ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007

УДК 539.374

Спорыхин А. Н., Гоцев Д. В., Стасюк А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК С НЕКРУГОВЫМИ МНОГОСЛОЙНЫМИ КРЕПЯМИ В МАССИВАХ СО СЛОЖНЫМИ РЕОЛОГИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

(Воронежский государственный университет)

Известно [2], что исследование задач горной механики с позиций устойчивости состояния равновесия горного массива возле подкрепленных выработок связано [7] с определением напряженно-деформированных состояний в приконтурной зоне массива горных пород и крепи. В монографии [7] получены решения для полей напряжений и перемещений в упруговязкопластическом массиве горных пород около неподкрепленных выработок некруговой формы поперечного сечения (эллиптической и правильной многоугольной). В настоящей работе в рамках метода малого параметра определяется напряженно-деформированное состояние горного массива возле вертикальной выработки, подкрепленной многослойной крепью в случаях, когда поперечное сечение слоя крепи имеет форму эллиптического кольца или правильного многоугольного кольца. При этом в зонах пластического деформирования горного массива и крепи принята модель упруговязкопластической среды [5].

При определении напряженно-деформированного состояния (далее НДС) все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра d, характеризующего отклонение от исходного невозмущенного состояния, то есть отклонение окружности радиуса R_i от эллипса [3]

$$r_{эi} = R_i(1 + d \cdot d\cos 2q - \frac{3}{4}d^2 d^2(1-\cos 4q) + o(d^3)), \qquad (1.1)$$

или правильного многоугольника радиуса

$$r_{mi} = R_i(1 + d \cdot d\cos mq - \frac{2m-1}{4}d^2 d^2 \cdot [1-\cos 2mq] + o(d^3)). \qquad (1.2)$$

Здесь $d\,d$ – параметр, определяющийся полуосями эллипса: $a = R_i(1+\delta d)$, $b = R(1-\delta d)$) для (1.1), или параметрами гипоциклоиды в случае (1.2), i=0,1,2,…,N, $0 \le q \le 2p$. В качестве нулевого приближения будем выбирать решение осесимметричной задачи о распределении полей напряжений и перемещений в массиве около подкрепленной круговой вертикальной выработки и в многослойной круговой крепи.

1. Рассмотрим горный массив с круговой вертикальной выработкой радиуса R_N, подкрепленной круговой N– слойной крепью. К внутреннему контуру первого слоя кре-

пи радиуса R_0 приложена равномерно распределенная нагрузка q_0. На линиях сопряжения слоев крепи и массива возникают сжимающие усилия $q_1, q_2, \ldots, q_N$. На бесконечности напряжения в массиве стремятся к величине gh (g – объемный вес породы, h – глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим. Величины q_i (i=0,1,2,…, N) и gh таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры слоев крепи и контур выработки. Решение проведем в рамках плоской задачи теории течения, используя цилиндрическую систему координат r, q, z. Материал массива и слоев крепи предполагается различным и моделируется упруго-вязко-пластической средой [5] с трансляционным упрочнением [1, 4].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = \left(S_s^j - c_i e_s^{j\,p} - h_i \dot{e}_s^{j\,p} \right)\left(S_j^s - c_i e_j^{s\,p} - h_i \dot{e}_j^{s\,p} \right) - k_i^{\,2}, \tag{1.3}$$

а соотношения ассоциированного закона течения –

$$de_i^{j\,p} = dl \, \frac{\partial F}{\partial s_i^{\,j}} \,. \tag{1.4}$$

Здесь c_i – коэффициент упрочнения; k_i – предел текучести, h_i – коэффициент вязкости; $S_s^j = s_s^{\,j} - s d_s^{\,j}$ – девиатор тензора напряжений; $s = s_k^{\,k}/3$; d_s^j – символ Кронекера; $e_s^{\,j}$ – компоненты тензора деформаций; $\dot{e}_s^j$ – компоненты тензора скоростей деформаций; dl – скалярный положительный множитель. Индексы s, j принимают значения от 1 до 3. Индекс i принимает значения 1, 2,…, N. Его отсутствие у величин c, k, h в (1.3), (1.4) и далее подчеркивает принадлежность этих величин к массиву. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Здесь и далее верхние индексы «р» или «е» обозначают величины, относящиеся к пластической или упругой областям соответственно.

Определение НДС составной горной конструкции в осесимметричном случае сводится к решению двух взаимосвязанных задач о концентрации напряжений. Первая задача сводится к определению НДС в i-ом слое крепи, вторая – к определению НДС в массиве. Граничные условия и условия сопряжения для i-го слоя крепи (R_{i-1} – внутренний радиус i-ого слоя, R_i – внешний радиус, g_i – граница раздела зон упругого и пластического деформирования в i-ом слое) и массива горных пород имеют соответственно вид

$$s_r\big|_{r=R_{i-1}} = -q_{i-1}\,,\ s_r\big|_{r=R_i} = -q_i$$

$$[s_{r\,i}]\big|_{r=g_i} = 0\,,[s_{q\,i}]\big|_{r=g_i} = 0\,,\ \ (\ i \in [1, N]\ ) \tag{1.5}$$

$$s_r\big|_{r=R_N} = -q_N\ ,\ s_r\big|_{r\to\infty} = s_q\big|_{r\to\infty} = -gh$$

$$[s_r]\big|_{r=g} = 0\,,[s_q]\big|_{r=g} = 0\,, \tag{1.6}$$

где квадратные скобки обозначают разрыв значений выражения, в данном случае – на границе раздела сред упругого и пластического деформирования.

НДС, соответствующее i-ому слою круговой крепи, определено в виде:

– в пластической области $(R_{i-1} < r < g_i,)$ распределение напряжений имеет вид

$$s_{ri} = -q_{i-1} + 4m_i(T_{1i}\ln\frac{r}{R_{i-1}} - \frac{D_i + T_{2i}}{2}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_{i-1}{}^2})),$$

$$s_{qi} = -q_{i-1} + 4m_i(T_{1i}(\ln\frac{r}{R_{i-1}} + 1) + \frac{D_i + T_{2i}}{2}(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_{i-1}{}^2})), \qquad (1.7)$$

где $T_{1i} = \dfrac{c_i k_i}{c_i + 2m_i}(1 - e^{-b_i t}) + \dfrac{2m_i D_{0i}}{(c_i + 2m_i)R_{i-1}{}^2} e^{-b_i t}$, $T_{2i} = -\dfrac{2m_i D_i}{c_i + 2m_i}$,

$b_i = \dfrac{c_i + 2m_i}{h_i}$, $c_i = \mathrm{sign}(q_{i-1} - q_i)$, $D_{0i} = \dfrac{R_i{}^2 R_{i-1}{}^2}{R_i{}^2 - R_{i-1}{}^2}\dfrac{q_{i-1} - q_i}{2m_i}$,

$D_i = \dfrac{g_i{}^2}{2m_i}(c_i k_i(1 - e^{-b_i t}) + \dfrac{R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}{}^2}(q_{i-1} - q_i)e^{-b_i t})$, m_i – модуль сдвига для i-ого слоя крепи.

– в упругой области $(g_i < r < R_i)$ поле напряжений имеет вид

$$s_{ri} = 2m_i D_i(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r^2}) - q_i \quad , \quad s_{ri} = 2m_i D_i(\frac{1}{R_i^2} + \frac{1}{r^2}) - q_i . \qquad (1.8)$$

Перемещения (u – вдоль радиального направления) и полные деформации в упругой и пластической областях определяются по одним и тем же формулам

$$u_i = \frac{D_i}{r}, \; e_{ri} = -e_{\theta i} = -\frac{D_i}{r^2}. \qquad (1.9)$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$e^p_{ri} = -e^p_{\theta i} = T_{1i} + \frac{T_{2i}}{r^2}. \qquad (1.10)$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы g_i имеет вид

$$\frac{g_i{}^2}{2m_i}(c_i k_i(1 - e^{-b_i t}) + \frac{R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}{}^2}(q_{i-1} - q_i)e^{-b_i t}) =$$
$$= \frac{2R_{i-1}{}^2 R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}{}^2}(\frac{q_{i-1} - q_i}{4m_i} - T_{1i}(\ln\frac{g_i}{R_{i-1}} + \frac{1}{2}(1 - \frac{g_i{}^2}{R_{i-1}{}^2}))). \qquad (1.11)$$

НДС горного массива возле круговой выработки определено в виде

– в пластической области $(1 < r < g)$ распределение напряжений имеет вид

$$s^p_r = -q_N + 4m(T_1\ln r - \frac{D + T_2}{2}(\frac{1}{r^2} - 1)),$$

$$s^p_\theta = -q_N + 4m(T_1(\ln r + 1) + \frac{D + T_2}{2}(\frac{1}{r^2} + 1)), \qquad (1.12)$$

где $$T_1 = \frac{c}{c+2m}(1-e^{-bt}) + \frac{2mD_0}{(c+2m)}e^{-bt}, T_2 = -\frac{2mD}{c+2m}, b = \frac{c+2m}{h},$$

$$c = \mathrm{sign}(q_N - gh),\ D_0 = \frac{q_N - gh}{2m},\ D = \frac{g^2}{2m}(c(1-e^{-bt}) + (q_N - gh)e^{-bt}).$$

– в упругой области ($g < r < \infty$) поле напряжений согласно [6] имеет вид

$$s_r = -\frac{2mD}{r^2} - gh \quad , \quad s_r = \frac{2mD}{r^2} - gh \tag{1.13}$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях определяются по формулам [6]

$$u = \frac{D}{r} \ , e_r = -e_q = -\frac{D}{r^2} \tag{1.14}$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$e_r^p = -e_\theta^p = T_1 + \frac{T_2}{r^2} \tag{1.15}$$

На упругопластической границе g выполняется следующее соотношение для усилий q_N и gh:

$$\frac{g^2}{2m}(c(1-e^{-bt}) + (q_N - gh)e^{-bt}) = 2(\frac{q_N - gh}{4m} - T_1(\ln g + \frac{1}{2}(1-g^2))). \tag{1.16}$$

В (1.5) – (1.16) все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу текучести для материала горного массива – k, а имеющие размерность длины – к радиусу выработки R_N.

Полученные решения для массива и крепи принимаем в качестве нулевого приближения для исследуемых далее задач. Ниже всем величинам, относящимся к этому приближению, будем приписывать индекс $^{(0)}$ вверху.

2. Рассмотрим задачу об определении напряженно-деформированных состояний горного массива в окрестности подкрепленной выработки эллиптического поперечного сечения и многослойной крепи, состоящей из N слоев, поперечные сечения которых имеют форму эллиптических колец. Решение будем искать для i-ого слоя крепи (i=1,2,…N) и приконтурной области массива. Ограничимся случаем первого приближения первой итерации.

Граничные условия на нормальные s_{ni} и касательные s_{ni} напряжения для *i*-го слоя крепи ($r_{э(i-1)}$ -внутренний радиус i-ого слоя, $r_{эi}$ – внешний радиус), следуя работе [3] имеют соответственно вид

$$s_{ni} = \left\{ s_{ri}^{(0)} + d\left(s_{ri}^{(1)} + \frac{ds_{ri}^{(0)}}{dr} r_{э(i-1)}^{(1)}\right) \right\}\Bigg|_{r=R_{i-1}} = -q_{i-1}, \tag{2.1}$$

$$s_{ni} = \left\{ t_{rqi}^{(0)} + d\left(t_{rqi}^{(1)} - (s_{qi}^{(0)} - s_{ri}^{(0)})\frac{dr_{э(i-1)}^{(1)}}{dq}\right) \right\}\Bigg|_{r=R_{i-1}} = 0. \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) с учетом (1.1), (1.7) находим граничные условия для величин первого порядка

$$s_{ri}^{(1)}\Big|_{r=R_{i-1}} = -2dA_i\cos 2q\ ,\ t_{rq\,i}^{(1)}\Big|_{r=R_{i-1}} = -4dA_i\sin 2q\,, \qquad (2.3)$$

где
$$A_i = 2m_i\left(T_{1i} + \frac{D_i + T_{2i}}{R_{i-1}^2}\right).$$

Тогда напряжения в пластической зоне с учетом (2.3) будут иметь вид

$$s_{ri}^{(1)} = \frac{4R_{i-1}A_i d}{r}\sin\left(b_i - \frac{p}{6}\right)\cos 2q - \frac{B_i}{2}\left(g_i^{\,2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_{i-1}^{\,2}}\right) + 2\ln\frac{r}{R_{i-1}}\right),$$

$$s_{q\,i}^{(1)} = \frac{4R_{i-1}A_i d}{r}\sin\left(b_i - \frac{p}{6}\right)\cos 2q - \frac{B_i}{2}\left(-g_i^{\,2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_{i-1}^{\,2}}\right) + 2\ln\frac{r}{R_{i-1}} + 2\right),$$

$$t_{rq\,i}^{(1)} = -\frac{4R_{i-1}A_i d}{r}\cos b_i\sin 2q\ , \qquad (2.4)$$

где $B_i = 2(c_iT_{1i} + h_i\dot{T}_{1i})$, $b_i = \sqrt{3}\ln\frac{r}{R_{i-1}}$, $\dot{T}_{1i} = \frac{d}{dt}(T_{1i})$.

В (2.1) – (2.4) индекс i=1,2,…,N, стоящий внизу у величин напряжений, обозначает как и ранее принадлежность их к i-му слою крепи. Эти соотношения будут справедливы и для пластической области массива, если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$.

Используя условие сопряжения напряжений на упругопластической границе g_i, следуя [7], получим граничные условия для напряжений в упругой зоне i-ого слоя крепи на ее внутренней границе:

$$s_r^{(1)}\Big|_{r=g_i} = a_{oi}B_i - a_{1i}\cos 2q$$

$$t_{r\theta i}^{e\,(1)}\Big|_{r=g_i} = -a_{2i}\sin 2q\ , \qquad (2.5)$$

где
$$a_{oi} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{g_i^{\,2}}{R_{i-1}^{\,2}} + 2\ln\frac{g_i}{R_{i-1}}\right),\quad a_{1i} = -\frac{4R_{i-1}A_i d}{g_i}\sin\left(b_{0i} - \frac{p}{6}\right)\cos 2q\ ,$$

$$a_{2i} = \frac{4R_{i-1}A_i d}{g_i}\cos b_{0i}\,,\ b_{0i} = \sqrt{3}\ln\frac{g_i}{R_{i-1}}\,.$$

На внешней границе области упругого деформирования i-ого слоя будут иметь место следующие граничные условия:

$$s_{ri}^{(1)}\Big|_{r=R_i} = -2A^e{}_i d\cos 2q\ ,\qquad t_{rq\,i}^{(1)}\Big|_{r=R_i} = -4A^e{}_i d\sin 2q\ , \qquad (2.6)$$

где
$$A^e{}_i = 2m_i\frac{D_i}{R_i^2}\,.$$

Используя (2.5) и (2.6), согласно [3] определим первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области, разделив их на 2 части – найденные по условиям на внутренней границе (верхний индекс (s)) и на внешней границе(верхний индекс (a))

$$s_{ri}^{(1)} = s_{ri}^{(s)} + s_{ri}^{(a)},\ s_{qi}^{(1)} = s_{qi}^{(s)} + s_{qi}^{(a)},\ t_{rqi}^{(1)} = t_{rqi}^{(s)} + t_{rqi}^{(a)},$$

$$u_{ri}^{(1)} = u_{ri}^{(s)} + u_{ri}^{(a)},\ u_{qi}^{(1)} = u_{qi}^{(s)} + u_{qi}^{(a)}, \qquad (2.7)$$

здесь

– внутренние составляющие напряжений

$$s_{ri}^{(s)} = \frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2}(-a_{oi}B_i + a_{oi}B_i\frac{R_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N_i}\{\{2[1-2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^{-4}] +$$
$$+2[3-2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{g_i})^{-4} + 4[1-2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{g_i})^{-2}\}a_{1i} +$$
$$+\{-4+4(\frac{R_i}{g_i})^2 + [-4(\frac{R_i}{g_i})^2 + 4(\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{g_i})^{-4} + [4-4(\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{g_i})^{-2}\}a_{2i}\}d\cos 2q,$$

$$s_{qi}^{(s)} = \frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2}(-a_{oi}B_i - a_{oi}B_i\frac{R_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N_i}\{\{2[-1+2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}] +$$
$$+2[-3+2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{g_i})^{-4} + 4[-3+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{g_i})^{2}\}a_{1_i} + \{[4-4(\frac{R_i}{g_i})^2] + \qquad (2.8)$$
$$+[4(\frac{R_i}{g_i})^2 - 4(\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{g_i})^{-4} + [12-16(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + 4(\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{g_i})^{2}\}a_{2i}\}d\cos 2q,$$

$$t_{rqi}^{(s)} = -\frac{1}{2N_i}\{[2(-1+2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}) + 2(3-2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^4)(\frac{r}{g_i})^{-4} + 2(-3+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} +$$
$$+(\frac{R_i}{g_i})^{-4})(\frac{r}{g_i})^{2} + 2(1-2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^4)(\frac{r}{g_i})^{-2})]a_{1i} + [(4-4(\frac{R_i}{g_i})^2) + (-4(\frac{R_i}{g_i})^2 + 4(\frac{R_i}{g_i})^4)(\frac{r}{g_i})^{-4} +$$
$$+(6-8(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + 2(\frac{R_i}{g_i})^{-4})(\frac{r}{g_i})^{2} + (2-2(\frac{R_i}{g_i})^4)(\frac{r}{g_i})^{-2}]a_{2i}\}d\sin 2q,$$

– внешние составляющие напряжений

$$s_{ri}^{(a)} = -\frac{1}{N_i}\{2[-3+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^4] + 2[3-6(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + 3(\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{R_i})^{-4} +$$
$$+4[3-2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{R_i})^{-2}\}A^e{}_i d\cos 2q,$$

$$s_{qi}^{(a)} = -\frac{1}{N_i}\{2[3-2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^4] + 6[-1+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{R_i})^{-4} +$$
$$+12[1-2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{R_i})^{2}\}A^e{}_i d\cos 2q\}, \qquad (2.9)$$

$$t_{rqi}^{(a)} = -\frac{2}{N_i}\{[3-2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^4] + 3[1-2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{R_i})^{-4} +$$
$$+3[1-2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{R_i})^{2} + [3-2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{R_i})^{-2}\}A^e{}_i d\sin 2q,$$

$$t_{rqi}^{(a)} = -\frac{2}{N_i}\{[3-2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^4] + 3[1-2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{R_i})^{-4} +$$

$$+3[1-2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^4](\frac{r}{R_i})^2 + [3-2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}](\frac{r}{R_i})^{-2}\}A^e{}_i d \sin 2q,$$

– внутренние составляющие перемещений

$$u_{ri}^{(s)} = \frac{-g_i^2}{6m_i(R_i^2 - g_i^2)}[a_{0i}B_i + 3a_{0i}B_i\frac{R_i^2}{r^2}]r - \frac{1}{m_i}[-C_{1i}^{(s)}\frac{r}{R_i} + C_{2i}^{(s)}(\frac{r}{R_i})^{-3} - \frac{2}{3}C_{3i}^{(s)}(\frac{r}{R_i})^3 +$$

$$+\frac{4}{3}C_{4i}^{(s)}(\frac{r}{R_i})^{-1}]R_i d\cos 2\theta,$$

$$u_{qi}^{(s)} = -\frac{1}{m}[C_{1i}^{(s)}\frac{r}{R_i} + C_{2i}^{(s)}(\frac{r}{R_i})^{-3} + \frac{7}{3}C_{3i}^{(s)}(\frac{r}{R_i})^3 - \frac{1}{3}C_{4i}^{(s)}(\frac{r}{R_i})^{-1}]R_i d\sin 2q, \quad (2.10)$$

– внешние составляющие перемещений

$$u_{ri}^{(a)} = -\frac{1}{m_i}[-C_{1i}^{(a)}\frac{r}{R_i} + C_{2i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{-3} - \frac{2}{3}C_{3i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^3 + \frac{4}{3}C_{4i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{-1}]R_i d\cos 2q$$

$$u_{qi}^{(a)} = -\frac{1}{m}[C_{1i}^{(a)}\frac{r}{R_i} + C_{2i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{-3} + \frac{7}{3}C_{3i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^3 - \frac{1}{3}C_{4i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{-1}]R_i d\sin 2q\ . \quad (2.11)$$

В (2.10), (2.11) константы определяются по формулам

$$C_{1i}^{(s)} = \frac{-1+2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-4}}{2N_i}a_{1i} + \frac{4-4(\frac{R_i}{g_i})^2}{4N_i}a_{2i}$$

$$C_{2i}^{(s)} = \frac{-3+2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^4}{6N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{-4}a_{1i} + \frac{4(\frac{R_i}{g_i})^2 - 4(\frac{R_i}{g_i})^4}{12N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{-4}a_{2i}$$

$$C_{3i}^{(s)} = \frac{-3+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-4}}{6N_i}(\frac{R_i}{g_i})^2 a_{1i} + \frac{3-4(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-4}}{12N}(\frac{R_i}{g_i})^2 a_{2i} \quad (2.12)$$

$$C_{4i}^{(s)} = \frac{-1+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^4}{2N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{-2}a_{1i} + \frac{-1+(\frac{R_i}{g_i})^4}{2N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{-2}a_{2i}$$

$$C_{1i}^{(a)} = \frac{-1+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^4}{2N}2A^e{}_i + \frac{4-4(\frac{R_i}{g_i})^{-2}}{4N_i}4A^e{}_i$$

$$C_{2i}^{(a)} = \frac{-3+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+(\frac{R_i}{g_i})^{-4}}{6N_i}2A^e{}_i + \frac{4(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-4(\frac{R_i}{g_i})^{-2}}{12N_i}4A^e{}_i$$

$$C_{3i}^{(a)} = \frac{-3+2(\frac{R_i}{g_i})^{2}+(\frac{R_i}{g_i})^{4}}{6N}2A^e{}_i + \frac{3-4(\frac{R_i}{g_i})^{2}+(\frac{R_i}{g_i})^{4}}{6N}4A^e{}_i$$

$$C_{4i}^{(a)} = \frac{-1+2(\frac{R_i}{g_i})^{2}-(\frac{R_i}{g_i})^{-4}}{2N_i}2A^e{}_i + \frac{-1+(\frac{R_i}{g_i})^{-4}}{2N_i}4A^e{}_i\,,\ N_i = 6-4\frac{R_i^4+g_i^4}{R_i^2 g_i^2}+\frac{R_i^8+g_i^8}{R_i^4 g_i^4}.$$

Найденные перемещения (2.10), (2.11) в упругой зоне при $r = g_i$ представим в виде

$$u_{ri}^{(1)}\Big|_{r=g} = U_{ri}^{g}\cos 2q + V_{ri}^{g}\,,$$

$$u_{qi}^{(1)}\Big|_{r=g_i} = U_{qi}^{g}\sin 2q + V_{qi}^{g} \qquad (2.13)$$

Следуя алгоритму, изложенному в [7], получим соотношения для перемещений в пластической области i-ого слоя крепи

$$u_{ri}^{(1)} = [-2C_{1i}\cos b_i + 2C_{2i}\sin b_i]\cos 2q + F_{ri}\cos 2q - \frac{c_{3i}}{r}, \qquad (2.14)$$

$$u_{qi}^{(1)} = [(C_{1i}+\sqrt{3}C_{2i})\cos b_i + (C_{1i}\sqrt{3}-C_{2i})\sin b_i]\sin 2q + F_{qi}\sin 2q + 2c_{4i}r\,,$$

где

$$F_{ri}(r) = [-\frac{f_{2i}}{8r^2}\cos b_i(r) + (\frac{f_{1i}}{\sqrt{3}}\ln\frac{r}{R_{i-1}} - \sqrt{3}\frac{f_{2i}}{8r^2})\sin b_i(r)],$$

$$F_{qi}(r) = [(\ln\frac{r}{R_{i-1}}\frac{f_{1i}}{2} - \frac{f_{2i}}{4r^2})\cos b_i(r) - (\ln\frac{r}{R_{i-1}}\frac{f_{1i}}{2\sqrt{3}} + \frac{f_{1i}}{2\sqrt{3}})\sin b_i(r)],$$

$$b_i(r) = \sqrt{3}\ln\frac{r}{R_{i-1}},\ f_{1i} = 8R_{i-1}A_i d(-\frac{1}{2m_i} + c_i T_{1i}),\ f_{2i} = 8R_{i-1}A_i d c_i T_{2i}.$$

Учитывая условия сопряжения перемещений на границе g_i раздела сред упругого и пластического деформирования, получим

$$C_{1i} = \frac{1}{2}[-(U_{ri}^{g} - F_{ri}^{g})\cos b_i + \frac{1}{\sqrt{3}}(2U_{qi}^{g} + U_{ri}^{g} - 2F_{qi}^{g} - F_{ri}^{g})\sin b_i]$$

$$C_{2i} = \frac{1}{2}[(U_{ri}^{g} - F_{ri}^{g})\sin b_i + \frac{1}{\sqrt{3}}(2U_{qi}^{g} + U_{ri}^{g} - 2F_{qi}^{g} - F_{ri}^{g})\cos b_i]$$

$$c_{3i} = -g_i V_{ri}^{g}\,,\ c_{4i} = \frac{1}{2g_i}V_{qi}^{g}\,,$$

где $F_{ri}^{g} = F_{ri}(g_i)$, $F_{qi}^{g} = F_{qi}(g_i)$, $U_{ri}^{g} = U_{ri}(g_i)$, $U_{qi}^{g} = U_{qi}(g_i)$.

Из условия сопряжения компонент тензора напряжений следует, что на невозмущенной упругопластической границе согласно [3] выполняется условие

$$[s_{qi}^{(0)} + d(s_{qi}^{(1)} + \frac{ds_{qi}^{(0)}}{dr}r_{э(i-1)}^{(1)})]\Big|_{r=g_i} = 0\,. \qquad (2.15)$$

Из линейности функции разрыва следует, что

$$[s_{qi}^{(0)}]\Big|_{r=g_i} + d([s_{qi}^{(1)}]\Big|_{r=g_i} + [\frac{ds_{qi}^{(0)}}{dr}]\Big|_{r=g_i} g_i^{(1)}) = 0 .$$

Так как $[s_q^{(0)}]=0$, то формула для определения первой итерации первого приближения радиуса упругопластической границы имеет вид

$$g_i^{(1)} = -\frac{[s_{qi}^{(1)}]\Big|_{r=g_i}}{[\frac{ds_{qi}^{(0)}}{dr}]\Big|_{r=g_i}} . \tag{2.16}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
g_i^{(1)} = &-\{-\frac{4R_{i-1}A_i d}{g_i}\sin(b_{i0}+\frac{p}{6})\cos 2q - \frac{B_i}{2}(-(1+\frac{g_i^2}{R_{i-1}^2})+\\
&+2\ln\frac{g_i}{R_{i-1}}+2) - (\frac{g_i^2}{R_i^2-g_i^2}(-a_{oi}B_i - a_{oi}B_i\frac{R_i^2}{g_i^2}) -\\
&-\frac{1}{2N_i}((2(-1+2(\frac{R_i}{g_i})^2-(\frac{R_i}{g_i})^{-4})+2(-3+2(\frac{R_i}{g_i})^2+(\frac{R_i}{g_i})^4)+\\
&+4(-3+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+(\frac{R_i}{g_i})^{-4}))a_{1i}+((4-4(\frac{R_i}{g_i})^2)+(4(\frac{R_i}{g_i})^2 -\\
&-4(\frac{R_i}{g_i})^4)+(12-16(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+4(\frac{R_i}{g_i})^{-4}))a_{2i})d\cos 2q) -\\
&-\frac{1}{N_i}(2(3-2(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(\frac{R_i}{g_i})^4)+6(-1+2(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(\frac{R_i}{g_i})^{-4})+\\
&+12(1-2(\frac{R_i}{g_i})^2+(\frac{R_i}{g_i})^4))A^e{}_i d\cos 2q))\}/\{\frac{4m_i}{g_i}(T_{1i}-\frac{T_{2i}}{g_i^2})\}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Таким образом, соотношения (2.4), (2.7 – 2.12), (2.14), (2.17) в первом приближении определяют НДС и положение границы раздела зон упругого и пластического деформирования в i-ом слое крепи эллиптического поперечного сечения.

Теперь перейдем к определению НДС массива в окрестности вертикальной выработки эллиптического поперечного сечения.

Граничные условия для напряжений в упругой зоне массива на ее внутренней границе будут иметь вид (2.5), если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1}=gh$, $R_{i-1}=R_N=1$. На внешней границе области упругого деформирования массива при $r\to\infty$ будут иметь место следующие граничные условия:

$$s_r^{(1)}\Big|_{r\to\infty}=0\,,\; t_{rq}^{(1)}\Big|_{r\to\infty}=0\,. \tag{2.18}$$

Тогда согласно [3] первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области массива представимы в виде (2.7) (индекс i надо опустить) и определяются соотношениями

$$s_r^{(s)} = a_o B\frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2}\{[-2(\frac{g}{r})^4 + 4(\frac{g}{r})^2]a_1 + [4(\frac{g}{r})^4 - 4(\frac{g}{r})^2]a_2\}d\cos 2q$$

$$s_q^{(s)} = -a_o B\frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2}\{2(\frac{g}{r})^4 a_1 - 4(\frac{g}{r})^4 a_2\}d\cos 2q \qquad (2.19)$$

$$t_{rq}^{(s)} = -\frac{1}{2}\{[-2(\frac{g}{r})^4 + 2(\frac{g}{r})^2]a_1 + [4(\frac{g}{r})^4 - 2(\frac{g}{r})^2]a_2\}d\sin 2q$$

$$s_r^{(a)} = 0,\ s_q^{(a)} = 0,\ t_{rq}^{(a)} = 0 \qquad (2.20)$$

$$u_r^{(s)} = -\frac{a_0 B}{2m}\frac{g^2}{r} - \frac{1}{3m}[(\frac{g}{r})^3(\frac{1}{2}a_1 - a_2) - 2\frac{g}{r}(a_1 - a_2)]gd\cos 2q$$

$$u_q^{(s)} = -\frac{1}{3m}[(\frac{g}{r})^3(\frac{1}{2}a_1 - a_2) + \frac{1}{2}\frac{g}{r}(a_1 - a_2)]gd\sin 2q \qquad (2.21)$$

$$u_r^{(a)} = 0,\ u_q^{(a)} = 0. \qquad (2.22)$$

Здесь $a_o = -\frac{1}{2}((1-g^2) + 2\ln g)$, $a_1 = -\frac{4A}{r}\sin(b_0 - \frac{p}{6})$, $b_0 = \sqrt{3}\ln g$, $a_2 = \frac{4A}{g}\cos b_0$.

Перемещения в пластической зоне массива для первой итерации будут определяться соотношениями (2.14), если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$.

Радиус упруго-пластической границы определяется в виде

$$g^{(1)} = -\{-\frac{4Ad}{g}\sin(b_0 + \frac{p}{6})\cos 2q - \frac{B}{2}(-(1+g^2) + 2\ln g + 2) -$$
$$-(-a_o B - \frac{1}{2}\{2a_1 - 4a_2\}d\cos 2q)\}/\{\frac{4m}{g}(T_1 - \frac{T_2}{g^2})\}. \qquad (2.23)$$

Таким образом, соотношения (2.5), (2.7) (в них следует опустить индекс i и заменить $q_{i-1} = gh$, $R_{i-1} = R_N = 1$), (2.19) – (2.23) определяют НДС и положение границы раздела зон упругого и пластического деформирования в массиве горных пород около вертикальной выработки эллиптического поперечного сечения.

3. Далее рассмотрим задачу об определении полей напряжений и перемещений для области: а) массива около вертикальной подкрепленной выработки с поперечным сечением, близким к правильному многоугольнику, и б) многослойной крепи, состоящей из N слоев, поперечные сечения которых имеют форму колец (внешний и внутренний контур близки по форме к правильному m-угольнику). Так же, как и в рассмотренной выше задаче, решение будем искать для i-ого слоя крепи (i=1,2,…N) и приконтурной области массива. Ограничимся случаем первого приближения первой итерации.

НДС, соответствующее i–ому слою крепи будем определять в рамках схемы, что и в предыдущей задаче.

Граничные условия на нормальные s_{ni} и касательные s_{ni} напряжения для *i*-го слоя крепи ($r_{m(i-1)}$ – внутренний радиус i-ого слоя, r_{mi} – внешний радиус), с учетом (1.2) и (1.7) имеют соответственно вид

$$s_{ri}^{(1)}\Big|_{r=R_{i-1}} = -2A_i\cos mq,\ t_{rqi}^{(1)}\Big|_{r=R_{i-1}} = -2mA_i\sin mq, \qquad (3.1)$$

где $$A_i = 2m_i(T_{1i} + \frac{D_i + T_{2i}}{R_{i-1}^2}) .$$

Тогда напряжения в пластической зоне с учетом (3.1) будут иметь вид

$$s_{r\,i}^{(1)} = \frac{2}{r} R_{i-1} A_i d(\sqrt{m^2 - 1}\sin b_i - \cos b_i)\cos mq - \frac{B_i}{2}(g_i^{\,2}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_{i-1}^{\ 2}}) + 2\ln\frac{r}{R_{i-1}}),$$

$$s_{q\,i}^{(1)} = s_{r\ i}^{p(1)} + B_i(\frac{g_i^{\,2}}{r^2} - 1) = \frac{2}{r} R_{i-1} A_i d(\sqrt{m^2 - 1}\sin b_i + \cos b_i)\cos mq -$$

$$-\frac{B_i}{2}(-g_i^{\,2}(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R_{i-1}^{\ 2}}) + 2\ln\frac{r}{R_{i-1}} + 2), \qquad (3.2)$$

$$t_{rq\,i}^{(1)} = -\frac{2mR_{i-1}A_i d}{r}\cos b_i \sin mq .$$

Здесь $$B_i = 2(c_i T_{1i} + h_i T_{1i}),\ b_i = \sqrt{m^2 - 1}\ln\frac{r}{R_{i-1}} .$$

Эти соотношения будут справедливы и для пластической области массива, если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$.

По условию сопряжения напряжений на упругопластической границе g_i ,следуя [7] получим граничные условия для напряжений в упругой зоне i-ого слоя крепи на ее внутренней границе:

$$s_{r\ i}^{e(1)}\Big|_{r=g_i} = a_{oi}B_i - a_{1i}\cos mq \ ,\ t_{r\theta\ i}^{e(1)}\Big|_{r=g_i} = -a_{2i}\sin mq \ , \qquad (3.3)$$

где $b_{0i} = \sqrt{m^2 - 1}\ln\frac{g_i}{R_{i-1}}$, $a_{1i} = -\frac{2}{g_i} R_{i-1} A_i(\sqrt{m^2 - 1}\sin b_{0i} - \cos b_{0i})$, $a_{2i} = \frac{2mR_{i-1}A_i}{g_i}\cos b_{0i}$.

На внешней границе области упругого деформирования i-ого слоя будут иметь место следующие граничные условия:

$$s_{r\ i}^{e(1)}\Big|_{r=R_i} = -2A^e{}_i d\cos mq \ ,\ t_{rq\ i}^{p(1)}\Big|_{r=R_i} = -2mA^e{}_i d\sin mq \ . \qquad (3.4)$$

Используя (3.3), (3.4) первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области, аналогично предыдущей задаче получим в виде
– внутренние составляющие напряжений

$$s_{ri}^{(S)} = \frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2}(-a_{oi}B_i + a_{oi}B_i\frac{R_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N}\{\{m[(m-1) - m(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{g_i})^{m-2} +$$

$$+ m[(m+1) - m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + (m-2)[(m+1) - m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{g_i})^{m} +$$

$$+ (m+2)[(m-1) - m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{g_i})^{-m}\}a_{1i} +$$

$$+\{[-(m-1)(m+2) + m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{g_i})^{m-2} +$$

$$+[(m-2)(m+1) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + [-(m-2)(m+1) +$$

$$+(m^2-4)(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{g_i})^{m} + [(m-1)(m+2) - (m^2-4)(\frac{R_i}{g_i})^{-2} -$$

$$-(m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{g_i})^{-m}\}a_{2i}\}d\cos mq,$$

$$s_{qi}^{(S)} = \frac{g_i^2}{R_i^2 - g_i^2}(-a_{oi}B_i - a_{oi}B_i\frac{R_i^2}{r^2}) - \frac{1}{2N_i}\{\{m[-(m-1) + m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{g_i})^{m-2} +$$

$$+ m[-(m+1) + m(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + (m+2)[-(m+1) + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{g_i})^{m} +$$

$$+ (m-2)[-(m-1) + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{g_i})^{-m}\}a_{1i} + \{[(m-1)(m+2) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{g_i})^{m-2} +$$

$$+[-(m-2)(m+1) + m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + [(m+1)(m+2) - (m+2)^2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} +$$

$$+(m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{g_i})^{m} + [-(m-1)(m-2) + (m-2)^2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{g_i})^{-m}\}a_{2i}\}\cos mq \qquad (3.5)$$

$$t_{rq\ i}^{(S)} = -\frac{1}{2N_i}\{[m(-(m-1) + m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m})(\frac{r}{g_i})^{m-2} + m((m+1) -$$

$$- m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{2m})(\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + m(-(m+1) + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{-2m})(\frac{r}{g_i})^{m} + m((m-1) -$$

$$-m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (\frac{R_i}{g_i})^{2m})(\frac{r}{g_i})^{-m})]a_{1i} + [((m-1)(m+2) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m})(\frac{r}{g_i})^{m-2} +$$

$$+((m-2)(m+1) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 + (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m})(\frac{r}{g_i})^{-(m+2)} + (m(m+1) - m(m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2} +$$

$$+m(\frac{R_i}{g_i})^{-2m})(\frac{r}{g_i})^{m} + (m(m-1) - m(m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - m(\frac{R_i}{g_i})^{2m})(\frac{r}{g_i})^{-m}]a_{2i}\}\sin mq,$$

– внешние составляющие напряжений

$$\begin{aligned}
s_{ri}^{(a)} = & -\frac{1}{N_i}\{m[-(m-1)(m+1)+m(m-1)(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+(m-1)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{R_i})^{m-2}+ \\
& +m[(m+1)(m-1)-m(m+1)(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+(m+1)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{R_i})^{-(m+2)}+ \\
& +(m-2)[-(m-1)(m+1)+m(m+1)(\frac{R_i}{g_i})^{2}-(m+1)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{R_i})^{m}+ \\
& +(m+2)[(m-1)(m+1)-m(m-1)(\frac{R_i}{g_i})^{2}-(m-1)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{R_i})^{-m}\}A^{e}{}_{i}d\cos mq
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
s_{qi}^{(a)} = & -\frac{1}{N_i}\{m(m-1)[(m+1)-m(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{R_i})^{m-2}+m(m+1)[-(m-1)+ \\
& +m(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{R_i})^{-(m+2)}+(m+1)(m+2)[(m-1)-m(\frac{R_i}{g_i})^{2}+(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{R_i})^{m}+ \\
& +(m-2)(m-1)[-(m+1)+m(\frac{R_i}{g_i})^{2}+(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{R_i})^{-m}\}A^{e}{}_{i}d\cos mq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{rq\,i}^{(a)} = & -\frac{m}{N_i}\{(m-1)[(m+1)-m(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{R_i})^{m-2}+(m+1)[(m-1)-m(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+ \\
& +(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{R_i})^{-(m+2)}+(m+1)[(m-1)-m(\frac{R_i}{g_i})^{2}+(\frac{R_i}{g_i})^{2m}](\frac{r}{R_i})^{m}+(m-1)[(m+1)-m(\frac{R_i}{g_i})^{2}- \\
& -(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}](\frac{r}{R_i})^{-m}\}A^{e}_{i}\sin mq\},
\end{aligned}$$

– внутренние составляющие перемещений

$$\begin{aligned}
u_{ri}^{(S)} = & \frac{-g_i^{\,2}}{6m_i(R_i^{\,2}-g_i^{\,2})}[a_{0i}B_i+3a_{0i}B_i\frac{R_i^{\,2}}{r^2}]r-\frac{1}{3m_i}[-\frac{3}{2}mC_{1i}^{(S)}(\frac{r}{R_i})^{m-1}+ \\
& +\frac{3}{2}mC_{2i}^{(S)}(\frac{r}{R_i})^{-(m+1)}-(\frac{3}{2}m-1)C_{3i}^{(S)}(\frac{r}{R_i})^{m+1}+(\frac{3}{2}m+1)C_{4i}^{(S)}(\frac{r}{R_i})^{-(m-1)}]R_i d\cos mq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{q\,i}^{(S)} = & -\frac{1}{3m}[\frac{3}{2}mC_{1i}^{(S)}(\frac{r}{R_i})^{m-1}+\frac{3}{2}mC_{2i}^{(S)}(\frac{r}{R_i})^{-(m+1)}+(\frac{3}{2}m+4)C_{3i}^{(S)}(\frac{r}{R_i})^{m+1}+ \\
& +(\frac{3}{2}m-4)C_{4i}^{(S)}(\frac{r}{R_i})^{-(m-1)}]R_i d\sin mq,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

– внешние составляющие перемещений

$$\begin{aligned}
u_{r\,i}^{(a)} = & -\frac{1}{3m_i}[-\frac{3}{2}mC_{1i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{m-1}+\frac{3}{2}mC_{2\,i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{-(m+1)}-(\frac{3}{2}m-1)C_{3i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{m+1}+ \\
& +(\frac{3}{2}m+1)C_{4i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{-(m-1)}]R_i d\cos mq
\end{aligned}$$

$$u_{qi}^{(a)} = -\frac{1}{3m}[\frac{3}{2}mC_{1i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{m-1} + \frac{3}{2}mC_{2i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{-(m+1)} + (\frac{3}{2}m+4)C_{3i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{m+1} +$$
$$+(\frac{3}{2}m-4)C_{4i}^{(a)}(\frac{r}{R_i})^{-(m-1)}]R_i d\sin mq. \qquad (3.8)$$

В соотношениях (3.7), (3.8) константы определяются по формулам

$$C_{1i}^{(S)} = \frac{-(m-1)+m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}}{2(m-1)N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{-(m-2)}a_{1i} +$$
$$+\frac{(m-1)(m+2)-m^2(\frac{R_i}{g_i})^2-(m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}}{2m(m-1)N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{m-2}a_{2i}$$
$$C_{2i}^{(Si)} = \frac{-(m+1)+m(\frac{R_i}{g_i})^2+(\frac{R_i}{g_i})^{2m}}{2(m+1)N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{-(m+2)}a_{1i} +$$
$$+\frac{-(m-2)(m+1)+m^2(\frac{R_i}{g_i})^2-(m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}}{2m(m+1)N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{-(m+2)}a_{2i}$$
$$C_{3i}^{(S)} = \frac{-(m+1)+m(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}}{2(m+1)N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{m}a_{1i} + \qquad (3.9)$$
$$+\frac{(m+1)-(m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}}{2m(m+1)N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{m}a_{2i}$$
$$C_{4i}^{(S)} = \frac{-(m-1)+m(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(\frac{R_i}{g_i})^{2m}}{2(m-1)N_i}(\frac{R_i}{g_i})^{-m}a_{1i} +$$
$$+\frac{-(m-1)+(m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+(\frac{R_i}{g_i})^{2m}}{2(m-1)N}(\frac{R_i}{g_i})^{-m}a_{2i}$$

$$C_{1i}{}^{(a)} = \frac{-(m-1)+m(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(\frac{R_i}{g_i})^{2m}}{2(m-1)N_i} 2A^e{}_i +$$

$$+\frac{(m-1)(m+2)-m^2(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}}{2m(m-1)N_i} 2mA^e{}_i$$

$$C_{2i}{}^{(a)} = \frac{-(m+1)+m(\frac{R_i}{g_i})^{-2}+(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}}{2(m+1)N_i} 2A^e{}_i +$$

$$+\frac{-(m-2)(m+1)+m^2(\frac{R_i}{g_i})^{-2}-(m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}}{2m(m-1)N_i} 2mA^e{}_i$$

$$C_{3i}{}^{(a)} = \frac{-(m+1)+m(\frac{R_i}{g_i})^{2}+(\frac{R_i}{g_i})^{2m}}{2(m+1)N_i} 2A^e{}_i +$$

$$+\frac{(m+1)-(m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2}+(\frac{R_i}{g_i})^{2m}}{2(m-1)N_i} 2mA^e{}_i$$

$$C_{4i}{}^{(a)} = \frac{-(m-1)+m(\frac{R_i}{g_i})^{2}-(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}}{2(m-1)N} 2A^e{}_i +$$

$$+\frac{-(m-1)+(m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{2}+(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}}{2(m-1)N} 2mA^e{}_i$$

$$N_i = 2(m^2-1)-m^2\frac{R_i^4+g_i^4}{R_i^2 g_i^2}+\frac{R_i^{4m}+g_i^{4m}}{R_i^{2m} g_i^{2m}}.$$

Найденные перемещения (3.7), (3.8) в упругой зоне при $r = g_i$ представим в виде

$$u^{e(1)}_{ri}\Big|_{r=g_i} = U_{ri}{}^{g}\cos mq + V_{ri}{}^{g}$$

$$u^{e(1)}_{qi}\Big|_{r=g_i} = U_{qi}{}^{g}\sin mq + U_{qi}{}^{g}. \qquad (3.10)$$

Перемещения в пластической зоне определяются соотношениями

$$u_{ri}{}^{(1)} = [-mC_{1i}\cos b_i + mC_{2i}\sin b_i]\cos mq + F_{ri}\cos mq - \frac{c_{3i}}{r}, \qquad (3.11)$$

$$u_{qi}{}^{(1)} = [(C_{1i}+\sqrt{m^2-1}\cdot C_{2i})\cos b_i + (\sqrt{m^2-1}\cdot C_{1i}-C_{2i})\sin b_i]\sin mq + F_{qi}\sin mq + 2c_{4i}r$$

где $F_{ri}(r) = [-\frac{f_{2i}}{4mr^2}\cos b_i(r) + (\frac{mf_{1i}}{2\sqrt{m^2-1}}\ln\frac{r}{R_{i-1}} - \sqrt{m^2-1}\frac{f_{2i}}{4mr^2})\sin b_i(r)]$

$$F_{q\,i}(r) = [(\frac{f_{1i}}{2}\ln\frac{r}{R_{i-1}} - \frac{f_{2i}}{4r^2})\cos b_i(r) - (\frac{f_{1i}}{2\sqrt{m^2-1}}\ln\frac{r}{R_{i-1}} + \frac{f_{1i}}{2\sqrt{m^2-1}})\sin b_i(r)].$$

Из условия сопряжения перемещений на границе g_i раздела сред упругого и пластического деформирования получим

$$C_{1i} = \frac{1}{m}[-(U_{ri}{}^{g} - F_{ri}{}^{g})\cos b_i + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}(mU_{qi}{}^{g} + U_{ri}{}^{g} - mF_{qi}{}^{g} - F_{ri}{}^{g})\sin b_i],$$

$$C_{2i} = \frac{1}{m}[(U_{ri}{}^{g} - F_{ri}{}^{g})\sin b_i + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}(mU_{qi}{}^{g} + U_{ri}{}^{g} - mF_{qi}{}^{g} - F_{ri}{}^{g})\cos b_i],$$

$$c_{3i} = -g_i V_{ri}{}^{g}, \quad c_{4i} = \frac{1}{2g_i}V_{qi}{}^{g}, \quad \text{где } F_{ri}{}^{g} = F_{r\,i}(g_i) \text{ и } F_{qi}{}^{g} = F_{q\,i}(g_i).$$

Граница раздела упругой и пластической областей определяется в виде

$$\begin{aligned}
g_i^{(1)} = -\{ & -\frac{2}{g_i}R_{i-1}A_i d(\sqrt{m^2-1}\sin b_{i0} + \cos b_{i0})\cos mq - \\
& -\frac{B_i}{2}(-(1+\frac{g_i^{\,2}}{R_{i-1}^{\,2}}) + 2\ln\frac{g_i}{R_{i-1}} + 2) - (\frac{g_i^{2}}{R_i^2 - g_i^{\,2}}(-a_{oi}B_i - a_{oi}B_i\frac{R_i^2}{g_i^{\,2}}) - \\
& -\frac{1}{2N_i}\{\{m[-(m-1) + m(\frac{R_i}{g_i})^2 - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] + m[-(m+1) + \\
& + m(\frac{R_i}{g_i})^2 + (\frac{R_i}{g_i})^{2m}] + (m+2)[-(m+1) + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + \\
& + (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] + (m-2)[-(m-1) + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{2m}]\}a_{1i} + \\
& + \{[(m-1)(m+2) - m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] + \\
& + [-(m-2)(m+1) + m^2(\frac{R_i}{g_i})^2 - (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}] + \\
& + [(m+1)(m+2) - (m+2)^2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (m+2)(\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] + \\
& + [-(m-1)(m-2) + (m-2)^2(\frac{R_i}{g_i})^{-2} + (m-2)(\frac{R_i}{g_i})^{2m}]\}a_{2i}\}d\cos mq - \\
& -\frac{1}{N_i}\{m(m-1)[(m+1) - m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{2m}] + m(m+1)[-(m-1) + \\
& + m(\frac{R_i}{g_i})^{-2} - (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}] + (m+1)(m+2)[(m-1) - m(\frac{R_i}{g_i})^2 + \\
& + (\frac{R_i}{g_i})^{2m}] + (m-2)(m-1)[-(m+1) + m(\frac{R_i}{g_i})^2 + \\
& + (\frac{R_i}{g_i})^{-2m}]\}A^e{}_i d\cos mq)\}/\{\frac{4m_i}{g_i}(T_{1i} - \frac{T_{2i}}{g_i^{\,2}})\}
\end{aligned} \qquad (3.12)$$

Таким образом, соотношения (3.2), (3.5) – (3.9), (3.11), (3.12) определяют НДС и положение границы раздела упругой и пластической областей в i-ом слое крепи, правильной многоугольной формы поперечного сечения.

НДС массива в окрестности вертикальной выработки многоугольного поперечного сечения будем определять так же в рамках [3].

Первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области массива представимы в виде (2.7) (индекс i надо опустить) и согласно [3] определяются соотношениями

$$s_r^{(S)} = a_o B\frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2}\{[-m(\frac{g}{r})^{m+2} + (m+2)(\frac{g}{r})^m]a_1 + [(m+2)(\frac{g}{r})^{m+2} - (m+2)(\frac{g}{r})^m]a_2\}d\cos mq \,,$$

$$s_q^{(S)} = -a_o B\frac{g^2}{r^2} - \frac{1}{2}\{[m(\frac{g}{r})^{m+2} - (m-2)(\frac{g}{r})^m]a_1 + [-(m+2)(\frac{g}{r})^{m+2} + (m-2)(\frac{g}{r})^m]a_2\}d\cos mq,$$

$$t_{rq}^{(S)} = -\frac{1}{2}\{[-m(\frac{g}{r})^{m+2} + m(\frac{g}{r})^m]a_1 + [(m+2)(\frac{g}{r})^{m+2} - m(\frac{g}{r})^m]a_2\}d\sin mq \,, \qquad (3.13)$$

$$s_r^{(a)} = 0\,,\; s_q^{(a)} = 0\,,\; t_{rq}^{(a)} = 0\,, \qquad (3.14)$$

$$u_r^{(S)} = -\frac{a_0 B}{2m}\frac{g^2}{r} - \frac{1}{3m}[(\frac{g}{r})^3(\frac{1}{2}a_1 - a_2) - 2\frac{g}{r}(a_1 - a_2)]gd\cos mq \,,$$

$$u_q^{(S)} = -\frac{1}{3m}[(\frac{g}{r})^3(\frac{1}{2}a_1 - a_2) + \frac{1}{2}\frac{g}{r}(a_1 - a_2)]gd\sin mq \,, \qquad (3.15)$$

$$u_r^{(a)} = 0\,,\; u_q^{(a)} = 0\,. \qquad (3.16)$$

Перемещения в пластической зоне массива для первой итерации будут определяться соотношениями (3.11), если в них опустить индекс i и сделать замену $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$.

Радиус упругопластической границы находится по формуле

$$g_i^{(1)} = -\{-\frac{2}{g}Ad(\sqrt{m^2-1}\sin b_0 + \cos b_0)\cos mq - \frac{B}{2}(-(1+g^2) +$$
$$+2\ln g + 2) - (-a_o B - \{a_1 - 2a_2\}d\cos mq)\}/\{\frac{4m}{g}(T_1 - \frac{T_2}{g^2})\}. \qquad (3.17)$$

Таким образом, соотношения (2.7), (3.2), (3.11) (в них надо опустить индекс i и заменить $q_{i-1} = q_N$, $R_{i-1} = R_N = 1$), (3.13) – (3.17) определяют НДС и положение границы раздела упругой и пластической зон в массиве горных пород около вертикальной выработки с поперечным сечением, близким по форме к правильному m – угольнику.

На основе полученных аналитических решений проведены численные расчеты, результаты которых представлены на рис.1– 7.

На рис.1 представлена зависимость радиуса упругопластической границы g_i в i-ом слое круговой крепи (нулевое приближение) от времени t . При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими: давление на внешнем ($R_i = 0.8$) и внутреннем ($R_{i-1} = 0.5$) контурах $q_i = 1.9$, $q_{i-1} = 1$ соответственно; модуль сдвига и предел текучести $m_i = 1$, $k_i = 1$. Кривая 1 соответствует $c_i = 0.2$, $h_i = 0.001$; кривая 2 – $c_i = 0$, $h_i = 0.001$; кривая 3 – $c_i = 0.2$; $h_i = 0$, кривая 4 – $c_i = 0$; $h_i = 0$.

На рис.2 – 7 показана зависимость гриницы g_i раздела зон упругого и пластического деформирования в i-ом слое крепи от угла q для случаев: 1)эллиптической (рис.2– 4) и 2) близкой к правильной восьмиугольной (рис.5– 7) формы поперечного сечения. При этом на рис.2– 7 внутренняя и внешняя замкнутые кривые соответствуют внутреннему и внешнему контуру i-ого слоя крепи, модуль сдвига и предел текучести $m_i = 1$, $k_i = 1$.

На рис.2 – 4 для случая 1) показано изменение пластической области в зависимости от временного параметра t, параметра упрочнения c, коэффициента вязкости h соответственно. Здесь величина малого параметра $dd = 0.005$, параметры нагружения $q_{i-1} = 1$, $q_i = 1.9$. На рис.2 кривая 1 соответствует моменту времени t=0.0005, кривая 2 – t=0.001, кривая 3 – t=10, при этом $c_i = 0.2$, $h_i = 0.001$. На рис 3. кривая 1 соответствует c_i=0.2, кривая 2 – c_i=0.1, кривая 3 – c_i=0, при этом t=1, h_i=0.001. На рис 4. кривая 1 соответствует h_i=0.005, кривая 2 – h_i=0.001, кривая 3 – h_i=0, при этом t=1, c=0.2. Аналогичные зависимости представлены на рис.5 – 7. для случая 2), при этом $dd = 0.013$.

Из анализа численного эксперимента следует, что:

– пластическая область начинает зарождаться с внутреннего контура i-ого слоя крепи, т.е. при t=0 граница раздела зон упругого и пластического деформирования совпадает с внутренним контуром (рис. 1);

– с ростом времени t пластическая область расширяется до определенного значения, соответствующего моменту времени $t^* \approx 1$, при этом дальнейший рост времени приводит к тому, что полученные кривые практически совпадают с кривой соответствующей случаю упругопластической среды (рис.1, рис.2, рис.5), то есть имеет место ограниченная ползучесть;

– при увеличении коэффициента упрочнения c_i пластическая область сужается (рис.3–6), при этом $t > t^*$. Тот же эффект наблюдается и с ростом вязкости h_i(рис.4–7), при этом $t < t^*$.

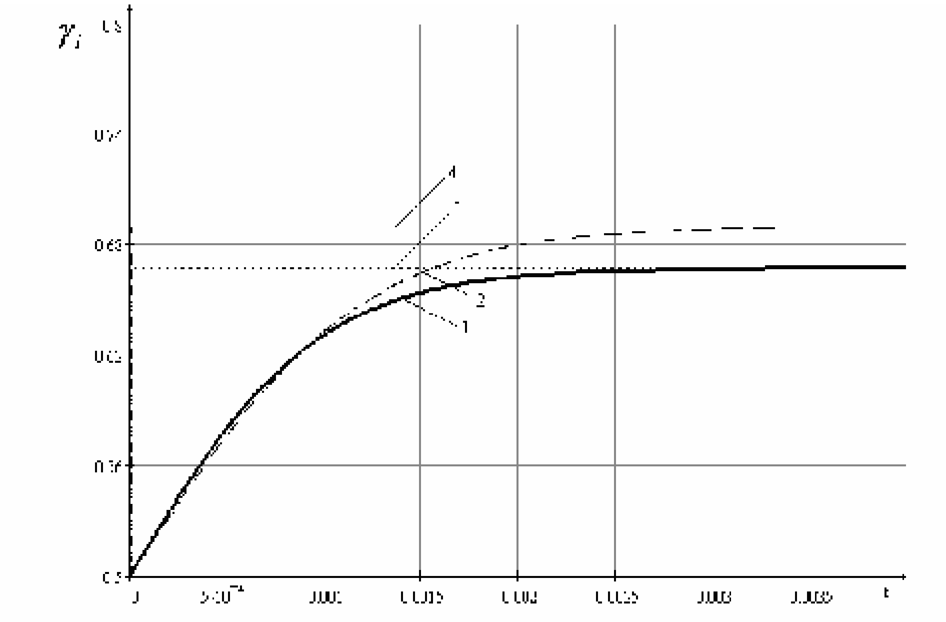

Рис.1

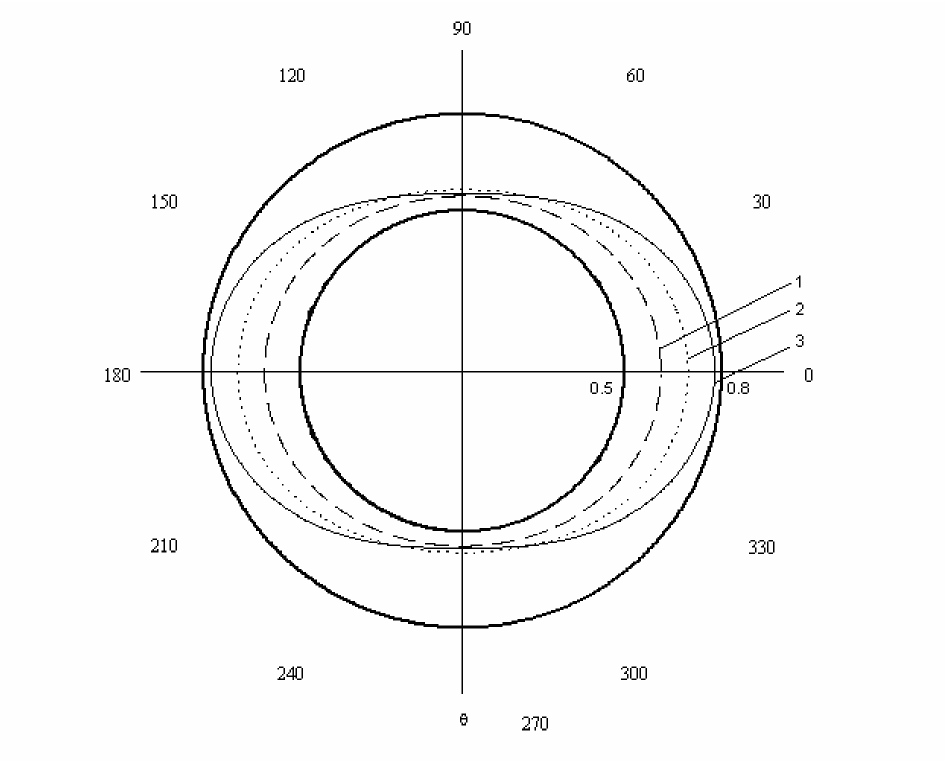

Рис.2

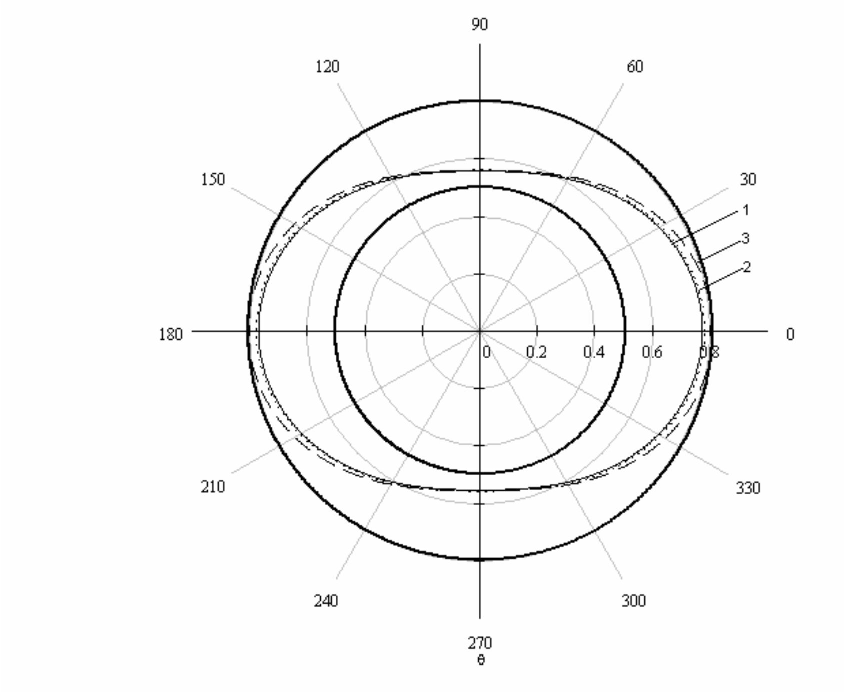
90
120
60
150
30
1
3
2
180
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
210
330
240
300
270
θ

Рис. 3

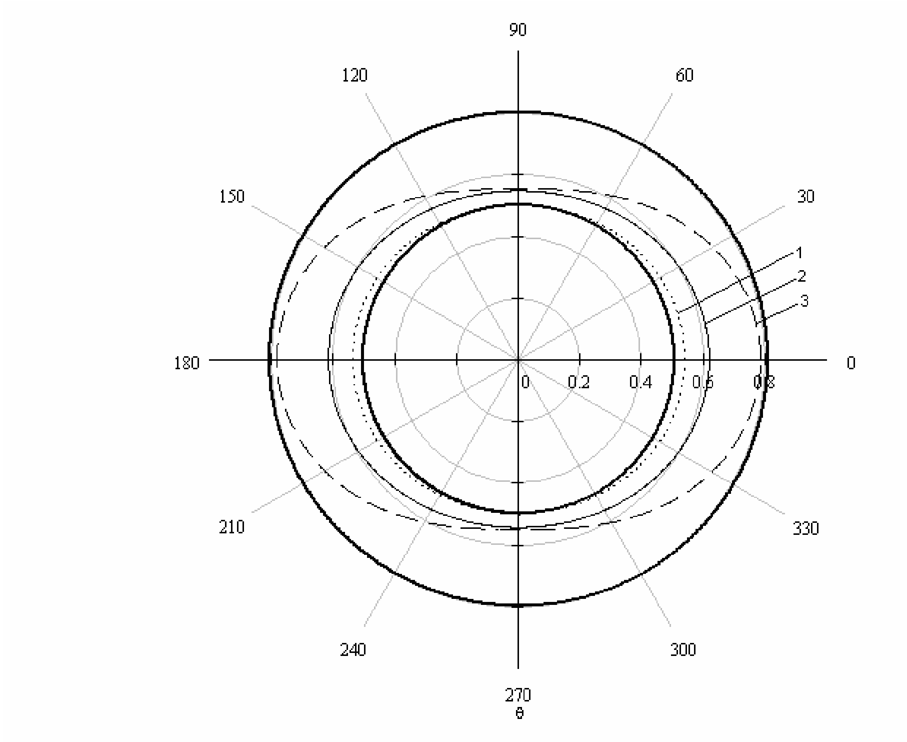
90
120
60
150
30
1
2
3
180
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
210
330
240
300
270
θ

Рис. 4

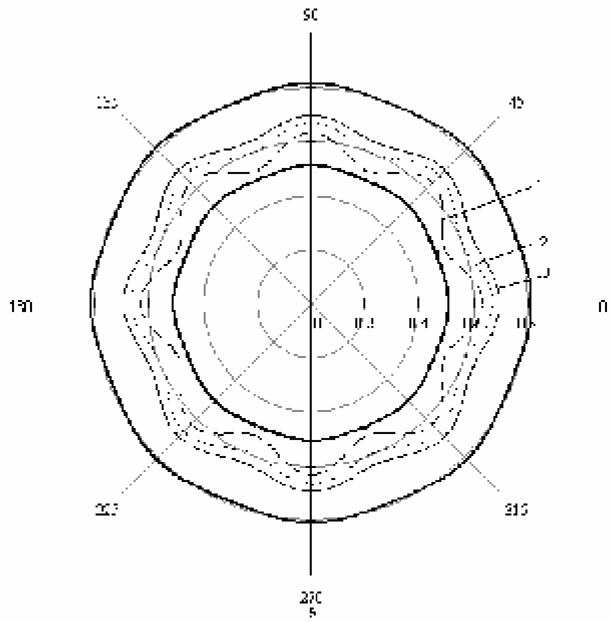
90
45
135
180
0
225
315
270
2
3

Рис.5

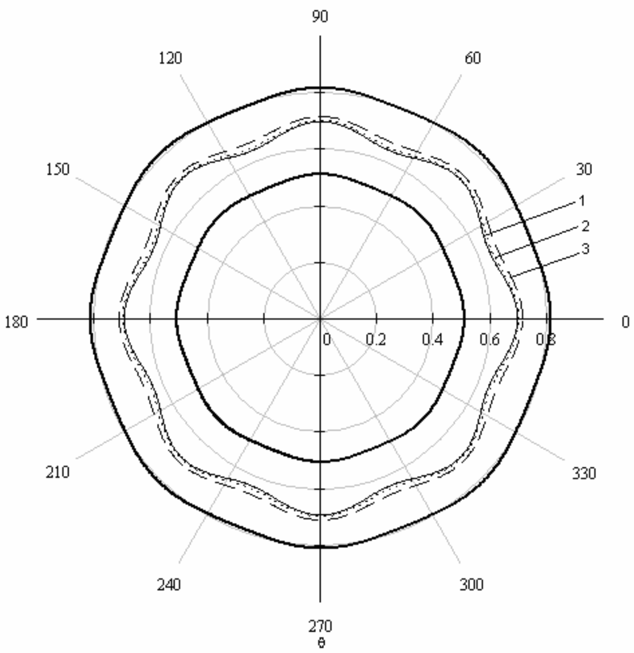
90
120
60
150
30
1
2
3
180
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
210
330
240
300
270
θ

Рис.6

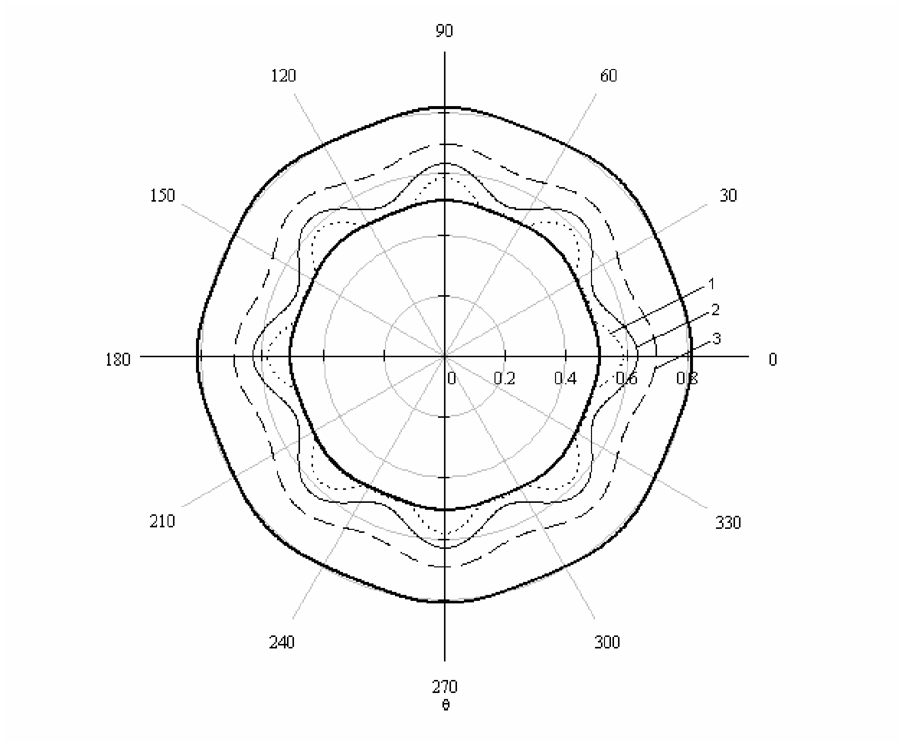

Рис. 7

г. Воронеж
Поступила: 01 ноября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быковцев, Г. И.,* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток. : Дальнаука. – 1998. –320 с.
2. *Ершов, Л. В.* О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л.В. Ершов // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145. – № 2. – С. 298 – 300.
3. *Ивлев, Д. Д.,* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев Л. В. Ершов. – М. : Наука. – 1978. – 208 с.
4. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит. – 2001. – 701 с.
5. *Спорыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та. – 1997. – 359 с.
6. *Спорыхин, А. Н.* Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова. – Воронеж : ВГУ. – 2004.
7. *Спорыхин, А. Н.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М. : ФИЗМАТЛИТ. – 2004.