ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 3 • 2007

УДК 539.374

Ю. Н. Радаев

О ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ТЕНЗОРНОМ СООТНОШЕНИИ СИММЕТРИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Самарский государственный университет)

В работе излагаются основные положения математической теории пластичности для пространственных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона–Треска, когда течение тела подчиняется обобщенному ассоциированному закону течения. Подробно исследуются соотношения, следующие из обобщенного ассоциированного с условием пластичности Треска закона течения изотропного тела и в минимальной возможной степени ограничивающие свободу пластического течения для указанных состояний. Показано, что пространственные соотношения теории пластичности, сформулированные А. Ю. Ишлинским в 1946 г., следуют из указанного варианта теории течения. Установлено, что определяющие соотношения Ишлинского для состояний на ребре призмы Кулона–Треска выражают перестановочность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций. С помощью соотношения перестановочности получено дополнительное тензорное соотношение симметрии.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара–Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [4], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций[1], следующие из обобщенного ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые, в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи двух условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: “Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных

---

[1] А.Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение $2k$. Таким образом, для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение.” Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от “неассоциированного” определяющего закона Леви [6] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [8], [9] на трехмерный случай.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [1], [2], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара–Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона–Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения.

1. Ассоциированный закон течения является фундаментальным принципом математической теории пластичности и устанавливает [3], [5], [7], что в пространстве напряжений[2] вектор, представляющий тензор приращений пластических деформаций $d\mathbf{e}^P$, ортогонален регулярной поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma})=0$ в данном напряженном состоянии $\boldsymbol{\sigma}$:

$$d\mathbf{e}^P=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}d\lambda. \tag{1}$$

Величина $d\lambda$, называемая неопределенным множителем, положительна при активном пластическом нагружении, признаком которого является одновременное выполнение условий $f=0$, $df=0$. Следует отметить, что множитель $d\lambda$ не может быть вычислен через определяющие функции, и его значение должно вычисляться в процессе решения краевой задачи: множитель $d\lambda$ произволен в той степени, в какой это допускается уравнениями совместности полных деформаций, краевыми условиями и условиями сопряжения на границе раздела жесткой (упругой, если рассматривается упругопластическая задача) и пластической зон.

В формулировке ассоциированного закона течения участвует производная от скалярной функции текучести f по тензорному аргументу $\boldsymbol{\sigma}$, которая представляет собой тензор второго ранга и определяется согласно (см., например: Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. С. 448, 449)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial f}{\partial \sigma^{sj}}\mathbf{i}^s\otimes\mathbf{i}^j,$$

где $\mathbf{i}^j$ – контравариантные локальные базисные векторы криволинейной координатной системы. При дифференцировании по симметричному тензору второго ранга имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial f}{\partial \sigma^{sj}}\mathrm{sym}(\mathbf{i}^s\otimes\mathbf{i}^j),$$

[2] Речь идет о шестимерном пространстве напряжений. Ясно, что геометрические образы в таком пространстве довольно трудно себе представить. Однако в случае изотропного тела, как известно, можно получить геометрические образы основных соотношений математической теории пластичности в трехмерном пространстве главных напряжений.

т.е. тензор

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

симметричен.

Для изотропного тела критерий текучести $f(\boldsymbol{\sigma})=0$ связывает некоторой зависимостью главные нормальные напряжения

$$f(s_1, s_2, s_3)=0, \tag{2}$$

причем функция текучести f на самом деле зависит от трех независимых симметрических комбинаций главных нормальных напряжений; в качестве таковых могут быть выбраны линейная, квадратичная и кубическая симметрические формы главных нормальных напряжений

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3, \quad J_2 = -(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3), \quad J_3 = s_1 s_2 s_3, \tag{3}$$

называемые главными инвариантами тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$.

В теории идеальной пластичности обычно предполагается, что гидростатическое напряжение никак не влияет на текучесть, а поэтому функция текучести f в действительности зависит лишь от разностей главных нормальных напряжений, т.е. от главных касательных напряжений

$$t_1 = \frac{s_2 - s_3}{2}, \quad t_2 = \frac{s_3 - s_1}{2}, \quad t_3 = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

или от двух независимых инвариантов девиатора тензора напряжений (s_1, s_2, s_3 – собственные значения девиатора тензора напряжений)

$$J_2' = -(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \quad J_3' = s_1 s_2 s_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3),$$

которые также могут быть выражены через разности собственных значений тензора напряжений

$$J_2' = \frac{1}{6}((s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2),$$

$$J_3' = \frac{1}{27}(2s_1 - s_2 - s_3)(2s_2 - s_3 - s_1)(2s_3 - s_1 - s_2).$$

В итоге наиболее общими формами критерия текучести изотропного тела являются: форма в главных касательных напряжениях

$$f(t_1, t_2, t_3) = 0 \qquad (t_1 + t_2 + t_3 = 0) \tag{4}$$

и форма в главных инвариантах девиатора тензора напряжений

$$f(J_2', J_3') = 0. \tag{5}$$

Ассоциированный закон течения (1) для изотропного тела устанавливает соосность тензоров de^P и $\boldsymbol{\sigma}$. Действительно, если $f = f(s_1, s_2, s_3)$ – регулярная изотропная функция тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial s_1}\mathbf{l}\otimes\mathbf{l} + \frac{\partial f}{\partial s_3}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \frac{\partial f}{\partial s_2}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \tag{6}$$

где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Доказательство формулы (6) базируется на фундаментальных соотношениях дифференцирования собственных значений s_1, s_2, s_3 симметричного тензора второго ранга по самому тензору $\boldsymbol{\sigma}$

$$\frac{\partial s_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}, \quad \frac{\partial s_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \frac{\partial s_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{7}$$

Для доказательства этих соотношений зафиксируем в пространстве декартову систему координат и продифференцируем спектральное разложение тензора напряжений

$$s_{ij} = s_1 l_i l_j + s_2 m_i m_j + s_3 n_i n_j$$

по s_{ks} и в результате получим равенство (при дифференцировании не должна учитываться симметрия тензора напряжений, иначе необходимые частные производные будут вычислены неправильно)

$$d_{ik} d_{js} = \frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} l_i l_j + s_1 l_j \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_1 l_i \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} + \ldots,$$

сворачивая обе части которого сначала с l_i, а затем с l_j, приходим (невыписанные слагаемые при этом дают нулевой вклад в силу взаимной ортогональности собственных векторов) к

$$l_k l_s = \frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} + s_1 l_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_1 l_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}}.$$

Учитывая, что $l_j l_j = 1$ и поэтому

$$l_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} = 0,$$

сразу же получаем

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} = l_k l_s,$$

и аналогично

$$\frac{\partial s_2}{\partial s_{ks}} = m_k m_s, \quad \frac{\partial s_3}{\partial s_{ks}} = n_k n_s,$$

что и доказывает (7).

Если два собственных значения равны (скажем, $s_1 = s_2$), а третье с ними не совпадает, то частные производные

$$\frac{\partial s_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \frac{\partial s_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

становятся неопределенными. Однако в силу

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}$$

их сумма будет вполне определенной, т.к. выполняется равенство

$$\frac{\partial s_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial s_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}.$$

Формулы дифференцирования единичных взаимно ортогональных собственных векторов тензора напряжений по самому тензору напряжений приводятся в приложении к статье.

В главных осях тензора напряжений ассоциированный закон течения изотропного тела (1) имеет следующий вид:

$$de_j^P = \frac{\partial f}{\partial s_j} d\,l\,, \tag{8}$$

где здесь и в дальнейшем de_j^P – собственные значения тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$[3], которые, вообще говоря, отличаются от приращений собственных значений e_j^P тензора пластических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^P$. С учетом этого замечания, спектральное разложение тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ представляется как

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}de_1^P + \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}de_2^P + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}de_3^P.$$

Для изотропного тела в силу указанной выше формы критерия текучести (2) и ассоциированного закона течения (8) наиболее удобно геометрическое представление основных соотношений в трехмерном пространстве главных напряжений Хэя–Вестергарда (B.P. Haigh, 1920 г.; H.M. Westergaard, 1920 г.).

В пространстве главных напряжений тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ представляется связанным вектором с компонентами (s_1, s_2, s_3), а тензор приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ – свободным вектором, компоненты которого есть (de_1^P, de_2^P, de_3^P). Длины этих векторов мы будем обозначать соответственно через $|\boldsymbol{\sigma}|$, $|d\boldsymbol{\varepsilon}^P|$:

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \quad |d\boldsymbol{\varepsilon}^P| = \sqrt{(de_1^P)^2 + (de_2^P)^2 + (de_3^P)^2}.$$

В пространстве главных напряжений критерий текучести (2) определяет некоторую поверхность – поверхность текучести. Плоскость в пространстве главных напряжений, равнонаклоненная к декартовым осям этого пространства (синоптическая плоскость), называется девиаторной плоскостью. Она задается уравнением $s_1 + s_2 + s_3 = 0$. Поверхность текучести представляет собой цилиндр с образующей, перпендикулярной девиаторной плоскости. Кривая пересечения поверхности текучести и девиаторной плоскости называется кривой текучести. Ясно, что начало координат пространства главных напряжений располагается внутри кривой текучести и любой радиус может пересекать кривую текучести только один раз. Кривая текучести изотропного тела имеет шесть осей симметрии: она симметрична относительно прямых, являющихся проекциями (проектирование осуществляется параллельно оси $s_1 = s_2 = s_3$) декартовых осей s_1, s_2, s_3 на девиаторную плоскость, и прямых, расположенных в девиаторной плоскости ортогонально указанным проекциям[4].

Ассоциированный закон течения изотропного тела, в случае, когда функция текучести зависит лишь от разностей главных нормальных напряжений, позволяет заключить, что пластическое течение несжимаемо, т.е.

$$de_1^P + de_2^P + de_3^P = 0.$$

---

[3] Или главные приращения пластических деформаций.

[4] Прямые, расположенные в девиаторной плоскости ортогонально проекциям декартовых осей пространства главных напряжений, называются линиями чистого сдвига и представляют собой траектории нагружения, соответствующие деформациям чистого сдвига.

Следовательно, вектор, представляющий в пространстве главных напряжений тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, всегда параллелен девиаторной плоскости, и поэтому всегда ортогонален кривой текучести. Длина этого вектора $|d\boldsymbol{\varepsilon}^P|$ ассоциированным законом течения никак не ограничивается.

2. Сен-Венаном, на основании опытных данных Треска, было предложено условие пластичности, состоящее в том, что текучесть тела наступает как только максимальное касательное напряжение t_{max} достигает некоторого критического значения k:

$$t_{\max} = k.$$

Здесь постоянная k представляет собой предел текучести при чистом сдвиге. В период 1864–1872 гг. Треска провел большую серию экспериментов по выдавливанию металлов через матрицы различных форм, указав на постоянство максимального касательного напряжения в пластическом состоянии. Сен-Венан одним из первых признал важность открытия Треска и использовал критерий максимального касательного напряжения для построения математической теории пластичности.

Условие текучести Треска[5] или условие максимального касательного напряжения выражается в терминах главных нормальных напряжений в форме

$$\max\left\{|s_1 - s_2|, |s_1 - s_3|, |s_2 - s_3|\right\} = 2k, \tag{9}$$

k – предел текучести при чистом сдвиге.

Величины

$$t_1 = \frac{s_2 - s_3}{2}, \quad t_2 = \frac{s_3 - s_1}{2}, \quad t_3 = \frac{s_1 - s_2}{2} \tag{10}$$

называются главными касательными напряжениями и представляют собой, как известно, экстремальные значения касательных напряжений для всех возможных площадок, проходящих через заданную точку[6].

В пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая уравнением (9), представляет собой правильную шестигранную призму (призма Кулона–Треска), ось которой равнонаклонена к декартовым осям этого пространства. Кривая текучести (сечение призмы Кулона–Треска девиаторной плоскостью $s_1 + s_2 + s_3 = 0$) представляет собой правильный шестиугольник с центром в начале координат и стороной, равной $2\sqrt{2/3}k$.

Используя главные касательные напряжения, уравнение призмы может быть представлено в форме

$$\left[t_1^2 - k^2\right]\left[t_2^2 - k^2\right]\left[t_3^2 - k^2\right] = 0. \tag{11}$$

Равенство $\operatorname{sgn}(t_g)t_g = k$ $(g = 1, 2, 3)$ может достигаться лишь для одного из трех главных касательных напряжений, если ни одно из них не равно нулю, или для двух, если третье главное касательное напряжение при этом равно нулю (тогда какие-либо два из главных напряжений равны друг другу).

---

[5] В научной литературе разных стран иногда это условие текучести связывают (с различной степенью обоснованности) с именами Кулона (C.A. Coulomb, 1773 г.), Геста (J. Guest, 1900 г.) и Мора (O. Mohr, 1900 г.).

[6] Индексы в обозначениях для главных касательных напряжений выбраны, исходя из правила циклической перестановки.

Это же уравнение, выраженное через главные инварианты девиатора тензора напряжений J_2', J_3', будет иметь следующий вид:

$$4J_2'^3 - 27J_3'^2 - 36k^2 J_2'^2 + 96k^4 J_2' = 64k^6 \tag{12}$$

или

$$8(2k^2 - J_2')^3 - 4J_2'^2(3k^2 - J_2') + 27J_3'^2 = 0. \tag{13}$$

Уравнение призмы в такой сложной форме (найденное впервые М. Леви) практически бесполезно, никогда не применяется и представляет главным образом исторический интерес[7].

3. Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером в 1953 г. Это обобщение (см. [10]) основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа p гладких поверхностей текучести $f_g(\boldsymbol{\sigma}) = 0$, каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Активное нагружение, сопровождающееся изменением пластических деформаций, определяется условиями

$$f_w = 0, \quad df_w = 0, f_k = 0, \quad df_k < 0 \text{ или } f_k < 0,$$

где индексы w и k различны, и их значения в совокупности исчерпывают все значения индекса $g = 1, 2, ..., p$, причем индекс w пробегает непустое множество значений.

Полное приращение $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ есть сумма соответствующих всем индексам w приращений $d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(w)}$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_w d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(w)},$$

где каждое приращение $d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(w)}$ вычисляется согласно ассоциированному закону течения с регулярной функцией текучести f_w

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(w)} = \frac{\partial f_w}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\,l_w,$$

а величины $d\,l_w$ должны быть положительными. Множители $d\,l_w$ неопределенны в том смысле, что они не могут быть вычислены через определяющие функции и произвольны до такой степени, в какой это допускается условиями совместности полных деформаций, краевыми условиями и условиями сопряжения на поверхностях, ограничивающих пластическую зону.

---

[7] Как указывалось В.В. Соколовским, в оригинальной работе М. Леви цифры 3 и 4 во втором члене уравнения (13) ошибочно переменены местами, что было обнаружено И.Я. Штаерманом. См. по этому поводу: Соколовский В.В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. С. 67, 68.

Окончательно обобщенный ассоциированный закон течения принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
& d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_{g=1}^{p} \frac{\partial f_g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\,l_g, \\
& d\,l_g > 0 \quad (f_g = 0,\ df_g = 0), \\
& d\,l_g = 0 \quad (f_g = 0,\ df_g < 0 \text{ или } f_g < 0).
\end{aligned} \tag{14}
$$

Геометрически обобщенный ассоциированный закон течения устанавливает, что в угловой точке поверхности текучести вектор, представляющий приращения пластических деформаций в пространстве напряжений, является линейной комбинацией нормальных к поверхностям $f_w = 0$ в указанной точке векторов, причем ни абсолютная величина, ни направление указанного вектора в угловой точке поверхности нагружения обобщенным ассоциированным законом течения не фиксируются, а остаются неопределенными. Так, в угловой точке шестиугольника Треска вектор, представляющий приращения пластических деформаций, может иметь любое абсолютное значение и занимать любое положение между нормалями к сторонам шестиугольника, сходящимся в угловую точку.

4. Рассмотрим уравнения обобщенного ассоциированного закона течения применительно к условию текучести Треска. Обозначая, как обычно, через t_1, t_2, t_3 экстремальные (главные) касательные напряжения

$$
t_1 = \frac{s_2 - s_3}{2}, \quad t_2 = \frac{s_3 - s_1}{2}, \quad t_3 = \frac{s_1 - s_2}{2},
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
& de_{ij}^P = \sum_g \mathrm{sgn}(t_g) \frac{\partial t_g}{\partial s_{ij}} d\,l_g \qquad (g = 1,2,3), \\
& d\,l_g > 0, \text{ или } sgn(t_g)t_g = k \text{ и } dt_g = 0, \\
& d\,l_g = 0, \text{ или } sgn(t_g)t_g = k \text{ и } sgn(t_g)dt_g < 0 \text{ или } sgn(t_g)t_g < k,
\end{aligned} \tag{15}
$$

где индекс g пробегает значения 1, 2, 3 однако суммирование в правой части (15) распространяется лишь на те значения g, для которых $sgn(t_g)t_g = k$ и $dt_g = 0$, т.е. в правой части содержится не более двух слагаемых. При записи выражения для главного касательного напряжения t_g не должна учитываться симметрия тензора напряжений, иначе значения частных производных

$$
\frac{\partial t_g}{\partial s_{ij}}
$$

в правой части (15) будут вычислены неправильно.

Обобщенный ассоциированный с условием пластичности Треска закон течения (15) устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

Частные производные в правой части (15) в координатной системе, ориентированной вдоль главных осей тензора напряжений, в том случае, когда указанная координатная система однозначно определена (т.е. когда ни одно из главных касательных напряжений t_g не равно нулю), без труда вычисляются, если заметить, что тогда

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{diag}(s_1, s_2, s_3)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial s_l}{\partial s_{ij}} = d_{il} d_{ij} \qquad (i, j, l = 1, 2, 3;\ \text{по } i \text{ не суммировать}) \tag{16}$$

Эта формула – координатное представление основных тензорных соотношений для дифференцирования собственных значений s_1, s_2, s_3 симметричного тензора второго ранга по самому тензору $\boldsymbol{\sigma}$

$$\frac{\partial s_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}, \quad \frac{\partial s_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \frac{\partial s_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{17}$$

В результате в указанной координатной системе находим

$$\begin{gathered} -\frac{\partial t_1}{\partial s_{33}} = \frac{\partial t_1}{\partial s_{22}} = \frac{1}{2}, \\ -\frac{\partial t_2}{\partial s_{11}} = \frac{\partial t_2}{\partial s_{33}} = \frac{1}{2}, \\ -\frac{\partial t_3}{\partial s_{22}} = \frac{\partial t_3}{\partial s_{11}} = \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{18}$$

Остальные частные производные равны нулю.

Непосредственный подсчет с помощью (15), (18) показывает, что в главных осях напряжений матрица тензора $\boldsymbol{d\varepsilon}^P$ диагональна

$$\boldsymbol{d\varepsilon}^P = \mathrm{diag}(de_1, de_2, de_3),$$

т.е. ориентации главных осей напряжений и главных осей приращений деформаций одинаковы.

В случае течения на ребре призмы Кулона–Треска $s_3 - s_1 = 2k$, $s_3 - s_2 = 2k$, когда имеет место равенство двух главных нормальных напряжений $s_1 = s_2$, равенства (16), (18) в координатной системе, связанной с главными направлениями тензора напряжений, остаются справедливыми, правда, неопределенной будет сама координатная система, ибо неопределенны ориентации векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, с помощью которой эти равенства формулируются[8].

---

[8] Именно по этой причине координатная форма записи обобщенного ассоциированного закона течения (15), в отличие от прямой тензорной записи, не вполне отражает существо ситуации, соответствующей течению на ребре призмы Кулона–Треска. Частные производные

$$\frac{\partial t_g}{\partial s_{ij}},$$

вычисляются в главных осях напряжений, согласно (18) в координатной системе, которая не вполне определена.

Подсчет суммы главных приращений de_j^P на основании (15), (18) позволяет заключить, что выполняется условие несжимаемости.

Обратимся к более детальному исследованию уравнений обобщенного ассоциированного закона течения, предполагая, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона–Треска, а третье главное напряжение является максимальным: $s_3 - s_1 = 2k$, $s_3 - s_2 = 2k$. Ясно, что при этом имеет место равенство двух главных напряжений $s_1 = s_2$. В терминах главных касательных напряжений этот случай характеризуется выполнением условий $t_1 = -k$, $t_2 = k$, $t_3 = 0$.

Равенство двух главных напряжений $s_1 = s_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона–Треска, т.е. в состоянии полной пластичности, имеется известная доля произвола при выборе собственных векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ (они определены с точностью до поворота в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$). Их преимущественное положение в упомянутой плоскости указывается ориентацией собственных векторов тензора приращений пластических деформаций de^P, который в силу обобщенного ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и обладает, поскольку, вообще говоря, $de_1 \neq de_2$, уникальным триэдром главных направлений. Следовательно, обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона–Треска, устанавливает совпадение только одной из трех главных осей тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, накладывая тем самым минимум кинематических ограничений. Это обстоятельство мы будем характеризовать термином “1/3-соосность” тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$.

Для течения на ребре призмы Кулона–Треска “1/3-соосность” тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ достаточна для их соосности в том смысле, что существует хотя бы одна тройка взаимно ортогональных направлений, которая будет главной как для тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, так и для тензора $\boldsymbol{\sigma}$. Действительно, тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, будучи симметричным тензором второго ранга, обладает, по меньшей мере, одной тройкой ортогональных друг другу главных осей. Одна из главных осей имеет направление вектора $\mathbf{n}$, поэтому две другие располагаются в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$. Поскольку в этой плоскости любое направление будет главным для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, то остается только причислить те две оси к главным осям напряжений, чтобы указать общую (для тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$) тройку главных осей. Итак, при исследовании течения на ребре призмы Кулона–Треска никогда не следует забывать об указанном обстоятельстве: триэдр главных направлений тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ всегда будет и триэдром главных направлений тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, но не всякий триэдр главных направлений тензора напряжений будет триэдром главных направлений тензора приращений пластических деформаций.

Обозначая, как было оговорено выше, через de_j^P собственные значения тензора приращений пластических деформаций, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения для ребра призмы Кулона–Треска $t_1 = -k$, $t_2 = k$, $t_3 = 0$ представим в общих главных осях напряжений и приращений пластических деформаций в виде

$$
\begin{aligned}
de_1^P &= -d\,l_2, \\
de_2^P &= -d\,l_1, \\
de_3^P &= d\,l_1 + d\,l_2,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где $d\,l_g$ – неопределенные множители теории идеальной пластичности. Следовательно, обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона–Треска, эквивалентен двум условиям: условию “1/3-соосности” тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и условию

$$de_1^P + de_2^P + de_3^P = 0,$$

характеризующему несжимаемость пластического деформирования.

Заметим также, что в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска $t_1 = -k$, $t_2 = k$, $t_3 = 0$ обобщенный ассоциированный закон течения накладывает следующие ограничения на знаки главных приращений пластических деформаций:

$$de_1^P < 0, \quad de_2^P < 0, \quad de_3^P > 0. \tag{20}$$

Таким образом, становится ясным, что формулировка пространственных уравнений теории пластичности на основе условия полной пластичности и обобщенного ассоциированного закона течения на ребре призмы Кулона–Треска является непосредственным обобщением уравнений Сен-Венана для плоской задачи [8], [9] со всеми особенностями, присущими теории плоской задачи: формальная статическая определимость и гиперболичность уравнений.

5. В точности такие же уравнения пространственной задачи математической теории пластичности были установлены А.Ю. Ишлинским [4] в 1946 г. (См. также: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 62-83. Здесь на с. 80 приводится полная система уравнений для пространственной задачи математической теории пластичности в рамках гипотезы полной пластичности Хаара–Кармана.) В этой работе А.Ю. Ишлинский отказался от “неассоциированного” определяющего закона Леви [6] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [8], [9] на трехмерный случай. В явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи двух условий пластичности

$$f_1(s_1, s_2, s_3) = 0, \quad f_2(s_1, s_2, s_3) = 0,$$

в качестве которых он принял уравнения двух пересекающихся граней призмы Кулона–Треска, уравнения несжимаемости и условий соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$, которые он принял в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
s_{11}de_{12} + s_{12}de_{22} + s_{13}de_{23} &= s_{21}de_{11} + s_{22}de_{12} + s_{23}de_{13}, \\
s_{21}de_{31} + s_{22}de_{32} + s_{23}de_{33} &= s_{31}de_{21} + s_{32}de_{22} + s_{33}de_{23}, \\
s_{31}de_{11} + s_{32}de_{12} + s_{33}de_{13} &= s_{11}de_{31} + s_{12}de_{32} + s_{13}de_{33}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Три последних уравнения, по существу, выражают перестановочность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$, т.е.

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon}^P)=(d\boldsymbol{\varepsilon}^P)\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Обосновать перестановочность двух тензоров второго ранга, если они соосны, довольно просто: поскольку тензоры $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ имеют, по крайней мере, одну общую ортонормированную тройку собственных векторов, то ее можно принять в качестве базиса, а в этом базисе матрицы рассматриваемых тензоров диагональны

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3),\quad d\boldsymbol{\varepsilon}^P=\mathrm{diag}(de_1^P,de_2^P,de_3^P)$$

и, следовательно, перестановочны.

Справедливо и обратное утверждение: если два симметричных тензора второго ранга $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ перестановочны, то они соосны, т.е. имеют, по крайней мере, одну общую тройку взаимно ортогональных главных осей. Доказательство разобьем на три случая.

Сначала предположим, что все собственные значения симметричного тензора $\mathbf{A}$ различны, и то же самое предположим относительно тензора $\mathbf{B}$:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\b_1&b_2&b_3\\b_1^2&b_2^2&b_3^2\end{vmatrix}\neq 0.$$

Если $\mathbf{k}$ – собственный вектор тензора $\mathbf{A}$, то $\mathbf{Ak}=l\mathbf{k}$, и поскольку

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{Ak}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Bk}=l\,\mathbf{Bk},$$

$\mathbf{Bk}$ – собственный вектор тензора $\mathbf{A}$ с тем же самым собственным значением l. В силу одномерности собственных подпространств тензора $\mathbf{A}$ имеем $\mathbf{Bk}=m\mathbf{k}$, следовательно, $\mathbf{k}$ – собственный вектор тензора $\mathbf{B}$. Аналогичные рассуждения приводят к заключению о том, что если $\mathbf{s}$ – собственный вектор тензора $\mathbf{B}$, то $\mathbf{s}$ – собственный вектор тензора $\mathbf{A}$. Но это означает, что тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соосны. Остается рассмотреть случаи, когда один из тензоров $\mathbf{A}$ или $\mathbf{B}$ (или они оба) имеет (имеют) кратные собственные значения.

Предположим, что один из тензоров $\mathbf{A}$ или $\mathbf{B}$ имеет три одинаковых собственных значения. Тогда он пропорционален единичному тензору $\mathbf{I}$, а для него любой триэдр взаимно ортогональных направлений будет главным. И в этом случае тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ оказываются соосными.

Наконец предположим, что один из тензоров (скажем, тензор $\mathbf{A}$) имеет ровно два одинаковых собственных значения $a_1=a_2\neq a_3$. Наличие или отсутствие кратных собственных значений у тензора $\mathbf{B}$ в дальнейших рассуждениях несущественно. Тройку взаимно ортогональных собственных векторов тензора $\mathbf{A}$ обозначим через $\mathbf{k}_j$. Вектор $\mathbf{k}_3$ будет также и собственным вектором тензора $\mathbf{B}$ (см. первый случай). Два других собственных вектора тензора $\mathbf{B}$ будут располагаться в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{k}_3$. В плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{k}_3$, любое направление будет главным для тензора $\mathbf{A}$, поэтому вектор $\mathbf{k}_1$ всегда можно повернуть в указанной плоскости так, чтобы он стал также и собственным вектором тензора $\mathbf{B}$. Остается построить вектор $\mathbf{k}_2$, ортогонально векторам $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_3$, чтобы указать общую тройку взаимно ортогональных главных осей тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Доказательство, тем самым, завершается.

В декартовой системе координат перестановочность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ приводит к соотношениям

$$s_{il} de_{lj}^P = s_{lj} de_{il}^P, \tag{22}$$

которые при $i = 1$, $j = 2$; $i = 2$, $j = 3$; $i = 3$, $j = 1$ дают соотношения соосности Ишлинского.

По причинам, рассмотренным выше, соотношения соосности Ишлинского можно назвать также соотношениями перестановочности.

Соотношения перестановочности Ишлинского в качестве следствия приводят к симметрии тензора $\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. Действительно, из симметрии каждого из тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и их перестановочности следует

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)^{\mathrm{T}} = (d\boldsymbol{\varepsilon}^P)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P,$$

т.е.

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P. \tag{23}$$

Итак, в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска “1/3-соосность” тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ достаточна для их соосности, понимаемой в том смысле, что существует хотя бы одна тройка взаимно ортогональных направлений, которая будет главной как для тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, так и для тензора $\boldsymbol{\sigma}$. Поэтому “1/3-соосность” тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ влечет перестановочность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$, фиксируемую посредством соотношений перестановочности А.Ю. Ишлинского (21) и соотношения симметрии (23). В итоге приходим к заключению: пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях/ Д.Д. Ивлев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124. – 3. – С. 546-549.[9]
2. *Ивлев, Д.Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д.Д. Ивлев // Прикл. матем. и механика. – 1958. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 90-96.[10]
3. *Ивлев, Д.Д.* Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
4. *Ишлинский, А.Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А.Ю. Ишлинский // Уч. зап. МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90-108. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 62-83. В заключительном подстрочном замечании А.Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)
5. *Качанов, Л.М.* Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
6. *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: Сб. ст. /М. Леви // Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 20-23[11].

---

[9] См. также: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 15-20.

[10] См. также: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 5-14.

7. *Радаев, Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. / Ю.Н. Радаев Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.
8. *De Saint-Venant, B.* Memóire sur l'établissement des équations differéntielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. – 1871. – t. 16. – pp. 308-316, 373-382.[12]
9. *De Saint-Venant, B.* Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état /B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – t. 70. – pp. 473-480.
10. *Koiter, W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface /W.T. Koiter // Quart. Appl. Math. V. 11. 3. 1953. P. 350-354.

г. Самара
Поступила: 2 марта 2007 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ:

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА ПО САМОМУ ТЕНЗОРУ

Вычислим производные от единичных взаимно ортогональных собственных векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ по самому тензору напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Полученные формулы будут справедливы для любого симметричного тензора второго ранга[13].

Для этого зафиксируем в пространстве декартову систему координат и продифференцируем спектральное разложение тензора напряжений

$$s_{ij} = s_1 l_i l_j + s_2 m_i m_j + s_3 n_i n_j$$

---

[11] Оригинальная работа: Levy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delá des limites oú l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état// Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1870, t. 71, pp. 1323-1325.

[12] Имеется перевод на русский язык: Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: Сб. ст.// Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 11-19.

[13] По поводу определения производной вектора по тензорному аргументу см., например: Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. С. 451-453. Если $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{A})$ есть векторная функция от тензорного аргумента, то частную производную $\partial \mathbf{a} / \partial \mathbf{A}$ – мы определяем как тензор третьего ранга

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{i}^l \otimes \mathbf{i}^j \otimes \mathbf{i}^s \frac{\partial a_l}{\partial A^{js}},$$

где i^j – контравариантные локальные базисные векторы криволинейной системы координат в пространстве.

Такое определение позволяет представить вариацию вектора $\mathbf{a}$, отвечающую вариации тензора $\mathbf{A}$, в форме

$$d\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{A}} \cdot\cdot d\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

по s_{ks} (при дифференцировании *не должна* учитываться симметрия тензора напряжений, иначе необходимые частные производные будут вычислены неправильно) и в результате получим равенство

$$d_{ik}d_{js} = \frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} l_i l_j + s_1 l_j \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_1 l_i \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} + \ldots,$$

которое преобразуем, используя

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_{ks}} = l_k l_s,$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial s_{ks}} = m_k m_s,$$

$$\frac{\partial s_3}{\partial s_{ks}} = n_k n_s.$$

В результате имеем

$$d_{ik}d_{js} = l_k l_s l_i l_j + s_1 l_j \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_1 l_i \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} + m_k m_s m_i m_j + s_2 m_j \frac{\partial m_i}{\partial s_{ks}} + s_2 m_i \frac{\partial m_j}{\partial s_{ks}} +$$
$$+ n_k n_s n_i n_j + s_3 n_j \frac{\partial n_i}{\partial s_{ks}} + s_3 n_i \frac{\partial n_j}{\partial s_{ks}}.$$

Сворачивая обе части этого равенства с l_j, приходим к

$$l_s d_{ik} = l_k l_s l_i + s_1 \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} + s_2 m_i l_j \frac{\partial m_j}{\partial s_{ks}} + s_3 n_i l_j \frac{\partial n_j}{\partial s_{ks}},$$

откуда на основании[14]

$$l_j \frac{\partial m_j}{\partial s_{ks}} = -m_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}}, \quad l_j \frac{\partial n_j}{\partial s_{ks}} = -n_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}}$$

получаем

$$l_s d_{ik} = l_k l_s l_i + s_1 \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} - s_2 m_i m_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} - s_3 n_i n_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}}.$$

Сворачивая обе части последнего равенства с m_i, находим

$$l_s m_k = s_1 m_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} - s_2 m_j \frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} = (s_1 - s_2) m_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}}$$

и аналогично (сворачивая с n_i)

$$l_s n_k = (s_1 - s_3) n_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}}.$$

Учитывая еще, что в силу $l_i l_i = 1$

[14] Приводимые далее соотношения следуют из условий ортогональности $l_j m_j = 0$, $l_j n_j = 0$.

$$l_i \frac{\partial l_i}{\partial s_{ks}} = 0,$$

имеем

$$\frac{\partial l_j}{\partial s_{ks}} = \frac{l_s m_k}{s_1 - s_2} m_j + \frac{l_s n_k}{s_1 - s_3} n_j$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s_{ks}} = \frac{l_s m_k}{s_1 - s_2} \mathbf{m} + \frac{l_s n_k}{s_1 - s_3} \mathbf{n},$$

что в прямой тензорной записи (после тензорного умножения справа на базисную диаду $\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_s$, суммирования по повторяющимся индексам и симметризации) дает

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{s_1 - s_2} \mathbf{m} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{l}) + \frac{1}{s_1 - s_3} \mathbf{n} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{l}).$$

Не представляет труда получить формулы для частных производных от оставшихся собственных векторов. Приведем окончательный результат

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{s_1 - s_2} \mathbf{m} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{l}) + \frac{1}{s_1 - s_3} \mathbf{n} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{l}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{s_2 - s_1} \mathbf{l} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{m}) + \frac{1}{s_2 - s_3} \mathbf{n} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{s_3 - s_2} \mathbf{m} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) + \frac{1}{s_3 - s_1} \mathbf{l} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}).$$

Для состояний на ребре призмы Кулона–Треска $s_1 = s_2 = s_3 - 2k$ имеем

$$2k \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{m} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) + \mathbf{l} \otimes \mathrm{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n})$$

или, учитывая

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I},$$

$$2k \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{l},$$

а также

$$4k \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{l}.$$

Последнее уравнение в координатной записи имеет вид

$$4k \frac{\partial n_i}{\partial s_{sj}} = d_{is} n_j - n_j n_s n_i + m_i n_s m_j + l_i n_s l_j.$$

Сворачивая обе части этого равенства с n_j, находим

$$4kn_j \frac{\partial n_i}{\partial s_{sj}} = d_{is} - n_i n_s,$$

а сворачивая еще раз с n_s –

$$n_s n_j \frac{\partial n_i}{\partial s_{sj}} = 0.$$

Последнее равенство в прямой тензорной записи приобретает форму

$$\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = 0.$$