

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ  
НАГРУЖЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД  
С ПЕРЕМЕННЫМ МОДУЛЕМ СДВИГА

(Московский государственный университет приборостроения и информатики)

По существующим теориям пластичности упругие свойства материала не зависят от пластической деформации. Однако это не согласуется с данными многочисленных экспериментов. В фундаментальной работе Жукова А. М. [1] выявлена зависимость упругих свойств металла от пластической деформации. Уменьшение модуля сдвига, как было установлено для стали 45, достигло 20%. Bieniawski Z. T. [3], проводя эксперименты с бетоном и скальным грунтом, обнаружил сильное (в 6–7 раз) уменьшение упругих модулей. Несмотря на это, до настоящего времени отсутствуют адекватные модели и эффективные методики расчета для оценки и предсказания поведения модулей упругости при динамических нагрузках.

С опорой на определяющие соотношения [2] получена замкнутая система разрешающих уравнений, описывающая динамические процессы в случае обобщенной модели Мизеса-Шлейхера с учетом разупрочнения и переменных упругих свойств.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о продольно-сдвиговом динамическом воздействии на пластину в условиях одноосно-деформированного состояния.

Пусть ось  $x$  ортогональна поверхности пластины, оси  $y$  и  $z$  направлены вдоль нее. В этом случае отличными от нуля являются две компоненты вектора скорости – продольная  $u$  и поперечная  $v$ , зависящие от координаты  $x$  и от времени  $t$ . Отличными от нуля будут также две компоненты тензора полных деформаций  $e_x$  и  $e_{xy}$ , причём  $\dot{e}_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,

$\dot{e}_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}$ , компоненты тензора напряжений  $s_x, s_y = s_z, s_{xy}$ . Тензор пластических деформаций имеет ненулевые компоненты  $e_x^p, e_y^p = e_z^p, e_{xy}^p$ .

В качестве условия пластичности принимается обобщенное условие Мизеса-Шлейхера, которое в случае рассматриваемого одноосно-деформированного состояния в пространстве деформаций имеет следующий вид:

$$y = 2G \sqrt{\frac{2}{3} (e_x - e_x^p + e_y^p)^2 + 2(e_{xy} - e_{xy}^p)^2} - F, \quad (1)$$

где  $F$  – функция, зависящая от полных и необратимых деформаций;

$F' \equiv \frac{\partial F}{\partial p}$ ,  $p$  – первый инвариант тензора напряжений (давление), выраженный через

полные и пластические объёмные деформации  $p = K(\mathbf{q} - \mathbf{q}^p)$ ;

$\mathbf{q} = \mathbf{e}_x$  – полная объёмная деформация;

$\mathbf{q}^p = \mathbf{e}_x^p + 2\mathbf{e}_y^p$  – объёмная пластическая деформация;

$G$  – переменный модуль сдвига, зависящий от объёмной пластической деформации

$G = G(\mathbf{q}^p)$ .

Динамический процесс продольно-сдвигового нагружения описывается следующей системой 8 уравнений относительно 8 неизвестных функций

$u, v, \mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_{xy}, \mathbf{e}_x^p, \mathbf{e}_y^p, \mathbf{e}_{xy}^p$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{s}_{xy}}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial \mathbf{s}_x}{\partial t} - \left[ \left( K + \frac{4}{3}G \right) \frac{H}{H_e} \left[ \left( KF' - \frac{8G^2A}{3F} \right)^2 - \frac{4A}{3} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \left( \frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) \right] \right] \frac{\partial u}{\partial x} - \\
 & \quad - \frac{4G^2BH}{FH_e} \left[ \left( KF' - \frac{8G^2A}{3F} \right) - \frac{4A}{3} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{4A}{3} \frac{dG}{dq^p} = 0, \\
 & \frac{\partial \mathbf{s}_y}{\partial t} - \left[ \left( K - \frac{2}{3}G \right) + \frac{H}{H_e} \left[ \left( KF' + \frac{4G^2A}{3F} \right) \left( \frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \left( \frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) \right] \right] \frac{\partial u}{\partial x} - \\
 & \quad - \frac{4G^2BH}{FH_e} \left[ \left( KF' + \frac{4G^2A}{3F} \right) + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} = 0, \\
 & \frac{\partial \mathbf{s}_{xy}}{\partial t} + \frac{2GH}{H_e} \left[ \left( \frac{2GB}{F} + \frac{B}{G} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \left( \frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x} - \\
 & \quad - \left[ G - \frac{8G^3BH}{FH_e} \left( \frac{2GB}{F} + \frac{B}{G} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} - 2B \frac{dG}{dq^p} = 0, \\
 & \frac{\partial \mathbf{e}_x^p}{\partial t} - \frac{H}{3H_e} \left( \frac{4GA}{F} - F' \right) \left( \frac{8G^2A}{3F} - KF' \right) \left( 1 + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \\
 & \quad - \frac{4G^2BH}{FH_e} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \left( 1 + \frac{2A}{3} \frac{dG}{dq^p} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e_y^p}{\partial t} + \frac{H}{H_e} \left( \left( \frac{2GA}{3F} + \frac{F'}{3} \right) + \frac{1A}{3G} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \left( \frac{8G^2 A}{3F} - KF' \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ & + \frac{4G^2 BH}{FH_e} \left( \left( \frac{2GA}{3F} + \frac{F'}{3} \right) + \frac{1A}{3G} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ & \frac{\partial e_{xy}^p}{\partial t} - \frac{H}{H_e} \left( \frac{2GB}{F} + \frac{B}{G} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \left( \frac{8G^2 A}{3F} - KF' \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \\ & - \frac{4G^2 BH}{FH_e} \left( \frac{2GB}{F} + \frac{B}{G} \frac{dG}{dq^p} \left( \frac{4GA}{3F} - \frac{F'}{3} \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

где  $r$  – плотность среды,  $K$  – коэффициент объемного расширения-сжатия,

$$\begin{aligned} A &= e_x - e_x^p + e_y^p, & B &= e_{xy} - e_{xy}^p, \\ H &= H_1 H_2, & H_1 &= H_1(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases} & H_2 &= H_2(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$$y = \left( \frac{8G^2 A}{3F} - KF' \right) x + \frac{8G^2 B}{F} y.$$

Функция упрочнения:

$$\begin{aligned} H_e &= 2G + K(F')^2 - \frac{F'}{3} \left( \frac{\partial F}{\partial e_x^p} + 2 \frac{\partial F}{\partial e_y^p} \right) + \frac{4G}{3F} \left[ A \left( \frac{\partial F}{\partial e_x^p} - \frac{\partial F}{\partial e_y^p} \right) + 3B \frac{\partial F}{\partial e_{xy}^p} \right] - \\ & - \frac{2F'}{3G} \frac{dG}{dq^p} \left[ A \left( \frac{\partial F}{\partial e_x^p} - \frac{\partial F}{\partial e_y^p} \right) + 3B \frac{\partial F}{\partial e_{xy}^p} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Зависимость модуля сдвига от объемной деформации  $q^p$  принималась в виде:

$$G = G_0 e^{-L(q^p)^2}, \quad (5)$$

где  $G_0 = 7,7 \text{ ГПа}$  – начальный модуль сдвига;

$L$  – некоторая константа ( $L = 1 \cdot 10^4$ ).

Изменение функции  $F$  задавалось в следующем виде:

$$F = kp + C_0 - a \sqrt{I_2^p}. \quad (6)$$

Положительным значениям  $a$  соответствует разупрочнение, отрицательным  $a$  – упрочнение, а при  $a = 0$  имеет место идеальная пластичность. Коэффициент  $k$  для модельного материала равен 0.3.

При расчётах использовалось традиционное обезразмеривание переменных:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{tc_l}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{c_l}, \quad \bar{v} = \frac{v}{c_l}, \quad \bar{s}_x = \frac{s_x}{rc_l^2}, \quad \bar{s}_y = \frac{s_y}{rc_l^2}, \quad (7)$$

$$\bar{s}_{xy} = \frac{s_{xy}}{rc_l^2}, \quad c_l = \sqrt{\frac{1}{r}K}; \quad L - \text{толщина пластины.}$$

Модельные эксперименты проводились для 2-х случаев нагружения.

На левой поверхности пластины заданы «ступеньки» продольной и сдвиговой составляющих скорости:

$$\bar{u} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,002, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \bar{v} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,008, & t \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

- 1) с постоянным модулем сдвига;
- 2) при расчетах учитывается уменьшение модуля сдвига.

Для всех трех случаев значения остальных функций в начальный момент времени равны нулю. Рассматривалась среда с разупрочнением  $\bar{\alpha} = 0,01$ .

**2. Результаты численного моделирования.** Решение сформулированной задачи проводилось с помощью явной однородной конечно-разностной схемы Лакса-Вендроффа.

Расчёты выполнялись для модельного материала, со следующими деформационными и прочностными характеристиками: плотность –  $2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $G = 7,7 \text{ ГПа}$ ,  $K = 8,4 \text{ ГПа}$ ,  $C_0 = 40 \text{ МПа}$ .

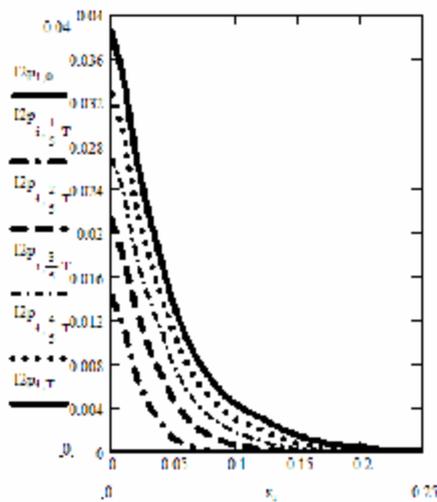


Рис. 1. Интенсивность пластических деформаций сдвига  $I_2^p$  в различные моменты времени. Модуль сдвига постоянен

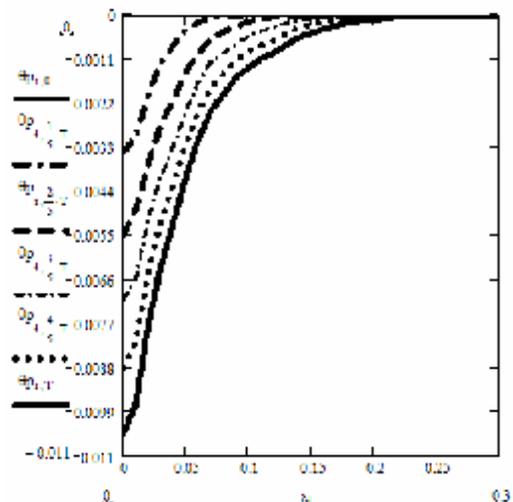


Рис. 2. Объемная пластическая деформация  $Q_2^p$  в различные моменты времени. Модуль сдвига постоянен

На рис. 1 – 2 приведены графики для второго инварианта тензора пластических деформаций (интенсивности пластических деформаций) и пластической объемной деформации для первого случая. На рис. 3 – 5 приведены результаты для второго случая:

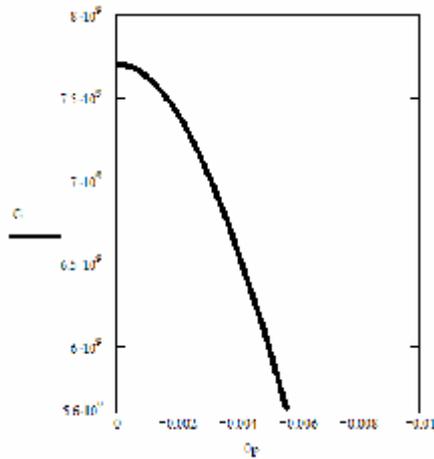


Рис. 3.  $G = G_0 e^{-L(q^P)^2}$

рис. 3 – график зависимости модуля сдвига от пластической объемной деформации; рис. 4 – график интенсивности пластических деформаций; рис. 5 – пластическая объемная деформация.

Как показывает анализ результатов численного моделирования, изменение упругого модуля сильно влияет на изменение интенсивности пластических деформаций сдвига и объемной пластической деформации. Из рис. 3 видно, что модуль сдвига уменьшается на 25%. Необходимо отметить, что увеличение скорости или рост коэффициента интенсивности разупрочнения приводит к более сильному падению модуля сдвига.

Графики рис. 1 и рис. 4 показывают

существенное изменение интенсивности пластических деформаций сдвига, оно составило 45% , при учете уменьшения упругого модуля. Объемная пластическая деформация рис. 2 и рис. 5 уменьшается на 40%.

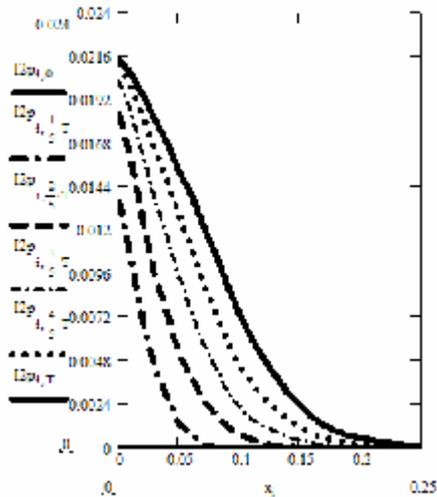


Рис. 4. Интенсивность пластических деформаций сдвига  $I_2^P$  в различные моменты времени

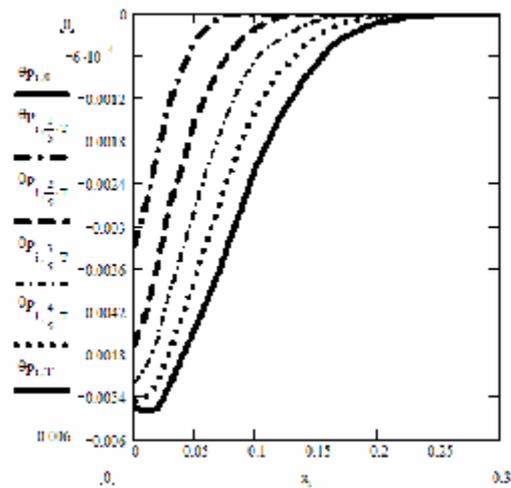


Рис. 5. Объемная пластическая деформация  $Q_2^P$  в различные моменты времени

г. Москва

Поступила: 15 ноября 2006 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков, А. М. Упругие свойства пластически деформированного металла и сложное нагружение / А. М. Жуков. – Ин. механики АН СССР. – Инж. сб. – 1960 – Т. XXX. – С. 3–16.
2. Зуев, В.В. Определяющие соотношения и динамические задачи для упруго-пластических сред с усложненными свойствами / В. В. Зуев. – М. : ФМ. – 2006. – 174 с.
3. Bieniawski, Z. T. Deformational behavior of fractured rock under multiaxial compression / Z. T. Bieniawski // Proc. Struct. Solid Mech. Engng. Design. Southampton. – Part 1. – 1969. – P. 589–598.