

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

(Институт теоретической и прикладной механики СО РАН
им. С. А. Христиановича)

Динамическая жесткопластическая теория, позволяющая предсказать деформирование конструкций, находит широкое практическое применение при изучении реакции на кратковременное ударное нагружение очень высокой интенсивности или при нагружении взрывом [1]. На основе этой модели рассмотрен динамический изгиб следующих двухсвязных пластических плоских конструкций: кольцевых пластин [2], полигональных пластин [3, 4], криволинейных пластин частного вида [5 – 8]. В предлагаемой работе рассмотрено динамическое поведение круглых пластин с закрепленным внутренним эксцентрическим круглым отверстием на основе общего подхода, изложенного в работе [9]. Но в отличие от работы [9] здесь предлагается несколько другая схема предельного квазистатического разрушения, которая дает, как показывают расчеты, меньшее значение предельной нагрузки. В работе получено аналитическое выражение для предельной нагрузки, вычислены прогибы пластины в разные моменты времени и остаточный прогиб (остаточная повреждаемость).

1. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую круглую пластину радиуса R_1 с круглым отверстием радиуса R_2 с центром, расположенным на расстоянии a от центра пластины O_1 ($a \geq 0$, $a + R_2 < R_1$, рис. 1). Для определенности считаем, что $a < R_2$, т. е. отверстие охватывает центр пластины – точку O_1 . Внешний и внутренний контуры пластины шарнирно оперты или защемлены. Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой интенсивности $P(t)$, которая характеризуется мгновенным достижением своего максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени с последующим быстрым его уменьшением.

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала, в зависимости от значения P_{\max} , возможно деформирование по трем схемам [9]. При нагрузках, не превышающих предельные значения, движение отсутствует, и пластина остается в покое (“низкие” нагрузки). При нагрузках, незначительно превышающих предельные нагрузки (“средних” нагрузках), во внутренней области образуется гладкий криволинейный пластический шарнир l с предельным изгибающим моментом M_0 . При этом области пластины Z_{i1} , прилегающие к внутреннему контуру L_1 ($i=1$) и внешнему контуру L_2 ($i=2$), деформируются конусообразно (схема 1 на рис. 1). При достаточно высоком уровне действующей нагрузки поведение пластины может сопровождаться возникновением во внутренней части пластины области Z_p , движущейся поступательно. При этом

возможны две ситуации, когда существуют одновременно область Z_p и часть шарнира l (“высокие” нагрузки; схема 2 на рис. 2), и когда шарнира l нет, а область Z_p становится двусвязной (“сверхвысокие” нагрузки; схема 3 на рис. 3).

По аналогии с результатом, полученным в работе [10] считаем, что угол $\alpha_i(t)$ отклонения области Z_{i1} ($i=1,2$) от горизонта на опорном контуре не зависит от координат. Обозначим через l_1 и l_2 внешний и внутренний контуры области Z_p соответственно, а через Z_{i2} – часть пластины кроме области Z_p , из любой точки которой продолжение нормали к контуру L_i попадает на контур l_i (рис. 2, 3). Тогда кривые l_1 и l_2 являются дугами окружностей радиусов $R_1 - D_1(t)$ и $R_2 + D_2(t)$ соответственно, где $D_i(t)$ – неизвестная функция, определяющая расстояние между L_i и l_i ($i=1,2$), а область Z_{i2} вращается вокруг опорной окружности L_i со скоростью, одинаковой для всех точек контура L_i (см. [9]). Вследствие непрерывности скоростей на границах областей Z_{i1} и Z_{i2} ($i=1,2$), скорость поворота области Z_{i2} вокруг L_i равна $\mathfrak{Q}_i(t)$, где точка обозначает производную по времени.

Пусть (r_1, ψ) – точка в полярной системе координат Ω_1 с полюсом в точке O_1 , а (r_2, ξ) – точка в полярной системе координат Ω_2 с полюсом в центре окружности внутреннего контура L_2 . Пусть уравнение шарнира l в системе координат Ω_1 имеет вид $r_1 = \bar{l}(\psi, t)$, в системе координат Ω_2 записывается как $r_2 = \bar{l}_\xi(\xi, t)$. Считаем, что координата ψ и соответствующая ей координата ξ таковы, что $\bar{l}(\psi, t)$ и $\bar{l}_\xi(\xi, t)$ – одна и та же точка на кривой l . Обозначим через $d_l(\psi, t)$ расстояние от точки $(r_1, \psi) \in l$ до контура L_2 по нормали к L_2 (рис. 1). Из условия непрерывности скоростей на границах областей Z_{11} и Z_{21} следует, что

$$\mathfrak{Q}_1(t)(R_1 - \bar{l}(\psi, t)) = \mathfrak{Q}_2(t)d_l(\psi, t),$$

откуда получим

$$\mathfrak{Q}_1(t) = k(t)\mathfrak{Q}_2(t), \quad (1)$$

$$k(t) = d_l(\psi, t) / [R_1 - \bar{l}(\psi, t)], \quad (2)$$

где $k(t) > 0$ – неизвестная функция от времени. Для эксцентричного круглого контура L_2 имеем:

$$d_l(\psi, t) = \sqrt{\bar{l}^2 - 2\bar{l}a \cos \psi + a^2} - R_2.$$

Тогда из равенства (2) следует, что функция $\bar{l}(\psi, t)$ имеет вид:

$$\bar{l}(\psi, t) = \begin{cases} \frac{a \cos \psi - kb + \sqrt{(a \cos \psi - kb)^2 + (1 - k^2)(b^2 - a^2)}}{1 - k^2} & \text{при } k(t) \neq 1, \\ (b^2 - a^2) / [2(b - a \cos \psi)] & \text{при } k(t) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$b = k(t)R_1 + R_2.$$

Из равенств (см. рис. 1)

$$x = \bar{l}(\psi, t) \cos \psi = \bar{l}_\xi(\xi, t) \cos \xi + a, \quad y = \bar{l}(\psi, t) \sin \psi = \bar{l}_\xi(\xi, t) \sin \xi$$

следует, что функция $\bar{l}_\xi(\xi, t)$ имеет вид:

$$\bar{l}_\xi(\xi, t) = \begin{cases} \frac{b + ak^2 \cos \xi - \sqrt{(b + ak^2 \cos \xi)^2 - (1 - k^2)(b^2 - k^2 a^2)}}{1 - k^2} & \text{при } k(t) \neq 1, \\ (b^2 - a^2) / [2(b + a \cos \xi)] & \text{при } k(t) = 1, \end{cases} \quad (4)$$

а также справедливо равенство

$$\bar{l}_\xi(\xi, t) = \begin{cases} \bar{l}(\psi(\xi), t) \sin \psi(\xi) / \sin \xi, & \xi \neq 0; \pi, \\ [\bar{l}(\psi(\xi), t) \cos \psi(\xi) - a] / \cos \psi(\xi); & \xi = 0; \pi, \end{cases} \quad (5)$$

где значение $\psi = \psi(\xi)$ определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \xi = \bar{l}(\psi, t) \sin \psi / [\bar{l}(\psi, t) \cos \psi - a]. \quad (6)$$

Схема 2 соответствует общему виду деформирования пластины. Когда областей Z_p и Z_{i2} ($i=1,2$) нет, она соответствует схеме 1. Когда отсутствуют шарнир l и области Z_{i1} , схема 2 преобразуется в схему 3. Рассмотрим подробно схему 2.

Уравнение движения пластины получим из принципа виртуальных мощностей в сочетании с принципом Даламбера [11]:

$$\iint_S \rho \mathbf{u}^* ds = \iint_S P(t) \mathbf{u}^* ds - N. \quad (7)$$

Здесь S – площадь пластины; ρ – поверхностная плотность материала пластины; u – прогиб; ds – элемент площади; N – мощность внутренних сил пластины. Величины с верхним индексом * – кинематически допустимые скорости. Вычисляя мощность внутренних сил как в [12], получим

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\mathcal{G}^*]_m dl_m + M_0 \iint_S (|\mathcal{K}_1^*| + |\mathcal{K}_2^*|) ds = M_0 \sum_{i=1}^2 (2 - \eta_i) \int_{L_i} \left(\frac{\partial \mathcal{K}_i^*}{\partial n} \right)_i dL_i. \quad (8)$$

Здесь l_m – линии разрыва угловых скоростей; m – количество линий l_m ; M_m – изгибающий момент на l_m ; $[\mathcal{G}^*]_m$ – разрыв угловой скорости на l_m ; $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины; $\eta_i = 0$ для защемленного контура L_i ($i=1,2$) и $\eta_i = 1$ для шарнирно опертого; $\left(\frac{\partial \mathcal{K}_i^*}{\partial n} \right)_i$ – производная от скорости прогиба по

нормали к контуру L_i или скорость угла отклонения поверхности пластины от горизонта на контуре L_i , которая равна $\mathcal{K}_i(t)$ для рассматриваемой схемы деформирования; dL_i – элемент контура L_i . Обозначим через $\mathcal{K}_i(t)$ скорость поступательного движения области Z_p , тогда поле скоростей прогибов пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} (r_1, \psi) \in Z_p : \quad \mathcal{K}_i(r_1, \psi, t) &= \mathcal{K}_i(t), \\ (r_1, \psi) \in Z_{i1} : \quad \mathcal{K}_i(r_1, \psi, t) &= \mathcal{K}_i(t)(R_1 - r_1) \quad (i=1,2), \\ (r_2, \xi) \in Z_{2i} : \quad \mathcal{K}_i(r_2, \xi, t) &= \mathcal{K}_i(t)(-R_2 + r_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя введенные обозначения в (8) и (7) и учитывая, что \mathcal{C}_i^* ($i=1,2$) и \mathcal{W}_ξ^* независимы, получим уравнения движения пластины для схемы деформирования 2:

$$\rho \mathcal{C}_i^* (\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}) = P(t) (\Sigma_{i3} + \Sigma_{i4}) - M_0 (2 - \eta_i) \Sigma_{i5} \quad (i=1,2), \quad (10)$$

$$\rho \mathcal{W}_\xi^* = P(t). \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(\Psi_D, k) &= 2 \int_0^{\Psi_D} \left[\int_{\bar{l}(\Psi, t)}^{R_1} (R_1 - r_1)^2 r_1 dr_1 \right] d\Psi = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ R_1^4 \Psi_D - \int_0^{\Psi_D} [6R_1^2 \bar{l}^2(\Psi, t) - 8R_1 \bar{l}^3(\Psi, t) + 3\bar{l}^4(\Psi, t)] d\Psi \right\}, \\ \Sigma_{12}(\Psi_D, k) &= 2 \int_{\Psi_D}^{\pi} \left[\int_{R_1 - D_1}^{R_1} (R_1 - r_1)^2 r_1 dr_1 \right] d\Psi = \frac{(\pi - \Psi_D)}{6} D_1^3 (4R_1 - 3D_1), \\ \Sigma_{13}(\Psi_D, k) &= 2 \int_0^{\Psi_D} \left[\int_{\bar{l}(\Psi, t)}^{R_1} (R_1 - r_1) r_1 dr_1 \right] d\Psi = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ R_1^3 \Psi_D - \int_0^{\Psi_D} [3R_1 \bar{l}^2(\Psi, t) - 2\bar{l}^3(\Psi, t)] d\Psi \right\}, \\ \Sigma_{14}(\Psi_D, k) &= 2 \int_{\Psi_D}^{\pi} \left[\int_{R_1 - D_1}^{R_1} (R_1 - r_1) r_1 dr_1 \right] d\Psi = \frac{(\pi - \Psi_D)}{3} D_1^2 (3R_1 - 2D_1), \\ \Sigma_{15} &= \int_{L_1} dL_1 = 2\pi R_1, \quad \Sigma_{25} = \int_{L_2} dL_2 = 2\pi R_2, \\ \Sigma_{21}(\xi_D, k) &= 2 \int_0^{\xi_D} \left[\int_{R_2}^{\bar{l}_\xi(\xi, t)} (r_2 - R_2)^2 r_2 dr_2 \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \int_0^{\xi_D} [6R_2^2 \bar{l}_\xi^2(\xi, t) - 8R_2 \bar{l}_\xi^3(\xi, t) + 3\bar{l}_\xi^4(\xi, t)] d\xi - R_2^4 \xi_D \right\}, \\ \Sigma_{22}(\xi_D, k) &= 2 \int_{\xi_D}^{\pi} \left[\int_{R_2}^{R_2 + D_2} (r_2 - R_2)^2 r_2 dr_2 \right] d\xi = \frac{(\pi - \xi_D)}{6} D_2^3 (4R_2 + 3D_2), \\ \Sigma_{23}(\xi_D, k) &= 2 \int_0^{\xi_D} \left[\int_{R_2}^{\bar{l}_\xi(\xi, t)} (r_2 - R_2) r_2 dr_2 \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ R_2^3 \xi_D - \int_0^{\xi_D} [3R_2 \bar{l}_\xi^2(\xi, t) - 2\bar{l}_\xi^3(\xi, t)] d\xi \right\}, \\ \Sigma_{24}(\xi_D, k) &= 2 \int_{\xi_D}^{\pi} \left[\int_{R_2}^{R_2 + D_2} (r_2 - R_2) r_2 dr_2 \right] d\xi = \frac{(\pi - \xi_D)}{6} D_2^2 (3R_2 + 2D_2), \end{aligned}$$

где $\bar{l}(\Psi, t)$, $\bar{l}_\xi(\xi, t)$ определены в (3), (4); $D_1 = D_1(\Psi_D(t), k(t))$, $D_2 = D_2(\xi_D(t), k(t))$; $\Psi = \Psi_D$, $\xi = \xi_D$ – параметры границ областей Z_{11} и Z_{12} , Z_{21} и Z_{22} соответственно.

Из условия непрерывности скоростей на границах областей Z_p и Z_{i2} получим

$$\mathfrak{A}_i D_i = \mathfrak{A}_i \xi \quad (i=1,2). \quad (12)$$

На границах областей Z_{11} и Z_{12} (при $\psi = \psi_D$), Z_{21} и Z_{22} (при $\xi = \xi_D$) выполняются соотношения

$$D_1 = R_1 - \bar{l}(\psi_D, t), \quad D_2 = -R_2 + \bar{l}_\xi(\xi_D, t),$$

откуда, учитывая (5), получаем

$$\begin{aligned} (R_1 - D_1) \sin \psi_D &= (R_2 + D_2) \sin \xi_D, \quad \xi \neq 0; \pi, \\ (R_1 - D_1) \cos \psi_D &= (R_2 + D_2) \cos \xi_D + a, \quad \xi = 0; \pi. \end{aligned} \quad (13)$$

На границах областей Z_{21} и Z_{22} при $\xi = \xi_D$ справедливо равенство $d_l(\psi_D, t) = D_2(t)$, тогда из (2) имеем

$$D_2 = kD_1. \quad (14)$$

Система уравнений (6), (10) – (14) описывает движение пластины в случае деформирования по схеме 2. В случае схемы 1 областей Z_p и Z_{i2} ($i=1,2$) нет, а движение определяется уравнениями (1), (10) при $\psi_D = \xi_D = \pi$. В случае схемы 3 областей Z_{i1} ($i=1,2$) и шарнира l нет, движение описывается уравнениями (10) – (12) при $\psi_D = \xi_D = 0$ и замене Σ_{ij} на $\bar{\Sigma}_{ij}$ ($i=1,2; j=2,4$), считая $D_i = D_i(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{12}(D_1) &= \pi D_1^3 (4R_1 - 3D_1) / 6, & \bar{\Sigma}_{14}(D_1) &= \pi D_1^2 (3R_1 - 2D_1) / 3, \\ \bar{\Sigma}_{22}(D_2) &= \pi D_2^3 (4R_2 + 3D_2) / 6, & \bar{\Sigma}_{24}(D_2) &= \pi D_2^2 (3R_2 + 2D_2) / 3. \end{aligned}$$

В начальный момент пластина покоится:

$$\alpha_i(0) = \mathfrak{A}_i(0) = w_c(0) = \mathfrak{A}_i(0) = 0 \quad (i=1,2). \quad (15)$$

Начальные значения для функций $k(t)$, $\psi_D(t)$, $\xi_D(t)$, $D_i(t)$ ($i=1,2$) связаны с неизвестными размерами областей Z_p , Z_{ij} ($i, j=1,2$) в момент времени $t=0$ и определяются значением P_{\max} (см. ниже).

Предельную нагрузку P_0 и величину k_0 (где k_0 – значение $k(0)$ при $P_{\max} = P_0$) определим из уравнений (10) при $\psi_D = \xi_D = \pi$, считая $\mathfrak{A}_i = 0$ ($i=1,2$). Тогда

$$P_0 = M_0 (2 - \eta_1) \Sigma_{15} / \Sigma_{13}(\pi, k_0); \quad (16)$$

значение k_0 определяется из уравнения

$$(2 - \eta_1) \Sigma_{15} / \Sigma_{13}(\pi, k_0) = (2 - \eta_2) \Sigma_{25} / \Sigma_{23}(\pi, k_0). \quad (17)$$

Сравнение предельной нагрузки (16) с предельной нагрузкой, определенной по формулам из [9] показало, что предельная нагрузка в [9] больше.

На рис. 4 приведена зависимость безразмерной предельной нагрузки $p_0 = P_0 R_1^2 / M_0$ от параметров отверстия. Кривые 1 – 3 изображают случаи шарнирного опирания обоих контуров при $a = 0,3R_1$, $a = 0,2R_1$ и $a = 0$ соответственно. Видно, что при одинаковом радиусе отверстия с увеличением значения a предельная нагрузка уменьшается.

2. Проанализируем движение рассматриваемой пластины при разных уровнях взрывной нагрузки. При $0 < P_{\max} \leq P_0$ (“низкие” нагрузки) пластина не деформируется и остается в покое.

Если $P_0 < P_{\max} \leq P_1$ (“средние” нагрузки), где P_1 – нагрузка, соответствующая появлению областей Z_p и Z_{i2} ($i=1,2$), то движение происходит по схеме 1. Нагрузку P_1 определим следующим образом. Поскольку при $P_{\max} > P_1$ реализуется схема 2, то для нахождения P_1 рассматриваем уравнения для схемы 2. Дифференцируя (12) по времени и исключая из полученного соотношения функции \mathfrak{A}_i ($i=1,2$), \mathfrak{B}_i с помощью (10), (11), получим равенства

$$-\rho \mathfrak{A}_i \frac{D_i}{D_i} (\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}) = P(t)(\Sigma_{i3} + \Sigma_{i4} - \frac{\Sigma_{i1} + \Sigma_{i2}}{D_i}) - M_0(2 - \eta_i)\Sigma_{i5} \quad (i=1,2). \quad (18)$$

При образовании областей Z_p и Z_{i2} ($i=1,2$) в начальный момент выполняются соотношения: $P_{\max} = P_1$, $\mathfrak{A}_i(0) = 0$ ($i=1,2$), $\psi_D = \xi_D = \pi$. Тогда из (18) следует, что нагрузка P_1 равна:

$$P_1 = M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15} / \left[\Sigma_{13}(\pi, k_1) - \Sigma_{11}(\pi, k_1) / D_1^* \right], \quad (19)$$

где k_1 , D_i^* – значения $k(0)$, $D_i(0)$ ($i=1,2$) при $P_{\max} = P_1$. Из системы (18) при $P = P_{\max} = P_1$ следует, что k_1 определяется из уравнения

$$(2 - \eta_1) \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{13}(\pi, k_1) - \Sigma_{11}(\pi, k_1) / D_1^*} = (2 - \eta_2) \frac{\Sigma_{25}}{\Sigma_{23}(\pi, k_1) - \Sigma_{21}(\pi, k_1) / D_2^*}, \quad (20)$$

с учетом равенств (14), (13) при $\psi_D = \xi_D = \pi$, $k = k_1$, которые определяют D_i^* :

$$D_1^* = (R_1 - R_2 + a) / (1 + k_1), \quad D_2^* = k_1(R_1 - R_2 + a) / (1 + k_1).$$

Зависимость безразмерной нагрузки p_1 ($p_1 = P_1 R_1^2 / M_0$) от параметров отверстия приведена на рис. 4. Кривые 4 – 6 изображают случаи шарнирного опирания обоих контуров при $a = 0,3R_1$, $a = 0,2R_1$ и $a = 0$ соответственно. Из графиков видно, что при одинаковом радиусе отверстия с увеличением значения a нагрузка P_1 уменьшается.

Определим начальные значения $k(0)$ при движении пластины под действием “средней” нагрузки. Интегрируя (10) по времени и учитывая (15), получим

$$\rho \mathfrak{A}_i(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)\Sigma_{i3} - M_0(2 - \eta_i)\Sigma_{i5}}{\Sigma_{i1}} d\tau \quad (i=1,2).$$

Из последних равенств и (1) имеем

$$k(t) = \left[\int_0^t \frac{P(\tau)\Sigma_{13} - M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15}}{\Sigma_{11}} d\tau \right] \left[\int_0^t \frac{P(\tau)\Sigma_{23} - M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{25}}{\Sigma_{21}} d\tau \right]^{-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу $t \rightarrow 0$ и введя обозначения $\Sigma_{ij}^a = \Sigma_{ij}(\pi, k(0))$ ($i=1,2$; $j=1,3$), при учете равенств (14), (13) при $\psi_D = \xi_D = \pi$, получим уравнение для определения $k(0)$:

$$k(0) = \frac{\left[P_{\max} \Sigma_{13}^a - M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15} \right] \Sigma_{21}^a}{\left[P_{\max} \Sigma_{23}^a - M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{25} \right] \Sigma_{11}^a} \quad (k_0 < k(0) \leq k_1). \quad (21)$$

Уравнения (1), (10) при $\psi_D = \xi_D = \pi$ с начальными условиями (15), (21) определяют неизвестные функции $\mathfrak{G}_i(t)$ ($i=1,2$) и $k(t)$, описывающие поведение пластины при “средних” нагрузках. Из (1) следует, что

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 k + \mathfrak{G}_2 k^2.$$

Подставляя в последнее равенство функции $\mathfrak{G}_i(t)$ ($i=1,2$), вычисленные из (10) при $\psi_D = \xi_D = \pi$, получим дифференциальное уравнение:

$$-\rho \mathfrak{G}_2 k^2 = k \frac{P(t)\Sigma_{23}(\pi, k) - M_0(2 - \eta_2)\Sigma_{25}}{\Sigma_{21}(\pi, k)} - \frac{P(t)\Sigma_{13}(\pi, k) - M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15}}{\Sigma_{11}(\pi, k)}. \quad (22)$$

Система уравнений (1), (22), (10) при $i=1$, $\psi_D = \pi$ решается численно методом Рунге-Кутты. Момент остановки пластины t_f определяется из условия

$$\mathfrak{G}_i(t_f) = 0 \quad (i=1,2). \quad (23)$$

Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (9).

Если $P_1 < P_{\max} \leq P_2$ (“высокие нагрузки”), где P_2 – нагрузка, при которой области Z_{i1} ($i=1,2$) и шарнир l перестают существовать, то движение пластины начнется с развитой областью Z_p . В динамике пластины сначала реализуется схема 2, затем схема 1. Нагрузку P_2 определим так. Из (18), учитывая, при отсутствии областей Z_{i1} ($i=1,2$) и шарнира l , в начальный момент выполняются соотношения: $P_{\max} = P_2$, $\mathfrak{G}_i(0) = 0$ ($i=1,2$), $\psi_D = \xi_D = 0$, получим, что нагрузка P_2 равна

$$P_2 = M_0(2 - \eta_1)\Sigma_{15} / \left[\Sigma_{14}(0, k_2) - \Sigma_{12}(0, k_2) / D_1^{**} \right], \quad (24)$$

где k_2 , D_i^{**} – значения $k(0)$, $D_i(0)$ ($i=1,2$) при $P_{\max} = P_2$. Из системы (18) при $P = P_{\max} = P_2$ следует, что k_2 определяется из уравнения

$$\frac{(2 - \eta_1)\Sigma_{15}}{\Sigma_{14}(0, k_2) - \Sigma_{12}(0, k_2) / D_1^{**}} = \frac{(2 - \eta_2)\Sigma_{25}}{\Sigma_{24}(0, k_2) - \Sigma_{22}(0, k_2) / D_2^{**}}, \quad (25)$$

с учетом равенств (14), (13) при $\psi_D = \xi_D = 0$, $k = k_2$, которые определяют величины D_i^{**} :

$$D_1^{**} = (R_1 - R_2 - a) / (1 + k), \quad D_2^{**} = k_1(R_1 - R_2 - a) / (1 + k).$$

Зависимость безразмерной нагрузки p_2 ($p_2 = P_2 R_1^2 / M_0$) от параметров отверстия приведена на рис. 4. Кривые 7, 8 изображают случаи шарнирного опирания обоих контуров при $a = 0,3R_1$ и $a = 0,2R_1$ соответственно. Из графиков видно, что при одинаковом радиусе отверстия с увеличением значения a нагрузка P_2 сильно увеличивается. В случае $a = 0$ нагрузки P_1 и P_2 совпадают.

Определим начальные значения $D_{i0} = D_i(0)$ ($i=1,2$), $k(0)$, $\psi_D(0)$, $\xi_D(0)$ при движении пластины под действием “высокой” нагрузки. Из (18) при $t = 0$, $P = P_{\max}$, введя обозначения $\Sigma_{1j}^b = \Sigma_{1j}(\psi_D(0), k(0))$, $\Sigma_{2j}^b = \Sigma_{2j}(\xi_D(0), k(0))$ ($j=1, \dots, 4$), получим уравнения:

$$P_{\max} \left[\Sigma_{13}^b + \Sigma_{14}^b - (\Sigma_{11}^b + \Sigma_{12}^b) / D_{i0} \right] = M_0(2 - \eta_i)\Sigma_{i5} \quad (i=1,2), \quad (26)$$

которые вместе с (6), (13), (14) определяют величины D_{i0} ($i=1,2$), $k(0)$ ($k_1 < k(0) \leq k_2$), $\psi_D(0)$, $\xi_D(0)$.

В первой фазе деформирования пластины под действием “высокой” нагрузки ($0 < t \leq t_1$) движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (6), (10) – (14) с начальными условиями (15), (26) и (6), (13), (14) при $D = D_{i0}$ ($i=1,2$), $k = k(0)$, $\psi = \psi_D = \psi_D(0)$, $\xi = \xi_D = \xi_D(0)$. В этой фазе происходит уменьшение области Z_p ($\mathcal{B}_i > 0$, $i=1,2$) по закону (18). Система определяющих уравнений решается численно методом Рунге – Кутты. Время t_1 , соответствующее исчезновению областей Z_p , определяется из условия $\psi_D(t_1) = \xi_D(t_1) = \pi$. В момент времени t_1 вычисляются значения $\mathcal{B}_i(t_1)$, $w_c(t_1)$, $\mathcal{A}_i(t_1)$, $\alpha_i(t_1)$, $k(t_1)$, $D_i(t_1)$ ($i=1,2$).

Вторая фаза ($t_1 < t \leq t_f$) движения пластины происходит по схеме 1 до остановки в момент времени t_f . Деформирование описывается уравнениями (1), (10) при $\psi_D = \xi_D = \pi$ с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения. Время остановки определяется условием (24). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (9) с учетом всех фаз движения.

Если $P_{\max} > P_2$ (“сверхвысокие” нагрузки), то в движении пластины сначала реализуется схема 3, затем последовательно схемы 2 и 1. Уравнение (18) при $\psi_D = \xi_D = 0$ и замене Σ_{ij} на $\bar{\Sigma}_{ij}$ ($i=1,2$; $j=2,4$) примет вид:

$$-p \mathcal{B}_i \bar{\Sigma}_{i2} / D_i = P(t)(\bar{\Sigma}_{i4} - \bar{\Sigma}_{i2} / D_i) - M_0(2 - \eta_i) \Sigma_{i5} \quad (i=1,2). \quad (27)$$

Начальные значения D_{i0} ($i=1,2$) определим из (27), считая $t=0$, $P = P_{\max}$:

$$P_{\max} [\bar{\Sigma}_{i4}(D_{i0}) - \bar{\Sigma}_{i2}(D_{i0}) / D_{i0}] = M_0(2 - \eta_i) \Sigma_{i5} \quad (i=1,2). \quad (28)$$

В первой фазе деформирования пластины под действием “сверхвысокой” нагрузки ($0 < t \leq t_1$) движение происходит по схеме 3 и описывается уравнениями (10) – (12) при $\psi_D = \xi_D = 0$ и замене Σ_{ij} на $\bar{\Sigma}_{ij}$ ($i=1,2$; $j=2,4$) с начальными условиями (15), (28). В этой фазе происходит уменьшение области Z_p ($\mathcal{B}_i > 0$, $i=1,2$) по закону (27). Система определяющих уравнений решается численно методом Рунге – Кутты. Время t_1 , соответствующее появлению областей Z_{11} и шарнира l , определяется из условия (13) при $\psi_D = \xi_D = 0$: $R_1 - D_1(t_1) = R_2 + D_2(t_1) + a$. В момент времени t_1 вычисляются значения $\mathcal{B}_i(t_1)$, $w_c(t_1)$, $\mathcal{A}_i(t_1)$, $\alpha_i(t_1)$, $D_i(t_1)$ ($i=1,2$).

Вторая фаза ($t_1 < t \leq t_2$) движения пластины происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (6), (10) – (14) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения и $\psi_D = \xi_D = 0$. Кроме этого, из (14) следует, что $k(t_1) = D_2(t_1) / D_1(t_1)$. Вторая ($t_1 < t \leq t_2$) и третья $t_2 < t \leq t_f$ фазы движения происходят так же, как и первая и вторая фазы деформирования при “высоких” нагрузках при соответствующих начальных значениях. Время остановки определяется условием (23). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (9) с учетом всех фаз движения.

На рис. 5 приведены безразмерные прогибы $w(x/R_1)$ в сечении $y=0$ для круглой пластины с круглым отверстием радиуса $R_2=0,4R_1$, расположенным на расстоянии $a=0,2R_1$ от центра (здесь $w = uR_1^2\rho/(M_0T^2)$, T – время действия нагрузки). Оба контура шарнирно оперты. Для такой пластины $P_0 = 20,65M_0/R_1^2$ ($k_0 = 0,75$), $P_1 = 45,39M_0/R_1^2$ ($D_1^* = 0,45R_1$, $D_2^* = 0,35R_1$, $k_1 = 0,78$), $P_2 = 144,64M_0/R_1^2$ ($D_1^{**} = 0,22R_1$, $D_2^{**} = 0,18R_1$, $k_2 = 0,86$). На пластину действует “высокая” нагрузка, представленная прямоугольным импульсом: $P(t) = 60M_0/R_1^2$ при $0 \leq t \leq T$ и $P(t) = 0$ при $t > T$ (при этом $D_{10} = 0,36R_1$, $D_{20} = 0,29R_1$, $k(0) = 0,8$). Кривые 1 – 3 соответствуют прогибам в моменты времени $t = T$, $t = t_1 = 1,16T$, $t = t_f = 2,07T$ соответственно.

3. При выполнении условия $a \geq R_2$ для различных отношений R_2/R_1 возможно деформирование по другим схемам квазистатического разрушения. При этом возможны случаи образования новых краевых пластических шарниров l_3 не по внешнему или внутреннему контурам опирания, а внутри пластины. Тогда область пластины Z_3 , обозначенная на рис. 6, остается жесткой и не деформируется, а внутренний пластический шарнир l касается контура L_1 . Выбор схемы деформирования осуществляется путем сравнения предельных нагрузок. Динамическое поведение полученной односвязной пластины с контуром, состоящим из зашпеленного контура l_3 и части контура L_1 , подробно рассмотрено в [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

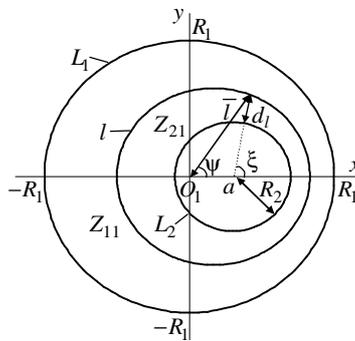


Рис. 1

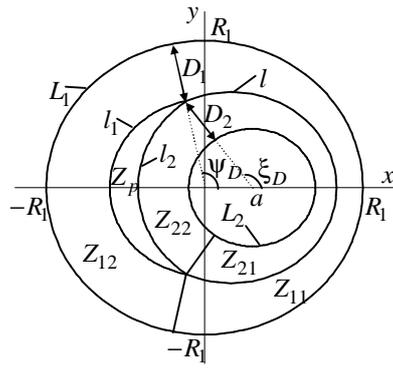


Рис. 2

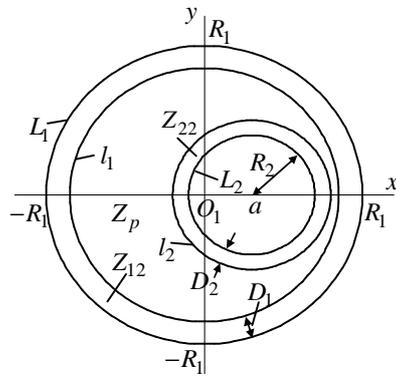


Рис. 3

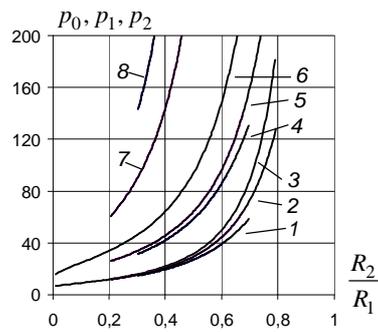


Рис. 4

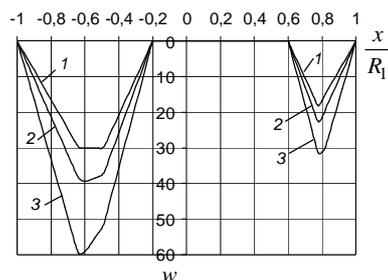


Рис. 5

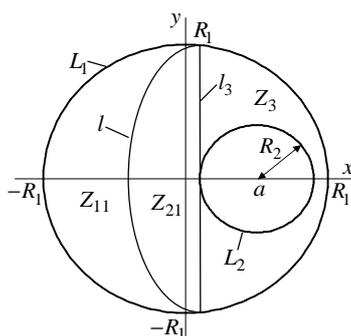


Рис. 6

г. Новосибирск

Поступила: 5 октября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 234 с.
2. *Мазалов, В. Н.* Динамика тонкостенных пластических конструкций / В. Н. Мазалов, Ю. В. Немировский // Проблемы динамики упругопластических сред. Сер. Механика. Новое в зарубежной науке, 1975. – вып. 5. – С. 155–247.
3. *Немировский, Ю. В.* Динамическое поведение двусвязных полигональных пластических плит / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Прикл. Механика. – 1987. – Т. 23. – № 5. – С. 52–59.
4. *Немировский, Ю. В.* Динамика двусвязных пластин в пластическом состоянии с кусочно-гладкими опорными контурами / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Прикл. Механика – 1992. – Т. 28. – № 4. – С. 24–31.
5. *Немировский, Ю. В.* Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // ПМТФ. – 2002. – Т. 43. – № 2. – С. 142–154.
6. *Немировский, Ю. В.* Повреждаемость жесткопластических двусвязных криволинейных пластин в вязкой среде под действием взрывных нагрузок / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Труды 7-й Всероссийской научно-технической конференции “Наука. Промышленность. Оборона” 19-21 апреля 2006, Новосибирск: НГТУ, 2006. – С. 317–323.
7. *Немировский, Ю. В.* Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины со свободным внутренним отверстием или жесткой шайбой / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова //

- Международный научно-технический сборник “Теоретическая и прикладная механика”, Минск: БНТУ, 2006, – № 21. – С. 60–66.
8. *Немировский, Ю. В.* Динамика жесткопластических двусвязных криволинейных пластин переменной толщины / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та. Серия: Механика предельного состояния. 2007. – № 2. – С. 3–15.
 9. *Немировский, Ю. В.* Пластическое деформирование двусвязных пластин с криволинейным контуром при динамических нагрузках / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск: Технопринт, 2001. – С. 515–525.
 10. *Немировский, Ю. В.* Динамическое поведение жесткопластических пластин в форме сектора / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40. – № 4. – С. 93–101.
 11. *Ерхов, М.И.* Теория идеально пластических тел и конструкций. / М.И. Ерхов – М.: Наука, 1978. – 352 с.
 12. *Немировский, Ю. В.* Динамическое деформирование жесткопластических криволинейных пластин переменной толщины / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // ПМТФ. – 2007. – Т. 48. – № 5. – С. 108–120.
 13. *Немировский, Ю. В.* Повреждаемость плоских преград с невогнутыми контурами при воздействии взрывных нагрузок / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Научный вестник НГТУ. – 2002. – № 2. – С. 77–85.