Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 75–78

Л. А. Максимова

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары

Аннотация. Рассматривается поле скорости перемещений в задаче о предельном состоянии идеальнопластического анизотропного слоя, сжатого жесткими шероховатыми плитами. Из вариационного уравнения определяются уравнения для определения скоростей перемещений. Даны выражения компонент скоростей перемещений, соответствующие напряженному состоянию.

Ключевые слова: напряжения, усилия, деформации, скорости перемещения, пластичность, предельное состояние, слой, жесткие плиты.

УДК: 537.374

1. В работе [2] даны статически определимые соотношения для анизотропного материала, не сводящиеся к условиям полного предельного состояния

$$\begin{array}{l} \sigma_x = \nu + 2An_1^2,\ \tau_{xy} = 2Fn_1n_2, \\ \sigma_y = \nu + 2Bn_2^2,\ \tau_{yz} = 2Gn_2n_3, \\ \sigma_z = \nu + 2Cn_3^2,\ \tau_{xz} = 2Hn_1n_3. \end{array} \tag{1}$$

$$\nu = \sigma - \frac{2}{3}\left(An_1^2 + Bn_2^2 + Cn_3^2\right),\ \sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right), \tag{2}$$

$$A, B, C, F, G, H - const,$$

$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$
где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – компоненты напряжения.

На основе соотношений (1–3) в [2] рассмотрена задача о сжатии пространственного слоя жесткими шероховатыми плитами при условиях изменения касательных напряжений по толщине слоя

$$\tau_{xz} = az + c_1,\ \tau_{yz} = bz + c_2,\ a, b, c_1, c_2 - const. \tag{3}$$

Дополним полученное решение для напряжений [2] построением поля скоростей перемещений.

Аналогично [1] рассмотрим функционал

$$\begin{array}{c} D = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - (\varepsilon_x An_1^2 + \varepsilon_y Bn_2^2 + \varepsilon_z Cn_3^2 + 2\varepsilon_{xy}Fn_1n_2 + 2\varepsilon_{yz}Gn_2n_3 + 2\varepsilon_{xz}Hn_1n_3) - \\ -\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \end{array} \tag{4}$$

где $\lambda,\ \nu$ – неопределенные множители Лагранжа.

Поступила 10.02.2010

Из условий экстремума функционала

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0, \tag{5}$$

из (4), (5) получим выражения (1).

Из условий экстремума функционала

$$\frac{\partial D}{\partial n_i} = 0, \tag{6}$$

из (4), (6) найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x A n_1 + \varepsilon_{xy} F n_2 + \varepsilon_{xz} H n_3 = \lambda n_1, \\ \varepsilon_{xy} F n_1 + \varepsilon_y B n_2 + \varepsilon_{yz} G n_3 = \lambda n_2, \\ \varepsilon_{xz} H n_1 + \varepsilon_{yz} G n_2 + \varepsilon_z C n_3 = \lambda n_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Имеет место условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \tag{8}$$

Условия (7), (8) являются искомыми соотношениями ассоциированного закона течения, соответствующими условиям предельного состояния (1).

Формулы Коши имеют вид

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = \tfrac{\partial n}{\partial x}, \varepsilon_y = \tfrac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \tfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial n}{\partial y} + \tfrac{\partial v}{\partial x}\right), \varepsilon_{yz} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial v}{\partial z} + \tfrac{\partial w}{\partial y}\right), \varepsilon_{xz} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial w}{\partial x} + \tfrac{\partial n}{\partial z}\right), \end{gathered} \tag{9}$$

где $u,\ v,\ w$ – компоненты скорости перемещения.

Следуя [3] положим

$$\begin{aligned} u &= m_1 x + p_1 y + \varphi_1(z), \\ v &= m_2 x + p_2 y + \varphi_2(z), \\ w &= m_3 x + p_3 y + q(z), \end{aligned} \tag{10}$$

где $m_i,\ p_i,\ q - const.$

Согласно (8), (9), (10) получим

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = m_1,\ \varepsilon_y = p_2,\ \varepsilon_z = q,\ m_1 + p_2 + q = 0, \\ \varepsilon_{xy} = \tfrac{1}{2}(m_2 + p_1),\ \varepsilon_{yz} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d\varphi_2}{dz} + p_3\right),\ \varepsilon_{xz} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d\varphi_1}{dz} + m_3\right). \end{gathered} \tag{11}$$

Из (7), (11) найдем

$$\begin{aligned} m_1 A n_1 + \tfrac{1}{2}(m_2 + p_1) F n_2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d\varphi_1}{dz} + m_3\right) H n_3 = \lambda n_1, \\ \tfrac{1}{2}(m_2 + p_1) F n_1 + p_2 B n_2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d\varphi_2}{dz} + p_3\right) G n_3 = \lambda n_2, \\ \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d\varphi_1}{dz} + m_3\right) H n_1 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{d\varphi_2}{dz} + p_3\right) G n_2 + q C n_3 = \lambda n_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Исключая величину λ, запишем уравнения (12) в виде

$$\begin{aligned} \tfrac{d\varphi_1}{dz} H(n_3^2 - n_1^2) - \tfrac{d\varphi_2}{dz} G n_1 n_2 = T_1, \\ \tfrac{d\varphi_1}{dz} H n_1 n_2 - \tfrac{d\varphi_2}{dz} G(n_3^2 - n_2^2) = T_2, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} T_1 = 2(\mathrm{C}q - m_1 A) n_1 n_3 - (m_2 + p_1) F n_2 n_3 + m_3 H(n_3^2 - n_1^2) + p_3 G n_1 n_2, \\ T_2 = 2(B p_2 - C q) n_2 n_3 + (m_2 + p_1) F n_1 n_3 + p_3 G(n_3^2 - n_2^2) - m_3 H n_1 n_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) найдем

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \frac{d\varphi_2}{dz} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta = HGn_3^3(2n_3^2 - 1),\\ \Delta_1 = G\left[T_2 n_1 n_2 - T_1(n_3^2 - n_2^2)\right],\ \Delta_2 = H\left[T_1 n_1 n_2 - T_2(n_3^2 - n_1^2)\right].\end{gathered} \tag{16}$$

Из (1) следует

$$n_1^2 = \frac{G}{2FH}\frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}},\ n_2^2 = \frac{H}{2FG}\frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}},\ n_3^2 = \frac{F}{2GH}\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}. \tag{17}$$

Из (3), (17) получим

$$\tau_{xy}^2\left(G^2\tau_{xz}^2 + H^2\tau_{yz}^2\right) - 2\tau_{xy}\left(FGH\tau_{xz}\tau_{yz}\right) + F^2(\tau_{xz}\tau_{yz})^2 = 0. \tag{18}$$

Из (18) найдем

$$\tau_{xy} = \frac{F\tau_{xz}\tau_{yz}\left[GH \pm \sqrt{G^2H^2 - \left(G^2\tau_{xz}^2 + H^2\tau_{yz}^2\right)}\right]}{G^2\tau_{xz}^2 + H^2\tau_{yz}^2}. \tag{19}$$

Используя соотношения (3), (17), (19), получим выражение величин $n_1,\ n_2,\ n_3$ как функций переменной z. Интегрируя выражения (15), получим значения функций $\varphi_1(z),\ \varphi_2(z)$, тем самым компоненты скорости перемещения и деформации (9), (10), (11) полностью определены.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* О соотношениях ассоциированного закона течения сжимаемых идеально-пластических сред. Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. - Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2005. - 357 с.

[2]*Максимова, Л. А.* О сжатии плиты из идеально-пластического анизотропного материала / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. - М. : Физматлит, 2003. - С. 520-523.

[3]*Максимова, Л. А.* О статически неопределимом состоянии идеальнопластического слоя, сжатого жесткими шероховатыми поверхностями / Л. А. Максимова // Проблемы механики : сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. - М. : Физматлит, 2003. - С. 524-530.

L. A. Maksimova

TO THE DETERMINATION OF DISPLACEMENT VELOCITY FIELD IN THE PROBLEM OF LIMITING STATE OF ANISOTROPIC LAYER

The Branch of Saint-Petersburg State Engineering and Economical University

Abstract. Displacement velocity field is considered in the problem of limiting state of ideal plastic anisotropic layer compressed by rigid rough slabs. The equations for determination of displacement velocity are defined from the variational equation. The expressions of displacement velocity components are given which correspond to tension.

Keywords: tensions, efforts, deformations, displacement velocities, plasticity, limiting state, layer, rigid slabs.

Максимова Людмила Анатольевна

доктор физико-математических наук, филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары

e-mail: maximova_ng@mail.ru

Maksimova Ludmila Anatolievna

Dr. Sci. Phys. & Math., Branch of Saint-Petersburg State Engineering and Economical University, Cheboksary