ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2008

Баженов В. Г., Ломунов В. К., Осетров С. Л.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ИМПУЛЬСНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

(Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского)

В работе исследование проводится на основе сравнительного анализа результатов численного решения задач изгиба пластин в различных постановках. В качестве определяющих соотношений используются упругопластическая и жесткопластическая модели материалов без упрочнения в геометрически линейной и нелинейной постановке. Решение задач изгиба осуществляется на основе моментной и безмоментной модели теории оболочек типа Тимошенко.

Введение. Аналитическим и численным методам расчета жесткопластических конструкций (балки, пластины и оболочки) посвящены многие работы [3–6]. Однако, вопросы применимости жесткопластических моделей при расчете тонкостенных металлических конструкций, обладающих в реальности упругопластическими свойствами, мало изучены. Для применимости жесткопластической модели необходимо, чтобы энергия упругого деформирования была на порядок меньше работы пластического деформирования и деформации должны быть на порядок больше предела текучести. Например, для сталей пластические деформации должны превышать 1%, для алюминиевых сплавов – 3%. При таких деформациях тонкостенных конструкций, особенно балок и пластин, необходимо учитывать геометрически нелинейные эффекты деформирования, которые в известных авторам публикациях по жесткопластическому анализу не учитываются [3–6]. Данная работа посвящена численному исследованию динамического деформирования круглых пластин при малых и больших прогибах в геометрически линейной и нелинейной постановках с использованием упругопластической и жесткопластической моделей деформирования. Применяемый численный метод [1;2] прошел многолетнюю верификацию на широком классе задач динамики тонкостенных конструкций.

1. Численное решение задач проводится в осесимметиричной постановке. Пластина или оболочка рассматриваются в общей декартовой системе координат *rOz*. Кроме того, вводится местный базис s, ξ, связанный с деформируемой срединной поверхностью. Общая и местная система координат связаны соотношениями $s = r\psi_z - z\psi_r$, $\xi = r\psi_r + z\psi_z$, где $\psi_r = -\partial z/\partial s$, $\psi_z = \partial r/\partial s$ – направляющие косинусы нормали. Процесс нагружения разбивается на этапы. В пределах каждого этапа приращения перемещений и деформаций полагаются малыми. Текущая геометрия пластины, которая в процессе деформирования превращается в оболочку, представляется в виде:

$$r = r^{н} + u_r; \quad z = z^{н} + u_z; \quad ds = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2},$$

где $r^{Н} = r^{Н}(s)$, $z^{Н} = z^{Н}(s)$ – начальная геометрия, $u_r = u_r(s,t)$, $u_z = u_z(s,t)$ – перемещения, t – время. Толщина пластины изменяется во времени $h = h(s,t)$. Согласно теории Тимошенко скорости перемещений задаются в виде:

$$\dot{u}_s(s,\xi,t) = \dot{u}_s(s,t) + \xi\dot{\varphi}(s,t); \quad \dot{u}_\xi(s,\xi,t) = \dot{u}_\xi(s,t),$$

где $\dot{\varphi}(s,t)$ – угловая скорость поворота поперечного сечения, которая складывается из скорости поворота нормали $\dot{\psi}(s,t)$ и скорости сдвига $\dot{\gamma}(s,t)$.

Выражения для скоростей деформации учитывают влияние больших безмоментных деформаций на деформации изгиба:

$$\dot{e}_{ii} = \dot{e}_{ii}^0 + \xi\,\dot{\chi}_{ii} \ \ (i = 1,2), \quad \dot{e}_{ii}^0 = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial s}\psi_z - \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s}\psi_r; \quad \dot{e}_{22}^0 = \frac{\dot{u}_r}{r},$$

$$\dot{\chi}_{11} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\left(\dot{e}_{33}^0 - \dot{e}_{11}^0\right), \quad \dot{\chi}_{22} = \frac{\dot{\varphi}}{r}\psi_z - \frac{\dot{e}_{33}^0 - \dot{e}_{22}^0}{r}\left(\psi_r - \psi_r^{н}\right), \tag{1}$$

$$\dot{\gamma}^0 = \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial s}\psi_r + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s}\psi_z, \quad 2e_{12} = \dot{\gamma}^0\left[1 - \left(\frac{2\xi}{h}\right)^2\right], \quad \psi_r^{н} = -\frac{\partial z^{н}}{\partial s^{н}}.$$

Полные деформации $e_{ij}\,(i,j = 1,2,3)$ определяются интегрированием скоростей деформаций по времени, что дает в результате логарифмические деформации. В [2] показана аддитивность упругих $e_{ij}^{у}$ и пластических $e_{ij}^{пл}$ компонент. Напряжения σ_{ij} связаны с упругими деформациями законом Гука. Пластические деформации определяются вариантом теории течения с нелинейным изотропным упрочнением:

$$e_{ij}^{пл} = \int_0^t \dot{e}_{ij}^{пл} dt; \quad \dot{e}_{ij}^{пл} = \lambda S_{ij}; \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0; \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right), \tag{2}$$

$$S_{ij}S_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u; \quad \sigma_u = \sigma_u(\kappa); \quad \kappa = \sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^t \sqrt{\dot{e}_{ij}^{пл}\dot{e}_{ij}^{пл}}\,dt.$$

Скалярная функция модели $\sigma_u(\kappa)$ определяется истинной диаграммой деформирования материала.

Вариационные уравнения движения пластины (оболочки) [2] следует из принципа возможных скоростей Журдена:

$$\int_0^L \left\{ \left[N_1\psi_z + Q\psi_r - 2M_1\psi_z\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{M_2\left(\psi_r - \psi_r^{н}\right)}{r}\psi_z \right] \frac{\delta\partial \dot{u}_r}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{N_2}{r} - \frac{M_1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{2M_2\left(\psi_r - \psi_r^{н}\right)}{r^2} + \rho h \ddot{u}_r \right] \delta\dot{u}_r \right\} r ds - \left(rP_r\delta\dot{u}_r\right)_{s=0,L} = 0; \tag{3}$$

$$\int_0^L \left[Q\psi_z - N_1\psi_r + 2M_1\psi_r \frac{\partial\varphi}{\partial s} - \frac{M_2\left(\psi_r - \psi_r^{н}\right)}{r}\psi_r \right] \frac{\delta\partial\dot{u}_z}{\partial s} + \rho h\ddot{u}_z\delta\dot{u}_z \Bigg\} rds - \left(rP_z\delta\dot{u}_z\right)_{s=0,L} = 0;$$

$$\int_0^L \left[M_1 \frac{\delta\partial\dot{\varphi}}{\partial s} + \left(\frac{M_2}{r}\psi_z + Q + \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\varphi} \right)\delta\dot{\varphi} \right] rds - \left(rM\delta\dot{\varphi}\right)_{s=0,L} = 0.$$

Здесь L – длина пластины; ρ – плотность материала; N_1, N_2, Q, M_1, M_2 – внутренние усилия и моменты; $P_r = P_r(t),\ P_z = P_z(t),\ \ M = M(t)$ – внешние силы и моменты, действующие на контуре пластины $s = 0, L$.

Для численного решения задачи применяется вариационно-разностный метод и явная схема «крест» [1]. Скорости перемещений и деформаций вычисляются в моменты времени $t^{k+1/2}$, а геометрия и напряженно-деформированное состояние – в целочисленные моменты времени t^{k+1} $(k = 1,\ 2,\ ...)$. Рекуррентные формулы для подсчета на $\Delta\ t^{k+1}$ шаге скоростей перемещений, новой геометрии и толщины представляются в виде:

$$\left(\dot{u}_r\right)_i^{k+1/2} = \left(\dot{u}_r\right)_i^{k-1/2} + \left(\Phi_r\right)_i^k \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2\left(\Phi_M\right)_i^k};\ \left(u_r\right)_i^{k+1} = \left(u_r\right)_i^k + \left(\dot{u}_r\right)_i^{k+1/2}\Delta t^{k+1};$$

$$\left(\dot{u}_z\right)_i^{k+1/2} = \left(\dot{u}_z\right)_i^{k-1/2} + \left(\Phi_z\right)_i^k \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2\left(\Phi_M\right)_i^k};\ \left(u_z\right)_i^{k+1} = \left(u_z\right)_i^k + \left(\dot{u}_z\right)_i^{k+1/2}\Delta t^{k+1};\quad(4)$$

$$\left(\dot{\varphi}\right)_i^{k+1/2} = \left(\dot{\varphi}\right)_i^{k-1/2} + \left(\Phi_\varphi\right)_i^k \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2\left(\Phi_J\right)_i^k};\ \varphi_i^{k+1} = \varphi_i^k + \dot{\varphi}_i^{k+1/2}\Delta t^{k+1};$$

$$h_{i+1/2}^{k+1} = h_{i+1/2}^k \left[1 + \Delta e_{33}^0 + \frac{\left(\Delta e_{33}^0\right)^2}{2} \right], \qquad \Delta e_{33}^0 = \left(\dot{e}_{33}^0\right)_{i+1/2}^{k+1/2}\Delta t^{k+1}.$$

Здесь $i = \overline{1, N}$ – узлы разностной сетки; $\Phi_r, \Phi_z, \Phi_\varphi, \Phi_M, \Phi_J$ – обобщенные силы, массы и моменты инерции.

Выше описана моментная модель деформирования пластин и оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности. Для того чтобы получить безмоментную модель необходимо в уравнениях движения (3) не учитывать перерезывающую силу, т.е. положить $Q = 0$. При решении задач в геометрически линейной постановке уравнения формулируются в метрике исходного состояния.

2. Рассматривалась задача изгиба круглой пластины, закрепленной по контуру с помощью шарнирно неподвижной опоры. На пластину действует импульс начальной скорости равномерно распределенный по поверхности. Геометрические характеристики пластины: радиус пластины R = 1м, толщина пластины $h_1 = 0.04$м, $h_2 = 0.2$м.

Для описания свойств материала рассматривались упругопластическая и жесткопластическая модель без упрочнения. Для этого в законе Гука при упругопластической постановке модуль Юнга принимался *E=2,1*10⁵ МПа*, коэффициент Пуансона – *ν=0.3*, при жесткопластической постановке модуль Юнга увеличивался в

1000 раз. Для моделирования идеальной пластичности в уравнениях (2) в качестве $\sigma_u(\kappa)$ задавалась линейная функция с малым линейным упрочнением, так как при отсутствии упругого участка и упрочнения разрешающая система уравнений теряет свойства гиперболичности и численная схема счета становится неустойчивой.

На рисунках 1–3 представлены результаты численного решения задачи в различных постановках и введены обозначения:

– «У.П.Н.» – упругопластическая моментная модель в геометрически нелинейной постановке;

– «Ж.П.Н.» – жесткопластическая моментная модель в геометрически нелинейной постановке;

– «У.П.Л.» – упругопластическая моментная модель в геометрически линейной постановке;

– «Ж.П.Л.» – жесткопластическая моментная модель в геометрически линейной постановке;

– «У.П.Н. (Б.М.)» – упругопластическая безмоментная модель в геометрически нелинейной постановке;

– «Ж.П.Н. (Б.М.)» – жесткопластическая безмоментная модель в геометрически нелинейной постановке;

На рисунках 1, 2 приведены максимальные прогибы пластин (max u_z/R, где u_z – прогиб пластины, R – радиус пластины) соответственно для толщин h_1 = 0.04м. и h_2 = 0.2м в зависимости от начальной скорости v_z^0. Пунктирной линией представлены результаты расчетов в упругопластической постановке, сплошной линией – в жесткопластической постановке.

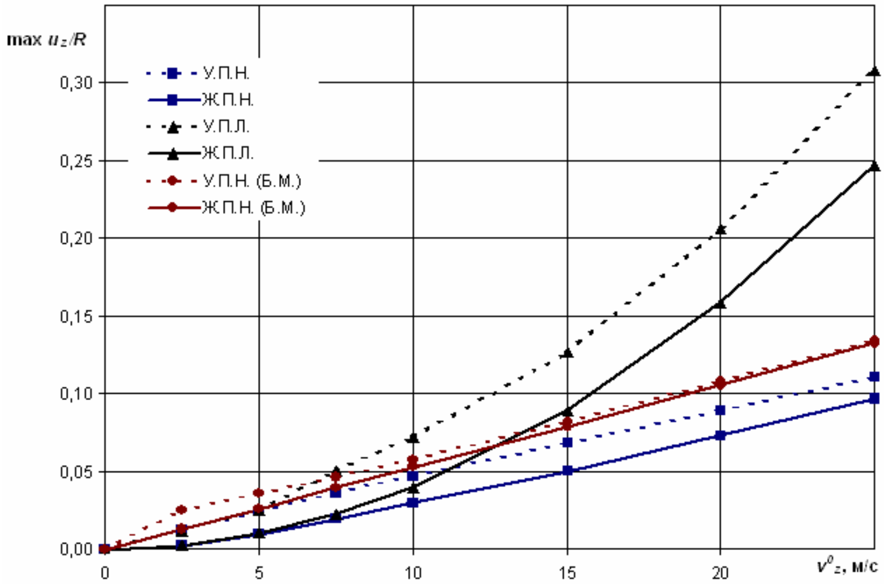

Рис. 1

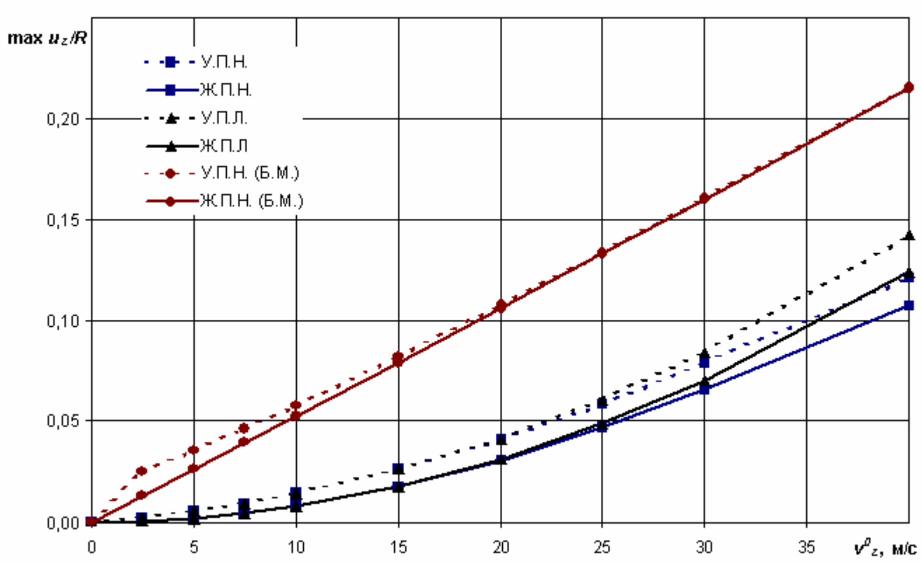

Рис. 2

На рис. 3 приведены прогибы пластины с толщиной h_1 = 0.04м при начальной скорости v_z^0 = 25м/с. Введены обозначения: u_z – прогиб пластины, r – текущая радиальная координата, R – радиус пластины. Пунктирной линией представлены результаты расчетов в упругопластической постановке, сплошной линией – в жесткопластической постановке.

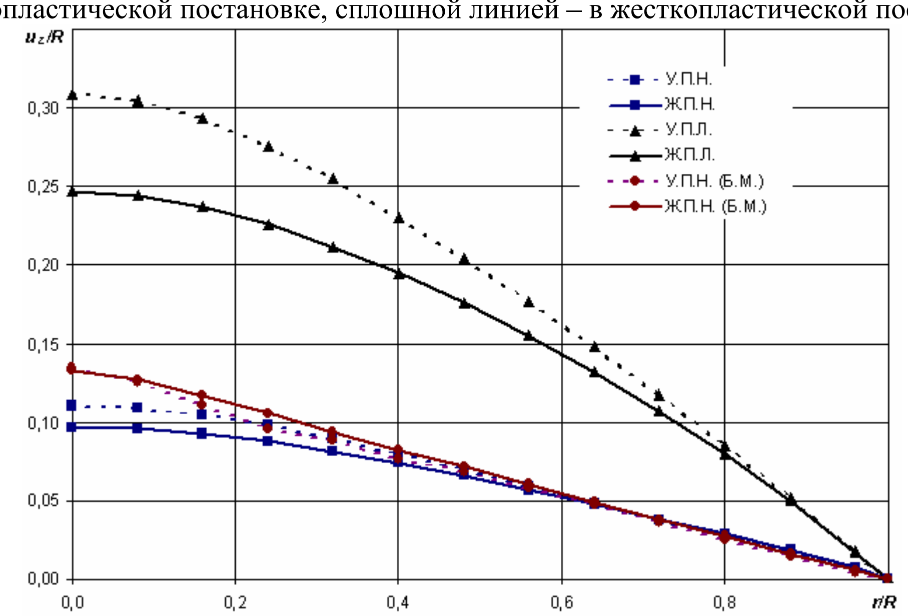

Рис. 3

Из рис. 1, 2 видно, что при малых прогибах жесткопластическое решение существенно отличается от упругопластического из-за неучета упругих свойств материала. В дальнейшем результаты начинают сближаться, но проявляются различия между линейной и нелинейной постановкой. Различия раньше проявляются для тонких пластин и быстро растут при прогибах превышающих 0.02R. Безмоментные решения в упругопластической и жесткопластической постановках различаются менее чем на 5% при прогибах более 0.05R.

Заключение. Из проведенных исследований следует, что жесткоидеальнопластический анализ неприменим для оценки напряженно-деформированного состояния динамически нагруженных пластин при малых прогибах и деформациях. Рамки его применимости расширяются в случае, когда напряженно-деформированное состояние близко к безмоментному, но при этом необходимо решать задачу в геометрически нелинейной постановке. Задачи подобного рода встречаются, например, при моделировании технологических процессов импульсной обработки тонкостенных заготовок, для которых характерны большие формоизменения и немалые деформации.

г. Нижний Новгород

Поступила: 25 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баженов, В. Г.* Большие деформации оболочек вращения с учетом моментности напряженного состояния / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // Прикл. проб. проч. и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем: Всесоюз. Межвуз. сб. Горьк. ун-т. – 1983. – С. 55–63.

2. *Баженов, В. Г.* Исследование упругопластического выпучивания оболочек вращения при ударном нагружении / В. Г. Баженов, В. К. Ломунов // Прикл. проб. проч. и пластичности. Всесоюз. Межвуз. сб. Горьк. ун-т. – 1975. – Вып.2. – С. 44–50.

3. *Гопкинс* Динамика пластической круглой пластинки / Гопкинс, Прагер // Механика. – 1955. – Вып.3. – С. 112-122.

4. *Ерхов, М. И.* Теория идеальнопластических сред и конструкций / М. И. Ерахов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.

5. *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск. : Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 320 с.

6. *Немировский, Ю.* В. Вязкопластическая динамика изотропных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // ПМТФ. – 2007. – т.48. – №2. – С. 123–134.

7. *Садовский, В. М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред / В. М. Садовский. – М. : Наука. Физматлит, 1997. – 208 с.