**ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2008**

Адигамов А. Э., Редкозубов С. А., Юденков А. В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

*(Московский государственный горный университет,
Смоленская государственная сельскохозяйственная академия)*

1. Основные определения и обозначения.

Пусть L – простая замкнутая кривая Ляпунова, т.е. для неё выполняется условие: касательная к кривой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гёльдера относительно дуги в кривой. Контур L разбивает плоскость комплексного переменного $z=x+iy$ на две области, конечную и бесконечную. Будем полагать, что конечная область (D^{+}) содержит точку $z=0$. Бесконечную область обозначим через D^{-}. Для многих краевых задач важно определить положительное направление обхода контура. Условимся считать положительным такой обход контура, при котором контур остаётся справа. Таким образом, для конечной области положительным направлением будет направление движения против часовой стрелки, для бесконечной области – движение по часовой стрелке.

Все дальнейшие рассуждения будут вестись для функций, принадлежащих классу Гёльдера с показателем μ на контуре $L\left(H_{\mu}(L)\right)$. Напомним, что норма в пространстве Гёльдера определяется следующим образом:

$$\|\rho\|_{H_{\mu}} = \max_{t\in L}|\rho(t)| + \sup_{\tau,t\in L}\frac{|\rho(\tau)-\rho(t)|}{|\tau-t|^{\mu}} \qquad (0<\mu\le 1). \tag{1}$$

Основное внимание в работе будет уделено краевым задачам для бианалитических функций и их приложению к решению основных задач плоской теории упругости в области линейных деформаций.

Определение 1. Функция $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ комплексной переменной $z=x+i\cdot y$ называется бианалитической в некоторой области D, если она в D имеет непрерывные частные производные по *x* и *y* до порядка 2 включительно и удовлетворяет там уравнению:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2}=0, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$ – дифференциальный оператор Коши-Римана.

Определение 1 принадлежит П. Буратти. Существуют и другие эквивалентные определения бианалитической функции.

Определение 1′. Функция $F^{+}(z)$ называется бианалитической в конечной области D^{+}, если она представима в виде:

$$F^{+}(z)=\varphi_0^{+}(z)+\bar{z}\varphi_1^{+}(z), \tag{3}$$

где $\varphi_0^{+}(z)$ и $\varphi_1^{+}(z)$ – аналитические в области D^{+} функции, $\bar{z}=x-i\cdot y$.

Функция $F^{-}(z)$ называется бианалитической в бесконечной области D^{-}, если она представлена в виде:

$$F^{-}(z)=\varphi_0^{-}(z)+\bar{z}\cdot z^{-2}\cdot\varphi_1^{-}(z), \tag{4}$$

где $\varphi_0^{-}(z)$ и $\varphi_1^{-}(z)$ – аналитические в области D^{-} функции.

Как видно из определений 1 и 1′ бианалитические функции являются естественным обобщением аналитических функций.

Своим рождением бианалитические функции обязаны работам Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили (см., например [6], [8]).

Известно, что в случае плоской деформации напряжённое состояние в любой точке упругого тела полностью определяется тремя напряжениями σ_x, σ_y, $\tau_{x,y}$, которые удовлетворяют двум уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \tag{5}$$

и условию совместимости:

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0, \tag{5*}$$

где $\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ – оператор Лапласа.

Систему уравнений (5) и (5*) можно свести к одному дифференциальному уравнению 4-й степени в частных производных:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0. \tag{6}$$

Здесь $U(x,y)$ – функция Эри, связанная с напряжениями соотношениями:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2};\ \sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2};\ \tau_{x,y}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}.$$

К непосредственному решению уравнения (6) прибегают достаточно редко, поскольку это весьма трудоёмкое занятие. Гораздо проще искать функцию $U(x,y)$ исходя из некоторых контурных (краевых) условий. Традиционно различают две основные краевые задачи теории упругости:

1. Определить упругое равновесие тела, когда на контуре L заданы внешние усилия X_n и Y_n (*n* – внешняя нормаль к контуру).

2. Определить упругое равновесие тел, если на контуре *L* заданы смещения *U(S)*, *V(S)*.

Существуют также многочисленные смешанные задачи, в которых комбинируются различные краевые условия, например на одной части контура задаются напряжения, на другой части смещения. Следует отметить, что таких условий обязательно два.

В работах Н. И. Мусхелишвили ([8], [9]) было показано, что решением эллиптического дифференциального уравнения (6) является бигармоническая функция вида

$$U(x,y)=\mathrm{Re}\big(F(z)\big)=\mathrm{Re}\Big(\varphi_0(x)+\bar{z}\,\varphi_1(z)\Big). \tag{7}$$

В случае первой основной задачи теории упругости граничные условия примут вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\int_0^S Y_n dS\,,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\int_0^S X_n dS \tag{8}$$

или с учётом соотношений (7):

$$\begin{gathered}\varphi_0'\,(t)+\bar{t}\,\varphi_1'(t)+\varphi_1(t)=-\overline{\Big[\varphi_1'(t)+\bar{t}\,\varphi_1'(t)+\varphi_1(t)\Big]}+q_1(t)\,,\\ \varphi_0'\,(t)+\bar{t}\,\varphi_1'(t)-\varphi_1(t)=\overline{\Big[\varphi_1'(t)+\bar{t}\,\varphi_1'(t)-\varphi_1(t)\Big]}+q_2(t)\,,\end{gathered} \tag{8′}$$

где $q_1(t)=-2\int\limits_0^S Y_n dS,\quad q_2(t)=2\int\limits_0^S X_n dS.$

Краевое условие (8′) можно трактовать как обобщение известных задач Гильберта и Дирихле на классе бианалитических функций.

Напомним, что задачей Гильберта для аналитических функций называется задача поиска неизвестной аналитической функции $\Phi(z)$ в некоторой области D по краевому условию:

$$\Phi(t)=G(t)\overline{\Phi(t)}+g(t),\ t\in L\,, \tag{9}$$

где $G(t)$, $g(t)$ – известные функции класса Гёльдера.

$G(t)$ обычно называют коэффициентом задачи.

В начале пятидесятых годов двадцатого века Ф. Д. Гаховым были сформулированы основные краевые задачи для бианалитических функций и их обобщений – полианалитических функций, которые с одной стороны обобщали основные задачи теории аналитических функций (задачи Гильберта, Римана, Газемана), с другой стороны основывались на задачах плоской теории упругости (см., например, [4]). К настоящему времени общая теория таких задач и соответствующих им сингулярных интегральных уравнений практически построена (см. [13], [14] и приведённую в них библиографию).

При решении краевых задач для бианалитических функций выяснилось одно интересное обстоятельство. В теории краевых задач для аналитических функций для одно- и двухсвязных областей справедливо то, что все основные задачи в случае нулевого индекса коэффициента всегда имеют единственное решение.

Для краевых задач на классе бианалитических функций такого факта не удалось установить. При анализе было установлено, что одна из причин подобного состоит в том, что для бианалитических функций не выполняется одно из основных положений теории аналитических функций, а именно – теорема единственности.

2. Теорема единственности для бианалитических функций.

В теории аналитических функций хорошо известен тот факт, что если аналитическая функция обращается в ноль на некотором контуре плоскости комплексного переменного $z=x+i\cdot y$, то она является тождественным нулём на всей плоскости.

Такое утверждение (и аналогичные ему) называется теоремой единственности аналитической функции. С точки зрения краевых задач можно утверждать, что задача $\Phi(t)=0,\ t\in L$ не имеет нетривиальных решений.

Для бианалитической функции такое утверждение неверно.

Рассмотрим, например функцию $F(z)=1-z\cdot\overline{z}$. Данная функция обращается в ноль на единичной окружности Γ $(\Gamma:\sigma\in F,\ \sigma\cdot\overline{\sigma}=1)$, однако не является тождественным нулём на всей плоскости комплексного переменного.

Таким образом, краевая задача для бианалитических функций

$$F(t)=0,\ t\in L \tag{10}$$

может иметь нетривиальное решение.

В краевой задаче (10) имеется только одно условие, а для однозначного решения необходимо два независимых условия.

Как задать эти условия? Очевидно, что возможны различные варианты. Рассмотрим один из них.

Пусть некоторая бианалитическая функция обращается в ноль на двух окружностях, одна из которых имеет радиус $R_1=1$, а другая – $0<R_2<1$.

Расположены окружности так, как показано на рисунке 1.

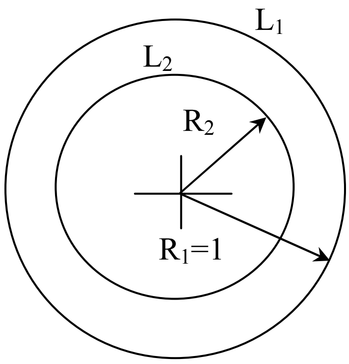

Рис. 1.

Запишем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &F(t_1)=0,\ t_1\in L_1,\\ &F(t_2)=0,\ t_2\in L_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Воспользовавшись представлением (3) получим:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(t_1)+\overline{t_1}\,\varphi_1(t_1)=0,\\ &\varphi_0(t_2)+\overline{t_2}\,\varphi_1(t_2)=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что на окружностях L_1 и L_2 выполняются условия:

$$\overline{t_1}=\frac{1}{t_1},\ \ \overline{t_2}=\frac{R_2^2}{t_2}. \tag{13}$$

Пусть

$$\varphi_0(z)=a_0^0+a_1^0 z+a_2^0 z^2+\ldots+a_n^0 z^n+\ldots,$$
$$\varphi_1(z)=a_0^1+a_1^1 z+a_2^1 z^2+\ldots+a_n^1 z^n+\ldots \tag{14}$$

Тогда, учитывая условия (13) получим, что для соблюдения краевых условий необходимо и достаточно, чтобы выполнялись требования:

$$\begin{cases} a_0^1=0 \\ \begin{cases} a_0^0+a_1^1=0 \\ a_0^0+R_2^2\, a_1^1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_1^0+a_2^1=0 \\ a_1^0+R_2^2\, a_2^1=0 \end{cases} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{cases} a_{n-1}^0+a_n^1=0 \\ a_{n-1}^0+R_2^2\, a_n^1=0 \end{cases} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & R_2 \end{vmatrix}\neq 0,$$

то условие (15) равносильно тому, что $\varphi_0(z)=0$ и $\varphi_1(z)=0$, т.е. $F(z)=\varphi_0(z)+\bar{z}\,\varphi_1(z)\equiv 0$.

Таким образом доказано утверждение.

Теорема 1. Если бианалитическая функция обращается в ноль на двух концентрических окружностях, то она тождественный ноль.

Доказанное утверждение – один из возможных аналогов теоремы единственности для аналитических функций на классе бианалитических функций.

Всяких ли два контура будут полностью определять бианалитическую функцию? Вопрос достаточно сложный и требует дополнительных исследований.

3. Основные задачи плоской теории упругости на двух контурах.

В данном пункте постараемся найти применение Теоремы 1 в задачах теории упругости.

Предположим, что однородное изотропное тело занимает область *D*, представляющую собой внутренность единичного круга (см. рис. 2). Положим также, что на контуре *L* известна всего одна составляющая внешних усилий, прикладываемых к телу, например Y_n.

Требуется определить деформацию тела.

Очевидно, что в такой постановке задача имеет неоднозначное решение. Граничное условие в данном случае имеет вид:

$$\varphi_0'(t_1)+\bar{t}_1\,\varphi_1'(t_1)+\varphi_1(t_1)=\overline{\left[\varphi_0'(t_1)+\bar{t}_1\,\varphi_1'(t_1)+\varphi_1(t_1)\right]}+g_1(t_1),\quad t_1\in L_1.$$

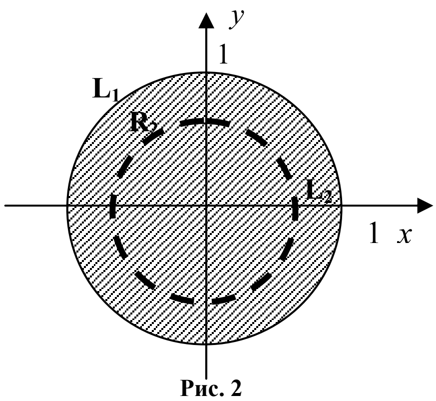

Рис. 2

Предположим, что нагрузку Y_n удалось определить не только на внешнем контуре L_1, но и на контуре L_2 ($L_2 : t_2 \in L_2 \Rightarrow t_2 \cdot \overline{t_2} = R_2^2,\ 0 < R_2 < 1$), который можно мысленно вырезать в единичном круге. В этом случае получим следующую систему:

$$\begin{aligned} &\varphi_0^{/}(t_1) + \overline{t}_1\,\varphi_1^{/}(t_1) + \varphi_1(t_1) = \overline{\left[\varphi_0^{/}(t_1) + \overline{t}_1\,\varphi_1^{/}(t_1) + \varphi_1(t_1)\right]} + g_1(t_1),\\ &\varphi_0^{/}(t_2) + \overline{t}_2\,\varphi_1^{/}(t_2) + \varphi_1(t_2) = \overline{\left[\varphi_0^{/}(t_2) + \overline{t}_2\,\varphi_1^{/}(t_1) + \varphi_1(t_2)\right]} + g_2(t_2). \end{aligned} \tag{16}$$

Чтобы доказать, что система уравнений (16) однозначно определяет бианалитическую функцию и, следовательно, напряжённое состояние тела, докажем, что соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение.

Сразу заметим, что движение тела как единичного целого, т.е. равномерное прямолинейное движение, не влияет на напряжённое состояние. Поэтому для упрощения преобразований без ограничения общности рассуждений можно положить:

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0\,. \tag{17}$$

Введём обозначения:

$$\psi(z) = \varphi_0^{/}(z) + \varphi_1(z), \quad \varphi(z) = \varphi_1^{/}(z)\,.$$

Получим из (16) следующую однородную систему:

$$\begin{aligned} &\psi(t_1) + \overline{t_1} \cdot \varphi(t_1) = \overline{\psi(t_1)} + t_1 \cdot \overline{\varphi(t_1)},\\ &\psi(t_2) + \overline{t_2} \cdot \varphi(t_2) = \overline{\psi(t_2)} + t_2 \cdot \overline{\varphi(t_2)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Положим

$$\begin{aligned} &\psi(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots,\\ &\varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \end{aligned}$$

Поскольку на контурах выполняются условия $\overline{t_1} = \dfrac{1}{t_1},\ \overline{t_2} = \dfrac{R_2^2}{t_2}$, то

$$\begin{aligned} &\overline{\psi(t_1)} = \overline{b_1} \cdot t_1^{-1} + \overline{b_2} \cdot t_1^{-2} + \ldots + \overline{b_n} \cdot t_1^{-n} + \ldots,\\ &t_1 \cdot \overline{\varphi(t_1)} = \overline{c_1} + \overline{c_2} \cdot t_1^{-1} + \ldots + \overline{c_n} \cdot t_1^{-n+1} + \ldots, \end{aligned}$$

$$\overline{\psi(t_2)} = \overline{b_1} \cdot R_2^2 \cdot t_2^{-1} + \ldots + \overline{b_n} \cdot R_2^{2n} \cdot t_2^{-n} + \ldots,$$
$$t_2 \cdot \overline{\varphi(t_2)} = \overline{c_1} \cdot R_2^2 + \overline{c_2} \cdot R_2^4 \cdot t_2^{-1} + \ldots + \overline{c_n} \cdot R_2^{2n} \cdot t_2^{-n+1} + \ldots \quad (19)$$

Система краевых задач (18) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} \begin{cases} c_1 = \overline{c_1} \\ c_1 = \overline{c_1} \cdot R_2 \end{cases} \\ \begin{cases} b_1 + c_2 = 0 \\ b_1 + R_2^2 \cdot c_2 = 0 \end{cases} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{cases} b_{n-1} + c_n = 0 \\ b_{n-1} + R_2^2 \cdot c_n = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

Отсюда следует, что

$$\psi(z) = 0, \quad \varphi(z) = 0. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\varphi_1^{/}(z) = 0, \quad \varphi_1(z) = -\varphi_0^{/}(z) = const. \quad (22)$$

В силу сделанных предположений: $F(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\,\varphi_1(z) \equiv 0$.

Значит система краевых задач (16) однозначно определяет напряжённое состояние упругого однородного изотропного тела.

Данный результат можно было получить и с помощью теории краевых задач для аналитических функций.

Рассмотрим следующие аналитические функции:

$$\Phi_1^+(z) = \varphi_0^{/}(z) \cdot z + \varphi_1^{/}(z) + \varphi_1(z) \cdot z,$$
$$\Phi_2^+(z) = \varphi_0^{/}(z) \cdot z + R_2^2 \varphi_1^{/}(z) + \varphi_1(z) \cdot z. \quad (23)$$

Доопределим их на всю плоскость комплексного переменного по формулам:

$$\Phi_1^-(z) = \overline{\Phi_1^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad \Phi_2^-(z) = \overline{\Phi_2^+\left(\frac{1}{z}\right)}. \quad (24)$$

Тогда однородная задача (16) примет вид:

$$\begin{cases} \Phi_1^+(t_2) = \Phi_1^-(t_1), \\ \Phi_2^+(t_2) = \Phi_2^-(t_2). \end{cases} \quad (23)$$

Система (22) представляет собой две однородные задачи о скачке для аналитических функций. Данные задачи (см. [4]) имеют только тривиальное решение. Следовательно,

$$\begin{cases} \varphi_0^{/}(z) \cdot z + \varphi_1^{/}(z) + \varphi_1(z) \cdot z = 0, \\ \varphi_0^{/}(z) \cdot z + R_2^2\, \varphi_1^{/}(z) + \varphi_1(z) \cdot z = 0. \end{cases}$$

Отсюда, $\varphi_1^{/}(z) = 0$, $\varphi_0^{/}(z) = -\varphi_1(z) = const$.

Рассуждая аналогично получим, что напряжённое состояние тела однозначно определяется одной компонентой внешних усилий, заданной на двух концентрических окружностях.

4. Заключение.

В пункте 3 была доказана связь между теоремой единственности для бианалитических функций и основными задачами плоской теории упругости изотропного тела.

В заключении остановимся на перспективах «эксплуатации» данной связи.

1. Указанная связь с теоретической точки зрения даёт возможность поставить принципиально новые краевые задачи для бианалитических функций и их обобщений. В подобного рода задачах недоопределённость в смысле краевых коэффициентов покрывается информацией о поведении искомой функции на различных контурах.

2. В работе рассмотрен только случай концентрических окружностей. Следующим шагом должен быть переход к областям, на которые можно отобразить круг рациональными функциями.

3. Сразу возникает вопрос, любые ли два различных контура могут однозначно определить бианалитическую функцию? Если нет, то можно ли провести некоторую классификацию?

На наш взгляд это наиболее сложная задача, которая перекликается с известной проблемой Хеймана, которая ещё далека от решения.

4. С практической точки зрения напрашивается численный эксперимент по проверке предложенной теории, который авторы намерены представить в недалёком будущем.

г. Москва
Поступила: 13 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балк, М. Б.* Полианалитические функции и их обобщения / М. Б. Балк // Итоги науки и техники ВИНИТИ : Сер. Совр. Проб. матем. Фунд. напр. – М: ВИНИТИ. – 1991. – Т. 85. – С. 187-246.

2. *Ганин, М. П.* Краевые задачи для полианалитических функций / М. П. Ганин // Докл. АН СССР. – 1951. – Т.75. – № 6. С. 921-924.

3. *Ганин, М. П.* Краевые задачи для полианалитических функций / М. П. Ганин // Докл. АН СССР. – 1951. – Т.80. – №3. – С.313-316.

4. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Гахов Ф. Д. – М: Наука, 1977. – 640 с.

5. *Каландия, А. И.* Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия.– М: Наука, 1973. – 303 с.

6. *Колосов, Г. В.* Применение комплексной переменной к плоской задаче теории упругости / Г. В. Колосов. – Л. – М. : ГТТИ, 1939. – 224 с.

7. *Михлин, С. Г.* Интегральные уравнения / С. Г. Михлин. – М. – Л., 1949. – 378 с.

8. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

9. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

10. *Редкозубов, С. А.* Задача Карлемана для полианалитических функций в теории упругости для областей сложной формы / С. А. Редкозубов, А. В. Юденков // Проблемы механики деформируемых тел и

горных пород. Сб. статей под ред. академика РАН А.Ю.Ишлинского, М.: Из-во МГГУ. – 2001. – С. 263-270.

11. *Савин, Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – Киев: «Наукова думка», 1975. – 887 с.

12. *Черепанов, Г. П.* Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости / Г. П. Черепанов // Прикл. матем. и механ. – 1962. – Т. 26. – № 5.– С. 902-912.

13. *Юденков, А. В.* Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости / А. В. Юденков. – Смоленск : «Смядынь», 2002. – 268 с.

14. *Юденков, А. В.* Краевые задачи и системы сингулярных интегральных уравнений на основе математической модели процесса линейной деформации изотропного тела / А. В. Юденков, Л. П. Римская, А. П. Юденкова. – Смоленск : ФГОУ ВПО «Смоленский сельскохозяйственный институт». – 118 с.