ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 3 • 2007

Багдоев А. Г., Варданян А. В., Варданян С. В., Сафарян Ю. С.

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

(Институт механики НАН Армении)

Определение фундаментального решения для линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами в окрестности характеристического коноида или по терминологии механиков, одномерного по нормали к волне линейного лучевого решения дано в [1-4]. Ничего другого в этой теории математиками не исследовалось. Для сплошных сред механиками даются более простые соотношения для лучевого решения [5-9]. Двумерное решение в окрестности точки касания распространяющейся волны с точечной волной, характерное в задачах дифракции акустических и оптических волн на клине и конусе в однородной среде [10-13], дано для произвольной гиперболической линейной системы уравнений с переменными коэффициентами в [14]. Однако, все эти линейные решения в окрестности точечной волны имеют особенность и непригодны. Для ее устранения Лайтхиллом и Уиземом [15,16] в одномерных задачах о цилиндрических и сферических нелинейных волнах был развит метод построения равномерно точного решения в окрестности волны с устранением особенности линейного решения, который в [17] был назван методом Пуанкаре-Лайтхилла-Го.

В [18] были выведены для указанных выше двумерных волновых задач уравнения коротких волн и даны их частные решения, выбором постоянных в которых с какой-то точностью удается удолетворить условиям на слабых ударных волнах. Все эти решения относились к однородной сжимаемой жидкости. В [19,14] была дана для указанной задачи газовой динамики связь метода ПЛГ [17] и метода коротких волн [18], а затем и для общего случая квазилинейной гиперболической системы с переменными коэффициентами и построено нелинейное решение дифракционных задач в окестности точек касания волн, сращиваемое с линейным решением, т.е. равномерно точное двумерное нелинейное решение. При этом оказалось, что это решение удовлетворяет с большой точностью условиям на ударных волнах [19,20]. Эти решения имеют приложения к газовой динамике, магнитной газодинамике, магнитоупругости. Уравнения коротких волн в газовой динамике [8], в физике именовались эволюционными уравнениями [21], разумеется, без взаимных ссылок. В [6,22] выведены для общего случая нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды уравнения коротких волн. В [23] получены для осессиметричных квазимонохроматичных гауссовских пучков решения уравнений модуляций, выведенные из указанных уравнений коротких волн или, иначе, эволюционных уравнений, причем эти решения обобщают известное решение нелинейной оптики, полученное в [24] для случая действительности коэффициента кубической нелинейности на случай его комплексности. В [25,26] выведены эволюционные уравнения в случае двух нелинейных квазимонохроматических волн и, обобщая идеи работ [27,28], показано, что можно складывать решения для отдельных волн и получать для них раздельные эволюционные уравнения. Эти уравнения в случае магнитной газодинамики применены в [30] для излучения волн в магнитных звездах. Следует отметить, что, в отличие от земных условий, в пульсарах [30] имеют место большие магнитные поля, при этом скорость Альфвена соизмерима со скоростью света и вряд ли стандартные уравнения Максвелла применимы. В связи с этим, в [31] дан пример обобщения уравнений магнитной газодинамики на случай учета видоизмененного тока смещения, таким образом, что окончательные уравнения, также как и применяемые обычно уравнения магнитной газодинамики и магнитоупругости [6,30], были бы инвариантны относительно преобразования Галилея, что является естественным свойством нелинейных уравнений, по крайней мере, механики. В настоящей статье выводятся эти уравнения для аналогичной нелинейной задачи магнитоупругости. Далее они применяются к задачам об двух гауссовых пучках, распространяющихся в пульсарах, причем, в отличие от [30], для очень больших частот учтен также указанным образом ток смещения, Следует отметить, что для упругой нелинейной среды одномерные цилиндрические и сферические задачи с ударной волной изучены в [29,32].

1. Основным аргументом создания специальной теории относительности было положение о том, что линейные уравнения Максвелла инвариантны относительно более общих преобразований Лоренца в противоположность нелинейным уравнениям механики, которые инвариантны относительно более частных преобразований Галилея, и поэтому нужно приспособить уравнения механики к этим более общим преобразованиям, Следуя этой логике, нужно предпочитать общим нелинейным уравнениям гидромеханики, инвариантным относительно преобразований Галилея, полученное из них после линеаризации для малых возмущений волновое уравнение, инвариантное относительно более общего преобразования Лоренца. Конечно же, никто не станет настаивать на это.м. Тогда возникает вопрос, не лучше ли вывести такие обобщения уравнений Максвелла, выведенных им для земных условий для относительно небольших электромагнитных полей по сравнению с огромной скоростью света, и написать нелинейные уравнения Максвелла, которые по аналогии с указанным примерам, удовлетворяют более частным, но более естественным преобразованиям Галилея. Между прочим, уравнениями такого типа являются уравнения магнитной гидродинамики или магнитоупругости [6], состоящие из уравнений Максвелла для движущейся среды [35,36]

$$\overline{D} = e\overline{E},\ rot\overline{H} = \frac{4p}{c}\,\bar{j} + \frac{e}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t},\ \ rot\overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t},\ \ \overline{B} = \overline{H}\ , \tag{1.1}$$

где плотность тока связана с законом Ома

$$\bar{j} = s\overline{E}' = s\left(\overline{E} + \frac{\bar{v}x\overline{B}}{c}\right) \tag{1.2}$$

совместно с уравнениями движения плазмы

$$r\frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{\bar{j}x\overline{B}}{c} \tag{1.3}$$

или магнитоупругой среды

$$r\frac{d\bar{v}}{dt} = div\Sigma + \frac{\bar{j}x\overline{B}}{c}\,, \tag{1.4}$$

записанных в эйлеровых координатах, Σ есть эйлеров тензор напряжений. Для не очень быстро меняющихся во времени процессов или (что то же самое) не очень больших частот, $w << s$, слагаемыми с током смещения в (1.1) можно пренебрегать и в результате исключения $\overline{E}$ получится из (1.1), (1.2) уравнение индукции

$$\frac{d\overline{B}}{dt} = \left(\overline{B}\nabla\right)\overline{v} - \overline{B}div\overline{v} + \frac{c^2}{4p s}\Delta\overline{H}\ , \tag{1.5}$$

а вместо (1.4)

$$r\frac{d\overline{v}}{dt} = div\Sigma + \frac{rot\overline{H}x\overline{B}}{4p}\ , \tag{1.6}$$

и соответственное уравнение из (1.3) при этом уравнения (1.8), (1.6) инвариантны относительно преобразования Галилея, где с той же степенью точности $\overline{H}$ можно считать инвариантом. Эти уравнения, как магнитной гидродинамики, так и магнитоупругости успешно примеялись во многих исследованиях волновых движений для случая плазмы в [30], а для магнитоупругой среды в [6], в первом случае, в применении к нелинейным волнам в пульсарах, где имеются большие частоты w, большие электропроводности s и большие магнитные поля, причем в [30] считалось $w << s$ и пренебрегалось током смещения. В указанных условиях скорость Альфвена имеет порядок скорости света.

В случае $w - s$, например для магнитных звезд [30], где $w \sim 10^{14}\frac{1}{сек}$, мы имеем необходимость также учесть токи смещения в уравнениях магнитной гидродинамики и магнитоупругости, учесть нелинейность для рассматриваемых больших магнитных полей, т.е. написать нелинейные уравнения Максвелла. В качестве примера учета тока смещения в нелинейных уравнениях (1.1)-(1.4), которые должны быть видоизменены так, чтобы удовлетворять условию инвариантности относительно преобразований Галилея, подобно (1.5), (1.6), мы можем заменить ток смещения в (1.1) на $\frac{1}{c}\frac{d\overline{D}}{dt}$, $\overline{D} = e\overline{E}'$, где производная по времени берется для движущейся частицы. Тогда системы (1.1)-(1.4) снова будут инвариантны относительно преобразований Галилея, где $\overline{E}'$ является параметром, который может быть исключен, подобно (1.5). С учетом исправленного тока смещения мы имеем уравнения движущейся электропроводящей среды в форме, исправленной указанным образом, системы (1.1)-(1.4), где $\overline{D} = e\overline{E}'$, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\overline{v}\nabla\right)$. Чтобы упростить систему уравнений, можно сделать итерацию в первом уравнени

$$s\overline{E}' = \frac{c}{4p}rot\overline{H} - \frac{e}{4p s}\frac{d}{dt}\frac{c}{4p}rot\overline{H}\ . \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.2), получим уравнение индукции с учетом тока смещения

$$\frac{d\overline{B}}{dt} = \left(\overline{B}\nabla\right)\overline{v} - \overline{B}div\overline{v} + \frac{c^2}{4p s}\left(1 - \frac{e}{4p s}\frac{d}{dt}\right)\Delta\overline{H}\ , \tag{1,8}$$

где учтено, что $div\overline{H} = 0,\ rotrot\overline{H} = -\Delta\overline{H}$.

Учитывая, что в распространяющихся волнах $\frac{d}{dt} \sim w,\ \nabla \sim \frac{w}{c_n}$, где c_n есть скорость волны, из (1.8) можно получить порядки

$$w \sim s\ ,\ v \sim c_n,\ c_n \sim c,\ E \sim H,\ a_1 \sim c\ , \tag{1.9}$$

где $a_1 = \dfrac{H}{\sqrt{4pr}}$ есть скорость Альфвена. Очевидно, что те же порядки (1.9) будут иметь место и для неупрощенной системы уравнений

$$rot\overline{H} = \frac{4p}{c} s\overline{E}' + \frac{e}{c}\frac{d\overline{E}'}{dt},\ \overline{E}' = \overline{E} + \frac{\overline{v}x\overline{B}}{c}, \tag{1.10}$$

$$rot\overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\overline{B}}{dt},\ \bar{j} = s\overline{E}',\ \overline{B} = \overline{H}, \tag{1.11}$$

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{1}{r} div\Sigma + \frac{1}{rc}\bar{j}x\overline{B}. \tag{1.12}$$

Система (1.10)-(1.12) описывает движение магнитоупругой среды в больших магнитных полях и с большими скоростями и упругими напряжениями, и инвариантна относительно преобразований Галилея. Такая же система для плазмы была выведена в [31]. Разумеется, ее следует рассматривать как пример возможного изменения уравнений Максвелла для движущихся сред при больших полях с учетом нелинейности, и эти уравнения инвариантны относительно преeобразований Галилея.

1. Применим теперь полученные обобщенные уравнения магнитоупругой среды (1,10)-(1,12) к нелинейным волнам в магнитных звездах [5,6]. Для этого следует вывести нелинейные эволюционные уравнения магнитоупругой среды. Это можно сделать при произвольных ориентациях невозмущенного магнитного поля $\overline{H}_0$ [30]. Выберем ось x по напрявлению распространения квазилинейной волны в слое $0 < x < l$, оси y, z перпендикулярны ей, причем для простоты считается для невозмущеного поля $H_{0x} = 0,\ H_{0z} = 0,\ H_{0y} = H_0$. Компоненты частиц по осям x, y, z будут обозначаться u_x, u_y, u_z. Записывая нелинейные уравнения движения термомагнитоупругой среды, считая возмущения параметров малыми, можно для нормальной скорости линейной волны получить уравнение подобно [6].

$$c_n^4 - c_n^2\left(\overline{a}^2 + b^2 + a_1^2\right) + \left(\overline{a}^2 - b^2\right)\frac{H_n^2}{4\pi\rho_0} + b^2\left(\overline{a}^2 + a_1^2\right) = 0, \tag{2.1}$$

где $\overline{a}^2 = a^2 + \dfrac{g_0^2 T}{r_0^2 c_0}$, a, b – скорости упругих волн, T – температура, c_0 – теплоемкость, g_0 – термический коэффициент, $\overline{a}_1^2 = \dfrac{H_0^2}{4pr_0}, H_n = \dfrac{H_0 b}{a}$,

где (a, b, g) есть волновой вектор, причем

$$b \approx 0,\ g \approx 0,\ a \approx \frac{1}{c_{n_0}},\ c_{n_0} = \sqrt{\overline{a}^2 + a_1^2}.$$

Из (2.1) можно, учитывая, что $a^2 + b^2 + g^2 = \dfrac{1}{c_{n_0}}$, получить

$$\frac{\partial^2 a}{\partial b \partial g} = 0,\ \frac{\partial^2 a}{\partial g^2} = -c_{n_0},\ \frac{\partial^2 a}{\partial b^2} = -c_{k_0}\left(1 - \frac{a_1^2}{c_{n_0}^2}\frac{\overline{a}^2 - b^2}{\overline{a}^2 + a_1^2 - b^2}\right). \tag{2.2}$$

(2.2) представляют коэффициенты поперечного оператора [2] эволюционного уравнения

$$\overline{L} = c_{n_0}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial b^2}\frac{\partial^2}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial g^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 a}{\partial b \partial g}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\right). \tag{2.3}$$

Для квазимонохроматических волн в слое [25] можно и для нелинейного случая для высокочастотной асимптотики провести осреднение по фазам прямой и обратной волны [26], при этом получаются раздельные для них эволюционные уравнения [30]. Можно ввести быстрые переменные для волн

$$t_{1,2} = t'_{1,2} - t,\ t'_{1,2} = \frac{l \pm x}{c_k}, \tag{2.4}$$

где $t_{1,2}$ есть эйконалы волн, $x = l$ есть граница слоя, на которой задано падающее возмущение в форме, нормальной к волне скорости частицы, в виде осесимметричного гауссового пучка с осью x. При $x = 0$ на правой границе звезды, свободной от напряжений, в основном порядке имеет место

$$u = v_x,\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u = u_1(t_1, y, z, t) + u_2(t_2, y, z, t). \tag{2.5}$$

Эволюционые уравнения будут для $u_{1,2}$ раздельными [5,6,7]

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t \partial t_{1,2}} - \frac{1}{2}\overline{L}(u_{1,2}) - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t_{1,2}}\frac{d \ln f}{dt} = -\frac{1}{c_k}\frac{\partial}{\partial t_{1,2}}\left(\Gamma u_{1,2}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial t_{1,2}} + D\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t_{1,2}^2} + E\frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial t_{1,2}^3}\right). \tag{2.6}$$

Для случая магнитоупругой среды в указанном начальном поле $(0, H_0, 0)$ из уравнений движения и индукции в нелинейном случае можно получить [6] коэффициенты нелинейности, диссипации и дисперсии в (2.6)

$$\begin{gathered}\Gamma = \frac{3}{2}\left(c_{n_0}^2 - b^2\right)a_1^2 - \frac{1}{r_0}\left(A + 3B + C + \frac{3}{2}l + 3m\right)\left(c_{n_0}^2 - b^2\right) + \\ + \frac{c g_0 c_{n_0}^2}{2 r_0}\left(c_{n_0}^2 - b^2\right) - \frac{x'_0 c_{n_0}}{2}\left(c_{n_0}^2 - b^2\right),\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{c}{T} = -\frac{1}{c_0 c_{n_0}^2}\left(2 g_0 - n_1 + \frac{2 n_3 T g_0}{c_0} + \frac{g_0^2}{c_0}\right); \\ x'_0 = 2\left(\frac{g_0 - n_1}{c_{n_0}^2}\frac{g_0 T}{c_0} + n_3\frac{g_0^2 T^2}{c_0 c_{n_0}^2}\right)\frac{c_{n_0}}{r_0}.\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$2DD_1 = c_{n_0}^2\left(c_{n_0}^2 - b^2\right)\frac{l^{(1)} + 2 l^{(0)}}{r_0} + a_1^2\left(c_{n_0}^2 - b^2\right)x_0 - k_1\frac{T g_0^2}{r_0^2 c_0^2}\left(c_{n_0}^2 - b^2\right), \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}2ED_1 = \frac{T g_0^2}{c_n r_0^2 c_0^2}\left(c_{n_0}^2 - b^2\right)k_1 t_0 + a_1^2 x_0, \\ D_1 = c_{n_0}^2\left(2c_{n_0}^2 - \overline{a}^2 - b^2 - a_1^2\right),\end{gathered} \tag{2.10}$$

где скорости волн $c_{n_0}, \overline{a}$ даны выше, $l^{(1)}$, $l^{(0)}$ – коэффициенты вязкости, $n_{1,3}$, x'_0 – термические коэффициенты, k_1 – теплопроводность, t_0 – термическая релаксация, c_0 – теплоемкость, r_0 – плотность, $x_0 = \dfrac{c^2}{4ps}$ есть магнитная вязкость, c – скорость света, s – электропроводность, причем в (1.8) в главных порядках

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma}\left(1 - \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\frac{d}{dt}\right)\Delta \approx \nu_m\left(1 + \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau_{1,2}}\right)\frac{1}{c_{n_0}^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau_{1,2}^2},$$

и тогда вклад от n_m, соответствующий учету тока смещения, отличается лишь множителем $\dfrac{\partial}{\partial t_{1,2}}$ от вклада n_m в D, что учтено в (2.10).

1. Из соотношений на волне в основных порядках для возмущенных параметров имеет место [30] из (2.6)

$$v_y = 0,\ h_x = 0,\ v_z = 0,\ h_z = 0,\ h_y = \mp\frac{H_y}{c_k}v_x,\ r' = \mp\frac{r}{c_k}v_x,\ P' = c_s^2 r' \tag{3.1}$$

Согласно (3.1), все возмущенные величины выражаются через $v_x = u$, а последняя определяется из эволюционного уравнения (2.6), при этом коэффициенты Γ, D, E задаются формулами (2.7), (2.8). Согласно формулам (2.2), уравнения (2.6) не допускают простых осессимметричных решений в плоскости *YZ*, однако, если ввести новые переменные

$$y = \sqrt{-\frac{\partial^2 a}{\partial b^2}c_k}\,y',\ z = \sqrt{-\frac{\partial^2 a}{\partial g^2}c_k}\,z',$$

то по координатам y', z' уравнения (2.6) допускают осесимметричные решения по “радиальной” координате, эллиптические по форме поперечного сечения в координатах y, z, причем $r^2 = y'^2 + z'^2$. В этом случае уравнения (2.6) запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t\partial t_{1,2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial r}\right) - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t_{1,2}}\frac{d\ln\Phi}{dt} = \\ = -\frac{1}{c_k}\frac{\partial}{\partial t_{1,2}}\left[\Gamma u_{1,2}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial t} + D\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t_{1,2}^2} + E\frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial t_{1,2}^3}\right].\end{gathered} \tag{3.2}$$

Всюду Φ означает линейное одномерное по координатам $t_{1,2}$ лучевое решение, которое для задачи магнитоупругости можно получить из закона сохранения энергии возмущений в волне [2].

Ищем решение уравнений (3.2) в виде квазимонохроматических и квазиплоских волн:

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}\left[U_{1,2}e^{iJ_{1,2} - nw^2 t'_{1,2}} + V_{1,2}e^{2iJ_{1,2} - 2nw^2 t'_{1,2}} + k.c.\right], \tag{3.3}$$

где $U_{1,2}$ и $V_{1,2}$ - амплитуды первой и второй гармоники соответственно, $J_{1,2} = wt_{1,2} - w't$, w - основная частота волн, w' - модулированная частота, n - затухание. Подставляя (3.2) в (3.2), можно получить:

$$w' = -\frac{1}{c_n}Ew^3,\ n = -\frac{1}{c_n}D. \tag{3.4}$$

Уравнение для амплитуд второй гармоники, при предположении $\frac{w'l}{c_k} >> 1$, дает выражение, связывающее $V_{1,2}$ с $U_{1,2}$. Исключив $V_{1,2}$ из уравнения для первой гармоники, получим нелинейное уравенеие Шредингера для определения амплитуд $U_{1,2}$ первой гармоники:

$$iw\left(\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} + c_n \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t'_{1,2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{1,2}}{\partial r}\right) - U_{1,2} iwc_n \frac{d\ln\Phi}{dt'_{1,2}} = \\ = (k_1 + ik_2)|U_{1,2}|^2 U_{1,2}, \tag{3.5}$$

где

$$k_1 = 3Ew^2 x,\ k_1 = wDx,\ x = \frac{1}{8c_n}\frac{\Gamma^2 e^{-2nw^2 t'_{1,2}}}{9E^2 w^2 + D^2}. \tag{3.6}$$

Для уравнений (3.6) стационарные решения, удовлетворяющие условию $\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} = 0$, устанавливаются тогда, когда энергия возмущений, подаваемая на левой границе $x = l$, слоя, затрачивается на диссипацию и излучение электромагнитных волн с правого конца этого слоя. При поиске стационарных решений для простоты также предположим, что $\frac{\partial \ln\Phi}{\partial t} = 0$. Как граничное условие для искомого решения на левой границе $x = l$ выбираем функцию $v_{x_1} = U_1$ для идущей направо волны в виде гауссовского пучка:

$$U_1 = K_0 e^{-\frac{r^2}{r_0^2}} e^{-iwt} e^{i\frac{r^2}{2R_1(0)}}, \tag{3.7}$$

осесимметричного по r и эллиптичного по y, z. Здесь $R_1(0)wc_n$ - есть радиус кривизны поверхности левого торца слоя. Тогда решения можно написать в виде:

$$U_{1,2} = A_{1,2} e^{ij_{1,2}},$$

где

$$A_{1,2} = \frac{b_{1,2}}{f_{1,2}(t'_{1,2})} e^{-\frac{r^2}{2r_0^2 f_{1,2}^2(t'_{1,2})}},\ j_{1,2} = s(t'_{1,2}) + \frac{r^2}{2R_{1,2}(t'_{1,2})}. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.5), приравняв члены с r^0, r^2 и действительные и мнимые части, можно получить уравнения для безразмерных радиусов пучков $f_{1,2}$, радиуса кривизны волн, и фаз $s_{1,2}$:

$$\frac{d^2 f_{1,2}}{dt'^2_{1,2}} = \frac{x_1}{f_{1,2}^3} + \frac{2nb_{1,2}^2 k_2 w}{f_{1,2}} c_n, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{f_{1,2}}\frac{df_{1,2}}{dt'_{1,2}} = -\frac{1}{w}\left(-\frac{1}{R_{1,2}} + k_2 \frac{b_{1,2}^2}{f_{1,2}^2}\right), \tag{3.10}$$

$$\frac{ds}{dt'_{1,2}} = -\frac{c_n}{w}\left(\frac{2}{r_0^2 f_{1,2}^2 c_n} + k_1 \frac{b_{1,2}^2}{f_{1,2}^2}\right), \tag{3.11}$$

где

$$x_1 = \frac{1}{r_0^4 w^2} + \frac{2b_{1,2}^2 k_1}{r_0^2 w^2} - \frac{b_{1,2}^4 k_2^2}{w^2}. \tag{3.12}$$

Граничные условия (3.7) при $x = l$ и $t'_1 = 0$ дают начальные условия для уравнения (3.9) написанное для функции f_1:

$$f_1(0) = 1,\ \frac{df_1(0)}{dt'_1} = F = -\frac{1}{w}\left(-\frac{1}{R_1(0)} + k_2 b_1^2\right),$$

где можно считать $b_1 = K_0$. Считая далее диссипацию малой, можно в уравнении (3.9) отбросить второе слагаемое в правой части и считать k_1 и k_2 постоянными. Тогда уравнение (3.9) интегрируется и получаем:

$$f_1^2 = \frac{x_1}{K} + K\left(t'_1 + \frac{F}{K}\right)^2, \tag{3.13}$$

где $K = x_1 + F^2$. Для нахождения окончательных решений необходимо задать граничное условие на правом торце слоя. Естественным условием будет требование свободной границы на поверхности звезды, т.е. при $x = 0,\ p' = 0,\ s \approx x = 0$. Это условие в силу уравнений в основном порядке [2] при $x = 0$ дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \text{ и } U_1 = -U_2. \tag{3.14}$$

Согласно (3.8)–(3.11), условие (3.14) выполняется при требовании:

$$b_1 = -b_2,\ f_2\left(\frac{l}{c_k}\right) = f_1\left(\frac{l}{c_k}\right),\ \frac{df_2}{dt'_2} = \frac{df_1}{dt'_2},\ j_1 = j_2. \tag{3.15}$$

Здесь l – продольная длина рассматриваемого слоя. Можно решить уравнение для f_2 (3.9) при условиях (3.15). Решение (3.13) для $f_{1,2}$ имеет место и для импульсных пучков, для которых

$$\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t'_{1,2}} = \left.\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t'_{1,2}}\right|_{t_{1,2}}$$

т.е. стационарное решение в системе движущейся с волной. При этом K_0 есть функция времени t.

Полученные нами решения позволяют определить интересующие нас физические параметры на правой границе слоя, т.е. при $x = 0$ или $t' = \frac{l}{c_n}$. Легко видеть, что в основных порядках $s_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = h_y = 0$, откуда следует:

$$v_x = \mathrm{Re}\,V_x,\quad j_z = -\frac{c}{4p}\frac{\partial h_y}{\partial x} = \mathrm{Re}\,J_z, \tag{3.16}$$

где

$$|V_x| = \frac{2b_1 c_n}{f\left(\frac{l}{c_n}\right)}\exp\left\{-\frac{wn^2 l}{c_n} - \frac{r^2}{2r_0^2 f^2\left(\frac{l}{c_n}\right)}\right\}, \tag{3.17}$$

$$|J_x| = \frac{c}{4p}\frac{2b_1 w H_y}{c_n^2 f\left(\frac{l}{c_n}\right)}\exp\left\{-\frac{wn^2 l}{c_n} - \frac{r^2}{2r_0^2 f^2\left(\frac{l}{c_n}\right)}\right\}. \tag{3.18}$$

Отметим, что для $\frac{w}{s} \sim 1$ в (3.6) члены $E^2 w^2$ и D^2 одного порядка и учет тока смещения существеннее в (3.3), (3.4) и далее. Как видно из (3.17), (3.18), полученные выражения для $|V_x|$ и $|J_x|$ зависят от значения амплитуды возбуждения магнитного поля на внутренней границе нейтронной звезды h_y, выражаемой через b_1 по (3.1), где $b_1 = K_0$.

Приведенные здесь эволюционные уравнения, а также и соответствующие уравнения для нелинейных волн [6], можно распространить и на волновые задачи в экономике многомерных случайных марковских диффузионных процессов [34], где в линейных уравнениях для переходной плотности вероятности P можно в коэффициенте сноса a добавить слагаемое P, что проделано в §5. Дадим вывод уравнения диффузии для функции распределения частиц разного сорта в сплошной среде при слабых взаимодействиях [37] с добавлением в линейное уравнение по аналогии с нелинейными уравнениями сплошной среды §2 дисперсионного члена и нелинейности.

1. Уравнения диффузии для функции распределения играют важную роль при изучении движения плазмы [37], магнитоупругой среды, смесей газа в облаке или двухфазных пористых сред в грунтах.

В системах с большим числом частиц разного сорта в физической кинетике рассматривается случай непрерывного взаимодействия, т.е. взаимодействие данного сорта частиц не между собой, а с дальними частицами другого сорта, или, в плазме, взаимодействие между заряженными частицами [37,38] посредством дальнодействующих кулоновых сил. Направление движения частиц меняется в основном непрерывно, тесные сближения играют лищь второстепенную роль. Поведение функции распределения в приближении непрерывного взаимодействия выводится вначале в линейном приближении Фоккера-Планка с добавлением членов с третьей производной, где аргументы f есть компоненты координат и скорости частиц $\{x_a\}$. Пусть функция распределения f зависит от набора величин x_a, совокупность которых будем обозначать символом x, и от времени t, и пусть $v(x', x, \Delta t)$ есть вероятность перехода системы из состояния x' в состояния x за время Δt. Тогда f удовлетворяет интегральному уравнению [37]:

$$f(x,t+\Delta t)=\int f(x',t)v(x',x,\Delta t)dx'. \tag{4.1}$$

Это уравнение можно преобразовать в дифференциальное уравнение, считая

$$\Delta x = x' - x \tag{4.2}$$

малым, причем v достаточно быстро спадает с возрастанием Δx. Рассматривается простейший случай, когда v зависит от x', x посредством Δx. При этом после разложения (4.1) в ряд получится:

$$\begin{gathered} f(x,t+\Delta t)= f(x,t)+\sum_a \frac{\partial f}{\partial x_a}\overline{\Delta x_a} +\frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{\partial^2 f}{\partial x_a \partial x_b}\overline{\Delta x_a \Delta x_b} + \\ +\frac{1}{6}\sum_{a,b,z}\frac{\partial^3 f}{\partial x_a \partial x_b \partial x_z}\overline{\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z}, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{gathered} \int v(\Delta x,\Delta t)d\Delta x = 1, \\ \int v(\Delta x,\Delta t)\Delta x_a d\Delta x = \overline{\Delta x_a}, \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\int v(\Delta x,\Delta t)\Delta x_a \Delta x_b d\Delta x = \overline{\Delta x_a \Delta x_b}, \tag{4.5}$$

$$\int v(\Delta x,\Delta t)\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z d\Delta x = \overline{\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z}. \tag{4.6}$$

В этих интегралах под $d\Delta x$ подразумевается интервал изменения всего набора Δx, т.е. произведение их дифференциалов (4.4), (4.5), (4.6) есть обычные определения средних значений. Из (4.3), после замены $f(x,t+\Delta t)= f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t$ получится

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial t}=\sum_a \frac{\partial f}{\partial x_a}\frac{\overline{\Delta x_a}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{\partial^2 f}{\partial x_a \partial x_b}\frac{\overline{\Delta x_a \Delta x_b}}{\Delta t}+ \\ +\frac{1}{6}\sum_{a,b,z}\frac{\partial^3 f}{\partial x_a \partial x_b \partial x_z}\frac{\overline{\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z}}{\Delta t}. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Отношения

$$A_a = -\frac{\overline{\Delta x_a}}{\Delta t},\ B_{ab} = \frac{1}{2}\frac{\overline{\Delta x_a \Delta x_b}}{\Delta t}, \tag{4.8}$$

$$C_{abz} = \frac{1}{6}\frac{\overline{\Delta x_a \Delta x_b \Delta x_z}}{\Delta t}, \tag{4.9}$$

являются коэффициентами сноса, диффузии и дисперсии. В выбранном приближении относительно v они независимы от x. Удобно (4.7) записать в форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_a \frac{\partial A_a f}{\partial x_a}-\sum_a\sum_b B_{ab}\frac{\partial^2 f}{\partial x_a \partial x_b}-\sum_a\sum_b\sum_z C_{abz}\frac{\partial^3 f}{\partial x_a \partial x_b \partial x_z}=0. \tag{4.7a}$$

Можно такое же уравнение получить [37] и для общего случая зависимости $v(x,\Delta x,\Delta t)$. Коэффициенты A_a, B_{ab}, C_{abz} являются детерминированными и постоянными. Коэффициенты A_a соответствуют скорости волнового движения [37]. Рассмотрим случай, когда f зависит только от цилиндрических координат x,r и времени, т.е. уравнение диффузии в пространстве при наличии осевой симметрии. При этом можно рассматривать в основном одномерное движение по x со слабой зависимостью от r, или пучок [23]. Тогда можно в (4.7а) считать $A_1=-a_0,\ A_2=0,\ A_3\approx 0$, где a_0 есть скорость волны для функции f, равная средней скорости частицы [37,38], и, вводя, как в §2, эйконал $t=t-\dfrac{x}{a_0}$, причем t мало, $\left|\dfrac{\partial}{\partial t}\right|>>\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_t$, можно получить упрощенное уравнение вблизи волн:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+a_0\frac{\partial f}{\partial x}+B\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)+C\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}=0, \tag{4.10}$$

где учтено, что $B_{11}=B_{22}=B_{33}=-B,\ \left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_t=-\dfrac{1}{a_0}\dfrac{\partial}{\partial t},\ -\dfrac{C_{111}}{a_0^3}=C$. В линейном уравнении (4.10) можно ввести малые возмущения $f'=f-f_0$, где в качестве $f_0(t,x)$ берется решение упрощенного уравнения линейной диффузии без члена C

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+a_0\frac{\partial f_0}{\partial x}+B\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}=0 \tag{4.11}$$

которое удовлетворяется гауссовским распределением в виде

$$f_0(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2pBt}}\exp\left\{-\frac{(x-a_0t)^2}{2Bt}\right\}, \tag{4.12}$$

причем из (4.4), (4.9) записанных в одномерном виде [34]

$$\frac{1}{\Delta t}\int v(\Delta x,\Delta t)\Delta x d\Delta x=-A_1$$

можно, полагая для вероятности v гауссовского распределения

$$v(\Delta x,\Delta t)=\frac{1}{\sqrt{2pB\Delta t}}\exp\left\{-\frac{(\Delta x-a_0\Delta t)^2}{2B\Delta t}\right\}, \tag{4.13}$$

получить [34] $A_1=-a_0$, т.е a_0 есть скорость волны или коэффициент сноса для f.

Для малых возмущений f' приближенно снова выполнено (4.10). Можно в процессах взаимодействия частиц считать, что в основном непрерывные рассматриваемые взаимодействия могут возмущаться и малыми близкими взаимодействиями, влияние которых, по аналогии с эволюционными уравнениями газовой динамики и теории упругости [6] в волновой области можно учесть зависимостью коэффициента сноса A_a от f' и записать после дифференцирования (4.10) по t,

$$a_0\left.\frac{\partial^2 f'}{\partial t\partial x}\right|_t-\frac{B}{a_0^2}\frac{\partial^3 f'}{\partial t^3}\left|+B\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 f'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f'}{\partial r}\right)+C\frac{\partial^4 f'}{\partial t^4}-\frac{g}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}f'\frac{\partial f'}{\partial t}\right|=0, \tag{4.14}$$

где, аналогично нелинейным уравнениям §2, добавлено последнее слагаемое, постоянная g должна определиться экспериментами. Уравнение (4.14) есть в точности эволюционное уравнение работ [6,23] и §2 с заменой, нормальной к волне скорости частиц в [6], на

$a_0 + \gamma f'$ и с другими обозначениями коэффициентов. Оно может решаться для одной или двух нелинейных квазимонохроматических волн с определением узких пучков, как в §2. Подобные же рассмотрения можно провести для взаимодействующих частиц твердых двух фаз в том числе и для упругопластических смесей [40].

1. Рассматриваются с помощью аналогии из соответствующих волновых задач нелинейной механики сплошной среды [6,39,29] различные нестационарные задачи о движении объектов, моделируемых сплошными средами. Вначале проводится исследование этих задач применением метода [39], где изучается движение транспорта, рассматриваемое как детерминистический поток частиц, с образованием ударной волны или затора. Методами [29] дается расчет ударных волн. Затем эти результаты распространяются на задачи о случайных процессах методами дифференциальных уравнений для плотности вероятности перехода, как функции времени и искомого параметра процесса, для марковских диффузионных процессов, причем указанные линейные уравнения, введенные Релеем, Фоккером-Эйнштейном-Планком и А. Н. Колмогоровым обобщены с учетом нелинейного слагаемого, как и в соответствующих волновых задачах [39,6] с коэффициентом, характеризующем среднюю скорость эволюции искомой случайной величины. Введенные нелинейные нестационарные уравнения решаются методами [29,19] с расчетом ударных волн или скачков функции распределения вероятности перехода процесса.

В настоящем параграфе рассматриваются модельные задачи:

1) Имеется некоторый ряд дискретных объектов, на которых имеется сосредоточение продуктов. Как и в [39], где рассматривается движение машин на шоссе, заменим дискретное распределение непрерывным, причем в дальнейшем будет рассматриваться одномерная по x задача, зависящая от времени, где в качестве оси x бралось шоссе, предполагается, что имеется некоторая, в общем случае кривая линия, отождествляемая с осью x, на которой непрерывно распределен указанный продукт с плотностью $r(x,t)$, представляющей количество продукта на единицу длины. Причем имеет место его передвижение по x зависящее от времени t. Можно ввести помимо плотности, также поток $j(x,t)$ продукта, выражаемый количеством продукта, проходящим через точку x в единицу времени, при этом $j = rv$, где v – есть скорость движения продуктов. Принимается, что $j = j(r)$, которая должна определятся экспериментально, причем измерение r достаточно для двух, а j для одного магазина в течении выбранного временного интервала. Считается, что каждая частица, или в непрерывном подходе, их плотность, влияет на скорость движения потока транспорта, причем чем больше плотность r, тем, вообще говоря, должна быть меньше скорость, но плотность потока продуктов rv может при этом быть больше. Таким образом, считается $j'(r) > 0$, а знак $j''(r)$ должен быть выяснен из опыта. Этот опыт можно проводить для одного или двух базовых помещений, т.е. при x=0, наблюдая, как от количества продукта в нем, т.е. от плотности r зависит их поток.

2) Помимо первого примера, можно рассмотреть подобную же задачу о движении продуктов в рамках еврорынка, где изучается движение некоторого продукта из базовой в отношении его количества страны, причем берется непрерывное распределение продукта вдоль линии, а между остальными странами также имеется движение продукта.

3) Те же детерминированные процессы движения ценных бумаг от некоторой базовой организации с их наибольшим количеством в другие центры, и движение этих частиц

между ними самими. Далее рассмотрена эта задача также и в рамках теории случайных процессов.

В качестве характерного примера можно привести задачи теории массового обслуживания, в том числе компьютерные сети и системы передачи информации. Можно рассматривать [41] открытые сети и однопотоковые случаи, обозначая через j поток или в задачах о массовом обслуживания интенсивность обслуживания заявок в данном месте. При этом в детерминированном подходе можно в качестве оси x брать линию вдоль распределенных систем обслуживания или линию для передачи информации. Во всех случаях функция $j = j(r)$, как и в [1], считается известной. Кроме того более важными для информатики [41] считаются стохастические задачи о движении информации в сети и соответствующие задачи массового обслуживании. Вводятся случайная функция x от времени в данной системе, представляющая количество заявок или информации, а также вероятность перехода от начальных значений параметра времени s и x к конечным t и y, обозначаемая $p(s, x, t, y)$, для которй в случае марковских диффузионных процессов выводятся уравнения §3.

В задаче о движении продуктов на линии, можно сделать те же предположения, что и в [39] и считать функцию $j(r)$ для данной области известной из опыта.

Тогда можно записать уравнение сохранения

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0\,, \tag{5.1}$$

отсюда для r получится нелинейное уравнение

$$\frac{\partial r}{\partial t} + j'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = 0. \tag{5.2}$$

Решение уравнения (5.2) известно, и имеет вид уравнений хатактеристик, вдоль которых r постоянно

$$\frac{dx}{dt} = j'(r), \quad r = const. \tag{5.3}$$

Интегрируя (5.3), можно получить

$$x = x_0 + j'(r)t, \tag{5.4}$$

причем эти прямые характеристики, несущие постоянные значения r, могут пересекаться, приводя к многозначности и образованию ударной волны.

В общем случае произвольных по величине изменений r можно изучить решение (5.3), (5.4) и показать, при каких условиях характеристики пересекаются, т.е. образуется неоднозначность решения (в точке их пересечения имеется несколько значений r несомых каждой прямой), что как известно из газовой динамики приводит к образованию разрыва, отсекающего область неоднозначности. В [39] это явление называется пробкой.

Аналогичные исследования можно перенести на задачи экономики, в частности на задачу образования затора движения продуктов.

Ограничиваясь для конкретности случаем $r_0(x_0) = r_1,\ r_1 = const$, и малых возмущений, можно для них полагать $r' = r - r_1$. Тогда уравнение (51.2), с учетом малых порядка r'^2, запишется в виде

$$
\begin{aligned}
&j'(r) = j'(r_1) + j''(r_1)r', \\
&\frac{\partial r'}{\partial t} + a_0\frac{\partial r'}{\partial x} + gr'\frac{\partial r'}{\partial x} = 0, \\
&a_0 = j'(r_1),\ g = j''(r_1)
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

где a_0 есть постоянная линейная скорость возмущений, g – постоянный нелинейный коэффициент.

Вводя переменную, связанную с волной

$$
t = t - \frac{x}{a_0}, \tag{5.6}
$$

можно (5.5) записать в стандартном виде

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x = \frac{\partial}{\partial t},\ \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_t = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_t - \frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}, \\
&\frac{\partial r'}{\partial x} - \frac{g}{a_0^2}r'\frac{\partial r'}{\partial t} = 0,
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

где производная по x берется уже при постоянном t , и в последнем нелинейной члене оставлено основное по порядку слагаемое с учетом того, что t в окрестности волны мало, x не мало, тогда $\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial t} >> \frac{\partial}{\partial x}$. Решение (5.7) аналогично (5.4) имеет вид [29]

$$
-dt = \frac{g}{a_0^2}r'dx,\ r' = const \tag{5.8}
$$

или, после интегрирования

$$
t + \frac{g}{a_0^2}r'x = f(r'), \tag{5.9}
$$

где f есть произвольная функция.

Решение (5.9) можно, обозначая $f(r') = y_1,\ r' = F(y_1)$, записать

$$
t - \frac{x}{a_0} + \frac{gx}{a_0^2}F(y_1) = y_1, \tag{5.10}
$$

где y_1 есть уравнение нелинейных характеристик. После пересечения характеристик в точке A образуется ударная волна AB. Условие на ударной волне, впереди которой $r' = 0$, а позади имеется некоторое значение r', получается из (5.9), если искать стационарное решение (5.5) в виде $r' = r'(x), x = x - Vt$, где $V = \frac{dx}{dt}$ есть скорость ударной волны. Проводя выкладки работы [29], можно получить

$$
V = a_0 + \frac{g}{2}r'. \tag{5.11}
$$

Подставляя (5.10) в (5.11), можно на ударной волне [29] получить

$$
F^2(y_1) = \frac{2a_0^2}{gx}\int_0^{y_1} F(y_1')dy_1'. \tag{5.12}
$$

При 1). $F(y_1)j''(r_1)<0$ решение (5.12) будет лишь при $F(y_1)=0$, т.е. имеется отсутствие ударной волны с самого начала, а при 2) $F(y_1)j''(r_1)>0$ ударная волна.

Случай 1) будет при $j''(r_1)<0$, $F(y_1)>0$, т.е. когда плотность товаров растет вдоль линии, точнее при $x>0$, больше, чем в первом пункте $x=0$, характеристики, начинаются на оси t, расходятся, и ударной волны нет.

При 2). $F(y_1)<0$, $j''(r_1)<0$ будет уменьшение плотности по сравнению с ее значением r_1 при $x=0$ и образуется ударная волна, т.е. затор товаров, начиная с первого объекта. Полагая, что начальная плотность $r=r_1$ при $t=0$ постоянна, а на первом объекте плотность меняется по формуле $x=0,\ F(t)=r_2-r_1+A\sqrt{t},\quad r_2>r_1,\ A<0$ можно из (5.12) на ударной волне получить, интегрируя,

$$\left(r_2-r_1+A\sqrt{y_1}\right)^2=\frac{2a_0^2}{gx}\left\{(r_2-r_1)y_1+\frac{2}{3}Ay_1^{\frac{3}{2}}\right\} \tag{5.13}$$

откуда, задавая числа $r_{1,2},\ A,\ g,\ a_0$, можно решением кубического уравнения для $y_1^{\frac{1}{2}}$, численно найти y_1 в функции x, затем определить $r'=F(y_1)$, а по (5.10) найти ударную волну.

В частном случае $r_2=r_1$, из (5.13) получится

$$y_1^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4a_0^2}Agx,\ r'=\frac{3A^2gx}{4a_0^2},$$

а уравнение ударной волны по (5.10) будет

$$t-\frac{x}{a_0}+\frac{3A^2g^2x^2}{16a_0^4}=0,\ g<0.$$

Численный расчет корня $\sqrt{y_1}$ по (5.13) для значений $r_1=100,\ r_2=110,\ A=-15,$ $a_0=10,\ g=1$, а также $r=A\sqrt{y_1}$ и t согласно (5.10) дает таблицу 1. Ударная волна, как и в случае $r_1=r_2$, образуется в начальной точке $x=0,\ t=0$ и расположена впереди характеристики $x=a_0t$.

Таблица 1

x	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\sqrt{y_1}$	0.0487377	0.0662364	0.0788699	0.0890548	0.0977097
v'	0.191877	0.188961	0.186855	0.185158	0.183715
t	0.022619	0.0450496	0.0674035	0.0897119	0.11199

Приведем исследование той же нелинейной задачи для случайных марковских диффузионных процессов.

Рассматривается случайная функция $x = x(t)$, представляющая марковский процесс, т.е. переход системы в $x(t)$ из состояния $x(s), t > s$ при фиксированном $x(s) = x$, процесс не зависит от $x(u), u \le s$.

Плотность вероятности перехода от состояния (s,x) к текущему (t,y) называется переходной вероятностью по y $p(s,x,t,y)$.

Для нее имеет место нелинейное уравнение Колмогорова-Чемпена [34] или Смолуховского [36]

$$p(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,u,z) p(u,z,t,y) dz . \tag{5.14}$$

Вначале рассмотрим простейший диффузионный процесс. Пусть частица в момент времени $N\Delta t$ $(N = 1,2,...)$ скачет на шаг $\Delta x = a$ вправо или влево с вероятностями p и $1 - p$. В момент $t = N\Delta t$ или $x = ma$, считая, что при $t = 0$, $x = 0$, введем вероятность перехода за N шагов $p(N\Delta t, ma \,|\, 0,0) \equiv p_{N,m}$. Частица может попасть при N шаге в точку $x = ma$, при условии, что на $N-1$ шаге она оказалось в $(m-1)a$ или в $(m+1)a$, из первого положения с вероятностью p, из второго с вероятностью $q = 1 - p$. По формуле полной вероятности $p_{N,m} = pp_{N-1,m-1} + qp_{N-1,m+1}$. Получим уравнение марковского перехода для данной задачи, причем можно обозначить $v(t,x)a = p_{N,m}$, тогда $v(t,x)a = pv(t - \Delta t, x - a) + qv(t - \Delta t, x + a)$. Разложим теперь v по Δt и $a = \Delta x$ и учтем $p + q = 1$

$$-\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t - (p-q)\frac{\partial v}{\partial x}a + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{a^2}{2} + (p-q)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}a\Delta t + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{(\Delta t)^2}{2} = 0 . \tag{A$_1$}$$

Разделим на Δt, устремим $\Delta t \to 0,\ p - q \to 0,\ a \to 0$ и обозначим

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{(p-q)a}{\Delta t} = A,\ \lim_{\Delta t \to 0}\frac{a^2}{\Delta t} = B, \tag{B$_1$}$$

$a \sim (\Delta t)^{\frac{1}{2}},\ p - q \sim (\Delta t)^{\frac{1}{2}}$, тогда из (A$_1$) в основном порядке следует уравнение для плотности вероятности перехода $v(t,x)$ в (t,x) [36]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{B}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{C$_1$}$$

полученное Релеем. Начальное условие, что при $t = 0$ должно быть достоверно $x = 0$, дает

$$v(0,x) = d(x), \tag{D$_1$}$$

где $d(x)$ есть дельта-функция. Этим условием определено решение уравнения (C$_1$) в виде гауссовской функции

$$v_0(t, x(0,0)) = \frac{1}{\sqrt{2pBt}}\exp\left\{-\frac{(x - At)^2}{2Bt}\right\} \tag{E$_1$}$$

Соотношения (B$_1$) дают для A в (C$_1$) среднюю скорость блуждания частицы влево и вправо, которую можно, как и в задаче для волн в сплошной среде [29], обобщать на учет нелинейности, т.е. добавления в А малого слагаемого cv', причем заменяется А на A', $v'(t,x\,|\,0,0) = v(t,x\,|\,0,0) - v_0(t,x\,|\,0,0)$, v_0 удовлетворяет (C_1), а v' удовлетворяет обобщенному на учет, по аналогии с [29] нелинейности, уравнению

$$A' = A + cv',\ \frac{\partial v'}{\partial t} = -A\frac{\partial v'}{\partial x} - cv'\frac{\partial v'}{\partial x} - cv'\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{B}{2}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \qquad (F_1)$$

Здесь c – постоянная, определяемая из опыта, $\frac{\partial v_0}{\partial x}$ дается (E_1) и при определенных предположениях его можно отбросить, тогда обобщение уравнения (C_1) Релея на нелинейный случай будет

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -A\frac{\partial v'}{\partial x} - cv'\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{B}{2}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \qquad (G_1)$$

Кстати, это уравнение можно постулировать и без (F_1), как обобщение (C_1) на нелинейной случай.

Рассмотрим общий случай диффузионного процесса.

В [34,36] получены из (5.14) линеаризированные уравнения для p в предположении малости возмущения во времени, т.е. $u - s$, кроме того предположено, что и $z - x$ мало. Вводится для $x(t)$ малое приращение

$$x(s+\Delta t) = x(s) + a\{s, x(s)\}\Delta t + s\{s, x(s)\}\Delta h\ , \qquad (5.15)$$

где Δh есть белый шум. Величина $a(s,x)$ характеризует среднюю тенденцию к эволюции случайного процесса $x(s)$ за малый промежуток времени от s до $s+\Delta t$ при условии, что $x(s) = x$ и называется коэффициентом сноса [34].

В уравнении (3.1) можно считать произвольный момент времени u близким к t или s, и кроме того предполагать соответственно $z \approx x$ или $z \approx y$. Вводя во втором случае некоторые коэффициенты сноса a и диффузии в [34]

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|<e}(z-x)p(s,x,s+\Delta t,z)dz = a(s,x),\\ \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|<e}(z-x)^2 p(s,x,s+\Delta t,z)dz = b(s,x),\end{gathered} \qquad (5.16)$$

и проводя линеаризацию в (3.1) относительно начального состояния s, x, можно получить обратное уравнение Коломогорова для $p(s,x,t,y)$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}b\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\,, \qquad (5.17)$$

и, проводя, ту же процедуру вблизи t, y, − прямое уравнение Колмогорова или уравнение Фоккера-Эйнштейна

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\{a(t,y)p(s,x,t,y)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(t,y)p(s,x,t,y)\}. \qquad (5.18)$$

Следует отметить, что, хотя и коэффициент $a(x,t)$, согласно определению (5.16) является осреднением от плотности p, и в этом смысле детерминистический, но, можно в ряде процессов вводить в него слагаемое, связанное с вероятностью процесса, однако с нулевым средним.

Уравнение (5.18), после умножения на y и интегрирования по y от $-\infty$ по ∞ дает для условной средней величины [36] уравнения

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} yp(s,x,t,y)dy,\ \frac{d\bar{y}}{dt} = a(t,y).$$

Считая $a(t,y) = a_0 = const$, можно получить

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = a_0,\ \bar{y} = a_0 t,$$

т.е. a_0 есть скорость распространения условной средней функции. Можно, конечно, подобно (F_1), добавить нелинейный член в a_0.

В случае гауссовского процесса для разности $y - x$, можно считать

$$p_0(s,x,t,y) = \frac{1}{\sqrt{2ps^2(t-s)}} e^{-\frac{(y-x-a_0\Delta t)^2}{2s^2(t-s)}},\ \Delta t = t - s, \tag{5.19}$$

и из (5.16) следует

$$b = s^2,\ a = a_0, \tag{5.20}$$

при этом коэффициенты (5.17), (5.18) постоянные, причем a_0, как и в механике есть скорость волнового движения по x,t. Вообще говоря, можно считать, что уравнения (5.17), (5.18) нелинейны, в том смысле, как было сказано высше, $a = x'(s)$ в (3.2) могут считаться зависящими от вероятности процесса p, пусть даже в виде соотношения, взятого из (3.3) в узком интервале *(s,x), (u,z)*. Кроме того эти коэффициенты, как и в соответствующих уравнениях для волн в газовой динамике и теории упругости, можно определять из опыта и аналогично указанным работам в слабонелинейном случае полагать, что в (5.17)

$$a(s,x) \to a_0 + cp', \tag{5.21}$$

где выбрано $p' = p - p_0$, постоянная c может быть определена из непосредственно опыта над $x(t)$, даваемой (5.15) или путем сравнения окончательных формул решения §2 с опытными данными. Первое слагаемое в (5.21) непосредственно следует из (5.16), (5.19) а второе соответствует замене интеграла по малой области неким средним значением, хотя как было сказано, более естественно его просто вводить согласно (5.21). Тогда из (5.17), (5.21) для избыточной по сравнению с гауссовским распределением плотности вероятности p' получится

$$-\frac{\partial p'}{\partial s} = a_0 \frac{\partial p'}{\partial x} + cp'\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \tag{5.22}$$

где a_0, c можно, в частности, считать постоянными. Заменяя обозначение s на t и отбрасывая последний диффузионный член, можно видеть, что (5.22) совпадает с точностью до обозначений с уравнением (5.5) для волнового движения и полученные там решения можно использовать для задачи настоящего параграфа по определению вероятности $p(s,x,t,y)$ от исходного состояния (s,x) в конечное (t,y), по аналогии с волновыми уравнениями сплошной среды §2 дополняются нелинейным слагаемым в скорости движения волны вероятности, пропорциональным возмущенной величине плотности переходной вероятности p', коэффициент c при которой должен определятся экспериментально. Тогда решения §5, включая более общие решения диффузионной задачи, могут быть использованы для решения практически важных экономических задач. В частности, задачи динамики ценных бумаг, в которых ранее решалась для частного, по сравнению с линейными уравнениями §5, линейного уравнения задачи блэк-шок при задачнных начальных и граничных условиях, для которой нелинейный аналог, развитый в данной статье, позволяет решить задачу определения времени разрыва плотности вероятности p распределения количества бумаг, как функции их характерного параметра x или определения ударной волны вероятности. Возможно, более практичными будут задачи о колебательных движениях экономики, которые могут рассматриваться методами нелинейных квазимонохроматических волн §3.

Можно также учесть и диффузионное слагаемое с коэффициентом b, и помимо решения (5.9) найти также методами газовой динамики и нелинейной теории упругости [25] решения уравнения (5.22).

Для этого вводится переменная $t = t - \frac{x}{a_0}$, $s = t$, и как и в (5.7) получается

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{c}{a_0^2} p' \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{b}{a_0^3}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \tag{5.23}$$

Как было сказано, при b=0 (5.23) аналогично (5.7) с решением ударных волн. В общем случае в (5.23) можно заменить

$$p' = -\frac{b}{a_0 c}\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{5.24}$$

и (5.23) примет известный вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = d_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\ d_1 = -\frac{b}{2a_0^3}. \tag{5.25}$$

Задавая начальные условия для $p'(x,t)$ в виде $p'(x,0) = 0$, а граничное условие: $t > 0,\ p' = v(0,t)$, можно из (5.24) получить

$$U(x,0) = 1,\ U(0,t) = e^{-\int_0^t \frac{a_0 c}{b} v(0,t)dt}$$

и решение уравнения для U при указанных условиях будет [19,29]

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p d_1 x}}\int_0^t e^{-\frac{(x-t)^2}{4d_1 x}} U(0,x)dx + \frac{2}{\sqrt{p}}\int_{\frac{t}{2\sqrt{d_1 x}}}^{\infty} e^{-u^2} du\,. \tag{5.26}$$

Тогда можно, формулируя указанную задачу для данного состояния найти $p'(t,y)$ при фиксированных s,x. При $d_1 \to 0$ из (5.24), (5.25) методом стационарной фазы получится

$$p'(x,t) = v(x),\ x = t + \frac{c}{a_0^2} v(x) x,$$

которое совпадает с решением (5.9) для ударных волн.

г. Ереван
Поступила: 17 октября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hadamard J.* Le probleme de Cauchy / Hadamard J.- Paris, 1932.
2. *Курант Ф.* Уравнения с частными производными / Ф. Курант. – М .: Мир, 1965.
3. *Лере Ж.* Задача Коши / Ж. Лере, Л. Гординг, Т. Котаке. – М .: Мир, 1967.
4. *Бабич В.М.* Фундаментальные решения гиперболоческих уравнений с переменными коэффициентамы / В.М. Бабич // Мат. Сб. Т. 52 (94) N2, 1969.
5. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн / В. М. Бабич. – Л. 1961. т. V стр. 36-46.
6. *Багдоев А. Г.* Распространение волн в сплошных средах / А. Г. Багдоев. – Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1981, 303с.
7. *Bretherton F. P.* Wavetrains in inhomogeneous moving media / F. P. Bretherton, C.I. Garret // Proceed. Roy. Soc. A.02.1968. p. 529-554.
8. *Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звуковых импульсов в неоднородной движущейся среде / Г. М. Шефтер // ПММ. т. 2111.N1, 1969.
9. *Минасян М. М.* О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике / М. М. Минасян // ДАН Арм. ССР, т. IV N5, 1972.
10. *Somerfeld A.* Mathematishe Theorie der diffraction / A. Somerfeld // Math Ann. 47. 1896. p. 317-374.
11. *Фридлендер Ф.* Звуковые импульсы / Ф. Фридлендер. – М.: Издательство ИЛ, 1962.
12. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках / В.А. Боровиков. – М.: Наука, 1966.
13. *Сагомонян А. Я.* Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости / А.Я. Сагомонян, В.Б. Поручиков. – Издательство Московского Университета, 1970.
14. *Багдоев А. Г.* Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке / А.Г. Багдоев, З.Н. Даноян // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 12. N6, 1972.
15. *Lighthill M. J.* Shok's strength in supersonic conical fields / M. J. Lighthill // Phylosophical magazine V40. 1949.
16. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Б. Уизем // М. “Мир”, 1977.
17. *Цзянь Сюэ-Сень* Метод Пуанкаре-Лайтхилла-Го / Цзянь Сюэ-Сень // Проблемы механики. М. 1959. вып.2, с. 7-62
18. *Гриб А. А.* Теория коротких волн / А. А. Гриб, О. С. Рыжов, С. А. Христианович // ПМТФ. N1 1960.
19. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости / А.Г. Багдоев // Изд. АН. Арм. ССР, Ереван, 1967.
20. *Zahalak G. I.* Conical flow near singular rays / G. I. Zahalak, M. K. Myers // Journal of Fluid mechanics v 64, N3, 1974.
21. *Заболотская Е. А.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков / Е. А. Заболотская, Р.В.Хохлов // Акустический журнал т. 15, N1, 1969.
22. *Багдоев А. Г.* Уравнения нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн / А. Г. Багдоев // Изв. АН Арм ССР Механика т. XXVII, N1, 1974.
23. *Багдоев А. В.* Трехмерные нелинейные волны в пьезоэлектриках и пьезополупроводниках / А. В. Багдоев, А. В. Шекоян // Изв. АН Арм ССР, Механика т. 34. N4, 1981. с. 3-15.
24. *Ахманов С. А.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде / С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов // УФН 1967 т. 93. N1.
25. *Bagdoev A. G.* The derivation of evolutions equations in the presence of two waves in continuous media / A. G. Bagdoev, S. G. Sahakyan // Information Technologies and management, 2001, N4, p. 122-131.
26. *Bagdoev A. G.* Wave beams in viscoelastic dispersive nonlinear initiality deformed medium with free surface / A.G. Bagdoev, A.V. Shekoyan // Int J. Nonlinear Mechanics, v. 32, N2, 1997, p. 385-392.
27. *Hunter J. K.* Weakly nonlinear high frequency waves / J. K. Hunter, J. B. Keller // Commun on Pure Appl. Math, 36, 1983, p. 547.

28. *Carbonaro P.* High frequency waves in quasylinear invisid gasodynamics / P. Carbonaro // ZAMP, 1986, 37, p 43.
29. *Багдоев А. Г.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости / А.Г. Багдоев, Л.А. Мовсисян // Изв. АН Арм. ССР Механика 1968, т. XXI, N3, с. 19-24.
30. *Багдоев А. Г.* Волновые пучки в плазме в поперечном магнитном поле / А. Г.Багдоев, Д. М. Седракян // астрофизика, 2001, т. 44, с. 139-147.
31. *Bagdoev A. G.* Generalized nonlinear equations of magnetohydrodynamics / A. G. Bagdoev, A. V. Shekoyan // Доклады НАН РА, т. 106, 2006, N4, с.27-33
32. *Герасименко Е. А.* Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / Е.А. Герасименко, В.Е. Рагозина // Вестник СамГУ Механика, 2006. N6, с. 94-113.
33. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Наука, 1966. – 624с.
34. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы / Ю. А. Розанов. – М.: Наука, 1979. – 184с.
35. *Прохоров Ю. В.* Теория вероятностей / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – М.: Наука. 1967. – 496с.
36. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов. – Ч. I М.: Наука. 1976. – 494с.
37. *Франк-Каменецкий* Лекции по физике плазмы / Франк-Каменецкий. – п М.: Атоиздат. 1964. – 283с.
38. *Саттон Дж.* Основы технической магнитной газодинамики / Дж. Саттон, А. Шерман. – Изд. М.: Мир, 1968. – 492с.
39. *Lighthill M. J.* On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. / M. J. Lighthill, G. B. Whitham // Proc. Roy. Soc. A. 1955. V. 229. N1178, P. 281-345.
40. *Ивлев Д. Д.* Теория упрочняющегося пластического тела / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М.:Наука, 1971. – 231с.
41. *Жоржикашвили В. А.* Сети массового обслуживания, теория и применения к сетям / В. А. Жоржикашвили, В.М. Вишневский. – ЭВМ. М.: Радио и связь. 1988. – 251с.