ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2008

Коробкин В. Д.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА

(Воронежский государственный архитектурно-строительный университет)

Статически определимые соотношения при условии пластичности Мизеса рассматривались $[2,56]$. В данной работе для заданных зависимостей напряжений при которых удовлетворяется условие пластичности Мизеса, получены решения двумерной задачи.

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{óz}}{\partial ó}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.$$

Условие пластичности Мизеса

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_x-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)}=1. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем напряжения отнесены к пластической постоянной.
Следуя $[1,51]$, запишем зависимости для напряжений в следующем виде:

$$\sigma_x=\mathrm{P}+\sin\varphi\,\cos\psi; \qquad \tau_{xy}=\sin\varphi\sin\psi;$$
$$\sigma_y=\mathrm{P}-\sin\varphi\cos\psi; \qquad \tau_{xz}=\cos\varphi\cos\psi; \tag{3}$$
$$\sigma_z=\mathrm{P}; \qquad \tau_{xy}=\cos\varphi\sin\psi.$$

Не трудно видеть, что условие пластичности Мизеса будет удовлетворено при любых функциях φ и ψ.

Предположим, что функция φ зависит от координаты *x*, а функция ψ – от координаты *y*. Подставляя в уравнения равновесия, получим

$$\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial x}+\cos\varphi\,\cos\psi\frac{d\varphi}{dx}+\sin\varphi\,\cos\psi\frac{d\psi}{dy}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}+\cos\varphi\ \sin\psi\frac{d\varphi}{d\,x}+\sin\varphi\ \sin\psi\frac{d\psi}{d\,y}=0\,, \tag{5}$$

$$-\sin\varphi\cos\psi\frac{d\varphi}{d\,x}+\cos\varphi\cos\psi\frac{d\psi}{d\,y}=0\,, \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует

$$\frac{d\psi}{d\,y}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\ \frac{d\varphi}{d\,x}\,. \tag{7}$$

Это значит, что

$$\frac{d\psi}{\partial\,y}=C_1\ ; \qquad \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\ \frac{d\varphi}{d\,x}=C_1\,. \tag{8}$$

Интегрируя уравнения (8), получим

$$\psi=C_1\,y+C_2\ ; \quad \cos\varphi=C_3e^{-C_1x}\ . \tag{9}$$

Подставляя в уравнение (4) значение $\frac{d\psi}{d\,y}$ из (7) , а в уравнение (5) значение $\frac{d\varphi}{d\,x}$ из (7), получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}+\cos\psi\left(\cos\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)\frac{d\varphi}{d\,x}\ =\ 0\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial\,y}\ +\sin\psi\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}+\sin\varphi\right)\frac{d\,\psi}{d\,y}\ =0\,. \tag{11}$$

Если умножить уравнение (10) на dx , а уравнение (11) на dy и сложим, получим

$$d\mathrm{P}+\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}d\varphi\ +\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}d\psi\ =0\,. \tag{12}$$

Таким образом, используя выражения (9) и (12), можно для любых значений x и y определить φ, ψ и P.

г. Воронеж

Поступила: 28 ноября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробкин В. Д.* Статически допустимые поля напряжений пространственной задачи теории пластичности // Прикладные задачи механики и тепломассообмена в авиастроении. Часть 1. Труды второй Всероссийской научно-технической конференции: Воронеж. – 2001. – С. 51–53.

2. *Максимова, Л. А.* О статически определимых соотношениях при условии пластичности Мизеса // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. − 2007. – № 1. – С. 56–58.