

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ ВТУЛКИ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА КОНТАКТНОЙ ПАРЫ

(Азербайджанский технический университет)

Рассматривается задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары. Считается, что при многократном возвратно-поступательном движении плунжера происходит разрушение материалов при трении, вызванное контактным взаимодействием и сопровождаемое совместным действием силовой нагрузки и температуры. Принято, что вблизи поверхности контакта втулки, подкрепленной с натягом с внешним цилиндром, имеются N_0 произвольно размещенных прямолинейных трещин. Методами теории аналитических функций задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений и бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Проводится процедура определения коэффициентов интенсивности напряжений. В расчетах функция, описывающая шероховатость внутренней поверхности втулки принималась стационарной случайной функцией с нулевым средним значением и известной дисперсией.

Опыт показывает большую надежность и долговечность многокомпонентных конструкций перед однородными. В связи с этим в некоторых контактных парах нефтепромыслового оборудования нашли применение составные цилиндры (втулки и подкрепляющий цилиндр). При этом в расчетах используется схема собранного с натягом двухкомпонентного кольца под действием внутреннего давления. Фрикционная пара «втулка-плунжер» работает в условиях сложного напряженного состояния.

Практика работы контактных пар нефтепромыслового оборудования показывает, что разрушение втулки составного цилиндра контактной пары происходит на пятнах фактического касания в тонких приповерхностных слоях путем образования микротрещин.

Для обоснованного управления процессом трения и изнашивания в трущейся паре необходимо исследование разрушения материалов при трении, вызванного контактным взаимодействием и сопровождаемое совместным действием контактного давления, сил трения и температуры.

В связи с этим необходимо осуществлять предельный анализ деталей контактной пары, чтобы установить, что предполагаемые исходные трещины, расположенные самым неблагоприятным образом, не будут расти до катастрофических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы.

1. Постановка задачи. Считаем, что внутренний контур втулки, подкрепленной внешним цилиндром, близок к круговому. Как известно, реальная обработанная поверхность втулки никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет микро или макроско-

пические неровности технологического характера, образующие шероховатость. Несмотря на исключительно малые размеры неровностей, образующие шероховатость, они оказывают существенное влияние на разнообразные эксплуатационные свойства трибосопряжения. В процессе работы контактной пары «составной цилиндр-плунжер» происходит силовое взаимодействие между контактирующими поверхностями втулки и плунжера, возникают силы трения, приводящие к изнашиванию материалов сопряжения. Изнашивание во фрикционной паре в процессе трения существенно связано с величиной площади контакта и контактным давлением. Для определения контактного давления необходимо рассмотреть износоконтактную задачу о вдавливании плунжера в поверхность втулки. Пусть к внутренней поверхности упругой втулки с механическими характеристиками G и m на некотором участке прижимается плунжер с механическими характеристиками G_1 и m_1 . Считается, что втулка подкреплена с натягом с помощью внешнего цилиндра с механическими характеристиками G_0 и m_0 . Принято, что выполняются условия плоской деформации.

Отнесем составной цилиндр контактной пары к полярной системе координат $r\varphi$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L_0, L и L_1 с радиусами R_0, R и R_1 соответственно (рис. 1). Считается, что выполняются условия плоской деформации. Рассмотрим некоторую реализацию шероховатой внутренней поверхности втулки.

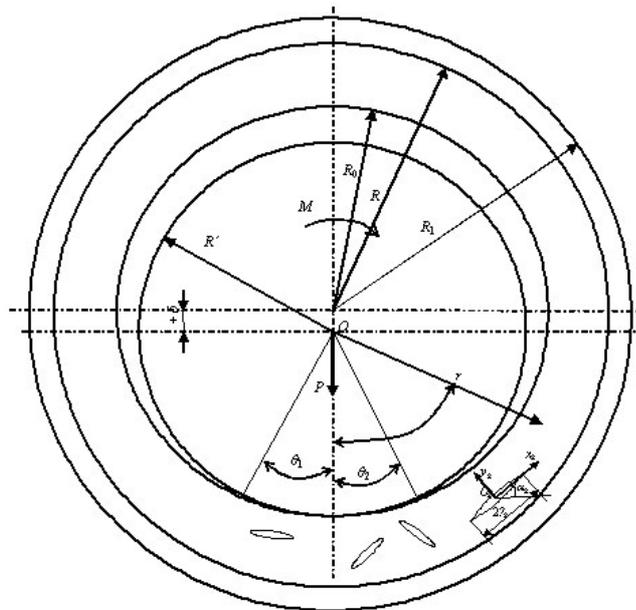


Рис. 1. Расчетная схема задачи механики контактного разрушения

Представим границу внутреннего контура L'_0 втулки в следующем виде:

$$r = R_0 + d(q); \quad d(q) = e H(q), \quad (1.1)$$

где $e = R_{\max} / R_0$ – малый параметр; R_{\max} – наибольшая высота выступа (впадины) неровности внутренней поверхности втулки.

С помощью обработки профилограмм обработанной поверхности втулки находятся коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$H(q) = \sum_{k=0}^n (a_k^0 \cos kq + b_k^0 \sin kq),$$

описывающие каждый внутренний профиль обработанной поверхности втулки.

Аналогично считается, что внешний контур плунжера близок к круговому и может быть представлен в виде

$$r_1(q) = R'_0 + eH_1(q); H_1(q) = \sum_{k=0}^n (a_k^1 \cos kq + b_k^1 \sin kq). \quad (1.2)$$

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние втулки составного цилиндра в процессе работы контактной пары.

Пусть в упругой втулке, подкрепленной с натягом с внешним упругим цилиндром, вблизи поверхности трения имеется N_0 прямолинейных трещин длиной $2l_k$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$). Берега трещин свободны от нагрузок. Режимы работы контактной пары, в которой могут возникнуть остаточные деформации, считаются недопустимыми.

Условие, связывающее перемещения втулки и плунжера представлено [1, 3] в следующем виде:

$$u_1 + u_2 = d(q), \quad q_1 \leq q \leq q_2. \quad (1.3)$$

Здесь $d(q)$ – осадка точек поверхности втулки и плунжера, определяемая формой внутренней поверхности втулки и плунжера, а также величиной прижимающей силы P ; $q_2 - q_1$ – величина угла (площадки) контакта. В зоне контакта, кроме нормальных давлений, действует касательное напряжение t_{rq} , связанное с контактным давлением $p(q, t)$ по закону Амонтона – Кулона

$$t_{rq}(q, t) = fp(q, t),$$

где f – коэффициент трения пары «втулка - плунжер».

Касательные усилия (усилия трения) $t_{rq}(q, t)$ способствуют тепловыделению в зоне контакта. Общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности сил трения, а количество тепла, выделяемое в точке зоны контакта с координатой q , будет равно

$$Q(q, t) = Vfp(q, t), \quad (1.4)$$

где V – средняя за период скорость перемещения плунжера относительно втулки.

Общее количество тепла $Q(q, t)$ будет расходоваться следующим образом: поток тепла во втулку $Q_b(q, t)$ и аналогичный поток $Q_1(q, t)$ тепла на повышение температуры плунжера, т. е. $Q = Q_b + Q_1$.

Так как частота движения плунжера достаточно велика, рассматриваем задачу определения температуры как стационарную.

Для радиального перемещения втулки составного цилиндра будем иметь

$$u_1 = u_{1y} + u_{1m} + u_{1u}. \quad (1.5)$$

Здесь u_{1y} – радиальные термоупругие перемещения точек контактной поверхности втулки; u_{1m} – перемещения, вызванные смятием микровыступов поверхности втулки; u_{1u} – перемещения, вызванные износом поверхности втулки.

Аналогично для перемещений точек поверхности плунжера будем иметь

$$u_2 = u_{2y} + u_{2m} + u_{2u}. \quad (1.6)$$

Скорость изменения перемещений поверхности трения при абразивном износе будет [2]

$$\frac{d\mathbf{u}_{ku}}{dt} = K_{bk} p(\mathbf{q}, t) \quad (k=1,2), \quad (1.7)$$

где K_{b1} и K_{b2} – коэффициенты изнашивания материала втулки и плунжера соответственно.

Для определения перемещений \mathbf{u}_{1y} , \mathbf{u}_{1uu} необходимо решить следующую задачу термоупругости для составного цилиндра:

$$\Delta T = 0 \text{ во втулке;}$$

$$\Delta T_0 = 0 \text{ в подкрепляющем цилиндре;}$$

при $r = r(\mathbf{q})$

$$A_{T_1} I \frac{\partial T}{\partial n} - A_{T_2} a_1 (T - T_c) = -Q_*; \quad (1.8)$$

при $r = R$

$$T = T_0; I \frac{\partial T}{\partial r} = I_0 \frac{\partial T_0}{\partial r};$$

при $r = R_1$

$$I_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} + a_2 (T - T_c) = 0;$$

при $r = r(\mathbf{q})$

$$\mathbf{s}_n^b = -p(\mathbf{q}), \mathbf{t}_{nt}^b = -fp(\mathbf{q}) \quad \text{на площадке контакта;} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{s}_n^b = 0, \mathbf{t}_{nt}^b = 0 \quad \text{вне площадки контакта;}$$

при $r = R$

$$\mathbf{s}_r^b - i\mathbf{t}_{rq}^b = \mathbf{s}_r^0 - i\mathbf{t}_{rq}^0; \quad (1.10)$$

$$\mathbf{u}_r^b - i\mathbf{u}_q^b = \mathbf{u}_r^0 - i\mathbf{u}_q^0 + g(\mathbf{q});$$

при $r = R_1$

$$\mathbf{u}_r^0 = 0; \mathbf{u}_q^0 = 0; \quad (1.11)$$

$$\mathbf{s}_n^b = 0; \mathbf{t}_{nt}^b = 0 \quad \text{на берегах трещин.} \quad (1.12)$$

Здесь I , I_0 – коэффициенты теплопроводности втулки и подкрепляющего цилиндра соответственно; Δ – оператор Лапласа; a_1 – коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности втулки; a_2 – коэффициент теплоотдачи с наружной цилиндрической поверхности цилиндра с внешней средой; T_c – температура окружающей среды; n , t – нормаль и касательная к контуру трещины; A_{T_1} – теплопоглощающая поверхность; A_{T_2} – охлаждающая поверхность; Q_* – часть количества тепла, выделившегося при трении и приходящаяся на нагрев втулки; $Q_* = Q_b$ на площадке контакта, $Q_* = 0$ вне площадки контакта; \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_q – соответственно радиальная и касательная составляющие вектора перемещений точек контура L ; \mathbf{s}_r , \mathbf{s}_q , \mathbf{t}_{rq} – компоненты тензора напряжений; $g(\mathbf{q})$ – заданная функция натяга; $i^2 = -1$.

Аналогично ставится задача термоупругости для определения перемещений контактной поверхности плунжера

$$\Delta T_2 = 0$$

при $r = r_1(q)$

$$I_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = -Q_1(q); \quad \text{на контактной площадке}; \quad (1.13)$$

$$I_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} + a(T_2 - T_c) = 0 \quad \text{вне контактной площадки};$$

при $r = r_1(q)$

$$s_n = -p(q), \quad t_{nr} = -fp(q) \quad \text{на контактной площадке}; \quad (1.14)$$

$$s_n = 0, \quad t_{nr} = 0 \quad \text{вне контактной площадки};$$

Здесь для интенсивности поверхностного источника тепла в зоне трения имеем $Q_1(q) = a_{m,n,2} fVp(q)$; $a_{m,n,2}$ – коэффициент разделения теплового потока для плунжера.

Величины q_1 и q_2 , являющиеся концами участка соприкосновения плунжера с втулкой, неизвестны заранее. Для их определения используем условие [5], выражающее, что давление $p(q)$ непрерывно переходит в нуль, когда точка q выходит за участок соприкосновения:

$$p(q_1) = 0; \quad p(q_2) = 0. \quad (1.15)$$

Согласно теории [8] квазихрупкого разрушения Ирвина-Орована параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, ответственной за разрушение материала втулки составного цилиндра контактной пары можно считать величину коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины.

2. Случай одной трещины. Для решения поставленной задачи необходимо совместное решение износоконтактной задачи с задачей механики разрушения.

Температурные функции, напряжения и перемещения в составном цилиндре и плунжера ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем, для упрощения, членами, содержащими ϵ степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской термоупругости.

Значения компонент тензора напряжений при $r = r(q)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R_0$.

Используя метод возмущений с учетом сказанного, краевые условия задачи термоупругости для составного цилиндра примут вид:

для нулевого приближения

$$\Delta t_b^{(0)} = 0 \quad \text{во втулке};$$

$$\Delta t_0^{(0)} = 0 \quad \text{в подкрепляющем цилиндре};$$

$$\text{при } r = R_0 \quad A_{r_1} I \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} - A_{r_2} a_{1b}^{(0)} = -Q_*^{(0)}; \quad (2.1)$$

$$\text{при } r = R \quad t_b^{(0)} = t_0^{(0)}; \quad I \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} = I_0 \frac{\partial t_0^{(0)}}{\partial r};$$

$$\text{при } r = R_1 \quad I_0 \frac{\partial t_0^{(0)}}{\partial r} + a_2 t_0^{(0)} = 0;$$

$$\text{при } r = R_0 \quad s_r^{b(0)} = -p^{(0)}(q), \quad t_{rq}^{b(0)} = -fp^{(0)}(q) \quad \text{на площадке контакта}; \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}_r^{b(0)} = 0, \mathbf{t}_{rq}^{b(0)} = 0 \text{ вне площадки контакта;} \\ \text{при } r = R & \quad \mathbf{s}_r^{b(0)} - i\mathbf{t}_{rq}^{b(0)} = \mathbf{s}_r^{0(0)} - i\mathbf{t}_{rq}^{0(0)}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_r^{b(0)} - i\mathbf{u}_q^{b(0)} = \mathbf{u}_r^{0(0)} - i\mathbf{u}_q^{0(0)} + \mathbf{g}^{(0)}(\mathbf{q}); \\ \text{при } r = R_1 & \quad \mathbf{u}_r^{0(0)} = 0; \mathbf{u}_q^{0(0)} = 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{s}_n^{b(0)} = 0; \mathbf{t}_{nr}^{b(0)} = 0 \text{ на берегах трещин;} \quad (2.5)$$

для первого приближения

$$\Delta t_b^{(1)} = 0 \quad \text{во втулке;}$$

$$\Delta t_0^{(1)} = 0 \quad \text{в подкрепляющем цилиндре;}$$

$$\text{при } r = R_0 \quad A_{T_1} I \frac{\partial t_b^{(1)}}{\partial r} - A_{T_2} a_1 t_b^{(1)} = \left[A_{T_2} a_1 \frac{\partial t_b^{(0)}}{\partial r} - A_{T_1} I \frac{\partial^2 t_b^{(0)}}{\partial r^2} \right] H(\mathbf{q}) - Q_*^{(1)}(\mathbf{q}); \quad (2.6)$$

$$\text{при } r = R \quad t_b^{(1)} = t_0^{(1)}; \quad I \frac{\partial t_b^{(1)}}{\partial r} = I_0 \frac{\partial t_0^{(1)}}{\partial r};$$

$$\text{при } r = R_1 \quad I_0 \frac{\partial t_0^{(1)}}{\partial r} + a_2 t_0^{(1)} = 0;$$

$$\text{при } r = R_0 \quad \mathbf{s}_r^{b(1)} = N - p^{(1)}(\mathbf{q}), \mathbf{t}_{rq}^{b(1)} = T - fp^{(1)}(\mathbf{q}) \text{ на площадке контакта;} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{s}_r^{b(1)} = N, \mathbf{t}_{rq}^{b(1)} = T \quad \text{вне площадки контакта;}$$

$$\text{при } r = R \quad \mathbf{s}_r^{b(1)} - i\mathbf{t}_{rq}^{b(1)} = \mathbf{s}_r^{0(1)} - i\mathbf{t}_{rq}^{0(1)}; \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_r^{b(1)} - i\mathbf{u}_q^{b(1)} = \mathbf{u}_r^{0(1)} - i\mathbf{u}_q^{0(1)} + \mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{q});$$

$$\text{при } r = R_1 \quad \mathbf{u}_r^{0(1)} = 0; \mathbf{u}_q^{0(1)} = 0; \quad (2.9)$$

$$\text{на берегах трещин} \quad \mathbf{s}_n^{b(1)} = 0; \mathbf{t}_{nr}^{b(1)} = 0. \quad (2.10)$$

$$\text{Здесь } N = -H(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{s}_r^{b(0)}}{\partial r} + 2\mathbf{t}_{rq}^{b(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\mathbf{q})}{dq}; \text{ при } r = R_0 \quad (2.11)$$

$$T = (\mathbf{s}_q^{b(0)} - \mathbf{s}_r^{b(0)}) \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\mathbf{q})}{dq} - H(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{t}_{rq}^{b(0)}}{\partial r}.$$

Аналогично находим краевые условия задачи термоупругости для плунжера в каждом приближении.

Для коэффициентов интенсивности напряжений вблизи кончиков трещин будем иметь

$$K_I = K_I^{(0)} + eK_I^{(1)} + \dots; \quad K_{II} = K_{II}^{(0)} + eK_{II}^{(1)} + \dots$$

Здесь $K_I^{(0)}, K_{II}^{(0)}$ – коэффициенты интенсивности напряжений для концов трещины в нулевом приближении; а $K_I^{(1)}, K_{II}^{(1)}$ – соответственно для первого приближения.

Решение сопряженной краевой задачи теории теплопроводности ищется методом разделения переменных.

Распределение избыточных температур для втулки $t_b = T - T_C$ и подкрепляющего цилиндра $t_0 = T_0 - T_C$ находим формально в следующем виде:

$$\begin{aligned}
t_b^{(0)} &= C_{10} + C_{20} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{10}^{(k)} r^k + C_{20}^{(k)} r^{-k}) \cos kq + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{10}^{(k)} r^k + A_{20}^{(k)} r^{-k}) \sin kq, \\
t_b^{(1)} &= C_{11} + C_{21} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{11}^{(k)} r^k + C_{21}^{(k)} r^{-k}) \cos kq + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{11}^{(k)} r^k + A_{21}^{(k)} r^{-k}) \sin kq, \quad (2.12) \\
t_0^{(0)} &= C_{30} + C_{40} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{30}^{(k)} r^k + C_{40}^{(k)} r^{-k}) \cos kq + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{30}^{(k)} r^k + A_{40}^{(k)} r^{-k}) \sin kq, \\
t_0^{(1)} &= C_{31} + C_{41} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{31}^{(k)} r^k + C_{41}^{(k)} r^{-k}) \cos kq + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{31}^{(k)} r^k + A_{41}^{(k)} r^{-k}) \sin kq.
\end{aligned}$$

Постоянные $C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{40}, C_{10}^{(k)}, C_{20}^{(k)}, A_{10}^{(k)}, A_{20}^{(k)}, C_{30}^{(k)}, C_{40}^{(k)}, A_{30}^{(k)}, A_{40}^{(k)}$ определяются из граничных условий (2.1) задачи в нулевом приближении. Соответственно коэффициенты $C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{41}, C_{11}^{(k)}, C_{21}^{(k)}, A_{11}^{(k)}, A_{21}^{(k)}, C_{31}^{(k)}, C_{41}^{(k)}, A_{31}^{(k)}, A_{41}^{(k)}$ находятся из краевых условий (2.6) задачи в первом приближении.

Для решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [7]. В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений в нулевом и первом приближениях определяется решением следующих дифференциальных уравнений:

$$\Delta F^{(0)} = \frac{1+m}{1-m} a t_b^{(0)}; \quad \Delta F_0^{(0)} = \frac{1+m_0}{1-m_0} a_0 t_0^{(0)}, \quad (2.13)$$

$$\Delta F^{(1)} = \frac{1+m}{1-m} a t_b^{(1)}; \quad \Delta F_0^{(1)} = \frac{1+m_0}{1-m_0} a_0 t_0^{(1)}. \quad (2.14)$$

Ищем решение уравнений (2.13) в виде

$$\begin{aligned}
F^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^{(0)} \cos nq + f_n^{*(0)} \sin nq), \quad (2.15) \\
F_0^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n0}^{(0)} \cos nq + f_{n0}^{*(0)} \sin nq).
\end{aligned}$$

Для функций $f_n^{(0)}(r), f_n^{*(0)}(r), f_{n0}^{(0)}(r)$ и $f_{n0}^{*(0)}(r)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых находим методом вариации постоянных.

После определения термоупругого потенциала $F^{(0)}(r, q)$ для втулки и $F_0^{(0)}(r, q)$ для подкрепляющего цилиндра в нулевом приближении с помощью известных [7] формул вычисляем напряжения $\bar{S}_r^{b(0)}, \bar{S}_q^{b(0)}, \bar{t}_{rq}^{b(0)}$ и перемещения $\bar{u}_r^{b(0)}, \bar{u}_q^{b(0)}$ во втулке и напряжения $\bar{S}_r^{0(0)}, \bar{S}_q^{0(0)}, \bar{t}_{rq}^{0(0)}$ и перемещения $\bar{u}_r^{b(0)}, \bar{u}_q^{b(0)}$ в подкрепляющем цилиндре.

Найденные напряжения и перемещения для втулки и подкрепляющего цилиндра не будут удовлетворять краевым условиям (2.2) – (2.5). Таким образом, необходимо для составного цилиндра найти второе напряженно-деформированное состояние $\bar{S}_r^{b(0)}, \bar{S}_q^{b(0)}, \bar{t}_{rq}^{b(0)}, \bar{u}_r^{b(0)}, \bar{u}_q^{b(0)}$ для втулки и $\bar{S}_r^{0(0)}, \bar{S}_q^{0(0)}, \bar{t}_{rq}^{0(0)}, \bar{u}_r^{0(0)}, \bar{u}_q^{0(0)}$ для подкрепляющего цилиндра, такое состояние, чтобы выполнялись краевые условия (2.2) – (2.5).

Для определения второго напряженно-деформированного состояния в составном цилиндре имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } r = R_0 \quad \bar{S}_r^{b(0)} = -p^{(0)}(q) - \bar{S}_r^{b(0)}; \quad \bar{t}_{rq}^{b(0)} = -fp^{(0)}(q) - \bar{t}_{rq}^{b(0)} \text{ на площадке контакта; } (2.16)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{S}}_r^{b(0)} &= -\overline{S}_r^{b(0)}, & \overline{\overline{T}}_{rq}^{b(0)} &= -\overline{T}_{rq}^{b(0)} && \text{вне площадки контакта;} \\ \text{при } r = R & \overline{\overline{S}}_r^{b(0)} - i\overline{\overline{T}}_{rq}^{b(0)} + (\overline{S}_r^{b(0)} - \overline{T}_{rq}^{b(0)}) = \overline{\overline{S}}_r^{0(0)} - i\overline{\overline{T}}_{rq}^{0(0)} + (\overline{S}_r^{0(0)} - i\overline{T}_{rq}^{0(0)}); \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{U}}_r^{b(0)} - i\overline{\overline{U}}_q^{b(0)} + (\overline{U}_r^{b(0)} - i\overline{U}_{rq}^{b(0)}) &= \overline{\overline{U}}_r^{0(0)} - i\overline{\overline{U}}_q^{0(0)} + (\overline{U}_r^{0(0)} - i\overline{U}_q^{0(0)}) + g^{(0)}(q); \\ \text{при } r = R_1 & \overline{\overline{U}}_r^{0(0)} = -\overline{U}_r^{0(0)}, & \overline{\overline{U}}_q^{0(0)} &= -\overline{U}_q^{0(0)}; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\text{на берегах трещины } \overline{\overline{S}}_n^{b(0)} = -\overline{S}_n^{b(0)}, \quad \overline{\overline{T}}_{nt}^{b(0)} = -\overline{T}_{nt}^{b(0)}. \quad (2.19)$$

Краевые условия задачи (2.16)–(2.19) с помощью формул Колосова-Мусхелишвили [5] можно записать в виде граничной задачи для отыскания двух пар комплексных потенциалов $\Phi_b^{(0)}(z)$, $\Psi_b^{(0)}(z)$ для втулки и $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ для подкрепляющего цилиндра

$$\Phi_b^{(0)}(t_0) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t_0)} - e^{2iq} [\overline{T}_0 \Phi_b^{(0)}(t_0) + \Psi_b^{(0)}(t_0)] = X^{(0)}(q) - (\overline{S}_r^{b(0)} - i\overline{T}_{rq}^{b(0)}), \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \Phi_b^{(0)}(t) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\overline{T} \Phi_b^{(0)}(t) + \Psi_b^{(0)}(t)] &= \Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} - \\ &- e^{2iq} [\overline{T} \Phi^{(0)}(t) + \Psi^{(0)}(t)] + f_1 - if_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_b \overline{\Phi_b^{(0)}(t)} - \Phi_b^{(0)}(t) + [\overline{T} \Phi_b^{(0)}(t) + \Psi_b^{(0)}(t)] e^{2iq} &= \\ = \frac{G}{G_0} \left\{ k_0 \overline{\Phi^{(0)}(t)} - \Phi^{(0)}(t) + [\overline{T} \Phi^{(0)}(t) + \Psi^{(0)}(t)] \right\} + 2Gg_*(t), \end{aligned}$$

$$k_0 \overline{\Phi^{(0)}(t_1)} - \Phi^{(0)}(t_1) + [\overline{T}_1 \Phi^{(0)}(t_1) + \Psi^{(0)}(t_1)] e^{2iq} = -2G_0 (\overline{U}_r^{0(0)} - i\overline{U}_{rq}^{0(0)}), \quad (2.21)$$

$$\Phi_b^{(0)}(t) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t)} + \overline{iT}_b^{(0)} \Phi_b^{(0)}(t) + \Psi_b^{(0)}(t) = -(\overline{S}_n^b + i\overline{S}_{nt}^b). \quad (2.22)$$

Здесь $k_b = 3 - 4m$; $k_0 = 3 - 4m_0$; $t_0 = R_0 \exp(iq)$; $t = R \exp(iq)$; $t_1 = R_1 \exp(iq)$; t – аффикс точек берегов трещины.

$$f_1 - if_2 = (\overline{S}_r^{0(0)} - i\overline{T}_{rq}^{0(0)}) - (\overline{S}_r^{b(0)} - i\overline{T}_{rq}^{b(0)}); \quad g_*(t) = g^{(0)}(t) + j'(t);$$

$$j(t) = (\overline{U}_r^{0(0)} - i\overline{U}_q^{0(0)}) - (\overline{U}_r^{b(0)} - i\overline{U}_q^{b(0)});$$

$$X^{(0)}(q) = \begin{cases} -(1-if)p^{(0)}(q) & \text{на площадке контакта,} \\ 0 & \text{вне контактной площадки.} \end{cases}$$

Комплексные потенциалы $\Phi_b^{(0)}(z)$, $\Psi_b^{(0)}(z)$ и $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_b^{(0)}(z) &= \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z) + \Phi_3^{(0)}(z), \\ \Psi_b^{(0)}(z) &= \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z) + \Psi_3^{(0)}(z), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k, \quad \Psi_1^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (2.24)$$

$$\Phi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2p} \int_{-1_1}^{1_1} \frac{g_1^{(0)}(t)}{t - z_1} dt, \quad \Psi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2p} e^{-2ia_1} \int_{-1_1}^{1_1} \left[\frac{g_1^{(0)}(t)}{t - z_1} - \frac{\overline{T}_1}{(t - z_1)^2} e^{ia_1} g_1^{(0)}(t) \right] dt,$$

$$\Phi_3^{(0)}(z) = \frac{1}{2p} \int_{-1_1}^{1_1} \left[\left(-\frac{1}{z} - \frac{\overline{T}_1}{1 - z\overline{T}_1} \right) e^{ia_1} g_1^{(0)}(t) + \overline{g_1^{(0)}(t)} e^{-ia_1} \frac{1 - T_1 \overline{T}_1}{\overline{T}_1 (1 - z\overline{T}_1)^2} \right] dt, \quad (2.25)$$

$$\Psi_3^{(0)}(z) = \frac{1}{2pz} \int_{-1_1}^{1_1} \left\{ g_1^{(0)}(t) e^{ia_1} \left[\frac{1}{z\overline{T}_1} - \frac{2}{z^2} - \frac{\overline{T}_1}{z(1 - z\overline{T}_1)} + \frac{\overline{T}_1^2}{(1 - z\overline{T}_1)^2} \right] + \right.$$

$$+ \overline{g_1^{(0)}(t)} e^{-ia_1} \left[\frac{1 - T_1 \overline{T_1}}{z \overline{T_1} (1 - z \overline{T_1})^2} - \frac{1}{1 - z T_1} - \frac{2(1 - T_1 \overline{T_1})}{(1 - z \overline{T_1})^3} \right] dt, \\ \Phi^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k. \quad (2.26)$$

Здесь $T_1 = te^{ia_1} + z_1^0$, $z_1 = e^{-ia_1}(z - z_1^0)$; $g_1(x_1)$ – искомая функция, характеризующая разрыв смещений при переходе через линию трещины

$$g_1(x) = \frac{2G}{i(1+k_b)} \frac{\partial}{\partial x} [u_1^+(x,0) - u_1^-(x,0) + i(u_1^+(x,0) - u_1^-(x,0))].$$

Используя (2.22)–(2.25), для отыскания комплексных потенциалов $\Phi_1^{(0)}(z)$, $\Psi_1^{(0)}(z)$ и $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ граничные условия (2.20) представим в следующем виде:

$$\Phi_1^{(0)}(t_0) + \overline{\Phi_1^{(0)}(t_0)} - e^{2iq} [\overline{\Phi_1^{(0)}(t_0)} + \Psi_1^{(0)}(t_0)] = X^{(0)}(q) - (\overline{S_r^{b(0)}} - i\overline{T_{rq}^{b(0)}}), \quad (2.27)$$

$$\Phi_1^{(0)}(t) + \overline{\Phi_1^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\overline{\Phi_1^{(0)}(t)} + \Psi_1^{(0)}(t)] = \Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} - \\ - e^{2iq} [\overline{\Phi^{(0)}(t)} + \Psi^{(0)}(t)] + f_1 - if_2 - (f_3 - if_4), \quad (2.28)$$

$$k_b \overline{\Phi_1^{(0)}(t)} - \Phi_1^{(0)}(t) + e^{2iq} [\overline{\Phi_1^{(0)}(t)} + \Psi_1^{(0)}(t)] = \\ = \frac{G}{G_0} \{ k_0 \overline{\Phi^{(0)}(t)} - \Phi^{(0)}(t) + e^{2iq} [\overline{\Phi^{(0)}(t)} + \Psi^{(0)}(t)] \} + 2Gg'_*(t) - (j_1 - ij_2). \quad (2.29)$$

Здесь

$$f_3 - if_4 = \Phi_*^{(0)}(t) + \overline{\Phi_*^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\overline{\Phi_*^{(0)}(t)} + \Psi_*^{(0)}(t)], \\ j_1 - ij_2 = k_b \overline{\Phi_*^{(0)}(t)} - \Phi_*^{(0)}(t) + [\overline{\Phi_*^{(0)}(t)} + \Psi_*^{(0)}(t)] e^{2iq}, \\ \Phi_*^{(0)}(t) = \Phi_2^{(0)}(t) + \Phi_3^{(0)}(t); \quad \Psi_*^{(0)}(t) = \Psi_2^{(0)}(t) + \Psi_3^{(0)}(t).$$

Обозначим левую часть краевого условия (2.28) через функцию $s^0 - it^0$, тогда имеем

$$\Phi^{(0)}(t) + \overline{\Phi^{(0)}(t)} - e^{2iq} [\overline{\Phi^{(0)}(t)} + \Psi^{(0)}(t)] + f_1 - if_2 - (f_3 - if_4) = s^0 - it^0. \quad (2.30)$$

Считаем, что на круговом контуре L ($t = R \exp(iq)$) функция $s^0 - it^0$, представляющая собой самоуравновешенную систему сил, действующую на подкрепляющий цилиндр со стороны втулки, разлагается в комплексный ряд Фурье

$$s^0 - it^0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ikq}.$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ будем иметь на контуре L условие (2.30) и условие (2.21) на контуре L_1 ($t_1 = R_1 \exp(iq)$).

Функции $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ аналитичны внутри поперечного сечения подкрепляющего цилиндра $R \leq |z| \leq R_1$, могут быть представлены [5] рядами (2.26). Используя метод степенных рядов Н. И. Мусхелишвили [5], находим коэффициенты a_k , b_k потенциалов $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$.

Для определения неизвестных величин A_k рассмотрим решение задачи для втулки $R_0 \leq |z| \leq R$. Комплексные потенциалы $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ позволяют после некоторых

преобразований представить граничные условия для отыскания функций $\Phi_1^{(0)}(z)$ и $\Psi_1^{(0)}(z)$ в виде (2.27) и

$$\Phi_1^{(0)}(t) + \overline{\Phi_1^{(0)}(t)} - [\overline{t}\Phi_1^{(0)}(t) + \Psi_1^{(0)}(t)]e^{2iq} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{2iq}, \quad (2.32)$$

$$k_b \overline{\Phi_1^{(0)}(t)} - \Phi_1^{(0)}(t) + [\overline{t}\Phi_1^{(0)}(t) + \Psi_1^{(0)}(t)]e^{2iq} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^* e^{2iq} + 2Gg'_*(t) - (j_1 - ij_2). \quad (2.33)$$

Здесь
$$A_{-k}^* = \frac{G}{G_0} [k_0 \bar{a}_k R^k - a_{-k} R^{-k} (1+k) + b_{-k-2} R^{-k-2}];$$

$$A_k^* = \frac{G}{G_0} [k_0 \bar{a}_{-k} R^{-k} - (1-k) a_k R^k + b_{k-2} R^{k-2}].$$

Относительно функций $X^{(0)}(q)$, $g'^{(0)}(t)$, $j'(t)$, $(j_1 - ij_2)$, $(\bar{S}_r^{b(0)} - i\bar{T}_{rq}^{b(0)})$ будем считать, что они разлагаются в ряды Фурье

$$g'^{(0)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{no} e^{ikq} = a_k^{no} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{no} \cos kq + b_k^{no} \sin kq);$$

$$X^{(0)}(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(0)} e^{ikq}; \quad j'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k' e^{ikq}; \quad -(\bar{S}_r^{b(0)} - i\bar{T}_{rq}^{b(0)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{ikq};$$

$$-(j_1 - ij_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{k,0}^{(0)} e^{ikq}; \quad (f_3 - if_4) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^{(0)} e^{ikq}.$$

Здесь коэффициенты $D_{k,0}^{(0)}$ и $D_k^{(0)}$ зависят от искомой функции $g_1^{(0)}(t)$ и определяются с помощью теории вычетов.

Краевые условия (2.27), (2.32) служат для определения коэффициентов d_k , c_k , а граничное условие (2.33) – для нахождения величин A_k .

В результате находим

$$d_0 = \frac{A_0 R^2 - (A_0^{(0)} + F_0) R_0^2}{2(R^2 - R_0^2)}; \quad d_{-1} = \frac{(\bar{A}_1^{(0)} + \bar{F}_1) R_0}{1 + k_b};$$

$$c_{-1} = -k_b \frac{(\bar{A}_1^{(0)} + \bar{F}_1) R_0}{1 + k_b}; \quad d_1 = \frac{\bar{M}_{-1}}{R^4 - R_0^4} - \frac{2(A_1^{(0)} + F_1) R_0}{(1 + k_b)(R^2 - R_0^2)};$$

$$d_k = \frac{(1+k)(R^2 - R_0^2) M_k - (R^{-2k+2} - R_0^{-2k+2}) \bar{M}_{-k}}{(1-k^2)(R^2 - R_0^2) - (R^{2k+2} - R_0^{2k+2})(R^{-2k+2} - R_0^{-2k+2})}, \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots);$$

$$c_{-2} R_0^{-2} = 2a_0 - (A_0^{(0)} + F_0); \quad c_{k-2} R^{k-2} = (1-k) d_k R^k + \bar{d}_{-k} R^{-k} - A_k;$$

$$M_k = A_k R^{-k+2} - (A_k^{(0)} + F_k) R_0^{-k+2}; \quad (1+k_b) \bar{d}_0 = A_0 + A_0^* + 2G(A_0^{no} + F_0') + D_{0,0}^{(0)};$$

$$(1+k_b) \bar{d}_{-k} R^{-k} = A_k + A_k^* + 2G(A_k^{no} + F_k') + D_{k,0}^{(0)};$$

$$(1+k_b) \bar{d}_k R^k = A_{-k} + A_{-k}^* + 2G(A_{-k}^{no} + F_{-k}') + D_{-k,0}^{(0)}.$$

В правые части формул для определения коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k, c_k входят коэффициенты разложений функции натяга $g^{(0)}(q)$ и контактное давление $p^{(0)}(q)$ в нулевом приближении, а также интегралы от искомой функции $g_1^{(0)}(t)$.

Удовлетворяя функциями (2.23), (2.22) краевому условию (2.22) на берегах трещины, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1^{(0)}(x_1)$:

$$\int_{-1_1}^{1_1} [R_{11}(t, x_1)g_1^{(0)}(t) + S_{11}(t, x_1)\overline{g_1^{(0)}(t)}] dt = pf^0(x_1) \quad |x_1| \leq 1_1, \quad (2.35)$$

$$f^0(x_1) = -\left[\Phi_1^{(0)}(x_1) + \overline{\Phi_1^{(0)}(x_1)} + x_1 \overline{\Phi_1^{\prime(0)}(x_1)} + \overline{\Psi_1^{(0)}(x_1)} \right] - (\overline{s}_r^{b(0)} - i\overline{t}_{x_1 y_1}^{b(0)}).$$

Здесь переменные $x_1, t, 1_1, z_1^0$ – безразмерные величины, отнесенные к R_0 ; R_{nk} , S_{nk} ($n = k = 1$) определяются по формулам (VI. 61) книги [6]. К сингулярному интегральному уравнению для внутренней трещины следует добавить дополнительное равенство, выражающее условие однозначности смещений при обходе контура трещины

$$\int_{-1_1}^{1_1} g_1^{(0)}(t) dt = 0. \quad (2.36)$$

С помощью комплексных потенциалов (2.23)–(2.25), формул Колосова-Мухелишвили и интегрирования кинетического уравнения изнашивания (1.7) материала втулки в нулевом приближении находится радиальное перемещение $u_1^{(0)}$ контактной поверхности втулки. Аналогично рассматривается задача термоупругости для плунжера. Используя решение задачи термоупругости для плунжера и кинетическое уравнение изнашивания материала плунжера в нулевом приближении, находится радиальное перемещение $u_2^{(0)}$ контактной поверхности плунжера. Найденные величины $u_1^{(0)}$ и $u_2^{(0)}$ подставляются в основное контактное уравнение (1.3) в нулевом приближении. Для алгебраизации основного контактного уравнения в нулевом приближении искомые функции контактного давления ищутся в виде разложений

$$p^{(0)}(q, t) = p_0^0(q) + tp_1^0(q) + \dots,$$

$$p_0^0(q) = a_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^0 \cos kq + b_k^0 \sin kq); \quad (2.37)$$

$$p_1^0(q) = a_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1 \cos kq + b_k^1 \sin kq);$$

.....

Подставляя соотношение (2.37) в основное контактное уравнение в нулевом приближении, находим функциональные уравнения для последовательного определения $p_0^0(q)$, $p_1^0(q)$ и т. д.

Для построения алгебраической системы для нахождения искоемых коэффициентов a_k, b_k приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях.

В результате получаем бесконечную алгебраическую систему относительно a_k^0 ($k = 0, 1, 2, \dots$), b_k^0 ($k = 1, 2, \dots$) и a_k^1, b_k^1 и т. д.

Из-за неизвестных величин q_1^0 и q_2^0 система уравнений оказывается нелинейной.

Сингулярное интегральное уравнение (2.35) при условии (2.36) с помощью процедуры алгебраизации (см. прил. в [4]) сводится к системе M алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^{(0)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$)

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{1}_1 \left[g_1^{(0)}(t_m) R_{11}(\mathbf{1}_1 t_m, \mathbf{1}_1 x_r) + \overline{g_1^{(0)}(t_m)} S_{11}(\mathbf{1}_1 t_m, \mathbf{1}_1 x_r) \right] = f^0(x_r), \quad (2.38)$$

$$\sum_{m=1}^M g_1^{(0)}(t_m) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1),$$

где $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} p$ ($m = 1, 2, \dots, M$),

$$x_r = \cos \frac{pr}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Если в (2.38) перейти к комплексно сопряженным величинам, получим еще M алгебраических уравнений. Полученные системы уравнений относительно $a_k, b_k, d_k, c_k, a_k, b_k, g_1^{(0)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) позволяют при заданном натяге $g^{(0)}(q)$ найти контактное давление, напряженно-деформированное состояние составного цилиндра контактной пары при наличии трещины во втулке, распределение температуры и абразивный износ деталей контактной пары.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности концов трещины в нулевом приближении имеем

$$K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)} = \sqrt{p\mathbf{1}_1} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{(0)}(t_m) ctg \frac{2m-1}{4M} p$$

у правой вершины, (2.39)

$$K_I^{(0)} - iK_{II}^{(0)} = \sqrt{p\mathbf{1}_1} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{(0)}(t_m) tg \frac{2m-1}{4M} p$$

у левой вершины трещины.

Численный расчет выполнялся методом последовательных приближений [4].

После нахождения нулевого приближения переходим к отысканию решения в первом приближении.

На основе полученного решения с помощью функций (2.23) и формул

$$N = \overline{N}_1 + \overline{N}_2, \quad T = \overline{T}_1 + \overline{T}_2,$$

$$\overline{N}_1 = -H(q) \frac{\partial \overline{S}_r^{b(0)}}{\partial r} + 2\overline{T}_{rq}^{b(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(q)}{dq}; \quad \overline{T}_1 = (\overline{S}_r^{b(0)} - i\overline{T}_{rq}^{b(0)}) \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(q)}{dq} - H(q) \frac{\partial \overline{T}_{rq}^{b(0)}}{\partial r},$$

$$\overline{N}_2 - i\overline{T}_2 = -2ie^{iq} \left[\overline{T}_0 \Phi_b^{(0)}(t_0) + \Psi_b^{(0)}(t_0) \right] \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(q)}{dq} - H(q) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \Phi_b^{(0)}(t_0) + \overline{\Phi_b^{(0)}(t_0)} - \right.$$

$$\left. - e^{2iq} \left[\overline{T}_0 \Phi_b^{(0)}(t_0) + \Psi_b^{(0)}(t_0) \right] \right\}$$

находим функции N и T при $r = R_0$.

Термоупругие потенциалы перемещений в первом приближении определяются решением дифференциального уравнения (2.14). Это решение имеет вид аналогичный (2.15) с очевидными изменениями. Соответствующие этим термоупругим потенциалам

напряжения и перемещения $\bar{S}_r^{b(1)}$, $\bar{S}_q^{b(1)}$, $\bar{t}_{rq}^{b(1)}$, $\bar{u}_r^{b(1)}$, $\bar{u}_q^{b(1)}$ для втулки и $\bar{S}_r^{0(1)}$, $\bar{S}_q^{0(1)}$, $\bar{t}_{rq}^{0(1)}$, $\bar{u}_r^{0(1)}$, $\bar{u}_q^{0(1)}$ для подкрепляющего цилиндра определяются по известным формулам [7].

Найденные компоненты напряжений и перемещений не удовлетворяют граничным условиям (2.7)–(2.10) задачи в первом приближении. Следовательно, необходимо отыскать второе напряженно-деформированное состояние для составного цилиндра.

Краевые условия для отыскания второго напряженно-деформированного состояния примут вид

$$\begin{aligned} \bar{S}_r^{b(0)} &= N - p^{(1)}(q) - \bar{S}_r^{b(1)}; \\ \bar{t}_{rq}^{b(1)} &= T - fp^{(1)}(q) - \bar{t}_{rq}^{b(1)} \quad \text{при } r = R_0 \text{ на площадке контакта}; \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_r^{b(1)} &= N - \bar{S}_r^{b(1)}; \quad \bar{t}_{rq}^{b(1)} = T - \bar{t}_{rq}^{b(1)} \quad \text{вне площадки контакта}; \\ \bar{S}_r^{b(1)} - i\bar{t}_{rq}^{b(1)} &= \bar{S}_r^{0(1)} - i\bar{t}_{rq}^{0(1)} + (\bar{S}_r^{0(0)} - i\bar{t}_{rq}^{0(0)}) - (\bar{S}_r^{b(1)} - i\bar{t}_{rq}^{b(1)}) \quad \text{при } r = R; \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^{b(1)} - i\bar{u}_q^{b(1)} &= \bar{u}_r^{0(1)} - i\bar{u}_q^{0(1)} + (\bar{u}_r^{0(1)} - i\bar{u}_q^{0(1)}) - (\bar{u}_r^{b(1)} - i\bar{u}_q^{b(1)}) + g^{(1)}(q); \\ \bar{u}_r^{0(1)} &= -\bar{u}_{rq}^{0(1)}; \quad \bar{u}_q^{0(1)} = -\bar{u}_{rq}^{0(1)} \quad \text{при } r = R_1; \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\bar{S}_{y_1}^{b(1)} = -\bar{S}_{y_1}^{b(1)}; \quad \bar{t}_{x_1y_1}^{b(1)} = -\bar{t}_{x_1y_1}^{b(1)} \quad \text{на берегах трещины.} \quad (2.44)$$

Граничные условия (2.41)–(2.44) можно записать в виде краевой задачи для отыскания двух пар комплексных потенциалов $\Phi_b^{(1)}(z)$, $\Psi_b^{(1)}(z)$ и $\Phi^{(1)}(z)$, $\Psi^{(1)}(z)$. Комплексные потенциалы ищем в виде аналогичном (2.23) – (2.26) с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения задачи для составного цилиндра такой же, как в нулевом приближении. Удовлетворяя краевым условиям на круговых границах получаем систему уравнений для определения коэффициентов a_k^1 , b_k^1 , d_k^1 , c_k^1 . В правые части формул для a_k^1 , b_k^1 , d_k^1 , c_k^1 входят коэффициенты разложений функции натяга $g^{(1)}(q)$ и контактного давления $p^{(1)}(q)$, а также интегралы от искомой функции $g_1^{(1)}(t)$.

Удовлетворяя комплексными потенциалами краевому условию (2.44) на берегах трещины, получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение типа (2.35) относительно $g_1^{(1)}(t)$.

Как и в нулевом приближении, полученное комплексное интегральное уравнение относительно $g_1^{(1)}(t)$, $\overline{g_1^{(1)}(t)}$ при дополнительном условии типа (2.36) с помощью процедуры алгебраизации сводится к системе M алгебраических уравнений для определения неизвестных значений $g_1^{(1)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$).

С помощью комплексных потенциалов первого приближения, формул Колосова–Мухелишвили и интегрирования кинетического уравнения изнашивания (1.7) материала втулки в первом приближении находится радиальное перемещение $u_1^{(1)}$ контактной поверхности втулки. Аналогично рассматривается задача термоупругости в первом приближении для плунжера. Используя решение задачи термоупругости для плунжера и кинетическое уравнение изнашивания материала плунжера в первом приближении, находится радиальное перемещение $u_2^{(1)}$ контактной поверхности плунжера. Затем найденные величины $u_1^{(1)}$ и $u_2^{(1)}$ подставляются в основное контактное уравнение в первом приближении. Для алгебраизации основного уравнения в первом приближении искомые функции контактного давления ищутся в виде разложений

$$\begin{aligned}
p^{(1)}(q, t) &= p_0^1(q) + tp_1^1(q) + \dots, \\
p_0^1(q) &= a_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k,0}^1 \cos kq + b_{k,0}^1 \sin kq); \\
p_1^1(q) &= a_{0,1}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k,1}^1 \cos kq + b_{k,1}^1 \sin kq); \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Подставляя соотношение (2.45) в основное контактное уравнение в первом приближении, находим функциональные уравнения для последовательного определения $p_0^1(q)$, $p_1^1(q)$ и т. д. Повторяя процедуру построения алгебраической системы для определения искомых коэффициентов a_k^1 , b_k^1 получаем бесконечную алгебраическую систему относительно $a_{k,0}^1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $b_{k,0}^1$ ($k = 1, 2, \dots$) и $a_{k,1}^1$, $b_{k,1}^1$ и т. д.

Из-за неизвестных величин q_1^1 и q_2^1 система уравнений оказывается нелинейной.

Полученные системы уравнений относительно $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$, $c_k^{(1)}$, $a_{k,0}^1$, $b_{k,0}^1$, $a_{k,1}^1$, $b_{k,1}^1$, $g_1^{(1)}(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) позволяют при заданном натяге $g^{(1)}(q)$ и известных функциях $H(q)$, $H_1(q)$ найти контактное давление, напряженно-деформированное состояние составного цилиндра контактной пары при наличии трещины во втулке (коэффициенты интенсивности напряжений), распределение температуры и износ деталей контактной пары.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в первом приближении имеем

$$K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)} = \sqrt{pI_1} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{(1)}(t_m) ctg \frac{2m-1}{4M} p$$

у правой вершины, (2.46)

$$K_I^{(1)} - iK_{II}^{(1)} = \sqrt{pI_1} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{(1)}(t_m) tg \frac{2m-1}{4M} p$$

у левой вершины трещины.

Расчеты проводились применительно к втулке составного цилиндра глубинного скважинного штангового насоса исполнения НН2С-57-30-12 для различных скоростей движения плунжера.

При расчетах изменялись параметры шероховатости внутренней поверхности втулки, значения коэффициентов трения фрикционной пары, скорость движения плунжера, а также длины трещин. Функция $H(q)$, описывающая шероховатость внутренней поверхности втулки рассматривалась как детерминированная совокупность неровностей профиля контура, а также как стационарная случайная функция. В этом случае случайная функция $H(q)$ задавалась каноническим разложением (1.1), где a_k^0 , b_k^0 – некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $D(a_k^0) = D(b_k^0) = D_k$.

Для рассматриваемого внутреннего профиля втулки нефтяного насоса была построена стандартными методами нормированная корреляционная функция, а по ее аналитической аппроксимации определены дисперсии D_k коэффициентов a_k^0 , b_k^0 .

Аналогично канонические разложения и нормированная корреляционная функция строилась для поверхности плунжера.

Введя следующие числа

$$q_0 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1), q_+ = \frac{1}{2}(q_2 + q_1)$$

и сделав замену переменной $q = q' + q_+$, перейдем к симметричному отрезку $(-q_0, q_0)$ для контактной площадки.

Результаты расчетов контактного давления в зависимости от значения полярного угла q' представлены в виде графиков при различных скоростях движения плунжера и характера распределения шероховатости контактной поверхности (рис. 2).

Расчеты показывают, что при действии одних и тех же прижимающих сил и значений свободных параметров деталей контактной пары контактное давление зависит от класса шероховатости поверхности втулки и плунжера. Так, например, более высокому классу шероховатости соответствует меньшее сближение плунжера и втулки за счет местного сжатия.

Увеличение шероховатости приводит к сглаживанию графика распределения контактного давления. Наибольшие значения контактного давления, как правило, находятся в средней части контактной поверхности в зависимости от угла охвата, коэффициента трения и параметров шероховатости поверхности. Трение сопровождается смещением графика распределения контактного давления в сторону, противоположную действию момента.

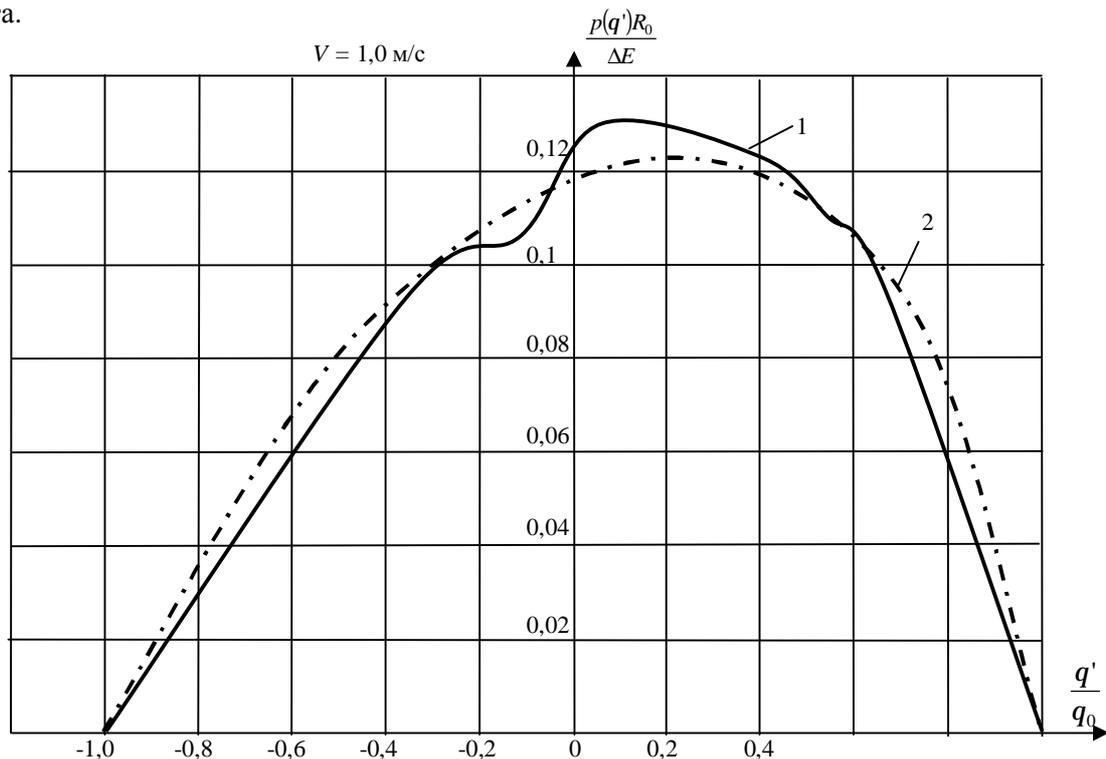


Рис. 2. Зависимости контактного давления от полярного угла:
1 — для шероховатого контура поверхности трения; 2 — для гладкого контура

Зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от относительной длины трещины $I = \mathbf{l}/(R - R_0)$ представлены на рис. 3–6 для различных скоростей движения

плунжера и характера шероховатости внутренней поверхности втулки составного цилиндра контактной пары. Здесь p_0 – силовой фактор.

Расчеты показывают, что подкрепляющий цилиндр существенно снижает коэффициент интенсивности напряжений, или другими словами, позволяет втулке выдержать гораздо большие давления по сравнению со случаем отсутствия подкрепления втулки с натягом. Увеличение коэффициента трения приводит к повышению в основном K_{II} . Класс шероховатости существенно влияет на контактное давление, а следовательно – на коэффициент интенсивности напряжений.

Если же трещина одним концом выходит на внутреннюю поверхность втулки, то равенство (2.36) заменяется дополнительным условием, выражающим конечность напряжений у края трещины.

3. Случай произвольного числа трещин. Пусть теперь во втулке составного цилиндра вблизи поверхности трения имеется N_0 прямолинейных трещин длиной $2\mathbf{l}_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) (рис. 1).

Решается задача (износоконтактная задача и задача механики разрушения для составного цилиндра) для этого случая аналогично одной трещине. Комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ и $\Phi_3(z)$, $\Psi_3(z)$ обобщаются на случай произвольного числа трещин. Удовлетворяя краевым условиям на берегах трещин, получим в каждом приближении систему N_0 сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$).

К этой системе сингулярных интегральных уравнений для внутренних трещин следует добавить дополнительные условия

$$\int_{-1_k}^{1_k} g_k(t) dt = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N_0) \quad g_k(t) = g_k^{(0)}(t) + e g_k^{(1)}(t). \quad (3.1)$$

Система сингулярных интегральных уравнений при отмеченных выше условиях (3.1) в каждом приближении с помощью процедуры алгебраизации сводится к системе $N_0 \times M$ алгебраических уравнений для определения $N_0 \times M$ неизвестных $g_n(t_m)$ ($k = 1, 2, \dots, N_0; m = 1, 2, \dots, M$):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \mathbf{l}_k \left[g_k(t_m) R_{nk}(\mathbf{l}_k t_m, \mathbf{l}_n x_r) + \overline{g_k(t_m)} S_{nk}(\mathbf{l}_k t_m, \mathbf{l}_n x_r) \right] = f_n(x_r), \quad (3.2)$$

$$\sum_{m=1}^M g_n(t_m) = 0; \quad (n = 1, 2, \dots, N_0; \quad r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Построение разрешающих уравнений контактной задачи осуществляется в каждом приближении аналогично случаю одной трещины.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности концов трещин в каждом приближении имеем

$$K_{In}^{(i)} - iK_{IIIn}^{(i)} = \sqrt{p\mathbf{l}_n} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_n^{(i)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} p \quad (3.3)$$

у правой вершины, $(n = 1, 2, \dots, N_0; \quad i = 0, 1)$

$$K_{In}^{(i)} - iK_{IIIn}^{(i)} = \sqrt{p\mathbf{l}_n} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_n^{(i)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} p \quad (3.4)$$

у левой вершины трещины.

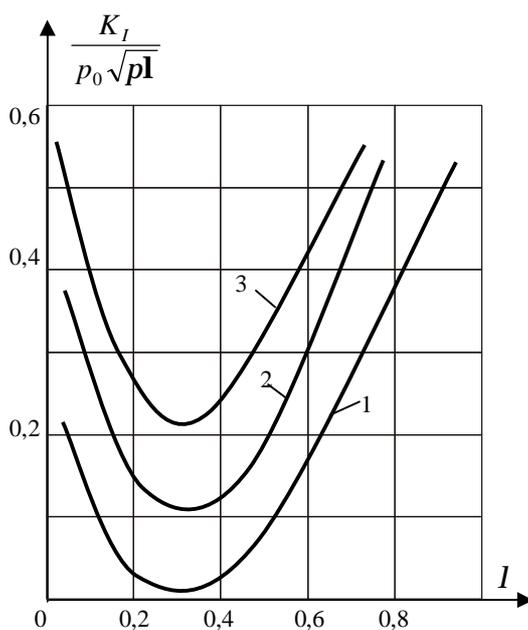


Рис. 3. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений K_I от длины трещины для гладкого контура:
1- $V_1=0,2$ м/с; 2- $V_1=0,4$ м/с; 3- $V_1=1,0$ м/с

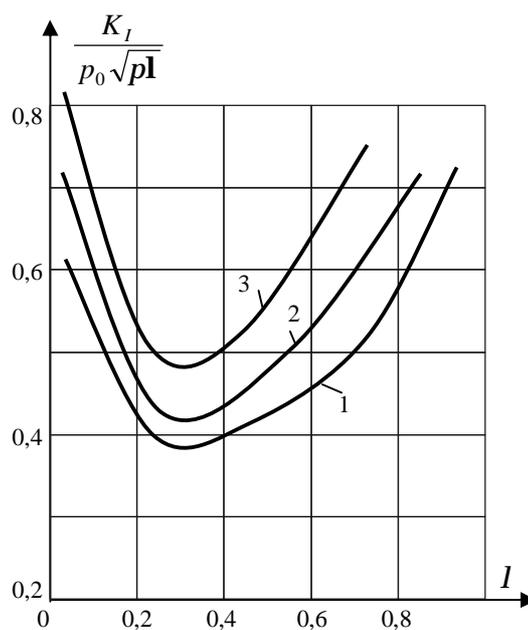


Рис. 4. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений K_I от длины трещины для шероховатого контура:
1- $V_1=0,2$ м/с; 2- $V_1=0,4$ м/с; 3- $V_1=1,0$ м/с

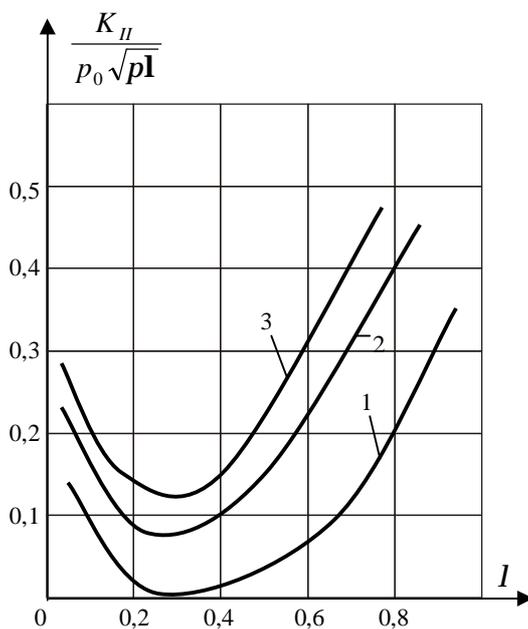


Рис. 5. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений K_{II} от длины трещины для гладкого контура:
1- $V_1=0,2$ м/с; 2- $V_1=0,4$ м/с; 3- $V_1=1,0$ м/с

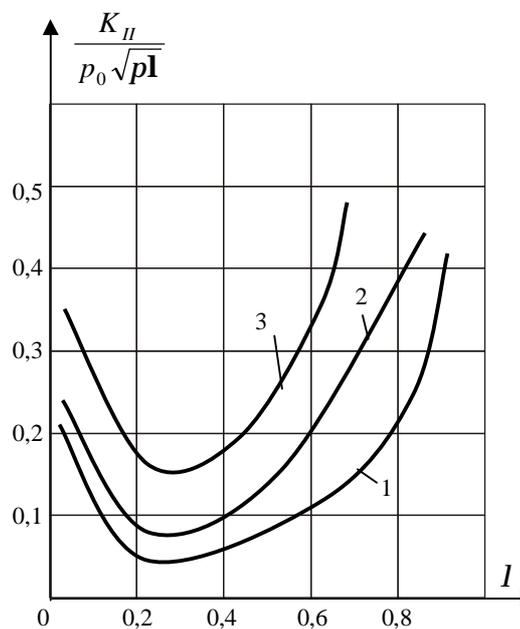


Рис. 6. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений K_{II} от длины трещины для шероховатого контура:
1- $V_1=0,2$ м/с; 2- $V_1=0,4$ м/с; 3- $V_1=1,0$ м/с

Таким образом, полученные в работе основные разрешающие уравнения позволяют при заданном натяге и профиле поверхности трения численными расчетами, путем определения коэффициентов интенсивности напряжений, прогнозировать рост имеющихся трещин во втулке составного цилиндра фрикционной пары; установить допустимый уровень дефектности и максимальные значения рабочих нагрузок, обеспечивающие достаточный запас надежности.

г. Баку

Поступила: 25 сентября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин, Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / *Л. А. Галин*. – М. : Наука, 1980. – 303 с.
2. *Горячева, И. Г.* Контактные задачи в трибологии / *И. Г. Горячева, М. Н. Добычин*. – М. : Машиностроение, 1988. – 256 с.
3. *Горячева, И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия / *И. Г. Горячева*. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
4. *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / *В. М. Мирсалимов*. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
5. *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / *Н. И. Мухелишвили*. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
6. *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / *В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьши*. – Киев : Наук. Думка, 1976. – 443 с.
7. *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / *Г. Паркус*. – М. : Физматлит, 1963. – 252 с.
8. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / *Г. П. Черепанов*. – М. : Наука, 1974. – 640 с.