ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007

Роштова А. Н.

ОБ ОБЩИХ ПРЕДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ ОТРЫВЕ ДЛЯ СЖИМАЕМЫХ, АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева)

В работе рассматриваются общие предельные условия при отрыве для сжимаемых, анизотропных сред. Рассмотрены два случая отрыва. Установлен тип уравнений, определены характеристические многообразия.

1. Условие отрыва для изотропного материала запишем в виде [1]

$$s_1 = s_2 = p, \quad s_3 \le p, \quad p = const. \tag{1.1}$$

Рассмотрим соотношения связи главных компонент напряжений s_i и компонент напряжений s_{ij} в декартовой системе координат xyz

$$s_x = s_1 l_1^2 + s_2 m_1^2 + s_3 n_1^2, \quad t_{xy} = s_1 l_1 l_2 + s_2 m_1 m_2 + s_3 n_1 n_2, \\ (xyz, 123, lmn), \tag{1.2}$$

где $l_i m_i n_i$ – направляющие косинусы, определяющие ориентацию компонент главных напряжений в декартовой системе координат xyz, скобки означают, что недостающие выражения получаются круговой перестановкой индексов и косинусов.

Для направляющих косинусов имеют место соотношения ортогональности

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \; l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \; (123, lmn). \tag{1.3}$$

Из (1.1), (1.2), (1.3) получим

$$\begin{gathered} s_x = p + 3(s - p) n_1^2, \quad t_{xy} = 3(s - p) n_1 n_2, \\ s_y = p + 3(s - p) n_2^2, \quad t_{yz} = 3(s - p) n_2 n_3, \\ s_z = p + 3(s - p) n_3^2, \quad t_{xz} = 3(s - p) n_1 n_3, \\ s = \frac{1}{3}(s_x + s_y + s_z). \end{gathered} \tag{1.4}$$

В случае анизотропного материала положим

$$p = p(\sigma, n_1, n_2, n_3). \tag{1.5}$$

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial s_x}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial s_y}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}=0, \qquad (1.6)$$
$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial s_z}{\partial z}=0.$$

Из (1.4), (1.5), (1.6) получим

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x}+3\left(1-\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)n_1^2\frac{\partial \sigma}{\partial x}+3\left(1-\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)n_1n_2\frac{\partial \sigma}{\partial y}+3\left(1-\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)n_1n_3\frac{\partial \sigma}{\partial z}+$$
$$+\left(1-3n_1^2\right)\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial x}-3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial y}-3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial z}+$$
$$+3(\sigma-p)\left(2n_1\frac{\partial n_1}{\partial x}+n_2\frac{\partial n_1}{\partial y}+n_3\frac{\partial n_1}{\partial z}\right)+\left(1-3n_1^2\right)\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial x}-$$
$$-3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial y}-3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial z}+3(\sigma-p)n_1\frac{\partial n_2}{\partial y}+ \qquad (1.7)$$
$$+\left(1-3n_1^2\right)\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial x}-3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial y}-3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial z}+$$
$$+3(\sigma-p)n_1\frac{\partial n_3}{\partial z}=0, \quad (xyz,123)$$
$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1.$$

Обозначим уравнение характеристической поверхности

$$\Psi(x,y,z)=0, \quad \Psi_x=\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Psi_y=\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \Psi_z=\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \qquad (1.8)$$

Характеристический определитель системы уравнений (1.7) имеет вид

$$\Theta\left[(s-\mathrm{p})\left[3\left(1-\frac{\partial p}{\partial s}\right)\Theta^2-\frac{\partial p}{\partial s}\left(\Psi_x^2+\Psi_y^2+\Psi_x^2\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\Theta\left[\frac{\partial p}{\partial n_1}\Psi_x+\frac{\partial p}{\partial n_2}\Psi_y+\frac{\partial p}{\partial n_3}\Psi_z-\Theta\left(\frac{\partial p}{\partial n_1}n_1+\frac{\partial p}{\partial n_2}n_2+\frac{\partial p}{\partial n_3}n_3\right)\right]\right]=0, \qquad (1.9)$$

где $\Theta=\Psi_xn_1+\Psi_yn_2+\Psi_zn_3$.

Введем вектора

$$\mathbf{\Psi}=\Psi_x\mathbf{i}+\Psi_y\mathbf{j}+\Psi_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{P}=\frac{\partial p}{\partial n_1}\mathbf{i}+\frac{\partial p}{\partial n_2}\mathbf{j}+\frac{\partial p}{\partial n_3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}=n_1\mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+n_3\mathbf{k}, \qquad (1.10)$$

где $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ – единичные орты вдоль осей x,y,z.

Тогда

$$\Theta=|\mathbf{\Psi}|\cdot|\mathbf{n}|\cos q, \quad \frac{\partial p}{\partial n_1}\Psi_x+\frac{\partial p}{\partial n_2}\Psi_y+\frac{\partial p}{\partial n_3}\Psi_z=|\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{\Psi}|\cos q_1,$$
$$\frac{\partial p}{\partial n_1}n_1+\frac{\partial p}{\partial n_2}n_2+\frac{\partial p}{\partial n_3}n_3=|\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{n}|\cos a, \quad |\mathbf{n}|=1. \qquad (1.11)$$

Уравнение (1.9) с учетом (1.11) примет вид

$$\begin{aligned}&\cos q\left[(p-s)\left(3\cos^2 q\left(1-\frac{\partial p}{\partial s}\right)-\frac{\partial p}{\partial s}\right)+\right.\\&\left.+|\mathbf{P}|\cos q\left(\cos q_1-\cos q\cos a\right)\right]=0.\end{aligned} \tag{1.12}$$

На рис. 1 показаны вектора $\mathbf{\Psi},\mathbf{P},\mathbf{n}$ и углы между ними.

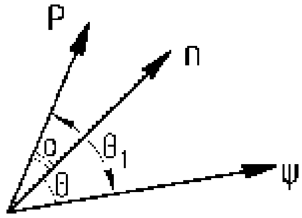

Рис. 1.

В частных случаях из (1.12) следует:

1) $p=const$, $|\mathbf{P}|=0$, $\cos q=0$;

2) $p=p(\sigma)$, $|\mathbf{P}|=0$, $\cos q=0$, $\cos q=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial s}}{1-\frac{\partial p}{\partial s}}}$;

3) $p=p(n_1,n_2,n_3)$, $\frac{\partial p}{\partial s}=0$, $\cos q=0$, $\cos q=\frac{|\mathbf{P}|\cos q_1}{|\mathbf{P}|\cos a-3(s-p)}$.

2. Условие отрыва для изотропного материала в виде

$$s_1=s_2,\quad s_3=p,\quad p=const, \tag{2.1}$$

рассмотрено в [2].

Ниже рассматривается условие отрыва

$$s_1=s_2,\quad s_3=p,\quad p=p(s,n_1,n_2,n_3). \tag{2.2}$$

Из (1.2), (1.3), (2.2) получим

$$\begin{aligned}&s_x=\frac{3s-p}{2}+\frac{3(p-s)}{2}n_1^2,\quad t_{xy}=\frac{3(p-s)}{2}n_1n_2,\\&s_y=\frac{3s-p}{2}+\frac{3(p-s)}{2}n_2^2,\quad t_{yz}=\frac{3(p-s)}{2}n_2n_3,\\&s_z=\frac{3s-p}{2}+\frac{3(p-s)}{2}n_3^2,\quad t_{xz}=\frac{3(p-s)}{2}n_1n_3,\\&s=\frac{1}{3}\left(s_x+s_y+s_z\right).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Из (1.6), (2.3) следует

$$\left(3-\frac{\partial p}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial x}+3\left(\frac{\partial p}{\partial s}-1\right)n_1^2\frac{\partial s}{\partial x}+3\left(\frac{\partial p}{\partial s}-1\right)n_1n_2\frac{\partial s}{\partial y}+3\left(\frac{\partial p}{\partial s}-1\right)n_1n_3\frac{\partial s}{\partial z}+$$
$$+\left(3n_1^2-1\right)\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial x}+3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial y}+3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial z}+3(p-s)\left(2n_1\frac{\partial n_1}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+n_2\frac{\partial n_1}{\partial y}+n_3\frac{\partial n_1}{\partial z}\right)+\left(3n_1^2-1\right)\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial x}+3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial y}+3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial z}+ \tag{2.4}$$
$$+3(p-s)n_1\frac{\partial n_2}{\partial y}+\left(3n_1^2-1\right)\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial x}+3n_1n_2\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial y}+3n_1n_3\frac{\partial p}{\partial n_3}\frac{\partial n_3}{\partial z}+$$
$$+3(p-s)n_1\frac{\partial n_3}{\partial z}=0, \quad (xyz,123),$$
$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1.$$

Характеристический определитель системы уравнений (2.4) имеет вид

$$\Theta\left[(s-\mathrm{p})\left[3\left(\frac{\partial p}{\partial s}-1\right)\Theta^2+\left(3-\frac{\partial p}{\partial s}\right)\left(\Psi_x^2+\Psi_y^2+\Psi_x^2\right)\right]+\right.$$
$$\left.+2\Theta\left[\Theta\left(\frac{\partial p}{\partial n_1}n_1+\frac{\partial p}{\partial n_2}n_2+\frac{\partial p}{\partial n_3}n_3\right)-\frac{\partial p}{\partial n_1}\Psi_x+\frac{\partial p}{\partial n_2}\Psi_y+\frac{\partial p}{\partial n_3}\Psi_z\right]\right]=0, \tag{2.5}$$

где $\Theta=\Psi_x n_1+\Psi_y n_2+\Psi_z n_3$.

Уравнение (2.5) с учетом (2.11) примет вид

$$\cos q\left[(p-s)\left(3\cos^2 q\left(\frac{\partial p}{\partial s}-1\right)+\left(3-\frac{\partial p}{\partial s}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+2\left|\mathbf{P}\right|\cos q\left(\cos q\cos a-\cos q_1\right)\right]=0. \tag{2.6}$$

Отметим, что при $p=const$ из (2.6) следует, что $\cos q=0$, $\cos q=\pm 1$.

г. Чебоксары
Поступила: 15 апреля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232с.
2. *Ивлев, Д. Д.* О предельном состоянии при отрыве / Д. Д. Ивлев, Н. М. Матченко // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. М. : ФИЗМАТЛИТ. – 2006. – С. 288–290.