ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 3 • 2007

Семенов К. Т.

ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВОВ ДЕФОРМАЦИЙ В НЕОБРАТИМО СЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛАХ

(ИАПУ ДВО РАН)

Поверхности разрывов деформаций в упругопластических средах рассматривались неоднократно [1, 2, 6, 7]. Основным качественным результатом [2, 7] явилась невозможность изменения главных направлений тензора напряжений в переходном слое накопления необратимых деформаций. В [1] этот же результат трактуется в качестве следствия обобщения принципа максимума Мизеса на разрывы необратимых деформаций и напряжений на ударной волне. На основании данного вывода в [1, 2, 7] выводились условия возникновения поверхностей разрывов необратимых деформаций и вычислялись скорости их распространения. В качестве условия пластичности в [1] была выбрана пирамида Кулона-Мора. В настоящей заметке в качестве поверхности нагружения используется аналог условия Кулона-Мора, когда основанием пирамиды текучести является не шестиугольник Треска, а шестиугольник максимального приведенного напряжения.

1. Определяющие соотношения упруго-пластической среды

Полагаем деформации, допускаемые упругопластической средой, малыми, тогда

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = e^e_{ij} + e^p_{ij}. \qquad (1.1)$$

В (1.1) u_i – компоненты вектора перемещений, e^e_{ij} и e^p_{ij} – составляющие полных деформаций e_{ij}, обратимая (упругая) и необратимая (пластическая), соответственно. Обратимые деформации e^e_{ij} задают напряженное состояние s_{ij} в точках среды, подчиняющееся закону Гука для изотропного случая

$$s_{ij} = l e^e_{kk} d_{ij} + 2m e^e_{ij}. \qquad (1.2)$$

Необратимые деформации e^p_{ij} накапливаются в среде при ее деформировании в условиях, когда

$$f^s\left(s_{ij}, t\right) = k. \qquad (1.3)$$

В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса (1.3) выступает в качестве пластического потенциала так, что выполняются соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$e^p_{ij} = \dot{e}^p_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \Psi_s \frac{\partial f^{(s)}}{\partial s_{ij}}. \qquad (1.4)$$

В качестве параметра истории τ принимаем [5] полную объемную деформацию $e = \frac{1}{3} e_{jj}$. Заметим, что в [4] в качестве такого параметра выступала плотность среды. Точкой в (1.4) и всюду в дальнейшем обозначается производная по времени. Конкретизируем соотношения (1.3)

$$\max\left| s_i - s \right| + q s = \frac{2}{3} k, \qquad s + j\,(e) = 0. \tag{1.5}$$

В (1.5) $s = \frac{1}{3} s_{jj}$; $j\,(e)$– задаваемая функция, ответственная за закономерность необратимого сжатия материала. В пространстве главных напряжений (1.5) изображаются пирамидой, опирающейся на основание в форме шестиугольника максимального приведенного напряжения. При этом основание может сдвигаться согласно закону, соответствующему второму соотношению из (1.5). Если добавить к написанным выше равенствам уравнение движения

$$s_{ij,j} = r\dot{u}_i. \tag{1.6}$$

и кинематическую зависимость $u_i = \dot{u}_i$, то на каждом участке поверхности текучести (1.5) можно будет записать замкнутую систему уравнений.

В результате динамического воздействия на упругопластическую среду в ней могут распространяться поверхности разрывов деформаций $\Sigma(t)$ с постоянной скоростью c. Следствием законов сохранения на $\Sigma(t)$ являются динамические условия совместности разрывов:

$$\left[s_{ij}\right] n_j + rc\left[u_i\right] = 0; \qquad \left[s_{ij} u_i\right] n_j + \frac{1}{2} rc\left[u_i u_i + 2E\right] = 0. \tag{1.7}$$

Здесь квадратными скобками обозначен разрыв величины на $\Sigma(t)$, так что $\left[\upsilon_j\right] = \upsilon_j^+ - \upsilon_j^-$, то есть разность значений разрывной функции, вычисленных непосредственно перед $\Sigma(t)$ и сразу за $\Sigma(t)$; n_j– компонента вектора единичной нормали к $\Sigma(t)$, направленной в сторону ее движения. Для разрывов деформаций из (1.1) и кинематического условия совместности Адамара следует

$$\left[e_{ij}\right] = -\frac{1}{2c}\left(\left[u_i\right] n_j + \left[u_j\right] n_i \right). \tag{1.8}$$

Когда на поверхности разрывов скачкообразно изменяются необратимые деформации, следствие закона сохранения энергии (второе равенство из (1.7)) сводиться [1] к зависимости

$$-\frac{1}{2}\left(s_{ij}^+ + s_{ij}^-\right)\left[e_{ij}^p\right] = \int\limits_{e_{ij}^{p+}}^{e_{ij}^{p-}} s_{ij}\, de_{ij}^p. \tag{1.9}$$

С другой стороны для любого деформируемого объема V, ограниченного поверхностью S, и, разделенного одной поверхностью разрывов $\Sigma(t)$, возможно записать уравнение скоростей работы в форме

$$\int_S s_{ij} u_i n_j dS + \int_V r c_i u_i dV = \frac{d}{dt}\int_V \left(r\frac{u_i u_i}{2} + \frac{s_{ij} e^e_{ij}}{2} \right) dV + \int_V s_{ij} e^p_{ij} dV - \int_\Sigma \frac{s^+_{ij} + s^-_{ij}}{2} \left[e^p_{ij} \right] dS. \qquad (1.10)$$

Равенство (1.9) подчеркивает термодинамический смысл последнего слагаемого в (1.10). Согласно (1.10) мощность внешних усилий (левая часть) расходуется на изменение кинетической и потенциальной энергии в объеме (первое слагаемое правой части) и на рост внутренней энергии в нем за счет диссипации работы в объеме и на поверхности разрывов $\Sigma(t)$. Заметим, что данный вывод не связан с конкретизацией модели необратимого деформирования. Соотношения (1.9) и (1.10) не зависят от выбора модели пластического течения.

Если принять положение принципа максимума Мизеса, что изначально предполагалось, то согласно (1.9) и (1.10) для необратимого процесса деформирования на поверхности разрывов $\Sigma(t)$ вытекает следующее предложение:

Когда на поверхности разрывов пластические деформации меняются от значения e^{p+}_{ij} до значения e^{p-}_{ij}, напряжения изменяются таким образом, что величина $\left(s^+_{ij} + s^-_{ij}\right)\left[e^p_{ij}\right]$ принимает максимальное значение для всех возможных s^+_{ij} и s^-_{ij}, удовлетворяющих условиям

$$f^s\left(s^+_{ij}, t^+\right) \le k, \qquad f^s\left(s^-_{ij}, t^-\right) = k.$$

Выделенное предложение является естественным обобщением принципа максимума Мизеса на случай процессов в ударной волне ($\left[e^p_{ij}\right] \ne 0$). Оно непосредственно переходит в классический принцип максимума, когда s^+_{ij} стремится к значению s^-_{ij}, а $\left[e^p_{ij}\right]$ переходит в $\dot{e}^p_{ij} = e^p_{ij}$. Именно принятие данного положения приводит к тому, что главные направления тензора напряжений не могут изменяться скачкообразно на $\Sigma(t)$.

2. Ударные волны при выполнении условия пластичности, соответствующего грани пирамиды условия текучести максимального приведенного напряжения

Будем предполагать, что единственным диссипативным процессом, допускаемым средой, включая также процессы на ударной волне, является пластическое течение. С целью записи соотношений на поверхности разрывов принимаем ее в качестве тонкого переходного слоя шириной $2h$.

Пусть наряженное состояние во всем переходном слое соответствует грани пирамиды максимального приведенного напряжения (1.5). При этом возможны следующие соотношения

$$(2+q)s_1 + (q-1)(s_2 + s_3) = 2k. \qquad (2.1)$$

$$(q-2)s_1 + (q+1)(s_2 + s_3) = 2k. \qquad (2.2)$$

Выбор (2.1) или (2.2) конкретизирует грань, но на других гранях результаты будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

2.1 Пусть напряженное состояние задается соотношением (2.1), тогда, следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$e_1^p = \left(1+\frac{q}{2}\right)y, \qquad e_2^p = e_3^p = \frac{q-1}{2}y. \tag{2.3}$$

Замкнутая система дифференциальных соотношений получается, если к (2.1) и (2.3) добавить соотношения

$$\begin{aligned} & e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), && e_{ij}^p = e_1^p l_i l_j + e_2^p m_i m_j + e_3^p n_i n_j, \\ & \dot{s}_{ij} = l e_{kk}^e d_{ij} + 2m e_{ij}^e, && s_{ij,j} - r\ddot{u}_i = 0, \\ & s_{ij} = s_1 l_i l_j + s_2 m_i m_j + s_3 n_i n_j. && \end{aligned} \tag{2.4}$$

l_{ij}, m_{ij} и n_{ij} – направляющие косинусы главных осей тензора напряжений. Для них справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} & l_i l_i = m_i m_i = n_i n_i = 1, \\ & l_i m_i = l_s n_s = m_k n_k = 0, \\ & l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = d_{ij}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где d_{ij} – символ Кронекера.

Соотношения (2.1), (2.3) и (2.4) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранной грани пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из уравнений (2.1), (2.3) и (2.4) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно окончательно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} & [s_1] l_i l_j + [s_2] m_i m_j + [s_3] n_i n_j = l d_{ij}[u_3] - h\Phi d_{ij} + m[u_i] n_j + m[u_j] n_i - 3m l_i l_j \Phi, \\ & \left(m - rc^2\right)[u_i] - \left(h n_i + 3m l_i l_3\right)\Phi + (l+m)[u_3] n_i = 0, \\ & (2+q)[s_1] + (q-1)([s_2] + [s_3]) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Выражения (2.6) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$\Phi = \int_{-h}^{h} y\,dx_3,\ h = \frac{3}{2} lq + m(q-1),\ [s_i] = -c\left(s_i^+ - s_i^-\right).$$

Выберем систему координат так, чтобы ось x_3 совпадала с нормалью к $\Sigma(t)$. Поворотом плоскости XoY вокруг оси x_3 всегда можно добиться того, чтобы $l_2 = 0$, при этом из второго соотношения системы уравнений (2.6), при $i = 2$, получим

$$\left(m - rc^2\right)[u_2] = 0. \tag{2.7}$$

Положим, что $m \neq rc^2$ (случай $m = rc^2$ будет рассмотрен далее), тогда из (2.9) следует, что $[u_2] = 0$. Тогда из первого соотношения системы уравнений (2.6) при $i = 1,\ j = 2$ и, при $i = 2,\ j = 3$ получим

$$\begin{cases} ([s_2] - [s_3]) m_1 m_2 = 0, \\ ([s_2] - [s_3]) m_3 m_2 = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

С учетом системы уравнений (2.8) из соотношений (2.6) можно получить следующие решения

Решение 1.
$\bar{l} = (\pm 1;\ 0;\ 0),\quad \bar{m} = (0;\ \pm 1;\ 0),\quad \bar{n} = (0;\ 0;\ \pm 1)$ или
$\bar{l} = (\pm 1;\ 0;\ 0),\quad \bar{m} = (0;\ 0;\ \pm 1),\quad \bar{n} = (0;\ \pm 1;\ 0)$.

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$
$$\Phi = \frac{1}{3}[u_3]\frac{q(3l + 2m) - 2m}{q(h + m) + 2m},$$
$$c^2 = \frac{m}{3r} \cdot \frac{q(4h + 6m + 3l) + 12m + 2h + 6l}{q(h + m) + 2m}.$$

Следовательно, разрыв является продольным и приводит к расширению среды $[u_3] > 0$. Нормаль к поверхности разрывов коллинеарна либо второму, либо третьему главному направлению тензора напряжения. Если для скорости продвижения поверхности разрывов исключить пластическую сжимаемость ($q = 0$), то получим

$$c^2 = \frac{3l + 5m}{3r}.$$

Решение 2.
$\bar{l} = (0;\ 0;\ \pm 1),\quad \bar{m} = (0;\ \pm 1;\ 0),\quad \bar{n} = (\pm 1;\ 0;\ 0)$ или
$\bar{l} = (0;\ 0;\ \pm 1),\quad \bar{m} = (\pm 1;\ 0;\ 0),\quad \bar{n} = (0;\ \pm 1;\ 0)$.

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$
$$\Phi = \frac{1}{3}[u_3]\frac{q(3l + 2m) + 4m}{q(h + m) + 2m},$$
$$c^2 = \frac{2m}{3r} \cdot \frac{(1 - q)(3l - 2h)}{q(h + m) + 2m}.$$

Разрыв является продольным и приводит к расширению среды $[u_3] > 0$. Нормаль к поверхности разрывов, при этом, коллинеарна первому главному направлению тензора напряжения. При исключении для скорости продвижения поверхности разрывов пластической сжимаемости, получим известное [2; 7] значение

$$c^2 = \frac{3l + 2m}{3r}.$$

Решение 3.

Наиболее интересным здесь является случай, когда нормаль к поверхности разрывов ортогональна либо второму, либо третьему главному направлению тензора напряжений. Разрыв в этом случае оказывается комбинированным ($[u_3] \neq 0$ и $[u_1] \neq 0$) и движется со скоростью, меньшей скорости движения бездиссипативного сдвигового разрыва. Полное решение в этом случае записывается в форме:
$\bar{l} = (l_1;\ 0;\ l_3),\quad \bar{m} = (0;\ \pm 1;\ 0),\quad \bar{n} = (n_1;\ 0;\ n_3)$ или
$\bar{l} = (l_1;\ 0;\ l_3),\quad \bar{m} = (m_1;\ 0;\ m_3),\quad \bar{n} = (0;\ \pm 1;\ 0)$.

$$[u_2]=0\,,\ \ [u_3]=\frac{1}{2}[u_1]\cdot\frac{1-2l_1^2}{l_1 l_3},$$
$$\Phi=2[u_3]\frac{l+m}{3m+2h},$$
$$c^2=\frac{m}{r}\cdot\frac{(1-q)(3l-2h)}{q(2h-3l)+12l-2h+9m}.$$

Существование подобных разрывов в пластически несжимаемых материалах ранее не отмечалось. При стремлении q к нулю (переход к пластической несжимаемости) получаем

$$c^2=\frac{m}{r}\cdot\frac{3l+2m}{12l+11m}.$$

В зависимости от предварительного напряженного состояния данный разрыв может увеличивать деформации изменения формы или, наоборот, уменьшать их, но всегда объемные деформации в нем приводят только к расширению среды.

Наконец, возможен случай $m=rc^2$, приводящий к бездиссипативному $(\Phi=0)$ разрыву.

2.2 Пусть напряженное состояние задается соотношением (2.2), тогда, следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$e_1^p=\frac{q-2}{2}y\,;\qquad e_2^p=e_3^p=\frac{q+1}{2}y\,. \tag{2.9}$$

Замкнутая система дифференциальных соотношений получается, если к (2.2) и (2.9) добавить соотношения (2.4).

Соотношения (2.2), (2.4) и (2.9) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранной грани пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из соотношений (2.2), (2.4) и (2.9) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно окончательно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned}&[s_1]l_il_j+[s_2]m_im_j+[s_3]n_in_j=l\,d_{ij}[u_3]-z\Phi d_{ij}+m[u_i]n_j+m[u_j]n_i+3ml_il_j\Phi,\\&(m-rc^2)[u_i]+(l+m)[u_3]n_i-\Phi z n_i+3ml_il_3\Phi=0,\\&(q-2)[s_1]+(q+1)([s_2]+[s_3])=0.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Соотношения (2.10) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$\Phi=\int_{-h}^{h}y\,dx_3,\ z=\frac{3}{2}l\,q+m(q+1),\ [s_i]=-c\left(s_i^+-s_i^-\right).$$

Выберем систему координат так, чтобы ось x_3 совпадала с нормалью к $\Sigma(t)$. Поворотом плоскости XOY вокруг оси x_3 всегда можно добиться того, чтобы $l_2=0$, при этом из второго соотношения системы уравнений (2.10), при $i=2$, получим соотношение (2.7).

Положим, что $m \neq rc^2$ (случай $m = rc^2$ будет рассмотрен далее), тогда из (2.9) следует, что $[u_2]=0$. Тогда из первого соотношения системы уравнений (2.6) при $i=1,\ j=2$ и, при $i=2,\ j=3$ получим

$$\begin{cases} ([s_2]-[s_3])m_1 m_2 = 0, \\ ([s_2]-[s_3])m_3 m_2 = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

С учетом системы уравнений (2.11) из соотношений (2.10) можно получить следующие решения.

Решение 1.

$\overline{l} = (\pm1;\ 0;\ 0)$, $\overline{m} = (0;\ \pm1;\ 0)$, $\overline{n} = (0;\ 0;\ \pm1)$ или

$\overline{l} = (\pm1;\ 0;\ 0)$, $\overline{m} = (0;\ 0;\ \pm1)$, $\overline{n} = (0;\ \pm1;\ 0)$.

$$[u_1]=[u_2]=0,$$
$$\Phi = \frac{1}{3}[u_3]\frac{q(3l+2m)+2m}{q(z-m)+2m},$$
$$c^2 = \frac{m}{3r}\cdot\frac{q(4z-6m-3l)+12m-2z+6l}{q(z-m)+2m}.$$

Разрыв является продольным и приводит к расширению среды $[u_3]>0$. Нормаль к поверхности разрывов, как и в предыдущем случае, коллинеарна либо второму, либо третьему главному направлению тензора напряжения. Если для скорости продвижения поверхности разрывов исключить пластическую сжимаемость ($q=0$), то получим

$$c^2 = \frac{3l+5m}{3r}.$$

Решение 2.

$\overline{l} = (0;\ 0;\ \pm1)$, $\overline{m} = (0;\ \pm1;\ 0)$, $\overline{n} = (\pm1;\ 0;\ 0)$ или

$\overline{l} = (0;\ 0;\ \pm1)$, $\overline{m} = (\pm1;\ 0;\ 0)$, $\overline{n} = (0;\ \pm1;\ 0)$.

$$[u_1]=[u_2]=0,$$
$$\Phi = \frac{1}{3}[u_3]\frac{q(3l+2m)-4m}{q(z-m)+2m},$$
$$c^2 = \frac{2m}{3r}\cdot\frac{(1+q)(3l+2z)}{q(z-m)+2m}.$$

Здесь, как и выше разрыв является продольным и приводит к расширению среды $[u_3]>0$. Нормаль к поверхности разрывов коллинеарна первому главному направлению тензора напряжения. При исключении пластической сжимаемости ($q=0$) получим

$$c^2 = \frac{3l+2m}{3r}.$$

Решение 3.

В данном случае нормаль к поверхности разрывов, как и ранее, ортогональна либо второму, либо третьему главному направлению тензора напряжений. Разрыв в этом случае оказывается комбинированным ($[u_3] \neq 0$ и $[u_1] \neq 0$) и движется со скоростью, меньшей скорости движения бездиссипативного сдвигового разрыва. Полное решение в этом случае записывается в форме

$\bar{l} = (l_1;\ 0;\ l_3)$, $\quad \bar{m} = (0;\ \pm 1;\ 0)$, $\quad \bar{n} = (n_1;\ 0;\ n_3)$ или

$\bar{l} = (l_1;\ 0;\ l_3)$, $\quad \bar{m} = (m_1;\ 0;\ m_3)$, $\quad \bar{n} = (0;\ \pm 1;\ 0)$.

$$[u_2] = 0,\ [u_3] = \frac{1}{2}[u_1] \cdot \frac{1 - 2l_1^2}{l_1 l_3},$$

$$\Phi = 2[u_3]\frac{l + m}{-3m + 2z},$$

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{(1+q)(3l + 2z)}{q(2z + 3l) + 12l + 2z + 9m}.$$

При исключении пластической сжимаемости ($q = 0$) получим

$$c^2 = \frac{m}{r} \cdot \frac{3l + 2m}{12l + 11m}.$$

В зависимости от предварительного напряженного состояния данный разрыв может увеличивать деформации изменения формы или, наоборот, уменьшать их, но всегда объемные деформации в нем приводят только к расширению среды.

Наконец, возможный случай $m = rc^2$ приводит к бездиссипативному $(\Phi = 0)$ разрыву.

3. Ударные волны при выполнении условия пластичности, соответствующего ребру пирамиды условия текучести максимального приведенного напряжения

Пусть наряженное состояние во всем переходном слое соответствует ребру пирамиды Ивлева (1.5). При этом возможны следующие соотношения

$$\begin{cases} s_1 - s + qs = \dfrac{2}{3}k, \\ s - s_3 + qs = \dfrac{2}{3}k. \end{cases} \tag{3.1}$$

Выбор соотношения (3.1) конкретизирует ребро, но на других ребрах результаты будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

Следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$\begin{aligned} e_1^p &= \frac{q+2}{2}y_1 + \frac{q+1}{2}y_2, \\ e_2^p &= \frac{q-1}{2}y_1 + \frac{q+1}{2}y_2, \\ e_3^p &= \frac{q-1}{2}y_1 + \frac{q-2}{2}y_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Соотношения (3.1), (3.2) и (2.4) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранной ребру пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из уравнений (3.1), (3.2) и (2.4) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned}
&[s_1]\left(l_i l_j+\frac{1}{2}m_i m_j\right)+[s_3]\left(n_i n_j+\frac{1}{2}m_i m_j\right)=l\,d_{ij}[u_3]+m[u_i]n_j+m[u_j]n_i+b_{ij},\\
&\left(m-rc^2\right)[u_i]+(l+m)[u_3]n_i+b_{i3}=0,\\
&(q+1)[s_1]+(q-1)[s_3]=0.
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Выражения (3.3) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$b_{ij}=-\frac{3}{2}\,l q d_{ij}(\Phi_1+\Phi_2)-m d_{ij}((q-1)\Phi_1+(q+1)\Phi_2)-3m\Phi_1 l_i l_j+3m\Phi_2 n_i n_j,$$

$$\Phi_1=\int_{-h}^{h}y_1 dx_3,\quad \Phi_2=\int_{-h}^{h}y_2 dx_3,\quad [s_i]=-c\left(s_i^+-s_i^-\right).$$

Выберем систему координат так, чтобы ось x_3 совпадала с нормалью к $\Sigma(t)$. Поворотом плоскости XOY вокруг оси x_3 всегда можно добиться того, чтобы $l_2=0$, при этом из второго соотношения системы уравнений (3.3) при $i=1$ и $j=2$ получим:

$$m_1 m_2([s_1]-[s_3]+6m\Phi_2)=0. \qquad (3.4)$$

С учетом соотношения (3.4) из уравнений (3.3) можно получить следующие решения.

Решение 1.

$\bar{l}=(\pm 1;\ 0;\ 0),\quad \bar{m}=(0;\ 0;\ \pm 1),\quad \bar{n}=(0;\ \pm 1;\ 0).$

$$[u_1]=[u_2]=0,$$

$$\Phi_1=-\frac{1}{3}[u_3]\frac{q(2q-1)(3l+2m)+6m}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$\Phi_2=\frac{1}{3}[u_3]\frac{q(2q+1)(3l+2m)+6m}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$c^2=\frac{m}{r}\cdot\frac{3l+2m}{q^2(3l+2m)+3m}.$$

Если для скорости продвижения поверхности разрывов исключить пластическую сжимаемость ($q=0$), то получим

$$c^2=\frac{3l+2m}{3r}.$$

Решение 2.

$\bar{l}=(0;\ 0;\ \pm 1),\quad \bar{m}=(m_1;\ m_2;\ 0),\quad \bar{n}=(n_1;\ n_2;\ 0).$

$$[u_1]=[u_2]=0,$$

$$\Phi_1=\frac{1}{3}[u_3]\frac{q(q+1)(3l+2m)+6m}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{3}[u_3]\frac{q(q-1)(3l+2m)}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$c^2 = \frac{m}{r}\cdot\frac{(3l+2m)(q-1)^2}{q^2(3l+2m)+3m}.$$

При исключении пластической сжимаемости ($q=0$) получим

$$c^2 = \frac{3l+2m}{3r}.$$

Решение 3.

$\bar{l} = (\pm1;\ 0;\ 0),\quad \bar{m} = (0;\ \pm1;\ 0),\quad \bar{n} = (0;\ 0;\ \pm1)$.

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{3}[u_3]\frac{q(q+1)(3l+2m)}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{3}[u_3]\frac{q(q-1)(3l+2m)+6m}{q^2(3l+2m)+3m},$$

$$c^2 = \frac{m}{r}\cdot\frac{(3l+2m)(q+1)^2}{q^2(3l+2m)+3m}.$$

Если для скорости продвижения поверхности разрывов исключить пластическую сжимаемость ($q=0$), то получим

$$c^2 = \frac{3l+2m}{3r}.$$

Таким образом, при соответствии напряженного состояния ребру пирамиды Ивлева, являющейся поверхностью нагружения необратимо сжимаемой упругопластической среды, возможны только продольные диссипативные разрывы. В зависимости от постоянной материала q такие поверхности разрывов могут приводить как к сжатию среды, так и к ее расширению.

4. Ударные волны при выполнении условия пластичности, соответствующего ребру, образованному пересечением дна и грани пирамиды условия текучести максимального приведенного напряжения

При заданном условии пластичности, с учетом (1.5), возможны следующие соотношения:

$$\begin{cases}(2+q)s_1 + (q-1)(s_2+s_3) = 2k,\\ -s = j(c),\end{cases} \tag{4.1}$$

или

$$\begin{cases}(q-2)s_1 + (q+1)(s_2+s_3) = 2k,\\ -s = j(c).\end{cases} \tag{4.2}$$

Выбор (4.1) или (4.2) конкретизирует ребро, но на других ребрах результаты будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

4.1 Пусть напряженное состояние задается соотношением (4.1), тогда, следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$e_1^p = \left(1+\frac{q}{2}\right)y_1 - \frac{1}{3}y_2, \quad e_2^p = e_3^p = \frac{q-1}{2}y_1 - \frac{1}{3}y_2. \tag{4.3}$$

Замкнутая система дифференциальных соотношений получается, если к (4.1) и (4.3) добавить соотношения (2.4).

Соотношения (4.1), (4.3) и (2.4) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранному ребру пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из уравнений (4.1), (4.3) и (2.4) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно окончательно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} &-Aj'(c)\Phi_2\left(\left(l_il_j - m_im_j\right)q - l_il_j - 2m_im_j\right) + [s_3]\left(n_in_j - m_im_j\right) = \\ &= l\,d_{ij}[u_3] + g_{ij} + m[u_i]n_j + m[u_j]n_i, \\ &\left(m - rc^2\right)[u_i] + (l+m)[u_3]n_i + g_{i3} = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Соотношения (4.4) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$g_{ij} = -\left(l + \frac{2}{3}m\right)\left(\frac{3}{2}(q-1)\Phi_1 - \Phi_2\right)d_{ij} - 3ml_il_j\Phi_1 - \frac{3}{2}l\,d_{ij}\Phi_1,$$

$$\Phi_1 = \int_{-h}^{h} y_1 dx_3, \quad \Phi_2 = \int_{-h}^{h} y_2 dx_3, \quad [s_i] = -c\left(s_i^+ - s_i^-\right).$$

При этом A – это константа, связанная с историей деформирования материала [3].

Выберем систему координат так, чтобы ось x_3 совпадала с нормалью к $\Sigma(t)$. Поворотом плоскости XoY вокруг оси x_3 всегда можно добиться того, чтобы $l_2 = 0$, при этом из второго соотношения системы уравнений (4.4), при $i = 2$, получим

$$\left(m - rc^2\right)[u_2] = 0. \tag{4.5}$$

Положим, что $m \neq rc^2$ (случай $m = rc^2$ будет рассмотрен далее), тогда из (4.5) следует, что $[u_2] = 0$. Тогда из первого соотношения системы уравнений (4.4), при $i = 1,\ j = 2$, и при $i = 2,\ j = 3$ получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} n_1n_2\left([s_3] - [s_2]\right) = 0, \\ n_3n_2\left([s_3] - [s_2]\right) = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

С учетом уравнений (4.4) и (4.6) можно получить следующие решения.

Решение 1.

$\bar{l} = (l_1;\ 0;\ l_3), \quad \bar{m} = (m_1;\ 0;\ m_3), \quad \bar{n} = (0;\ \pm 1;\ 0)$ или

$\bar{l} = (l_1;\ 0;\ l_3), \quad \bar{m} = (0;\ \pm 1;\ 0), \quad \bar{n} = (n_1;\ 0;\ n_3)$.

$$[u_2]=0\,,\ [u_3]=\frac{1}{2}[u_1]\cdot\frac{1-2l_1^2}{l_1l_3},$$

$$\Phi_1=\frac{2}{3}[u_3]\frac{9Aj'(l+m)-m(3l+2m)}{(3qAj'-m)(3l+2m)+3mAj'},$$

$$\Phi_2=-[u_3]\frac{m(q-1)(3l+2m)}{(3qAj'-m)(3l+2m)+3mAj'},$$

$$c^2=\frac{m}{r}Aj'\frac{(3l+2m)(q-1)^2}{(3l+2m)(q^2Aj'-2qAj'-m)+Aj'(12l+11m)}.$$

Решение 2.

$\bar{l}=(0;\ 0;\ \pm1),\quad \bar{m}=(0;\ \pm1;\ 0),\quad \bar{n}=(\pm1;\ 0;\ 0)$ или

$\bar{l}=(0;\ 0;\ \pm1),\quad \bar{m}=(\pm1;\ 0;\ 0),\quad \bar{n}=(0;\ \pm1;\ 0)$.

$$[u_1]=[u_2]=0,$$

$$\Phi_1=\frac{2}{3}[u_3]\frac{3qAj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$

$$\Phi_2=-4m[u_3]\frac{(q-1)(3l+2m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$

$$c^2=\frac{4m}{r}Aj'\frac{(q-1)^2(3l+2m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$

Решение 3.

$\bar{l}=(\pm1;\ 0;\ 0),\quad \bar{m}=(0;\ 0;\ \pm1),\quad \bar{n}=(0;\ \pm1;\ 0)$.

$$[u_1]=[u_2]=0,$$

$$\Phi_1=\frac{2}{3}[u_3]\frac{3qAj'(3l+2m)+4m^2+6m(l-Aj')}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$

$$\Phi_2=2m[u_3]\frac{(q+2)(3l+2m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$

$$c^2=\frac{4m}{r}\cdot\frac{(3l+2m)(q^2Aj'+qAj'-m)+Aj'(3l+5m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')}.$$

Наконец, возможный случай $m=rc^2$ приводит к бездиссипативному $(\Phi_1=\Phi_2=0)$ разрыву.

4.2 Пусть напряженное состояние задается соотношением (4.2), тогда, следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$e_1^p=\frac{q-2}{2}y_1-\frac{1}{3}y_2,\qquad e_2^p=e_3^p=\frac{q+1}{2}y_1-\frac{1}{3}y_2. \tag{4.7}$$

Аналогично пункту 4.1, получим следующие соотношения

$$-Aj'(c)\Phi_2\left(-\left(l_il_j-m_im_j\right)q-l_il_j-2m_im_j\right)+[s_3]\left(n_in_j-m_im_j\right)=$$
$$=l\,d_{ij}[u_3]+t_{ij}+m[u_i]n_j+m[u_j]n_i, \qquad (4.8)$$
$$\left(m-rc^2\right)[u_i]+(l+m)[u_3]n_i+t_{i3}=0.$$

Выражения (4.7) и (4.8) представляют собой систему уравнений в разрывах, где
$$t_{ij}=-\left(l+\frac{2}{3}m\right)\left(\frac{3}{2}(q+1)\Phi_1-\Phi_2\right)d_{ij}+3ml_il_j\Phi_1+\frac{3}{2}l\,d_{ij}\Phi_1,$$
$$\Phi_1=\int_{-h}^{h}y_1dx_3,\quad \Phi_2=\int_{-h}^{h}y_2dx_3,\quad [s_i]=-c\left(s_i^+-s_i^-\right).$$

Так же получим систему уравнений (4.6). С учетом условий (4.6) из (4.8) можно получить следующие решения

Решение 1.

$\bar{l}=(l_1;\ 0;\ l_3),\quad \bar{m}=(m_1;\ 0;\ m_3),\quad \bar{n}=(0;\ \pm1;\ 0)$ или

$\bar{l}=(l_1;\ 0;\ l_3),\quad \bar{m}=(0;\ \pm1;\ 0),\quad \bar{n}=(n_1;\ 0;\ n_3)$.

$$[u_2]=0,\ \ [u_3]=\frac{1}{2}[u_1]\cdot\frac{1-2l_1^2}{l_1l_3},$$
$$\Phi_1=\frac{2}{3}[u_3]\frac{9Aj'(l+m)-m(3l+2m)}{(3qAj'+m)(3l+2m)-3mAj'},$$
$$\Phi_2=-[u_3]\frac{m(q+1)(3l+2m)}{(3qAj'+m)(3l+2m)-3mAj'},$$
$$c^2=\frac{m}{r}Aj'\frac{(3l+2m)(q+1)^2}{(3l+2m)\left(q^2Aj'+2qAj'-m\right)+Aj'(12l+11m)}.$$

Решение 2.

$\bar{l}=(0;\ 0;\ \pm1),\quad \bar{m}=(\pm1;\ 0;\ 0),\quad \bar{n}=(0;\ \pm1;\ 0)$ или

$\bar{l}=(0;\ 0;\ \pm1),\quad \bar{m}=(0;\ \pm1;\ 0),\quad \bar{n}=(\pm1;\ 0;\ 0)$.

$$[u_1]=[u_2]=0,$$
$$\Phi_1=\frac{2}{3}[u_3]\frac{3qAj'(3l+2m)+8m^2+12m(l-Aj')}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$
$$\Phi_2=4m[u_3]\frac{(q+1)(3l+2m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$
$$c^2=\frac{4m}{r}Aj'\frac{(q+1)^2(3l+2m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')}.$$

Решение 3.

$\bar{l}=(\pm1;\ 0;\ 0),\quad \bar{m}=(0;\ \pm1;\ 0),\quad \bar{n}=(0;\ 0;\ \pm1)$ или

$\bar{l}=(\pm1;\ 0;\ 0),\quad \bar{m}=(0;\ 0;\ \pm1),\quad \bar{n}=(0;\ \pm1;\ 0)$.

$$[u_1]=[u_2]=0,$$

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}[u_3]\frac{3qAj'(3l+2m)-4m^2-6m(l-Aj')}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$
$$\Phi_2 = -2m[u_3]\frac{(q-2)(3l+2m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')},$$
$$c^2 = \frac{4m}{r}\cdot\frac{(3l+2m)(q^2Aj'-qAj'-m)+Aj'(3l+5m)}{3q^2Aj'(3l+2m)-8m^2-12m(l-Aj')}.$$

Наконец, возможный случай $m = rc^2$ приводит к бездиссипативному $(\Phi_1 = \Phi_2 = 0)$ разрыву.

5. Ударные волны при выполнении условия пластичности, соответствующего сингулярной точке пирамиды условия текучести максимального приведенного напряжения

Из выбранного условия пластичности вытекают следующие соотношения

$$\begin{cases} s_1 - s + qs = \dfrac{2}{3}k, \\ -s = j(c), \\ s - s_3 + qs = \dfrac{2}{3}k. \end{cases} \tag{5.1}$$

Выбор соотношения (5.1) конкретизирует сингулярную точку, но в других случаях результаты будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

Следуя ассоциированному закону пластического течения, получим

$$\begin{aligned} e_1^p &= \frac{q+2}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{q+1}{2}y_3, \\ e_2^p &= \frac{q-1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{q+1}{2}y_3, \\ e_3^p &= \frac{q-1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{q-2}{2}y_3. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Соотношения (5.1), (5.2) и (2.4) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую необратимое деформирование, когда напряжения соответствуют выбранной сингулярной точку пирамиды текучести. Положим, что в среде при выбранных условиях распространяется поверхность разрывов, тогда из уравнений (5.1), (5.2) и (2.4) вместе с динамическими и кинематическими условиями совместности разрывов можно окончательно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &Aj'\Phi_2\left(d_{ij} + q(n_in_j - l_il_j)\right) = l\,d_{ij}[u_3] + m[u_i]n_j + m[u_j]n_i + a_{ij}, \\ &(m - rc^2)[u_i] + (l+m)[u_3]n_i + a_{i3} = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Уравнения (5.3) представляют собой систему уравнений в разрывах, где

$$a_{ij} = -l\,d_{ij}\left(\frac{3}{2}q(\Phi_1+\Phi_3) - \Phi_2\right) - md_{ij}\left((q-1)\Phi_1 - \frac{2}{3}\Phi_2 + (q+1)\Phi_3\right) - 3m\Phi_1l_il_j + 3m\Phi_3n_in_j,$$

$$\Phi_1 = \int_{-h}^{h} y_1dx_3,\ \Phi_2 = \int_{-h}^{h} y_2dx_3,\ \Phi_3 = \int_{-h}^{h} y_3dx_3,\ [s_i] = -c(s_i^+ - s_i^-).$$

При этом A – это константа, связанная с историей деформирования материала [3].

Выберем систему координат так, чтобы ось x_3 совпадала с нормалью к $\Sigma(t)$. Поворотом плоскости XoY вокруг оси x_3 всегда можно добиться того, чтобы $l_2 = 0$, при этом из второго соотношения системы уравнений (5.3), при $i = 1$, $j = 2$, получим

$$n_1 n_2 \left(qAj'\Phi_2 - 3m\Phi_3 \right) = 0 . \tag{5.4}$$

С учетом соотношения (5.4) из уравнений (5.3) можно получить следующие решения

Решение 1.

$\bar{l} = (\pm 1;\ 0;\ 0)$, $\quad \bar{m} = (0;\ 0;\ \pm 1)$, $\quad \bar{n} = (0;\ \pm 1;\ 0)$.

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = -\frac{1}{3}[u_3]\frac{(3l + 2m)\left(2q^2 Aj' - qAj' - 2m\right) + 6mAj'}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'},$$

$$\Phi_2 = m[u_3]\frac{3l + 2m}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'},$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{3}[u_3]\frac{(3l + 2m)\left(2q^2 Aj' + qAj' - 2m\right) + 6mAj'}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'},$$

$$c^2 = \frac{m}{r}\cdot\frac{Aj'(3l + 2m)}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'}.$$

Решение 2.

$\bar{l} = (0;\ 0;\ \pm 1)$, $\quad \bar{m} = (0;\ \pm 1;\ 0)$, $\quad \bar{n} = (\pm 1;\ 0;\ 0)$ или

$\bar{l} = (0;\ 0;\ \pm 1)$, $\quad \bar{m} = (\pm 1;\ 0;\ 0)$, $\quad \bar{n} = (0;\ \pm 1;\ 0)$.

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{3}[u_3]\frac{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' + qAj' - 2m\right) + 6mAj'}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'},$$

$$\Phi_2 = -m[u_3]\frac{(3l + 2m)(q - 1)}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'},$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{3}qAj'[u_3]\frac{(3l + 2m)(q - 1)}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'},$$

$$c^2 = \frac{m}{r}\cdot\frac{Aj'(3l + 2m)(q - 1)^2}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'}.$$

Решение 3.

$\bar{l} = (\pm 1;\ 0;\ 0)$, $\quad \bar{m} = (0;\ \pm 1;\ 0)$, $\quad \bar{n} = (0;\ 0;\ \pm 1)$.

$$[u_1] = [u_2] = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{3}qAj'[u_3]\frac{(3l + 2m)(q + 1)}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'},$$

$$\Phi_2 = m[u_3]\frac{(3l + 2m)(q + 1)}{(3l + 2m)\left(q^2 Aj' - m\right) + 3mAj'},$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{3}[u_3]\frac{(3l+2m)(q^2Aj' - qAj' - 2m) + 6mAj'}{(3l+2m)(q^2Aj' - m) + 3mAj'},$$

$$c^2 = \frac{m}{r}\cdot\frac{Aj'(3l+2m)}{(3l+2m)(q^2Aj' - m) + 3mAj'}.$$

Отметим, что комбинированные диссипативные разрывы возможны только при напряженных состояниях, соответствующих граням пирамиды текучести, включая ребро при ее основании. При соответствии напряженных состояний ребрам пирамиды текучести Ивлева угловым точкам дна диссипативные разрывы оказываются исключительно продольными.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ДВО № 06-01-96005.

г. Владивосток
Поступила: 18 июля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буренин, А. А.* Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Проблемы механики сплошных сред: Сборник научных работ. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН – 1996. – С. 116–128.

2. *Быковцев, Г. И.* О распространении ударных волн в упругопластических средах / Г. И. Быковцев, Л. Д. Кретова // ППМ. – 1972. – Том 36, вып. 1. – С. 106–116.

3. *Быковцев, Г. И.* Определяющие уравнения пластически сжимаемых сред / Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Сборник научных трудов. – Владивосток : ДВО АН СССР – 1991. – С. 49–56.

4. *Григорян, С. С.* Об основных представлениях динамики грунтов / С. С. Григорян // ППМ. – 1960. – Том 24, вып. 6. – С. 1052–1072.

5. *Ивлев, Д. Д.* К теории сжимаемых идеально пластических сред / Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова // ППМ. – 1963. – Том 27, вып. 3. – С. 589–592.

6. *Лимарев, А. Е.* О распространении ударных волн в упруго-пластической среде с упрочнением / А. Е. Лимарев, А. Д. Чернышев // ПММ. – 1971. – Том 35, вып. 6. – С. 1083–1088.

7. *Садовский, В. М.* К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах / В. М. Садовский // ЖПМТФ. – 1994. – №5. – С. 166–172.