

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ СЛОИСТЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассматриваются слоистые круговые цилиндры, находящиеся под действием внутреннего давления. Предполагается, что каждый слой обладает своими свойствами прямоугольной анизотропии. Определен алгоритм определения напряженного состояния для произвольного числа слоев.

Ключевые слова: напряжения, усилия, предел текучести, анизотропия, слой.

УДК: 539.374

1. Рассматривается слоистый круговой цилиндр, находящийся под действием внутреннего давления p (рис. 1).

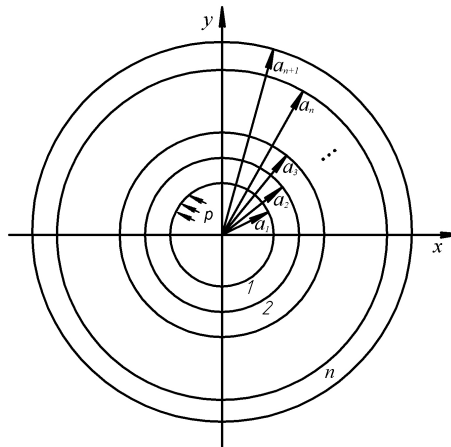


Рис. 1.

Обозначим через a_1, a_2 – внутренний и внешний радиусы 1-го цилиндра, через a_2, a_3 – внутренний и внешний радиусы 2-го цилиндра, через a_n, a_{n+1} – внутренний и внешний радиусы n -го цилиндра.

Условие предельного состояния для n -го слоя примем в виде

$$A_n (\sigma_{xn} - \sigma_{yn})^2 + 4B_n \tau_{xyn}^2 = 4k_n^2, \quad k_n, A_n, B_n - const, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$ – компоненты напряжения в n -ом слое в декартовой системе координат x, y , A_n, B_n – константы анизотропии.

К выражениям компонентов напряжения в полярной системе координат r, θ перейдем по формулам [1]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta - \tau_{r\theta} \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ – компоненты напряжения в полярной системе координат r, θ .

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам: все компоненты напряжения отнесем к величине предела текучести k и обозначим

$$\frac{k_n}{k} = \chi_n, \quad \frac{p}{k} = q, \quad (3)$$

все величины, имеющие размерность длины, отнесем к некоторой характерной величине r_0 и обозначим

$$\frac{a_n}{r_0} = \alpha_n, \quad \frac{r}{r_0} = \rho. \quad (4)$$

Согласно (2–4) запишем соотношения (1) в виде

$$A_n [(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \cos 2\theta - 2\tau_{\rho\theta n} \sin 2\theta]^2 + B_n [(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \sin 2\theta + 2\tau_{\rho\theta n}]^2 = 4\chi_n^2 \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned}(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n})^2 [A_n \cos^2 2\theta + B_n \sin^2 2\theta] + 4\tau_{\rho\theta}^2 [A_n \sin^2 2\theta + B_n \cos^2 2\theta] - \\ - 2(\sigma_{\rho n} - \sigma_{\theta n}) \tau_{\rho\theta n} (A_n - B_n) \sin 4\theta = 4\chi_n^2.\end{aligned}\quad (6)$$

Решение будем искать в виде разложений по степеням некоторого малого безразмерного параметра δ

$$\sigma_{ijn} = \sigma_{ijn}^0 + \delta \sigma'_{ijn}, \quad A_n = 1 + \delta a_n, \quad B_n = 1 + \delta b_n. \quad (7)$$

Положим, что нулевое, исходное напряженное состояние является осесимметричным

$$\tau_{\rho\theta n}^0 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

В нулевом исходном состоянии согласно (6), (8) имеет место

$$\sigma_{\rho n}^0 - \sigma_{\theta n}^0 = \pm 2\chi_n. \quad (9)$$

При действии внутреннего давления $\sigma_{\theta n} > \sigma_{\rho n}$, поэтому в (9) имеет место нижний знак, соотношение (9) перепишем в виде

$$\sigma_{\theta n}^0 = \sigma_{\rho n}^0 + 2\chi_n. \quad (10)$$

Из уравнений равновесия

$$\frac{d\sigma_{\rho n}^0}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho n}^0 - \sigma_{\theta n}^0}{\rho} = 0 \quad (11)$$

и условия (10), получим

$$\sigma_{\rho n}^0 = 2\chi_n \ln \rho + C_n. \quad (12)$$

Из граничного условия

$$\sigma_{\rho 1}^0 = -q \text{ при } \rho = \alpha_1, \quad (13)$$

а также из (9),(10), (12) найдем

$$\sigma_{\rho 1}^0 = -q + 2\chi_1 \ln \frac{\rho}{\alpha_1}, \sigma_{\theta 1}^0 = -q + 2\chi_1 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_1}\right), \tau_{\rho\theta 1}^0 = 0. \quad (14)$$

Условие сопряжения решения имеет вид

$$\sigma_{\rho 1}^0 = \sigma_{\rho 2}^0 \text{ при } \rho = \alpha_2. \quad (15)$$

Из (12),(14),(15) получим

$$\sigma_{\rho 2}^0 = -q + 2\chi_2 \ln \frac{\rho}{\alpha_2} + 2\chi_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta 2}^0 = -q + 2\chi_2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha_2}\right) + 2\chi_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Аналогично (16) будем иметь

$$\sigma_{\rho n}^0 = -q + 2\chi_n \ln \frac{\rho}{\alpha_n} + 2\chi_{n-1} \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \dots + 2\chi_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta n}^0 = 2\chi_n + \sigma_{\rho n}^0, \tau_{\rho\theta n}^0 = 0.$$

Если $\sigma_{\rho n}^{(0)} = 0$ при $\rho = \alpha_{n+1}$, из (17) получим предельное значение внутреннего давления

$$\sigma_{\rho n \text{ пред}}^0 = 2\chi_n \ln \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} + 2\chi_{n-1} \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \dots + 2\chi_1 \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (18)$$

Линеаризуя соотношения (6), учитывая (7), (8), (10), получим

$$\sigma'_{\theta n} - \sigma'_{\rho n} = \chi_n \left[\frac{a_n + b_n}{2} + \frac{a_n - b_n}{2} \cos 4\theta \right]. \quad (19)$$

Уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma'_{\rho n}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho\theta n}}{\partial \theta} + \frac{\sigma'_{\rho n} - \sigma'_{\theta n}}{\rho} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tau'_{\rho\theta n}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{\theta n}}{\partial \theta} + \frac{2\tau'_{\rho\theta n}}{\rho} = 0,$$

удовлетворим, полагая

$$\sigma'_{\rho n} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \theta^2},$$

$$\sigma'_{\theta n} = \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \rho^2}, \quad (21)$$

$$\tau'_{\rho\theta n} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \theta} \right).$$

Из (19), (21) найдем

$$\frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \theta^2} = G_n + H_n \cos 4\theta, \quad (22)$$

где

$$G_n = \chi_n \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right), \quad H_n = \chi_n \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right). \quad (23)$$

Решение уравнения (22) представим как сумму решений общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\Phi'_n = \Phi'_{n \text{ одн}} + \Phi'_{n \text{ частн}}. \quad (24)$$

Однородное уравнение (22) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial \theta^2} = 0. \quad (25)$$

Полагая

$$\Phi'_{n \text{ одн}} = R_n \cos m\theta, \quad (26)$$

следуя [2], получим

$$R_n = C_{00}^{(n)} + C_{01}^{(n)} \quad \text{при } m = 0, \quad (27)$$

$$R_n = \rho \left(C_{11}^{(n)} + C_{12}^{(n)} \ln \rho \right) \quad \text{при } m = 1, \quad (28)$$

$$R_n = \rho \left[C_{m1}^{(n)} \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) + C_{m2}^{(n)} \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho \right) \right] \quad \text{при } m \geq 2. \quad (29)$$

Частное решение неоднородного уравнения (21) имеет вид

$$\Phi'_{n \text{ частн}} = \frac{G_n}{2} (\rho^2 \ln \rho - \rho) + \frac{H_n}{16} \rho^2 \cos 4\theta. \quad (30)$$

Из (21), (24), (26), (27), (29), (30) найдем для

$$\sigma'_{\rho n} = C_{00}^{(n)} + \frac{1}{\rho} \left\{ \left[-3C_{41}^{(n)} + \sqrt{3}C_{42}^{(n)} \right] \cos \omega + \left[-\sqrt{3}C_{41}^{(n)} - 3C_{42}^{(n)} \right] \sin \omega \right\} \cos 4\theta + G_n \ln \rho - \frac{7}{8} H_n \cos 4\theta, \quad (31)$$

$$\sigma'_{\theta n} = \sigma'_{\rho \text{ одн}} + G_n (1 + \ln \rho) + \frac{1}{8} H_n \cos 4\theta, \quad (32)$$

$$\tau'_{\rho \theta n} = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} [-C_{41} \sin \omega + C_{42} \cos \omega] \sin 4\theta + \frac{H_n}{4} \sin 4\theta, \quad (33)$$

где $\omega = \sqrt{3} \ln \rho$.

Граничные условия на внутреннем контуре трубы имеют вид

$$\sigma'_{\rho 1} = 0, \quad \tau'_{\rho \theta 1} = 0 \quad \text{при } \rho = \alpha_1. \quad (34)$$

Из (31), (33), (34) получим

$$C_{00}^{(1)} + \frac{1}{\alpha_1} \left\{ C_{41}^{(1)} [-3 \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \omega_1] + C_{42}^{(1)} [\sqrt{3} \cos \omega_1 - 3 \sin \omega_1] \right\} \cos 4\theta = -G_1 \ln \alpha_1 + \frac{7}{8} H_1 \cos 4\theta, \quad (35)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\alpha_1} [-C_{41}^{(1)} \sin \omega_1 + C_{42}^{(1)} \cos \omega_1] = -\frac{1}{4} H_1, \quad (36)$$

где $\omega_1 = \sqrt{3} \ln \alpha_1$, в дальнейшем $\omega_n = \sqrt{3} \ln \alpha_n$.

Из (23), (35) следует

$$C_{00}^{(1)} = -G_1 \ln \alpha_1 = -\chi_1 \frac{a_1 + b_1}{2} \ln \alpha_1. \quad (37)$$

Для определения постоянных $C_{41}^{(1)}$, $C_{42}^{(1)}$ имеет место система уравнений

$$\begin{aligned} C_{41}^{(1)} \cdot M(\alpha_1) + C_{42}^{(1)} \cdot N(\alpha_1) &= \frac{7\alpha_1}{8} H_1, \\ C_{41}^{(1)} (-\sin \omega_1) + C_{42}^{(1)} \cos \omega_1 &= \frac{-\sqrt{3}\alpha_1}{48} H_1, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} M(\alpha_n) &= -3 \cos \omega_n - \sqrt{3} \sin \omega_n, \\ N(\alpha_n) &= \sqrt{3} \cos \omega_n - 3 \sin \omega_n, n = 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Согласно (37) имеет место

$$C_{41}^{(1)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1}, \quad C_{42}^{(1)} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_1}, \quad (40)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \omega_1 & \sqrt{3} \cos \omega_1 - 3 \sin \omega_1 \\ -\sin \omega_1 & \cos \omega_1 \end{vmatrix} = -3, \quad (41)$$

$$\Delta_{11} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 (13 \cos \omega_1 + \sqrt{3} \sin \omega_1), \quad \Delta_{21} = \frac{\alpha_1}{16} H_1 (13 \sin \omega_1 - \sqrt{3} \cos \omega_1). \quad (42)$$

Отметим, что аналогично (41) имеет место $\Delta_n = -3$.

Согласно (31), (32), (33), (39), (40), (41), (42) компоненты напряженного состояния σ'_{ij1} в первом слое определены, компоненты напряженного состояния $\sigma_{ijn}^{(0)}$ определены согласно (17), суммарное напряженное состояние определяется согласно (7).

2. Перейдем к определению напряженного состояния во втором и последующих слоях.

Из условий сопряжения

$$\sigma'_{\rho 2} = \sigma'_{\rho 1}, \quad \tau'_{\rho \theta 2} = \tau'_{\rho \theta 1} \text{ при } \rho = \alpha_2, \quad (43)$$

из (31), (33) найдем

$$\begin{aligned} C_{00}^{(2)} + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ C_{41}^{(2)} \left[-3 \cos \omega_2 - \sqrt{3} \sin \omega_2 \right] + C_{42}^{(2)} \left[\sqrt{3} \cos \omega_2 - 3 \sin \omega_2 \right] \right\} \cos 4\theta = \\ = \sigma'_{\rho 1}(\alpha_2) - G_2 \ln \alpha_2 + \frac{7}{8} H_2 \cos 4\theta - \\ - \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_2} \left[-C_{41}^{(2)} \sin \omega_2 + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2 \right] = \tau'_{\rho \theta}(\alpha_2) - \frac{1}{4} H_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (31), (44) получим

$$C_{00}^{(2)} = -G_2 \ln \alpha_2 - G_1 \ln \alpha_1. \quad (45)$$

Из (44), (31-42) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_2} \left[C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2) \right] &= \Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1), \\ \frac{4\sqrt{3}}{\alpha_2} \left[-C_{41}^{(2)} \sin \omega_2 + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2 \right] &= \Sigma_{\rho \theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1), \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\Sigma_{\rho 1}(\rho) = \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(1)} \left[-3 \cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega \right] + C_{42}^{(1)} \left[\sqrt{3} \cos \omega - 3 \sin \omega \right] \right), \quad (47)$$

$$\Sigma_{\rho\theta 1}(\rho) = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} \left[-C_{41}^{(1)} \sin \omega + C_{42}^{(1)} \cos \omega \right], \omega = \sqrt{3} \ln \rho.$$

Перепишем систему уравнений (46) в виде

$$C_{41}^{(2)} M(\alpha_2) + C_{42}^{(2)} N(\alpha_2) = P_2, \quad (48)$$

$$C_{41}^{(2)} (-\sin \omega_2) + C_{42}^{(2)} \cos \omega_2 = Q_2,$$

где

$$P_2 = \alpha_2 \left[\Sigma_{\rho 1}(\alpha_1) + \frac{7}{8} (H_2 + H_1) \right], \quad (49)$$

$$Q_2 = \frac{\alpha_2 \sqrt{3}}{12} \left[\Sigma_{\rho\theta 1}(\alpha_1) - \frac{1}{4} (H_2 + H_1) \right].$$

Из (40), (49) следует

$$\begin{aligned} C_{41}^{(2)} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_2} = -\frac{1}{3} (P_2 \cos \chi_2 - Q_2 \cdot N(\alpha_2)), \\ C_{41}^{(2)} &= \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = -\frac{1}{3} (P_2 \sin \chi_2 + Q_2 \cdot M(\alpha_2)), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 = -3.$$

Согласно (23), (30)-(32), (45)-(49) компоненты напряженного состояния σ'_{ij2} определены.

Аналогично методом математической индукции определяются компоненты напряжений σ'_{ijn} при условии, что компоненты σ'_{ijn-1} определены.

Аналогично (45) получим

$$C_{00}^{(n)} = -G_n \ln \alpha_n - G_n \ln \alpha_n - G_n \ln \alpha_n - \dots - G_1 \ln \alpha_1. \quad (51)$$

Из условий сопряжения решений

$$\sigma_{\rho n}^{(I)} = \sigma_{\rho n-1}^{(I)}, \tau_{\rho n}^{(I)} = \tau_{\rho n-1}^{(I)} \text{ при } \rho = \alpha_n, \quad (52)$$

из (31), (33), аналогичной (50), будем иметь

$$C_{41}^{(n)} M(\alpha_n) + C_{42}^{(n)} N(\alpha_n) = P_{n-1}, \quad (53)$$

$$C_{41}^{(n)} (-\sin \omega_n) + C_{42}^{(n)} \cos \omega_n = Q_{n-1},$$

где

$$P_n = \alpha_n \left[\Sigma_{\rho n}(\alpha_n) (\alpha_n) + \frac{7}{8} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right], \quad (54)$$

$$Q_n = \frac{\alpha_n \sqrt{3}}{12} \left[\Sigma_{\rho\theta n}(\alpha_n) (\alpha_n) - \frac{1}{4} (H_n + H_{n-1} + \dots + H_1) \right],$$

$$\Sigma_{\rho n}(\rho) = \frac{1}{\rho} \left(C_{41}^{(n)} \left[-3 \cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega \right] + C_{42}^{(n)} \left[\sqrt{3} \cos \omega - 3 \sin \omega \right] \right), \quad (55)$$

$$\Sigma_{\rho\theta n}(\rho) = \frac{4\sqrt{3}}{\rho} \left[-C_{41}^{(n)} \sin \omega + C_{42}^{(n)} \cos \omega \right].$$

Аналогично (43) получим

$$\begin{aligned}
C_{41}^{(n)} &= \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{3} (P_n \cos \omega - Q_n N(\alpha_n)), \\
C_{42}^{(n)} &= \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} = -\frac{1}{3} (P_n \sin \omega - Q_n M(\alpha_n)), \\
\Delta_1 &= \Delta_2 = \dots = \Delta_n = -3,
\end{aligned}
\tag{56}$$

где P_n , Q_n , (31) определены при известных значениях σ'_{ijn-1} .

Компоненты напряжений σ'_{ijn} определяются согласно (31–56).

Из (31–56) следует, что свойства анизотропии последовательно оказывают влияние на напряженное состояние последующих слоев: напряженное состояние в n -ом слое будет зависеть от свойств анизотропии всех предыдущих $n-1$ слоев.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зубчанинов, В. Г.* Сопrotивление материалов / В. Г. Зубчанинов. - Тверь : ТГТУ, 2005. - Кн. 2. - 352 с.

[2] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. - М. : Наука, 1978. - 208 с.

D. A. Ivlev

ABOUT THE LIMIT CONDITION OF LAYERED CIRCULAR CYLINDERS FROM ANISOTROPIC MATERIAL UNDER THE IMPACT OF INNER PRESSURE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Layered circle cylinders being under the impact of inner pressure are considered. It is supposed that each layer has its rectangular anisotropy characteristics. The algorithm of tension detection for free number of layers is defined.

Keywords: tensions, efforts, yield strength, anisotropy, layer

Ивлев Дмитрий Александрович

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: DAIVlev@mail.ru

Dmitriy Aleksandrovich Ivlev

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary