[\frac{\bar{A}-1}{4} - (\bar{A}^2-1)\Delta^2\right]C_{31} + i\Delta C_{32}\right)\cos(\Delta \ln r) + \right. \\
&\left. + \left(-\Delta C_{31} + i\left[\frac{\bar{A}-1}{4} - (\bar{A}^2-1)\Delta^2\right]C_{32}\right)\sin(\Delta \ln r)\right\}\cdot \sin 3q, \\
t_{rq}'^{\text{р}} &= -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} r\cos q + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} r\cos 3q - \frac{C_{12}}{r}\cos q + \\
&+ 3r^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)}\left\{\left(\left[\frac{\bar{A}-1}{2}\right]C_{31} + i\Delta C_{32}\right)\cos(\Delta \ln r) + \right. \\
&\left. + \left(-\Delta C_{31} + i\left[\frac{\bar{A}-1}{2}\right]C_{32}\right)\sin(\Delta \ln r)\right\}\cos 3q,
\end{aligned} \tag{32}$$

где $\Delta = \dfrac{\sqrt{(1+\bar{A}) - 36\bar{A}}}{2}$.

Коэфициенты C_{12}, C_{31}, C_{32} определим из (32) и граничных условий при $r = a$.

Граничные условия на контуре отверстия имеют вид

$$s_r^{(n)\text{р}} = t_{rq}^{(n)\text{р}} = 0 \text{ при } r = a. \tag{33}$$

Из (32), (33) получим систему уравнений:

$$\sigma_r'^{p} = \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} a \sin\theta + \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} a \sin 3\theta +$$

$$+\frac{C_{12}}{a}\sin\theta + a^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)}\left\{\left(\left[\frac{1+\bar{A}}{2}-9\right]C_{31} + i\Delta C_{32}\right)\cos(\Delta \ln a) +\right.$$

$$\left.+\left(-\Delta C_{31} + i\left[\frac{1+\bar{A}}{2}-9\right]C_{32}\right)\sin(\Delta \ln a)\right\}\cdot \sin 3\theta = 0,$$

$$(34)$$

$$\tau_{r\theta}'^{p} = -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} a \cos\theta + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} a \cos 3\theta -$$

$$-\frac{C_{12}}{a}\cos\theta + 3a^{\left(\frac{\bar{A}-3}{2}\right)}\left\{\left(\left[\frac{\bar{A}-1}{2}\right]C_{31} + i\Delta C_{32}\right)\cos(\Delta \ln r) +\right.$$

$$\left.+\left(-\Delta C_{31} + i\left[\frac{\bar{A}-1}{2}\right]C_{32}\right)\sin(\Delta \ln r)\right\}\cos 3\theta = 0.$$

Составляющие напряжения при $\sin\theta, \cos\theta$ являются несамоуравновешивающимися и одновременно обращаться в ноль на контуре отверстия не могут.

Предположим, что

$$\sigma_r'\Big|_{r=a} = 0, \qquad (35)$$

из (34), (35) следует

$$C_{12} = -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} a^2, \quad \tau_{r\theta}' = c_2 a \cos\theta, \quad r = a. \qquad (36)$$

При

$$\tau_{r\theta}'\Big|_{r=a} = 0 \qquad (37)$$

из (34), (37) следует

$$C_{12} = -\frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} a^2, \quad \sigma_r' = c_2 \sin\theta, \quad r = a. \qquad (38)$$

Предположим, что на контуре отверстия $r = a$ все самоуравновешивающиеся составляющие напряжения обращаются в ноль, отсюда определим коэффициенты C_{00}, C_{31}, C_{32} :

$$C_{31} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad C_{32} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{i(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \frac{C_{32}'}{i},$$

где

$$a_{11}=\left(\frac{1+\bar{A}}{2}-9\right)\cos\left(\Delta\ln a\right)-\Delta\sin\left(\Delta\ln a\right),$$

$$a_{12}=i\left[\Delta\cos\left(\Delta\ln a\right)+\left(\frac{1+\bar{A}}{2}-9\right)\sin\left(\Delta\ln a\right)\right],$$

$$a_{21}=\left(\frac{\bar{A}-1}{2}\right)\cos\left(\Delta\ln a\right)-\Delta\sin\left(\Delta\ln a\right),$$

$$a_{22}=i\left[\Delta\cos\left(\Delta\ln a\right)+\left(\frac{\bar{A}-1}{2}\right)\sin\left(\Delta\ln a\right)\right],$$

$$b_1=-\frac{\left(1-\bar{A}\right)c_1+\left(\bar{A}-1\right)c_2}{8}a^{\left(\frac{5-\bar{A}}{2}\right)},\quad b_2=-\frac{\left(\bar{A}-1\right)c_1+\left(\bar{A}+3\right)c_2}{24}a^{\left(\frac{5-\bar{A}}{2}\right)}.$$

На границе пластической зоны при $r=1$ из (32) имеет место

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime p}&=\frac{\left(\bar{A}-1\right)c_1+\left(3\bar{A}+5\right)c_2}{8}\sin q+\frac{\left(1-\bar{A}\right)c_1+\left(\bar{A}-1\right)c_2}{8}\sin 3q+\\
&+C_{12}\sin q+\left(\left[\frac{1+\bar{A}}{2}-9\right]C_{31}+\Delta C_{32}^{\prime}\right)\cdot\sin 3q,\\
s_q^{\prime p}&=\frac{3\left(\bar{A}-1\right)c_1+\left(9\bar{A}+5\right)c_2}{8}\sin q-\frac{\left(\bar{A}-1\right)c_1+\left(1-\bar{A}\right)c_2}{8}\sin 3q+\\
&+C_{12}\sin q+\left(1+\bar{A}\right)\left(\left[\frac{\bar{A}-1}{4}-\left(\bar{A}^2-1\right)\Delta^2\right]C_{31}+\Delta C'_{32}\right)\cdot\sin 3q,\\
t_{rq}^{\prime p}&=-\frac{\left(\bar{A}-1\right)c_1+3\left(\bar{A}-1\right)c_2}{8}\cos q+\frac{\left(\bar{A}-1\right)c_1+\left(\bar{A}+3\right)c_2}{8}\cos 3q-\\
&-C_{12}\cos q+3\left(\left[\frac{\bar{A}-1}{2}\right]C_{31}+\Delta C'_{32}\right)\cos 3q\ .
\end{aligned}\tag{39}$$

В дальнейшем запишем соотношения (39) в виде

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime\text{p}}&=b_1''\sin q+b_3''\sin 3q,\\
t_{rq}^{\prime\text{p}}&=a_1'''\cos q-a_3'''\cos 3q,\quad r=1,
\end{aligned}\tag{40}$$

где

$$\begin{aligned}
&a_1'''=-\left(C_{12}+\frac{\left(\bar{A}-1\right)c_1+3\left(\bar{A}-1\right)c_2}{8}\right),\quad a_3'''=\frac{\left(\bar{A}-1\right)c_1+\left(\bar{A}+3\right)c_2}{8}+\frac{3}{2}\left[A-1\right]C_{31}+3\Delta C'_{32},\\
&b_1''=\frac{\left(\bar{A}-1\right)c_1+\left(3\bar{A}+5\right)c_2}{8}+C_{12},\qquad b_3''=\frac{1+A}{2}C_{31}-9+\Delta C'_{32}+\frac{\left(1-\bar{A}\right)c_1+\left(\bar{A}-1\right)c_2}{8}.
\end{aligned}\tag{41}$$

Граничные условия на внешней стороне трубы запишем в виде

$$\begin{aligned}
s_r^{\prime\text{e}}&=b_1\sin q,\\
t_{rq}^{\prime\text{e}}&=a_1'\cos q,\quad r=b,
\end{aligned}\tag{42}$$

где $b_1, a_1' - const.$

Из условий равновесия имеет место

$$\left(b_1+a_1'\right)b+\left(b_1''+a_1'''\right)=0\ .$$

В рассматриваемом случае имеют место формулы раздела (IV) и (VIII), приведенных в монографии [1].

Получим

$$
\begin{aligned}
s_r^{\prime e} = {} & \left[\frac{r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)b}{4m(b^2+1)} (b_1 + a_1') \left(\frac{1+b^2}{r} - \frac{b^2}{r^3} - r \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{b^4-1} (b_1 - b_1'' b) \left(\frac{r}{b} - \frac{b^3}{r^3} \right) \right] \sin q + \\
& + \frac{1}{2N} \left\{ 3\left[2 - 3b^2 + b^{-6}\right] r + 3\left[4 - 3b^2 - b^6\right] r^{-5} + \right. \\
& \left. + \left[4 - 3b^{-2} - b^{-6}\right] r^3 + 5\left[2 - 3b^{-2} + b^6\right] r^{-3} \right\} \cdot b_3'' \sin 3q + \\
& + \frac{1}{2N} \left\{ \left[-10 + 9b^2 + b^{-6}\right] r + \left[4 + 6b^6 - 9b^2\right] r^{-5} + \right. \\
& \left. + \left[-4 + 5b^{-2} - b^{-6}\right] r^3 + \left[10 - 5b^{-2} - 5b^6\right] r^{-3} \right\} \cdot \left(-a_3''' \sin 3q\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_q^{\prime e} = {} & \left[\frac{3r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)b}{4m(b^2+1)} (b_1 + a_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot \frac{1+b^2}{r} + \frac{b^2}{r^3} - 3r \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{b^4-1} (b_1 - b_1'' b) \left(\frac{3r}{b} + \frac{b^3}{r^3} \right) \right] \sin q + \\
& + \frac{1}{2N} \left\{ 3\left[-2 + 3b^2 - b^{-6}\right] r + 3\left[-4 + 3b^2 + b^6\right] r^{-5} + \right. \\
& \left. + 5\left[-4 + 3b^{-2} + b^{-6}\right] r^3 + \left[-2 + 3b^{-2} - b^6\right] r^{-3} \right\} \cdot b_3'' \sin 3q + \\
& + \frac{1}{2N} \left\{ \left[10 - 9b^2 - b^{-6}\right] r + \left[-4 - 6b^6 + 9b^2\right] r^{-5} + \right. \\
& \left. + 5\left[4 - 5b^{-2} + b^{-6}\right] r^3 + \left[-2 + b^{-2} + b^6\right] r^{-3} \right\} \cdot \left(-a_3''' \sin 3q\right),
\end{aligned}
\tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
t_{rq}^{\prime e} = {} & -\left[\frac{r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)\,b}{4m(b^2+1)} (b_1 + a_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \cdot \frac{1+b^2}{r} - \frac{b^2}{r^3} - r \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{b^4-1} (b_1 - b_1'' b) \left(\frac{r}{b} - \frac{b^3}{r^3} \right) \right] \cos q + \\
& + \frac{1}{2N} \left\{ 3\left[-2 + 3b^2 - b^{-6}\right] r + 3\left[4 - 3b^2 - b^6\right] r^{-5} + \right. \\
& \left. + 3\left[-4 + 3b^{-2} + b^{-6}\right] r^3 + 3\left[2 - 3b^{-2} + b^6\right] r^{-3} \right\} \cdot \left(-b_3'' \sin 3q\right) + \\
& + \frac{1}{2N} \left\{ \left[10 - 9b^2 - b^{-6}\right] r + \left[4 - 9b^2 + 6b^6\right] r^{-5} + \right. \\
& \left. + \left[12 - 15b^{-2} + 3b^{-6}\right] r^3 + \left[6 - 3b^{-2} - 3b^6\right] r^{-3} \right\} \cdot a_3''' \sin 3q,
\end{aligned}
$$

где $N = 16 - 9(b^{-2} + b^2) + (b^{-8} + b^8)$, $m = \dfrac{1}{m}$, m − коэффициент Пуассона.

Из условий сопряжения компонент s'_q согласно (32), (43) получим

$$r'_s = \bar{M}_1 \sin q + \bar{M}_2 \sin 3q, \tag{44}$$

где

$$\bar{M}_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{r}{b}b_1 + \frac{(3m+1)b}{4m(b^2+1)}(b_1 + a'_1)\left(-\frac{m-1}{3m+1}\cdot(1+b^2)+b^2-3\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{b^4-1}(b_1 - b''_1 b)\left(\frac{3}{b}+b^3\right)-\frac{3(\bar{A}-3)c_1+3(3\bar{A}-1)c_2}{8}-C_{12}\right],$$

$$\bar{M}_2 = \frac{1}{8N}\left\{\left[-40+18b^2+18b^{-2}+2b^6+2b^{-6}\right]\cdot b''_3 -\right.$$

$$-\left[24-24b^{-2}-5b^6+4b^{-6}\right]\cdot a'''_3 - \frac{(\bar{A}+1)(c_1-c_2)}{8}-$$

$$\left.-(1+\bar{A})\left(\left[\frac{\bar{A}-1}{4}-(\bar{A}^2-1)\Delta^2\right]C_{31}+\Delta C'_{32}\right)\right\}.$$

Рассмотрим второе решение уравнения (26) при $D>0$.

Решение уравнения (26) согласно (27) будет иметь вид

$$s'^{\text{р}}_{r1} = \frac{(\bar{A}-1)c_1+(3\bar{A}+5)c_2}{8} r\sin q + \frac{(1-\bar{A})c_1+(\bar{A}-1)c_2}{8} r\sin 3q +$$

$$+\frac{\bar{C}_{12}}{r}\sin q + \left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2}\right]\bar{C}_{31} r^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32}\left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2}\right] r^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}\right)\sin 3q,$$

$$s'^{\text{р}}_{q1} = \frac{3(\bar{A}-1)c_1+(9\bar{A}+5)c_2}{8} r\sin q - \frac{(\bar{A}-1)c_1+(1-\bar{A})c_2}{8} r\sin 3q +$$

$$+\frac{\bar{C}_{12}}{r}\sin q + \left(\left[\frac{(\bar{A}+2\Delta)^2-1}{4}\right]\bar{C}_{31} r^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32}\left[\frac{(\bar{A}-2\Delta)^2-1}{2}\right] r^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}\right)\sin 3q, \tag{45}$$

$$t'^{\text{р}}_{rq1} = -\frac{(\bar{A}-1)c_1+3(\bar{A}-1)c_2}{8} r\cos q + \frac{(\bar{A}-1)c_1+(\bar{A}+3)c_2}{8} r\cos 3q +$$

$$+3\left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2}\right]\bar{C}_{31} r^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32}\left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2}\right] r^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}\right)\cos 3q,$$

где $\Delta = \dfrac{\sqrt{(1+\bar{A})-36\bar{A}}}{2}$.

Из (45) и граничных условий (33) получим систему уравнений:

$$\frac{(\bar{A}-1)c_1+(3\bar{A}+5)c_2}{8}a\sin q+\frac{(1-\bar{A})c_1+(\bar{A}-1)c_2}{8}a\sin 3q+$$

$$+\frac{\bar{C}_{12}}{a}\sin q+\left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2}\right]\bar{C}_{31}a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}}+\bar{C}_{32}\left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2}\right]a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}\right)\sin 3q=0,$$

(46)

$$-\frac{(\bar{A}-1)c_1+3(\bar{A}-1)c_2}{8}a\cos q+\frac{(\bar{A}-1)c_1+(\bar{A}+3)c_2}{8}a\cos 3q-$$

$$-\frac{\bar{C}_{12}}{a}\cos q+3\left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2}\right]\bar{C}_{31}a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}}+\bar{C}_{32}\left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2}\right]a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}\right)\cos 3q=0.$$

Из (33), (45) получим

$$\bar{C}_{31}=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ \bar{C}_{32}=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

где

$$a_{11}=\left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2}\right]a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}},\ a_{12}=\left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2}\right]a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}},$$

$$a_{21}=\left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2}\right]a^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}},\quad a_{22}=\left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2}\right]a^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}},$$

$$b_1=-\frac{(1-\bar{A})c_1+(\bar{A}-1)c_2}{8}a,\quad b_2=-\frac{(1-\bar{A})c_1+(\bar{A}-1)c_2}{8}a.$$

На границе пластической зоны при $r=1$ из (45), (46) имеет место

$$s_r'^{\text{р}}=\frac{(\bar{A}-1)c_1+(3\bar{A}+5)c_2}{8}\sin q+\frac{(1-\bar{A})c_1+(\bar{A}-1)c_2}{8}\sin 3q+$$

$$+\bar{C}_{12}\sin q+\left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2}\right]\bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}}+\bar{C}_{32}\left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2}\right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}\right)\sin 3q,$$

$$s_q'^{\text{р}}=\frac{3(\bar{A}-1)c_1+(9\bar{A}+5)c_2}{8}\sin q-\frac{(\bar{A}-1)c_1+(1-\bar{A})c_2}{8}\sin 3q+$$

$$+\bar{C}_{12}\sin q+\left(\left[\frac{(\bar{A}+2\Delta)^2-1}{4}\right]\bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}}+\bar{C}_{32}\left[\frac{(\bar{A}-2\Delta)^2-1}{2}\right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}\right)\sin 3q,$$ (47)

$$t_{rq}'^{\text{р}}=-\frac{(\bar{A}-1)c_1+3(\bar{A}-1)c_2}{8}\cos q+\frac{(\bar{A}-1)c_1+(\bar{A}+3)c_2}{8}\cos 3q-$$

$$-\bar{C}_{12}\cos q+3\left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2}\right]\bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}}+\bar{C}_{32}\left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2}\right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}}\right)\cos 3q,$$

В дальнейшем запишем соотношения (47) в виде

$$
\begin{aligned}
s\,{}'^{\,\text{р}}_{r} &= b_1''\sin q + b_3''\sin 3q,\\
t\,{}'^{\,\text{р}}_{rq} &= a_1'''\cos q - a_3'''\cos 3q, \quad r = 1,
\end{aligned}
\tag{48}
$$

где

$$
a_1''' = -\left(C_{12} + \frac{(\bar{A}-1)c_1 + 3(\bar{A}-1)c_2}{8} \right), \qquad b_1'' = \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (3\bar{A}+5)c_2}{8} + C_{12},
$$

$$
a_3''' = \frac{(\bar{A}-1)c_1 + (\bar{A}+3)c_2}{8} + 3\left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta-1}{2}\right] \bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32}\left[\frac{\bar{A}-2\Delta-1}{2}\right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right),
$$

$$
b_3'' = \frac{(1-\bar{A})c_1 + (\bar{A}-1)c_2}{8} + \left(\left[\frac{\bar{A}+2\Delta+1}{2}\right] \bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32}\left[\frac{\bar{A}-2\Delta+1}{2}\right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \right).
$$

Согласно (43) из выражения упругого напряженного состояния, определяемого согласно (48), получим выражение для границы пластической зоны:

$$
r'_{s1} = \bar{M}_1 \sin q + \bar{M}_2 \sin 3q, \tag{49}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_1 = \frac{1}{4}\Bigg[&\frac{r}{b} b_1 + \frac{(3m+1)\,b}{4m(b^2+1)}(b_1 + a_1')\left(-\frac{m-1}{3m+1}\cdot\left(1+b^2\right) + b^2 - 3 \right)\\
&+ \frac{1}{b^4-1}(b_1 - b_1''b)\left(\frac{3}{b} + b^3\right) - \frac{3(\bar{A}-3)c_1 + 3(3\bar{A}-1)c_2}{8} - C_{12} \Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_2 = \frac{1}{8N}\Bigg\{ &\left[-40 + 18b^2 + 18b^{-2} + 2b^6 + 2b^{-6}\right]\cdot b_3'' -\\
&-\left[24 - 24b^{-2} - 5b^6 + 4b^{-6}\right]\cdot a_3''' - \frac{(\bar{A}+1)(c_1 - c_2)}{8} -\\
&-\left[\frac{(\bar{A}+2\Delta)^2 - 1}{4}\right]\bar{C}_{31}^{\frac{\bar{A}+2\Delta-3}{2}} + \bar{C}_{32}\left[\frac{(\bar{A}-2\Delta)^2 - 1}{2}\right]^{\frac{\bar{A}-2\Delta-3}{2}} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

г. Чебоксары
Поступила: 15 апреля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д Ивлев, Л. В Ершов. – М. : Наука, 1978.

2. *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – Т.2. / А. Надаи.– М. : Мир, 1969.

3. *Соколовский, В. В.* Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М.; Л., 1942 ; 3 изд., М. – 1960. – 241 с.