ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 3 • 2007

Мирсалимов В. М., Фараджев Р. Г.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАЗВИТИИ ПОЛОСТЕЙ В ВЯЗКИХ ТЕЛАХ

(Азербайджанский технический университет, институт математики и механики НАН Азербайджана)

Рассматривается плоская задача с неизвестной границей о развитии периодической системы полостей в вязких телах при конечных деформациях. Получено решение периодической задачи о развитии системы одинаковых полостей в условиях стационарного медленного течения ньютоновской вязкой жидкости.

1. Постановка задача. Известно, что если к вязкоупругому телу с некоторыми начальными полостями мгновенно приложены нагрузки, которые затем не изменяются, то хрупкое разрушение возможно лишь в стадии приложения нагрузок, при пренебрежении старением материала. Если хрупкого разрушения не произошло, начинается течение материала, которое со временем существенно изменяет форму начальных полостей. Возникающие при этом эффекты лучше исследовать на предельном случае вязкой жидкости.

Рассмотрим вязкое тело, подчиняющееся закону Ньютона и занимающее неограниченную область во внешности бесконечного ряда полостей. Внутренность каждого контура L_m (m = 0, ±1, ±2,…) представляет собой некоторую полость, форма которой известна лишь в начальный момент приложения нагрузок. Задача считается плоской. Итак, пусть имеется неограниченная область (плоскость) с одинаковыми полостями, имеющими центры в точках $P_m = mw$ (m = 0, ±1, ±2, …), $w = 2$.

Предполагается, что: а) стенки каждой полости подвержены одинаковому постоянному давлению $p(t)$; б) на бесконечности имеет место однородное напряженное состояние $s_x = s_x^{\infty}(t)$; $s_y = s_y^{\infty}(t)$; $t_{xy} = 0$ (t – время); в) контур L_m (m = 0, ±1, ±2,…) каждой полости в любой момент времени имеет две оси симметрии, совпадающие с осями неподвижной декартовой системы координат; г) течение вязкой жидкости медленное и квазистационарное, так что в уравнениях Навье-Стокса можно пренебречь инерционными членами.

Для простоты изложения в дальнейшем ограничимся рассмотрением случая несжимаемого тела.

В рассматриваемом случае [2] составляющие компонент тензора напряжений s_x, s_y, t_{xy} и компоненты вектора скорости $\dot{u}$, $\dot{v}$ в системе координат $0xy$ могут быть представлены при помощи формул, аналогичных соотношениям Колосова-Мусхелишвили в плоской задаче теории упругости

$$s_x + s_y = 4\mathrm{Re}\Phi(z,t),\ (z = x + iy) \tag{1.1}$$

$$s_y - s_x + 2it_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z,t) + \Psi(z,t)] \;, \quad 2m(\dot{u} + i\dot{v}) = j(z,t) - z\overline{j'(z,t)} - \overline{y(z,t)}.$$

Здесь $\Phi(z,t) = j'(z,t)$, $\Psi(z,t) = y'(z,t)$, $2m$ – коэффициент сдвиговой вязкости; $j(z,t)$ и $y(z,t)$ однозначные аналитические функции z в области, занятой вязким телом; штрихом в дальнейшем будем обозначать производную по соответствующей комплексной переменной.

На контуре полости L_m (m = 0, ±1, ±2,…) граничные условия имеют вид

$$s_n = -p(t)\,, \quad t_{nt} = 0\,. \tag{1.2}$$

Обозначим уравнение неизвестной границы полости L_m (m = 0, ±1, ±2,…) через $F(x,y,t)$. Функция $F(x,y,0)$ – считается заданной.

На неизвестной границе полости L_m должно выполняться условие кинематической совместности

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{u}\frac{\partial F}{\partial x} + \dot{v}\frac{\partial F}{\partial y} = 0\,. \tag{1.3}$$

Используя соотношения (1.1), граничные условия на контуре L_m (m = 0, ±1, ±2,…) запишем в виде

$$\Phi(z,t) + \overline{\Phi(z,t)} - [\bar{z}\Phi'(z,t) + \Psi(z,t)]\, e^{2ia} = -p(t) \qquad (z \in L_m) \tag{1.4}$$

где a – угол, составляемый нормалью к контуру полости с осью x.

В бесконечно удаленной точке аналитические функции $\Phi(z,t)$ и $\Psi(z,t)$ ведут себя следующим образом

При $z \to \infty$
$$\Phi(z,t) = \frac{1}{4}\left[s_x^{\infty}(t) + s_y^{\infty}(t)\right] + O(z^{-2}); \tag{1.5}$$
$$\Psi(z,t) = \frac{1}{2}\left[s_y^{\infty}(t) - s_x^{\infty}(t)\right] + O(z^{-2}).$$

Следовательно, поставленная задача свелась к решению краевой задаче (1.3) – (1.5) с неизвестной границей от одной комплексной и одной действительной переменных.

2. Решение краевой задачи. Перейдем на параметрическую плоскость z с помощью преобразования $z = w(z,t)$. Аналитическая функция $z = w(z,t)$ осуществляет конформное отображение физической области D_z на область D_z в параметрической плоскости z , являющуюся внешностью окружностей Γ_m радиуса l, с центрами в точках P_m со взаимно однозначным соответствием бесконечно удаленных точек, а также соответствующих участков действительных и мнимых осей.

Краевые условия (1.4) – (1.5) на параметрической плоскости z примут следующий вид

$$\Phi_*(z,t) + \overline{\Phi_*(z,t)} - \frac{z^2}{l^2\overline{w'(z,t)}}\left\{\overline{w(z,t)}\Phi_*'(z,t) + w'(z,t)\Psi_*(z,t)\right\} = -p(t) \tag{2.1}$$

при $t = 0$ $\qquad w(z,0) = w_0(z)$ – заданная функция

при $z \to \infty$
$$\Phi_*(z,t) = \frac{1}{4}\left[s_x^{\infty}(t) + s_y^{\infty}(t)\right] + O(z^{-2}); \tag{2.2}$$

$$\Psi_*(z,t)=\frac{1}{2}\left[s_y^{\infty}(t)-s_x^{\infty}(t)\right]+O\left(z^{-2}\right).$$

Здесь были приняты обозначения $\Phi_*(z,t)=\Phi[w(z,t),t]$; $\Psi_*(z,t)=\Psi\left[w(z,t),t\right]$.

Таким образом, задача сводится к определению трех неизвестных функций $\Phi_*(z,t)$, $\Psi_*(z,t)$ и $w(z,t)$.

Условие кинематической совместности удобно записать в следующем виде [3]:

$$2m\,\mathrm{Re}\left[z\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}w'(z,t)\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{zw'(z,t)\left[\overline{j_*(z,t)}-\frac{\overline{w(z,t)}}{\overline{w'(z,t)}}j_*'(z,t)-y_*(z,t)\right]\right\} \text{ на } \Gamma_m \ (m=0,\pm1,\pm2,\ldots) \quad (2.3)$$

Здесь принято $j_*(z,t)=j\left[w(z,t),t\right]$, $y_*(z,t)=y\left[w(z,t),t\right]$.

Рассмотрим класс решений краевой задачи (2.1) – (2.3), для которого выполняется условие

$$2m\frac{\partial w}{\partial t}=j_*(z,t)-\frac{w(z,t)}{\overline{w'(z,t)}}\overline{j_*'(z,t)}-\overline{y_*(z,t)} \text{ на } \Gamma_m, \quad (2.4)$$

выражающее векторное равенство кинематической скорости и скорости материальной частицы на границе полости L_m (m = 0, ±1, ±2,…). При выполнении условия (2.4) условие (2.3) выполняется тождественно.

Складывая выражение (2.4) со следующим условием на Γ_m (m = 0, ±1, ±2,…)

$$j_*(z,t)+\frac{w(z,t)}{\overline{w'(z,t)}}\overline{j_*'(z,t)}+\overline{y_*(z,t)}=-p(t)w(z,t)$$

получим

$$2m\frac{\partial w}{\partial t}-p(t)w(z,t)=2j_*(z,t) \text{ на } \Gamma_m \ (m=0,\pm1,\pm2,\ldots) \quad (2.5)$$

Для определения трех аналитических функций $\Phi_*(z,t)$, $\Psi_*(z,t)$ и $w(z,t)$ получаем нелинейная краевую задачу (2.1), (2.5) на Γ_m (m = 0, ±1, ±2, …).

Искомые функции $\Phi_*(z,t)$, $\Psi_*(z,t)$ и $w(z,t)$ ищем [1] в виде рядов

$$\Phi_*(z,t)=a_0(t)+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+2}(t)\frac{l^{2k+2}r^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}+\frac{1}{4}\left[s_x^{\infty}(t)+s_y^{\infty}(t)\right]; \quad (2.6)$$

$$\Psi_*(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+2}(t)\frac{l^{2k+2}r^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+2}(t)\frac{l^{2k+2}S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}+\frac{1}{2}\left[s_y^{\infty}(t)-s_x^{\infty}(t)\right];$$

$$w(z,t)=z+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+2}(t)\frac{l^{2k+2}r^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!};$$

где $r(z)=\left(\dfrac{p}{w}\right)^2\dfrac{1}{\sin^2(pz/w)}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p}{w}\right)^2$; $S(z)=\sum_m{}'\left[\dfrac{P_m}{(z-P_m)^2}-\dfrac{2z}{P_m^2}-\dfrac{1}{P_m}\right]$.

Знак штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс m=0.

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты соотношений (2.6), (2.7).

Из условий симметрии относительно координатных осей находим, что

$$\operatorname{Im} a_{2k+2}(t)=0\,,\quad \operatorname{Im} b_{2k+2}(t)=0\,,\quad \operatorname{Im} A_{2k+2}(t)=0 \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Нетрудно убедиться, что соотношения (2.6) – (2.7) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Из условия равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющие две конгруэнтные точки в D_z , следует, что

$$a_0(t)=\frac{p^2}{24}b_2(t)\,l^2\,.$$

В силу выполнения условий периодичности система граничных условий (2.1) и (2.5) на Γ_m (m = 0, ±1, ±2, …) заменяется функциональными уравнениями, например, на контуре Γ_0.

Для составления уравнений относительно остальных коэффициентов соотношений (2.6), (2.7) функций $\Phi_*(z\,,t)$, $\Psi_*(z\,,t)$, $w(z\,,t)$, разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности нулевой точки $z\,=0$:

$$\Phi_*(z\,,t)=\frac{1}{4}\left[s_x^{\infty}(t)+s_y^{\infty}(t)\right]+a_0(t)+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+2}(t)\left(\frac{l}{z}\right)^{2k+2}+ \tag{2.8}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+2}(t)\,l^{2k+2}\sum_{j=0}^{\infty}r_{j,k}z^{\,2j}\,;$$

$$\Psi_*(z\,,t)=\frac{1}{2}\left[s_y^{\infty}(t)-s_x^{\infty}(t)\right]+\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+2}(t)\left(\frac{l}{z}\right)^{2k+2}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+2}(t)\,l^{2k+2}\sum_{j=0}^{\infty}r_{j,k}z^{\,2j}-\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)a_{2k+2}(t)\,l^{2k+2}\sum_{j=0}^{\infty}(2j+2k+2)r_{j,k}z^{\,2j}\,;$$

$$w(z\,,t)=z\,-\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+2}(t)\frac{l^{2k+2}}{(2k+1)z^{\,2k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+2}(t)\,l^{2k+2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{r_{j,k}z^{\,2j+1}}{2j+1}\,; \tag{2.10}$$

Здесь $\quad r_{j,k}=\dfrac{(2j+2k+1)!\,g_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k+1)!\,2^{2j+2k+1}}\,;\qquad g_{j+k+1}=2{\sum_m}'\dfrac{1}{m^{2j+2k+2}}\,.$

Подставляя в граничное условие (2.1) на контуре Γ_0 $\left(z\,=\,l\,e^{iq}\right)$ вместо $\Phi_*(z\,,t)$, $\Psi_*(z\,,t)$ и $w(z\,,t)$ их разложения (2.8) – (2.10) и сравнивая коэффициенты при exp($2ikq$), (k = 0, ±1, ±2,…), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_{2k}(t)$, $b_{2k+2}(t)$, $A_{2k}(t)$. Ниже приводятся уравнения второго приближения:

$$a_1F+A_2F_1+A_4(t)F_2+b_1\,l^2F_3+b_2\,l^4F_4-m_0-f_0=-p(t)\,; \tag{2.11}$$

$$a_1F_1+b_1\,l^2F+b_2\,l^4F_3+A_2(t)F_2-m_1-f_0=0\,;$$

$$a_1F_2+b_1\,l^2F_1+b_2\,l^4F-m_2-f_2=0\,;$$

$$a_1F_3+A_2(t)F+A_4(t)F_1+b_1\,l^2F_4-m_3-f_3=0\,;$$

$$a_1F_4 + A_4(t)F + A_2(t)F_3 - m_4 - f_4 = 0.$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$a_1 = 1 + A_2(t)\,l^2 r_{0,0} + A_4(t)\,l^4 r_{0,1};$$

$$b_1 = A_2(t)\,l^2 r_{1,0} + A_4(t)\,l^4 r_{1,1};\, b_2 = A_2(t)\,l^2 r_{2,0} + A_4(t)\,l^4 r_{2,1};$$

$$F = 2\left[\frac{s_x^{\infty}(t) + s_y^{\infty}(t)}{4} + a_0(t) + a_2(t)\,l^2 r_{0,0} + a_4(t)\,l^4 r_{0,1}\right];$$

$$F_1 = a_2(t) + a_2(t)\,l^2 r_{1,0} + a_4(t)\,l^6 r_{1,1};\quad F_2 = a_4(t) + a_4(t)\,l^8 r_{2,1} + a_2(t)\,l^6 r_{2,0};$$

$$F_3 = a_2(t) + a_2(t)\,l^4 r_{1,0} + a_4(t)\,l^6 r_{1,1};\quad F_4 = a_4(t) + a_2(t)\,l^6 r_{2,0} + a_4(t)\,l^8 r_{2,1};$$

$$m_0 = 2a_2(t)A_2(t) + \frac{4}{3}A_4(t)a_4(t) + \frac{2}{3}b_1 l^2\left[a_2(t)\,l^4 r_{1,0} + a_4(t)\,l^6 r_{1,1}\right] +$$

$$+\frac{4}{5}b_2 l^4\left[a_2(t)\,l^6 r_{2,0} + a_4(t)\,l^8 r_{2,1}\right];$$

$$m_1 = -2a_2(t)a_1 + 4A_2(t)a_4(t) + \frac{2}{5}b_2 l^4\left[a_2(t)\,l^4 r_{1,0} + a_4(t)\,l^6 r_{1,1}\right];$$

$$m_2 = -4a_4(t)a_1 - \frac{2}{3}a_2(t)b_2 l^2;$$

$$m_3 = \frac{2}{3}a_2(t)A_4(t) + 2a_1\left[a_2(t)\,l^4 r_{1,0} + a_4(t)\,l^6 r_{1,1}\right] +$$

$$+\frac{4}{5}b_1 l^4\left[a_2(t)\,l^6 r_{2,0} + a_4(t)\,l^8 r_{2,1}\right];$$

$$m_4 = -2A_2(t)\left[a_2(t)\,l^4 r_{1,0} + a_4(t)\,l^6 r_{1,1}\right] + +4a_1\left[a_2(t)\,l^6 r_{2,0} + a_4(t)\,l^8 r_{2,1}\right];$$

$$f_0 = a_1 b_2(t) + A_2(t)g_0 + A_4(t)g_1 + b_2(t)b_1 l^2 + b_6(t)b_2 l^4;$$

$$f_1 = a_1 b_4(t) + A_2(t)b_2(t) + A_4(t)g_0 + b_6(t)b_1 l^6;$$

$$f_2 = a_1 b_6(t) + A_2(t)b_4(t) + A_4(t)b_6(t);$$

$$f_3 = a_1 g_0 + A_2(t)g_1 + b_2(t)b_1 l^2 + b_4(t)b_2 l^4;$$

$$f_4 = a_1 g_1 + b_1 g_0 l^2 + b_2(t)b_2 l^4;$$

$$g_0 = \frac{1}{2}\left[s_y^{\infty}(t) - s_x^{\infty}(t)\right] + b_2(t)\,l^2 r_{0,0} + b_4(t)\,l^4 r_{0,1} + b_6(t)\,l^6 r_{0,2} -$$

$$-4a_2(t)\,l^2 r_{0,0} - 16a_4(t)\,l^4 r_{0,1}$$

$$g_1 = b_2(t)\,l^2 r_{1,0} + b_4(t)\,l^6 r_{1,1} + b_6(t)\,l^8 r_{1,2} - 8a_2(t)\,l^4 r_{1,0} - 24a_4(t)\,l^6 r_{1,1}.$$

Система уравнений не является замкнутой. Для замкнутости этой системы уравнений необходимо использовать граничное условие (2.5). Подставляя в граничное условие (2.5) на контуре Γ_0 вместо $j_*(z,t)$, $y_*(z,t)$ и $w(z,t)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки $z = 0$ и сравнивая коэффициенты при $\exp(2ikq)$, (k = 0, ±1, ±2,…), получим недостающую бесконечную систему дифференциальных уравнений первого порядка по времени t относительно коэффициентов $A_{2k}(t)$.

$$\frac{1}{4}\left[s_x^{\infty}(t)+s_y^{\infty}(t)\right]+a_0(t)+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+2}(t)\,l^{2k+2}r_{0,k}= \tag{2.12}$$

$$=m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{dA_{2k+2}}{dt}\,l^{2k+2}\cdot r_{0,k}-\frac{p(t)}{2}\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+2}(t)\,l^{2k+2}\cdot r_{0,k}\right],$$

$$\frac{dA_{2k+2}}{dt}-\frac{p(t)}{2m}A_{2k+2}=\frac{a_{2k+2}(t)}{m}\ \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.13}$$

Соотношение (2.12), связывает параметр l с приложенной нагрузкой.

Если в системе (2.13) взять k = 0, 1, то получим совместно с (2.11) замкнутую систему уравнений во втором приближении относительно восьми неизвестных $a_2(t)$, $a_4(t)$, $b_2(t)$, $b_4(t)$, $b_6(t)$, $A_2(t)$, $A_4(t)$ и l.

Решаем систему уравнений (2.11) относительно $a_2(t)$, $a_4(t)$, $b_2(t)$, $b_4(t)$, $b_6(t)$ методом последовательного исключения неизвестных. В результате находим

$$b_4(t)=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad b_6(t)=\frac{\Delta_2}{\Delta};\qquad b_2(t)=\frac{1}{A_{11}^*}\left[b_2^*-\frac{c_{21}}{c_{11}}b_1^*-A_{12}^*b_4-A_{13}^*b_6\right]; \tag{2.14}$$

$$a_4(t)=\frac{1}{c_{11}}\left[B_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}B_1-c_{12}b_2-c_{13}b_4-c_{14}b_6\right];$$

$$a_2(t)=\frac{1}{a_{11}}\left[B_1-a_{12}a_4-a_{13}b_2-a_{14}b_4-a_{15}b_6\right].$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$\Delta=\left(A_{22}-A_{12}\frac{A_{21}}{A_{11}}\right)\left(A_{33}-A_{13}\frac{A_{31}}{A_{11}}\right)-\left(A_{23}-A_{13}\frac{A_{21}}{A_{11}}\right)\left(A_{32}-A_{12}\frac{A_{31}}{A_{11}}\right);$$

$$\Delta_1=M_1\left(A_{33}-A_{13}\frac{A_{31}}{A_{11}}\right)-M_2\left(A_{23}-A_{13}\frac{A_{21}}{A_{11}}\right);$$

$$\Delta_2=M_2\left(A_{22}-A_{12}\frac{A_{21}}{A_{11}}\right)-M_1\left(A_{32}-A_{12}\frac{A_{31}}{A_{11}}\right);$$

$$M_1=b_3^*-\frac{c_{31}}{c_{11}}b_1^*-\left(b_2^*-\frac{c_{21}}{c_{11}}b_1^*\right)\frac{A_{21}}{A_{11}};\quad M_2=b_4^*-\frac{c_{41}}{c_{11}}b_1^*-\left(b_2^*-\frac{c_{21}}{c_{11}}b_1^*\right)\frac{A_{31}}{A_{11}};$$

$$c_{11}=a_{22}-a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}};\ c_{12}=a_{23}-a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}};\ c_{13}=a_{24}-a_{14}\frac{a_{21}}{a_{11}};\ c_{14}=a_{25}-a_{15}\frac{a_{21}}{a_{11}};$$

$$c_{21}=a_{32}-a_{12}\frac{a_{31}}{a_{11}};\ c_{22}=a_{33}-a_{13}\frac{a_{31}}{a_{11}};\ c_{23}=a_{34}-a_{14}\frac{a_{31}}{a_{11}};\ c_{24}=a_{35}-a_{15}\frac{a_{31}}{a_{11}};$$

$$c_{31}=a_{42}-a_{12}\frac{a_{41}}{a_{11}};\ c_{32}=a_{43}-a_{13}\frac{a_{41}}{a_{11}};\ c_{33}=a_{44}-a_{14}\frac{a_{41}}{a_{11}};\ c_{34}=a_{45}-a_{15}\frac{a_{41}}{a_{11}};$$

$$c_{41}=a_{52}-a_{12}\frac{a_{51}}{a_{11}};\ c_{42}=a_{53}-a_{13}\frac{a_{51}}{a_{11}};\ c_{43}=a_{54}-a_{14}\frac{a_{51}}{a_{11}};\ c_{44}=a_{55}-a_{15}\frac{a_{51}}{a_{11}};$$

$$A_{11}=c_{22}-c_{12}\frac{c_{21}}{c_{11}};\quad A_{12}=c_{23}-c_{13}\frac{c_{21}}{c_{11}};\quad A_{13}=c_{24}-c_{14}\frac{c_{21}}{c_{11}};$$

$$A_{21}=c_{32}-c_{12}\frac{c_{31}}{c_{11}};\quad A_{22}=c_{33}-c_{13}\frac{c_{31}}{c_{11}};\quad A_{23}=c_{34}-c_{14}\frac{c_{31}}{c_{11}};$$

$$A_{31}=c_{42}-c_{12}\frac{c_{41}}{c_{11}};\quad A_{32}=c_{43}-c_{13}\frac{c_{41}}{c_{11}};\quad A_{33}=c_{44}-c_{14}\frac{c_{41}}{c_{11}};$$

$$b_1^*=B_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}B_1;\quad b_2^*=B_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}B_1;\quad b_3^*=B_4-\frac{a_{41}}{a_{11}}B_1;\quad b_4^*=B_5-\frac{a_{51}}{a_{11}}B_1;$$

$$a_{11}=2a_1l^2r_{0,0}+A_2\left(l^2r_{0,0}-1+4l^2r_{0,0}\right)+A_4\left(l^6r_{2,0}+8l^4r_{1,0}\right)+b_1l^2\left(1+\frac{1}{3}l^4r_{1,0}\right)+$$

$$+\frac{1}{5}b_2l^{10}r_{2,0};\quad a_{12}=2a_1l^4r_{0,1}+A_2\left(l^6r_{1,1}+16l^4r_{0,1}\right)+A_4\left(-\frac{1}{3}+l^8r_{2,1}+24l^6r_{1,1}\right)+$$

$$+\frac{1}{3}b_1l^8r_{1,1}+b_2l^4\left(1+\frac{1}{5}l^8r_{1,2}\right);\quad a_{13}=b_1l^2-a_1-A_2l^2r_{0,0}-A_4l^2r_{1,0}+\frac{p^2}{12}a_1l^2;$$

$$a_{14}=-A_2r_{0,1}l^4-A_4r_{1,1}l^6;\ a_{15}=-A_2r_{0,2}l^6-A_4r_{1,2}l^8-b_2l^4;$$

$$a_{21}=a_1\left(3+l^2r_{1,0}\right)+2b_1l^4r_{0,0}+b_2l^4\left(1+\frac{3}{5}l^4r_{1,0}\right)+A_2l^6r_{2,0}+4A_4l^2r_{0,0};$$

$$a_{22}=a_1l^6r_{1,1}+2b_1l^6r_{0,1}+\frac{3}{5}b_2l^{10}r_{1,1}+A_2\left(l^8r_{2,1}-3\right)+16A_4l^4r_{0,1};$$

$$a_{23}=\frac{p^2}{12}l^4b_1-A_2-A_4l^2r_{0,0};\quad a_{24}=-A_4r_{0,1}l^4-a_1;\quad a_{25}=-b_2l^6+A_4r_{0,2}l^6;$$

$$B_1=-p(t)-\frac{a_1}{2}\left(s_x^\infty+s_y^\infty\right)+\frac{A_2}{2}\left(s_y^\infty-s_x^\infty\right);\ B_2=\frac{A_4}{2}\left(s_y^\infty-s_x^\infty\right)-\frac{b_1l^2}{2}\left(s_x^\infty+s_y^\infty\right);$$

$$a_{31}=a_1l^6r_{2,0}+b_1l^2\left(1+l^2r_{1,0}\right)+2b_2l^6r_{0,0}+\frac{2}{3}b_1l^2;$$

$$a_{32}=a_1\left(5+l^8r_{2,1}\right)+b_1l^8r_{1,1}+2b_2l^8r_{0,1};\quad a_{33}=\frac{p^2}{12}l^6b_2;$$

$$a_{34}=-A_2;\qquad a_{35}=-a_1-A_4;\qquad B_3=-\frac{b_2l^4}{2}\left(s_x^\infty+s_y^\infty\right);$$

$$a_{41}=a_1\left(1-l^4r_{1,0}+4l^2r_{0,0}\right)+A_2\left(2l^2r_{0,0}+8l^4r_{1,0}\right)+A_4\left(\frac{1}{3}+l^2r_{1,0}\right)-\frac{1}{3}b_1l^8r_{2,0};$$

$$a_{42}=b_1l^2\left(1-\frac{1}{3}l^8r_{2,1}\right)-a_1\left(l^6r_{1,1}-16l^4r_{0,1}\right)+A_2\left(2l^4r_{0,1}+24l^6r_{1,1}\right)+A_4l^6r_{1,1};$$

$$a_{43}=\frac{p^2}{12}A_2l^2-a_1l^2r_{0,0}-A_2l^2r_{1,0}-b_1l^2;\quad a_{44}=-\left(a_1r_{0,1}l^4+A_2r_{1,1}l^6+b_2l^4\right);$$

$$a_{45}=-\left(a_1r_{0,2}l^6+A_2r_{1,2}l^8\right);\qquad B_4=\frac{a_1}{2}\left(s_y^\infty-s_x^\infty\right)-\frac{A_2}{2}\left(s_x^\infty+s_y^\infty\right);$$

$$a_{51} = A_2\left(1+3l^4r_{1,0}\right)-3a_1l^6r_{2,0}+8a_1l^4r_{1,0}+2A_4l^2r_{0,0}+4b_1l^4r_{0,0}\,;$$
$$a_{52} = a_1\left(1-3l^8r_{2,1}+24l^6r_{1,1}\right)+2A_2l^4r_{0,1}+3A_2l^6r_{1,1}+16b_1l^6r_{0,1}\,;$$
$$a_{53} = \frac{p^2}{12}A_4l^2-a_1l^2r_{1,0}-b_1l^4r_{0,0}-b_2l^4; \qquad a_{54} = -a_1r_{1,1}l^6-b_1r_{0,1}l^6\,;$$
$$a_{55} = -a_1r_{1,2}l^8-b_1r_{0,2}l^8\,; \qquad B_5 = \frac{b_1l^2}{2}\left(s_y^{\infty}-s_x^{\infty}\right)-\frac{A_4}{2}\left(s_x^{\infty}+s_y^{\infty}\right).$$

Подставляя найденные величины $a_2(t)$ и $a_4(t)$ во втором приближении в дифференциальные уравнения (2.13), находим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA_2}{dt} = f_2\left(A_2, A_4, p(t), s_x^{\infty}(t), s_y^{\infty}(t)\right); \tag{2.15}$$
$$\frac{dA_4}{dt} = f_4\left(A_2, A_4, p(t), s_x^{\infty}(t), s_y^{\infty}(t)\right);$$

Для нахождения неизвестных функций $A_2(t)$ и $A_4(t)$ имеем задачу Коши при следующих начальных условиях:

при $t = 0$ $A_2(0) = A_2^0$; $A_4(0) = A_4^0$, где A_2^0, A_4^0 заданные величины, определяющие форму полости в начальный момент нагружения.

Задачу Коши для системы дифференциальных уравнений (2.15) решаем методом Рунге-Кутта.

Положив в (2.10) $V = l\,e^{iq}$, получим уравнение контура полости

$$r = \left|w\left(l\,e^{iq}\right)\right| = f(q,t) \tag{2.16}$$

Во втором приближении имеем

$$r^2 = l^2\left(d+d_1\cos 2q+d_2\cos 4q\right) \tag{2.17}$$
$$d = a_1^2+A_2^2+\frac{1}{9}A_4^2+\frac{1}{9}\left(b_1\,l^2\right)^2+\frac{1}{25}\left(b_2\,l^4\right)^2;$$
$$d_1 = 2\left(\frac{1}{3}a_1b_1\,l^2-a_1A_2+\frac{1}{3}A_2A_4+\frac{1}{15}b_1b_2\,l^6\right);$$
$$d_2 = 2\left(\frac{1}{5}a_1b_2\,l^4-\frac{1}{3}a_1A_4-\frac{1}{3}A_2b_1\,l^2\right).$$

Соотношение (2.16) при $r_{\max} \le 1$ позволяет найти наибольшую нагрузку, при которой полости касаются одна другой.

Анализ модели о развитии полостей в вязком теле сводится к параметрическому исследованию задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка при различных законах нагружения и начальной формы полостей.

Рассмотрим в качестве примера частный случай.

Пусть в любой момент времени выполняется равенство $s_x^{\infty} = \frac{1}{2}s_y^{\infty}$. В начальный момент полость принята в виде круга.

Ниже приводятся результаты расчетов для двух моментов времени

l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
				t = 100 с			
A_2	-0,00232	-0,00257	-0,03421	-0,06921	-0,08932	-0,12944	-0,14726
A_4	0	0	0,00002	0,00012	0,00024	0,00068	0,00307
				t = 1000 с			
A_2	-0,00822	-0,01069	-0,03217	0,099623	-0,11726	-0,13529	-0,16332
A_4	0,00005	0,00009	0,00014	0,00047	0,00072	0,00913	0,01281

В расчетах функции $s_x^\infty(t) = \frac{1}{2} s_y^\infty(t)$ и $p(t)$ считались линейными функциями от времени.

На рисунке представлена форма полости при $t = 1000c$; $l = 0{,}5$. Контур полости сужается в направлении оси абсцисс и расширяется в направлении наибольшего растягивающего напряжения.

В заключение отметим, что аналогично можно рассмотреть и случай развития двоякопериодической системы полостей в вязком теле.

Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т.е. определить начальную форму полости и напряженное состояние, при которых достигается равнопрочная форма полости в условиях нестационарного медленного течения ньютоновской вязкой жидкости.

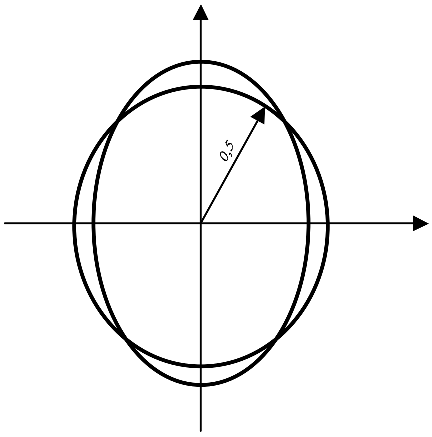

Рис. 1. Форма полости при $t = 1000c$; $l = 0{,}5$ для указанных нагрузок.

г. Баку

Поступила: 22 октября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987.
2. *Слезкин, Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – М.: Гостехиздат, 1955.
3. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П.. Черепанов. – М.: Наука, 1974.