

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ  
ДЛЯ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕГО ПЕРФОРИРОВАННОГО МАССИВА  
ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН С ПЛАСТИЧЕСКИМИ КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ**

*(Азербайджанский технический университет)*

Рассматривается задача механики разрушения для тепловыделяющего изотропного массива, ослабленного двоякопериодической системой цилиндрических каналов круглого поперечного сечения. Считается, что по мере повышения интенсивности тепловыделения в массиве происходит разрушение материала. Принято, что с поверхности отверстий исходят прямолинейные трещины с концевыми зонами. Определение неизвестных параметров, характеризующих развитие трещин, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения.

**Постановка задачи**

При проектировании некоторых типов тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) приходится рассчитывать термические напряжения в среде, пронизанной цилиндрическими каналами, оси которых параллельны друг другу. Задача о термоупругом равновесии плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых отверстий, рассматривалась в [3, 11, 12]. По мере повышения интенсивности тепловыделения  $q$  в такой плоскости вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых носит двоякопериодический характер. Зоны повышенных напряжений способствуют развитию образовавшихся на поверхности отверстий трещин, что в свою очередь может привести к полному разрушению тепловыделяющего массива.

В [5, 10] были рассмотрены задачи механики хрупкого разрушения для тепловыделяющего массива с прямолинейными трещинами Гриффитса. Высокая концентрация напряжений вблизи вершин трещин в некоторых случаях приводит к разупрочнению материала, окружающего трещину. Это может проявляться в образовании зон пластического течения. Анализ экспериментальных данных, а также условий равновесия и развития трещин с учетом взаимодействия ее берегов и зон разупрочнения приводит к модели трещины с концевой зоной (зоной предразрушения), в которой имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. В ряде работ рассматривались модели трещин, в которых принимается, что в концевых зонах, размер которых соизмерим с длиной трещины, имеет место пластическое течение при постоянном напряжении (см. обзор [2]).

Выделим участки трещин  $\Gamma_0$  (концевые зоны), примыкающие к ее вершинам, в которых для данного материала массива имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. Взаимодействие берегов трещины в концевых зонах моделируется путем введения между ее берегами линий пластического скольжения (вырожденных полос пластичности). Размеры концевых зон зависят от вида материала массива. Так как концевые зоны и толщина зоны пластического течения малы по сравнению с остальной (упругой)

частью массива, их можно мысленно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют по некоторому закону и препятствуют раскрытию трещины.

При действии термических напряжений в массиве в концевых зонах, соединяющих берега трещины, возникают нормальные  $s_y = s_s$  и касательные  $t_{xy} = 0$  усилия. Размеры концевых зон заранее неизвестны и подлежат определению при решении рассматриваемой задачи механики разрушения. Вне концевых зон берега трещин свободны от нагрузки. Будем считать, что: а) по всему объему тела интенсивность тепловыделения неравномерна и тело может свободно расширяться во всех направлениях; б) теплосъем осуществляется только через поверхности каналов; в) максимальный температурный перепад в массиве невелик и свойства материала среды постоянны в пределах этого перепада; г) на тело не действуют внешние силы и оно находится только под действием внутренних термических напряжений; д) массив находится в стационарном состоянии.

Итак, пусть имеется тепловыделяющий массив с двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий, имеющих радиус  $l$  ( $l < 1$ ) и центры в точках  $P_{mn} = mw_1 + nw_2$ , где  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $w_1 = 2$ ,  $w_2 = 2he^{ia}$ ,  $h > 0$ ,  $\text{Im } w_2 > 0$ . Из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины с концевыми зонами. Контуров круговых отверстий свободны от внешних нагрузок. Перенос тепла в твэлах осуществляется главным образом теплопроводностью. Поэтому расчет температурных полей в твэлах состоит в решении задач теории теплопроводности при наличии внутренних источников тепла [3, 12].

В силу симметрии граничных условий и симметрии области  $D$ , занятой материалом массива, температура и напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами  $w_1$  и  $w_2$ . Температура  $T(x, y)$  в области  $D$  является решением уравнения теории теплопроводности

$$\Delta T + \frac{q(T)}{d} = 0 \quad (1)$$

при граничном условии

$$T = T_0. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $d$  – коэффициент теплопроводности материала,  $q(T)$  – удельная мощность внутренних источников тепла;  $T_0$  – температура охлаждающей среды (теплоносителя).

Граничные условия задачи имеют следующий вид

$$s_r - it_{rq} = 0, \quad \text{на контурах отверстий} \quad (3)$$

$$s_y - it_{xy} = 0, \quad \text{на берегах вне концевых зон трещин}$$

$$s_y - it_{xy} = s_s, \quad \text{на берегах концевых зон трещин} \quad (4)$$

где  $s_s$  – предел текучести материала на растяжение.

Для определения значений предельной величины интенсивности тепловыделения, при которой происходит развитие трещины, постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) роста трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов трещины у основания пластических зон

$$u^+ - u^- = d_c, \quad (5)$$

где  $u^+$  и  $u^-$  – граничные значения перемещения на верхнем и нижнем берегах трещины соответственно;  $d_c$  – характеристика трещиностойкости материала массива.

Это дополнительное условие позволяет определить параметры тепловыделяющей среды, при которых происходит развитие трещины.

Рассмотрим два случая расположения охлаждающих каналов:

а) каналы в вершинах квадратной сетки;

б) каналы в вершинах треугольной сетки.

Из-за двоякопериодичности системы определение температурного поля можно свести к решению краевой задачи для одного трансляционного элемента (область  $D_0$ ). На рис. 1 показаны расчетные элементарные ячейки тела для обоих случаев.

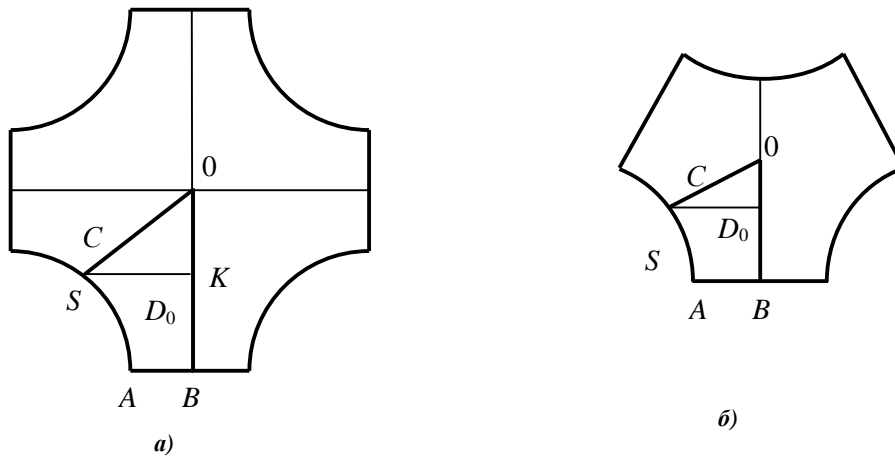


Рис. 1. Расчетная схема задачи термоупругости;

На прямолинейных границах области  $D_0$  выполняется условие симметрии

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0,$$

где  $n$  – обозначает направление нормали к контуру тела.

Удельная мощность внутренних источников тепла принималась в виде

$$1) \frac{q}{l} = A \exp(-B(x^2 + y^2)),$$

$$2) \frac{q}{l} = A \exp(-BT).$$

Здесь  $A$  и  $B$  – положительные эмпирические постоянные.

#### Решение нелинейной краевой задачи теории теплопроводности

После квазилинейной аппроксимации [1] уравнение (1) заменяется (если  $q = Al \exp(-BT)$ ) последовательностью линейных уравнений

$$\Delta T^{(i+1)} + A \exp(-BT^{(i)}) - AB(T^{(i+1)} - T^{(i)}) \exp(-BT^{(i)}) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, решение нелинейной краевой задачи сводится к решению последовательности линейных задач. Эти задачи решаются при помощи вариационного метода Ритца. Для применения этого метода нужно иметь систему базисных функций  $\{j_k(x, y)\}$ , обращающихся в нуль на дуге  $S$  (условие (2) заменяется однородным граничным условием) и полную в области  $D_0$ , т. е. такую, что с помощью их линейных комбинаций можно приблизить любую функцию  $T(x, y)$ , непрерывную вместе с частными производными, удовлетворяющую граничному условию.

Приближенное решение задачи ищется в виде

$$T = \sum_{k=1}^N a_k j_k(x, y), \quad (7)$$

где  $j_k$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $j_k(x, y) = 0$  на дуге  $S$ ;
- 2)  $j_k(x, y)$  симметричны относительно прямолинейных границ элементарной ячейки.

Построение такой системы базисных функций показано в [11]. Для определения коэффициентов  $a_k$  в каждом приближении получаем систему линейных алгебраических уравнений. При этом на каждой итерации предыдущее решение используется как начальное приближение. В качестве критерия остановки итерационного процесса используется неравенство

$$\|T^{(i+1)} - T^{(i)}\| \leq \epsilon.$$

Здесь функциональная норма определяется следующим образом

$$\|T^{(i)}\| = \left[ \iint_{D_0} (T^{(i)})^2 dx dy \right]^{1/2}.$$

Вычислительная устойчивость обеспечивается, если

$$\sum_{k=1}^n |a_k^{(i+1)} - a_k^{(i)}| \leq \frac{\epsilon}{M},$$

где  $M = \max_k \|j_k\|$

### Решение задачи термоупругости

Введением функции напряжений Эри уравнение совместности деформаций приводится к виду

$$\Delta \Delta U = \frac{\alpha E}{l} q(T), \quad (8)$$

где  $E$  – модуль упругости материала массива.

Искомое напряженное состояние представим в виде

$$s_x = s_x^0 + s_x^1, \quad s_y = s_y^0 + s_y^1, \quad t_{xy} = t_{xy}^0 + t_{xy}^1, \quad (9)$$

где  $s_x^0, s_y^0, t_{xy}^0$  – компоненты тензора напряжений в тепловыделяющем перфорированном массиве при отсутствии трещин;  $s_x^1, s_y^1, t_{xy}^1$  – соответственно, вызванные наличием трещин в массиве.

Из-за двоякопериодичности системы определение напряжений  $s_x^0, s_y^0, t_{xy}^0$  сводится к решению краевой задачи для одного трансляционного элемента (область  $D_0$ ). Двоякая периодичность функции Эри позволяет сформулировать граничные условия для каждой элементарной ячейки.

$$U = \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad \text{на дуге } S \text{ окружности} \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial^3 U}{\partial n^3} = 0, \quad \text{на } AB, BO, OC.$$

Для решения краевой задачи (8), (10) для массива без трещин применяется вариационный метод Ритца. Этой задаче отвечает вариационная задача о минимуме интеграла

$$I = \iint_{D_0} \left[ (\Delta U)^2 - 2 \frac{aEq}{I} U \right] dx dy \quad (11)$$

при тех же условиях. Приближенное решение задачи ищется в виде

$$U_n = \sum_{k=1}^n a_k j_k(x, y), \quad (12)$$

где система базисных функций  $\{j_k(x, y)\}$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $j_k = \frac{\partial j_k}{\partial n} = 0$ , на дуге  $S$
- 2)  $j_k$  симметричны относительно прямолинейных границ элементарной ячейки, т. е.

$$\frac{\partial j_k}{\partial n} = \frac{\partial^3 j_k}{\partial n^3} = 0. \quad \text{на } AB, BO, OC$$

Построение такой системы базисных функций имеется в [11]. Для определения постоянных  $a_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_k \iint_D [\Delta j_k \Delta j_s] dx dy = \frac{aE}{I} \iint_D q j_s dx dy. \quad (13)$$

После нахождения неизвестной функции Эри, напряжения могут быть выражены через эту функцию следующими формулами

$$s_x^0 = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial^2 j_k}{\partial y^2}, \quad s_y^0 = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial^2 j_k}{\partial x^2}, \quad t_{xy}^0 = - \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial^2 j_k}{\partial x \partial y}. \quad (14)$$

Для определения введенных напряжений  $s_x^1, s_y^1, t_{xy}^1$  имеем однородное бигармоническое уравнение относительно функции Эри.

Граничные условия задачи на этом этапе имеют следующий вид

$$s_r^1 - it_{rq}^1 = -(s_r^0 - it_{rq}^0), \quad \text{на контурах отверстий} \quad (15)$$

$$s_y^1 - it_{xy}^1 = -(s_y^0 - it_{xy}^0), \quad \text{на берегах трещин вне концевых зон} \quad (16)$$

$$s_y^1 - it_{xy}^1 = s_s - (s_y^0 - it_{xy}^0). \quad \text{на берегах концевых зон трещин}$$

На основании формул Колосова-Мухелишвили [7] и граничных условий на контурах круговых отверстий (15) и берегах трещин с концевыми зонами (16) задача сводится к определению двух аналитических в области  $D$  функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} - [t\Phi'_*(t) + \Psi(t)]e^{2iq} = 0, \quad (17)$$

$$\Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} + t\overline{\Phi'_*(t)} + \overline{\Psi(t)} = c - s_y^0(t). \quad (18)$$

Здесь  $t = l e^{iq} + m w_1 + n w_2$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  $t$  – аффикс точек берегов трещин с концевыми зонами;  $c = 0$  на свободных берегах трещин и  $c = s_y$  на берегах концевых зон трещин.

Решение краевой задачи (17), (18) ищем в виде

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z); \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z); \quad (19)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2p} \int_L g(x) z(x-z) dx + A; \quad (20)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2p} \int_L [z(x-z) + Q(x-z) - xg(x-z)] g(x) dx + B;$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} \frac{R^{2k+2} g^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}; \quad (21)$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2} \frac{R^{2k+2} g^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} \frac{R^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}.$$

Интегралы в (20) берутся по отрезку  $L = \{-1, -1\} + [1, 1\}$ ;  $g(z)$  – эллиптическая функция Вейерштрасса;  $z(z)$  – дзета-функция Вейерштрасса,  $Q(z)$  – специальная мероморфная функция [4];  $g(x) = \frac{2G}{1 + \kappa_0} \frac{\partial}{\partial x} [u^+(x, 0) - u^-(x, 0)]$  – искомая функция;  $G$  – модуль сдвига материала среды;  $\kappa_0 = 3 - 4m$ ;  $m$  – коэффициент Пуассона материала;  $A$  и  $B$  – постоянные.

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (19) – (21). Условие симметрии относительно координатных осей приводит к равенствам:  $\text{Im} a_{2k} = 0$ ;  $\text{Im} b_{2k} = 0$  при  $k = 1, 2, \dots$

Из условий дwoякопериодичности поля температур и напряжений, а также в силу самоуравновешенности задачи и периодичности главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в  $D$ , следует

$$(A + \bar{A})w_k + \bar{B}w_k = d_k a + \bar{g}_k a + d_k(a + \bar{a}) + b_2 I^2 d_k + a_2 I^2 (d_k + g_k), \quad (k = 1, 2) \quad (22)$$

$$a = -\frac{1}{2p} \int_L t \cdot g(t) dt; \quad d_k = 2z \left( \frac{w_k}{2} \right); \quad g_k = 2Q \left( \frac{w_k}{2} \right) - \bar{w}_k g \left( \frac{w_k}{2} \right).$$

Обозначение постоянных дwoякопериодической решетки соответствует употребляемому в [4]. Из системы (22) определяются постоянные  $A$  и  $B$ , причем эти величины вещественны. Каждую из постоянных  $A$  и  $B$  в дальнейшем удобно представить в виде

суммы двух постоянных:  $A = A_* + A_{**}$ ;  $B = B_* + B_{**}$ , где  $A_{**}$  и  $B_{**}$  зависят только от коэффициентов  $a_2$  и  $b_2$ , т.е. они находятся из системы (22) в предположении, что  $a = 0$ .

Нетрудно убедиться, что общие представления (19)-(21) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений. Незвестная функция  $g(x)$  и постоянные  $a_{2k}$  и  $b_{2k}$  должны быть определены из краевых условий (17)-(18). В силу выполнения условий двоякопериодичности система граничных условий (17) заменяется одним функциональным уравнением, например на контуре  $t = l \exp(iq)$ , а система условий (18) краевым условием на  $L$ .

Для составления уравнений относительно коэффициентов  $a_{2k}$  и  $b_{2k}$  функций  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  представим граничное условие (17) в виде

$$\Phi_2(t) + \overline{\Phi_2(t)} - [\overline{t}\Phi_2'(t) + \Psi_2(t)]e^{2iq} = f_1(q) + if_2(q), \quad (23)$$

где 
$$f_1(q) + if_2(q) = -\Phi_1(t) - \overline{\Phi_1(t)} + [\overline{t}\Phi_1'(t) + \Psi_1(t)]e^{2iq}. \quad (24)$$

Относительно функции  $f_1(q) + if_2(q)$  будем считать, что она разлагается на  $|t| = l$  в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(q) + if_2(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2kiq}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0; \quad (25)$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} (f_1(q) + if_2(q)) e^{-2kiq} dq. \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив в (25) выражение (24) с учетом (20) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, найдем

$$A_0 = -A - \overline{A} - \frac{1}{2p} \int_L g(t) f_0(t) dt; \quad A_2 = B - \frac{1}{2p} \int_L g(t) f_2(t) dt;$$

$$A_{2k} = -\frac{1}{2p} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt; \quad k = -1, \pm 2, \dots$$

$$f_0(t) = 2z(t); \quad f_2(t) = \frac{R^2}{2} g'(t) + tg(t) - z(t) - Q(t);$$

$$f_{2k}(t) = \frac{(2k-1)R^{2k}}{(2k)!} g^{(2k-1)}(t) + \frac{R^{2k-2}}{(2k-2)!} [g^{(2k-3)}(t) - Q^{(2k-2)}(t) + tg^{(2k-2)}(t)]; \quad k = 2, 3, \dots;$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{R^{2k}}{(2k)!} g^{(2k-1)}(t). \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляя в левую часть краевого условия (23) вместо функций  $\Phi_2(t)$ ,  $\overline{\Phi_2(t)}$ ,  $\Phi_2'(t)$  и  $\Psi_2(t)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ , а в правую часть (23) ряд Фурье (25), и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(iq)$ , получим две бесконечные линейные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_{2k}$  и  $b_{2k}$  [4, 5]

$$a_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} a_{2k+2} + b_j; \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (26)$$

$$b_0 = A_2 - \frac{A_0 R^2 K_3}{1 - 2I^2 K_1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} R^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k-2};$$

$$b_j = A_{2j+2} - \frac{(2j+1)A_0 \cdot g_{j+1} R^{2j+2}}{(1 - 2I^2 K_1) \cdot 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} R^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2};$$

$$(j = 1, 2, \dots)$$

$$b_2 = \frac{1}{1 - 2R^2 K_1} \left[ 2R^2 K_0 - A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot R^{2k+2}}{2^{2k+2}} a_{2k+2} \right]; \quad (27)$$

$$b_{2j+4} = (2j+3)a_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} R^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} a_{2k+2} - A_{-2j-2}. \quad (j = 0, 1, \dots)$$

Здесь коэффициенты  $a_{j,k}$  определяются по формулам (3.5), приведенным в [4, гл. 1].

Полагая, что функции (19) – (21) удовлетворяют краевому условию на берегах трещин  $L$ , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно  $g(x)$

$$\frac{1}{2p} \int_L g(t) K(t-x) dt + H(x) = c - S_y^0(x); \quad \text{на } L \quad (28)$$

$$K(x) = 3z(x) + Q(x) - xg(x); \quad H(x) = 2A + B + 2\Phi_2(x) + x\Phi_2'(x) + \Psi_2(x);$$

$$2A + B = \frac{1}{w_1} [(a + a_2 I^2)(d_1 + g_1) + (2a + b_2 I^2)d_1].$$

Сингулярное интегральное уравнение (28) совместно с системами (26), (27) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функцию  $g(x)$  и коэффициенты  $a_{2k}$ ,  $b_{2k}$ . Зная функции  $\Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  и  $g(x)$  можно определить напряженно-деформированное состояние тепловыделяющего массива при наличии трещин с полосами пластического течения.

#### Методика численного решения и анализ

Используя в основном параллелограмме периодов следующие разложения:

$$z(z) = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{j+1} z^{2j+1}}{2^{2j+2}}, \quad g(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1)g_{j+1} z^{2j}}{2^{2j+2}}, \quad Q(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+2)r_{j+1}}{2^{2j+2}} z^{2j+1},$$

уравнение можно привести к обычной форме

$$\frac{1}{p} \int_L \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{1}{p} \int_L g(t) K_0(t-x) dt + H(x) = c - S_y^0(x). \quad (29)$$

Сделаем замену переменных  $t = x\mathbf{1}$ ,  $x = x_0\mathbf{1}$  и после некоторых простых преобразований уравнение (29) приведем к виду

$$\frac{1}{p} \int_{L_0} \frac{g_*(x)}{x-x_0} dx + \frac{1}{p} \int_{L_0} g_*(x) K_0(x-x_0) dx + H_*(x_0) = f_*(x_0); \quad (30)$$



$$\begin{aligned}
g_*(x) &= g(t); & L_0 &= \{[-1, -I_1] + [I_1, 1]\}; & I_1 &= \frac{R}{\mathbf{1}}; \\
K(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} K_j \left(\frac{\mathbf{1}}{2}\right)^{2j+2} x^{2j+1}; & K_0 &= w_1 \text{Red}_1; & K_j &= g_{j+1}; \\
K_0^* &= -\frac{w_1}{2}(\bar{g}_1 + \bar{d}_1); & K_*(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} K_j^* \left(\frac{\mathbf{1}}{2}\right)^{2j+2} x^{2j+1}; \\
K_j^* &= (j+1)(r_{j+1} - g_{j+1}); & & & j &= 1, 2, \dots \\
K_0(x) &= K_*(x) - K(x); & K_*(x_0) &= H(x_0 \mathbf{1}); & f_*(x_0) &= c(x_0 \mathbf{1}) - s_y^0(x_0 \mathbf{1}).
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $g_*(x) = -g_*(-x)$ , запишем уравнение (30) как

$$\frac{2}{p} \int_{I_1}^1 \frac{x g_*(x) dx}{x^2 - x_0^2} + \frac{1}{p} \int_{I_1}^1 K_0^*(x, x_0) g_*(x) dx + H_*(x_0) = f_*(x_0); \quad (31)$$

$$K_0^*(x, x_0) = K_0(x - x_0) + K_0(x + x_0); \quad I_1 \leq x_0 \leq 1.$$

Преобразуем уравнение (31) к виду, более удобному для нахождения его приближенного решения. Для этого сделаем замену переменных

$$x^2 = u = \frac{1 - I_1^2}{2}(t + 1) + I_1^2, \quad x_0^2 = u_0 = \frac{1 - I_1^2}{2}(h + 1) + I_1^2.$$

При этом отрезок интегрирования  $[I_1, 1]$  переходит в отрезок  $[-1, 1]$ , а преобразованное уравнение (31) принимает стандартную форму

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g_*(t) dt}{t - h} + \frac{1}{p} \int_{-1}^1 g_*(t) B(h, t) dt + H_*(h) = f_*(h). \quad (32)$$

$$\text{Здесь } g_*(t) = g_*(x); \quad B(h, t) = \frac{1 - I_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (K_j^* - K_j) \left(\frac{\mathbf{1}}{2}\right)^{2j+2} \cdot u_0^j A_j;$$

$$A_j = \left\{ (2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{u}{u_0}\right) + \mathbf{K} + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)\mathbf{K}\mathbf{1}}{1 \cdot 2 \cdot 3\mathbf{K}(2j+1)} \cdot \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right\};$$

$$H_*(h) = H_*(x_0); \quad f_*(h) = c(x_0) - s_y^0(x_0 \mathbf{1}).$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения воспользуемся методом [6, 9] прямого решения сингулярных интегральных уравнений. Так как напряжения в тепловыделяющем массиве ограничены, то решение интегрального уравнения (32) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Представим решение в виде

$$g_*(h) = g_0(h) \sqrt{1 - h^2},$$

где  $g_0(h)$  – новая неизвестная ограниченная функция.

Использование квадратурных формул [6, 9] позволяет интегральное уравнение (32) свести к системе  $M + 1$  алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(t_m)}{M+1} \sin^2 \frac{pm}{M+1} \left[ \frac{1}{t_m - h_r} + B(t_m, h_r) \right] = p[c(h_r) - H_*(h_r)], \quad (33)$$

$$(r = 1, 2, \dots, M + 1)$$

$$\text{где } t_m = \cos \frac{pm}{M+1} \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad h_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)} p. \quad (r = 1, 2, \dots, M + 1)$$

Полученная алгебраическая система из  $M + 1$  уравнений (33), служащая для определения неизвестных  $g_0(t_1), g_0(t_2), \dots, g_0(t_M)$  и  $\mathbf{l}_0$ , обеспечивает удовлетворение дополнительного условия, при котором существует единственное решение в классе всюду ограниченных функций (см. Н. И. Мухелишвили [8] с. 326).

Из-за неизвестного размера концевой зоны пластического течения объединенная алгебраическая система, состоящая из разрешающей системы уравнений задачи (26), (27), (33) является нелинейной. Чтобы избежать решения нелинейной системы уравнений, применяем обратный способ. Считаем заданным размер концевой зоны трещины, а в процессе решения определяем параметр нагружения  $q_*$ . При таком способе решения алгебраическая система (26), (27), (33) оказывается линейной. Для численных расчетов полагалось  $M = 30$ , что отвечает разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов соответственно. Расчеты были выполнены методом Гаусса с выбором главного элемента. Расчеты проводились для правильных нормированных сеток центров отверстий. Исследовались случаи расположения центров отверстий в вершинах квадратной  $h = 1$ ;  $a = p/2$  и треугольной сеток  $h = 1$ ;  $a = p/3$ . В результате численного расчета найдена зависимость длины концевой зоны трещины, раскрытие противоположенных берегов трещин с концевыми зонами от величины параметра нагружения  $q_*$ .

Для определения предельно-равновесного состояния тепловыделяющего массива, при котором происходит рост трещины, используем критерий (5). Используя полученное решение, вычислим раскрытие  $u(x, 0)$  на берегах полосы предразрушения трещины

$$u(x, 0) = -\frac{1 + \kappa_0}{2G} \int_{-1}^x g(x) dx.$$

Раскрытие берегов полосы предразрушения при  $x = -\mathbf{l}_1$  (у основания пластической зоны) будет

$$u(-\mathbf{l}_1, 0) = -\frac{1 + \kappa_0}{2G} \int_{-1}^{-\mathbf{l}_1} g(x) dx.$$

Следовательно, условием, определяющим предельную интенсивность внутренних источников тепла массива (параметр нагружения  $q_*$ ), при которой происходит рост трещины в точке  $x = \pm \mathbf{l}_1$ , будет

$$-\frac{1 + \kappa_0}{2G} \int_{-1}^{-\mathbf{l}_1} g(x) dx = d_c.$$

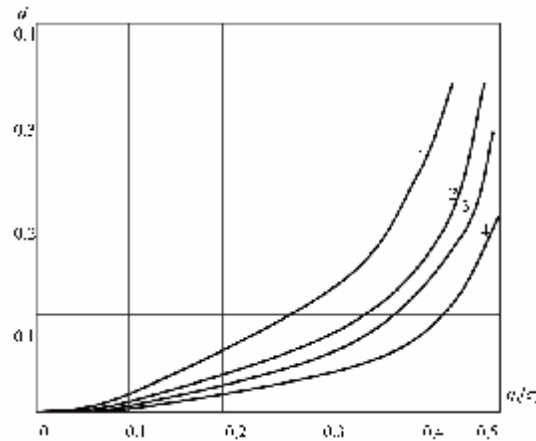
Используя замену переменных, заменяя интеграл суммой, получим

$$-\frac{1 + \kappa_0}{2G} \frac{p(1 - l)}{M} \sum_{m=1}^{M_1} g_0(t_m) = d_c. \quad (34)$$

Здесь  $M_1$  – количество узловых точек в интервале  $(-1, -\mathbf{l}_1)$ .

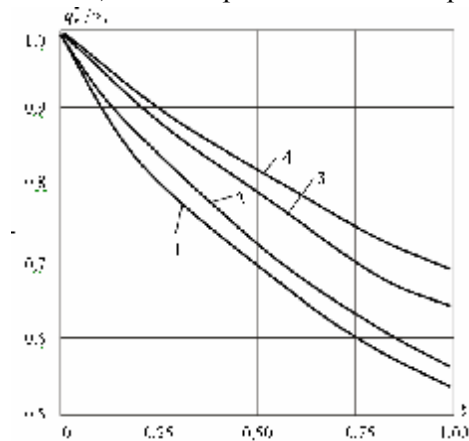
Совместное решение объединенной алгебраической системы (26), (27), (33) и (34) дает возможность определить критическую величину интенсивности внутренних источников тепла и размер полосы предразрушения для состояния предельного равновесия, при котором происходит рост трещин в массиве.

На рис. 2 представлены графики зависимости относительной длины зоны пластического течения  $d = \mathbf{l}_0/l$  от безразмерного значения интенсивности тепловыделения  $q_*/s_s$  для некоторых значений радиуса отверстия  $l = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1 – 4) для треугольной сетки отверстий.



**Рис. 2.** Зависимости относительной длины зоны пластического течения  $d = \mathbf{l}_0/l$  от безразмерного значения интенсивности тепловыделения  $q_*/s_s$  для некоторых значений радиуса отверстия  $l = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1 – 4 соответственно) для треугольной сетки отверстий

На рис. 3 приведен график зависимости интенсивности тепловыделения в массиве  $q_*^c/s_s$  от относительной длины трещины  $\mathbf{l}_* = \frac{8s_s \mathbf{l}}{\rho E d_c}$  для некоторых значений радиуса отверстия  $l = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1 – 4) для квадратной сетки отверстий.



**Рис. 3.** Зависимости безразмерной критической интенсивности тепловыделения  $q_*^c/s_s$  в массиве от относительной длины трещины  $I_* = \frac{8s_s I}{\rho E d_c}$  для некоторых значений радиуса отверстия  $I = 0,2 \div 0,5$  (кривые 1 – 4 соответственно) для квадратной сетки отверстий

### Заключение

Модель трещины с концевыми зонами пластического течения при постоянном напряжении позволяет провести анализ предельного равновесия трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве с помощью деформационного критерия. Анализ предельно-равновесного состояния тепловыделяющего перфорированного массива при котором происходит рост трещин сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (13), (26), (27), (33) и критерия развития трещины (34) при различных теплофизических и механических характеристиках материала, а также геометрических параметрах массива. Такой анализ позволил определить предельный размер концевой зоны трещины, допустимую величину параметра нагружения  $q_*$ .

г. Баку

Поступила: 24 мая 2007 г.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман, Р. Динамическое программирование и уравнения в частных производных / Р. Беллман, Э. М. Энджел : Мир, 1974. – 208 с.
2. Витвицкий, П. М. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения: Обзор / П. М. Витвицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – №2. – С. 3–19.
3. Гольденблат, И. И. Расчеты температурных напряжений в ядерных реакторах / И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко. – М. : Госатомиздат, 1962. – 147 с.
4. Григолюк, Э. И. Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.
5. Мирсалимов, В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов – Баку : ЭЛМ, 1984. – 124 с.
6. Мирсалимов, В. М. Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
7. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
8. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили – М. : Наука, 1968. – 512 с.
9. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
10. Салманов, Э. В. Решение задачи механики разрушения для тепловыделяющего перфорированного массива при нестационарном температурном поле / Э. В. Салманов // Механика : Машиностроение. – 2006. – №3. – С. 3 – 7.
11. Соболев, С. Л. Определение термических напряжений в среде с пустотами / С. Л. Соболев, Г. В. Мухина // Атомная энергия. – Т. 5. – 1958. – Вып. 2. – С. 178 – 181.
12. Фильштинский, Л. А. Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий / Л. А. Фильштинский // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – Киев : Наукова думка. – 1964. – Вып.4. – С. 103 – 112.