

ОБ УЧЕТЕ НЕОБРАТИМОЙ СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ВОЛОЧЕНИИ ПОЛОСЫ СКВОЗЬ КОРОТКУЮ МАТРИЦУ

(Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет)

Задача о волочении полосы сквозь короткую матрицу рассматривалась в работах Р. Хилла [4], В. В. Соколовского [2] и других авторов при условиях текучести Мизеса и Треска-Сен-Венана. В этом случае идеальное жесткопластическое тело является несжимаемым. При условии текучести Кулона-Мора происходит необратимое изменение объема материала в пластической области. Целью работы являлось исследование полей деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения (линии разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик) в задаче о волочении полосы с учетом необратимой сжимаемости.

1. Основные соотношения теории пластического течения.

В теории пластического течения предполагается [4], что компоненты девиатора скорости деформации пропорциональны частным производным от условия текучести по компонентам девиатора напряжения:

$$\mathcal{E}_{ij} = a \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}, \quad a \geq 0, \quad (1)$$

средняя скорость деформации пропорциональна частной производной от условия текучести по среднему напряжению

$$\mathcal{E} = a \frac{\partial f}{\partial s}. \quad (2)$$

Так как $\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E}_{ij}$, то компоненты тензора скорости деформации пропорциональны частным производным от условия текучести по компонентам тензора напряжения

$$\mathcal{E}_{ij} = a \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}. \quad (3)$$

Производные $\frac{\partial f}{\partial s_{ij}}$ могут быть выражены следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = \frac{1}{2t} \frac{\partial f}{\partial t} s_{ij}$$

где $t^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$ – интенсивность девиатора напряжения. Поэтому соотношения (1) устанавливают, что компоненты девиатора скорости деформации пропорциональны компонентам девиатора напряжения:

$$\mathfrak{E}_{ij} = I s_{ij}, \quad h = I t, \quad (4)$$

где $h^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_{ij} \mathfrak{E}_{ij}$ – интенсивность девиатора скорости пластической деформации.

В данной работе в качестве условия текучести для сжимаемого материала, принимается условие текучести Кулона-Мора :

$$\max \frac{1}{2} |s_i - s_j| = c_1 - \frac{1}{3} c_2 (s_1 + s_2 + s_3), \quad (5)$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные рассматриваемой среды.

При плоском деформированном состоянии из соотношений (3), (4) и (5) получим

$$s_z = (1 + \frac{2}{9} c_2^2) s - \frac{2}{9} c_1 c_2,$$

$$s = (1 - \frac{c_2^2}{9}) s + \frac{1}{9} c_1 c_2,$$

$$t = \frac{9}{9 - c_2^2} c_1 - \frac{9}{9 - c_2^2} c_2 s,$$

где $s = \frac{1}{2} (s_x + s_y)$, $t = \frac{1}{2} \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4s_{xy}^2}$.

Введя новые постоянные $k = \frac{9}{9 - c_2^2} c_1$, $\sin r = -\cos 2j = -\frac{dt}{ds}$, $2j = \frac{p}{2} + r$, условие

текучести (5) можно записать в виде

$$t = k - \sin r \cdot s. \quad (6)$$

Подставляя компоненты напряжения $s_x = s + t \cos 2y$, $s_y = s + t \cos 2y$, $s_{xy} = t \sin 2y$, где y – угол наклона наибольшей главной компоненты s_1 к оси x , в уравнения равновесия, получим систему уравнений для определения напряженного состояния в среде:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \sin r \cos 2y) \frac{\partial s}{\partial x} - \sin r \sin 2y \frac{\partial s}{\partial y} - 2(k - \sin r \cdot s) \cdot \\ (\sin 2y \frac{\partial y}{\partial x} - \cos 2y \frac{\partial y}{\partial y}) = 0, \\ - \sin r \sin 2y \frac{\partial s}{\partial x} + (1 + \sin r \cos 2y) \frac{\partial s}{\partial y} + 2(k - \sin r \cdot s) \cdot \\ (\cos 2y \frac{\partial y}{\partial x} + \sin 2y \frac{\partial y}{\partial y}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

а подставляя выражения $\mathfrak{E}_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\mathfrak{E}_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $2\mathfrak{E}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ в соотношения (3), получим систему уравнений для скоростей

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin 2y \frac{\partial u}{\partial x} - (\sin r + \cos 2y) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, \\ 2 \sin 2y \frac{\partial v}{\partial y} - (\sin r - \cos 2y) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Основная система уравнений принадлежит к гиперболическому типу, при условии

$$\left| \frac{9}{9 - c_2^2} c_2 \right| < 1.$$

Характеристики систем уравнений (7) и (8) образуют два семейства и определяются уравнениями:

$$h = y - l = \text{const}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dv} = \text{tg}(y - j), \quad (9)$$

$$x = y + l = \text{const}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dv} = \text{tg}(y + j), \quad (10)$$

где $l = -\frac{1}{2} \text{ctg} r \ln(k - \sin r \cdot s)$.

Введя новые переменные

$$\bar{x} = \frac{1}{\cos r} (x \cdot \sin(y + j) - y \cdot \cos(y + j)),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\cos r} (y \cdot \cos(y - j) - x \cdot \sin(y - j)),$$

и

$$\bar{u} = \frac{1}{\cos r} (u \cdot \cos(y - j) + v \cdot \sin(y - j)),$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\cos r} (v \cdot \sin(y + j) + u \cdot \cos(y + j)),$$

а также $\frac{Y}{\bar{y}} = \frac{X}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{t}{k}} \cos r$, $\frac{U}{\bar{u}} = \frac{V}{\bar{v}} = \sqrt{\frac{t}{k}} \cos r$, уравнения характеристик могут быть преобразованы к виду

$$h = y - l = \text{const}, \quad dY = -\frac{X}{\cos r} dy, \quad dU = \frac{V}{\cos r} dy, \quad (11)$$

$$x = y + l = \text{const}, \quad dX = \frac{Y}{\cos r} dy, \quad dV = -\frac{U}{\cos r} dy. \quad (12)$$

Для изотропного тела диссипативная функция имеет вид [1]:

$$D = s_1 e_1 + s_2 e_2.$$

Согласно ассоциированному закону течения (3) имеем выражения для скоростей деформации

$$e_1 + e_2 = (e_1 - e_2) \sin r$$

и диссипативную функцию

$$D = 2kg_{\max} \geq 0, \quad g = \frac{1}{2}(e_1 - e_2),$$

где g_{\max} – максимальная скорость сдвига, которая связана с полями линий скольжения и скоростей соотношением

$$g_{\max} = \frac{1}{\cos r} \left(\frac{1}{R_x} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \sin r + \frac{\bar{u}}{2} \cos r \right) + \frac{1}{R_h} \left(-\frac{\partial \bar{v}}{\partial h} \sin r + \frac{\bar{v}}{2} \cos r - \frac{\partial \bar{u}}{\partial h} \right) \right).$$

2. Определение полей деформации.

А. Соотношения на поверхности разрыва скоростей перемещения

Будем описывать движение среды в форме Эйлера $x_i^0 = x_i^0(x_1, x_2, x_3)$, где x_i^0 , x_i , соответственно, лагранжевы и эйлеровы координаты частиц среды.

Выберем в качестве меры деформации тензор конечных деформаций Альманси:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0). \quad (13)$$

Деформирование материала в окрестности разрыва поля скоростей перемещений рассматривались в работах [5,6], при этом предполагалось, что материал пластически несжимаемый. Ниже данный подход обобщается на случай сжимаемого пластического тела.

Пусть поверхность Σ является поверхностью разрыва поля скоростей перемещений, которая распространяется с нормальной скоростью G .

Функции $x_i^0 = x_i^0(x_1, x_2, x_3)$, предполагаются непрерывными, производные на поверхности Σ должны удовлетворять согласно [3], следующим геометрическим и кинематическим условиям совместности:

$$[x_{i,j}^0] = I_i n_j, \quad \left[\frac{\partial x_i^0}{\partial t} \right] = I_i G, \quad (14)$$

где $[x_{i,j}^0] = x_{i,j}^{0+} - x_{i,j}^{0-}$, n_i – компоненты вектора нормали к поверхности Σ , I_i – некоторые функции, определенные на поверхности разрыва. Индексы «+» и «-» обозначают определенную сторону поверхности Σ .

Вдоль каждой траектории материальной частицы лагранжевы координаты постоянны, поэтому

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} = 0.$$

Отсюда $\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = - \left[V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} \right]$, или учитывая первое соотношение (14) получим:

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = -[V_j] - I_j V^{n+}. \quad (15)$$

Представим вектор разрыва скорости перемещений в виде: $[V_j] = [V_t] t_j + [V_n] n_j$, где t_j – компоненты вектора касательной к поверхности разрыва, $[V_t]$ – модуль разрыва ка-

сательной компоненты скорости, $[V_n]$ – модуль разрыва нормальной компоненты скорости.

Сравнивая правые части (14) и (15), получим

$$I_i = -\left(\frac{[V_t]k_i}{G+V^{n+}} + \frac{[V_n]n_i}{G+V^{n+}}\right),$$

$$[x_{i,j}] = -\left(\frac{[V_t]k_i}{G+V^{n+}} + \frac{[V_n]n_i}{G+V^{n+}}\right)n_j.$$

Здесь принято $G_i = -Gn_i$, т.е. вектор G_i направлен против вектора n_i .

Рассмотрим выражение

$$[x_{i,j}]S_{ij} = -\left(\frac{[V_t]k_i n_j S_{ij} dt}{(G+V^{n+})dt} + \frac{[V_n]n_i n_j S_{ij} dt}{(G+V^{n+})dt}\right),$$

где dt – бесконечно малый интервал времени. Здесь первое слагаемое представляет работу касательных к поверхности Σ сил, затраченных на сдвиговые деформации объема $(G+V^{n+})dt$ проходящего через поверхность разрыва. Второе слагаемое – работа нормальных к поверхности Σ сил затраченных на изменение объема среды.

Введем локальную систему координат связанную с ортами n_i, t_i . Введем обозначение

$$W_1 = \frac{[V_t]}{G+V^{n+}}, W_2 = \frac{[V_n]}{G+V^{n+}}, \quad (16)$$

соответственно, объемные плотности энергии сдвиговых и объемных деформаций.

Тензор градиентов деформаций можно представить в виде

$$[x_{i,j}^0] = \begin{bmatrix} 0 & -W_1 \\ 0 & -W_2 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что ниже поверхности Σ материал недеформирован т.е. $x_{i,j}^0 = d_{ij}$, тогда компоненты тензора конечных деформаций Альманси (13) могут быть представлены в виде:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_1 & 1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2 \end{bmatrix}.$$

Угол q между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к поверхности разрыва скоростей, его основные инварианты вычисляются через W_1 и W_2 по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2q &= \frac{2E_{12}}{E_{11} - E_{22}} = \frac{-2W_1}{1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2}, \\ I_E &= \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}) = \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2), \\ II_E &= (E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2 = \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2)^2 + W_1^2, \\ E_{1,2} &= \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2)^2 + W_1^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если материал до пересечения поверхности Σ деформировался, то общие деформации будут определены следующим образом:

$$\frac{\partial x_i^{0+}}{\partial x_j} = (d_{ik} - (W_1 t_i + W_2 n_i) n_k) \frac{\partial \bar{x}_k^{0-}}{\partial x_j}. \quad (18)$$

Б) Деформации в окрестности центра веера характеристик

Для исследования поля деформаций в окрестности центра веера характеристик используется равенство производной Коттер-Ривина по времени от тензора конечных деформаций Альманси и тензора скоростей деформации

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} v_k + E_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = e_{ij}. \quad (19)$$

Рассматривается случай веера характеристик h . Тогда при стремлении к нулю радиуса кривизны R_x характеристики x , система уравнений (19) перейдет в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x} + A(e - \frac{1}{2}) + Bg \cos 2(q - y) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} + B(e - \frac{1}{2}) \cos 2(q - y) + Ag &= 0, \\ 2g \frac{\partial q}{\partial x} - B(e - \frac{1}{2}) \sin 2(q - y) - Cg &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Здесь

$$e = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}), \quad g = \frac{1}{2} \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2},$$

$$A = \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \sin r - \frac{\bar{v}}{2} \cos r}{(\bar{u} + \bar{v} \sin r - a' \sin(y + j) + b' \cos(y + j))},$$

$$B = \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \sin r + \frac{\bar{u}}{2} \cos r}{\cos r (\bar{u} + \bar{v} \sin r - a' \sin(y + j) + b' \cos(y + j))},$$

$$C = \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \cos r + \frac{\bar{v}}{2} \sin r + \frac{\bar{u}}{2}}{\cos r (\bar{u} + \bar{v} \sin r - a' \sin(y + j) + b' \cos(y + j))},$$

где $y = \frac{1}{2}(x + h_0)$ – угол наклона первого главного направления тензора скоростей деформаций к оси x , $x = a(t)$, $y = b(t)$ – уравнения движения центра веера характеристик.

Величины, описывающие изменение деформаций определяются следующим образом:

$$E_1 = e + g, \quad q = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-2W_1}{1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2} \right) \quad (21)$$

Кратность изменения объема частиц в результате деформации выражается в виде

$$\frac{V_0}{V} = \sqrt{(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)}.$$

3. Волочение полосы сквозь короткую матрицу.

Рассмотрим волочение полосы сквозь жесткую матрицу в предположении, что матрица имеет небольшую длину, а пластическая область показана на рис. 1.

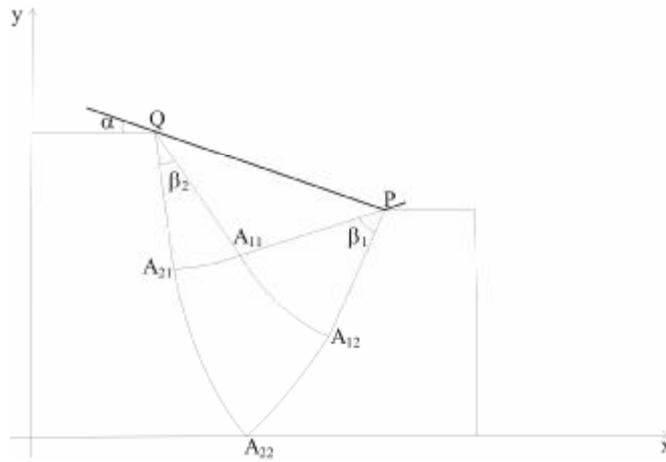


Рис. 1.

Запишем граничные условия рассматриваемой задачи [2], для верхней полосы, считая, что вдоль контактной прямой действует равномерно распределенное давление q .

Вдоль оси x компоненты $t_{xy} = 0$, $v = 0$ и $y = 0$, $Y = X$, $V = U$, а вдоль контактной прямой, компоненты $s_n = -q$, $t_{nt} = 0$ и $v_n = 0$, так что

$$y = -a, \quad s = \frac{k - q}{1 + \sin r}, \quad U = V.$$

Обозначим координаты точки P через x_1 и y_1 , а координаты точки Q через x_2 и y_2 .

Относительное обжатие полосы r определяется следующим соотношением:

$$r = 1 - \frac{y_1}{y_2}.$$

В области $PA_{11}Q$ возникает простейшее поля напряжений, так что $s = \frac{k-q}{1+\sin r}$, $y = -a$, а сетка линий скольжения образована двумя изогональными семействами параллельных прямых.

В областях $A_{11}PA_{12}$ и $A_{11}QA_{21}$ плоскости течения имеют место соотношения:

$$s = \frac{1}{\sin r} \left(k - \frac{k+q \sin r}{1+\sin r} e^{-2igr(y+a)} \right)$$

в области $A_{11}PA_{12}$,

$$s = \frac{1}{\sin r} \left(k - \frac{k+q \sin r}{1+\sin r} e^{2igr(y+a)} \right)$$

в области $A_{11}QA_{21}$, а сетка линий скольжений состоят из пучков прямых, проходящих через точки P и Q , а также из семейств логарифмических спиралей, параметрические уравнения которых имеет вид

$$\begin{cases} x = x_1 + Ce^{igr(y+a)} \cos(y+j), \\ y = y_1 + Ce^{igr(y+a)} \sin(y+j), \end{cases} \quad (22)$$

для области $A_{11}PA_{12}$ и

$$\begin{cases} x = x_2 + De^{-igr(y+a)} \cos(y-j), \\ y = y_2 + De^{-igr(y+a)} \sin(y-j), \end{cases} \quad (23)$$

для области $A_{11}QA_{21}$. Для $A_{11}A_{12}$ и $A_{11}A_{21}$ константы $D = -C = \frac{y_2 - y_1}{2 \sin a \cos j}$.

По данным (22) и (23) вдоль характеристик $A_{11}A_{12}$ и $A_{11}A_{21}$, может быть построено решение второй краевой задачи в области $A_{11}A_{12}A_{22}A_{21}$ для уравнений координат (11) и (12).

Вдоль линий характеристик $A_{11}A_{12}$ и $A_{11}A_{21}$ имеют место соотношения между s и y

$$s = \frac{1}{\sin r} (k - e^{2igr y} (k - \sin r \cdot s_0))$$

и

$$s = \frac{1}{\sin r} (k - e^{-2igr y} (k - \sin r \cdot s_0)),$$

где s_0 – давление в точке A_{22} .

Так как в точках A_{12} и A_{21} углы $y = -a + b_1$ и $y = -a - b_2$, то параметры s_0 , b_1 и b_2 связаны следующим образом:

$$q = \frac{1}{2 \sin r} ((1 + \sin r)(k - \sin r \cdot s_0)(e^{2igr(a+2b_2)} + e^{-2igr(a-2b_1)}) - 2k)$$

и $a = b_1 - b_2$.

Сила натяжения py_1 и один из углов b_1 и b_2 определяется из двух условий: равенства нулю суммы проекций на горизонтальную ось всех сил, действующих вдоль линии $QA_{21}A_{22}$ и нахождения точки A_{22} на оси симметрии.

Для определения поля скоростей будем считать, что части полосы справа от линии скольжения $PA_{12}A_{22}$ и слева от линии скольжения $QA_{21}A_{22}$ остаются жесткими и движутся со скоростями u_1 и u_2 .

Вдоль линии скольжения имеют место проекции скорости

$$\bar{u} = \frac{u_1 \cos(\gamma - j)}{\cos r}, \quad \bar{v} = \frac{u_1}{\cos r} \cos(\gamma + j) + \frac{\cos j}{\cos r} (u_2 - u_1) e^{-tg r \gamma}, \quad (24)$$

а вдоль линии скольжения

$$\bar{v} = \frac{u_2 \cos(\gamma + j)}{\cos r}, \quad \bar{u} = \frac{u_2}{\cos r} \cos(\gamma - j) + \frac{\cos j}{\cos r} (u_1 - u_2) e^{tg r \gamma}. \quad (25)$$

В области $A_{11}A_{12}A_{22}A_{21}$ может быть найдено решение уравнений (11) и (12) для скоростей по данным (24) и (25), а затем определить скорости в центрированных полях и в области $PA_{11}Q$.

Так как с течением времени площадь пластической области не изменяется, то имеет место равенство

$$\oint (v_n + G) ds + \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (26)$$

Здесь $G = 0$ – нормальная скорость распространения линий разрыва, v_n – нормальная компонента скорости, причем

$$v_n = -u_2 \sin(\gamma - j) + \cos j \operatorname{tg} r (u_1 - u_2) e^{tg r \gamma}$$

вдоль линии $QA_{21}A_{22}$,

$$v_n = -u_1 \sin(\gamma + j) - \cos j \operatorname{tg} r (u_2 - u_1) e^{-tg r \gamma}$$

вдоль линии $PA_{12}A_{22}$ и $v_n = 0$ вдоль контактной прямой PQ .

Соотношение (26) устанавливает связь между горизонтальными скоростями u_1 и u_2 правой и левой жестких частей полосы.

Построенное решение справедливо пока $b_1 \geq 0$ и $b_2 \geq 0$.

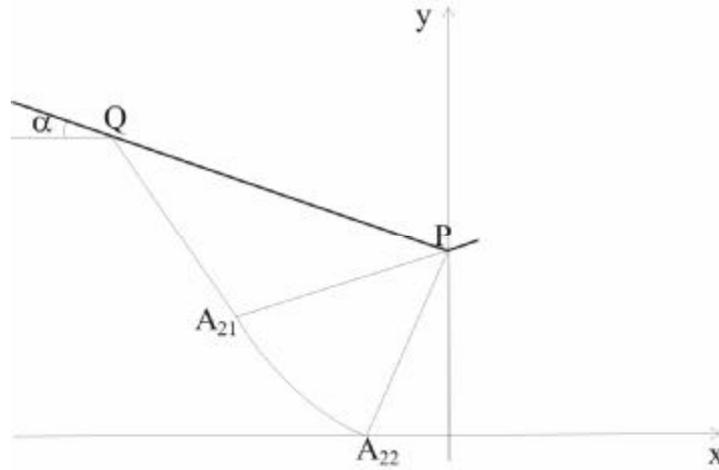


Рис. 2.

В частном случае, когда $b_2 = 0$ (рис. 2), можно получить решение в замкнутой форме:

$$q = \frac{1}{\sin r} ((1 + \sin r)(k - \sin r \cdot s_0) e^{2tgra} - k),$$

$$p = \frac{2k \sin a ((1 + \sin r) \sin j e^{2tgra} - \cos j \cos r)}{\sin r \sin j e^{tgra} (\cos r + 2 \sin a (1 + \sin r) e^{tgra})}$$
(27)

Между углом a и обжатием r выполняется соотношение

$$r = \frac{2 \sin a}{2 \sin a + tgj e^{tgra}}.$$
(28)

Соотношение (28) определяет максимальное обжатие r полосы, допустимое при решении поставленной задачи. Графики для максимального обжатия r при $r = 0^\circ$ (сплошная линия) и $r = -10^\circ$ (пунктирная линия) в зависимости от угла наклона матрицы a представлены на рис. 3.

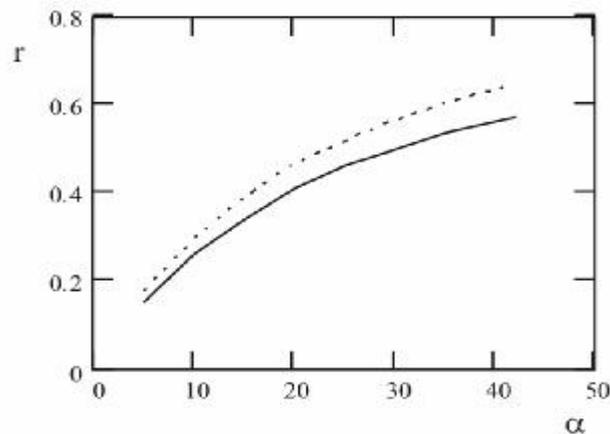


Рис.3.

Скорости u_1 и u_2 , будут связаны следующим образом

$$u_2 = \frac{u_1 e^{-tgr a}}{2 \sin \operatorname{atg} j + e^{-tgr a}}. \quad (29)$$

Исследуем распределение деформаций в различных точках пластической области: на линии разрыва скоростей перемещений $QA_{21}A_{22}$, PA_{22} и в окрестности центра веера характеристик $A_{21}PA_{22}$ для случая $b_2 = 0$. Учитывая соотношения (24) и (25), разрыв касательной и нормальной компонент скорости будут следующие:

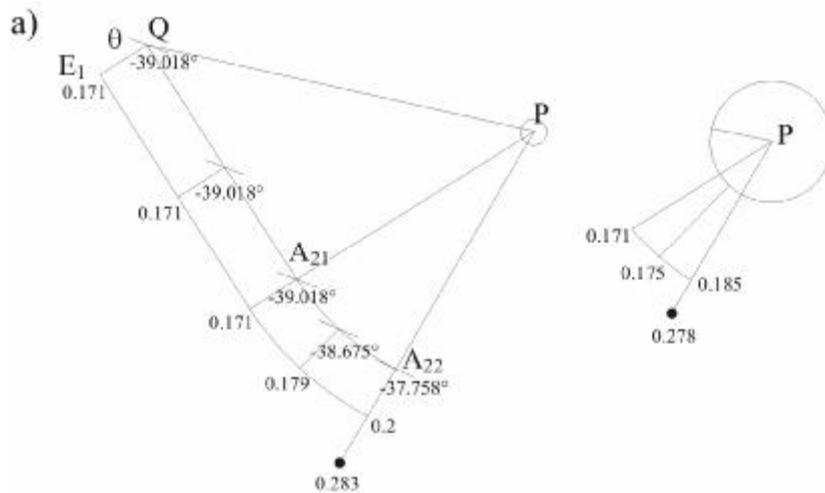
$$\begin{aligned} [v_t] &= \cos j (u_1 - u_2) e^{tgr y}, \\ [v_n] &= \cos j tgr r (u_1 - u_2) e^{tgr y}, \end{aligned} \quad (30)$$

на линии $QA_{21}A_{22}$,

$$\begin{aligned} [v_t] &= \cos j (u_1 - u_2), \\ [v_n] &= \cos j tgr r (u_2 - u_1), \end{aligned} \quad (31)$$

на линии PA_{22} .

Соотношения (17), (30) и (31) позволяют определить распределение деформаций на линиях разрыва скоростей перемещений. Распределение деформаций в окрестности центра веера характеристик определяются из системы уравнений (20), с начальными условиями полученными на линии QA_{21} . Отметим, что частица попадающая в пластическую область деформируется два раза. Первый раз деформируется при переходе линии разрыва $QA_{21}A_{22}$, второй раз через линию разрыва PA_{22} . В этом случаи общие деформации подсчитываются с использованием соотношений (18) и (20).



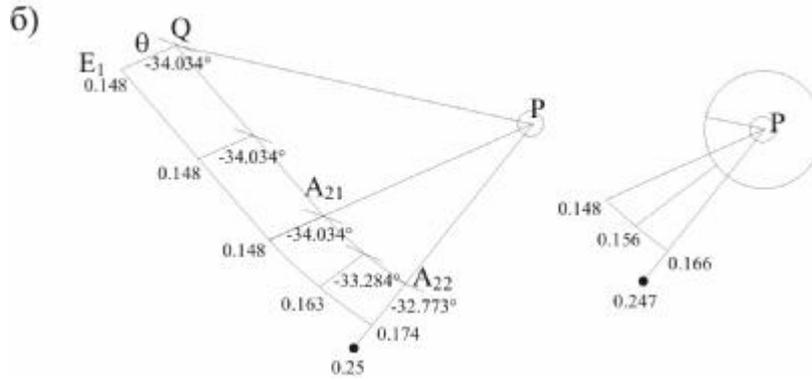


Рис. 4.

Ниже получено решение задачи для $k=1$, $r=0^\circ$ (несжимаемый материал) и $r=-10^\circ$. На рис.4 ($r=0^\circ$ соответствует рис.4(а), $r=-10^\circ$ соответствует рис.4(б)) показано распределение деформаций на линиях $QA_{21}A_{22}$, PA_{22} и в окрестности центра веера характеристик для угла наклона матрицы $\alpha = 15^\circ$.

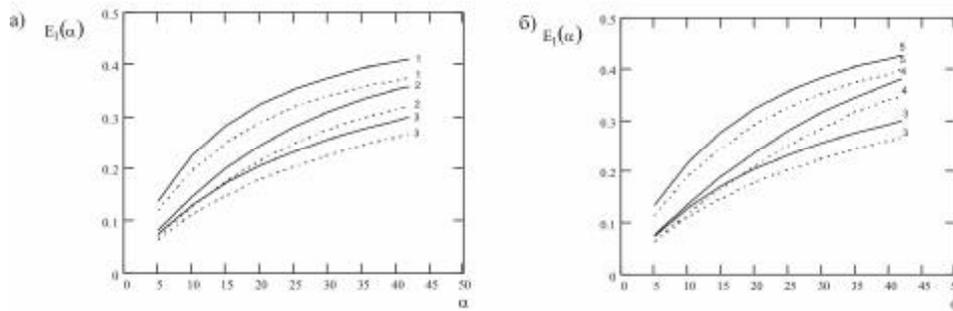


Рис 5.

На рис.5 представлены графики $E_1(\alpha)$ изменения деформаций в окрестности особенностей поля линий характеристик для $r=0^\circ$ (сплошная линия) и $r=-10^\circ$ (пунктирная линия). На рис. 5(а) представлено распределение деформаций на линиях разрыва PA_{22} и $QA_{21}A_{22}$: при переходе через точку A_{22} происходит скачок деформаций (линия 1). Деформации на линии $QA_{21}A_{22}$ изменяются от значений на линии 3 до значений на линии 2. Таким образом, деформации при движении частиц вдоль линии жесткопластической границы от точки Q увеличиваются. При увеличении угла α наклона матрицы деформации также увеличиваются.

На рис. 5(б) представлено распределение деформаций в окрестности центра веера характеристик $A_{21}PA_{22}$: до попадания в веер частица получает начальные значения на линии 3 (QA_{21}), при движении в веере частица деформируется до линии 4. Линия 5 отображает скачок деформаций при переходе через линию разрыва PA_{22} .

Сравнивая графики рис.5(а) и рис.5(б), можно сделать вывод: для $r = 0^\circ$, до угла $a \approx 21^\circ$ наибольшие деформации наблюдаются в окрестности точки A_{22} , при $21^\circ < a \leq 42^\circ$ в окрестности центра веера характеристик (с учетом перехода линии разрыва PA_{22}); для $r = -10^\circ$, до угла $a \approx 18^\circ$ наибольшие деформации наблюдаются в окрестности точки A_{22} , при $18^\circ < a \leq 42^\circ$ в окрестности центра веера характеристик.

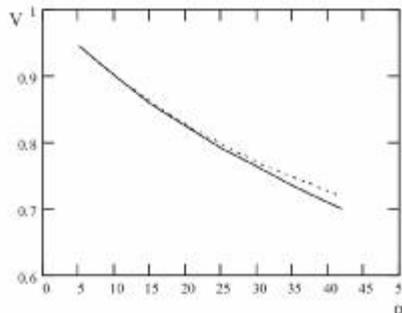


Рис. 6.

На рис. 6 представлен график изменения объема V частицы ($V_0 = 1$ - объем частицы до попадания в пластическую область) на выходе из пластической области в окрестности точки A_{22} (сплошная линия) и в окрестности центра веера характеристик (пунктирная линия), для $r = -10^\circ$ в зависимости от угла наклона матрицы a .

Диссипативная функция

$$D = \frac{2k}{R_x \cos r^2} \cos j (u_1 - u_2) e^{tgr} > 0.$$

В задаче о волочении полосы сквозь короткую матрицу при $r = -10^\circ$ происходит уплотнение материала.

г. Комсомольск-на-Амуре

Поступила: 18 июля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности. / Д. Д. Ивлев // М.: Наука, 1966. – 232 с.
2. Соколовский, В. В. Теория пластичности. / В. В. Соколовский // М.: Высш. Школа, 1969. – 608 с.
3. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. / Т. Томас // М.: Мир, 1964. – 308 с.
4. Хилл, Р. Математическая теория пластичности. / Р. Хилл // М.: Изд-во. иностр. лит., 1956. – 529 с.
5. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. / А. И. Хромов // Владивосток: Дальнаука, 1996. – 181 с.
6. Хромов А.И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел / А. И. Хромов // Докл. РАН. – 1998. – Т 362.– №2. – С. 202-205.