ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 3 • 2007

Ивлев Д. Д.

ЧЕМ ОТЛИЧАЕТСЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ОТ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

Теория идеальной пластичности посвящена обширная литература [1–12] и др.

Механика твердого деформируемого тела имеет дело с тремя уравнениями равновесия

$$\frac{\partial s_x}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}=0 \quad (xyz) \tag{1}$$

относительно шести компонент напряжений $s_x, t_{yz}. \quad (xyz)$.

Три уравнения равновесия (1) определяются из условия равенства нулю суммарных действующих усилий на элемент тела, равенство нулю суммарного главного момента учтено за счет симметрии тензора напряжений

$$t_{ij}=t_{ji}\,. \tag{2}$$

Система трех уравнений (1) относительно шести компонент напряжений, естественно, незамкнута, является статически неопределимой.

Для определения напряженно-деформируемого состояния тел и конструкций в МДТТ используются различные виды связи между напряжениями и деформациями $s_{ij}-e_{ij}$, определяющие свойства сплошной среды: упругость, пластичность, вязкость, вязко-упругость и т. п.

Теория идеальной пластичности исходит из предположения о существовании некоторого предельного, конечного соотношения для напряжений

$$f(s_{ij})=0\,. \tag{3}$$

Соотношения (3) называется условием пластичности или условием текучести.

Достижение напряженным состоянием условия пластичности или текучести (3) приводит к появлению пластических деформаций, согласно ассоциированному закону течения

$$de_{ij}^{p}=d\,l\,\frac{df}{ds_{ij}},\ d\,l\geq 0 \tag{4}$$

или

$$e_{ij}^{p}=m\frac{\partial f}{\partial s_{ij}},\quad e_{ij}^{p}=\frac{de_{ij}^{p}}{dt},\quad m=\frac{d\,l}{dt},\ m\geq 0\,. \tag{5}$$

Изменение напряженного состояния приводит к изменению упругого или какого-либо другого состояния материала, полные деформации получаются путем суммирования, например, для упругопластического тела имеет место

$$de_{ij} = de_{ij}^{e} + de_{ij}^{p}\,, \tag{6}$$

где приращение упругих деформаций de_{ij}^{e} – определяется согласно закону Гука, приращение пластических деформаций de_{ij}^{p} – согласно (4).

В общем случае наличие одного условия текучести (3) вместе с уравнениями равновесия (1) приводит к четырем уравнениям относительно шести компонент напряжений, и система уравнений остается статически неопределимой. Система уравнений в общем случае принадлежит к эллиптическому типу [3]. Однако, уже в случае одной поверхности текучести (3) в частных случаях проявляются соотношения теории предельного состояния.

Для простоты рассмотрим случай изотропного материала. Примем предположение о независимости предельных и пластических свойств от среднего давления. Отметим, что учет анизотропии и среднего давления не вносит никаких принципиальных изменений.

В случае изотропии условие текучести зависит от инвариантов девиатора напряжений

$$f(\Sigma_2', \Sigma_3') = 0\,, \tag{7}$$

где

$$\Sigma_2' = s_{ij}' s_{ij}', \quad \Sigma_3' = s_{ij}' s_{jk}' s_{ki}', \quad s_{ij}' = s_{ij} - d_{ij} s\,, \quad s = \frac{1}{3} s_{ii}\,. \tag{8}$$

В случае кручения или антиплоской деформации при соответствующем выборе системы координат имеет место

$$t_{xz}, t_{yz} \neq 0, \quad s_x = s_y = s_z = t_{xy} = 0\,. \tag{9}$$

Согласно (8), (11), условие текучести (7) сводится к виду

$$t_{xz}^2 + t_{yz}^2 = k^2, \quad k - const\,. \tag{10}$$

Согласно (1), (9) имеет место одно уравнение равновесия

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0\,. \tag{11}$$

Система двух уравнений (10), (11) является статически определимой, что является основным характерным признаком теории предельного состояния.

Система уравнений (10), (11) решается двумя способами: путем замены переменных

$$t_{xz} = k\cos j\,, \quad t_{yz} = k\sin j\,, \tag{12}$$

и путем введения функции напряжения

$$t_{xz} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad t_{yz} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{13}$$

Согласно ассоциированному закону течения из (10) следует

$$e_{xz} = l\,t_{xz}, \quad e_{yz} = l\,t_{yz}, \quad l \geq 0. \tag{14}$$

Система уравнений (10), (11) определяют предельные усилия сдвига, уравнение (14) при известных из уравнений статики (10), (11) компонент напряжений t_{xz}, t_{yz}, определяют кинематику деформирования [2, 8].

В случае плоской деформации

$$s_x, s_y, s_z, t_{xz} \neq 0, \quad t_{xz} = t_{yz} = 0\,. \tag{15}$$

Для изотропного тела условие текучести (7) сводится к условию

$$(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2 = 4k^2, \quad k - const\,. \tag{16}$$

Согласно (1), (15) имеет место два уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} = 0\,. \tag{17}$$

Система трех уравнений является статически определимой, что, повторяем, является основным характерным признаком теории предельного состояния.

Согласно ассоциированному закону течения из (16) следует

$$e_x = l(s_x - s_y), \quad e_y = l(s_y - s_x), \quad e_{xy} = 2l\,t_{xy}, \quad l \geq 0. \tag{18}$$

Система уравнений (16), (17) решается, обычно, при помощи замены переменных

$$s_x = s + k\cos 2q, \quad s_y = s - k\cos 2q, \quad t_{xy} = k\sin 2q\,. \tag{19}$$

Согласно (17), (19) имеет место система квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial x} - 2k\sin 2q\,\frac{\partial q}{\partial x} + 2k\cos 2q\,\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial s}{\partial y} + 2k\cos 2q\,\frac{\partial q}{\partial x} + 2k\sin 2q\,\frac{\partial q}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Система уравнений (21) принадлежит к гиперболическому типу, и определяет предельные нагрузки.

Соотношения (18) приводят к двум квазилинейным уравнениям гиперболического типа относительно компонент скоростей перемещений u, v, характеристики уравнений для определения напряжений и компонент скорости перемещения совпадают между собой [2].

Примером определения предельного состояния может служить задача о толстостенной трубе радиусов $a, b\,(a < b)$, нагруженной внутренним давлением и свободной внешней поверхностью

$$s_r\big|_{r=a} = -p, \quad s_r\big|_{r=b} = 0, \quad s_r(r), s_q(r),\ t_{rq} = 0\,. \tag{21}$$

где s_r, s_q, t_{rq} – компоненты напряжения в полярной системе координат r, q.

Уравнения равновесия имеет вид

$$\frac{ds_r}{dr} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0. \tag{22}$$

Условие пластичности принимает вид

$$s_q - s_r = 2k, \quad k - const, \quad s_q > s_r\,. \tag{23}$$

Из (21), (22), (23) следует

$$s_r = 2k\ln r + C, \quad s_q = 2k(1 + \ln r) + C\,. \tag{24}$$

Из второго граничного условия (21) и (24) следует

$$s_r = 2k\ln\frac{r}{b}, \quad s_q = 2k(1+\ln\frac{r}{b}). \tag{25}$$

Из первого граничного условия (21) и (25) определяется предельное давление

$$-p^* = 2k\ln\frac{a}{b}, \quad p^* > 0\,. \tag{26}$$

Разумеется, может быть решена задача об упруго идеальнопластическом состоянии трубы, можно проследить зарождение и распространение пластической зоны вплоть до ее выхода на внешнюю поверхность трубы и получить значение предельной нагрузки (26). Но никакого отношения решение упруго идеальнопластической задачи к определению предельной нагрузки, к теории предельного состояния, до выхода пластической зоны на внешнюю поверхность трубы, не имеет.

Определенные вопросы возникают при рассмотрении осесимметричного состояния.

Два уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0, \quad \frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = 0. \tag{27}$$

относительно четырех компонент напряжений s_r, s_q, s_z, t_{rz} не могут быть замкнутыми одним условием пластичности

$$f\left(s_r, s_q, s_z, t_{rz}\right) = 0\,. \tag{28}$$

Система уравнений теории идеальной пластичности (27), (28) может быть замкнута за счет использования соотношений ассоциированного закона пластического течения

$$e_r = \frac{\partial f}{\partial s_r},\ e_q = \frac{\partial f}{\partial s_q},\ e_z = \frac{\partial f}{\partial z},\ e = 2\frac{\partial f}{\partial t_{rz}}. \tag{29}$$

Система уравнений (27), (28), (29) рассматривается совместно, она является статически неопределимой, принадлежит к эллиптическому типу [3] и лишена признаков теории предельного состояния. Другими словами, решение системы уравнений (27), (28), (29) определяет связь между напряженным и деформированным состоянием и предельные нагрузки определены быть не могут.

Итак, соотношения (27), (28), (29) являются соотношениями теории идеальной пластичности и не являются соотношениями теории предельного состояния.

Определение предельного состояния в осесимметричном случае возможно при двух предельных условиях

$$\begin{aligned} f_1\left(s_r, s_q, s_z, t_{rz}\right) &= 0, \\ f_2\left(s_r, s_q, s_z, t_{rz}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Исследование предельного состоянiия при условиях (30) проведено в работе [7].

В случае изотропии материала имеют место соотношения полной пластичности Генки [10]

$$\begin{aligned} \left(s_r - s_z\right)^2 + 4t_{rz}^2 &= 4k^2,\ k - const, \\ s_q &= \frac{1}{2}\left(s_q + s_z\right) \pm k. \end{aligned} \tag{31}$$

Статически определимая система уравнений (27), (31) подробно исследована в литературе [5], уравнения принадлежат к гиперболическому типу и определяют предельные нагрузки. Кинематика течения также полностью исследована [5].

В пространственном случае теория идеальной пластичности может исходить из одного условия текучести

$$f\left(s_{ij}\right)=0, \tag{32}$$

или двух условий текучести

$$f_1\left(s_{ij}\right)=0, \quad f_2\left(s_{ij}\right)=0. \tag{33}$$

В обоих случаях (1), (32); (1), (33) система уравнений является статически неопределимой и при использовании законов связи $s_{ij}-e_{ij}$, приводит к уравнениям эллиптического типа [3], определяет зависимость $s_{ij}-e_{ij}$ и не приводит к определению предельных нагрузок, предельного состояния.

Достижение предельного состояния в пространственном случае возможно при выполнении трех предельных условий

$$f_1\left(s_{ij}\right)=0, \quad f_2\left(s_{ij}\right)=0, \quad f_3\left(s_{ij}\right)=0. \tag{34}$$

В изотропном случае условия (34) могут быть записаны в виде трех соотношений

$$f_1\left(s_1,s_2,s_3\right)=0, \quad f_2\left(s_1,s_2,s_3\right)=0, \quad f_3\left(s_1,s_2,s_3\right)=0. \tag{35}$$

Из трех конечных соотношений (35) следует

$$s_1=k_1, \; s_2=k_2, \; s_3=k_3, \quad k_i-const. \tag{36}$$

Случай (36) исследован в [7] и не имеет сколь-либо практического значения.

В изотропном случае пространственное предельное состояние достигается при условии полной пластичности [2].

$$s_1=s_2, \; s_1-s_3=2k, \quad s_1=s_2>s_3, \tag{37}$$

$$s_3=s_2, \; s_1-s_3=2k, \quad s_1>s_2=s_3, \quad k-const. \tag{38}$$

В случае (37) имеет место

$$\begin{gathered} s_x=s+\frac{2}{3}k-2kn_1^2, \quad t_{xy}=-2kn_1n_2, \; (xyz,123) \\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1, \end{gathered} \tag{39}$$

где n_1,n_2,n_3 – направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения s_3 в декартовой системе координат xyz.

Обозначим $n_1=\cos q_1$, $n_2=\cos q_2$, $n_3=\cos q_3$. Из (1), (39) получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial s}{\partial x}+2k\Theta_1\sin q_1+2k\Theta_2\cos q_1, \; (xyz) \\ \cos^2 q_1+\cos^2 q_2+\cos^2 q_3=1, \end{gathered} \tag{40}$$

где

$$\Theta_1=\cos q_1\frac{\partial q_1}{\partial x}+\cos q_2\frac{\partial q_2}{\partial y}+\cos q_3\frac{\partial q_3}{\partial z},$$

$$\Theta_2=\sin q_1\frac{\partial q_1}{\partial x}+\sin q_2\frac{\partial q_2}{\partial y}+\sin q_3\frac{\partial q_3}{\partial z}.$$

Условие полной пластичности (37), (38) приводит к статически определимой системе уравнений гиперболического типа [2], из которой следует определении предельных нагрузок.

Кинематика предельного состояния определяется согласно обобщенному ассоциированному закону течения [2].

Случай (38) рассматривается аналогично.

Итак, в чем же отличие теории идеальной пластичности от теории предельного стояния?

Теория идеальной пластичности основана на представлении о существовании в различных средах условий пластичности или текучести, которые могут приводить либо к статически неопределимым, либо к статически определимым состояниям.

Теория предельного состояния имеет дело только со статически определимыми состояниями, приводящими к определению предельных нагрузок. Для статически неопределимых состояний в теории идеальной пластичности предельные нагрузки не определяются.

Можно сказать, что в определенной степени теория предельного состояния вписывается в теорию идеальной пластичности как предельный случай, хотя существуют задачи теории идеальной пластичности, которые не приводят к предельным нагрузкам.

Еще Хаар и Карман [10] отметили, что теория идеальной пластичности и теория предельного состояния имеют общие основы. В определенной степени это действительно так. Но представляется, что теория предельного состояния – замкнутая наука, самостоятельный раздел механики, занимающийся определением именно предельного состояния в отличие от теории идеальной пластичности, занимающийся, в том числе, определением и развитием пластических деформаций в различных средах. Модель идеального жесткопластического тела Прандтля пренебрегает всеми свойствами материала, кроме пластических, по духу эта модель соответствует теории предельного состояния, но модель Прандтля не предполагает необходимость статической определимости состояния, что имеет место в теории предельного состояния.

Можно представить себе следующую схему соответствия теории идеальной пластичности и теории предельного состояния (рис. 1).

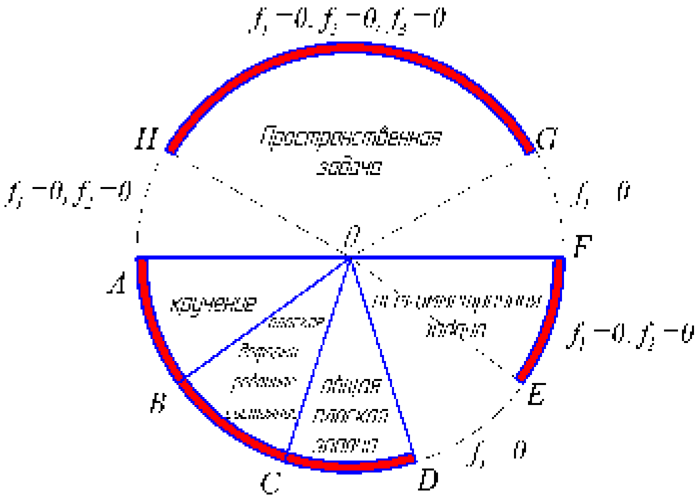

Рис. 1.

На рис. 1 представлена окружность, ограничивающая условно область статически неопределимых задач теории идеальной пластичности. Среда может обладать различными свойствами – упругими, вязкими, упруговязкими и т. п., возможно, что имеет место условие текучести $f=0$, или несколько условий $f_i=0$.

При возрастании нагрузки может быть достигнуто предельное состояние, при котором «предыдущие» свойства материала не играют никакой роли. Предельное состояние определяется из замкнутой системы статически определимых соотношений, не имеющей ничего общего с допредельными свойствами материала.

Предельному состоянию на рис. 1 соответствуют жирные дуги, ограничивающие область статически неопределимых задач. Например, кручению соответствует сектор AOB, дуга AB – предельному состоянию при кручении и т.д.

В случае осесимметричной задачи – сектор DOF делится на две части: сектор DOE ограничивает совокупность задач, для которых предельное состояние не может быть достигнуто и сектор EOF для совокупности задач, для которых предельная нагрузка может быть определена, предельному состоянию соответствует дуга EF.

Аналогично в секторе $AOFGH$, соответствующем пространственным задачам, предельному состоянию соответствует дуга GH.

Повторяю, как мне представляется, теория предельного состояния должна рассматриваться как самостоятельный раздел МДТТ, разумеется, связанный с теорией идеальной пластичности.

В результате решения статически определимых уравнений теории предельного состояния определяются предельные фиксированные нагрузки, не связанные с предыдущей историей деформирования. По известным предельным значениям напряжений определяется «запредельное» деформирование [2].

Если «живое» статически неопределимое состояние связано со свойствами материала, и уравнения принадлежат к эллиптическому типу, то статически определимые уравнения теории предельного состояния принадлежат к гиперболическому типу. При использовании соотношений ассоциированного закона течения «запредельная» кинематика течения также определяется из уравнений гиперболического типа, причем уравнения для определения напряжений и скоростей перемещений имеют совпадающие характеристические поверхности.

Сделаем несколько замечаний.

Несколько слов о теории плоского напряженного состояния.

Уравнение теории плоского напряженного состояния не следуют из общих уравнений теории. Этим объясняется ряд особенностей теории предельного состояния при плоском напряженном состоянии, уклоняющихся от общей схемы.

В самом деле, в теории плоского напряженного состояния предполагается, что имеет место

$$\begin{gathered} s_x(x,y),\ s_y(x,y),\ s_z=0,\ t_{xy}(x,y),\ t_{xz}=t_{yz}=0, \\ u(x,y), v(x,y), e_{xz}=e_{yz}=0. \end{gathered} \tag{41}$$

Предположения (41), строго говоря, не выполняются. В самом деле, из уравнения несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{42}$$

следует

$$w = w_1(x,y)z + w_2(x,y). \qquad (43)$$

Из (41), (43) следует

$$e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial w_1}{\partial x}z + \frac{\partial w_2}{\partial x} \neq 0,$$
$$e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial w_1}{\partial y}z + \frac{\partial w_2}{\partial y} \neq 0. \qquad (44)$$

что противоречит предположениям (41).

Другое замечание относится к решению статически неопределимых идеально жесткопластических задач. В частных случаях удается получить решения статически неопределимых задач: течение материала сквозь коническую матрицу, обобщенное решение Прандтля в цилиндрической системе координат при условии пластичности Мизеса [2]. Можно получить решение статически неопределимых задач о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами. Но эти решения являются исключением. Представим вдавливание жесткого осесимметричного штампа в жестко идеальнопластическое полупространство (задача А. Ю. Ишлинского), при одном условии пластичности, сектор DOE на рис. 1. Исходные уравнения принадлежат к эллиптическому типу, следовательно, надо поставить краевые условия на неизвестной границе жесткопластического материала. Задача представляется практически неразрешимой. Аналогичные трудности возникают при решении статически неопределимых задач теории идеальной пластичности с неизвестной границей пластической зоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Статически определимые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский // Изв. РАН МТТ. – 2003. – №3.
2. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966.
3. *Ивлев, Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971.
4. *Ивлев, Д. Д.* О предельных статически определимых состояниях деформируемых тел / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова // Изв. РАН МТТ. – 2005. – №5.
5. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М. : Физматлит, 2001.
6. *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969.
7. *Максимова, Л.* А. О статически определимых соотношениях в осесимметричной задаче теории идеальной пластичности / Л. А. Максимова. Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006.
8. *Прагер, В.* Теория идеально-пластических тел / В. Прагер, Ф. Ходж. – М. : ИЛ, 1956.
9. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969.
10. Теория пластичности. Сб. статей. – М. : ИИЛ, 1948.
11. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехтеоретиздат, 1956.
12. *Христианович, С. А.* Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре / С. А. Христианович // Матем. сб., новая серия. – 1936. – Т.1. – Вып. 4.