

ВЫПУЧИВАНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

(НИИ Прикладной математики Бакинского государственного университета)

В различных конструкциях в качестве несущих элементов используются тонкостенные кольца, материал которых обладает свойство нелинейных упругостей. В этой связи представляет интерес анализ выпучивания таких элементов. Актуальность и важность подобных задач связаны с изысканием резервов экономии материала с одновременным повышением несущей способности конструкции. Сложность этого исследования состоит в том, что для ряда важных приложений кольца нужно представлять как разностенные оболочки с начальным несовершенством. При этом, последнее имеет тенденцию расти под действием нагрузки и, начиная с некоторого ее значения, рост прогибов может стать катастрофически большим. Это обстоятельство приводит к необходимости учета геометрической нелинейности.

Целью настоящей статьи является исследование устойчивости эксцентричного кольца радиуса R и толщины $2h(q)$, изготовленного из нелинейно-упругого материала и подверженного равномерному внешнему давлению q . Наличие разностенности можно объяснить, например, неточностью изготовления изделия. Это обстоятельство присуще, практически, всем эксплуатируемым трубам. Для дальнейшего решения задачи воспользуемся вариационным методом смешанного типа, в котором независимо варьируются скорости напряжений и перемещений.

В связи с большим распространением в технике и строительстве кольцевых конструкций, особое значение приобретает развитие методов расчета таких конструкций на устойчивость и прочность. Здесь, для описания свойств материала кольца будем использовать уравнение нелинейной теории упругости, которое запишем в виде [4]:

$$e^{\Phi} = \frac{s}{E} \left\{ 1 + \left(\frac{s}{s_0} \right)^n \right\}, \quad (1)$$

где s – напряжение, E и s_0 соответственно модуль упругости и предел пропорциональности материала, а n – показатель нелинейности, принимающий четные значения (2, 4, 6, ...). Отметим, что при $n = 2$ уравнение (1) является достаточно хорошей аппроксимацией закона упругости для армированных пластиков, некоторых алюминиевых сплавов, дюрала и т.д. Значение $n = 4$ соответствует диаграмме линейного упрочнения. При достаточно больших n соотношение (1) приближенно описывает закон идеальной пластичности (схема Прандтля) [3].

Обозначим теперь через v и w соответственно перемещение в азимутальном направлении и прогиб. В основу предлагаемой здесь теории тонких колец ставятся следующие предположения:

а) в процессе деформирования учитывается одновременно геометрическая нелинейность по v и w . Необходимо заметить, что при прочих равных условиях учет полной нелинейности позволяет наиболее рационально использовать несущую способность конструкций [1];

в) деформация происходит в плоскости кольца;

с) в силу тонкостенности напряжение S по толщине меняется по линейному закону.

Отметим, что применимость и точность последнего допущения обоснована в [2]. Решение задачи осуществим посредством вариационного метода смешанного типа [1]. Преимущество этого подхода состоит в возможности предсказания таких явлений, которые невозможно описать с помощью обычных методов математической физики.

Учитывая гипотезу а), используемый функционал [1, 88] в полярных координатах (q, z) имеет вид

$$K = R \int_{-h(q)}^{h(q)} \int_0^{2p} \left\{ s_{\alpha\beta} + \frac{S}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial q} - v \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial q} + w \right)^2 \right] - \frac{1}{2} s_{\alpha\beta}^2 \right\} dz dq + R \int_0^{2p} v^2 dq, \quad (2)$$

где e – тензор деформации. Под точкой здесь и в дальнейшем понимается дифференцирование по q ($\dot{} = 1$) [1]. Учитывая выражение (1), функционал (2) принимает следующий вид

$$K = R \int_{-h(q)}^{h(q)} \int_0^{2p} \left\{ s_{\alpha\beta} + \frac{S}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial q} - v \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial q} + w \right)^2 \right] - \frac{R}{2} \int_0^{2p} \int_{-h(q)}^{h(q)} \frac{s^2}{E} \left\{ 1 + (n+1) \left(\frac{S}{S_0} \right)^n \right\} dz dq + R \int_0^{2p} v^2 dq \right\}. \quad (3)$$

Разностенность кольца будем аппроксимировать выражением

$$h(q) = h_0(1 + I \sin q).$$

Из физических соображений следует, что $I \in [0, 1)$. Вследствие гипотезы плоских сечений имеем

$$e = e_0 - kz.$$

Здесь ϵ_0 и изменение кривизны K определяются по формулам

$$e_0 = \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial q} \right) + \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial q} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial q} - v \right)^2 \right\}, \quad (4)$$

$$k = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} - \frac{\partial v}{\partial q} \right), \quad (5)$$

как это следует из уравнений теории тонких оболочек. Следуя предположению с), распределение напряжений по толщине примем линейным

$$s = -\frac{qR}{2h_0} + c(q) \frac{z}{h_0} \cos lq, \quad (6)$$

где l принимает четные значения и характеризует число волн в азимутальном направлении.

Заметим, что аппроксимация (6) нуждается в уточнении с целью определения таких l , при которых она удовлетворительна или существует необходимость ее представления в форме

$$s = -\frac{qR}{2h(q)} + c(q) \frac{z}{h(q)} \cos lq. \quad (7)$$

Далее, следуя [1], положим

$$w = w_0(q) + w_1(q) \cos lq, \quad v = v_0(q) \sin lq. \quad (8)$$

После дифференцирования соотношений (4), (5), (7) и (8), запишем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{1}{R} \left(\mathfrak{w} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} \right) + \frac{1}{R^2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial q} + w \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} + \mathfrak{w} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial q} - v \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} - \mathfrak{w} \right) \right\} - \\ & - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial q^2} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} \right), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{R}{2h(q)} + \mathfrak{E}(q) \frac{z}{h(q)} \cos lq, \quad (10)$$

где

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0(q) + \mathfrak{w}_1(q) \cos lq, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0(q) \sin lq. \quad (11)$$

Здесь \mathfrak{w}_0 , \mathfrak{w}_1 , \mathfrak{v}_0 и \mathfrak{E} – независимые варьируемые величины.

Последующий ход вычислений состоит в том, что соотношения (7) и (9)–(11) подставляются в (3) и функционал K находится как функция w_0 , w_1 , v_0 , c и производных этих величин по q . В результате, после ряда вычислений, запишем:

$$\begin{aligned} K = & -2pw_0 \mathfrak{w}_0 - (l^2 + 1)pv_0 \mathfrak{v}_0 - (l^2 + 1)pw_1 \mathfrak{w}_1 - 2plv_0 \mathfrak{v}_1 - 2pl \mathfrak{w}_0 w_1 + \\ & + \frac{2ph_0^2 l^2}{3R} \mathfrak{E} \mathfrak{w}_1 \left(1 + \frac{1}{2} l^2 \right) + \frac{2ph_0^2 l}{3R} \mathfrak{E} \mathfrak{v}_0 \left(1 + \frac{1}{2} l^2 \right) - \frac{pq}{2} (l^2 + 1) \mathfrak{w}_1^2 - \frac{pq}{2} (l^2 + 1) \mathfrak{v}_0^2 - \\ & - 2pql \mathfrak{w}_1 \mathfrak{v}_0 - pq \mathfrak{w}_0^2 - \frac{R^3}{Eh_0} - \frac{pR \mathfrak{E} h_0}{3E} - \frac{1}{ES_0^n} \sum_{p=0}^n \left(\frac{R^3}{8} \frac{h_0^{p+1}}{p+1} M_{p-n-1} - R^2 \frac{h_0^{p+2}}{2(p+2)} M_{p-n} \mathfrak{E} + \right. \\ & \left. + R \frac{h_0^{p+3}}{2(p+3)} M_{p-n+1} \mathfrak{E} \right) \cdot \frac{C_n^p (n+1) q^{n-p} R^{n-p} (-1)^{n-p}}{2^{n-p} h_0^{n+2}} c^p, \end{aligned}$$

где для краткости записи введены следующие обозначения

$$M_{p-n+j} = \left[1 - (-1)^{p+j+2} \right] \int_0^p (1 + l \sin q)^{p-n+j} \cos^{p+j+1} lq dq, \quad j = -1, 0, 1;$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Далее, приравняв

$$\frac{\partial K}{\partial v_0} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \mathfrak{E}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial K}{\partial c} = 0,$$

получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, которую приведем в виде, удобном для последующего интегрирования. Опуская элементарные выкладки, будем иметь

$$\begin{aligned} & -2pw_0 - 2pqv_0 = 0, \\ & -(l^2 + 1)pw_1 - 2plv_0 + \frac{2ph_0^2 l^2}{3R} \mathfrak{E} \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right) - pq(l^2 + 1)\mathfrak{E}_1 - 2pql\mathfrak{E}_0 = 0, \\ & -(l^2 + 1)pv_0 - 2plw_1 + \frac{2ph_0^2 l}{3R} \mathfrak{E} \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right) - pq(l^2 + 1)\mathfrak{E}_0 - 2pql\mathfrak{E}_1 = 0, \\ & \frac{2ph_0^2 l^2}{3R} \mathfrak{E}_1 \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right) + \frac{2ph_0^2 l}{3R} \mathfrak{E}_0 \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right) - \frac{2pR\mathfrak{E}_0}{3E} - \\ & - \frac{1}{E\mathcal{S}_0^n} \sum_{p=0}^n \left(-R^2 \frac{h_0^{p+2}}{2(p+2)} M_{p-n} + R \frac{h_0^{p+3}}{p+3} M_{p-n+1} \mathfrak{E} \right) \times \\ & \times \frac{C_n^p (n+1) q^{n-p} R^{n-p} (-1)^{n-p}}{2^{n-p} h_0^{n+2}} c^p = 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение последней системы выполняется тождественно, и поэтому естественно, в дальнейшем не используется. Итак, нашим последующим этапом будет вычисление неизвестных функциональных аргументов. Для этого систему уравнений необходимо дополнить начальными условиями, которые, исходя из физики явления, заключаются в отсутствии момента, азимутального смещения и наличии начального несовершенства, то есть

$$c(0) = 0, \quad v_0(0) = 0, \quad \text{а} \quad w_1(0) = w_1^0 \cos lj, \quad (12)$$

где w_1^0 – задаваемая амплитуда начального несовершенства. Для дальнейших вычислений оказывается целесообразным выразить w_1 через q . Комбинируя второе и третье уравнения системы, запишем:

$$\mathfrak{E} = \frac{3R(l^2 - 1)}{2h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right)} (w_1 q)', \quad \mathfrak{E}_0 = -\frac{1}{2} \mathfrak{E}_1. \quad (13)$$

Выполнив интегрирование первого выражения (13) при условиях (12), получим

$$c = \frac{3R(l^2 - 1)}{2h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2} I^2\right)} w_1 q. \quad (14)$$

Используя формулы (13), (14) и исключая из последнего уравнения вышеуказанной системы v_0 и c , приходим к нелинейному дифференциальному уравнению относительно \mathfrak{E}_1

$$\begin{aligned}
& \frac{2h_0^2(l^2-1)}{3R} \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right) w_1 - \frac{(l^2-1)R^2q}{l^2 E h_0 \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)} w_1 - \frac{(l^2-1)R^2}{l^2 E h_0 \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)} w_1 - \\
& - \frac{1}{E S_0^n} \sum_{p=0}^n \left(-R^2 \frac{h_0^{p+2}}{2(p+2)} M_{p-n} + 1,5R^2 \frac{h_0^{p+3}}{p+3} \frac{(l^2-1)q}{h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)} M_{p-n+1} \right) + \\
& + 1,5R^2 \frac{h_0^{p+3}}{p+3} \frac{(l^2-1)}{h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)} M_{p-n+1} w_1 \left. \right\} \frac{C_n^p (n+1) q^n R^n (-1)^{n-p} 3^p (l^2-1)^p}{2^n h_0^{n+2p+2} l^{2p} \left(1 + \frac{1}{2}I^2\right)^p} w_1^p = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{h}{R}, \quad g = \frac{w_1}{R}, \quad h = \frac{E}{S_0}, \quad t = \frac{q}{E}.$$

Опуская элементарные выкладки, приведем сразу уравнение (15) для различных значений показателя нелинейности

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dg} = \frac{1}{g} & \left[0,67(l^2-1)x^3 - \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} t - 0,75 \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} x^{-2} h^2 t^3 - \right. \\
& - 3,04 \frac{(l^2-1)^3}{l^6(1+0,5I^2)^4} x^{-4} h^2 g^2 t^3 \left. \right] \cdot \left[\frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} + 2,25 \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} x^{-2} h^2 t^2 + \right. \\
& \left. + 3,04 \frac{(l^2-1)^3}{l^6(1+0,5I^2)^4} x^{-4} h^2 g^2 t^2 \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{16}$$

при $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dg} = \frac{1}{g} & \left[0,67(l^2-1)x^3 - \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} t - 0,32 \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} x^{-4} h^4 t^5 - \right. \\
& - 7,6 \frac{(l^2-1)^3}{l^6(1+0,5I^2)^4} x^{-6} h^4 g^2 t^5 - 6,78 \frac{(l^2-1)^5}{l^{10}(1+0,5I^2)^6} x^{-8} h^4 g^4 t^5 \left. \right] \times \\
& \times \left[\frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} + 1,57 \frac{l^2-1}{l^2(1+0,5I^2)^2} x^{-4} h^4 t^4 + 12,66 \frac{(l^2-1)^3}{l^6(1+0,5I^2)^4} x^{-6} h^4 g^2 t^4 + \right. \\
& \left. + 6,78 \frac{(l^2-1)^5}{l^{10}(1+0,5I^2)^6} x^{-8} h^4 g^4 t^4 \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{17}$$

при $n = 4$,

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dg} = \frac{1}{g} & \left[0,67(l^2 - 1)x^3 - \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5l^2)^2}t - 0,11 \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5l^2)^2}x^{-6}h^6t^7 - \right. \\
& - 6,65 \frac{(l^2 - 1)^3}{l^6(1 + 0,5l^2)^4}x^{-8}h^6g^2t^7 - 35,6 \frac{(l^2 - 1)^5}{l^{10}(1 + 0,5l^2)^6}x^{-10}h^6g^4t^7 - \\
& \left. - 14,54 \frac{(l^2 - 1)^7}{l^{14}(1 + 0,5l^2)^8}x^{-12}h^6g^6t^7 \right] \cdot \left[\frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5l^2)^2} + 0,77 \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5l^2)^2}x^{-6}h^6t^6 + \right. \\
& + 15,51 \frac{(l^2 - 1)^3}{l^6(1 + 0,5l^2)^4}x^{-8}h^6g^2t^6 + 49,84 \frac{(l^2 - 1)^5}{l^{10}(1 + 0,5l^2)^6}x^{-10}h^6g^4t^6 + \\
& \left. + 14,54 \frac{(l^2 - 1)^7}{l^{14}(1 + 0,5l^2)^8}x^{-12}h^6g^6t^6 \right]^{-1} \quad (18)
\end{aligned}$$

при $n = 6$.

Здесь переход к безразмерному дифференцированию осуществлялся по правилу

$$\frac{d}{dq} = \frac{1}{E} \frac{d}{dt}.$$

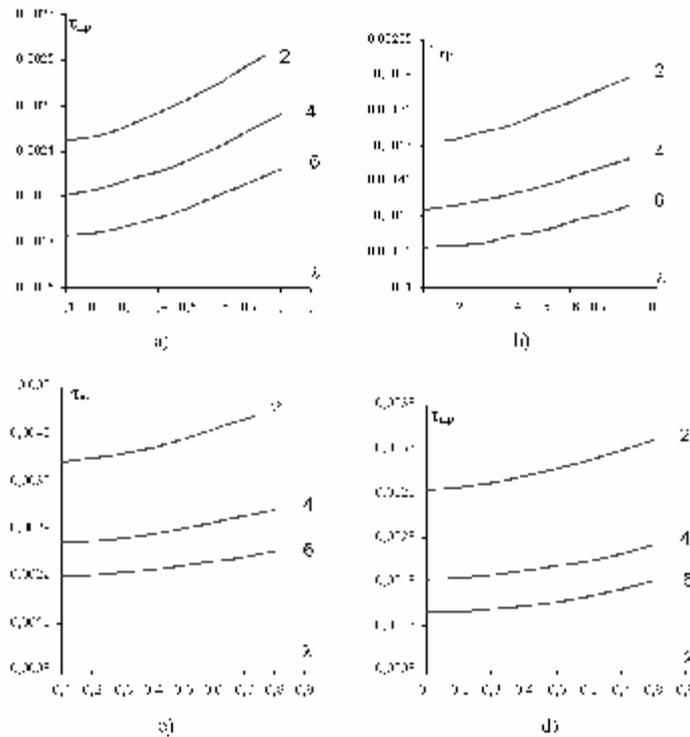


Рис. 1. Зависимость критической силы выпучивания $t_{кр}$ от параметра l (а, $l = 2; h = 300$), (б, $l = 2; h = 500$), (с, $l = 4; h = 300$), (д, $l = 4; h = 500$). Цифры у кривых – значения n

Уравнения (16)–(18) следует проинтегрировать при начальном условии

$$g(0) = \frac{w_1^0}{R} = g_0.$$

Таким образом, решение исходной задачи сведено к решению задачи Коши при дополнительном условии, характеризующем предельное состояние кольца:

$$\frac{dt}{dg} = 0.$$

Последующая задача состоит в численном интегрировании полученных уравнений методом Рунге-Кутты.

Чтобы количественно дать представление о характере изменения критических сил, получаемых для разных значений показателя нелинейности, приведем следующий пример.

При принятых расчетных данных

$$g_0 = 10^{-1}, \quad x = 10^{-1}, \quad h = 3 \cdot 10^2; 5 \cdot 10^2$$

на рис. 1 приведена зависимость $t_{кр}$ от l , когда S представлено зависимостью (7).

На рисунке 2 дана аналогичная зависимость при S , определяемой зависимостью (6).

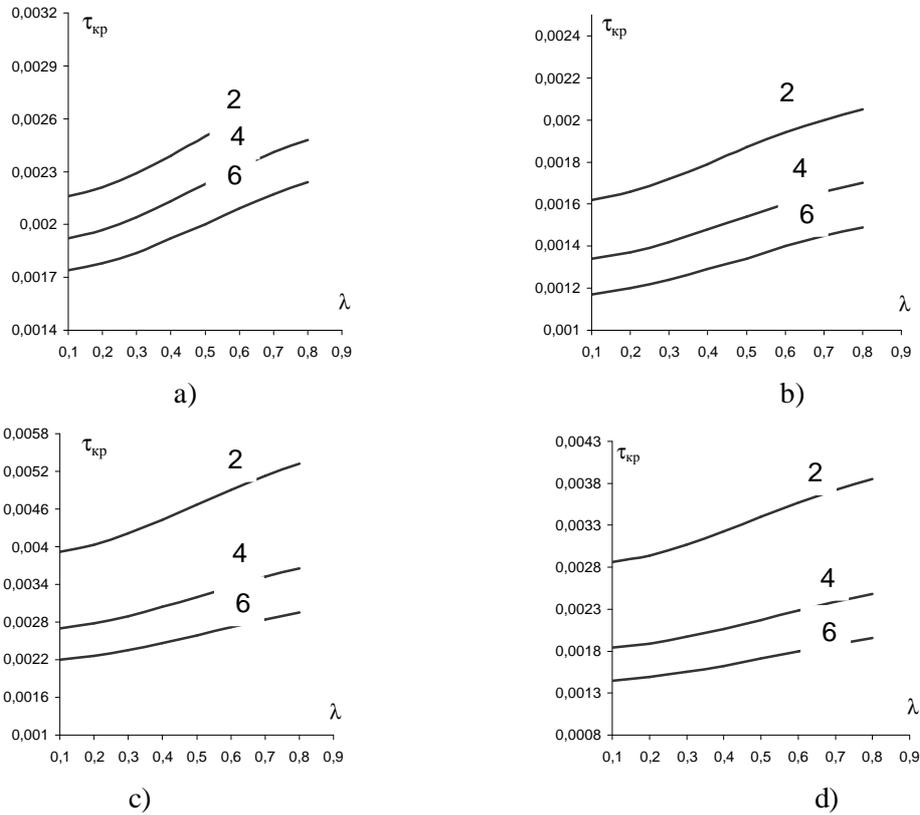


Рис. 2. Зависимость критической силы выпучивания $t_{кр}$ от параметра l (а, $l = 2; h = 300$), (б, $l = 2; h = 500$), (с, $l = 4; h = 300$), (д, $l = 4; h = 500$). Цифры у кривых – значения n

В таблицах 1 и 2 приведены числовые результаты для случая линейной упругости ($s_0 \rightarrow \infty$).

Таблица 1. Зависимость критической силы выпучивания $t_{кр}$ от параметра l для линейной упругости (s представлено зависимостью (7)).

l	$l = 2$	$l = 4$
0,1	0,002437	0,009747
0,2	0,002510	0,010041
0,3	0,002635	0,010539
0,4	0,002814	0,011257
0,5	0,003054	0,012214
0,6	0,003359	0,013438
0,7	0,003740	0,014959
0,8	0,004204	0,016815

Таблица 2. Зависимость критической силы выпучивания $t_{кр}$ от параметра l для линейной упругости (s представлено зависимостью (6)).

l	$l = 2$	$l = 4$
0,1	0,002449	0,009795
0,2	0,002557	0,010230
0,3	0,002738	0,010954
0,4	0,002992	0,011967
0,5	0,003317	0,013270
0,6	0,003716	0,014862
0,7	0,004186	0,016744
0,8	0,004729	0,018915

На основе числового эксперимента можно сделать следующие выводы:

- 1) при $l > 0,4$ необходимо учитывать уточненную аппроксимацию для s ;
- 2) с увеличением показателя нелинейности критическая сила уменьшается;
- 3) с увеличением числа волнообразования критическая сила возрастает;
- 4) с увеличением отношения модуля упругости на предел пропорциональности критическая сила уменьшается.

Таким образом, конструированием неоднородности можно увеличить (или уменьшить) критическую силу устойчивости и тем самым, в определенном смысле, оптимизировать процесс.

Автор выражает благодарность профессору Р. Ю.Амензаде за постановку задачи и полезные советы.

г. Баку

Поступила: 23 октября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амензаде, Р. Ю.* Выпучивание длинной цилиндрической оболочки из нелинейно-упругого материала / Р. Ю.Амензаде, Э. Т.Киясбейли, Л. Ф.Фатуллаева // Механика оболочек и пластин. – Нижний Новгород. – 2002. – С. 87–93.

2. *Амензаде, Р.Ю.* О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней / Р. Ю.Амензаде, Э. Т.Киясбейли // Доклады Академии Наук Азербайджана. – 2000. – № 4–6. – С. 72–77.
3. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д.Д. Ивлев. – М. : Физмат. Лит, 2001. – Т. 1. – 445 с.
4. *Amenzadeh, R. Yu.* The limiting state of a rigidly fixed nonlinearly elastic multilayer rod / R. Yu.Amenzadeh, E. T. Kiyasbeyli, L. F. Fatullaeva // Mechanics of Composite Materials. New-York. – 2006.– V. 42.– № 3.– P. 243–252.